Córdoba 04-06/09/2024

XXVII Investigación en Educación Matemática

Edición: Natividad Adamuz-Povedano, Elvira Fernández-Ahumada, Nuria Climent Rodríguez y Clara Jiménez-Gestal.



Colaboran:

UNIVERSIDAD D CÓRDOBA

SEIEM

AYUNTAMIENTO DE CORDOBA

IMTUR INSTITUTO MUNICIPAL TURISMO DE CÓRDOBA

SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

CASIO División Educativa

RUBIO

XXVII SEIEM 2024

Imagen creada con Microsoft Image Generator.

Investigación en Educación Matemática

XXVII



UNIVERSIDAD D CÓRDOBA

Investigación en Educación Matemática

XXVII

Natividad Adamuz-Povedano, Elvira Fernández-Ahumada, Nuria Climent
y Clara Jiménez-Gestal (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Córdoba, 4, 5 y 6 de septiembre de 2024

Investigación en Educación Matemática

XXVII

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n 18071 Granada (España)

Dra. Natividad Adamuz-Povedano

Dra. Elvira Fernández-Ahumada

Dra. Nuria Climent Rodríguez

Dra. Clara Jiménez-Gestal

Comité Científico

Dra. Nuria Climent Rodríguez (Coord.)

Dra. Clara Jiménez Gestal (Coord.)

Dra. Natividad Adamuz Povedano

Dra. Berta Barquero Farràs

Dr. José María Marbán Prieto

Dr. Antonio M. Oller Marcén

Dra. Irene Polo Blanco

Dra. María D. Torres González

© de los textos: los autores

Diseño del logo: David Gutiérrez Rubio

Diseño cartel y portada: Enrique Martínez Jiménez

ISBN: 978-84-09-63702-7

ISSN: 2952-0045

Investigación en educación matemática (Internet)

Cítese como:

N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.) (2024). *Investigación en Educación Matemática XXVII*. SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

PRESENTACIÓN

El simposio anual de la Sociedad Española de Educación Matemática volvió a celebrarse en Córdoba después de diecinueve años. El área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Córdoba afrontó el reto con mucha ilusión, pero también sabiendo que las expectativas eran altas, puesto que se había dejado el listón muy alto la vez anterior.

Esa ilusión se torna en relativa preocupación cuando se toma conciencia de todo lo que conlleva la organización de un encuentro de estas características. Afortunadamente, enseguida se constata que *la maquinaria está bien engrasada*, no en vano, es la vigésimo séptima edición. La Junta Directiva de la SEIEM y el Comité local anterior hacen una labor de guía y acompañamiento que facilita enormemente el trabajo al que se enfrenta el nuevo equipo. Por ello, estas primeras palabras son de agradecimiento a la coordinadora del Comité Organizador de Logroño, Clara Jiménez Gestal, y a la presidenta de la Sociedad en ese momento, Nuria Climent, como cabeza visible de la Junta Directiva.

Comenzamos el Simposio con la sesión de jóvenes investigadores, coordinada por M.ª Dolores Torres. En ella, se desarrolló un taller sobre metodología de investigación en Educación Matemática que corrió a cargo de la profesora M.ª del Mar López, de la Universidad de Almería. Esa mañana se cerró el programa con la sesión de Formación y Docencia Universitaria en la que los profesores José María Marbán y Rafael Ramírez nos hablaron de la transferencia en el ámbito de la Educación Matemática.

La Mesa Inaugural del Simposio estuvo compuesta por el Sr. Rector Magnífico de la Universidad de Córdoba y compañero de área, Manuel Torralbo, el Ilmo. Sr. Alcalde de Córdoba, José María Bellido, la Sra. Presidenta de la SEIEM, Nuria Climent y la Sra. Decana de la Facultad de Ciencias de la Educación y Psicología, como coordinadora del Comité Organizador. En ella, ante todo, se dio una calurosa bienvenida a todas las personas participantes en el Simposio.

Esta inauguración estuvo seguida del **seminario I**, cuya coordinación estuvo a cargo de la profesora Teresa Blanco, de la Universidad de Santiago de Compostela. En él se puso de manifiesto que la investigación en enseñanza y aprendizaje de la geometría en España refleja un creciente dinamismo, impulsado por la combinación de teorías y la incorporación de nuevas metodologías y tecnologías, lo que plantea desafíos y oportunidades para mejorar los procesos

de enseñanza y aprendizaje en este ámbito. En él participaron el profesor José Manuel Gavilán de la Universidad de Sevilla, que nos presentó el potencial de la teoría de la comognición como marco teórico para la investigación en educación matemática, dada su amplia aplicabilidad. Describió las ideas teóricas básicas de esta teoría, que considera el aprendizaje como un proceso de participación en prácticas matemáticas y busca comprender cómo se desarrolla el discurso matemático en diferentes contextos educativos. La profesora Teresa Neto de la Universidade de Aveiro presentó una investigación sobre la promoción del razonamiento geométrico, centrándose en el razonamiento visoespacial. Finalizó el seminario la profesora Isabel Romero, de la Universidad de Almería, que nos habló de las potencialidades y retos del uso de la realidad virtual para la enseñanza de la geometría.

El **seminario II** corrió a cargo de los profesores Ángel Gutiérrez y Salvador Llinares y de la profesora Marianna Bosch. En él presentó una panorámica de la investigación en educación matemática realizada por la comunidad científica en este área en España.

El resto de las actividades programadas se repartieron entre comunicaciones (56), pósteres (94) y reuniones de los diferentes grupos de investigación. Como viene siendo habitual las sesiones de póster se hicieron coincidir con las pausas de café. En todas las actividades pudo observarse una gran afluencia. La Facultad de Ciencias de la Educación y Psicología se llenó de vida al acoger a las 249 personas que asistieron al evento, algo que no es muy habitual en un periodo sin clase. Como puede observarse en los números mostrados, esta edición ha sido un Simposio bastante exitoso en cuanto a número de participantes y, sobre todo, en cuanto a pósteres presentados. Por tanto, podemos decir que ha supuesto una oportunidad única para compartir conocimientos, experiencias y avances en nuestra disciplina.

Finalizo esta breve presentación con un enorme agradecimiento a todas mis compañeras y compañeros del Comité Local por su implicación con la organización del Simposio y por su buen hacer, así que GRACIAS José Carlos, Elvira, David, Noelia, Juan Carlos, Carmen, Enrique, Alexander, Manolo, Cristina y Mariloli.

En Córdoba, septiembre de 2024

Natividad Adamuz Povedano

Coordinadora del Comité Local del XXVII Simposio de la SEIEM

ÍNDICE

Seminario de investigación I: GEOMETRÍA EN EVOLUCIÓN: DESAFÍOS E INNOVACIÓN EN EL APRENDIZAJE 1

GEOMETRÍA EN EVOLUCIÓN: DESAFÍOS E INNOVACIÓN EN EL APRENDIZAJE .
Blanco, T. F. 3

LA INVESTIGACIÓN SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA DESDE LA TEORÍA DE LA COMOGNICIÓN
Gavilán-Izquierdo, J. M. 7

EXPLORAÇÃO DE TAREFAS GEOMÉTRICAS NA PROMOÇÃO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO - ANÁLISE DE PRÁTICAS DE INVESTIGAÇÃO
Neto, T. B., Breda, A. y Encarnação, A. 21

POTENCIALIDADES Y RETOS DEL USO DE LA REALIDAD VIRTUAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA
Romero Albaladejo, I. M. 33

Seminario de investigación II: MAPEANDO LA INVESTIGACIÓN ESPAÑOLA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA 49

COMUNICACIONES 95

UNA PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA DE LA CONTEXTUALIZACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
Albanese, V. 97

INVESTIGACIÓN DE DISEÑO PARA REFINAR UN TALLER FORMATIVO SOBRE PRÁCTICAS DE NOMBRAR Y EXPLICAR EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD
Alfonso, J. M. y Planas, N. 105

CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE FUNCIONES POR NIÑOS DE EDUCACIÓN INFANTIL
Anglada, L., Pinto, E., Cañadas, M. C. y Fuentes, S. 113

INICIACIÓN AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL A TRAVÉS DE TAREAS DESCONECTADAS SOBRE PATRONES

Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N. y Sánchez-Cruzado, C. 121

FINALIDADES DE LAS TAREAS DE PATRONES PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA EN COSTA RICA
Bolaños, H. y Moreno, A. 129

EL SENTIDO ESTRUCTURAL EN EL ESTUDIANTADO DE CARRERAS DE INGENIERÍA
Cancec-Murillo, G., Montoro, A. B., Flores, P. y Rojano, T. 137

MENTALIDAD DE CRECIMIENTO Y RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE 6.º DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Cárceles-Martínez, J. F., Monroy, F. e Ibáñez-López, F. J. 145

MODOS DE USO DE UN LIBRO DE TEXTO PARA ENSEÑAR CUADRILÁTEROS: UN ESTUDIO COMPARATIVO
Castillo, M. y Vargas, J. 153

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA
Castro-Rodríguez, E., Piñeiro, J. L. y Castro, E. 161

ANÁLISIS DEL NIVEL DE DEMOSTRACIÓN EN ALUMNADO DE SECUNDARIA Y BACHILLERATO: EVALUACIÓN INICIAL Y ENFOQUE EN EL USO DE LOS EJEMPLOS
Cerqueda-Santacreu, G., Colom-Torrens, Y. y Deulofeu-Piquet, J. 169

CONEXIONES Y RAZONABILIDAD EN EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO
De Gamboa, G., Caviedes, S. y Badillo, E. 177

EL SENTIDO ESTOCÁSTICO EN LOS SIMPOSIOS DE LA seiem (2010-2023)
De la Fuente, A. y Garrido-Martos, R. 185

NOTAS AL CAPÍTULO EN LAS PRIMERAS OBRAS DE LA COLECCIÓN ELEMENTAL INTUITIVA (REY PASTOR Y PUIG ADAM)
Dólera-Almaida, J. y Sánchez-Jiménez, E. 193

HERRAMIENTAS DIGITALES EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE FRACCIONES POR FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA
Embid, S. y Perdomo-Díaz, J. 201

SOBRE LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN EN ESPAÑA (SIGLO XIX)
Espín Buendía, J. G., López Cánovas, V. y Carrillo-Gallego, D. 209

RIQUEZA DE LOS PROBLEMAS INVENTADOS Y REFORMULADOS POR ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO
Espinoza, J., Lupiáñez, J. L y Segovia, I. 217

ERRORES ASOCIADOS AL USO DEL ESQUEMA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR UNA ESTUDIANTE CON AUTISMO
Fernández-Cobos, R., González-de Cos, L. y Polo-Blanco, I. 225

ANÁLISIS DE LOS ERRORES EN LA MEDIDA DE LONGITUDES EN EL MESOESPACIO EN EL CONTEXTO DE UN PROYECTO STEAM
Fraile-González, J., Méndez, M., Palop, B. y Belmonte, J.M. 233

DE LOS PATRONES CUANTITATIVOS AL PENSAMIENTO FUNCIONAL
Fuentes, S., Cañadas, M. C. y Anglada, L. 241

INTRODUCCIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES Y JAPONESES. UN ESTUDIO COMPARATIVO PRELIMINAR ORIENTADO A LA FORMACIÓN DE MAESTROS
García, F.J., Sierra, T.A. y Gascón, J. 249

RELACIÓN ENTRE SUPERFICIE Y VOLUMEN MEDIANTE MANIPULATIVOS Y REALIDAD VIRTUAL
García, M. M. y Romero, I. M. 257

REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS EN PAPEL DE ESTUDIANTES DE I5 SOBRE LA DESCOMPOSICIÓN DEL NÚMERO 7
García-Triana B., Edo M. y Albarracín, L. 265

TENDENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: EXPLORANDO LA RELACIÓN ENTRE EL PERFIL DEL PROFESORADO Y LA PERCEPCIÓN DE LA FORMACIÓN EN ENSEÑANZA SECUNDARIA
Garrido-Rojas, J., Moreno, A. y Ruiz-Hidalgo, J.F. 273

REFLEXIONES SOBRE EL DISEÑO DIDÁCTICO DE UN CICLO FORMATIVO PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS
Giacomone, B., Verón, M. A. y Beltrán-Pellicer, P. 281

¿CÓMO ENFOCAN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS LOS FORMADORES DE PROFESORES? EL PAPEL DEL PERFIL Y DE LA FORMACIÓN CONTINUA
Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L., Pascual, M. I., Contreras, L. C. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 289

CÓMO MIRAN PROFESIONALMENTE LOS FUTUROS MAESTROS EL VOCABULARIO, LAS EXPLICACIONES Y LOS EJEMPLOS EN LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES
González-Forte, J. M. y Planas, N. 297

ESTRATEGIAS INFORMALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN POR ESTUDIANTES CON AUTISMO
González-de Cos, L. , Goñi-Cervera, J. , Van Vaerenbergh, S. , Polo-Blanco, I. 305

PERSPECTIVA DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL SOBRE LA REALIZACIÓN DE ACTIVIDADES CONSTRUCTIVISTAS EN MATEMÁTICAS
Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. y Saá-Rojo, M. D. 313

TRANSICIÓN ENTRE SISTEMAS NUMÉRICOS PARA DESCRIBIR EL SENTIDO NUMÉRICO
Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L., Ruiz-Hidalgo, J. F. 321

TRANSFERENCIAS ENTRE DIMENSIONES ABSTRACTA, RECTA Y CONTEXTUAL DE SITUACIONES ADITIVAS CON NÚMEROS ENTEROS
Lijó Sánchez, R. Zapatera Llinares, A. y Quevedo Gutiérrez, E. 329

RECURSIVIDAD Y REVERSIBILIDAD EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DE LOS MOLDES DE BIZCOCHO
Marí, M., Barquero, B. y Bosch, M. 337

EL ROL DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA CONTINUIDAD EN SEGUNDO DE BACHILLERATO
Milanesio, B. y Burgos, M. 345

MIRADA PROFESIONAL DE LOS ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE EDUCACION SECUNDARIA SOBRE SITUACIONES DE ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS

Moreno, M., Santonja, P. y Llinares, S. 353

IDENTIFICANDO CONOCIMIENTOS PARA ENSEÑAR LOS PRIMEROS NÚMEROS Y OPERACIONES EN LA ESCUELA INFANTIL (0-3 años)
Olmos-Martínez, G., Alsina, Á. 361

INFLUENCIA DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE ESTIMACIÓN GEOMÉTRICAS
Orcos, L., Magreñán, A., Montejo-Gámez, J. 369

CONEXIONES ENTRE LA MEDICIÓN, CAMBIOS DE DIMENSIÓN, Y TOMA DE PERSPECTIVAS: UN ESTUDIO DEL RAZONAMIENTO EN MICRO-, MESO-, Y MACROESPACIOS
Ortiz-Rocha, Y.A., Sandoval, I. y Sacristán, A.I. 377

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES EN 5.º DE PRIMARIA: ESTRATEGIAS Y SIGNIFICADOS
Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Pinto, E. 385

ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD COGNITIVA DE UNA LECCIÓN SOBRE TABLAS ESTADÍSTICAS EN UN LIBRO DE TEXTO POR MAESTROS DE PRIMARIA
Pallauta, J.D. Vera, O. y Batanero, C. 393

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL FORMADOR DE MAESTROS PARA LA ENSEÑANZA DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL ESTADÍSTICO
Pascual, M.I., Rifo, L., Castilla, L. y Climent, N. 401

PERSPECTIVAS DE DOS FORMADORES SOBRE LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Pascual, Mª. I., Codes, M., Martín-Díaz, J. P. y Contreras, L. C. 409

JUSTIFICACIONES DE ALUMNOS DE QUINTO DE PRIMARIA EN TAREAS CON DIFERENTES CONTEXTOS
Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. 417

NIVELES DE COMPRENSIÓN DE TABLAS Y GRÁFICOS ENTRE ESTUDIANTES DE QUINTO Y SEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Pérez-Martos, M. C., López, M. A., Brizuela, B. M. y Moreno, A. 425

CARACTERIZANDO EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DEL FORMADOR DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS
Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes, M. Á. 433

COMPETENCIA DIAGNÓSTICA DE FUTUROS MAESTROS: IDENTIFICANDO ERRORES A PARTIR DE UNA SITUACIÓN DE ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA
Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. 441

ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS EN TORNO A LOS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS EN EDUCACIÓN INFANTIL
Rada-Cimorra, M., Hidalgo-Herrero, M. y Sierra, T. Á. 449

LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA A TRAVÉS DEL DÍA INTERNACIONAL DE LA MUJER
Raya-Fernández, Á., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T. 457

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL FORMADOR DE MAESTROS EN UNA SESIÓN DE INTRODUCCIÓN A GEOGEBRA
Rodríguez-Segarra, S., Contreras, L.C. y Climent, N. 465

GAMIFICACIÓN EN MATEMÁTICAS: ESTUDIO DE PROPUESTAS DE AULA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA
Rodríguez-Barreto, C., García-Alonso, I 473

RELACIONES ENTRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE LAS CARACTERISTICAS DEL APRENDIZAJE Y DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A PARTIR DEL USO DE EJEMPLOS TRANSPARENTES EN LA ECUACIÓN CUADRÁTICA
Sánchez-Acevedo, N., Segura, C., Contreras, L. C. y Sosa, L. 481

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO/A EN UNA TAREA SOBRE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL
Santaengracia, J. J., Aguilar-González, Á., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 489

ARGUMENTACIÓN PRÁCTICA SOBRE AMBIGÜEDADES EN LA VALORACIÓN DEL DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE FUNCIONES
Sol, T., Breda, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G. 497

USO DE LAS UNIDADES DE ÁREA EN PROBLEMAS FORMULADOS POR FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA
Sosa-Martín, D., García-Alonso, I. y Bruno, A. 505

PRÁCTICAS Y SUSTENTOS TEÓRICOS EXPRESADOS POR DOS FORMADORES DE PROFESORES EN DOS CONTEXTOS ACADÉMICOS DISTINTOS. ELEMENTOS COMUNES
Sosa, L., Contreras, L.C. y Sánchez-Acevedo, N. 513

VARIACIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PARA PROMOVER APRENDIZAJE. UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES EN FORMACIÓN INICIAL
Tizón-Escamilla, N., Burgos, M. y Chaverri, J. 521

COMPRENSIÓN DE LA ALEATORIEDAD POR MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL EN FORMACIÓN
Vera, O., Batanero, C. y Pallauta, J.D. 529

MIRAR PROFESIONALMENTE LOS MATERIALES CURRICULARES: COHERENCIA ENTRE INTERPRETAR Y DECIDIR
Zorrilla, C., González-Forte, J. M., Ivars, P. y Fernández, C. 537

PÓSTERES 545

ARGUMENTOS INFORMALES PARA EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN FORMAL EN MATEMÁTICAS
Acosta-Hernández, C., Camacho-Machín, M. y Marrero, I. 547

IDENTIFICACIÓN DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN PROBABILIDAD POR FUTUROS DOCENTES
Albanese, V., Burgos, M. y López-Martín, M.M. 548

ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE RESOLUCIONES DE UN PROBLEMA DE PORCENTAJES
Contreras, D.A. 549

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE MAESTROS EN FORMACIÓN EN EL DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PARA ALUMNADO CON TEA
Álvarez-Cándano, C., Giadas, P. y Alonso-Castaño, M. 550

EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN PROYECTOS STEAM: UN ESTUDIO DE CASOS
Anasagasti, J., Landa, J. y Berciano, A. 551

PORTAL 2: UNA APROXIMACIÓN LÚDICA A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Antequera-Barroso, J.A., Cáceres-García, M.J., Sánchez-Barbero y B., Carmona-Medeiro, E. 552

USO DE LA ASTRONOMÍA PARA FOMENTAR LA FUNCIONALIDAD DE LA MEDIDA EN EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Arjona-Aranda, G. y García-Gil, A.D. 553

UN ESTUDIO SOBRE REPRESENTACIONES de fracciones EN EDUCACIÓN SECUNDARIA
Armas, Y., Marrero, I. y Bruno, A. 554

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LOS GRADOS EN MAGISTERIO EN EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA
Arnal-Palacián, M. 555

HABILIDADES METACOGNITIVAS DEL PROFESORADO DE INFANTIL EN FORMACIÓN EN UNA ASIGNATURA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Arnal-Palacián, M., Kusaka, S.. y Oller-Marcén, A.M. 556

DESEMPEÑO DE LOS CENTROS EDUCATIVOS EN EL ÁMBITO STEAM: ANÁLISIS DE LA PERCEPCIÓN DEL PROFESORaDO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Arrieta, N., Sagarduy, A. y Bilbao, I. 557

PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO SOBRE EL USO DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS EN UN PROYECTO STEAM
Arrieta, I., Baro, I. e Izagirre, A. 558

DESCRIPCIÓN DE CASO DEL USO DE LAS DISTINTAS REPRESENTACIONES DE los NÚMEROS Racionales EN QUINTO DE PRIMARIA
Baro, I., Izagirre, A. y Arrieta, I. 559

PUENTES ENTRE INVESTIGACIÓN Y TRANSFERENCIA: EL PROYECTO LABINQUIRY EN SECUNDARIA
Barquero, B., Beltrán-Pellicer, P., López-Serentill, P., Marí, M. y Vásquez, S. 560

REPRESENTACIONES GRÁFICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN TERCERO DE PRIMARIA
Benet-Vidal, A., López-Iñesta, E., Sanz, María T., García-Costa, D. y Grimaldo, F. 561

DIFICULTADES EN LA APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN EL CONTEXTO DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA EN REGISTRO GRÁFICO
[a]Bermejo-Luna, M. y Sánchez-Matamoros García, G. 562

LA FORMA GEOMÉTRICA EN EL DIBUJO INFANTIL
Bilbao, I., Sagarduy, A. y Arrieta, N. 563

PERCEPCIONES DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS SOBRE LA ENSEÑANZA A ESTUDIANTES CON AUTISMO
Bolado-Peña, A., Van Vaerenbergh, S. y González-Bernal, J. 564

ANÁLISIS DE LA DISCUSIÓN EN EL AULA SOBRE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE FERMI EN GRUPO
Brunet-Biarnes, M. y Albarracín, L. 565

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN EN PROBLEMAS DE FRACCIONES EN EDUCACIÓN SECUNDARIA
Caballero-Carrasco, A., Galán-Corbacho, E., Casas-García, L. M. y Soto-Ardila, L. M. 566

UTILIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN SITUACIONAL EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO REALISTA
Cáceres-García, M.J., Sánchez-Barbero, B. y Antequera-Barroso, J.A. 567

ESTRATEGIAS DE ASOCIACIÓN DE ECUACIONES A PROBLEMAS VERBALES
Campos, C., González-Calero, J. A., Arnau, D. y García-Moreno, M. A. 568

ESTUDIO SOBRE LA EFICACIA DE LA DURACIÓN DE SESIONES ORIENTADAS AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA FORMACIÓN DOCENTE
Campos, C., del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., González-Calero, J. A. 569

EVALUACIÓN DE LAS DISPOSICIONES DE PENSAMIENTO CRÍTICO ESTADÍSTICO GRÁFICO
Casas-Rosal, J.C., León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D. y Madrid, M.J. 570

NOCIÓN DE ÁREA EN LAS DIRECTRICES CURRICULARES CHILENAS
Caviedes, S, Pallauta, J., Elgueda-Ibarra, M. y Marquéz, M. 571

UN PROBLEMA DE GENERALIZACIÓN EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA DESDE LA INCLUSIÓN
Chico, A., Robotti, E., Climent N. y Gómez-Hurtado, I. 572

DISCONTINUIDADES EN EL PROCESO DE FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FUTUROS MAESTROS
Chico, A., Martín-Díaz, J.P., Pascual, I. y Montes, M. 573

CONSTRUYENDO CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO E INTEGRADO EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL
Codes, M., Morón, M. C. y Trabajo, M. 574

LA COMPRENSIÓN ESTADÍSTICA TREINTA AÑOS DESPUÉS
Dorta, N. y Hernández, A. 575

CRITERIOS DE EVALUACIÓN PARA LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE EDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA ESPAÑOLA
Elgueda-Ibarra, M., Gea, M. M. y Stuardo-Aguayo, A. 576

IMPORTANCIA DEL LENGUAJE EN EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE EDUCACIÓN INFANTIL ENSEÑANDO GEOMETRÍA
Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M.C.[a] y Montes, M.[b] 577

COMPRENDIENDO LA FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA DEL FUTURO PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA ORDENANDO LAS FICHAS DE UN DOMINÓ
Escudero-Ávila, D., Joglar, N. y Cid-Cid, A. 578

CREENCIAS DEL PROFESORADO SOBRE LA DISCALCULIA
Espina, E., Marbán, J. M., y Maroto, A. I. 579

SUMAS Y DIFERENCIAS DE LEIBNIZ: ANTESALA DE LA INTEGRAL
Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M.T. y Fuertes-Prieto, M.A. 580

SEGURIDAD EN LAS REPUESTAS A TAREAS DE ESTIMACIÓN POR PARTE DE ALUMNADO DE SECUNDARIA SEGÚN SU GÉNERO
Fariña, M. y Bruno, A. 581

CONFLICTOS COMOGNITIVOS EN EL DISCURSO DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR EN TAREAS CON SÓLIDOS NO PROTOTÍPICOS
Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Martín-Molina, V. 582

REFLEXIONES SOBRE MATERIALES Y DISEÑOS INSTRUCCIONALES PARA INTRODUCIR LA SUMA DE FRACCIONES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS
Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Gutiérrez-Álamo-Rodríguez, P. y Méndez-Coca, M. 583

MEJORANDO LAS CAPACIDADES DE VISIÓN Y RAZOMANIENTO ESPACIAL DE LOS FUTUROS MAESTROS
Fuertes Prieto, M.A., Rodríguez Sánchez, M., Alonso Ruano, B.M. y Rodríguez Muelas, D. 584

ESTUDIO EXPLORATORIO DE LA CONFIANZA Y RENDIMIENTO DE FUTUROS MAESTROS RESOLVIENDO PROBLEMAS DE FERMI: IN SITU VS ASISTIDOS POR IA
Gallart, C. Segura, C., Albarracín, L. y Ferrando, I. 585

DISEÑO DE UN ESTUDIO SOBRE EL IMPACTO DEL FORMATO Y EL CONTEXTO EN ASPECTOS COGNITIVOS Y AFECTIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
García-Cerdá, C., Ferrando, I., Segura, C. 586

UN ESTUDIO PILOTO SOBRE EL USO DE SISTEMAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA COMO UNA HERRAMIENTA DE ENTRENAMIENTO PARA FUTUROS PROFESORES
García-Bayona, I., Pérez-Suay, A. y Ersari, E. 587

PROCESOS DE PLANIFICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA
García-Marques, M. E., Arnau, D. y González-Calero, J. A. 588

ANÁLISIS DE LA ROTACIÓN MENTAL EN ALUMNADO DE EDUCACIÓN INFANTIL: UNA COMPARATIVA DE CUATRO TEST
Garcia-Marques, M. E., Diago, P. D. y Arnau, D. 589

THINKING CLASSROOMS: PERCEPCIÓN DEL ALUMNADO EN FORMACIÓN INICIAL DOCENTE
Gómezescobar, A., De la Fuente, A., Garrido-Martos, R., Benito, A. y Morales, L. 590

USO DEL REKENREK PARA ENSEÑAR HABILIDADES NUMÉRICAS A UN ESTUDIANTE CON AUTISMO
González-de Cos, L., Polo-Blanco, I. , Bruno, A., Tregón, N y Goñi-Cervera, J. 591

TAREAS DE COMPARACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE LA SECUENCIA CONCRETA-REPRESENTACIONAL-ABSTRACTA EN UNA NIÑA CON AUTISMO
Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I. , Bruno, A., Tregón, N. y González-de Cos, L. 592

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS E IDENTIFICACIÓN DE ERRORES DE LOS MAESTROS EN FORMACIÓN EN LA LECTURA DE DIAGRAMAS DE BARRAS
Guerra-Ones, V., Perdomo-Díaz, J., Torres-González, M.D. y Almeida-Cabrera, R. 593

ESTRUCTURAS DE COMPROMISO DE DOCENTES DURANTE LA CREACIÓN DE UN CÓDIGO DE SEGURIDAD
Irigoyen-Carrillo, M. E., González-Astudillo, M. T. y Alvarado-Monroy, A. 594

WHICH ONE DOESN´T BELONG?: DESARROLLANDO COMPETENCIAS PROFESIONALES DEL FUTURO PROFESORADO DE INFANTIL
Joglar-Prieto, N., Domínguez, E., Murcia, J. A., Méndez, M., Ramírez-García, M. y Cid, A. I. 595

MTSK EN EDUCACIÓN INFANTIL: CONOCIMIENTO PRETENDIDO PARA EL DISEÑO DE TAREAS FORMATIVAS
Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M., Liñán-García, M.M. y Muñoz-Catalán, M.C. 596

EVALUACIÓN DE LAS ACTITUDES Y ANSIEDAD HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ALUMNADO DE UN IES DE CASTELLÓN: ESTUDIO DE CASO
Juan-Gallego, M., Santágueda-Villanueva, M. y Juan-Verdoy, P. 597

PERCEPCIONES DEL ALUMNADO SOBRE APRENDIZAJE COOPERATIVO Y AUTORREGULACION EN CONTEXTOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO DE CASO
Landa, J. , Berciano, A. y Marbán, J. M. 598

LA PROPORCIONALIDAD EN UN PROYECTO STEAM: UN ESTUDIO DE CASO
Landa, J. , Anasagasti, J. y Berciano, A. 599

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN POR UN ALUMNO CON AUTISMO
Laso-Munitis, L., González-de Cos, L., Fernández-Cobos, R. y Polo-Blanco, I. 600

INSTRUMENTO PARA VALORAR LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA
Liviano-Carmona,V. y Caballero-Carrasco, A. 601

FACETA COGNITIVA EN UNA TAREA PROAFECTIVA PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE LOS ALGORITMOS
Lois, C., Sequeiros, P. G., Núñez-García, C. y Salgado, M. 602

DESCUBRIENDO LAS PERMUTACIONES EN 6.º: UN ESTUDIO EN EL CONTEXTO EDUCATIVO DEL MÉTODO DE HEJNÝ
López Centella, E. 603

ESTRATEGIAS Y ERRORES DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN UN PROBLEMA VERBAL CON FRACCIONES
López Centella, E. 604

UN ESTUDIO DEL IMPACTO DE LA COMPRENSIÓN LECTORA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS
López-Iñesta, E., Sanz, Maria T., García-Costa, D., Grimaldo, F., Santágueda, M., Álvarez, E., Paniagua, S. y Mocholí, P 605

GEOMETRÍA APLICADA en la enseñanza elemental de las niñas en el siglo XIX: la cartilla de Luciana Casilda Monreal
Madrid, M.J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J.C. y Maz-Machado, A. 606

TRANSFERENCIA ANALÓGICA EN PROBLEMAS DE PROBABILIDAD BAYESIANA CON FUTUROS DOCENTES
Mallart-Solaz, A. 607

ESTUDIO DE CASOS CRUZADOS: LA DISONANCIA COGNITIVA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS
Marbán, M., Marbán, J.M. y Maroto, A. 608

ACTIVIDAD CEREBRAL EN ESCOLARES CON SUMAS CRONOMETRADAS: Un ANÁLISIS EXPLORATORIO CON EEG
Marbán, J. M., García-Monge, A., Santamaría-Vázquez, E. y Marcos-Martínez, D. 609

ANÁLISIS DE PROPUESTAS DE PROBLEMAS REFORMULADOS POR FUTUROS DOCENTES DE SECUNDARIA
Martín-Ferraz, A. y Hernández, A. 610

PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO SOBRE SU CONOCIMIENTO Y FORMACIÓN EN DISCALCULIA
Meaños-Asensi, R. 611

PERCEPCIONES DE LOS DOCENTES SOBRE LA PRÁCTICA EDUCATIVA EN RELACIÓN CON SU EXPERIENCIA DOCENTE
Mohamed-Chemlali, N., Hossein-Mohand, Ha., Hossein-Mohand, Ho., Osuna-Acedo, S. 612

FUTUROS DOCENTES FRENTE AL SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EL CURRÍCULO: UNA EXPERIENCIA DE LECTURA ACTIVA
Muñoz-Escolano, J. M., Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. 613

EL CRDM-GUY BROUSSEAU: UN ESPACIO PARA LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
Orús, P., Gregori, P. y Santágueda-Villanueva, M. 614

ESPERANZA MATEMÁTICA EN Educación SECUNDARIA: Análisis exploratorio
Oval-Trujillo, Z., García-Alonso, I. 615

ANÁLISIS EMOCIONAL DE TRES FORMACIONES PARA DOCENTES DE MATEMÁTICAS
Palop, B. y Maestre, N. A. 616

CREANDO MATEMÁTICAS EN EL TALLER
Pérez-Rodríguez, M. , Álvarez Díaz, B. y Conde-Lago, J. 617

DESARROLLO DE CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE MAGISTERIO ANTE TAREAS MATEMÁTICAS LUDIFICADAS
Piñero Charlo, J.C., Canto López M.C. y Manchado Porras, M. 618

ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES DE MAGISTERIO EN TAREAS DE ALGORITMIZACIÓN DE PATRONES: UN ESTUDIO DE CASO
Piñero Charlo, J.C., Costado Dios, M.T. y Alegre Salguero, M.P. 619

TAREAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS
Plazas, R., Climent, N. y Contreras, L. 620

UNA COMPARATIVA DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA EN ESPAÑA Y PORTUGAL
Ramírez, M., García, P., Contreras, L.C. y Climent, N. 621

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL. TRATAMIENTO DESCONECTADO EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Rodríguez Muelas, D., Rodríguez Sánchez, M., Fuertes Prieto, M.A. y Alonso Ruano, B.M. 622

DISEÑO DE HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO especializado EN LA ENSEÑANZA DE LAS DERIVADAS EN VARIAS VARIABLES
Rojas-Celis C y Cáceres M. J. 623

EXPERIENCIAS ESCOLARES Y DISEÑO DE TAREAS PROFESIONALES
Rosell, C., Vanegas, Y. y Estrada, A. 624

DESARROLLO DE HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN EN GEOMETRÍA MEDIANTE MANIPULATIVOS IMPRESOS EN 3D
Rotger-García, L., Ruíz-González, A. y Ribera-Puchades, J. M. 625

ANÁLISIS DEL CICLO DE MODELIZACIÓN EN UN CONTEXTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA 3D
Rotger-García, L., Gilardi, L., Ribera-Puchades, J. M., Nolla, A. y Benito, A. 626

EXPLORANDO EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN MATEMÁTICAS: EXPERIENCIAS DESCONECTADAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Ruano-Cano, A., Sánchez-Cruzado, C., Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compaña, T.ª, Raya-Fernández, A. 627

EXPLORANDO LA DISTRIBUCIÓN DE LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ANÁLISIS DESDE UNA PERSPECTIVA GLOBAL
Sagarduy, A., Arrieta, N. y Bilbao, I. 628

UNA SECUENCIA DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS ELEMENTALES DE LA TEORÍA DE GRAFOS
Sánchez-Fabián, L. y González, A. 629

PROGRAMANDO ROBOTS DE SUELO CON ALUMNADO DE 2.º Y 3.º DE PRIMARIA: ¿SINERGIA ENTRE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y ROTACIÓN MENTAL?
Sánchez-López, M. , González-Calero, J.A. , Del Olmo-Muñoz, J. 630

DEL CONOCIMIENTO ADQUIRIDO AL CONOCIMIENTO EN USO
Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Valls, J. y Aráuz, D.F. 631

UNA PROPUESTA PARA TRABAJAR LA SECUENCIACIÓN Y EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN UN ENTORNO VIRTUAL
Sanz-Herranz, H. y Cuida, A. 632

CONTRIBUCIONES A LA FORMACIÓN PERMANENTE DE LOS PROFESORES DE PRIMARIA MEDIANTE SU PARTICIPACIÓN EN ESCENARIOS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA
Silva, G. H. G. y Ponte, J. P. 633

UNA PROPUESTA DE CURSOS DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO PARA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA
Silva, G. H. G. y Santiago, M. F. M. 634

CONTENIDOS DE LOS LIBROS DE MATEMÁTICAS SM PARA EDADES DE 13 Y 14 AÑOS EN ESPAÑA DESDE 1970 HASTA 2020
Soto-Uruñuela, M.P. 635

UTILIDAD Y AGRADO DE LAS MATEMÁTICAS. EL DILEMA DE FUTURAS/OS MAESTRAS/OS
Sotos-Serrano, M. 636

COMPRENSIÓN DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL POR FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Stuardo-Aguayo, A., Gea, M. M., Begué, N. y Elgueda-Ibarra, M. 637

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN UNA INTERVENCIÓN CON EXPLODING DOTS
Suárez-González, C., Santaengracia, J. J. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 638

EL IMPACTO DEL LENGUAJE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON ERROR DE INVERSIÓN
Ventura-Campos, N., Moreno-Rus, A., Santamarta, V., Garcia-Segarra, P. y Falomir, Z. 639

LA DIFUSIÓN DE RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DE LA ESTADÍSTICA: el proyecto labinquiry
Verbisck, J., Fernández-Ruano, L., Markulin, K., Comas-Cufí, M. y Bosch, M. 640

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: GEOMETRÍA EN EVOLUCIÓN: DESAFÍOS E INNOVACIÓN EN EL APRENDIZAJE

Coordina: Teresa Fernández Blanco

Ponentes:

- Teresa Bixirão Neto (Universidade de Aveiro): A exploração de tarefas geométricas na promoção do raciocínio geométrico – Análise de práticas de investigação
- Isabel María Romero Albadalejo (Universidad de Almería): Potencialidades y retos del uso de realidad virtual para la enseñanza de la geometría
- José María Gavilán Izquierdo (Universidad de Sevilla): La Investigación sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría desde la Teoría de la Comognición

GEOMETRÍA EN EVOLUCIÓN: DESAFÍOS E INNOVACIÓN EN EL APRENDIZAJE

Evolving Geometry: challenges and innovation in learning

Blanco, T. F.

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

La introducción al seminario se inicia con una visión general de las aportaciones de la geometría a los simposios de la SEIEM. El seminario presenta tres perspectivas sobre la adaptación de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría a un panorama educativo en constante evolución. Las dos primeras perspectivas muestran, respectivamente, cómo se están adaptando teorías de otras disciplinas y cómo se están integrando varios marcos teóricos en la Didáctica de la Matemática para comprender mejor cómo aprenden los estudiantes y sus dificultades. La tercera perspectiva, centrada en las nuevas tecnologías, particularmente en la emergente realidad virtual, ofrece a los estudiantes la oportunidad de visualizar y manipular figuras geométricas en tiempo real, permitiendo enfoques más dinámicos e interactivos.

Palabras clave: *geometría, aprendizaje, enseñanza, tecnología, didáctica*.

Abstract

The introduction to the seminar begins with an overview of the contributions of geometry to the SEIEM symposiums. The seminar presents three perspectives on adapting the teaching and learning of geometry in a constantly evolving educational landscape. The first two perspectives show, respectively, how theories from other disciplines are being adapted and how various theoretical frameworks are being integrated into Mathematics Didactics to understand better how students learn and their difficulties. The third perspective, focused on new technologies, particularly emerging virtual reality, allows students to visualize and manipulate geometric figures in real-time, allowing for more dynamic and interactive approaches.

Keywords: *geometry, learning, teaching, technology, didactics.*

INTRODUCCIÓN

De la Torre (2013) indicaba, en el tercer y último seminario enfocado en la geometría dentro de la SEIEM celebrado en 2013, que la investigación en didáctica de la geometría no estaba entre las agendas de investigación más activas en ese momento, tanto a nivel internacional como nacional. Sin embargo, apuntaba que en los últimos años se esperaba un creciente interés y un ligero aumento en las publicaciones en este campo de investigación, sobre todo debido a la incorporación de recursos tecnológicos y software de geometría dinámica.

Este crecimiento en el interés por la geometría se refleja en el último estudio del ICMI (ICMI Estudio 26, 2024) en el que se señala que la educación en geometría está en su período más emocionante y de más rápido avance de los últimos 100 años. En este estudio se abordan los avances y desafíos actuales en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, con especial atención a cómo ha cambiado el panorama en las últimas tres décadas desde el último estudio dedicado a la geometría.

En esta presentación al seminario se hará un breve recorrido por las aportaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría a lo largo de todos los simposios de la SEIEM desde sus

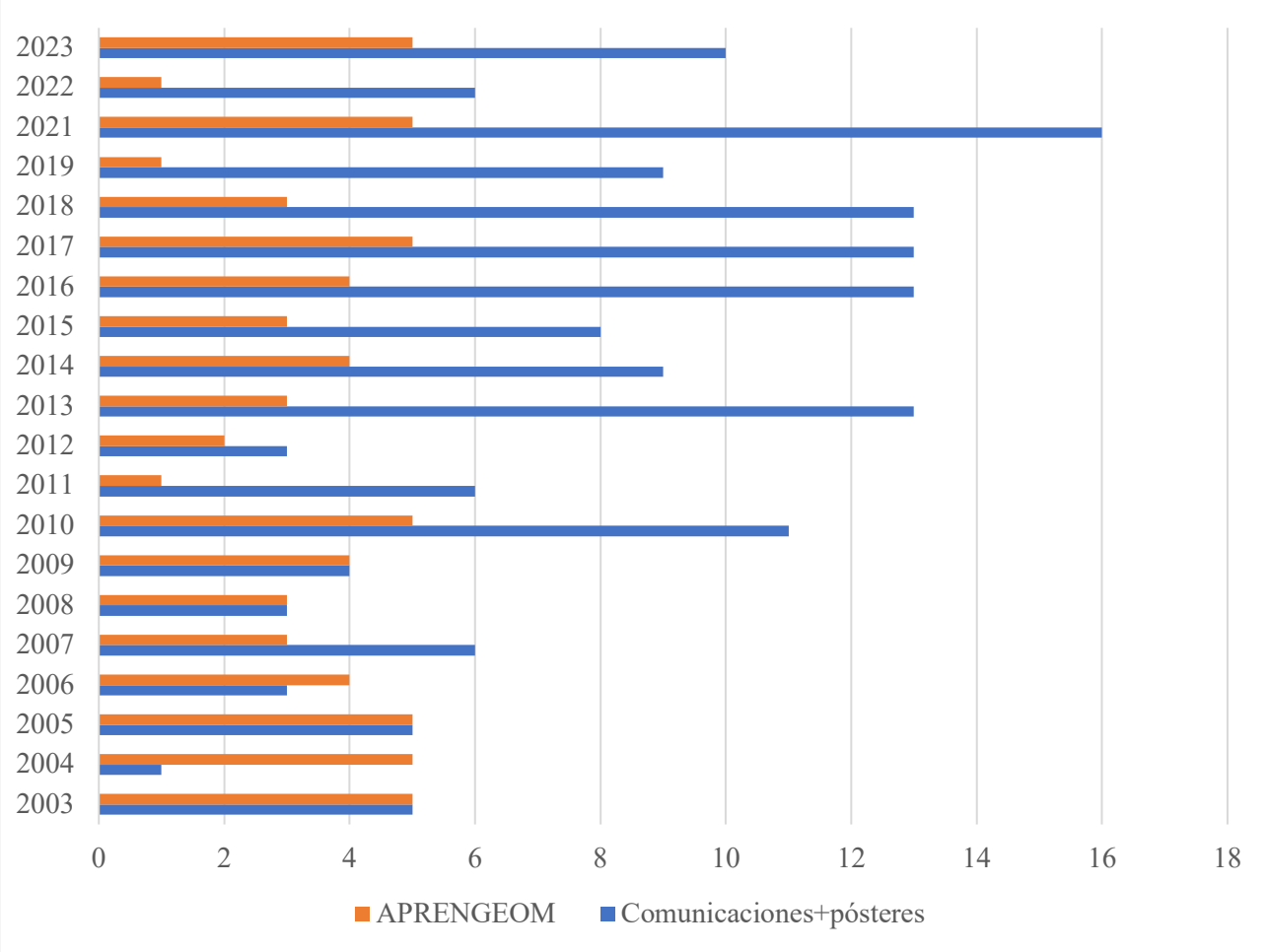
Blanco, T. F. (2024). Geometría en evolución: desafíos e innovación en el aprendizaje. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 3-5). SEIEM.

inicios. Seguidamente se presentarán las tres ponencias que conforman este seminario y que pretenden ser un pequeño ejemplo de la evolución e innovación que se está llevando en este campo.

EVOLUCIÓN DE LAS APORTACIONES DE LA GEOMETRÍA A LA SEIEM

En el Gráfico 1 se ofrece una visión general de la evolución de la investigación en enseñanza y aprendizaje de la geometría en los simposios de la SEIEM desde 2003, año en el que se incorporaron a su estructura espacios para comunicaciones. El gráfico solo considera las comunicaciones, pósteres y las aportaciones dentro del grupo APRENGEOM (Aprendizaje de la Geometría). No se contemplan las aportaciones a los otros grupos de investigación de la sociedad a pesar de que algunos de ellos tienen un alto porcentaje de trabajos centrados en contenido geométrico.

Gráfico 1. Aportaciones de la geometría a los simposios de la SEIEM
Fuente: elaboración propia.



Gran parte de las comunicaciones presentadas en los simposios de la SEIEM y las investigaciones incipientes propuestas en el grupo APRENGEOM han culminado en artículos. En Barquero et al. (2022), con motivo del PME celebrado en Alicante, se revisa la producción enfocada en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría que ha sido publicada en revistas de impacto. Los resultados muestran que la producción empieza a ser relevante a partir de 2016, confirmando así el creciente interés y la relevancia de este campo en la investigación educativa

INTERVENCIONES DEL SEMINARIO

En la selección de los temas para las ponencias he tenido en cuenta seleccionar temas novedosos o poco explorados para proporcionar una perspectiva fresca y desafiante. En ese sentido se conforma el seminario con las tres ponencias que se describen brevemente en los siguientes párrafos.

La ponencia de José María Gavilán aborda el desafío de aplicar la teoría sociocultural de la comognición de Anna Sfard al aprendizaje de las matemáticas. Según esta teoría, el aprendizaje matemático se entiende a partir de los cambios en el discurso matemático, enfocados en las cuatro propiedades del discurso: el uso de palabras, los mediadores visuales, las narrativas y las rutinas. Este enfoque ha llevado a este autor y su equipo a caracterizar el discurso de los estudiantes para maestro de Educación Primaria al definir y seleccionar definiciones de cuerpos geométricos, así como a estudiar la aparición de posibles conflictos comognitivos en el discurso como fuentes de aprendizaje.

En la segunda ponencia, Teresa Neto presenta un ejemplo práctico de cómo la combinación e integración de perspectivas teóricas en el ámbito del razonamiento geométrico puede promover la caracterización de la visualización y el razonamiento espacial de los futuros profesores de matemáticas. Primero, Neto compara los marcos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y el Desarrollo del Razonamiento Geométrico (DRG). Luego, combina estos dos marcos para analizar una tarea sobre simetría incluida en un cuestionario sobre razonamiento visoespacial aplicado a futuros docentes angoleños.

En la tercera ponencia, Isabel Romero destaca el potencial de la realidad virtual para transformar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Su equipo ha llevado a cabo experimentos educativos con el software NeoTrie VR en diversos niveles educativos, analizando los beneficios y desafíos encontrados. Este software es un sistema de geometría dinámica en 3D de realidad virtual inmersiva para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, desarrollado en la Universidad de Almería desde 2017. La autora subraya que esta tecnología mejora la motivación, la confianza, la visualización, las habilidades espaciales y el compromiso interactivo de los estudiantes.

CONCLUSIÓN

El recorrido por las contribuciones a los simposios de la SEIEM y las publicaciones de los últimos años en revistas de impacto revela el creciente dinamismo de la investigación en geometría dentro del campo de la educación geométrica en nuestro país. Esta evolución continua refleja el impacto significativo de nuevas metodologías y tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

En este seminario se destaca el potencial que emerge de la combinación de teorías y de la incorporación de modelos teóricos de otras áreas del conocimiento, como evolución de una única perspectiva teórica, para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. El desafío actual de los nuevos recursos tecnológicos se concentra ahora en explorar las posibilidades para convertirlos en herramientas efectivas y accesibles que mejoren los procesos de aprendizaje.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-122326OB-I00 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033.

REFERENCIAS

Barquero, B., Batanero, C., Blanco, T.F., Bosch, M., Camacho-Machín, M., Cañadas, M.C., Castro, E. Chamoso, J.M., Contreras, L.C., Gea, M.M., Godino, J.D., Molina, V.M., Moreno, M. y Wilhelmi, M.R. (2022). Spanish research on mathematics education. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 223-254). PME.

De la Torre, E. (2013). Introducción al Seminario I "Perspectivas de Investigación en Didáctica de la Geometría". En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 17-17). SEIEM.

ICMI Study 26 (2024*).* Lowrie, T., Gutiérrez, A. y Emprin, F. (Eds*.), Pre-Proceedings of the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education)* (pp. 141-148). ICMI.

LA INVESTIGACIÓN SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA DESDE LA TEORÍA DE LA COMOGNICIÓN

Research on the teaching and learning of geometry from the theory of commognition

Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

Resumen

Este trabajo muestra el potencial de la teoría de la comognición como marco teórico para la investigación en educación matemática ya que tiene un amplio ámbito de aplicación. Se describen inicialmente las ideas teóricas básicas de esta teoría. Después se muestra un ejemplo de cómo se hacen operativas dichas ideas teóricas en una investigación sobre geometría y se muestran las relaciones de esta teoría con los niveles de razonamiento de van Hiele. Además, se muestran algunas investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría con la teoría de la comognición como marco teórico. Finalmente se hacen algunas propuestas que miran hacia adelante.

Palabras clave: *conflicto comognitivo, discurso, geometría, prácticas matemáticas, teoría de la comognición.*

Abstract

This work highlights the potential of commognition theory as a theoretical framework for research in mathematics education due to its wide scope of application. The basic theoretical concepts of this theory are initially outlined. Subsequently, an example illustrating how these theoretical concepts are put into practice in geometry research is provided, along with the connections of this theory to van Hiele's levels of reasoning. Furthermore, various studies on teaching and learning geometry using commognition theory as a theoretical framework are presented. Finally, some prospective suggestions are put forward.

Keywords: *commognitive conflict, discourse, geometry, mathematical practices, theory of commognition.*

INTRODUCCIÓN

La relevancia de la teoría de la comognición (también denominada aproximación comognitiva) en la investigación en educación matemática se pone de manifiesto en los números especiales de algunas revistas, tanto de educación matemática (por ejemplo, The Journal Mathematical Behavior publicó en 2022, con artículos desde 2020, un número especial "Advances in Commognitive Research") como de educación (The International Journal of Educational Research publicó en 2012 un número especial "Developing mathematical discourse–Some insights from communicational research") que utilizan esta teoría como referente teórico.

La teoría de la comognición considera el aprendizaje como llegar a ser participante en prácticas propias de una determinada comunidad, el estudiante tiene una participación de iniciación (newcomer) y se pretende que alcance una participación similar a la de un experto (full participant) (Sfard, 1998).

Sfard (2008) caracteriza los discursos como diferentes tipos de comunicación caracterizados por sus objetos, tipos de mediadores y las reglas que siguen los participantes. Esta caracterización incluye muchos tipos de discursos, sin embargo, Sfard (2007, 2008) se centra en el discurso matemático, que

Gavilán-Izquierdo, J. M. (2024). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría desde la teoría de la comognición. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 7-20). SEIEM.

tiene sus propios objetos matemáticos e identifica las características propias de este discurso. En el discurso matemático un objeto matemático es un par <significante, árbol de realizaciones>, el *árbol de realizaciones* (tree of realizations) es el conjunto organizado de sus realizaciones, es decir, de objetos perceptualmente accesibles. Un ejemplo de objeto matemático es el significante función, junto con las realizaciones, expresión algebraica, gráfica, tabla de valores, etc. (Tabach y Nachlieli, 2015).

Cooper (2014) propone una interpretación del modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) (Ball et al., 2008) desde la teoría de la comognición e introduce el discurso matemático para la enseñanza (MDT por sus siglas en inglés) diferenciando el discurso matemático y el discurso pedagógico matemático, que requiere adaptar las características del discurso matemático al discurso pedagógico. Diferentes investigadores (Gallego-Sánchez et al., 2022; Heyd-Metzuyanim y Shabtay, 2019; Toscano et al., 2019; Viirman, 2015) han utilizado la teoría de la comognición para caracterizar el discurso pedagógico de estudiantes para maestro, maestros y profesores de diferentes niveles educativos. En concreto, Gallego-Sánchez et al. (2022) identificaron rutinas pedagógicas de profesores de Bachillerato, Heyd-Metzuyanim y Shabtay (2019) analizaron los tipos de discursos pedagógicos de maestros de escuela elemental, Toscano et al. (2019) caracterizaron el discurso didáctico-matemático de estudiantes para maestro de Educación Primaria y Viirman (2015) clasificó diferentes rutinas en el discurso pedagógico de profesores universitarios.

La teoría de la comognición ha sido ampliamente utilizada para el estudio de prácticas matemáticas (las maneras en la que los matemáticos producen conocimiento matemático, es decir, producen "hechos matemáticos"), por ejemplo, para modelar (Shahbar y Tabach 2023; Viirman y Nardi 2019), para definir (Fernández-León et al. 2021; Tabach y Nachlieli, 2015) y para probar (Kontorovich y Liu, 2023; Shinno y Fujita, 2022). Además, esta teoría se puede articular con otros marcos teóricos, tanto socioculturales (Morgan y Sfard, 2016) como cognitivos (Wang y Kinzel, 2014) proporcionando un análisis más profundo de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por tanto, podemos concluir que la teoría de la comognición es una teoría con un amplio ámbito de aplicación ya que permite investigar sobre discurso matemático (estudiantes y estudiantes para profesor) y sobre el discurso pedagógico (profesores y estudiantes para profesor) en diferentes niveles educativos y sobre las prácticas matemáticas.

A continuación, se describen las ideas teóricas básicas de la teoría de la comognición, mostrando cómo han evolucionado algunas de ellas. Seguidamente se revisan investigaciones desarrolladas utilizando la teoría de la comognición con contenido matemático en contexto geométrico que muestran cómo se hacen operativas las ideas teóricas y algunos resultados obtenidos. Finalmente, se hacen varias propuestas de futuro que plantean algunos desafíos a la teoría de la comognición. y se señalan algunas limitaciones.

TEORÍA DE LA COMOGNICIÓN

Comognición es un término acuñado por Sfard (2008) a partir de la combinación de los términos comunicación y cognición con la idea de que el pensamiento es visto como la versión individualizada de la comunicación interpersonal, es decir, el pensamiento es la comunicación con uno mismo.

La teoría de la comognición (para abreviar, comognición,) con su visión participacionista considera el aprendizaje como el proceso de individualización de lo colectivo, es decir, como llegar a ser participante en el discurso de una comunidad, y específicamente en matemáticas llegar a participar en el discurso matemático (cada vez más avanzado). Además, se considera un proceso complementario del anterior, la colectivización de lo individual. Lo relevante en esta teoría son los cambios, qué cambia y los cambios en las formas de actuar de las personas (las maneras de "hacer" modeladas, prácticas), tanto individualmente como colectivamente (Sfard, 2007).

Características del discurso matemático

En la comognición las matemáticas son un tipo de discurso y los discursos matemáticos se pueden caracterizar por el uso de palabras y mediadores visuales, por las narrativas y por las rutinas. A continuación, se describen las cuatro características del discurso (Sfard 2008).

- Uso de palabras: se consideran las palabras matemáticas y no matemáticas usadas en el discurso. Por ejemplo, las palabras matemáticas cuadrado, demostración o la palabra derecho como palabra coloquial que se utiliza en lugar de recto para un sólido geométrico (por ejemplo, un prisma).

-Mediadores visuales: son los medios, objetos visibles, con los que los participantes identifican los objetos matemáticos de los que están hablando, como los gráficos o símbolos. Por ejemplo, los siguientes símbolos de una función $f(x)=3x+2$, el dibujo de un cuadrado, el gráfico de una función o el dibujo de un grafo en matemática discreta.

- Narrativas: son expresiones, escritas o habladas, que describen objetos, relaciones entre objetos o actividades con objetos. Estas narrativas se denominan narrativas asumidas (endorsed narratives) cuando son aceptadas, son verdaderas para una determinada comunidad. Cada comunidad en su discurso tiene sus propias reglas que permiten asumir o rechazar las narrativas. Por ejemplo, una comunidad puede asumir la narrativa "el triángulo isósceles es un triángulo con dos lados iguales" y otra comunidad rechazarla porque asumen "el triángulo isósceles es un triángulo con dos lados iguales y el otro desigual". En la comunidad de los matemáticos, las definiciones y teoremas son ejemplos de narrativas asumidas.

Sfard (2007) diferencia dos tipos de narrativas, narrativas a nivel objeto, es decir, expresiones sobre objetos, por ejemplo, "un cuadrado es un polígono de cuatro lados iguales" y narrativas a nivel meta que son relatos sobre el discurso mismo, por ejemplo, "para definir un objeto matemático debemos dar un nombre y las propiedades matemáticas".

- Rutinas: son los patrones repetitivos del discurso. Pueden identificarse observando el uso de las palabras y mediadores visuales y cómo se construyen o justifican las narrativas en un discurso (Sfard, 2007, 2008). Ejemplos de rutinas son las de definir o probar en el discurso de los matemáticos. Otro ejemplo de rutina, más concreto, puede ser la manera de demostrar que la suma de dos números naturales pares es otro número natural par, que puede ser diferente en función de la comunidad de participantes. Es decir, aunque la narrativa que se quiere asumir sea la misma, la rutina que la justifica como verdadera, convirtiéndola en una narrativa asumida, puede ser diferente en distintas comunidades (por ejemplo, estudiantes de secundaria, estudiantes para maestro o matemáticos).

La comunicación entre personas se ha definido como una actividad regulada por patrones repetitivos, reglas. Sfard (2008) distingue dos tipos de reglas: reglas a nivel objeto, relativas al comportamiento regular de los objetos y reglas meta-discursivas (también llamadas reglas a nivel meta o meta-reglas) que son formas de actuar en el discurso de los participantes, menos "visibles" que las primeras y que se identifican cuando se observa la actividad de formular y justificar las reglas a nivel de objeto. Además, estas meta-reglas evolucionan con el tiempo, a diferencia de las reglas a nivel objeto que son más estables (Sfard, 2008). Por ejemplo, la regla "la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360º" es una regla a nivel objeto y la regla "para demostrar regla anterior, es conveniente dividir el cuadrilátero en dos triángulos a lo largo de una de sus diagonales" es una meta regla (Martín-Molina et al., 2023).

Para Sfard (2008) una rutina puede conceptualizarse también como un conjunto de meta-reglas que describe una acción discursiva repetida. Se basa en la regularidad de las acciones de los participantes en el discurso, que pueden ser inferidas por los investigadores. En Sfard (2008) se diferencian dos tipos de meta-reglas en una rutina que caracterizan el cómo (how) y el cuándo (when) de la rutina. El cómo hace referencia a las meta-reglas de la rutina que determinan el procedimiento a aplicar, el cuándo se refiere a las meta-reglas que determina las condiciones en las que aplicar el procedimiento

de actuación. Por ejemplo, la rutina que se puede implementar cuando se pide calcular la suma de una serie numérica geométrica de términos positivos $\sum$ an, consiste en comprobar que es una serie geométrica y que cumple la condición necesaria y suficiente de convergencia para estas series, lo que constituye el cuándo de la rutina y después en aplicar la fórmula o deducir la suma, que es el cómo de la rutina.

Indica Sfard (2008) que hay tres tipos de rutinas actos (deeds), rituales (rituals) y exploraciones (explorations). Las dos últimas son las que han recibido más atención. Una rutina de tipo ritual es una secuencia de acciones cuyo objetivo es crear y mantener un vínculo con otras personas, se implementa la rutina para otros y no hay libertad en el desarrollo de la acción. Los rituales están orientadas al proceso. Una exploración es una rutina que cuando es implementada se produce una narrativa asumida o es justificada, está más orientada al objeto. Estas últimas son las propiamente matemáticas, pero los rituales suelen ser el inicio del proceso de aprendizaje. Las rutinas de exploración pueden ser de construcción, justificación o recordar.

Sfard (2008) señala que las rutinas de justificación son las que tienen más amplia variabilidad en los discursos matemáticos por los diferentes usos que se puede dar a la palabra "convencerse o convencer" de la verdad de una narrativa con el objetivo de asumirla como verdadera.

Esta idea teórica de rutina ha sido ampliada y reformulada en el trabajo de Lavie et al. (2019), cuestión sobre la que volveremos más adelante y que tiene algunas implicaciones de naturaleza metodológica.

Aprender matemáticas y conflictos comognitivos

En la comognición aprender matemáticas significa cambiar el discurso, un cambio hacia un discurso cada vez más sofisticado, es decir, llegar a ser participante en el discurso matemático (parecido al de los matemáticos profesionales). Este cambio puede identificarse por cambios en alguna(s) característica(s) del discurso. Pueden diferenciarse dos tipos de aprendizaje (Sfard, 2007, 2008) según la naturaleza de los cambios del discurso, a nivel objeto y a nivel meta, caracterizados a continuación.

El aprendizaje a nivel objeto se caracteriza por una ampliación del propio discurso, es decir, ampliación del vocabulario, mediadores visuales, nuevas rutinas y la producción de nuevas narrativas asumidas sobre los objetos matemáticos. En este aprendizaje se llega a conocer mejor los objetos matemáticos existentes (Tabach y Nachlieli, 2016). Por ejemplo, sustituir la expresión x+x+y+y por 2x+2y se considera aprendizaje a nivel objeto (Tabach y Nachlieli, 2015). Para Sfard (2020) este aprendizaje solamente exige deducir nuevas narrativas a partir de las ya asumidas. El aprendizaje a nivel meta está caracterizado por implicar cambios en la meta-reglas del discurso. Este cambio en el discurso conlleva resolver tareas ya conocidas de una forma diferente. Por ejemplo, para demostrar un teorema, pasar de demostrarlo haciendo algunos casos particulares a una demostración matemática formal-deductiva es un aprendizaje a nivel meta.

Una fuente de aprendizaje matemático en esta perspectiva son los conflictos comognitivos. Para Sfard (2007) un conflicto comognitivo surge cuando los interlocutores mantienen narrativas aparentemente contradictorias que proceden de diferentes discursos, discursos en los que el mismo significante (signifier) tiene distintos usos, o cuando se utilizan distintas reglas para justificar las narrativas. Esos discursos se denominan inconmensurables. Un ejemplo de conflicto comognitivo, este relativo al uso de palabras, es cuando ante la tarea de clasificar una figura "cuadrado" un estudiante puede usar una definición del significante rectángulo que excluya al cuadrado y otro puede usar el mismo significante, pero incluyendo al cuadrado como un caso particular de rectángulo. Otro ejemplo de conflicto comognitivo, ahora relativo al uso de diferentes reglas para justificar las narrativas, podemos encontrarlo cuando para asumir una afirmación matemática, por ejemplo, "la suma de dos números pares es otro número par" un estudiante usa la regla "usar un ejemplo particular" y otro estudiante usa la regla "usar un argumento general".

Avanzando en la caracterización teórica: rutinas y conflictos comognitivos

Las nociones de rutina y la de conflicto comognitivo han tenido una evolución importante en la comognición.

Las rutinas han jugado un papel clave en esta teoría desde el principio ya que son los patrones repetitivos de la actividad discursiva, son esenciales en la caracterización del discurso por su papel de producción y justificación de narrativas. Lavie et al. (2019) señalan que la repetición es un aspecto esencial del aprendizaje y por este motivo el estudio las rutinas puede pasar a ser la unidad básica para el análisis del aprendizaje porque el aprendizaje puede considerarse como la rutinización de nuestras acciones. Según Lavie et al. (2019) hay dos tipos de rutinas discursivas, rituales y exploraciones. Las rutinas rituales están orientadas al proceso de obtener la solución y como se ha indicado marcan el inicio en un nuevo discurso. Las rutinas exploratorias están orientadas hacia el producto que se obtiene en ellas, es decir, cómo se construyen y justifican narrativas.

Cuando se caracteriza el aprendizaje como un proceso de rutinización de las acciones, es decir, cómo emergen y evolucionan las rutinas, el proceso de cambio de rutinas personales de tipo ritual a rutinas exploratorias pasa a ser el foco y ese proceso de cambio se denomina *proceso de desritualización* (process of de-ritualization). Este proceso de cambio es el objetivo que se pretende conseguir en la escuela, pero es lento y conlleva estados intermedios desde un extremo (rituales) al otro (exploraciones) (Lavie et al., 2019). Para identificar estos cambios se han distinguido algunas propiedades de las rutinas que permiten inferir los cambios y por tanto se convierten en indicios de aprendizaje. Estas características, traducidas por Reymundo et al. (2023), son: "flexibilidad, vinculación, aplicabilidad, justificación, autonomía de la persona que realiza la tarea y cosificación y alienación del discurso" (p. 979).

Para operativizar la idea de rutina, estas autoras introducen la idea *situación problemática* (task situation) como cualquier situación en la que una persona ve necesario actuar. Para abordar la nueva situación el aprendiz busca situaciones pasadas que son similares a la planteada (precedentes). Una rutina es un par <*tarea* (task), *procedimiento*(procedure)> donde la tarea es la interpretación que hace el estudiante de la situación problemática y el procedimiento son las acciones que realiza el estudiante para responder a la tarea. Un ejemplo de procedimiento puede venir dado por un algoritmo, pero no necesariamente tiene que ser así. Así vistas, las rutinas son personales (estudiante) y cambiantes, evolucionan, con el tiempo, pudiendo ser inferidas por un observador externo, que puede ser un investigador.

En relación con los conflictos comognitivos hay que destacar dos aportaciones, la de Knox y Kontorovich (2023) en el discurso matemático y la de Nachlieli y Heyd-Metzuyanim (2022) en el discurso pedagógico. Knox y Kontorovich (2023) cuando realizaron una investigación sobre los números naturales pares e impares y sus propiedades sobre la suma de dos de ellos (por ejemplo, suma de dos números pares es par, etc.) con estudiantes de Educación Primaria (8-9 años) ampliaron la noción de conflicto comognitivo para incluir *choques comunicativos* (communicational clashes) y *brechas discursivas* (discursive gaps). En los choques comunicativos los interlocutores son conscientes del desacuerdo, aunque pueden no ser conscientes de cómo o por qué están en desacuerdo y en las brechas discursivas se aprecian diferencias en las características discursivas, palabras (y sus usos), mediadores, etc. Nachlieli y Heyd-Metzuyanim (2022) diseñaron una actividad de desarrollo profesional de profesores en la que el aprendizaje era el proceso de cambio en el discurso pedagógico, del discurso pedagógico ritualizado a un discurso pedagógico exploratorio. Propusieron estudiar dicho proceso mediante la identificación de conflictos comognitivos, entendidos como la presencia de narrativas no alineadas (misalignment). Estas autoras caracterizaron *cuatro niveles de explicitación de los conflictos*: conflicto comognitivo inaccesible, conflicto comognitivo explícito no reflexionado, conflicto comognitivo explícito y conflicto comognitivo reflexionado.

En el siguiente apartado se revisan investigaciones desarrolladas utilizando este marco con contenido matemático geométrico que muestran cómo se hacen operativas las ideas teóricas y algunos resultados obtenidos.

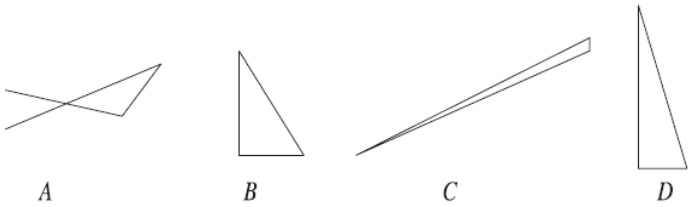
TEORÍA DE LA COMOGNICIÓN EN LA INVESTIGACION SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN GEOMETRÍA

En este apartado mostraremos algunas investigaciones realizadas en contextos geométricos utilizando la comognición. Nos centraremos en el discurso matemático. En la primera investigación sobre geometría que se muestra, Sfard (2007, 2008) da un ejemplo de cómo se operativizan las ideas teóricas de la comognición. Después se muestran otras investigaciones, que no pretende ser una revisión exhaustiva, de diferentes autores y algunos de los resultados obtenidos.

Investigación sobre aprendizaje de figuras planas operativizando las ideas teóricas

Sfard (2007, 2008) ejemplifica la operatividad de su propuesta teórica con varios ejemplos, en particular, uno de ellos es sobre figuras planas, utilizó una tarea sobre identificación de triángulos en una lámina con varias figuras (la figura 1 es una parte de la lámina, que contenía rectángulos también). Planteó a dos estudiantes (6 años) la cuestión ¿cuál de estas figuras es un triángulo? Y para ello pidió que marcaran los triángulos de la lámina.

Figura 1. Parte de lámina con triángulos (Sfard, 2007, p. 596)



Después de que dos estudiantes (6 años) señalaran los triángulos, la maestra preguntó sobre las figuras A, B, C y D, y la discusión versó esencialmente sobre si C es o no un triángulo. Una de las estudiantes decía que no lo era por su aspecto “Este no es un triángulo [señalando C]”. Añadió que “el triángulo es ancho y éste es delgado”, la otra estudiante sí lo había señalado inicialmente y luego mostró dudas sobre si era o no un triángulo

El análisis desde la comognición permitió a Sfard (2007) señalar que cuando las estudiantes resolvieron la tarea, el acto de identificar (rutina para identificar figuras) se descompone en dos actos, reconocer la figura y nombrarla y que las estudiantes consideraron los dos actos como uno solo, identificando las figuras de manera intuitiva.

En la entrevista la maestra intenta que el procedimiento de identificación sea discursivamente explícito, primero se reconozca la figura y después se razone discursivamente el nombre que se asigne a la misma (triángulos en este caso). Esta brecha discursiva entre la maestra y las estudiantes es una manifestación de la presencia de dos discursos geométricos distintos y una oportunidad para el aprendizaje generada por el conflicto comognitivo subyacente, que se pone de manifiesto en los intentos de maestra de hacer que las estudiantes asuman su discurso.

Finalmente, si en los procedimientos discursivos para identificar figuras se ordenan los pasos siguiendo la relación de inclusión, puede llegarse sentar las bases para las clasificaciones jerárquicas de cuadriláteros que posibilitan que una figura pueda ser a la vez un rectángulo y un cuadrado.

Sfard (2007, 2008) reflexiona sobre la discusión anterior asignándoles a las estudiantes un determinado nivel de razonamiento de van Hiele. Además, indicó que los diferentes niveles de van Hiele pueden “interpretarse” como una jerarquía de discursos geométricos inconmensurables entre sí, que difieren en el uso de palabras y mediadores, rutinas y en las narrativas. Abre Sfard (2007) la puerta a la “compatibilidad” entre ambos marcos teóricos y los beneficios para la investigación en

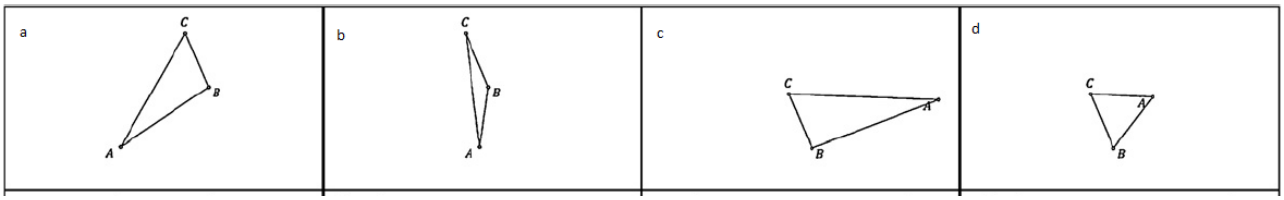
educación matemática de la combinación de ambos marcos teóricos. El análisis comognitivo del discurso permite, según Sfard (2007), obtener información sobre la transición entre niveles de razonamiento de van Hiele.

Investigaciones sobre Geometría 2D

Distintos investigadores han abordado la investigación sobre enseñanza y aprendizaje en Geometría 2D (Ben-Dor y Heyd-Metzuyanim 2021; Escudero et al., 2014; Sánchez y García, 2014; Sinclair y Moss,2012; Wang y Kinzel, 2014).

Sinclair y Moss (2012) investigaron cómo estudiantes de Educación Infantil (4-5 años) identificaban y clasificaban figuras planas (triángulos) en un entorno tecnológico (Sketchpad). Estas investigadoras asumen que las transformaciones de una figura por arrastre en geometría dinámica facilitan el ver cosas distintas como iguales (saming). Hacen una interpretación de los niveles de van Hiele en términos de la comognición, considerando los niveles de razonamiento como niveles de discurso. Estas autoras estudiaron la rutina de identificación y concluyeron que para los dos primeros niveles de discurso (respectivamente, niveles 1 y 2 de van Hiele) era, esencialmente, una rutina "visual" y que cada objeto solo puede tener un nombre. En el segundo nivel de van Hiele el campo de las transformaciones que permiten llamar de la misma manera a dos cosas distintas son más amplias y se usa vocabulario geométrico (ver figura 2). Las palabras, como triángulo, se emplean ya como nombres de familias mutuamente excluyentes. Es en el tercer nivel de discurso geométrico en el que la identificación de figuras ya no se basa en las transformaciones únicamente, sino que la rutina de identificación incluye acciones discursivas utilizando la definición y las características de esta nos permite asignar un nombre a cada figura, por ejemplo, un triángulo es un polígono con tres lados conlleva el procedimiento de contar los lados del polígono. En este nivel se asume que una figura puede tener dos nombres (por ejemplo, cuadrado y rectángulo) ya que la identificación es, esencialmente, discursiva a través de las propiedades explicitadas en la definición (que son necesarias y suficientes). Desde la comognición, los discursos matemáticos descriptivos de los niveles 1 y 2 se subsumen en el discurso matemático que se tiene en el nivel 3 de van Hiele.

Figura 2. Arrastre de un triángulo escaleno en geometría dinámica. En a) triángulo inicial ABC, b) arrastre del punto A, c) arrastre del punto A para que parezca ABC rectángulo y d) arrastre del punto A para que ABC parezca equilátero (Sinclair y Moss, 2012, p. 33)



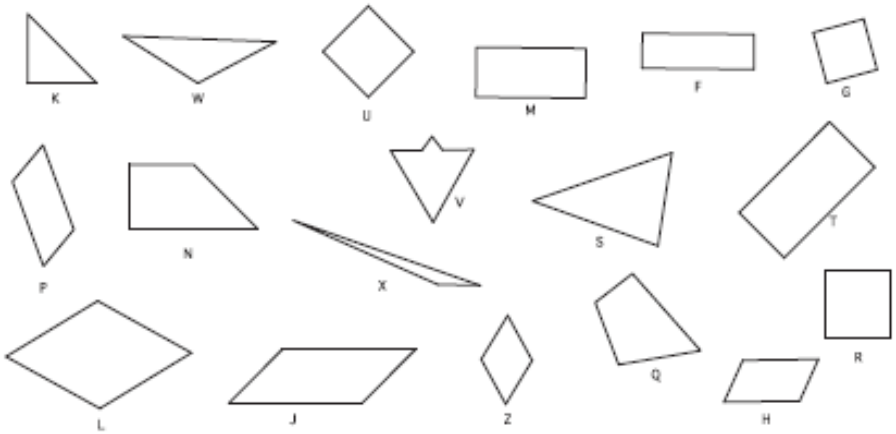
Señalan Sinclair y Moss (2012) que la transición entre los niveles 2 y 3 no es fácil de conseguir y requiere tiempo, y proponen el uso de un software de geometría dinámica (en adelante, SGD) para facilitar esta transición. Los SGD utilizan construcciones geométricas que se pueden manipular mediante arrastre de algunos elementos y se pueden observar las variaciones de la construcción y las características matemáticas que permanecen invariantes mediante el arrastre, tanto las utilizadas en la construcción de la figura como las características matemáticas que se deducen de ellas. Por ejemplo, si se construye una figura con el SGD con una recta r perpendicular a s y otra recta t perpendicular a r, entonces arrastrando cualquiera de los objetos básicos de la figura la característica de perpendicularidad de las rectas permanece, pero además se obtiene el invariante de que las rectas s y t son paralelas.

Para Sinclair y Moss (2012) la invarianza de algunas características de la figura construida con el SGD constituye un elemento facilitador del cambio, primeramente, ampliando el rango de transformaciones de los objetos (triángulo con arrastre de algún vértice) y facilitando la transición al

nivel 2 de van Hiele y posteriormente a la rutina de identificación discursiva que para el triángulo puede ser "llamamos triángulo a una figura de tipo polígono y con tres lados". Esta rutina discursiva es indicador del nivel 3 de van Hiele. Sin embargo, en algunas situaciones puede ser necesario la colaboración de un experto (el maestro) que facilite el salto discursivo que describe la transición entre niveles de razonamiento de van Hiele. Los resultados del trabajo muestran los cambios entre discursos y que es posible que algún participante se iniciara en el nivel 3 de van Hiele, respecto al concepto de triángulo.

Wang y Kinzel, (2014) combinaron en su investigación la comognición y los niveles de van Hiele. Estudiaron algunas características discursivas, concretamente el uso de palabras y las rutinas de justificación, de estudiantes para maestro de Educación Primaria y Secundaria que estaban en el mismo nivel de van Hiele, nivel 3, en un contexto de cuadriláteros (ver figura 3) y paralelogramos. El uso de palabras permitía obtener información sobre los objetos matemáticos y las rutinas de justificación permitieron informar sobre cómo se usan las prácticas matemáticas (Wang, 2015). Esta manera de articular la perspectiva comognitiva y los niveles de van Hiele les permitió establecer similaridades y diferencias y por tanto dar detalles de los niveles de van Hiele. Concluyeron que, aunque algunos participantes estaban en el mismo nivel de van Hiele, sus discursos geométricos eran diferentes. Estos autores indican que los diferentes discursos dentro de un mismo nivel puede ser una manifestación de los distintos grados de adquisición de los niveles de van Hiele (Gutiérrez et al., 1991). González-Regaña et al. (2021) usando la comognición obtuvieron un resultado similar cuando estudiaban la práctica matemática de definir en un contexto de sólidos ya que identificaron distintas meta reglas en estudiantes para maestros de Educación Primaria que estaban en el nivel 2 de van Hiele. Esta complementariedad entre la comognición y los niveles de van Hiele, ya asumida por Sfard (2007, 2008), nos permite aceptar resultados obtenidos a partir de perspectivas diferentes (Cham et al, 2022) proporcionando una visión de más alcance y profundidad de los fenómenos educativos bajo estudio.

Figura 3. Lámina de cuadriláteros (Wang y Kinzel, 2014, p. 292)



Ben-Dor y Heyd-Metzuyanim (2021) investigaron, en un contexto de geometría plana la transición de pares de estudiantes de Educación Secundaria desde meta-reglas conocidas a otras nuevas. Concretamente, estos autores examinaron los cambios entre las rutinas configurales y las rutinas deductivas utilizadas por alumnos (14-15 años) que ya habían estudiado justificaciones deductivas. Sus resultados muestran que el discurso deductivo no reemplaza el discurso configural, sino que lo que se produce es que ambos terminan formando un único discurso que subsume los dos discursos citados, y que los estudiantes fluctúan entre ambos discursos. La propuesta de indagar cambios de meta reglas puede dar lugar al estudio de transiciones de forma general, siendo esta investigación un ejemplo. Si se consideran los niveles de van Hiele, podemos considerar que la transición entre niveles de van Hiele se puede caracterizar mediante la comognición.

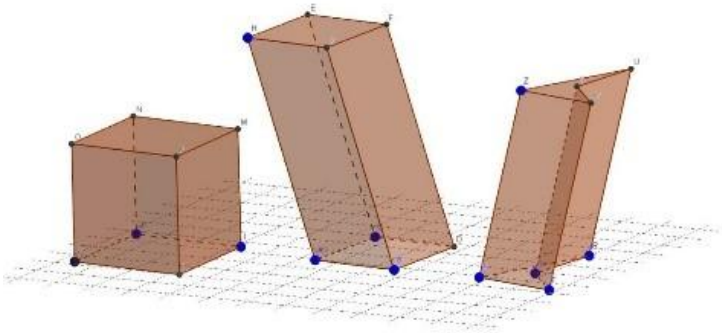
El estudio de algunos paralelogramos (cuadrado, rectángulo y rombo) fue el contexto en el que diferentes investigadores (Escudero et al., 2014; Sánchez y García, 2014) caracterizaron el aprendizaje de la práctica matemática de definir de grupos de estudiantes de enseñanza no obligatoria. Por un lado, Escudero et al. (2014), con estudiantes de Bachillerato y estudiantes para maestro de Educación Primaria como participantes, caracterizaron los diferentes tipos de cambios en el discurso matemático, el aprendizaje, a través de las características discursivas, especialmente, narrativas asumidas y las rutinas. Estos investigadores identificaron las rutinas que posibilitaban los cambios en las narrativas asumidas por los grupos de estudiantes. Por ejemplo, identificaron que para que se cambie de construir definiciones con un listado de características matemáticas a definiciones con un listado mínimo de características matemáticas puede requerir una rutina que identifique propiedades implicativas (p□q) entre las características de los objetos. El alcance de la investigación permitió identificar desde grupos que definían etiquetando los paralelogramos hasta grupos que construyeron definiciones minimales o que asumían la existencia de definiciones equivalentes para un mismo objeto matemático. Esta investigación pone de manifiesto que en el proceso de aprendizaje de la práctica de definir hay dos objetos de estudio, el primero los paralelogramos y el segundo sus definiciones.

Por otro lado, Sánchez y García (2014) se centraron en las definiciones como productos de la práctica matemática de definir. Los participantes fueron estudiantes para maestro (que habían completado, al menos, un curso de matemáticas). Consideran estas autoras que en el discurso matemático coloquial de los estudiantes coexisten dos discursos, el discurso que considera las matemáticas como materia escolar (normas sociomatemáticas) y el discurso matemático (normas matemáticas). A partir de esta premisa, identificaron cinco conflictos comognitivos a partir de las diferencias entre normas sociomatemáticas y normas matemáticas que están en dos discursos presentes. Por ejemplo, uno de los conflictos comognitivos identificados fue entre la norma matemática que establece que una definición debe ser minimal (condiciones necesarias y suficientes) y la norma sociomatemática que señala que cuando resuelves una tarea matemática, cuanto más escribas mejor lo haces.

Investigaciones sobre Geometría 3D

Algunas investigaciones con la comognición como marco teórico han sido desarrolladas en geometría 3D. El estudio de la práctica matemática de definir ha sido foco de varias investigaciones (Fernández-León et al., 2021; González-Regaña et al. 2021; Ropero Quintero y Zubieta Badillo, 2023) generalmente en un contexto de poliedros o prismas. Concretamente, Fernández-León et al. (2021) y González-Regaña et al (2021) han estudiado el discurso de estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando responden cuestiones sobre construir y seleccionar definiciones de prismas (ver figura 4). Caracterizaron las rutinas para construir definiciones (Fernández-León et al., 2021) e identificaron conflictos comognitivos (González-Regaña et al., 2021). Entre sus resultados se puede destacar, entre otros, que incluyen información cuantitativa (número de caras, aristas y vértices) en las definiciones, las definiciones son de naturaleza estructural (definen mediante propiedades matemáticas) y los participantes mostraron dificultades para dar otra definición de un cuerpo geométrico. Además, en este mismo contexto geométrico, Martín-Molina et al. (2019) compararon el discurso matemático de los estudiantes para maestro con el esperado por sus formadores, sus resultados muestran que a la hora de describir, definir y seleccionar la mejor definición de algunos sólidos se identifican diferencias entre el discurso matemático de los estudiantes y lo que sus formadores esperaban de ellos, lo que puso de manifiesto el aprendizaje pretendido.

Figura 4. Cuerpos geométricos (Gavilán-Izquierdo et al., 2019, p. 142)



También Ropero Quintero y Zubieta Badillo (2023) investigaron sobre la práctica de definir poliedros de estudiantes de Educación Secundaria (13-15 años) y analizaron el discurso matemático de una pareja de estudiantes. Identificaron el uso de palabras coloquiales y de palabras ambiguas como lado para referirse a las aristas de los sólidos. Este aspecto de usar palabras o recurrir a geometría 2D cuando los estudiantes tienen dificultades en geometría 3D, es una característica del discurso sobre sólidos identificada por otros investigadores (González-Regaña, 2021). Además, Ropero Quintero y Zubieta Badillo, (2023) concluyen que la práctica de definir consiste, esencialmente, en describir propiedades, indicando que eso llevó a "caracterizar las narrativas que identificamos en el discurso de los estudiantes como narrativas meramente descriptivas" ((Ropero Quintero y Zubieta Badillo, 2023p. 837). Las definiciones propuestas por los participantes en su investigación "contienen condiciones necesarias, pero no suficientes" (Ropero Quintero y Zubieta Badillo, 2023, p. 842).

MIRANDO HACIA ADELANTE

A continuación, teniendo en cuenta la comognición, se plantean algunas líneas de investigación en las que la investigación matemática en geometría puede ampliarse o aportar ideas.

Antonini et al. (2020), en una investigación sobre el concepto de función en Educación Secundaria con tecnología, proponen nuevas ideas teóricas que extienden las propuestas por Sfard (2008). En concreto, proponen considerar un nuevo tipo de mediador, el mediador dinámico interactivo (DIM por sus siglas en inglés, dynamic interactive mediator) como un mediador manipulable por el usuario y dinámico en el sentido de que cambia con el tiempo, un ejemplo pueden ser las construcciones realizadas con GeoGebra, manipulables mediante arrastre de algunos objetos (puntos, rectas, etc.). En un contexto geométrico sobre definir sólidos (tipos de prismas cuadrangulares), González-Regaña et al. (2021) analizando el discurso de estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando construyen y seleccionan definiciones, proporcionaron a los participantes mediadores visuales de dos tipos, en una construcción de GeoGebra (figura para algunos grupos de participantes) y modelos físicos de los sólidos para otros. Se puede plantear cómo afectan estos mediadores y si su presencia facilita el aprendizaje.

Indican Antonini et al. (2020) que los DIM pueden jugar un papel de interlocutor en el discurso y establecerse un discurso. La comunicación entre el estudiante y el software está condicionada por las reglas del software. En un SGD (por ejemplo, GeoGebra) las repuestas del interlocutor DIM a las acciones del resolutor hacen explícitas las propiedades matemáticas que se han usado en la construcción o que se deducen de dichas propiedades, aunque estas respuestas pueden no ser identificadas por el estudiante.

Aviram et al. (2023) analizando el discurso de estudiantes de Educación Secundaria que están aprendiendo álgebra en un entorno tecnológico, concretamente en hoja de cálculo, sugirieron dos nuevos tipos de rutinas, rutina discursiva computacional (computer-discursive routine) y rutina computacional compuesta (compounded-computer routine). La primera es una rutina que mediante la acción del estudiante realiza un procedimiento y la segunda se compone de una rutina discursiva computacional y una rutina discursiva.

En general, la inclusión de DIM y las rutinas computacionales abre una línea de investigación que no solo afecta a los mediadores y realizaciones, sino también a las palabras matemáticas que se incorporan al discurso matemático (por ejemplo, "arrastre") y a las formas de producción y justificación de narrativas. Como indican Aviram et al. (2023) el potencial de la comognición se ha puesto de manifiesto en el estudio de los procesos de aprendizaje en entornos no computacionales, en entornos computacionales hay menos estudios, salvo algunas excepciones y se necesita avanzar en esta línea.

Otras líneas de investigación con perspectiva de futuro y que suponen un desafío son la teoría de grafos y la topología. El aprendizaje de la teoría de grafos se está investigando a través de los niveles de van Hiele (González, Gallego-Sánchez et al., 2022; González, Manero et al. 2023), lo que pone de manifiesto el potencial de este marco teórico para aplicarse fuera de la geometría. La propuesta de niveles de van Hiele para la teoría de grafos se basa en primer lugar en los parecidos entre las representaciones pictóricas de los grafos y las figuras planas, pues en ambas hay vértices y aristas y en la existencia de transformaciones que tienen invariantes (González et al., 2020) en geometría y grafos. Además, se están realizando investigaciones que emplean la comognición (Gavilán-Izquierdo et al., 2023) y se empiezan a buscar formas de articular los niveles de van Hiele y la comognición para caracterizar la transición entre niveles de van Hiele mediante la identificación de conflictos comognitivos.

La investigación en enseñanza y aprendizaje de la topología es muy reciente, salvo alguna excepción (Kontorovich, 2021) y están dándose algunos pasos en esta línea de investigación mediante el uso de la comognición como marco teórico (Kontorovich y Greenwood, 2022).

Limitaciones

Terminamos este trabajo con algunas limitaciones de la comognición que han sido señalados en la revisión del número especial del The Journal of Mathematical Behavior sobre esta teoría. Sinclair (2022) en sus comentarios de dicha revisión sobre la comognición indica que un inconveniente es su crecimiento, por ejemplo, en número de conceptos, lo que la hace crecer en complejidad y por tanto puede llegar a ser difícil de comprender y puede ser una barrera para los que quieren iniciarse en la investigación comognitiva. Además, indica, que la comunicación es algo más que lenguaje escrito y verbal, aunque en el número especial este tipo de discurso es el más frecuente. Finalmente, Sinclair (2022) reconoce que para promover la investigación usando esta teoría de la comognición es recomendable explicitar en las investigaciones las razones que motivan su elección.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el Proyecto PID2022-139079NB-I00 financiado por MICIU /AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER/UE. A las investigadoras de la Universidad de Sevilla Aurora Fernández León, Inés Gallego Sánchez y Verónica Martín Molina por sus comentarios y sugerencias.

Referencias

Antonini, S., Baccaglini-Frank, A. y Lisarelli, G. (2020). From experiences in a dynamic environment to written narratives on functions. *Digital Experiences in Mathematics Education, 6*(1), 1–29. https://doi.org/10.1007/s40751-019-00054-3

Aviram, A., Tabach, M. y Heyd-Metzuyanim, E. (2023). Algebraic discourse development in a spreadsheet environment and discursive-computer routines. En M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel y M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 59-66). PME.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/002248710832455

Ben-Dor, N. y Heyd-Metzuyanim, E. (2021). Standing on each other's shoulders: A case of coalescence between geometric discourses in peer interaction. *The Journal of Mathematical Behavior, 64*, Artículo 100900. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100900

Chan, M. C. E., Moate, J. y the Social Unit of Learning project team. (2022). Learning research in a laboratory classroom: A reflection on complementarity and commensurability among multiple analytical accounts. *ZDM Mathematics Education, 54*(2), 317–329. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01330-0

Cooper, J. (2014). Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of 38th International Group for the Psychology of Mathematics Education and 36th Psychology of Mathematics Education-North America* (Vol. 2, pp. 337-344). PME.

Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 7-32. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1711

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V. y Toscano, R. (2021). Identifying routines in the discourse of undergraduate students when defining. *Mathematics Education Research Journal, 33*(2), 301-319. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00301-1

Gallego-Sánchez, I., González, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2022). Analyzing pedagogical routines in the upper secondary school teacher's discourse using the commognitive approach. *International Journal of Instruction, 15*(3), 291-306. https://doi.org/10.29333/iji.2022.15316a

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2019). Cómo construyen definiciones matemáticas los estudiantes para maestro: Una aproximación sociocultural. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 133–153). Ediciones Universidad de Salamanca.

González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Puertas, M. L. (2021). Characterizing levels of reasoning in graph theory. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(8), Artículo em1990. https://doi.org/10.29333/ejmste/11020

González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Puertas, M. L. (2022). Analizando perfiles de reconocimiento en teoría de grafos. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(3), 87-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3402

González, A., Manero, V., Arnal-Bailera, A., y Puertas M.L. (2022). Proof levels of graph theory students under the lens of the Van Hiele model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Publicación anticipada en línea. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2113467

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81-97. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237–251. https://doi.org/10.2307/749076

Heyd-Metzuyanim, E. y Shabtay, G. (2019). Narratives of 'good' instruction: Teachers' identities as drawing on exploration vs. acquisition pedagogical discourses. *ZDM Mathematics Education, 51*(3), 541–554. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01019-3

Knox, J. y Kontorovich, I. (2023). Growing research groves to visualize young students' learning in small groups. *Mathematics Education Research Journal, 35*(2), 401-425. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00422-0

Kontorovich, I. (2021). Minding mathematicians' discourses in investigations of their feedback on students' proofs: A case study. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 213–234. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10035-2

Kontorovich, I. y Greenwood, S. (2022). Mathematics learning through a progressive transformation of a proof: A case from a topology classroom. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of Research in Mathematics Education* (pp. 2437 - 2444). Free University of Bozen-Bolzano, Italy y ERME.

Kontorovich, I. y Liu, N. Q. (2023). Students leverage struggles with proof to script fictional dialogues about the rules of proving. En S. Cook, B. Katz y D. Moore-Russo (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 118-126). SIGMAA on RUME.

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2020). Differences between how undergraduate students define geometric solids and what their lecturers expect from them through the lens of the theory of commognition. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16*(12), Artículo em1917. https://doi.org/10.29333/ejmste/9159

Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. y González-Regaña, A. J. (2023). Characterising pre-service primary school teachers' discursive activity when defining. *International Journal of Instruction, 16*(3), 117-130. https://doi.org/10.29333/iji.2023.1637a

Morgan, C. y Sfard, A. (2016). Investigating changes in high-stakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Mathematics Education, 18*(2), 92–119. https://doi.org/10.1080/14794802.2016.1176596

Nachlieli, T. y Heyd-Metzuyanim, E. (2022). Commognitive conflicts as a learning mechanism towards explorative pedagogical discourse. *Journal of Mathematics Teacher Education, 25*(3), 347-369. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09495-3

Reymundo, C., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Martín-Molina, V. (2023). Relación entre el conocimiento matemático y conocimiento didáctico de las matemáticas de maestros de educación primaria en formación cuando realizan tareas sobre fracciones. En M. Sánchez-Moreno y J. López-Yañez (Eds.), *Construir comunidad en la escuela* (pp. 977-984). Narcea, S. A. de Ediciones.

Ropero Quintero, D. A. y Zubieta Badillo, G. (2023). Definiendo familias de poliedros: Un estudio con estudiantes de secundaria. *Bolema, 37*(76), 823-848. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a21

Sánchez, V. y García, M. (2014). Socio-mathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 305–320. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9516-0

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher, 27*(2), 4-13. https://doi.org/10.2307/1176193

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 567–615. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2020). Commognition. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100031

Sfard, A. (2023). Taming fantastic beasts of mathematics: Struggling with incommensurability. International *Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9*(3), 572–604. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00156-7

Shahbar, J. A. y Tabach, M. (2023). Tracing the emergence of modelling routines during model-eliciting activities. I*nternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 54*(6), 963-981. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1978571

Shinno, Y. y Fujita T. (2022). Characterizing how and when a way of proving develops in a primary mathematics classroom: A commognitive approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(12), 3326-3351. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1941365

Sinclair, N. (2022). A cumulative, coherent and convincing theory that is also seductive, singular and selective. *The Journal of Mathematical Behavior, 67*, Artículo 100983. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100983

Sinclair, N. y Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 28–44. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.009

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards definition mediated identification: The case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 163–187. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: Prologue. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 299–306 https://doi.org/10.1007/s10649-015-9638-7

Toscano, R., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Sánchez, V. (2019). A study of pre-service primary teachers' discourse when solving didactic-mathematical tasks. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(11), em1762. https://doi.org/10.29333/ejmste/108631

Viirman, O. (2015) Explanation, motivation and question posing routines in university mathematics teachers' pedagogical discourse: A commognitive analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(8), 1165-1181. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1034206

Viirman, O. y Nardi, E. (2019). Negotiating different disciplinary discourses: Biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics,101*(2), 233–252. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9861-0

Wang, S. (2015). *Discourse perspective of geometric thoughts*. Springer Spektrum.

Wang, S. y Kinzel, K. (2014). How do they know it is a parallelogram? Analysing geometric discourse at van Hiele level 3. *Research in Mathematics Education, 16*(3), 288–305. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.933711

EXPLORAÇÃO DE TAREFAS GEOMÉTRICAS NA PROMOÇÃO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO - ANÁLISE DE PRÁTICAS DE INVESTIGAÇÃO

The exploration of geometric tasks in the promotion of geometric reasoning - Analysis of research practices

Neto, T. B. [a], Breda, A. [b] y Encarnação, A. [c]

[a, c] CIDTFF—Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores,

[b] Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro - Portugal

Resumo

Atualmente o tópico de geometria faz parte de todos os currículos de escolaridade e assume um papel fundamental na promoção do raciocínio matemático, em especial do raciocínio geométrico. No âmbito do raciocínio geométrico tem vindo a ser desenvolvida investigação, segundo diferentes perspetivas teóricas. O objetivo deste trabalho é ilustrar como a combinação e integração de perspetivas teóricas, no âmbito do raciocínio geométrico, podem promover a caracterização da visualização e do raciocínio espacial de futuros professores de matemática. Assim, no presente trabalho propõe-se um modelo de análise dos argumentos apresentados por estudantes, futuros professores de matemática. A análise realizada mostra que a integração de perspetivas teóricas permitiu a identificação de caraterísticas de raciocínio visual-espacial, as quais são mais consentâneas com um raciocínio percetual e menos com um raciocínio de natureza dedutivo.

Palavras chave: *didáctica, tarefas geométricas, desenvolvimento do raciocínio geométrico, enfoque ontossemiótico.*

Abstract

The topic of geometry is currently part of all school curricula and plays a fundamental role in promoting mathematical reasoning, especially geometric reasoning. Research has been carried out into geometric reasoning from different theoretical perspectives. The aim of this paper is to illustrate how the combination and integration of theoretical perspectives on geometric reasoning can promote the characterisation of visualisation and spatial reasoning in future math's teachers. This paper therefore proposes a model for analysing the arguments presented by students who are future math's teachers. The analysis carried out shows that the integration of theoretical perspectives has allowed us to identify visual-spatial reasoning characteristics that are more in line with perceptual reasoning and less with deductive reasoning.

Keywords: *didactics, geometric tasks, development of geometric reasoning, ontosemiotic approach.*

INTRODUÇÃO

Nesta comunicação pretende-se analisar práticas de investigação que tiveram como foco a promoção do raciocínio geométrico, em especial o raciocínio visual espacial. O raciocínio visual-espacial está explicitamente envolvido no estudo da geometria e por esta razão vários autores (e.g., Sinclair & Bruce 2015) defendem dar mais ênfase à geometria nos currículos. Em Portugal, a geometria tem um espaço de destaque nos currículos do ensino básico e é estudada no tópico "Geometria e Medida", enfatizando-se o desenvolvimento da capacidade de visualização (MEC, 2018).

Segundo Prediger et al. (2008) a diversidade de perspetivas teóricas de educação matemática constitui um bom recurso, no entanto a comunidade científica deve adotar estratégias e métodos para estabelecer ligação entre as várias teorias, no sentido de favorecer um maior entendimento dos objetos

Neto, T. B., Breda A. y Encarnação, A. (2024). Exploração De Tarefas Geométricas Na Promoção Do Raciocínio Geométrico - Análise De Práticas De Investigação. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 21-31). SEIEM.

de estudo. Estes autores descrevem três estratégias de trabalho para estabelecer ligações entre duas ou mais teorias, a saber: compreender as várias teorias e tornar a informação sobre elas compreensível, contrastando e comparando; combinar e coordenar; sintetizar e integrar localmente.

O objetivo deste trabalho é ilustrar como a combinação e integração de perspetivas teóricas, no âmbito do raciocínio geométrico, podem promover a caracterização da visualização e do raciocínio espacial de futuros professores de matemática. Para isso formulou-se a seguinte questão de investigação: De que forma a integração da perspetiva teórica do Enfoque Ontossemióticos (EOS) e da perspetiva teórica do Desenvolvimento do Raciocínio Geométrico (DRG) apoiou a análise de práticas de raciocínio visual-espacial de futuros professores? Tendo por base as perspetivas teóricas referidas, e utilizadas em trabalhos de investigação com o foco no raciocínio geométrico, procedeu-se à análise e discussão de uma das questões que fizeram parte de um questionário sobre o raciocínio visual - espacial aplicado a futuros professores angolanos.

De seguida, e numa primeira parte, apresentam-se aspetos das perspetivas teóricas que estiveram na base de trabalhos de investigação, o EOS e a DRG, comparando-as e integrando-as. Seguem-se exemplos de um estudo empírico envolvendo futuros professores, e com o foco na promoção do raciocínio visual-espacial, os resultados obtidos nessa investigação e, finalmente, a ligação/integração de aspetos das perspetivas teóricas para uma compreensão do foco de estudo.

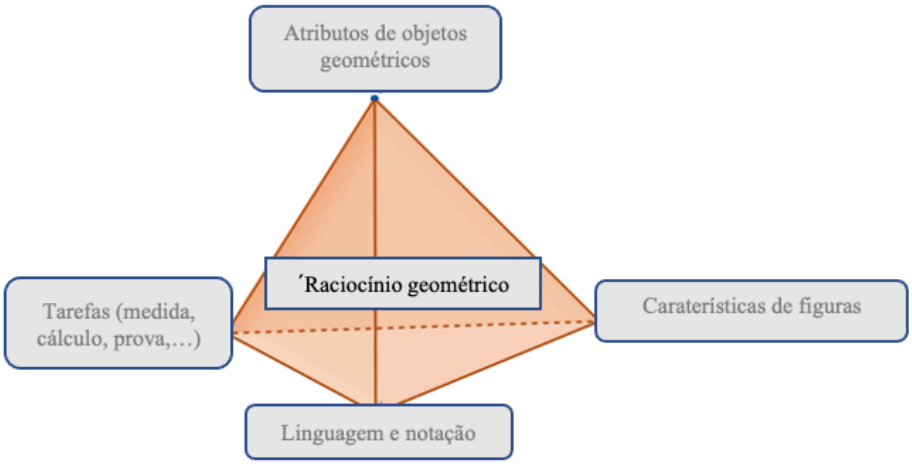
PERSPECTIVAS TEÓRICAS

O ensino e a aprendizagem da geometria têm sido objeto de numerosas investigações na Educação Matemática ao longo das últimas décadas. Sinclair et al. (2016) apresentaram, no ICME – 13, uma visão crítica da investigação realizada neste domínio, referindo-se a teorias, mais específicas, que se focam em aspetos particulares do ensino e da aprendizagem da geometria e outras mais gerais. Dentro dos exemplos de teorias especificas sobre o ensino e a aprendizagem da geometria incluem o modelo de pensamento geométrico de van Hiele (1986), a teoria de conceito de figura (e,g., Mariotti & Fischbein 1997), a teoria da apreensão de figura (Duval 1998), e ainda a teoria do espaço de trabalho geométrico (Kuzniak, 2014). Duval (2006) considera como representações semióticas as figuras geométricas, as representações gráficas, as notações algébricas e formais, o sistema de números e a linguagem corrente, as quais exibem sistemas semióticos diferentes. Os registos são os diferentes processos dessas representações e o autor classifica-os em quatro categorias de acordo com dois critérios, a saber: a elaboração de representações semióticas pode ser categorizada em representação discursiva (e.g., expressões numéricas ou algébricas, definições, descrições,…) ou representações não discursivas (e.g., figuras geométricas, gráficos ou diagramas). O segundo critério é relativo à sua substituição que pode ser efetuada usando um algoritmo (expressão numérica ou algébrica, gráficos) ou então, na maioria das vezes, uma linguagem natural. Considera, ainda, que a efetiva compreensão de objetos matemáticos requer que o estudante seja capaz de lidar com diferentes registos, que são as únicas representações tangíveis e visíveis dos objetos matemáticos.

Adler e Ronda (2015) com base nos vários quadros teóricos referidos e com a preocupação de caraterização dos baixos níveis de raciocínio geométrico que os professores, ou futuros professores, revelam nos contextos de desenvolvimento profissional, propõem um quadro teórico, no âmbito de trabalho de investigação com formação de professores, sobre a promoção do raciocínio geométrico (DRG). Este quadro teórico valoriza os seguintes aspetos: a identificação de trajetória(s) para o desenvolvimento do RG, em que a diferenciação progressiva é caraterizada e apoiada através de tarefas relevantes; o reconhecimento da interação entre diferentes representações (representação visual e/ou verbal) a partir de informação sobre as figuras geométricas em análise; a manipulação de figuras através de diferentes orientações e complexidade; o foco nas definições, propriedades geométricas com uma atenção explícita à organização das propriedades relevantes para formular argumento(s). Como consequência destas premissas, o quadro teórico proposto por estas investigadoras considera os seguintes elementos concetuais para a promoção do raciocínio

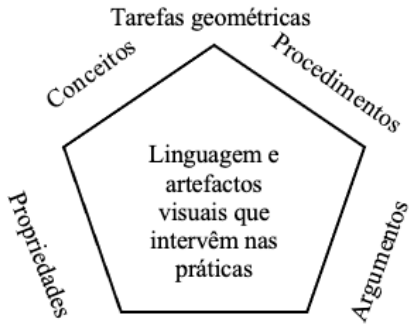
geométrico, nomeadamente: Atributos geométricos (definições, propriedades, axiomas, teoremas); Natureza e qualidade do raciocínio (definições, proposições, qualidade da argumentação); Conexão entre representação visual-verbal (relação entre aspetos visuais e verbais).

Figura 1. Elementos do raciocínio geométrico (adaptado de Adler e Ronda, 2015)



Uma outra perspetiva teórica que também valoriza a(s) trajetória(s) para o desenvolvimento do raciocínio matemático é o Enfoque Ontossemiórico do ensino e aprendizagem da matemática (EOS). Esta perspetiva, tendo igualmente por base outros quadros teóricos, foi desenvolvida por Godino e colaboradores (e.g., Godino & Batanero, 1994; Godino & Batanero 2007). Nesta perspetiva teórica é proposta a seguinte tipologia de objetos matemáticos, que poderá ser utilizada num primeiro nível de análise de práticas matemáticas, nomeadamente: Linguagem (termos, expressões, notações, gráficos,...) nos seus diversos registros (escrito, oral, gestual,...); Situações-problema (aplicações extra -matemáticas, exercícios,...); Conceitos-definições (abordados mediante definições ou descrições); Proposições (enunciados sobre conceitos,...); Procedimentos (algoritmos, operações, técnicas de cálculo,...); Argumentos (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo,...). Estes seis objetos articulam-se formando trajetórias epistémicas e promovendo trajetórias cognitivas. Num segundo nível de análise, no sentido de se proceder a uma análise mais fina, e com o foco de atenção nos argumentos, consideram-se os atributos contextuais: Pessoal/institucional; Ostensivo/não-ostensivo; Extensivo/intensivo(particular/geral); Unitário/sistémico; Expressão/conteúdo (Godino, 2007). Fernandez (2012), desenvolveu investigação sobre a visualização e o raciocínio espacial, tendo por base o EOS, e elaborou modelos que permitem analisar o papel da linguagem, dos artefactos e do pensamento visual que intervêm na resolução de tarefas geométricas. A figura 2 apresenta o referido modelo.

Figura 2. Visualização e objetos matemáticos (adaptado de Fernández, 2012)



Além deste modelo, apresenta outro modelo para um segundo nível de análise de práticas, envolvendo a visualização de objetos matemáticos e dualidades contextuais, como poderemos ver com maior

detalhe na análise de soluções de futuros professores na secção seguinte, aplicado na análise de soluções a uma tarefa especifica.

Comparando e contrastando os dois modelos teóricos apresentados, seguindo a metodologia sugerida por Prediger et al. (2008), verificamos que ambos têm em comum os seguintes elementos concetuais para a promoção do raciocínio geométrico:

- Atributos geométricos (definições/conceitos, propriedades, argumentos (proposições, axiomas, teoremas);
- Qualidade da argumentação (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo);
- Conexão entre representação visual-verbal (relação entre aspetos visuais e verbais) ou seja aspetos da linguagem (termos, expressões, notações, gráficos, ...) nos seus diversos registros (escrito, oral, gestual,...);
- Caraterísticas das tarefas (de medição, de visualização, de prova, …).

No entanto no modelo para a promoção do raciocínio geométrico (DRG), não se identificam de forma explicita os elementos para um segundo nível de análise de práticas de argumentação, envolvendo aspetos da visualização de objetos geométricos e dualidades contextuais (EOS).

Na secção seguinte serão apresentados resultados e discussão de investigação empírica, segundo uma leitura das duas perspetivas teóricas apresentadas, integrando-as de forma a promover a caracterização do raciocínio visual-espacial de futuros professores de matemática**.**

METODOLOGIA

Aplicou-se um questionário, adaptado da investigação de Fernandez (2012) para avaliar as habilidades de visualização e raciocínio espacial de futuros professores angolanos, a frequentarem o último ano da Licenciatura, em Instituições do Ensino Superior de formação de professores, Institutos Superiores de Ciências da Educação – ISCED, em diversas províncias de Angola. Participaram no questionário 200 estudantes e o questionário foi preenchido online, no ano letivo 2021/2022. Cada questão do questionário é composta por duas sub - questões: a primeira é de escolha múltipla e a segunda envolve a justificação da escolha realizada. A análise das justificações envolveu análise de conteúdo, tendo por base dimensões da combinação e integração dos quadros teóricos referidos.

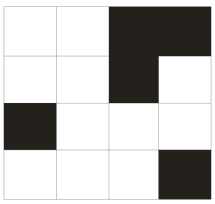
Neste trabalho é apresentada, a título de exemplo, a análise das soluções apresentadas pelos estudantes a uma das questões do questionário.

RESULTADOS

De seguida, tal como já foi referido, apresenta-se uma das questões do questionário, bom como a solução prevista.

Questão

Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário sombrear para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria? Indica abaixo quais seriam esses quadradinhos. Descreve o procedimento ou estratégia que utilizaste para chegar à tua resposta.



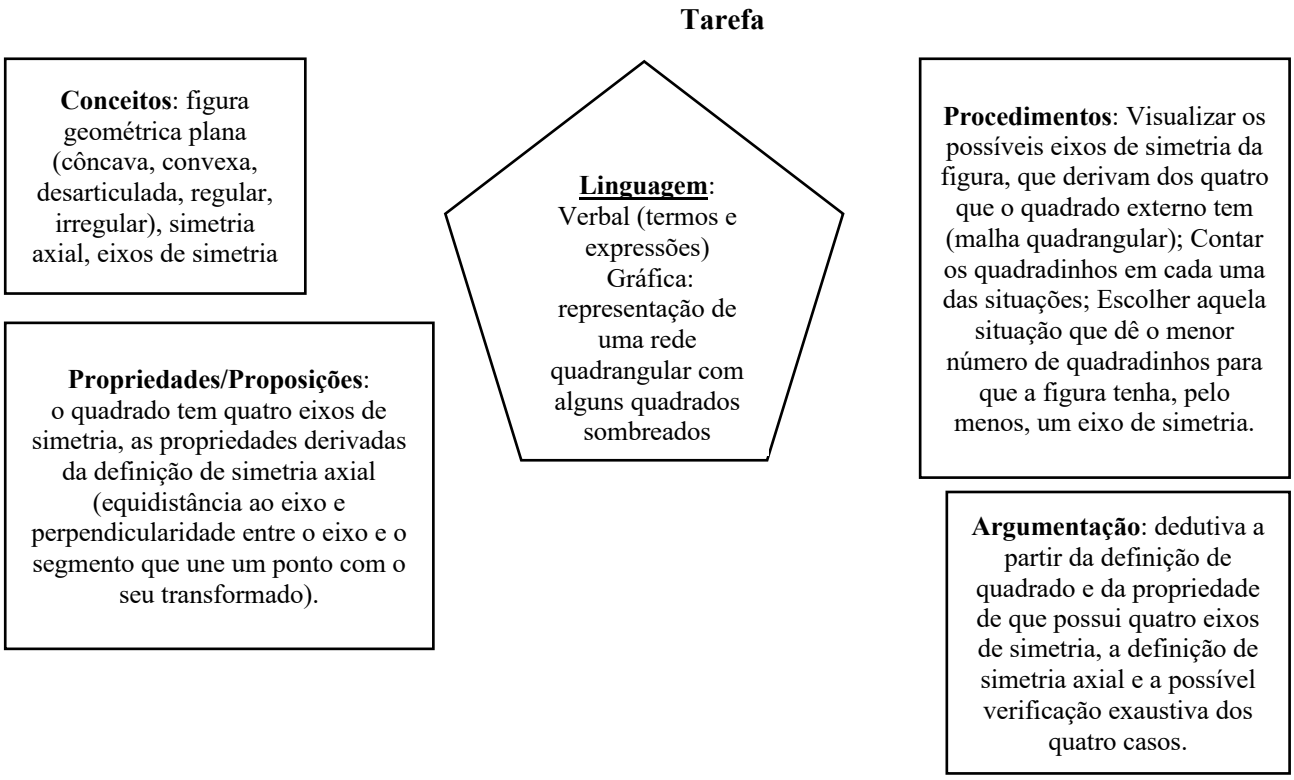
a) 3; b) 1; c) 4; d) 2

Solução prevista: Análise dos vários casos: eixos de simetria; horizontal, vertical, diagonal esquerda-direita e diagonal direita-esquerda. No caso da simetria em relação ao eixo diagonal esquerda-direita, seria necessário sombrear 2 quadradinhos, o número de quadrados inferiores aos outros casos. Assim,

a solução é aquela que fornece a simetria em relação ao eixo diagonal esquerda-direita considerando que se pede o número menor de quadrados a serem sombreados.

Segundo a perspetiva teórica EOS apresenta-se de seguida a configuração de objetos e processos envolvidos na solução, considerando em primeiro lugar as relações primárias envolvidas (um primeiro nível de análise).

Figura 2. Visualização e objetos matemáticos (adaptado de Fernández, 2012)



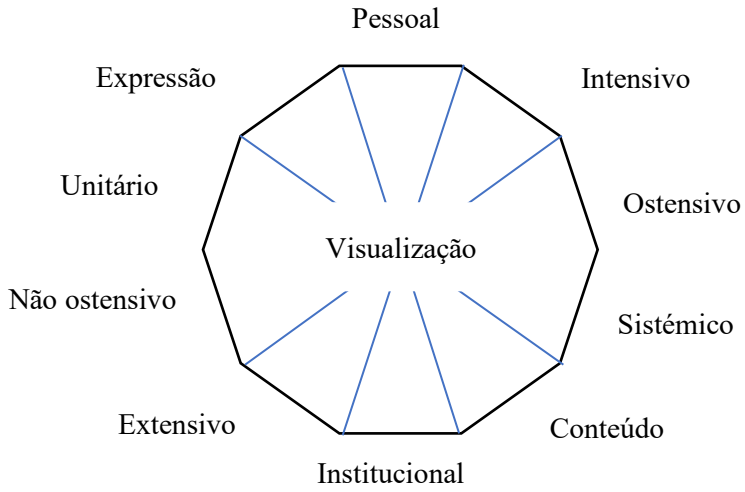
Sobre as relações primárias, de acordo com a figura 2, podemos considerar níveis de desempenho, que nos permitam melhor caraterizar o desenvolvimento do pensamento geométrico, como vamos ver a seguir.

Mas antes, e ainda sobre a solução à questão referida, temos os elementos apresentados na figura 3 e que permitem um segundo nível de análise (objetos geométricos e dualidades contextuais), com o foco de atenção na visualização.

Dualidades contextuais: Extensivo/intensivo (particular/geral); A noção de eixo de simetria é uma generalidade que se deve particularizar neste caso para os eixos de simetria de um quadrado, especificamente para os do quadrado externo que forma a grade; Unitário/sistémico: O sistema formado pelos três conjuntos de quadradinhos marcados na grade quadrangular é considerado como parte de uma única figura. No entanto, para obter uma figura com pelo menos um eixo de simetria pode trabalhar-se com essas partes separadamente, tendo em conta que elas fazem parte de um todo; resolver a questão pode requerer decompor em quatro sub-problemas correspondentes a cada um dos eixos de simetria do quadrado; Designação/designado (expressão/conteúdo): A expressão "menor número" força o sujeito a considerar todas as possibilidades de simetrização de uma figura em relação aos quatro eixos de simetria da malha quadrada e a expressão "pelo menos um eixo" significa que se pode ter que analisar mais de um eixo de simetria para obter o número mínimo de quadradinhos a sombrear (esta expressão não modifica a solução do problema, mas pode criar dificuldades na interpretação da questão para um aluno; Ostensivo - não ostensivo: a questão exige uma resposta não ostensiva, considerando que o questionário foi preenchido online, o que exige a mobilização das capacidades conceptuais, processuais, proposicionais, nas suas facetas não ostensiva e pessoal, o

sujeito recorrerá a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, gestos interiorizados, etc.). No entanto o sujeito pode mobilizar uma resposta com base na marcação, em construção auxiliar, do sombreamento de dois quadrados em falta; Pessoal – institucional: Entre os processos interpretativos que um sujeito deve mobilizar para resolver esta questão, destacamos as suas conceções do que significa a simetria axial, bem como a consideração desta figura disjunta como uma única figura, o que representa uma generalização do que é habitualmente interpretado como "figura" (figura ligada).

Figura 3. Visualização, objetos geométricos e dualidades contextuais (adaptado de Fernández, 2012)



Takker et al. (2022) com o objetivo de identificar níveis do desenvolvimento do raciocínio geométrico (DRG) de futuros professores, propõem um quadro teórico de análise, envolvendo diferentes níveis para diferenciação dos aspetos do desenvolvimento do raciocínio geométrico, já referidos anteriormente. Adaptando a proposta destas investigadoras e de Fernández (2012), considerou-se diferentes níveis do DRG, utilizando os elementos referenciados na figura1 e figura 2, para análise dos argumentos apresentados nas soluções da questão, que se apresentam na tabela seguinte, a tabela 1.

Tabela 1. Níveis do DRG (adaptado de Takker et al., 2022 e Fernández, 2012)

Atributos geométricos (Níveis)	**Natureza da argumentação (Níveis)**	**Linguagem (Níveis)**
1: Há indícios de que domina o conceito de simetria	1: Argumentação não válida	1: Transposição entre a representação visual-visual
2: Domina o conceito de eixo de simetria	2: Argumentação não válida por ter posicionado o eixo de simetria numa posição convencional (vertical ou horizontal)	2: Transposição entre a representação visual-verbal
3: Identifica um eixo de simetria que conduz a uma resposta incorreta	3: Argumentação válida incompleta:	3: Transposição entre o visual- gráfica-verbal
4: Identifica o eixo que conduz à resposta correta	4: Argumentação válida e completa	

Fonte: Trabalho de doutoramento em Curso de Abel da Encarnação, sob orientação de Teresa B. Neto e Ana Breda

Apresentam-se a seguir alguns exemplos, com indicação do número do respondente ao questionário, cuja análise foi realizada tendo em conta a tabela 1.

Para proceder a uma análise mais fina da natureza e qualidade da argumentação, vai recorrer-se à análise dos atributos geométricos envolvidos e suas dualidades contextuais (cf. Figura 3).

Exemplos e análise

Exemplos de resposta correta, mas com argumentação válida incompleta

1. #48: Pintei o segundo quadrado da penúltima linha e o primeiro da última linha.

O estudante selecionou a opção de resposta correta. Revela que domina o conceito de eixo de simetria, no entanto apresenta uma argumentação válida incompleta, referindo o sombreamento de dois quadradinhos em falta, não refere a simetria em relação ao eixo diagonal esquerda-direita considerando que se pede o número menor de quadrados a serem sombreados. Observa-se uma transposição do visual – gráfica - verbal, pois refere que pintou (numa malha quadrangular) os quadrados em falta para dar resposta ao solicitado. Apesar da argumentação envolver uma resposta não ostensiva, considerando que o questionário foi preenchido online, o estudante refere que recorreu à pintura de quadradinhos, deduzindo-se que fez uma réplica da figura para apoiar o raciocínio, tendo necessidade de recorrer ao ostensivo.

Nível: 1,3,3

2. #90: Sombreamos apenas os últimos dois quadradinhos da diagonal secundária.

O estudante selecionou a opção de resposta correta e apresenta uma argumentação parcialmente válida, identificando o eixo que conduz à resposta correta e justifica a resposta fazendo uma transposição do visual para o verbal. Sobre a dualidade contextual (particular/geral), a noção de eixo de simetria é uma generalidade, mas que nesta resposta o estudante particularizou, neste caso, para o eixo de simetria (diagonal secundária). Não há indícios de que tenha utilizado uma réplica da figura como apoio, o que nos leva a induzir de que a argumentação apresentada não recorreu ao ostensivo.

Nível: 4,3,2

Exemplos de resposta correta, mas com argumentação não válida

De seguida temos dois exemplos de resposta correta, mas com argumentação não válida.

1. #63: Uma figura tem eixo de simetria quando tem pelo menos uma linha que divide a figura em par.

O respondente apesar de ter escolhido a opção de resposta correta, apresenta uma argumentação que não justifica a resposta que selecionou. Não identifica nenhum atributo geométrico relevante, porém há indícios de que domina o conceito de simetria. À luz da dualidade pessoal – institucional, destaca-se a conceção do estudante do que significa o conceito de simetria axial, associando a "uma linha que divide a figura em par". Não há indícios de que tenha recorrido a construção de figura (ostensivo) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 1,1,2

2. #145: Precisamos apenas sombrear dois quadradinhos, isto é, os da lateral esquerda.

Um outro exemplo em que o respondente apesar de selecionar, igualmente, a opção de resposta correta, apresentou uma argumentação que não justifica a resposta selecionada. Há indícios de que identifica o eixo que conduz à resposta correta, fazendo uma transposição do visual para o verbal. A análise da argumentação, recorrendo às dualidades contextuais, permite induzir sobre a dualidade particular/geral, que o estudante tem a noção de eixo de simetria, e que particularizou neste caso. Recorreu a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, para os eixos de simetria de um quadrado) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 4,1,2

Exemplos de resposta incorreta e com argumentação não válida

Apresentamos a seguir quatro exemplos ilustrativos de resposta incorreta e com argumentação não válida, selecionados aleatoriamente.

#26: Partindo do quadradinho no canto direito inferior e subindo obliquamente, obtemos um único eixo de simetria.

O respondente selecionou uma resposta incorreta e apresentou uma argumentação não válida. Identifica um eixo de simetria que conduz a uma resposta incorreta, justificando a resposta através de uma argumentação não válida, fazendo uma transposição do visual para o verbal. A análise da argumentação, recorrendo às dualidades contextuais, permite induzir sobre o unitário/sistémico, que o estudante trabalhou com partes da figura separadamente, mas não parece ter tido em conta que elas fazem parte de um todo, não considerou os vários eixos de simetria da figura vista como um todo (uma malha quadrada). Recorreu a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, para os eixos de simetria de um quadrado) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 3,1,2

#81: Fiz um desenho idêntico, dividindo a figura por 2.

O respondente selecionou uma resposta incorreta e apresenta uma argumentação não coerente tendo em consideração o solicitado nesta questão. Identifica um eixo de simetria que conduz a uma resposta incorreta, justificando a resposta através de uma argumentação não válida por ter posicionado o eixo de simetria numa posição convencional (vertical ou horizontal), fazendo uma transposição do visual para o verbal. O estudante refere que recorreu a um desenho, deduzindo-se que fez uma réplica da figura para apoiar o raciocínio, tendo necessidade de recorrer ao ostensivo.

Nível: 3,2,3

#59: Para achar o eixo de simetria de uma figura é necessário que as figuras estejam em lados opostos.

O estudante selecionou uma resposta incorreta e apresenta uma argumentação não válida. Domina o conceito de eixo de simetria, justificando a resposta através de uma argumentação não válida, fazendo uma transposição do visual para o verbal. À luz da dualidade pessoal – institucional, destaca-se a conceção do estudante do que significa o conceito de simetria axial, associando o conceito de figuras simétricas, em relação a um eixo de simetria, estarem em "lados opostos". Não há indícios de que tenha recorrido a construção de figura (ostensivo) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 2,1,2

#70: Utilizei conhecimentos de Geometria. O eixo de simetria é uma linha que divide uma figura em duas partes simétricas, isto é, como se fossem o objeto e a sua imagem refletida num espelho.

Mais um exemplo em que o respondente escolheu uma resposta incorreta, tendo apresentado uma argumentação não válida. Domina o conceito de eixo de simetria, justificando a resposta através de uma argumentação não válida. À luz da dualidade pessoal – institucional, o estudante associa o conceito de simetria axial à reflexão de um objeto num espelho. Recorreu a elementos linguísticos ostensivos (objeto, imagem, espelho)) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 2,2,2

A tabela seguinte apresenta a frequência absoluta e percentagem dos níveis de DRG dos estudantes, futuros professores, que apresentaram respostas que se conseguiram classificar dentro dos indicadores definidas na tabela 1, ou seja 89 em 200 participantes no estudo. Registaram-se 111 respostas que

não permitiram uma classificação dentro dos indicadores definidos na tabela1, ou apresentaram uma argumentação não entendível.

Tabela 2. Níveis de DRG de futuros professores

	1,1(3),2(3)	2,1(2),2	3,1(2),2(3)	4,1(3),2
Frequência absoluta	60	7	17	5
Percentagem (%)	67,42	7,87	19,1	5,62

Da análise feita na tabela 2 verifica-se que das 89 argumentações apresentadas, podemos concluir o seguinte:

- 67,42% apresentaram uma argumentação não válida, no entanto houve indícios do domínio do conceito de simetria. Observou-se uma transposição entre representações visual – gráfica-verbal; A análise da argumentação, recorrendo às dualidades contextuais, permite induzir sobre a dualidade particular/geral, que os estudantes têm a noção de eixo de simetria, e que particularizam neste caso concreto. Observa-se uma transposição do visual – gráfica - verbal, pois referem que pintaram (numa malha quadrangular) os quadrados em falta para dar resposta ao solicitado ou recorreram a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, para os eixos de simetria de um quadrado) e fazem uma transposição do visual para o verbal.
- 19,1% identificaram um eixo de simetria que conduziu a uma resposta incorreta, com argumentação não válida por terem posicionado o eixo de simetria numa posição convencional (vertical ou horizontal), houve o recurso a representações entre o visual – gráfica-verbal; A análise da argumentação, recorrendo às dualidades contextuais, permite induzir sobre o unitário/sistémico, que o estudante trabalhou com partes da figura separadamente, mas não parece ter tido em conta que elas fazem parte de um todo, não considerou os vários eixos de simetria da figura vista como um todo (uma malha quadrada). Recorreu a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, para os eixos de simetria de um quadrado) ou ostensivo (recurso a desenho, deduzindo-se que fez uma réplica da figura para apoiar o raciocínio), fez uma transposição do visual para o verbal ou visual- gráfica – verbal.
- 7,87% evidenciaram o domínio do conceito de eixo de simetria, mas a argumentação apresentada foi não válida, utilizando a transposição entre o visual – gráfica-verbal;
- 5,62% identificaram o eixo que conduz à resposta correta, não justificando a resposta selecionada e/ou justificando a resposta através de uma argumentação válida, incompleta, fazendo uma transposição do visual-verbal.

Através da leitura e análise da tabela 1 e da tabela 2, podemos induzir que os estudantes inquiridos demonstraram muitas fragilidades ao nível do desenvolvimento do raciocínio geométrico. O que sustenta a urgência de se ponderar a formação na área da geometria, nos Institutos Superiores de Ciências da Educação – ISCED, no sentido de alterar esta situação.

CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma análise de soluções apresentadas por futuros professores de matemática, perante uma tarefa de simetria de reflexão, integrando duas perspetivas teóricas (EOS e DRG). Com essa ligação pretende-se uma melhor compreensão sobre o raciocínio visual-espacial de futuros professores de matemática, bem como identificar níveis de RG. Para isso formulou-se a seguinte questão de investigação: De que forma a ligação entre a perspetiva teórica do Enfoque Ontossemióticos (EOS) e as caraterísticas do Desenvolvimento do Raciocínio Geométrico (DRG),

promove o entendimento da argumentação de futuros professores, quando confrontados com uma tarefa geométrica, envolvendo o conceito de simetria de reflexão?

Uma primeira análise, ao nível das relações primárias envolvidas na visualização e objetos geométricos, integrando elementos concetuais do EOS e DGR, permitiu concluir que os estudantes inquiridos revelaram níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico que refletem fragilidades que deverão ser mitigadas, através de formação consistente e que tenha em consideração os elementos: atributos geométricos; natureza da argumentação e linguagem (ter em conta as diferentes representações semióticas usadas). A análise dos objetos geométricos e dualidades contextuais, envolvidos nos argumentos apresentados pelos estudantes, futuros professores, apontam para caraterísticas de raciocínio percetual (objeto geométrico ostensivo, particularização, conceção pessoal de atributos geométricos,…) e não de um raciocínio dedutivo. Na análise realizada, dos argumentos específicos apresentados, foi necessário ter em conta as diferentes representações semióticas usadas.

Em trabalho futuro será aconselhável, após momentos de formação, avaliar o impacto dessa formação na promoção do raciocínio geométrico, na linha do trabalho realizado por Takker et al. (2022), em que identificaram, após uma formação especifica com futuros professores, uma promoção dos níveis do raciocínio geométrico.

Referencias

Adler, J. y Ronda, E. (2015). A Framework for Describing Mathematics Discourse in Instruction and Interpreting Differences in Teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19*(3), 237–254. https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1089677

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI study* (pp. 37–52). Kluwer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apparentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, differenciation des raisonnement et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5–53.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Fernández, T. (2012). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. [Thesis, Facultad de Ciências da Educación]. Repositório Inatitucional da Universidade de Granada https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernandez_tesis.pdf

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127–135.

Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática para o Ensino Básico*. Ministério de Educação e Ciência: Lisboa, Portugal.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008), "Networking strategies and methods forconnecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework", *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 165–178. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-008-0086-z

Kuzniak, A. (2018). Thinking About the Teaching of Geometry Through the Lens of the Theory of Geometric Working Spaces. In: P. Herbst et al. (eds) *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME-13* Monographs (pp. 5 – 21). Spinger.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 691–719. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry educationat the primary school. *ZDM Mathematics Education*, *51*(3), 319–329.

Takker, S., Ratnayake, I. y Adler, J. (2022). Framework for analysing secondary mathematics teachers´ development of geometric reasonung. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 83-90). PME.

POTENCIALIDADES Y RETOS DEL USO DE LA REALIDAD VIRTUAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Potentials and challenges of the use of virtual reality for geometry education

Romero Albaladejo, I. M.

Universidad de Almería

Resumen

La realidad virtual tiene actualmente el potencial de producir transformaciones significativas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Los estudios realizados hasta el momento constatan las mejoras que produce el uso de esta tecnología en la motivación y la confianza en el aprendizaje, la visualización, las habilidades espaciales y el compromiso interactivo de los estudiantes. No obstante, hay una demanda de estudios empíricos sobre su integración efectiva en las aulas y su repercusión a nivel curricular. En esta línea, en el equipo de investigación sobre el software de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR venimos llevando a cabo experimentos de enseñanza en diversos niveles educativos, bajo el paradigma de la Investigación de Diseño. En esta ponencia exponemos los principales beneficios obtenidos, los retos afrontados y las líneas de trabajo futuro.

Palabras clave: *geometría, NeoTrie, realidad virtual, realidad virtual inmersiva.*

Abstract

Virtual reality currently has the potential to produce significant transformations in the teaching and learning of geometry. Studies so far have shown improvements in motivation and confidence in learning, visualization, spatial skills, and interactive engagement of students through the use of this technology. However, there is a demand for empirical studies on its effective integration in the classroom and its impact on the curriculum. Along this line, the research team on the immersive virtual reality software NeoTrie VR has been conducting teaching experiments at various educational levels, under the paradigm of Design Research. In this paper we present the main benefits obtained, the challenges faced and the lines of future work.

Keywords: *geometry, NeoTrie, immersive virtual reality, virtual reality.*

INTRODUCCIÓN

En el siglo XXI, la incorporación de recursos tecnológicos en la enseñanza se considera necesaria en una sociedad de nativos digitales. Las posibilidades educativas que se crean con la implementación de las tecnologías digitales en las clases deben dar lugar a innovaciones metodológicas que representen una transformación del paradigma educativo tradicional. En particular, tecnologías como la realidad aumentada y la realidad virtual tienen el potencial, no solo de complementar, sino de generar cambios significativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría (Moral-Sánchez y Siller, 2022). De acuerdo con Dindyal (2015), la enseñanza de esta materia debería ir más allá de presentar a los escolares una disciplina centrada en el etiquetado y la clasificación de formas; debería tener un enfoque más dinámico y transformativo, desarrollando el sentido espacial y la capacidad de crear en los escolares; sobre todo, teniendo en cuenta estos son capaces de sobrepasar las expectativas curriculares, si tienen oportunidades adecuadas para hacerlo (Moss et al., 2015). Para ello, la enseñanza debe cubrir un rango variado de aproximaciones, incluyendo el juego. Los sistemas de geometría dinámica en 3D han generado importantes expectativas en este sentido. En opinión de Ng y Sinclair (2018), al posibilitar el hacer matemáticas en el espacio tridimensional, dichos sistemas pueden transformar una tradición de dos milenios de dibujar bidimensionalmente en la arena, el papel y las pantallas.

Romero Albaladejo, I.M. (2024). Potencialidades y retos del uso de la realidad virtual para la enseñanza de la geometría. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 33-48). SEIEM.

A principio de siglo, Presmeg (2006) indicaba la necesidad acuciante de aumentar el uso y poder de la visualización espacial en la educación matemática y de disponer de herramientas para ello. Según Cevikbas et al. (2023), los entornos virtuales pueden utilizarse para visualizar objetos y estructuras geométricas de una forma más inmersiva, realista e interactiva, permitiendo explorar, representar y manipular formas y figuras en tres dimensiones. Esta oportunidad puede ayudar especialmente al alumnado a mejorar sus habilidades de razonamiento espacial y profundizar en su comprensión de los conceptos geométricos. Además, desde el punto de vista pedagógico, las actividades llevadas a cabo en entornos virtuales hacen el aprendizaje más atractivo y aumentan la participación activa de los estudiantes, lo cual incrementa su motivación y les lleva a querer continuar expandiendo su conocimiento (Moral-Sánchez y Siller, 2022).

Ante un panorama tan prometedor, autores como Cevikbas et al. (2023) y Dilling y Sommer (2022) reclaman la necesidad de estudiar las posibles ventajas e inconvenientes de las tecnologías de realidad virtual en el aprendizaje de las matemáticas a partir de estudios empíricos. Esto contribuirá a garantizar que los recientes avances y tendencias de la investigación, así como el éxito de la aplicación de estas tecnologías, se guíen por evidencias y no por especulaciones que pueden dar lugar a exageraciones.

Este trabajo consta de dos partes. En la primera, describimos diferentes tipos de realidad virtual, revisamos los estudios sobre su inclusión en la educación matemática y geométrica, y exponemos los principales beneficios y limitaciones detectados en la literatura hasta el momento actual. En una segunda parte, presentamos la experiencia de nuestro grupo de investigación con el software de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR (en adelante, Neotrie).

TIPOS DE REALIDAD VIRTUAL

La realidad virtual supone un cambio cualitativo con respecto a otras tecnologías, como la televisión o la pantalla de un ordenador, ya que produce representaciones altamente realistas y permite a las personas interactuar con objetos virtuales. Dentro de las tecnologías de realidad virtual, podemos distinguir distintos grados de interacción con la realidad y la virtualidad, en un abanico que va desde la Realidad Aumentada (RA) a la Realidad Virtual Inmersiva (RVI). Mientras que las tecnologías de RA superponen información virtual al mundo real y permiten a los usuarios interactuar con contenidos tanto reales como virtuales, las tecnologías de RV transportan al usuario a un entorno virtual con el objetivo de sumergirlo completamente en ese (Milgram y Kishino, 1994). Para el usuario, la diferencia radica en el nivel de inmersión: en la RA, la perspectiva del usuario sigue siendo principalmente la del mundo real, que observa desde un móvil o tableta, mientras que en la RV, el usuario está totalmente inmerso en un entorno virtual. La realidad mixta (RM) combina ambos tipos, permitiendo al usuario interactuar con objetos virtuales en su entorno real.

Además, hay que tener en cuenta el nivel de interactividad, que mide el grado de implicación del usuario con el entorno virtual, el cual suele lograrse mediante el uso de sensores y dispositivos de entrada, como teclados o joysticks. Rodríguez (2022a) propone una serie de niveles basados en el grado de interacción del individuo con los objetos virtuales, considerando una figura geométrica o cualquiera de sus elementos, como un vértice, y la manera de agarrar y manipular el objeto:

- Un vértice en el plano visto en una pantalla 2D y una mano con el ratón seleccionando y moviendo el punto. Todos los SGD (software de geometría dinámica) 2D suelen funcionar de esta manera.
- Un vértice en el espacio visto en una pantalla 2D y una mano con el ratón seleccionando y moviendo el punto, no se sabe bien en qué dirección. La mayoría de software de diseño 3D, como Blender, Autocad, etc. incorpora 3 vectores ortogonales que indican las direcciones a las que se pueden mover los vértices, o se puede utilizar una tecla del teclado para establecer la dirección deseada.

- Un vértice en una pantalla táctil para seleccionarlo y moverlo con el dedo. Así se utiliza en los teléfonos móviles y tabletas actuales en RA; por ejemplo, GeoGebra-AR. Ahora bien, no es fácil mover un punto (u objeto) en el espacio. Esto se resuelve en la RV inmersiva usando cascos HMD con controladores de mano. El software de realidad mixta GeoGebra MR y otros sistemas de RV, como la serie HTC Vive, Windows Mixed Reality, Oculus Rift/S/Quest, utilizan los botones laterales, de modo que cuando te acercas a un objeto y aprietas la mano, parece que lo estás sujetando, y puedes moverlo cómodamente.
- Un vértice en una escena de RV que puedes tocar con tus manos virtuales. Neotrie utiliza controladores, que el jugador ve como manos que permiten agarrar el vértice (u objeto) y moverlo en la dirección deseada, que coincide exactamente con la dirección real del espacio.
- Mayores niveles de interacción: la consecución de una interacción casi real con los objetos virtuales se está desarrollando con dispositivos como guantes hápticos. Es de suponer que su precisión irá mejorando cada vez más, aunque la posibilidad de tener mandos en las manos para pulsar diferentes botones podría ser ahora mismo la más adecuada para la geometría dinámica en RV.

La dificultad de la RA actual para la enseñanza de la geometría es que el arrastre o manipulación de los puntos se sigue haciendo sobre una pantalla, antes con el ratón sobre la pantalla del ordenador y ahora con el dedo sobre la pantalla de un dispositivo móvil. Esta dificultad se supera con los sistemas de RV de alta calidad, que facilitan la interacción directa con los objetos 3D, gracias a sus controladores manuales. Los programas informáticos RVI generan nuevos métodos de aprendizaje en los que, mediante una interacción dinámica, intervienen los sentidos táctil (motor), visual y auditivo. Esta posibilidad de proporcionar un espacio en el que los alumnos de todos los niveles podrían utilizar sus manos para actuar directamente sobre objetos matemáticos, sin necesidad de mediar intuiciones a través de ecuaciones, sistemas de símbolos, teclados o clics de ratón ha llevado a algunos autores a pensar que nos encontramos al inicio de una nueva revolución en el ámbito educativo, la llamada "Revolución Kinestésica" (Rodríguez et al., 2021).

Las expectativas generadas por los potenciales beneficios de la aplicación de la realidad virtual al campo de la educación en general y de la educación matemática han atraído una atención considerable en los últimos años. A continuación, presentamos una panorámica de cómo estas tecnologías se han ido incorporando a la educación matemática y, en particular, a la enseñanza de la geometría, a través de estudios empíricos y sus resultados.

INFLUENCIA DE LA REALIDAD VIRTUAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA GEOMETRÍA

Los primeros trabajos sobre el uso de realidad virtual para la enseñanza de las matemáticas, centrados en la geometría, aparecen a finales del pasado siglo y primera década del siglo XXI (Cross y Hanson, 1994; Kaufmann et al., 2000; Yeh y Nason, 2004; Kauffmann, 2009; Song y Lee, 2002). Desde entonces, la cantidad de estudios sobre el tema ha ido creciendo y en los últimos años han aparecido revisiones sistemáticas de la literatura, como las realizadas por Ahmad y Junaini (2020) y por Palanci y Turan (2021), que informan sobre las mejoras que produce el uso de RA en la motivación y la confianza en el aprendizaje, la visualización, las habilidades espaciales y el compromiso interactivo. Sin embargo, también revelan problemas asociados de carácter técnico y de costes, así como dificultades para comprender conceptos matemáticos visualmente.

La revisión realizada por Cevikvas et al (2023) sobre el uso de RA y RV en el aprendizaje de las matemáticas publicados en revistas indexadas en WoS y SCOPUS constata que la investigación se centra en gran medida en la geometría (53% de los 59 trabajos analizados). El álgebra es la segunda área más estudiada (22% de los estudios), seguida de una mezcla de algunos dominios (por ejemplo, geometría, álgebra y cálculo) (6% del total). El análisis muestra un aumento de las publicaciones

sobre el tema a partir de 2018, lo que denota el considerable interés de los investigadores y el hecho de que las aplicaciones de las tecnologías RA/RV en el panorama educativo han proliferado en los últimos años. Las tecnologías de RA se utilizaron con mucha más frecuencia que las de RV en contextos educativos (80% frente al 15% de los estudios revisados, abarcando el 5% ambas tecnologías). Los autores aducen diversas razones: que los sistemas de RV son complejos y tienen un coste relativamente elevado, por lo que que pueden resultar prohibitivos para muchas instituciones educativas; que el desarrollo de aplicaciones de RV requiere considerables conocimientos técnicos; que las tecnologías de RA, disponibles desde dispositivos móviles, tienden a ser más accesibles que las de RV; y, por último, que hay una falta de conocimiento de los posibles beneficios y aplicaciones de la RV.

En los 59 trabajos incluidos en la revisión de Cevikbas et al. (2023) están representados 25 países, siendo Asia y Europa aquellos con más autores contribuyendo a este campo de estudio (45% y 33%, respectivamente). España ocupa un lugar destacado, con un 28% aproximadamente de los autores europeos y 7 trabajos analizados: 2 en álgebra y cálculo, y el resto en geometría, en diversos niveles educativos, tanto con RA (Flores-Bascuñana et al., 2019; Pozo-Sánchez, 2021) como con RV (Cangas et al., 2019; Rodríguez et al., 2021) y RA/RV/RM (Cabero-Almenara et al., 2021). En los simposios de la SEIEM, podemos encontrar también algunas aportaciones con RA (Sua et al., 2021), RV (Chavil-Montenegro et al., 2021; Moral-Sánchez et al., 2022) y RA/RV/RM (Rotger et al., 2021).

La mayor parte de los trabajos revisados por Cevikbas et al. (2023) se ubican en los niveles de primaria y secundaria y todos ellos aportan pruebas relativas a los efectos favorables de la tecnología de RA/RV en el aprendizaje. Como se apunta en las revisiones precedentes, los beneficios socioemocionales son los más frecuentes, junto con la mejora de las habilidades visuoespaciales de los estudiantes y el aumento de su compromiso con el aprendizaje. Así, un número significativo de los estudios considerados señalaron que la RA y la RV aumentaban el interés, la motivación de los estudiantes por aprender y la curiosidad por las matemáticas. Otra característica destacada de estas tecnologías es su capacidad para proporcionar a los usuarios experiencias de aprendizaje interactivas y dinámicas que, a su vez, fomentan la interacción social entre ellos. Varios estudios han indicado que la RA/RV representa una buena oportunidad para que los estudiantes mejoren sus habilidades de pensamiento visual y favorece el desarrollo de sus capacidades espaciales. Además, según los estudios revisados, mediante el uso de la RA/RV, los estudiantes se vuelven más independientes y autónomos en sus procesos de aprendizaje de las matemáticas.

No obstante, también hay estudios que no obtienen diferencias significativas o resultados concluyentes sobre el uso de RV (Carbonell-Carrera y Saorín, 2017; Dünser et al., 2006); Kang et al., 2020; Seabra y Santos, 2013). Ello nos lleva a plantear la cuestión metodológica, ya que, si bien Kang et al. (2020) no obtuvieron diferencias significativas en una prueba específica de conocimientos entre el grupo control y el experimental utilizando un recurso de RVI, los propios estudiantes afirmaban que había mejorado su capacidad para imaginar los conceptos asociados. Dünser et al. (2006) observaron resultados interesantes sobre el entrenamiento de habilidades espaciales mediante el uso de RA que no se vieron reflejados en los instrumentos de recogida de datos empleados en el estudio. También Morales y Codina (2020) constataron que los buenos resultados de aprendizaje detectados en las sesiones con el software de RVI Neotrie no fueron reflejados en la misma medida en el postest. En su revisión, Cevikbas et al. (2023) encontraron una prevalencia de métodos de investigación cuantitativos con tamaños de muestra pequeños. Los autores plantean la necesidad de estudios a gran escala que puedan ayudar a visualizar el panorama general en términos del impacto de las tecnologías RA/RV en el aprendizaje; no obstante, el reclutamiento de muestras más grandes puede ser un reto debido a los costes y los desafíos logísticos asociados a la implementación de tecnologías de RA/RV en entornos educativos, especialmente en el caso de estas últimas. Otra vía sería la de estudios de investigación cualitativa en profundidad que faciliten un examen exhaustivo de este impacto.

Por otra parte, Won et al. (2023) recomiendan que los futuros estudios empíricos reconozcan los enfoques teóricos y las teorías del aprendizaje a la hora de diseñar y evaluar el aprendizaje con RVI. Además, detectan que los estudios con este tipo de tecnología son en su mayor parte trabajos experimentales y de desarrollo, en lugar de aplicarse regularmente en la enseñanza real. Cevikbas et al. (2023) señalan, por otra parte, la falta de estudios sobre la efectividad de la RV para mejorar la competencia matemática del alumnado y sus habilidades para resolver problemas. Entre las razones que frenan la incorporación de estas tecnologías al currículo de forma regular, dichos autores señalan inconvenientes relacionados con: deficiencias técnicas (infraestructura deficiente, falta de dispositivos y software) y fallos tecnológicos (problemas de conexión a Internet, problemas audiovisuales); dificultades de accesibilidad para todo el alumnado relacionados con el coste de los dispositivos y de los largos tiempos de uso que estos requieren para los estudiantes individualmente; así como posibles problemas de salud relacionados con el elevado tiempo que se pasa frente a la pantalla y el pequeño tamaño de las pantallas de los dispositivos móviles, en el caso de la RA, y en el caso de la RVI, mareos o problemas de visión mediante gafas virtuales. Todo esto lo tienen en cuenta los profesores, que ven con precaución la gran inversión de esfuerzo que han de realizar para incorporar esta tecnología a sus aulas.

Sin embargo, a medida que las tecnologías de RV sigan evolucionando y se hagan más asequibles, es probable que aumente su uso con fines educativos. De ahí la pertinencia de intervenciones en las aulas de matemáticas que aborden el tema de forma sistemática y estén basadas en la investigación, con objeto de proporcionar directrices y ejemplos de las mejoras prácticas. En la segunda parte de este trabajo, exponemos cómo venimos realizando la investigación sobre el desarrollo y uso en las aulas del software de RVI Neotrie por parte del grupo de investigación al que pertenezco, en la Universidad de Almería. A continuación, presentamos el software y sus características; los interrogantes que guían nuestra investigación; los planteamientos metodológicos comunes y las particularidades de los distintos estudios realizados; los resultados obtenidos, los retos afrontados y las líneas de trabajo futuras.

NEOTRIE

Neotrie VR es un SGD 3D de RVI para la enseñanza y aprendizaje de la geometría que se está desarrollando en la Universidad de Almería desde 2017 y en el que participamos un equipo multidisciplinar que integra matemáticos, programadores, especialistas en Educación Matemática y docentes de primaria y secundaria. Paralelamente al desarrollo del software, hemos venido realizando trabajos sobre su implementación en aulas reales en diversos niveles educativos y con distintos tópicos geométricos. (Más información en https://www2.ual.es/neotrie/).

La principal característica de Neotrie, que lo destaca de otros softwares similares, es la de poder crear y manipular figuras geométricas directamente con las manos virtuales. Las acciones básicas de Neotrie se realizan pulsando un botón de un mando físico. Al hacerlo, aparece un menú de acciones, que se activan cuando el usuario pasa por encima de las manos virtuales (Figura 1a). Estas acciones incluyen: crear vértices (puntos), aristas, caras, modificar su posición en el espacio, borrar elementos de las figuras, realizar anotaciones 3D, extruir figuras, trasladar y rotar formas en su conjunto, o visualizar la información básica de cada forma construida, así como el número de vértices, aristas, caras, longitudes, áreas, volúmenes, etc.

Además, Neotrie contiene una diversidad de herramientas (Figura 1b), las cuales se han desarrollado conjuntamente entre los equipos de investigación y de desarrollo para que sean intuitivas, fáciles y coherentes, tanto en su significado matemático como en la experiencia del usuario, de forma que:

- Todas las herramientas y formas creadas pueden sujetarse con las manos virtuales para moverlas hacia donde el usuario desee.
- Cada herramienta dispone de un vídeo con instrucciones de uso.

- Todas las formas y sus elementos pueden colorearse.
- Algunas herramientas están codificadas por colores, lo que hace su uso más intuitivo.
- Las herramientas están optimizadas en función de los gestos naturales realizados con las manos. Por ejemplo, el arrastre simultáneo con ambas manos produce una transformación homotética de la forma que se está arrastrando, incluso puede uno adentrarse en la figura agrandada y explorarla desde el interior. La opción de unión permite al usuario hacer formas más complejas a partir de otras simplemente juntando dos vértices cualesquiera de la misma.
- Algunas formas dependen de los parámetros que se visualizan y pueden ser modificadas virtualmente tocando el menú de botones de estas herramientas, como es el caso de las herramientas de rotación, deslizador o interpolador entre dos puntos.

Figura 1a. Menú de acciones básicas

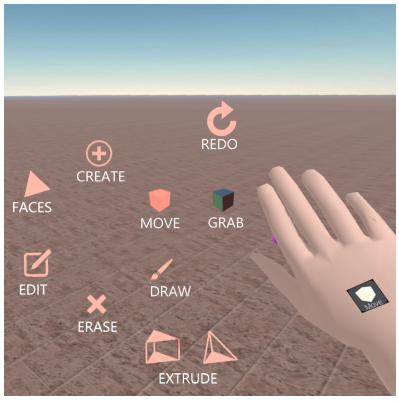
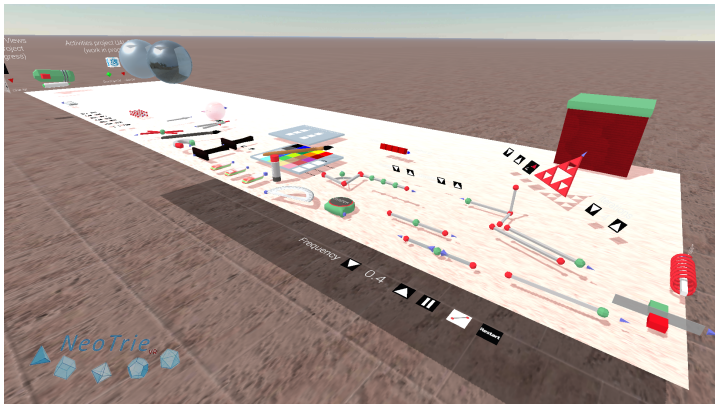


Figura 1b. Mesa de herramientas



Algunas de las herramientas diseñadas en Neotrie son comunes a todos los SGD, pero se han adaptado a 3D, y otras se han desarrollado específicamente a partir de la evaluación sistemática del software ofrecida por docentes e investigadores. Así, por ejemplo, entre las herramientas comunes de los SGD 2D y 3D, se encuentran las de dibujo clásicas, como un pincel y una paleta de colores, un sello para copiar y pegar, una goma de borrar para eliminar formas enteras, herramientas de rotación, reflexión, puntos medios, líneas paralelas, transportador de ángulos y cinta métrica. Dado el entorno tridimensional, algunas de las herramientas tienen características diferentes de las que se encuentran normalmente en un SGD-2D. Por ejemplo, la herramienta de intersección muestra el punto de intersección de dos líneas rectas cuando se encuentran o los dos puntos más cercanos si se cruzan. Otra de las principales características de los SGD es que ofrecen herramientas de trazado y movimiento automático, especialmente útiles para observar loci geométricos. En este caso, Neotrie permite al usuario ver el trazado de los objetos cuando se arrastran o cuando se incorpora movimiento. Además, existe una herramienta de etiquetado que añade información sobre los elementos de las formas y todos los datos se actualizan dinámicamente cuando el alumno modifica la posición de estos elementos; para ello, las coordenadas y las ecuaciones se basan en un sistema de coordenadas cartesianas móviles.

Entre las especificidades para SGD-3D, Neotrie dispone de ciertas herramientas para hacer actividades en un espacio tridimensional. La herramienta "imán" realiza movimientos seguidos de una rotación para colocar la forma en la posición correcta en las acciones de unión; esto es muy útil a la hora de realizar mosaicos, teselaciones 3D o fractales. Un sistema de vistas permite visualizar la planta, alzado y perfil de los objetos geométricos. La herramienta "escáner" muestra la proyección de una forma en cualquier dirección, así como la sección de la misma con el plano. También una calculadora gráfica 3D hace posible representar curvas y superficies paramétricas.

Por otra parte, Neotrie permite realizar actividades STEAM. Además de las formas geométricas geométricas 3D, es posible insertar objetos 3D en formatos STL u OBJ, importados de programas de

diseño 3D. Pueden añadirse imágenes y vídeos manipulables, por ejemplo, personalizando los escenarios con imágenes de 360◦. Una cámara permite al profesor cambiar entre las vistas en primera y tercera persona, así como elegir la opción estereoscópica en ambas vistas. La ventaja que encontramos al trabajar en una pizarra 3D en RV es que el jugador (con la cámara en primera persona) puede girar la cabeza para tener rápidamente distintas perspectivas de la figura, lo que ayuda a recrear mentalmente la figura en el resto de los espectadores. La cámara en tercera persona muestra una vista fija de nosotros, representados por nuestro avatar, trabajando en la escena de RV. Se pueden hacer gestos "en el aire", señalar o servir de apoyo en algún razonamiento espacial, etc. Esta cámara también se puede mover para mostrar perspectivas diferentes. Desde el punto de vista del profesor, esta herramienta es muy útil para explicar conceptos y razonamientos en 3D.

Con todas estas características, vemos que Neotrie se sitúa en un nivel alto, cercano a la realidad, dentro de la escala presentada en el segundo apartado.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Una vez expuesta la potencialidad del software NeoTrie VR para la enseñanza de la geometría, y teniendo a los desarrolladores de un recurso tan atractivo en la Universidad de Almería, nuestro grupo de investigación e innovación en la didáctica de la geometría se plantea las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿Cómo introducir Neotrie en aulas reales?
- ¿Qué contenidos son apropiados para aprovechar su potencial y hacer una contribución relevante a las demandas curriculares actuales?
- ¿Cómo diseñar actividades con una demanda cognitiva apropiada para el alumnado? ¿Qué marcos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría, y de la matemática en general, pueden informar el diseño de las actividades y la evaluación de su implementación?
- ¿Qué resultados se consiguen?
- ¿Qué aportaciones podemos realizar desde la práctica educativa para la mejora del software?

METODOLOGÍA

Estamos de acuerdo con Martín-Gutiérrez et al. (2017) en que la forma en que se usen los recursos tecnológicos tiene influencia en los resultados de aprendizaje. Es posible hacer uso de la tecnología de RVI visualizando de forma pasiva, siguiendo simplemente un conjunto de instrucciones, o bien a través de la inmersión y la interactividad. Esta última forma de utilización constituye la piedra angular de este recurso y requiere de un andamiaje pedagógico para diseñar escenarios virtuales que saquen el máximo partido al aprendizaje.

La Investigación de Diseño (Prediger et al., 2015; Molina, 2021) es especialmente apropiada para este propósito. Dadas nuestras circunstancias particulares, este paradigma ofrece un marco ideal para la colaboración entre los ingenieros diseñadores del software, los investigadores universitarios y los centros de enseñanza, de manera que puedan explorarse una variedad de diseños, tanto de herramientas como de las actividades, e ir ajustando el software y las tareas de acuerdo con las necesidades reales de la práctica educativa. De esta forma, podemos generar conocimiento acerca de en qué contextos, de qué manera y en qué medida funcionan las innovaciones tecnológicas, así como dar razones para ello. Ello permite un desarrollo continuo gracias a la interrelación entre desarrolladores, profesores, investigadores y usuarios, los cuales permanecen en comunicación tanto durante la ejecución del experimento educativo como en los posteriores análisis retrospectivos de las experiencias.

Así pues, consideramos por una parte el desarrollo y diseño de Neotrie, utilizando la metodología de Investigación de Diseño desde la perspectiva de la Ingeniería de Software (Özyurt y Özyurt, 2019).

Y, por otra parte, la experimentación y evaluación de los hallazgos obtenidos en diversos experimentos de enseñanza, dentro del marco de la Investigación de Diseño educativa, llevados a cabo en aulas reales (Confrey y Lachance, 2012). A través de un proceso de investigación sistemático, flexible y colaborativo llevado a cabo en ciclos de diseño-desarrollo-implementación-análisis, se puede conseguir una mejora paulatina del fenómeno en su globalidad. Nuestro equipo de trabajo multidisciplinar está formado por la spin-off "Virtual Dor" y sus ingenieros de software, un matemático especializado en geometría y topología, y tres investigadores en Educación Matemática. Los usuarios son los propios investigadores en sus clases de universidad, junto a cinco profesores y sus alumnos de Educación Primaria y Secundaria. En lo que sigue, dada la audiencia a la que va dirigida esta ponencia, nos centramos en la descripción y el análisis de los experimentos de enseñanza llevados a cabo por el equipo.

EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA CON NEOTRIE

Coincidimos con Guss et al. (2022) en que las oportunidades para aprender matemáticas se maximizan cuando las prácticas con tecnología se diseñan teniendo en cuenta contenidos matemáticos fundamentales, centrándose en el pensamiento y el aprendizaje de los estudiantes, y guiados por el conocimiento generado por la investigación, en nuestro caso sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Desde que comenzamos nuestra andadura, en el año 2019, hemos implementado un total de 8 experimentos de enseñanza, que abarcan diferentes niveles educativos: 2 estudios en educación primaria (Morales y Codina, 2020; Morales et al., 2023; Romero et al., 2023); 3 estudios en educación secundaria (Chavil-Montenegro et al., 2021; Moral-Sánchez et al., 2023; Sorroche et al., 2023); y 3 en universidad: 1 en en la titulación de Maestro (Codina et al., 2022) y 2 en la titulación de Matemáticas (Rodríguez, 2022a; Rodríguez, 2022b). Además, se han realizado diseños experimentales piloto, aprovechando ferias de ciencia, semanas culturales en institutos, campus tecnológicos, etc. Los tópicos tratados se refieren a contenidos curriculares fundamentales en geometría que presentan dificultades relacionadas con la tridimensionalidad (estudio de características y propiedades de los poliedros, cálculo de volúmenes y superficies, álgebra lineal y topología algebraica), junto con un contenido no incluido en el currículo español, pero con posibilidades interesantes para trabajar competencias exigidas actualmente: los fractales.

Dentro del paradigma de la investigación de diseño con el que se han llevado a cabo los experimentos, estos difieren en duración y metodología didáctica, que se ha tenido que adaptar a los contextos y condiciones particulares, así como a las posibilidades de Neotrie en sus distintas etapas de desarrollo. En cualquiera de los casos, hemos pretendido explotar el potencial de Neotrie para optimizar la demanda cognitiva de las actividades propuestas al alumnado. El modelo del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak y Richard, 2014) nos ha resultado útil en este entorno tecnológico y nos ha servido como referente a fin de diseñar actividades que propicien un trabajo lo más coherente y completo posible por parte del alumnado. Para ello, según los autores, es necesario articular dos planos interconectados: el epistemológico y el cognitivo. El plano epistemológico se compone de tres polos; a saber, el referencial (que comprende las propiedades, teoremas y definiciones), representaciones (signos semióticos) y artefactos (materiales o simbólicos). El plano cognitivo consta de los procesos de visualización, construcción y prueba. Los planos se articulan mediante tres tipos de génesis: Génesis Semiótica (basada en los registros de representación semiótica, que otorga el estatus de objeto operativo matemático a los objetos tangibles); Génesis Instrumental (que hace operativos los artefactos en el proceso de construcción); y Génesis Discursiva (que da sentido a las propiedades del razonamiento matemático). En este modelo, las génesis no operan separadamente, sino que necesitan interactuar para dar sentido al trabajo matemático. Ello da lugar a los planos verticales que conectan dichas génesis: Plano de Comunicación [sem-dis] (está orientado hacia la comunicación matemática y se apoya esencialmente en las génesis semiótica y discursiva); Plano de Descubrimiento [sem-ins] (privilegia la identificación y la exploración de los objetos apoyándose en

la génesis semiótica e instrumental para desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos; y Plano de Razonamiento [ins-dis] (desarrolla el razonamiento matemático fundado en la justificación de descubrimientos, que articula la génesis instrumental y la discursiva) (Figura 2a).

Dependiendo de las circunstancias específicas de los centros de enseñanza, hemos operativizado el trabajo matemático a realizar. En aquellos casos en los que la mayor parte del alumnado no tenía acceso a las gafas y mandos, se ha trabajado fundamentalmente en el plano de Comunicación [sem-dis]. Así, por ejemplo, para los contenidos de poliedros, siguiendo la teoría de Vinner (1983), se han creado galerías de ejemplos (prototípicos y no prototípicos) y contraejemplos de distintas familias de poliedros, con objeto de posibilitar una conceptualización rica de estos objetos matemáticos, basándose en la asimilación de sus características y propiedades. Hemos de destacar la versatilidad de Neotrie para la creación de estos ejemplos y contraejemplos, algo que es muy difícil de hacer con materiales físicos. También el compartir en una pantalla grande las escenas en Neotrie ha sido importante para el trabajo en gran grupo, debido al tamaño habitual de los materiales físicos. A partir de las interacciones, se pueden editar y modificar figuras a conveniencia, según lo requieran los argumentos, conjeturas y dudas del alumnado (Figura 2b). Las respuestas de los estudiantes, tanto individuales como grupales a las cuestiones de indagación planteadas a partir de las imágenes se han registrado a través de plataformas interactivas como Wooclap, cuestionarios y grabaciones de audio.

Figura 2a. Espacios de Trabajo Matemático. Planos y génesis

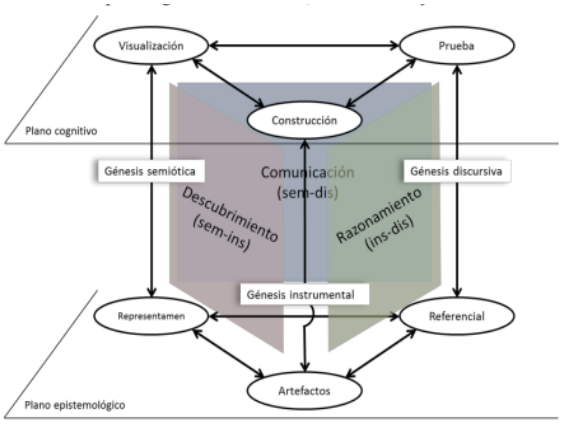
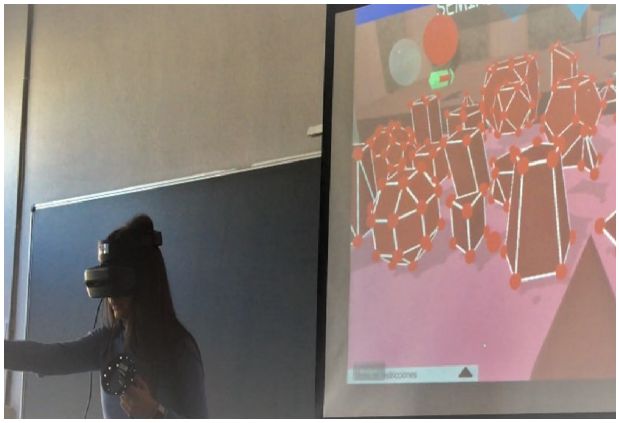


Figura 2b. Trabajo con Neotrie en el Plano de Comunicación



En experimentos en los que la mayoría del alumnado tenía acceso al recurso, trabajando en pequeños grupos, ha sido posible también trabajar la génesis instrumental, junto con los planos de Descubrimiento [sem-ins] y Razonamiento [ins-dis]. Estos experimentos necesitan de más tiempo y disponibilidad del docente-investigador para dedicar sesiones previas al manejo individual de Neotrie, algo que los alumnos asimilan con rapidez y naturalidad, así como para guiar el trabajo de los grupos de forma continua. En estas sesiones, además de recoger los protocolos para la resolución de actividades, se realizaron grabaciones en vídeo de las interacciones del alumnado. Naturalmente, estos datos son mucho más costosos de analizar. Por ejemplo, para los contenidos de fractales, Neotrie permite a los estudiantes adentrarse en la representación de objetos planos y tridimensionales en el espacio. Ello da lugar a procesos de visualización diferentes a los habituales, que implican cambios de puntos de vista, organización de las figuras en el espacio, homotecias, etc. Mediante el uso dinámico de distintos tipos de representaciones y a través de la comunicación entre los estudiantes, los grupos captan el carácter iterativo y la autosimilitud de los fractales, y logran articular estas propiedades correctamente para construir fractales bi y tridimensionales. En los fractales más sencillos, los estudiantes se centran en la génesis instrumental, en la que avanzan por ensayo y error, comunicándose entre los integrantes para optimizar el proceso. Salvo casos excepcionales, Neotrie

resulta manejable para el alumnado y el avance en dicha génesis se produce rápidamente. Los progresos en la instrumentalización permiten un trabajo de instrumentación con el software al tratar de construir fractales más complejos, como la esponja de Menger, en la que los estudiantes trabajan en los planos de Comunicación, Descubrimiento y Razonamiento para iterar el fractal, desarrollando el pensamiento estructural (copias que harán falta para pasar de una iteración a la siguiente y posiciones que ocuparán dichas copias en el espacio) y articulando los pasos para su construcción de forma sistemática. El análisis de este trabajo del alumando ha inspirado a los investigadores e ingenieros de Neotrie a crear la herramienta fractal y diseñar secuencias de aprendizaje que aprovechen el carácter recursivo de los fractales para desarrollar el pensamiento computacional, demandado en los currículos actuales. Por otra parte, el experimento ha servido para corregir errores en el código, en lo referente al pegado de figuras, y mejorar el rendimiento del programa, dado el número elevado de datos necesarios para visualizar en realidad virtual las iteraciones de algunos fractales.

RESULTADOS

Dado que nuestros experimentos se han realizado a pequeña escala, con un grupo-clase a lo sumo, la mayoría de los resultados obtenidos son de tipo cualitativo. No obstante, en algunos de los estudios se ha contrastado con grupos control, bien con clases paralelas que no habían utilizado Neotrie (Codina et al. 2022) o con grupos de estudiantes dentro de una misma clase que habían tendido un uso más reducido de Neotrie (Moral-Sánchez et al., 2023). En cualquiera de los casos, los resultados han sido positivos y se han obtenido beneficios que se resumen a continuación.

En el plano de comunicación (visual-discursivo), el alumnado de nuestros experimentos ha desarrollado habilidades de observación y reconocimiento de formas geométricas, permitiendo el paso de una visualización icónica de las figuras a una visualización no icónica, como objetos matemáticos cuyas partes pueden ser deconstruidas y sus elementos esenciales discriminados para formular caracterizaciones y clasificaciones de los distintos tipos de polígonos y poliedros. También los alumnos han desarrollado habilidades comunicativas, aprendiendo de forma natural y no memorística vocabulario geométrico. Este vocabulario, muchas veces “informal”, ha venido acompañado de lenguaje corporal, incluyendo el contacto físico, para expresarse y lograr ser entendidos por los compañeros a la hora de describir figuras y relaciones espaciales. De esta forma, tanto el alumnado de primaria y secundaria como los maestros en formación han construido imágenes ricas de los conceptos tratados, coordinadas con sus caracterizaciones y definiciones. En el caso de los futuros docentes, es importante que hayan sido expuestos a esta forma de trabajo y a la potencialidad de los recursos tecnológicos para llevarlo a cabo. Asimismo, nuestros estudios realizados con material manipulativo han mostrado la complementariedad de ambos recursos (Romero et al., 2023) y, en ocasiones, la superioridad de la RVI a la hora de desarrollar habilidades espaciales (Moral-Sánchez et al., 2023). En el nivel universitario, se ha tratado la complementariedad de Neotrie con otros recursos tecnológicos, como GeoGebra, con resultados más matizados en este caso (Rodríguez, 2022a).

En el Plano de Descubrimiento (Visual-Instrumental), Neotrie ha abierto las puertas al alumnado de un aprendizaje inductivo de contenidos geométricos importantes que no suelen tratarse habitualmente en los niveles básicos, como las simetrías de los sólidos, los fractales, los cuadriláteros en figuras tridimensionales, o los problemas de optimización de superficies en ortoedros. El tener acceso a distintos puntos de vista de las figuras, por medio del vuelo, las proyecciones o las secciones, les ha permitido familiarizarse con la estructura de los cuerpos geométricos. Gracias al manejo intuitivo del recurso, a la motivación del alumnado y a la facilidad con que ellos utilizan estas tecnologías, han podido representar y transformar figuras planas y espaciales, a través de herramientas como la extrusión, las reflexiones, el uso de las escalas o las iteraciones, descubriendo así distintas propiedades de dichas figuras. Es interesante comprobar la facilidad del alumnado más joven para realizar una génesis instrumental con naturalidad, incluso cuando se producían problemas técnicos, a

los que proponían soluciones propias indagando en los modos de uso de Neotrie y utilizando métodos alternativos para hacer una misma construcción.

En el Plano de Razonamiento (Instrumental-Discursivo), los estudiantes han afrontado retos cognitivos como la conceptualización de figuras geométricas bi y tridimensionales a partir de sus propiedades, incluyendo los fractales, o la optimización de superficies para un volumen dado. Apoyándose en las construcciónes con Neotrie, a veces complementadas con materiales manipulativos, han practicado la formulación y comprobación de conjeturas; la justificación; la inducción de patrones y fórmulas; la distinción entre dimensiones y las relaciones entre ellas; el razonamiento por analogía entre dos y tres dimensiones (nociones de paralelismo, perpendicularidad, simetría); etc. Todo ello ha fomentado, además, el desarrollo de aptitudes de autorregulación de su aprendizaje, en colaboración con los compañeros y con la guía del profesorado solo cuando era considerado necesario.

A nivel socioafectivo, los experimentos realizados confirman los beneficios motivacionales y de interacción social de otros estudios. En nuestro caso, especialmente con el alumnado más joven, se ha logrado capitalizar el entusiasmo y la motivación iniciales en un interés genuino, concentración y esfuerzo adicional para explorar y resolver problemas de geometría, de modo que pudieran lograrse los objetivos cognitivos y curriculares planteados. El hecho de que profesores e investigadores hayan sido capaces de idear diferentes estrategias de colaboración para implicar a todo el alumnado en la generación de conocimiento, con un dispositivo en el que sólo una persona a la vez tiene acceso a la realidad virtual inmersiva, es otro logro notable. En el terreno de las interacciones, la incorporación de Neotrie se ha revelado como un agente mediador para que estudiantes con ritmos y necesidades diversas se impliquen en la resolución de las tareas. El papel de los docentes regulando la cantidad y duración de las intervenciones, ofreciendo oportunidades a todos para exponer sus ideas, solicitando el consenso en las respuestas, etc. ha sido fundamental y les ha permitido abordar competencias sociales relacionadas con el trabajo en equipo y el respeto a otras opiniones.

Por último, hemos de destacar la función esencial del profesorado participante en los experimentos como agentes creativos en el diseño y gestión de dinámicas con Neotrie, a menudo gamificadas, utilizando un enfoque inductivo para resolver problemas y tareas más o menos desafiantes. Ahora bien, es importante resaltar que el profesorado integrante del equipo es especial en cuanto a su aptitud y actitud para la innovación en las aulas de matemáticas y el manejo de recursos tecnológicos, así como en su disposición para colaborar con los diseñadores del software, implementar y ajustar sobre la marcha las actividades diseñadas, y colaborar en los procesos de investigación llevados a cabo.

RETOS, LÍNEAS ABIERTAS Y CONCLUSIÓN

En el terreno de la innovación, al principio de nuestra andadura, el equipo de investigación se planteó cómo introducir en aulas reales el software de RVI Neotrie, aprovechando al máximo su potencial para contribuir a las demandas curriculares actuales de la enseñanza de la geometría. Al diseñar e implementar los experimentos de enseñanza presentados, hemos tenido que hacer frente a retos diversos. En primer lugar, destinar un buen número de sesiones a trabajar tópicos a los que se suele dedicar poco tiempo en las clases de primaria y secundaria, como los que tienen que ver con geometría tridimensional, o con temas como los fractales y los problemas de optimización, los cuales, si bien atienden a competencias demandadas en los currículos actuales, no forman parte de los contenidos habituales de esos niveles en nuestro país. Los problemas técnicos y logísticos han supuesto otro consumo de tiempo y energía. En efecto, para emitir lo que el jugador está viendo dentro de Neotrie a tabletas u ordenadores que no sean de juego es necesario ampliar el ancho de banda disponible en las escuelas. Para crear una red Wi-Fi local mejor que la proporcionada por el centro educativo, los profesores han probado varias opciones, incluyendo la de usar teléfonos móviles particulares. Aún así, la puesta en marcha de los equipos y los apagones que obstruyen el flujo de las actividades sigue siendo un problema importante. Por otra parte, debido al carácter individual de la experiencia

inmersiva, los docentes han dedicado tiempo extra a enseñar al alumnado el manejo de Neotrie. Toda esta inversión se amortizaría haciendo un uso más regular de Neotrie en las clases de geometría; algo posible (Cangas et al., 2019), pero difícil para docentes ya sobrecargados por tareas administrativas y sin tiempo reconocido para la innovación. Además, estos docentes han mostrado su implicación al informar de los problemas del programa a los desarrolladores y contribuir con sus necesidades e intereses al desarrollo de Neotrie, así como al recoger datos durante las implementaciones y colaborar con el equipo investigador en su análisis y difusión de resultados.

Por lo que respecta a la investigación, hemos tenido en cuenta cuestiones pendientes en la agenda, como la de basar nuestras propuestas en marcos teóricos para la didáctica de la geometría, describir cómo la RVI puede ser adoptada en el currículo para dar respuesta a las demandas actuales, e informar de los aprendizajes que se logran en entornos reales a través de su uso (Cevikbas et al., 2023; Won et al., 2023). No obstante, reconocemos que los resultados cuantitativos obtenidos se refieren a muestras pequeñas y que los datos cualitativos no se refieren a individuos, sino a grupos de estudiantes, y son aún preliminares. Es en los estudios cualitativos en profundidad, también demandados por la agenda investigadora, donde radica nuestro mayor potencial. Especialmente interesante es el análisis de las grabaciones de vídeo, ya que los trabajos escritos tienen limitaciones a la hora de capturar el flujo de procesos cognitivos, comunicativos, afectivos y de manejo del recurso. Hay muchas cosas que vemos en nuestro contacto continuado con la práctica, pero que son costosas de informar con el rigor y la sistemática que la comunidad académica demanda. Por otra parte, la utilización de marcos apropiados para el análisis de los datos obtenidos permitirá sacar a la luz aspectos que nos pasan desapercibidos.

En cuanto al desarrollo de Neotrie, desde sus inicios, tanto el software, diseñado con el programa Unity para videojuegos y entornos 3D, como el hardware requerido han ido transformándose para adaptarse más y mejor a las necesidades de los usuarios particulares y de los centros educativos. En sus comienzos, era necesario contar con un equipo de realidad virtual (como htc Vive u Oculus Rift S) conectado a un ordenador con tarjeta gráfica potente, típica de videojuegos. Dichos equipos incluían sensores de posicionamiento y controladores para interactuar con el mundo virtual. El software también contaba con un sistema de reconocimiento de voz que permitía a los usuarios invocar formas geométricas nombrándolas en voz alta, dentro de un escenario que reproducía un templo griego. En la actualidad, el escenario se ha simplificado y se ha prescindido de la función de voz para adaptar el programa a Meta Quest 2/3, un sistema de RV autónomo (es decir, sin ordenador de juego ni cables), más asequible para las escuelas, pero no exento de problemas, como hemos señalado anteriormente. Se está desarrollando un modo multijugador, que permite a varios usuarios trabajar en la misma escena virtual, favoreciendo la interacción y aprendizaje colaborativo entre el alumnado. El juego ya dispone de cajas de actividades variadas de distintos temas y niveles educativos, con sus respectivas guías en la web del software, acompañadas de vídeos de ayuda. El avance es significativo, pero quedan retos muy interesantes todavía por delante, como la de adaptar el juego a las recién llegadas Meta Quest 3, con la posibilidad de realidad mixta en color, y con la mejorada versión de seguimiento de manos. El poder importar ficheros de GeoGebra es también un plan muy atractivo a desarrollar en los próximos meses, ofreciendo a los usuarios de GeoGebra sumergir sus actividades en realidad virtual.

Queremos concluir este trabajo llamando la atención sobre el hecho de que, desde los comienzos de la realidad virtual en la década de los 90, las expectativas suscitadas han estado por debajo de la aceptación del gran público y de su repercusión a nivel educativo. En lo que toca a la enseñanza de la geometría, una materia a priori tan susceptible de beneficiarse de esta tecnología, también se avanza a un ritmo más lento de lo que podría esperarse. En efecto, los desarrollos tecnológicos en RV cambian rápidamente, tanto en lo que se refiere a hardware como a software, lo cual mantiene ocupados a investigadores y desarrolladores, que se ven forzados a adaptarse a los cambios. También los docentes pioneros se ven afectados por esta transformación continua, teniendo que sortear los problemas derivados dentro de instituciones educativas cuyas condiciones no favorecen la agilidad

necesaria para adaptarse al dinamismo de este tipo de tecnologías. A ello hay que sumar que los tiempos de la investigación son aún más lentos que los de la innovación educativa. En estas condiciones, la obtención de resultados fiables sobre la repercusión del uso de RV, y en particular de la RVI, en la mejora y la transformación de la enseñanza y aprendizaje de la geometría se ve ralentizada, ya que es necesario basarse en resultados empíricos de su integración en las aulas. Coincidimos con Won et al (2023) en que los avances realizados hasta el momento, sin duda prometedores, necesitan alcanzar un mayor nivel de madurez. Para contribuir a lograrlo, nuestro equipo trabaja en la dirección recomendada por Cevikbas et al (2023): tratando de desarrollar sistemas de software de RV asequibles, accesibles y fáciles de usar, diseñados específicamente para facilitar el aprendizaje de la geometría, en colaboración estrecha entre desarrolladores y educadores matemáticos. Asimismo, en la línea indicada por dichos autores, animamos y damos apoyo a docentes para colaborar y compartir con la comunidad sus mejores prácticas. Paralelamente, como investigadores, hacemos partícipe a la comunidad académica de los avances obtenidos.

Referencias

Ahmad, N. y Junaini, S. (2020). Augmented reality for learning mathematics: A systematic literature review. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, *15*(16), 106-122. https://doi.org/10.3991/ijet.v15i16.14961

Cabero-Almenara, J., Barroso-Osuna, J. y Martinez-Roig, R. (2021). Mixed, augmented and virtual, reality applied to the teaching of mathematics for architects. *Applied Sciences*, *11*(15), 7125. https://doi.org/10.3390/app11157125

Cangas, D., Morga, G. y Rodríguez, J. L. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR. *Psychology, Society & Education*, *11*(3), 355-366. https://doi.org/10.25115/psye.v11i3.2270

Carbonell-Carrera, C. y Saorín, J. L. (2017). Geospatial Google Street View with virtual reality: A motivational approach for spatial training education. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, *6*(9), 261. https://doi.org/10.3390/ijgi6090261

Cevikbas, M., Bulut, N. y Kaiser, G. (2023). Exploring the benefits and drawbacks of AR and VR technologies for learners of mathematics: Recent developments. *Systems, 11*(5), 244. https://doi.org/10.3390/systems11050244

Codina, A., García, M. M., Romero, I. M. y Lupiáñez, J. L. (2022). Poliedros con el software de realidad virtual inmersiva NeotrieVR, una experiencia con maestros en formación. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado (25)3,* 1-14. https://doi.org/10.6018/reifop.531841

Confrey, J. y Lachance, A. (2012). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), H*andbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Routledge.

Cross, R. A. y Hanson, A. J. (1994). Virtual reality performance for virtual geometry. En *Proceedings Visualization'94* (pp.156-163). IEEE. https://doi.org/10.1109/visual.1994.346324

Chavil-Montenegro, D. Y., Rodríguez-Blancas, J. L. y Romero-Albaladejo, I. (2021). NeoTrie VR como espacio de trabajo para la introducción de la geometría fractal. En P. D. Diago, D. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 221-228). SEIEM.

Dilling, F. y Sommer, J. (2022). Virtual reality in mathematics education: design of an application for multiview projections. En U. Jankvist, R. Elicer, A. Clark-Wilson y H. Weigand (Eds.), *Proceedings of the 15th international conference on technology in mathematics teaching* (pp. 263-270). Danish School of Education.

Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM Mathematics Education, 47*(3), 519-529. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0700-9

Dünser, A., Steinbügl, K., Kaufmann, H. y Glück, J. (2006). Virtual and Augmented Reality as Spatial Ability Training Tools. En M. Billinghurst (Ed.), *Proceedings of the 7th ACM SIGCHI New Zealand Chapter's International Conference on Computer-Human Interaction: Design Centered HCI* (pp. 125-132). Christchurch, New Zealand. https://doi.org/10.1145/1152760.1152776

Flores-Bascuñana, M., Diago, P. D., Villena-Taranilla, R. y Yáñez, D. F. (2019). On augmented reality for the learning of 3D-geometric contents: A preliminary exploratory study with 6-grade primary

Guss, S. S., Clements, D. H. y Sarama, J. H. (2022). High-Quality early math: Learning and teaching with trajectories and technologies. En A. L. Betts, y K. P. Thai (Eds.), *Handbook of research on innovative approaches to early childhood development and school readiness* (pp. 349-373). IGI Global. https://doi.org/10.4018/978-1-7998-8649-5.ch015

Kang, K., Kushnarev, S., Pin, W. W., Ortiz, O. y Shihang, J. C. (2020). Impact of virtual reality on the visualization of partial derivatives in a multivariable calculus class. *IEEE Access*, *8*, 58940-58947. https://doi.org/10.1109/access.2020.2982972

Kaufmann, H., Schmalstieg, D. y Wagner, M. (2000). Construct3D: a virtual reality application for mathematics and geometry education. *Education and information technologies*, *5*, 263-276. https://doi.org/10.1109/vr.2006.48

Kaufmann, H. (2009). Virtual Environments for Mathematics and Geometry Education. *Themes in science and technology education*, *2*, 131-152.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *RELIME, 17*(4), 5-15. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Martín-Gutiérrez, J., Mora, C. E., Añorbe-Díaz, B. y González-Marrero, A. (2017). Virtual technologies trends in education. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education*, *13*(2), 469-486. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00626a

Milgram, P. y Kishino, F. (1994). A taxonomy of mixed reality visual displays. *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, *77*(12), 1321-1329.

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: Un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.

Moral-Sánchez, S. N. y Siller, H. S. (2022). Learning Geometry by Using Virtual Reality. *Proceedings of the Singapore National Academy of Science*, *16*(01), 61-70. https://doi.org/10.1142/s2591722622400051

Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compaña, M. T. y Romero-Albaladejo, I. M. (2022). Estrategias de ludificación para el desarrollo de la motivación intrinseca en geometría. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 619). SEIEM.

Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compaña, M. T. y Romero-Albaladejo, I. (2023). Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *41*(1), 125-147. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442

Morales, C. S. y Codina, A. (2020). Cognición y metacognición en geometría con realidad virtual utilizando NeoTrie VR. En E. Castro-Rodriguez, E. Castro, P. Flores y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Enrique Castro* (pp. 157-178). Octaedro. https://doi.org/10.36006/09094

Morales, C. S., Codina, A. y Romero, I. (2023). Cuadriláteros con el software 3D NeoTrie VR de realidad virtual inmersiva. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, *101*, 65-74.

Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S. y Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *ZDM, 47*, 377-390. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0679-2

Ng, O.L. y Sinclair, N. (2018). Drawing in space: Doing mathematics with 3D pens. En L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach y C. Vale. (Eds), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education: Tools, topics and trends* (pp. 301-313). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_16

Özyurt, Ö. y Özyurt, H. (2019). Implementation of Design-Based Research in Software Engineering Education: A Case of Final Project Course. *Journal of Computer and Education Research*, *7*(14), 213-227. https://doi.org/10.18009/jcer.557913

Palanci, A. y Turan, Z. (2021). How does the use of the augmented reality technology in mathematics education affect learning processes?: a systematic review. *International Journal of Curriculum and Instructional Studies (IJOCIS)*, *11*(1), 89-110. https://doi.org/10.31704/ijocis.2021.005

Pozo-Sánchez, S., Lopez-Belmonte, J., Moreno-Guerrero, A. J. y Fuentes-Cabrera, A. (2021). Effectiveness of flipped learning and augmented reality in the new educational normality of the Covid-19 era. *Texto Livre*, *14*(2), e34260. https://doi.org/10.35699/1983-3652.2021.34260

Prediger, S., Gravemeijer, K. y Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM, 47*, 877-891.https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on thepsychology of mathematics education* (pp. 205-235). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009

Rodríguez, J. L., Romero, I. y Codina, A. (2021). The influence of NeoTrie VR's immersive virtual reality on the teaching and learning of geometry. *Mathematics*, *9*(19), 2411. https://doi.org/10.3390/math9192411

Rodríguez, J. L. (2022a). Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching. En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (Eds.), M*athematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 343-363). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_15

Rodríguez, J. L. (2022b). Using virtual reality to teach linear algebra with a focus on affine geometry. En W.C. Yang, M. Majewski, D.B. Meade y W.K. Ho (Eds.), *Proceedings of the ATCM 2022*, (pp. 218-230).

Rotger, L., Ribera, J. M. y Cuadrado, M. L. (2021). Visualizando la tercera dimensión desde diferentes realidades. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 673). SEIEM.

Romero, I., Rodríguez-Martínez, J. A. y Rodríguez, J. L. (2023). Optimizing the surface of orthohedra with virtual reality in primary school. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(9), em2325. https://doi.org/10.29333/ejmste/13508

Seabra, R. D. y Santos, E. T. (2013). Developing the spatial visualization ability with a virtual reality tool for teaching descriptive geometry: A brazilian experience. *Journal for geometry and graphics, 17*(1), 101-117.

Song, K. S. y Lee, W. Y. (2002). A virtual reality application for geometry classes. *Journal of Computer Assisted Learning*, *18*(2), 149-156. https://doi.org/10.1046/j.0266-4909.2001.00222.x

Sorroche, P., Romero, I. y García, M. M. (2023). Geometría en realidad virtual: Una situación de aprendizaje para el segundo ciclo de secundaria. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas, (102)*, 33-40.

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3D y realidad aumentada: alineando puntos en el espacio. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579-586). SEIEM.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305

Won, M., Ungu, D. A. K., Matovu, H., Treagust, D. F., Tsai, C. C., Park, J., Mocerino, M. y Tasker, R. (2023). Diverse approaches to learning with immersive Virtual Reality identified from a systematic review. *Computers & Education*, *195*, 104701. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104701

Yeh, A. y Nason, R. (2004). Knowledge Building of 3D Geometry Concepts and Processes within aVirtual Reality Learning Environment. En L. Cantoni y C. McLoughlin (Eds.), *Proceedings of ED-MEDIA 2004* (pp. 2175-2182). Association for the Advancement of Computing in Education.

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II: MAPEANDO LA INVESTIGACIÓN ESPAÑOLA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Ponentes:

- Mariana Bosch (Universidad de Barcelona)
- Ángel Gutiérrez (Universidad de Valencia)
- Salvador Llinares (Universidad de Alicante)

MAPEANDO LA INVESTIGACIÓN ESPAÑOLA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Mapping the Spanish Research in Mathematics Education

Bosch, M.[a], Gutiérrez, A.[b] y Llinares, S.[c]

[a] Universidad de Barcelona, [b] Universidad de Valencia, [c] Universidad de Alicante

Resumen

Este artículo informa sobre las recientes y relevantes investigaciones en educación matemática realizadas por la comunidad española. El objetivo es presentar una visión global de la producción en las diferentes grandes líneas de investigación, organizadas en varios grandes bloques: el aprendizaje por los estudiantes de contenidos curriculares específicos, como álgebra, probabilidad y estadística, cálculo y argumentación o demostración en contextos geométricos; la formación de profesores de matemáticas; estudiantes con necesidades educativas especiales, tanto por dificultades de aprendizaje como por alta capacidad matemática; el uso de las TIC para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; y los desarrollos en diversos marcos teóricos realizados por investigadores españoles.

Palabras clave: *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, formación de profesores, necesidades educativas especiales, TIC para la enseñanza y el aprendizaje, teorías de la educación matemática.*

Abstract

This article reports on recent and relevant research in mathematics education produced by the Spanish community. The aim is to present an overview of the production in the different major lines of research in which there have been results, organized in several wide blocks: students' learning of specific curricular contents, such as algebra, probability and statistics, calculus, and argumentation or demonstration in geometric contexts; mathematics teacher training; students with special educational needs, both due to learning difficulties and mathematical giftedness; the use of ICT for teaching and learning mathematics; and advances based on various theoretical frameworks that have been created or developed by Spanish researchers.

Keywords: *Mathematics teaching and learning, teacher training, special educational needs, ICT for teaching and learning, mathematics education theories.*

1. INTRODUCCIÓN

En España, la educación matemática (o didáctica de las matemáticas) es un área de investigación dinámica. En ella trabajan diferentes grupos que utilizan una variedad de enfoques, centrados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y en todos los niveles educativos, desde preescolar hasta la universidad. El desarrollo de esta comunidad investigadora ha tenido lugar durante los últimos 40 años (Rico et al., 2002) y, particularmente, durante las dos últimas décadas. Este artículo presenta una panorámica de esta investigación en los últimos seis años, identificando líneas, focos o tendencias que se están desarrollando actualmente, tanto localmente como con colaboraciones internacionales. Los ejemplos de las investigaciones empíricas que describimos son representativos de los ámbitos de investigación con reflejo en revistas indexadas y actas de simposios de la SEIEM y otros congresos relevantes, así como en el número especial de la revista ZDM

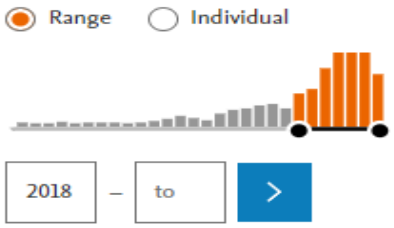
[1] Algunos resultados de esta publicación son parte de los proyectos de I+D+i PID2020-117395RB-I00 y PID2021-126717NB-C31 financiados por MCIN/AEI/10.13039/50110001 1033; y PID2020-116514GB-I00.

Bosch, M., Gutiérrez, A. y Llinares, S. (2024). Mapeando la investigación española en educación matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 51-94). SEIEM.

Mathematics Education dedicado a la investigación española reciente en educación matemática (*ZDM, 56(6), 2024, Spanish Research on Mathematics Education*).

Para determinar unas primeras referencias usamos la base de datos SCOPUS, con los criterios de búsqueda: palabras clave "Mathematics AND Education"; país de afiliación: "Spain", desde el 2018 hasta hoy. Se generaron 1.108 documentos en 25 áreas temáticas. Las 15 palabras clave con más presencia son "Mathematics" (196), "Mathematics Education" (135), "Primary Education" (109), "Education" (94), "Secondary Education" (81), "Students" (80), "Teaching" (69), "STEM" (63) y "Learning" (54).

Figura 1. Fuente Scopus, Rango (2018-) con los filtros Mathematics AND Education (Article Title, Abstract, Key words) y Affiliation Country (Spain).



Con el objetivo de mapear los focos generales de interés en la investigación española en los últimos años, esta búsqueda inicial fue acotada insertando nuevos filtros (tales como el nivel educativo - Primary, Secondary, Higher Education, - Technology, Teacher), permitiendo identificar las publicaciones usadas para caracterizar los focos de estas investigaciones. Finalmente, consideramos el filtro con el título de las ocho revistas que consideramos de nuestro ámbito y que están insertadas en la base de datos *Web of Science* (ZDM, MTL, JMTE, JRME, ESM, EC, IJSME, Relime) obteniendo 140 artículos. Completamos entonces los grupos de investigaciones identificadas con estos criterios con grupos de investigación con desarrollo que, por los criterios de búsqueda usados, tenían menos presencia pero con relevancia en nuestro ámbito (p. ej., historia y su uso en la enseñanza de las matemáticas) y con algunas referencias desde otras revistas y actas de congresos que consideramos relevantes para comprender el mapeo o con fecha fuera del rango establecido. De esta forma organizamos el mapeo de la investigación en educación matemática en España en los últimos años en las cinco secciones siguientes: enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, formación de profesores, procesos cognitivos de estudiantes con necesidades educativas especiales, tecnología y, finalmente, aportes españoles al desarrollo de teorías.

2. INVESTIGACIÓN CENTRADA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Tradicionalmente, entre las principales agendas de investigación en educación matemática se encuentra la dedicada a analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos curriculares de los diferentes niveles educativos, desde educación infantil hasta la universidad, incluyendo la formación inicial de profesores. Dichos análisis se pueden enfocar desde diversas ópticas, siendo las principales las centradas en los estudiantes, los (futuros) profesores, los currículos y las características sociopolítico-culturales del entorno. Esta sección tiene como foco central los procesos de aprendizaje de los estudiantes y está organizada en base a los diferentes bloques tradicionales de contenidos curriculares (aritmética, geometría, probabilidad y estadística, álgebra, cálculo). Los artículos correspondientes a esta agenda de investigación que presentamos son ejemplos representativos, aunque no los únicos, de la actividad investigadora española en educación matemática de las últimas décadas y de sus colaboraciones internacionales.

2.1 Pensamiento numérico

La investigación española sobre pensamiento numérico y aprendizaje de la aritmética en los diferentes niveles educativos se viene desarrollando desde los años 1980. Los programas del XIX y el XXVI Simposios de la SEIEM (2019 y 2023, respectivamente) incluyeron seminarios en los que se hicieron revisiones de la investigación reciente sobre pensamiento numérico. Hemos tomado como punto de partida para nuestra revisión el último seminario (Cañadas, 2023; Adamuz-Povedano, 2023; Bruno y Almeida, 2023), por lo que sugerimos a los lectores interesados en este tema que consulten esos documentos para conocer el estado de la investigación en pensamiento numérico en años anteriores.

A dichas revisiones podemos añadir algunas publicaciones aparecidas en los últimos años en esta línea de investigación, que son de características muy diferentes. Zorrilla et al. (2024) investigan las características de la elección de las operaciones en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en estudiantes de 6º de Educación Primaria al transitar desde el dominio de los números naturales a las fracciones, identificando diferentes trayectorias de desarrollo. Vicente et al. (2022a y 2022b) hacen un análisis comparativo de los problemas aritméticos que hay en los libros de texto de los seis cursos de primaria de España y Singapur. El análisis realizado los lleva a concluir que no hay una diferencia suficiente en la cantidad y tipos de problemas que pueda explicar la diferencia de resultados entre ambos países en las evaluaciones internacionales, siendo la única diferencia significativa la mayor presencia de ilustraciones en los enunciados; también concluyen que hay que buscar motivos en las diferencias culturales entre los países. Quevedo Gutiérrez et al. (2023) presentan un estudio en el que pedían a estudiantes de 6º de primaria y 1º de ESO plantear un problema que se resolviera mediante la operación $2 – 3 = –1$. En el artículo analizan las características matemáticas, contextuales, etc. de los diferentes tipos de enunciados propuestos. Torres et al. (2024) se sitúan en la difusa frontera entre los pensamientos aritmético y algebraico para analizar las resoluciones por un estudiante de 2º de primaria de un problema de generalización funcional del tipo de caja negra (entra una cantidad y sale otra, sin saber qué transformación se ha realizado). El artículo muestra la variación en la forma de razonar del estudiante durante la intervención y el paso, mediante un proceso inductivo, de un pensamiento aritmético inicial a otro funcional. González-Forte et al. (2020, 2022a, 2022b, 2023) estudian la comprensión de estudiantes de secundaria de las operaciones con números racionales y describen sus formas de razonar erróneas ("natural number bias" y "gap thinking") al comparar los tamaños de números racionales, indicando la resistencia al cambio de estas formas de razonar.

2.2. Pensamientos algebraico y funcional, álgebra y funciones

El estudio del álgebra y de las funciones son los dos bloques de contenidos más importantes en los currículos de educación secundaria en España. En nuestro país, como en casi todo el mundo, el estudio del álgebra se inicia en los últimos cursos de primaria o los primeros de secundaria y el estudio de las funciones se inicia algunos cursos después. La investigación en el aprendizaje de estas áreas de las matemáticas escolares es intensa y muy diversa, pues incluye desde el pensamiento algebraico o funcional propio de los estudiantes de educación infantil y primeros cursos de educación primaria hasta el estudio de los contenidos típicos de la educación secundaria superior y de especialidades universitarias relacionadas con las matemáticas, ingenierías y otras especialidades científicas. Consideramos el pensamiento funcional como "un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211).

En el conjunto de publicaciones de la última década sobre pensamiento algebraico que hemos identificado, destacan el grupo del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y el grupo de las universidades de Valencia y Castilla-La Mancha (que también ha realizado estudios basados en el uso de software educativo, comentados en la sección 5).

El grupo de la Universidad de Granada tiene una larga trayectoria de investigación sobre pensamiento algebraico en la que han abordado diversas cuestiones, como la traducción de enunciados verbales a expresiones algebraicas (Castro et al., 2022; Rodríguez-Domingo et al., 2015) y significados de los símbolos algebraicos (Cañadas et al., 2018; Fernández-Millán y Molina, 2016).

En la Universidad de Valencia, diversos estudios se han centrado en el uso de los problemas de patrones para introducir a los estudiantes al álgebra. Arbona et al. (2017) y Gutiérrez et al. (2018a) han presentado datos de un estudio longitudinal de tres años, en 4º, 5º y 6º de primaria, en el que analizaron el progreso de los estudiantes de un curso al siguiente en sus formas de generalización y de expresión (verbal o algebraica) de las generalizaciones que habían realizado. Sus resultados indican que los estudiantes de estos cursos pueden aprender a generalizar, describir verbalmente las relaciones entre las variables que intervienen en los problemas y, finalmente, producir expresiones algebraicas que representan esas generalizaciones y en las cuales las letras tienen significado.

La mayoría de los libros de texto españoles presentan expresiones algebraicas desde el principio de la primera lección de álgebra, esperando que los estudiantes sean capaces de darles significado a las expresiones y a las letras que las forman (normalmente x, y, z) por sí mismos. Sin embargo, las investigaciones muestran que brindar a los estudiantes contextos significativos les ayuda a comprender el significado algebraico de letras y otros símbolos y las diferencias respecto de la aritmética. Pedir expresiones verbales para las generalizaciones producidas, expresiones verbales-simbólicas abreviadas y, finalmente, expresiones algebraicas significativas (por ejemplo, escribir m para "minuto") puede ayudar a los estudiantes para que las letras y las operaciones adquieran significado para ellos (Gutiérrez et al., 2018a).

Otras investigaciones se han centrado en diferentes aspectos del aprendizaje del álgebra a lo largo de primaria y secundaria, tales como el uso de los problemas de patrones (Callejo et al., 2016), conversiones entre expresiones verbales y expresiones algebraicas por estudiantes de ESO (Castro et al., 2022), lenguaje de los enunciados verbales (Soneira et al., 2023) y de los profesores (Planas, 2021), inecuaciones (Pacheco et al., 2023), interpolación (Berciano Alcaraz et al., 2015) o niveles de algebrización (Godino et al., 2015).

El grupo de las universidades de Valencia y Castilla-La Mancha ha realizado investigaciones sobre el manejo de expresiones algebraicas en secundaria (Soneira et al., 2018a, 2023) y formación inicial de profesorado de primaria (González-Calero et al., 2015; Soneira et al. 2018b). Soneira et al. (2018a y 2023) analizan la influencia de diferentes elementos en los enunciados de problemas de edades en su resolución algebraica, en relación con la dificultad para convertir el enunciado verbal en expresiones algebraicas correctas y, en particular, con la presencia de errores debidos al uso de la misma letra (incógnita) para referirse a cantidades diferentes (p. ej., usar x para referirse a la edad actual de una persona y a su edad dentro de varios años). Entre las conclusiones, destacan que estos errores han sido los más frecuentes y que parecen deberse a que los estudiantes leían los enunciados a trozos, con lo que no tenían una visión del conjunto. Otros investigadores han trabajado con estudiantes de secundaria y conceptos funcionales típicos de este nivel educativo, como límites (Fernández Plaza et al., 2015) o derivadas (Fuentealba et al., 2017, 2019, 2022; Vargas et al., 2020).

En cuanto al estudio del pensamiento funcional, diversas publicaciones se centran en estudiantes de primaria y sus capacidades para representar relaciones funcionales (Ramírez et al., 2022; Pinto et al., 2022), para expresarlas verbalmente (Cañadas et al., 2016), para dar significados a las letras (Ayala-Altamirano y Molina, 2019 y 2021), así como en sus estrategias de manejo de relaciones funcionales (Morales Merino et al., 2018).

A continuación, comentamos con detalle varias investigaciones que ejemplifican la diversidad de líneas de investigación, que incluyen el pensamiento funcional (o variacional) de estudiantes de primeros cursos de educación primaria, estudiantes de precálculo de los últimos cursos de educación secundaria y estudiantes de postgrado de matemáticas.

Cañadas et al. (2024) realizan un estudio para explorar las capacidades de los estudiantes españoles de 3º y 4º de educación primaria (8 a 10 años de edad) para dibujar y leer representaciones cartesianas de funciones lineales. Dicho estudio tiene un antecedente en Pérez-Martos et al. (2023). Los autores elaboran un marco teórico formado por tres elementos principales: el concepto de construcción de gráficos cartesianos, que entienden como un resultado de un proceso de generalización que se exterioriza mediante su representación gráfica; criterios de análisis de los dibujos de gráficos hechos por los estudiantes, propuestos por Friel et al. (2001) y Kosslyn (1994). Los autores informan de que no han encontrado ningún marco de referencia que permita analizar la lectura de representaciones cartesianas de funciones por estudiantes de educación primaria, por lo que se basan en un marco definido por Arteaga et al. (2021a) para investigar la lectura de diagramas estadísticos por niños del mismo nivel educativo. Este marco presenta cuatro niveles de lectura de gráficos, que Cañadas et al. adaptan al contexto de los diagramas cartesianos; los niveles son: leer los datos, leer dentro de los datos, leer más allá de los datos y leer detrás de los datos.

En lo referente al dibujo de los ejes de las gráficas, la mitad de los estudiantes de 3º curso y cinco estudiantes de 4º curso fueron capaces de dibujarlos sin ayuda desde el principio, mientras que los demás estudiantes necesitaron resolver actividades previas de introducción; destaca en particular que algunos estudiantes intercambiaron las posiciones de los ejes de abscisas y ordenadas. La escritura de las escalas de los ejes supuso una dificultad alta para los estudiantes, especialmente por el papel del origen de coordenadas y sus valores (0, 0). Los estudiantes presentaron una variedad de errores: empezar las escalas en 1 en vez de en 0; asignar unas veces el primer valor de la escala a la intersección de los ejes y otras veces no; invertir la escala, empezándola en el extremo del eje opuesto al origen. Otro aspecto analizado es la forma de escribir las escalas, es decir, qué valores escribieron los niños, qué separaciones había entre ellos, etc. Algunos estudiantes, de 3º y 4º grados, consideraron los ejes como líneas numéricas, que habían utilizado desde que empezaron a estudiar aritmética, y los representaron escribiendo la secuencia numérica con espacios iguales entre los números. Sin embargo, otros estudiantes escribieron los números de maneras particulares, por ejemplo, escribiendo solo los números que están representando y en el mismo orden en que aparecen en la tabla de valores, aunque no sea su orden correcto. En cuanto a la lectura de gráficas dadas por los investigadores o dibujadas por el propio estudiante, esta actividad resultó mucho más fácil para los estudiantes que dibujarlas. Los autores diferencian la lectura de los elementos de la gráfica (valores de las escalas y de puntos), tanto presentes en ella como no dibujados. Una conclusión global que se puede derivar de este estudio es que los estudiantes de 3º y 4º grados de educación primaria pueden interactuar con gráficas cartesianas de funciones lineales, incluso sin hacer enseñanza explícita previa, pero con ciertas limitaciones en el conjunto numérico disponible para el dominio y el rango de las funciones.

El estudio realizado por Santos et al. (2024) se centra en la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en secundaria. Es de carácter teórico y tiene como objetivos: hacer una revisión de reformas curriculares recientes; recopilar publicaciones recientes de investigación en educación matemática que informan sobre el desarrollo de la comprensión y las dificultades que experimentan los estudiantes; e identificar fortalezas del uso sistemático de un software de geometría dinámica (SGD) por los estudiantes en su aprendizaje del concepto de derivada. El artículo está dividido en varias partes, dedicadas a diferentes tipos de contextos de enseñanza de la derivada apoyados en el SGD. Los autores también presentan investigaciones en las que se propone a los estudiantes resolver problemas no rutinarios sobre derivación de funciones, como encontrar los valores a y b para que la recta $2x + 3y = a$ sea tangente a la curva $y = bx^2$ (Selden et al., 1989) o, dados una circunferencia fija de centro O, un punto P exterior, las dos tangentes a la circunferencia que pasan por P y sus puntos de tangencia A y B, analizar la variación del área del triángulo AOB al moverse P. No son problemas nuevos, pero siguen siendo interesantes para la enseñanza.

Existe un amplio consenso en las publicaciones consultadas por Santos et al. (2024) en que los cursos de cálculo de educación secundaria suelen estar principalmente orientados al aprendizaje memorístico

y de algoritmos rutinarios. Esto les plantea dudas sobre la utilidad de estos cursos para fundamentar los cursos universitarios de cálculo (Frank y Thompson, 2021). Sin embargo, las investigaciones que presentan Santos et al.(2024) sobre el uso del SGD muestran que este entorno puede romper con dicho tipo de enseñanza y fomentar el aprendizaje comprensivo. Esto lleva a los autores a plantear, entre otras conclusiones: que los estudiantes de educación secundaria necesitan ampliar y profundizar su formación en pensamiento variacional para lograr, en particular, una comprensión adecuada del concepto de derivada; y que una enseñanza adecuada del cálculo pasa por dilemas aplicar sus concepciones de los diferentes componentes, propiedades, relaciones, etc. del cálculo.

Otra investigación dedicada al pensamiento funcional se centra también en el análisis de los procesos de comprensión de la derivada, pero está en el contexto de un curso de postgrado. Trigueros et al. (2024) presentan resultados de un estudio que analiza el trabajo de varios estudiantes al abordar problemas complejos en cuyas soluciones tienen que establecer relaciones entre derivadas. El cálculo diferencial es un área de las matemáticas cuya enseñanza y aprendizaje han recibido atención por parte de los investigadores en educación matemáticas desde hace muchos años. No obstante, Trigueros et al. han identificado poca información sobre la enseñanza para preparar a los estudiantes a abordar las demandas de las matemáticas avanzadas, en particular del cálculo diferencial, y sobre la comprensión por los estudiantes de las relaciones matemáticas entre diferentes conceptos.

La teoría APOE es el marco teórico de Trigueros et al. (2024). Los autores presentan con bastante detalle sus componentes (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y los utilizan para analizar los datos experimentales recopilados. En particular, caracterizan tres etapas de desarrollos de Esquemas, intra, inter y trans, aplicadas a los Esquemas relativos a las funciones derivadas y a las informaciones sobre intervalos de las derivadas. La teoría APOE ha mostrado, desde su creación (Dubinski, 1991), ser un marco muy adecuado para las investigaciones sobre cálculo avanzado. En este contexto, Trigueros et al. plantean como objetivos: i) analizar las formas de resolución de problemas de cálculo diferencial complejos en los que intervienen representaciones gráficas por estudiantes de postgrado de matemáticas y ii) identificar el apoyo que pueden presentar los Esquemas gráficos de la derivada (EGD) a los estudiantes para que identifiquen y usen interacciones entre propiedades e intervalos de las curvas para generar Esquemas. La principal aportación del artículo es informar sobre la comprensión por los estudiantes de matemáticas de postgrado del contexto de las representaciones gráficas de las derivadas. Su experimento de enseñanza se llevó a cabo con 26 estudiantes graduados en matemáticas y enrolados en un máster de educación matemática. Los autores diseñaron dos cuestionarios individuales de papel y lápiz y una entrevista semiestructurada. El primer cuestionario consistió en un problema dirigido a identificar la evolución de los EGD de los estudiantes. Los estudiantes que mostraron un nivel de construcción de sus EGD del tipo trans-intervalos y trans-derivadas respondieron el segundo cuestionario, formado por tres problemas que piden analizar las gráficas de funciones usando sus derivadas. Finalmente, los estudiantes que resolvieron correctamente los tres problemas fueron entrevistados; la entrevista consistió en resolver dos problemas en los que es necesario relacionar una función y sus derivadas segunda y tercera. Las entrevistas permitieron observar, describir y analizar el Esquema gráfico de la derivada de cada estudiante, lo cual supone un aporte interesante al conocimiento actual de las complejidades de las funciones en los cursos universitarios de cálculo avanzado, desde la óptica de la teoría APOE.

Este conjunto de investigaciones permite observar, independientemente de los marcos teóricos usados, las principales dificultades de los estudiantes, como son los significados de las letras o del signo = y las principales aproximaciones didácticas al inicio del estudio del álgebra, como la presentación del álgebra como aritmética generalizada.

Por su parte, Gascón (2024) presenta una panorámica de las investigaciones sobre álgebra elemental, modelización algebraico-funcional y cálculo diferencial llevadas a cabo por miembros del grupo español que trabaja en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desde finales de los años 1990. Estos trabajos se centran en el estudio de las organizaciones matemáticas escolares que componen el

saber por enseñar y en la identificación de fenómenos didácticos que permitan explicar las dificultades de estudiantes y profesores en su aprendizaje y enseñanza. Para analizar las características de las matemáticas que se enseñan y de las formas de enseñarlas, se elaboran entonces reconstrucciones o modelos alternativos de las matemáticas escolares. En el caso de la enseñanza del álgebra elemental y las funciones, el modelo propuesto se expresa en forma de procesos de modelización algebraico-funcionales que conectan los inicios del álgebra con los modelos funcionales discretos y continuos, incluyendo en este proceso la construcción de los números enteros (Cid et al., 2020).

2.3. Pensamiento geométrico y visual, incluyendo argumentación/demostración

La investigación sobre conceptos y procesos geométricos tiene varios focos de atención, entre ellos el desarrollo del pensamiento geométrico, de la argumentación/demostración y de la capacidad de visualización. En relación con el pensamiento geométrico, una secuencia de experimentos ha permitido identificar niveles de sofisticación en la comprensión del concepto de polígono y de clases de polígonos por niños/as de 3º de Educación Primaria (Bernabeu et al., 2021a, 2021b, 2022), así como factores en la enseñanza que influyen en esa comprensión (Bernabeu et al., 2024).

La enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática se pueden hacer en el contexto de cualquier área de las matemáticas de educación secundaria y universitaria, pero la geometría tiene algunas características que la diferencian de las demás áreas matemáticas (Sinclair et al., 2017) y la hacen más idónea para iniciar la enseñanza. Una de estas características diferenciadoras es que, al empezar a aprender a demostrar, los estudiantes necesitan el apoyo de elementos visuales para identificar propiedades, organizar argumentos y expresar demostraciones. Por ello, es también interesante investigar sobre los aportes que la visualización puede hacer para facilitar el aprendizaje de la demostración. Esta conexión entre visualización y demostración está en el centro de la dialéctica entre diagramas (representaciones físicas de objetos geométricos) y figuras (entidades ideales que corresponden a las definiciones de esos objetos), entre lo real tangible y lo ideal (Laborde, 2005), y gana actualidad y relevancia cuando la enseñanza se basa en entornos de geometría dinámica.

Diversos grupos desde las universidades de Alicante, Gerona, Granada, Santiago de Compostela, Sevilla, Valencia y Zaragoza, entre otras, han investigado distintas facetas de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración y/o argumentación en matemáticas, en la mayoría de los casos en entornos con soporte geométrico. Estas investigaciones usan diferentes marcos teóricos, algunos más generales, como los niveles de Van Hiele, y otros más específicos, como las categorías de demostraciones. Los niveles educativos abordados van desde los primeros cursos de primaria hasta investigadores matemáticos.

Alsina, et al. (2021) analizaron las argumentaciones producidas por estudiantes de 3º de primaria, en su mayoría cortas, simples y tendentes a explicar las acciones realizadas previamente por los niños para resolver actividades de tipo STEM, con escasa presencia de otras funciones como la de refutar. En el otro extremo, Fernández-León et al. (2021), como otros investigadores españoles e internacionales, exploraron los procesos de razonamiento y los procedimientos de trabajo de profesores universitarios en sus investigaciones matemáticas. Ramírez-Uclés et al. (2018) y Ramírez-Uclés y Ruiz-Hidalgo (2022) exploraron las habilidades de conjetura y demostración al resolver problemas de geometría de estudiantes, de final de la primaria y principio de la ESO, que participan en los talleres de ESTALMAT. Sua et al. (2024) presentaron un experimento basado en GeoGebra en el que los estudiantes, mediante pensamiento analógico, debían construir objetos similares en el plano y el espacio, por ejemplo, construir la mediatriz de un segmento en 2D y su plano mediador en 3D; el razonamiento analógico ayudó a los estudiantes a descubrir conceptos de geometría espacial desconocidos para ellos y a desarrollar demostraciones de las propiedades involucradas en 3D.

También Prior y Torregrosa (2020) analizaron las respuestas de estudiantes de ESO a varios problemas geométricos de demostrar, tomando como marco teórico la combinación del razonamiento

configural y el espacio de trabajo matemático. El artículo muestra los diferentes estilos de razonamiento usados para realizar las demostraciones pedidas en los problemas, que van desde demostraciones naifs, consistentes en mostrar un ejemplo, a demostraciones empíricas más sofisticadas. Saorín et al. (2019a, 2019b) analizaron la relación entre el razonamiento configural (RC) y la organización discursiva en procesos de prueba en contextos geométricos, mientras que Llinares y Clemente (2019) caracterizan las transiciones desde el razonamiento configural al razonamiento deductivo en la resolución de problemas de probar en geometría. Richard et al. (2016) usan también el marco del espacio de trabajo matemático y proponen enseñar a demostrar mediante la resolución de problemas geométricos de Clairaut, para mostrar la utilidad de dicho marco teórico para analizar la actividad demostrativa de los estudiantes.

Manero y Arnal-Bailera (2021) trabajaron con futuros profesores de matemáticas de secundaria y analizan sus procesos de demostración mediante los niveles de Van Hiele. Obtienen diversos estilos de respuestas, llamando la atención que algunos futuros profesores muestran un nivel de razonamiento en demostración inferior al que tienen parte de los estudiantes de bachillerato.

Otra línea de investigación productiva y prometedora es la relacionada con la demostración automática. Recio et al. (2019) utilizaron las habilidades de GeoGebra para verificar automáticamente propiedades de las construcciones para iniciar a futuros profesores canadienses en la demostración matemática y su enseñanza.

El equipo investigador más destacado en los temas de visualización, demostración y su intersección es el de la Universidad de Valencia, que incluye también a colegas de diversas universidades españolas y latinoamericanas. Además de numerosas presentaciones en los simposios de SEIEM y otros congresos, así como diversas tesis doctorales defendidas en los últimos 15 años, entre las publicaciones de este grupo podemos destacar diversos trabajos: Guinjoan et al. (2015) analizan las respuestas de estudiantes que han alcanzado distintos niveles de éxito en las pruebas Cangur, para identificar las diferentes estrategias de resolución de los problemas, algunas de los cuales incluyen razonamiento deductivo (en la sección 4.2 daremos más detalles). Fiallo y Gutiérrez (2017) presentan resultados de la tesis doctoral del primer autor, analizando el aprendizaje de la demostración por estudiantes colombianos de secundaria; el artículo muestra cómo las fases ascendente y descendente, la unidad o ruptura cognitiva de los teoremas y el diagrama de Toulmin forman un marco teórico idóneo para analizar las resoluciones de problemas que formaban parte de un curso experimental de trigonometría. Mora et al. (2024a) han planteado a estudiantes de varios cursos de primaria, desde 2º hasta 6º, diferentes tipos de problemas de visualización que requieren crear imágenes mentales de proyecciones ortogonales no accesibles, manipular y comparar de módulos de cubos y calcular la cantidad de piezas de un módulo de cubos. Para analizar las respuestas, determinaron un detallado conjunto de descriptores de la capacidad de visualización. Los resultados de estos experimentos indican que los diversos tipos de problemas requieren el uso de diferentes formas de razonamiento visual.

Gutiérrez et al. (2018b) y Ramírez et al. (2016) presentaron un experimento basado en la resolución de un problema de orientación espacial y visualización por dos estudiantes con alta capacidad matemática (ACM), que debían comunicarse uno al otro verbalmente información visual y, al mismo tiempo, ofrecer argumentos que justificaran que sus afirmaciones o propuestas eran válidas. Sua et al. (2021) informaron sobre las estrategias de varios futuros profesores de primaria al resolver dos problemas de visualización en el entorno de realidad aumentada de GeoGebra.

Blanco et al. (2024a) informan sobre la investigación en educación matemática española enfocada a explorar la conexión entre visualización y argumentación, y cómo la primera ayuda a los estudiantes a desarrollar sus habilidades de argumentación. Los autores han elegido dos marcos teóricos que permiten trabajar de manera conjunta en los dos componentes, visualización y argumentación; estos marcos son el enfoque ontosemiótico (EOS) y el razonamiento configural (RC). Los autores empiezan

presentando sus definiciones de visualización en matemáticas y de argumentación matemática. Para la visualización, adoptan la definición de Gutiérrez (1996), que alude explícitamente a la importancia y utilidad de implicar la visualización en la realización de argumentaciones y demostraciones.

En la literatura de educación matemática existe un debate permanente sobre los significados de "argumentación" y "demostración" y las relaciones entre ambos constructos. Blanco et al. (2024a) toman partido por diferenciarlos, pues su conceptualización de argumentación matemática, basada en Molina et al. (2019) y Camargo et al. (2024), la presenta como un proceso, individual o colectivo, que, siguiendo ciertas reglas aceptadas, lleva a conclusiones mutuamente aceptables sobre la verdad o falsedad de una afirmación o acción. Los constructos de argumentación y visualización aluden uno al otro, incluso en sus definiciones. Blanco et al. exploran esta conexión en el artículo, presentando resultados de investigaciones que analizan el papel de la visualización en la creación de argumentos para realizar tareas de conjetura y demostración, y el papel de la argumentación en la resolución de tareas que promueven la visualización. La primera parte del artículo está dedicada a presentar las posiciones y significados de visualización y argumentación en los dos marcos teóricos mencionados antes (EOS y RC). Un componente central del EOS son seis "objetos" que intervienen en la actividad matemática, uno de los cuales son los argumentos, que se usan para validar y dar soporte a afirmaciones matemáticas. En este marco, la visualización se interpreta basándose en la definición de Gutiérrez (1996) y se analiza desde el punto de vista de cada uno de dichos objetos (Godino et al., 2012). El marco del RC se basa en las aprehensiones de Duval y considera la elaboración de argumentaciones ligada a las aprehensiones discursiva y operativa. Además, entiende la visualización como la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Se observa que las definiciones de ambos marcos señalan como elemento central el movimiento bidireccional entre información no figurativa e información visual. Blanco et al. (2024a) analizan las aportaciones de diversas publicaciones, organizándolas en diferentes grupos, según que sus aportaciones tengan que ver con el soporte argumentativo en las tareas de tipo visual, para explicar y justificar las imágenes creadas, o el soporte visual en las tareas de conjetura y demostración, para la elaboración de argumentos durante su resolución.

2.4. Pensamiento probabilístico y sentido estocástico

Es conocido que los temas de probabilidad y estadística ocupan la última posición en las prioridades de los profesores de primaria y que tampoco son un tema prioritario para los profesores de secundaria. Esto hace que la investigación didáctica en estos temas sea más escasa que en otros como álgebra, aritmética o funciones. No obstante, en España ha habido siempre, desde los primeros años de existencia del área de conocimiento de la didáctica de la matemática, interés por la investigación en didáctica de la probabilidad y, más recientemente, en didáctica de la estadística. Buena parte de esta investigación se centra en los (futuros) profesores de matemáticas de primaria y secundaria; estos trabajos están recogidos en la sección 3.

El principal grupo de investigación español en este tema tiene su centro en la Universidad de Granada y está liderado por Carmen Batanero. Las publicaciones que se pueden encontrar en las revistas y bases de datos nacionales e internacionales están en su mayoría firmadas por Batanero u otros miembros centrales de su equipo, como María M. Gea o Nuria Begué. Más recientemente, el grupo liderado por Àngel Alsina en la Universidad de Girona también está empezando a desarrollar una línea de investigación centrada en la probabilidad y la estadística. Así mismo, encontramos otras publicaciones que parecen ser productos de investigaciones puntuales, pero que son interesantes.

En lo referente a la enseñanza y el aprendizaje de las probabilidades, Batanero y Álvarez-Arroyo (2024) presentan una revisión de la literatura internacional de los seis últimos años, que incluye algunas publicaciones de autoría española. Además, Batanero et al. (2021) ofrecen una síntesis de la literatura internacional sobre razonamiento probabilístico de niños de hasta 7 años de edad. En ella revisan la literatura y la organizan alrededor de diferentes temáticas, como son conceptos o relaciones

probabilísticas, combinatoria y procesos cognitivos asociados a las anteriores. En el mismo contexto escolar, Vásquez y Alsina (2019) presentan experimentos con estudiantes de infantil para analizar sus concepciones de azar y probabilidad. Sus resultados confirman que los estudiantes de estas edades necesitan, igual que para cualquier otro contenido matemático, un fuerte apoyo visual y manipulativo para realizar experiencias y desarrollar su pensamiento probabilístico. Además, Vásquez Ortiz et al. (2020) ofrecen una pauta para analizar las clases de probabilidad en primaria basándose en cinco dimensiones: tipos de tareas planteadas; tipos de razonamiento probabilístico necesarios para resolver las tareas; conexiones entre elementos probabilísticos que surgen con las tareas; comunicación en diálogos para compartir ideas y avanzar en el aprendizaje; y uso del lenguaje probabilístico. El artículo es de carácter predominantemente metodológico, pues se centra en mostrar el proceso de creación, validación y mejora del instrumento.

En cuanto a otras investigaciones específicas, estas recorren los diferentes niveles educativos, desde la primaria superior hasta la formación de profesorado. Hernández-Solís et al. (2023) y Batanero et al. (2023) presentan un estudio que analiza el uso de la proporcionalidad en la resolución de problemas aritméticos escolares ordinarios y en problemas de comparación de probabilidades. La muestra está formada por estudiantes españoles de 6º de primaria a 4º de ESO y costarricenses de los cursos equivalentes. Los resultados muestran diferencias en el uso del razonamiento proporcional según que se trate de problemas de probabilidad o aritméticos, las cuales tienen que ver con la mayor o menor complejidad de las proporciones de los contextos probabilísticos. Alonso-Castaño et al. (2021), trabajando con futuros profesores de primaria en el contexto de una actividad de invención de problemas, comprueban que la mayoría de los participantes manejan adecuadamente la comunicación y la argumentación, pero una gran parte de los participantes tenían importantes carencias de conocimientos matemáticos necesarios para resolver los problemas que creaban.

En Batanero et al. (2018) podemos ver los resultados de un estudio centrado en las pruebas de acceso a las universidades españolas. Definen diferentes variables de análisis, tales como los contenidos probabilísticos puestos en juego en las resoluciones, los tipos de experimentos y muestras, los contextos de los problemas y las formas de presentación de los datos. Con un objetivo similar, aunque contexto y metodología diferentes, Rubio-Chueca et al. (2021) analizan los problemas planteados en olimpiadas matemáticas regionales y nacionales españolas. Estos autores evalúan el nivel de demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998) de los problemas y concluyen que la gran mayoría de ellos están en los niveles más altos de demanda cognitiva, es decir, que son adecuados para las olimpiadas. También concluyen que el lenguaje de la mayoría de los problemas está basado en terminología matemática y pocos presentan contextos cotidianos; además, presentan más frecuentemente la información de manera gráfica (en particular mediante diagramas de árbol) que tabular.

En lo referente a la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, también destaca el grupo de la Universidad de Granada, por la cantidad e importancia de su producción. Sus publicaciones abordan el análisis didáctico de diferentes componentes de la estadística, como las distribuciones muestrales (Batanero et al., 2020; Begué et al., 2023), diversas medidas estadísticas que se estudian en primaria y secundaria, como la media (Begué et al., 2018; Rondero y Font, 2015), y la mediana (Madrid et al., 2022). También han analizado las formas de presentar diferentes tipos de gráficos estadísticos (histogramas, lineales, de sectores, etc.) en los libros de texto de secundaria de Chile (Arteaga et al., 2021a) y Costa Rica (Arteaga et al., 2021b). En estos artículos, además, presentan cuatro niveles de complejidad semiótica (Arteaga et al., 2021a) y cuatro niveles de lectura de los gráficos (Arteaga et al., 2021b).

En cuanto a los libros de texto españoles de primaria, Gea et al. (2022) han estudiado las actividades cuyas resoluciones incluyen el uso de tablas estadísticas planteadas en libros de texto de los seis cursos de primaria. Esta línea de investigación continúa en Pallauta et al. (2023a), donde las autoras clasifican los diferentes tipos de tablas estadísticas según su complejidad semiótica y presentan un cuestionario para identificar la comprensión por los estudiantes de los tipos de tablas identificados

previamente. También en relación con el uso de tablas estadísticas por los estudiantes de secundaria, pero con otro enfoque, Pallauta et al. (2023b) proponen usar los niveles de algebrización elemental previamente definidos en otras publicaciones para analizar los requisitos de uso de lenguaje algebraico por los diferentes tipos de tablas estadísticas, pues estas pueden parecer visualmente similares, pero tener muy diferentes requerimientos de complejidad de razonamiento de los estudiantes.

2.5. La historia de las matemáticas y de su enseñanza como herramienta didáctica

En España hay una larga tradición de investigación didáctico-histórica, con cuatro focos iniciales en las universidades de Valencia, Salamanca, Córdoba y Murcia, que posteriormente se extendieron a otras universidades, como la de Zaragoza. A lo largo de los años, estos estudios han abarcado todas las áreas de contenidos curriculares. Algunas investigaciones se centran en analizar libros de texto (o tratados con finalidad educativa) de épocas anteriores. Así, Madrid et al. (2023b) consultan libros de aritmética del siglo XVI para analizar las conexiones que hacen con los contextos cotidianos. Madrid et al. (2023a) informaron sobre la introducción del álgebra en España en el siglo XVI y Ruiz-Catalán et al. (2024) han presentado los procedimientos de resolución de ecuaciones introducidos en el siglo XVII. Sánchez y González (2017, 2019), en relación con la enseñanza de la geometría analítica en el siglo XIX, analizaron algunos currículos y libros de texto de esa época y aspectos más específicos como la interpretación de las soluciones negativas. Más allá de los libros de texto, también se han analizado manuales históricos de matemáticas (Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2020; Oller-Marcén y Muñoz-Escolano, 2019) y estudiado la presencia de las matemáticas en revistas pedagógicas antiguas o en prensa generalista (Muñoz-Escolano et al., 2022; Oller-Marcén, 2023). Otros investigadores han informado sobre elementos de la historia de las matemáticas o de su enseñanza que han influido en la enseñanza de las matemáticas posterior, como es el caso de Puig (2022), que ha analizado la evolución del concepto de estructura algebraica hasta llegar a las matemáticas actuales.

En la Universidad de Murcia se inició en los años 1990 una línea de estudios sobre la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas Normales (Carrillo, 2004; Sánchez-Jiménez y Dólera, 2023). Algunas de estas investigaciones han utilizado la TAD como marco analítico complementario para sus estudios históricos sobre la educación matemática y la formación del profesorado (Sánchez-Jiménez, 2020). Se establecen así vínculos productivos entre la investigación histórica y la didáctica, ampliando el ámbito de estudio de esta última más allá de las instituciones contemporáneas e identificando fenómenos que han condicionad nuestras formas actuales de operar (Carrillo et al., 2018). La línea de investigación seminal se extendió al movimiento de la Escuela Nueva en España (Sánchez-Jiménez et al., 2020) y a la enseñanza de las matemáticas en bachillerato en el siglo XX, con la figura especial de Pedro Puig Adam (Dólera y Sánchez-Jiménez, 2024).

Finalmente, la utilización de manuales y publicaciones periódicas antiguas como herramienta para la formación de profesorado surge como línea de trabajo por desarrollar (Arnal-Bailera y Oller-Marcén, 2020).

3. INVESTIGACIÓN SOBRE LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Para la identificación de focos en la investigación sobre el profesor (formación inicial y desarrollo profesional) y la práctica del profesor hemos tomado como referencia inicial las actas de los simposios de la SEIEM desde 2018 (cinco simposios), en el trabajo de síntesis realizado en la presentación de la comunidad de investigadores españoles en el PME45-2022 en Alicante y los focos de atención identificados los hemos complementado con la reseña de artículos publicados en bases de datos internacionales. De esta manera, identificamos focos en la investigación en educación matemática sobre y con el profesor (Badillo et al., 2019; Llinares, 2018, 2023) y que nos permiten ejemplificar algunos de los problemas de investigación recurrentes mediante investigaciones específicas. En la

última parte de esta sección ejemplificamos los focos con una presencia mayoritaria a través de algunas investigaciones empíricas que describimos brevemente y que forman parte de la propuesta de Special Issue de la revista ZDM mencionada en la introducción.

3.1. La visibilidad en SEIEM y bases de datos internacionales

3.1.1. Desde los simposios de la SEIEM (2018-2023)

En los últimos años, ha habido dos simposios de la SEIEM con seminarios de investigación sobre la investigación sobre y con el profesor de matemáticas. En el Simposio de 2018 (Gijón), el seminario titulado "Conocimiento y competencia docente: estableciendo relaciones entre perspectivas teóricas", y en el Simposio de 2023 (Logroño) el titulado "Retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos". Además, en estos últimos cinco simposios (en 2020 no hubo Simposio debido al COVID) se presentaron comunicaciones de investigaciones empíricas que desde perspectivas diversas han estado aportando nuevo conocimiento sobre la formación del profesorado de matemáticas y su práctica (115 de 238) (Tabla 1).

Tabla 1. Comunicaciones en Seminarios SEIEM con foco profesor

Año	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**	**2023**
Comunicaciones Foco profesor/total	22/50	25/46		22/66	21/48	25/55

En el simposio de la SEIEM de 2018 (Gijón) se realizó un seminario de investigación con el título "Conocimiento y competencia docente: estableciendo relaciones entre perspectivas teóricas". El seminario se organizó alrededor del análisis de un mismo conjunto de evidencias (una narrativa de una estudiante para maestra de educación primaria escrita durante el periodo de prácticas) desde diferentes perspectivas teóricas. El objetivo del seminario era ejemplificar diferencias y posibles complementariedades que se podían generar desde diferentes perspectivas teóricas para comprender mejor el aprendizaje y desarrollo de competencias profesionales en los estudiantes para docentes (en este caso maestros de educación primaria). Se ejemplifican tres perspectivas teóricas. Dos procedentes de modelos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK y Modelo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas desde el EOS, y una tercera derivada de la perspectiva de la "racionalidad de la práctica") ejemplificada a través de la conceptualización de la competencia docente del profesor de matemáticas "mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas" (como un proceso de razonamiento sobre la práctica realizado en contextos específicos para justificar acciones). El seminario permitió ilustrar cómo se genera nuevo conocimiento sobre el desarrollo de competencias docentes que puede informar y justificar decisiones sobre el diseño de los programas de formación (ejemplificando procesos de transferencia).

El segundo seminario se realizó en el simposio de la SEIEM de 2023 (Logroño), con el título "Retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos". El seminario presentó aportes de la investigación sobre la formación de profesores ante los cambios curriculares como una manera de evidenciar el valor del conocimiento generado por la investigación para la toma de decisiones en la formación inicial y continua del profesorado. En este seminario se subrayó el papel de los modelos teóricos sobre el aprendizaje de las matemáticas y sobre el conocimiento y práctica del profesor para organizar la formación docente. En particular, se hizo visible la influencia de la perspectiva teórica (la adoptada por los formadores en cada caso particular) en la toma de decisiones que configuran el diseño de los programas (considerando en cada caso las restricciones institucionales). El seminario permitió situar las reflexiones sobre la influencia de los modelos teóricos en las decisiones sobre el diseño y recursos de los programas de formación (o parte de ellos) desde una perspectiva internacional (a través de ejemplos de UK, Italia, Portugal y España).

Estos dos seminarios, realizados en los últimos años, muestran claramente el papel que puede desempeñar instituciones como la SEIEM en relación con instrumentos políticos como la reciente

creación de la "Oficina Nacional de Asesoramiento Científico" creada para coordinar el conocimiento y la mejora de la toma de decisiones y el diseño de las políticas públicas para crear espacios que ayuden a fundamentar las decisiones políticas en resultados de investigaciones científicas.

En relación con las comunicaciones, las 115 comunicaciones presentadas en los últimos cinco simposios que podemos situar con un foco considerando al profesor se pueden organizar según la especificidad de su foco mediante un proceso inductivo. Asignar un determinado estudio empírico a un foco determinado lo hemos realizado considerando la cuestión de investigación y el conocimiento generado (y no necesariamente la perspectiva teórica adoptada) (mirando el resumen, la pregunta de investigación y las conclusiones/discusión generada). La asignación no es un proceso simple y tiene limitaciones derivadas de la dificultad de asignar algunos estudios en un foco particular. Sin embargo, esta aproximación permite mostrar a grandes rasgos ciertas tendencias en los focos identificados que reflejan, en cierta manera, las preocupaciones de los investigadores. Estas preocupaciones también responden a la necesidad de responder a preguntas generadas desde la práctica de formar docentes. Siguiendo este proceso, hemos identificado ocho focos específicos que hemos denominado: práctica del profesor, desarrollo profesional, concepciones, dominio afectivo, conocimiento especializado, prácticas profesionales específicas (competencia docente), Formador, y otros (contexto, programa) (Tabla 2). Dos focos centran en mayor medida las investigaciones realizadas (considerando la manera en la que hemos realizado la asignación): investigaciones centradas en el conocimiento específico del docente de matemáticas e investigaciones centradas en el aprendizaje y desarrollo de prácticas profesionales específicas vinculadas a la enseñanza de las matemáticas (considerando la perspectiva de las competencias docente).

Para la descripción de los focos, consideramos algunos descriptores identificados en las propias comunicaciones o generados por la lectura. Dos focos tienen una presencia menor en estos últimos cinco simposios, las comunicaciones sobre el "desarrollo profesional" centradas en el contexto del "análisis de lecciones" (*lesson study*) y el papel de las reflexiones del docente como mecanismo de mejora de la calidad de la enseñanza, y el foco que hemos denominado "otros", que incluye un análisis de programas de formación. Algunos de los descriptores de los otros focos se incluyen a continuación, ordenados por el número de comunicaciones.

Tabla 2. Focos de las investigaciones presentadas en los Simposios de la SEIEM.

FOCOS	**2018**	**2019**	**2021**	**2022**	**2023**	**Total**
Práctica del profesor	2	2	1	2	2	9
Desarrollo profesional	1	1	0	0	0	2
Concepciones	2	3	2	3	3	13
Dominio afectivo	2	1	2	0	1	6
Conocimiento especializado	4	13	8	6	3	34
Prácticas profesionales específicas (Competencia docente)	10	3	9	9	13	44
Formador	0	2	0	1	3	6
Otros	1	0	0	0	0	1
Total	22	25	22	21	25	115

Existen cuatro focos con una presencia media (pero con diferente número de comunicaciones) que son los centrados en el dominio afectivo, el formador de docentes, la práctica del profesor y las concepciones. El foco sobre el "dominio afectivo" incluye investigaciones empíricas centradas en la ansiedad, autoestima, perfil emocional docente y actitudes hacia recursos (introducción de robots) o tópicos específicos (probabilidad). Se analizan aspectos del dominio afectivo como rasgos característicos del perfil profesional de ser docente en matemáticas. Las comunicaciones centradas en el "formador" de docentes se centran en determinar dominios de conocimiento del formador, la

explicitación de este conocimiento a través de la reflexión que se manifiesta en la toma de decisiones de los contenidos de la formación inicial, y en caracterizar su práctica como diseñador de los procesos formativos. Las comunicaciones con el foco sobre la "práctica del profesor "se centran en caracterizar el discurso del profesor (la lengua), la naturaleza de las interacciones en la clase (grupo y docente-estudiante, y los procesos de negociación de significados), y sobre las manifestaciones del conocimiento especializado de los docentes (MTSK) en la práctica de enseñar procesos o tópicos matemáticos específicos. El foco "concepciones" agrupa comunicaciones que también recogen términos como creencias y percepciones (por ejemplo, sobre el conocimiento profesional docente, la utilidad de la geometría, sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sobre los estudiantes como resolutores de problemas, sobre la creatividad, sobre el uso de la historia como recurso, o sobre la inclusión de diferentes perspectivas en la enseñanza de las matemáticas (modelización, pensamiento computacional, competencias lógico-matemáticas).

3.1.2. Desde SCOPUS (2018 - julio 2024)

Los dos focos con una mayor presencia de comunicaciones son el centrado en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, y el centrado en el aprendizaje de prácticas profesionales específicas (competencia docente) vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Estos dos focos de atención también han tenido un reflejo claro en las publicaciones en revistas indexadas, lo que refleja agendas de investigación dinámicas y productivas. Para esta sección, añadimos a la búsqueda inicial indicada en la introducción en SCOPUS el filtro "teacher" y sus variantes ("preservice", "in-service", "prospective", "professional development"), con las palabras clave: "Mathematics AND Education AND Teacher". Del listado producido, elegimos aquellos artículos que tenían el foco sobre el profesor de matemáticas (y no eran editoriales, ni documentos describiendo la perspectiva de la revista) obteniendo 50 artículos (de 140). Se puede observar que la razón entre artículos con foco en aspectos del profesor y el número total de artículos publicados en estas revistas de referencia es similar a lo encontrado en la revisión de las comunicaciones a la SEIEM en los últimos cinco simposios. Además, los focos de estos artículos coinciden con la descripción temática generada en el primer paso de esta revisión, considerando los simposios de la SEIEM. Aunque estos criterios de búsqueda generan algunas limitaciones, permiten construir un mapa aproximado de las preocupaciones de los investigadores españoles en relación con el profesor.

3.2. Conocimiento de matemáticas para la enseñanza (conocimiento especializado) y prácticas profesionales específicas (competencia docente)

Consideradas conjuntamente las aportaciones desde los simposios de la SEIEM y los artículos identificados en las bases de datos usadas en este mapeo los dos focos con más presencia son el centrado en el conocimiento de matemáticas para la enseñanza y el centrado en las prácticas profesiones específicas. Estos dos focos particulares serán ejemplificados en la siguiente sección, desarrollando una mirada detallada y situándonos en relación con una perspectiva internacional.

3.2.1. Una mirada a los focos sobre conocimiento especializado y sobre las prácticas profesionales específicas (competencia docente) del profesor de matemáticas

Dos ideas permiten categorizar al grupo de investigaciones relacionadas con el profesor. Por una parte, la idea de "práctica profesional específica" (*core practice*) (Grossman, 2018; Matsumoto-Royo et al., 2021), y por otra, la idea de conocimiento especializado necesario para enseñar (Shulman, 1986; Lin y Rowland, 2016). En esta sección, desarrollamos inicialmente los apoyos que podemos identificar en estas dos ideas para posteriormente ejemplificar estos focos a través de algunas investigaciones empíricas. Los ejemplos de investigaciones empíricas forman parte de la propuesta del número especial de la revista ZDM dedicado a la investigación española en Educación Matemática.

La primera idea se articula alrededor de la noción de competencia docente, vinculada a la práctica de enseñar matemáticas. La práctica de enseñar matemáticas se puede concebir formadas por un conglomerado de *prácticas profesionales específicas (core practices)* que son reconocidas como relevantes para la enseñanza de la matemática y que se pueden aprender en los programas de formación (Fernández et al., 2020; Moreno et al., 2021; Breda et al., 2017, 2018; Álvarez-Arroyo et al., 2024). Ejemplos de estas prácticas son diseñar tareas matemáticas, planificar lecciones y presentar las tareas en el aula; gestionar discusiones matemáticas productivas en el aula para generar explicaciones matemáticas provechosas; interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y anticipar diferentes niveles de respuestas a tareas matemáticas; y analizar situaciones de enseñanza tanto propias como observadas (reflexionar sobre la propia práctica) (Márquez, et al., 2021; Montero et al., 2020, 2022; Sánchez-Matamoros et al., 2018, 2019). Estas prácticas profesionales específicas se consideran centrales en la enseñanza de las matemáticas, ya que son necesarias para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes, y pueden ser consideradas parte de prácticas profesionales más complejas de la profesión de enseñar. La competencia docente se entiende desde esta perspectiva como la realización de acciones fundamentadas en el conocimiento especializado para apoyar los objetivos de aprendizaje matemático, es decir, para apoyar líneas de acción (Callejo et al., 2022). En este sentido, estas prácticas profesionales específicas evidencian usos en contexto de diferentes dimensiones del conocimiento especializado para la práctica de enseñar matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Pino-Fan et al., 2018).

La relevancia del papel que desempeñan estas prácticas en la enseñanza de las matemáticas traslada la atención hacia encontrar maneras de favorecer su desarrollo en los programas de formación (Grossman, 2018), generando focos específicos de investigación. En particular, la idea de "descomponer la práctica de enseñar matemáticas" en prácticas profesionales específicas, permite generar lenguaje y categorías para discutir y analizar la práctica de enseñar matemáticas, haciendo visibles a los estudiantes para profesores rasgos implícitos de dicha práctica. Es decir, es una manera de hacer visibles a los que quieren ser maestros y profesores de aspectos relevantes de la práctica de enseñar matemáticas, al mismo tiempo que ayuda a los formadores a identificar y pensar en oportunidades de aprendizaje de estas prácticas. En general, las propuestas formativas derivadas de esta perspectiva responden a una "formación basada en la práctica" (*practice-based teacher education*). Esta perspectiva subraya la noción de competencia docente como el uso pertinente del conocimiento para resolver situaciones derivadas de la enseñanza y, como consecuencia, la de intentar diseñar oportunidades para su desarrollo en las propuestas formativas (Barquero et al., 2024; Fernández et al., 2018a). De esta manera, las investigaciones recogidas en esta sección se insertan en procesos formativos que, en cierta medida, buscan describir y comprender el aprendizaje de estas prácticas profesionales específicas (Fernández et al., 2018b). Estos procesos formativos subrayan una estructura de la secuencia de actividades que pretende apoyar los razonamientos (formas de pensar sobre…) de los estudiantes para profesores y profesores (en propuestas de desarrollo profesional), introduciendo información teórica desde la didáctica de la matemática (guías para focalizar lo que hay que observar y apoyar formas de mirar para definir líneas de actuación en la práctica) (Ivars et al., 2018, 2020a, 2020b; Sánchez-Matamoros et al., 2018).

La segunda idea es la caracterización de un conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las diferentes dimensiones que lo configuran. Desde los trabajos seminales de Shulman (1986) ha habido un desarrollo importante de modelos teóricos sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que subrayan la idea de enseñar matemáticas como una profesión (Schwarz y Kaiser, 2019). La importancia de estas actuaciones radica en colocar en el centro de la enseñanza la disciplina a ser enseñada, y, en particular, en hacer conscientes a los investigadores sobre la enseñanza de lo que representa el conocimiento sobre la comprensión de la disciplina, en nuestro caso las matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Pino Fan, et al., 2018, 2023).

La identificación de dominios del conocimiento necesario para enseñar matemáticas se generó inicialmente a nivel internacional a partir del análisis de la práctica de enseñar matemática e identificando aspectos del conocimiento relevantes para la enseñanza (conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento curricular) (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Desarrollos posteriores, muestran que las creencias/concepciones de los profesores sobre el contenido influenciaban las formas en las que enseñaba. Por lo que, en el caso particular de las matemáticas, algunos modelos, como el MTSK, introdujo la noción de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje permeando el conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2018) e identificándose perspectivas alternativas (Scheiner et al., 2019), mientras que el DMKC (Pino-Fan, 2023) enfatizaban la relación del conocimiento con las competencias docentes.

En las investigaciones recogidas en esta revisión, podemos identificar diferentes usos de la idea del conocimiento especializado del profesor centrado en conocimiento de dominios y procesos matemáticos específicos necesarios para la enseñanza (Buforn et al., 2018, 2022); o considerando sus características como variable de entrada al programa de formación (Gorgorio et al., 2021). Un aspecto particular que ejemplificamos es el uso del modelo del conocimiento MTSK como referencia para diseñar tareas en los programas de formación, con el objetivo de favorecer el aprendizaje integrado de diferentes dominios de conocimiento (p. ej., conocimiento de matemáticas y conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas). Además, se abre el espacio para complementar con otros modelos teóricos (tales como los Espacios de trabajo matemáticos) la manera en la que los estudiantes para profesor pueden llegar a ser conscientes de las relaciones entre la dimensión afectiva y epistemológica como aspecto importante en el conocimiento especializado del profesor (Gómez-Chacón y Marbán, 2024).

3.2.1. Prácticas profesionales específicas en la enseñanza de las matemáticas: Algunos ejemplos

Describimos siete investigaciones con foco en el desarrollo de algunos aspectos de las prácticas profesionales específicas con participantes de diferentes niveles educativos, siendo estudiantes para docentes o docentes en ejercicio.

Alsina et al. (2024) se centran en el análisis del diseño de tareas como una práctica profesional específica que debe ser aprendida por estudiantes para maestras de educación infantil. El objetivo del estudio es identificar características del proceso de diseñar tareas matemáticas que permitan promover procesos matemáticos vinculados al algebra temprana (resolución de problemas, comunicación, representación, conexiones y razonamiento). Los resultados indican que las tareas diseñadas creaban espacios que los docentes podían usar para potenciar la resolución de problemas y comunicación. Los procesos de resolución de problemas en las tareas diseñadas se evidencian en dos aspectos: considerando que las situaciones presentadas son desafiantes para los estudiantes y, que la tarea está planteada (o se dan indicaciones en relación con su gestión) que favorezca el que los estudiantes puedan pasar por diferentes fases en la resolución del problema (comprensión, búsqueda de estrategias apropiadas, aplicación, y revisión). En relación con los procesos de comunicación, vinculados a las interacciones entre estudiantes y entre estos y la maestra al hablar sobre las tareas y los procesos de resolución generados, se identifican por la indicación explícita por parte de los estudiantes para maestro de momentos para apoyar las interacciones y por la introducción y consolidación del lenguaje matemático adecuado.

Álvarez-Arroyo et al. (2024) presentan los resultados de una investigación para identificar el uso de los conocimientos y el razonamiento probabilísticos de futuros profesores de secundaria al responder a preguntas sobre información aparecida en los periódicos. Los objetivos de la investigación son de tipo matemático (identificar los tipos de análisis que hacen los futuros profesores de la información y los contenidos probabilísticos que ponen en juego para ello) y didáctico (observar si los futuros profesores son capaces de identificar las dificultades que pueden tener los estudiantes de educación secundaria al responder esas mismas cuestiones). Este tipo de objetivos situa estas investigaciones en

la intersección de los dos focos que estamos considerando. Las autoras definen "competencia probabilística" como el conocimiento y las disposiciones que los estudiantes pueden tener que desarrollar para ser considerados competentes en el abordaje de temas probabilísticos del mundo real. El análisis de los resultados muestra que la mayoría de los futuros profesores participantes en el experimento pusieron en juego su conocimiento y razonamiento probabilísticos y un lenguaje específico. Sin embargo, un número importante de estudiantes mostraron notables lagunas en su razonamiento probabilístico, especialmente por no diferenciar condicionamiento y causalidad o por no interpretar correctamente los enunciados probabilísticos. En relación con el conocimiento didáctico, la mayoría de futuros profesores mostraron un conocimiento pobre, incluso después de las clases en el máster, y escasa capacidad para prever los errores de los estudiantes en las cuestiones que ellos habían resuelto previamente. Estos resultados son coherentes con los obtenidos en investigaciones anteriores con el mismo tipo de sujetos.

García et al. (2024) estudian las características de las reflexiones posteriores a la implementación de una lección (dentro de un ciclo de estudio de lecciones) (*lesson study*) estudiantes para maestra de educación infantil para identificar los mecanismos de activación del conocimiento especializado. Esta investigación usa la teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1997) como conocimiento de referencia para ayudar a las estudiantes para maestras a comprender las situaciones de enseñanza y la TAD (Bosch et al., 2020) para caracterizar su aprendizaje. Este referencial teórico asume la dependencia mutua entre lo que los profesores enseñan (*mathematical praxeologies*) y cómo la enseñanza (d*idáctical praxeologies)*, lo que permite situar el foco de atención para analizar el aprendizaje de las estudiantes para maestra sobre el tipo de tareas y técnicas, las tecnologías para describir, explicar y justificar las técnicas y las teorías. Los resultados muestran el potencial de la adaptación de los ciclos de estudio de lecciones en la formación inicial de maestras de educación infantil cuando se proporciona a las estudiantes para maestra elementos teóricos para dotar de sentido a las situaciones de enseñanza y decidir sobre posibles líneas de actuación, al permitir movilizar y desafiar las explicaciones iniciales derivadas de su equipamiento praxeológico.

Lupiáñez et al. (2024) estudian la toma de decisiones, al planificar lecciones centradas en la resolución de problemas, de profesores de educación primaria (noveles y maestros con y sin formación en la enseñanza basada en la resolución de problemas). La planificación de las lecciones se entiende como un contexto en el que los profesores transforman el currículo y se relacionan con los recursos curriculares (Remillard, 2012). Los autores adaptan el modelo de toma de decisiones de Schoenfeld (2010) para examinar cómo los recursos (conocimiento y recursos técnicos), las orientaciones (creencias y concepciones) y los objetivos pretendidos influyen en la toma de decisiones de los profesores, considerando el foco en la resolución de problemas. Los resultados muestran diferencias entre los tres perfiles de profesores en relación con los recursos, las orientaciones y los objetivos que se ponían en marcha en la planificación de la enseñanza de la resolución de problemas. Las diferencias se centran en considerar la resolución de problemas como foco o como medio para el aprendizaje. Se constata que solo la experiencia no es suficiente para que los profesores desarrollen referencias para dotar de significado a las indicaciones dadas en las propuestas curriculares.

Fernández et al. (2024) estudian el desarrollo de la mirada profesional de estudiantes para profesores de educación secundaria al participar en un módulo formativo en relación con el pensamiento matemático de los estudiantes. La hipótesis sobre la que se apoya este estudio es que es posible desarrollar esta competencia docente en los programas de formación inicial cuando las actividades propuestas permiten entrelazar diferentes procesos cognitivos, permitiendo razonar sobre la situación con conocimiento especializado (Fernández et al., 2020). Los cuatro procesos considerados son: i) resolver problemas para identificar los elementos matemáticos que intervienen (atender a las matemáticas que intervienen en la resolución); ii) anticipar respuestas de los estudiantes que pudieran reflejar diferentes niveles de comprensión de los elementos matemáticos que intervienen en la

resolución del problema; iii) interpretar las respuestas de estudiantes a estos problemas, y iv) proporcionar sugerencias de actividades (decidir) para apoyar la comprensión de estudiantes situados en diferentes niveles de desarrollo. Las rutas de desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes" se caracterizan considerando cómo los estudiantes para profesores anticipan e interpretan las respuestas de los estudiantes y toman decisiones instruccionales para apoyar la comprensión. Esta caracterización se vincula al reconocimiento por parte de los estudiantes para profesores de lo que puede ser un avance conceptual en los estudiantes, la comprensión de determinados elementos del concepto (en este caso, la coordinación de las aproximaciones en el dominio y rango de la función).

Font et al. (2024) se centran en caracterizar la competencia de estudiantes para profesores de secundaria en identificar errores producidos en la enseñanza cuando reflexionan sobre lo realizado (*reflection-on-action*). Esta competencia conlleva el que los estudiantes para profesores describan lo que ha sucedido en su enseñanza, interpreten lo sucedido generando explicaciones como una forma de valoración, para apoyar su práctica futura considerando la información generada. En este caso, el uso de un referente teórico permitió a los estudiantes para profesor organizar su reflexión, pero, no es fácil conseguir niveles altos de la competencia de evaluación de la idoneidad didáctica del proceso instructivo en el caso de los errores. Este nivel alto de competencia de valoración de la idoneidad didáctica (en el caso de los errores) viene caracterizada por la capacidad de los estudiantes para profesor de analizar con cierta profundidad diferentes aspectos de los errores matemáticos (quien lo detecta, cómo se maneja, etc.).

Barquero y Ferrando (2024) se centran en analizar los procesos de diseño de tareas de modelización por profesores de matemáticas de educación secundaria cuando se les proporciona varios referenciales teóricos sobre la modelización (TAD y otras). El estudio se plantea identificar condiciones y limitaciones a las que se enfrentan los profesores cuando tienen que diseñar tareas de modelización considerando diferentes perspectivas teóricas. En particular, cuando el proceso de diseño se entiende apoyado en la reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas cada vez de mayor complejidad, que refleja una aproximación a la enseñanza basada en la indagación. El estudio analiza dos propuestas formativas en las que su estructura permitía a los profesores desempeñar diferentes roles, de diseñadores, como gestores de la implementación (y como alumnos) y analizando las propuestas a priori y posteriori. Los resultados muestran diferencias en el tipo de tareas diseñadas, pero también en la especificidad en relación con el contenido matemático, y las condiciones que permiten integrar las tareas de modelización en la enseñanza secundaria (análisis ecológico) mediante la determinación de "niveles de codeterminación" (Chevallard, 2002) y en la generación de un lenguaje profesional para hablar sobre la modelización.

Planas et al. (2024) estudian cómo apoyar el desarrollo de una mirada profesional del profesor de matemáticas centrada en el papel del discurso/habla matemática, en particular de las prácticas lingüísticas de nombrar y explicar en la enseñanza de las matemáticas como una forma organizada de ver y comprender los sucesos. El foco sobre dos prácticas matemáticas lingüísticas como nombrar y explicar es subrayado por el papel que pueden desempeñar en articular prácticas discursivas relevantes para el aprendizaje matemático junto a otras prácticas matemáticas. Los resultados subrayan la necesidad de hacer conscientes a los profesores de sus propias prácticas lingüísticas en relación con nombrar y explicar, y su relativo impacto en la enseñanza. Además, señalan las tensiones que se identifican al centrar el foco de atención en estas prácticas discursivas en relación con las prácticas y formas de comunicación habituales en las aulas de matemáticas. El trabajo en grupo de los profesores en los talleres diseñados subraya el desarrollo colectivo de la competencia docente mirar profesionalmente, más allá de los informes individuales.

3.2.2. Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: Algunos ejemplos

En relación con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, describimos dos investigaciones con foco en caracterizar el uso del modelo teórico del conocimiento especializado (MKST) en el diseño de procesos formativos y en la consideración del dominio afectivo en el aprendizaje del conocimiento especializado.

Climent et al. (2024) estudian el potencial de usar un modelo teórico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) como referente teórico para diseñar secuencias de tareas en los programas de formación de profesorado. Esta idea se particulariza en el aprendizaje de la práctica matemática de definir en estudiantes para maestros de Educación Primaria (aplicada al caso del concepto de polígono) como una forma de articular propuestas que combinen el aprendizaje por parte de los estudiantes para maestro de conocimiento de matemáticas y conocimiento de contenido pedagógico. La hipótesis de partida es que estructurar el contenido de los programas de formación (lo que tiene que ser aprendido por los estudiantes para maestro) a través de tareas organizadas considerando un modelo del conocimiento del maestro puede ayudar a los estudiantes para maestro a desarrollar diferentes tipos de conocimiento especializado para enseñar matemáticas, evidenciando una mejora en las diferentes dimensiones del conocimiento (de matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje).

Gómez-Chacón y Marbán (2024) se centran en analizar las relaciones entre los dominios cognitivos y afectivos en el aprendizaje de las matemáticas de estudiantes para profesores de matemáticas de educación secundaria. La relación entre el dominio afectivo (emociones epistémicas) y el aprendizaje matemático se analiza en las prácticas específicas de resolver problemas y anticipar las posibles emociones de los estudiantes cuando resuelven problemas, junto con las reflexiones de lo que ha sucedido en las aulas. En esta investigación se definen las emociones epistémicas como emociones que se generan cuando se están resolviendo problemas (el foco de la emoción es el conocimiento y el proceso de llegar a conocer). De esta manera, las emociones epistémicas de sorpresa, aburrimiento, confusión, ansiedad y así, se identifican en las diferentes partes por las que pasa el proceso de resolver los problemas. Esta investigación complementa el foco sobre el conocimiento especializado del profesor con la dimensión afectiva y cómo los juicios que los estudiantes para profesores realizan sobre las emociones de los estudiantes cuando están resolviendo un problema (anticipar) se diferencia de sus propias emociones y de las emociones de los estudiantes. Para analizar las interacciones entre la dimensión afectiva (emociones epistémicas) y la cognición (procesos de llegar a conocer) se usa la teoría de los espacios de trabajo matemático (Kuzniak et al., 2022). Los resultados muestran diferencias en las interacciones entre las emociones y las acciones epistémicas según las prácticas de resolver problemas, anticipar las emociones de los estudiantes de bachillerato, y reflexionar sobre estas relaciones en un espacio del proceso formativo.

3.3. Algunas características de las investigaciones con foco el profesor: Investigación y transferencia

Un producto que se puede explicitar desde este conjunto de investigaciones es que permiten pensar en la construcción de una investigación que apoya cierta forma de entender la formación docente en el ámbito de las matemáticas. Este apoyo quedó reflejado en el trabajo colectivo que describe las aportaciones desde la investigación en formación de profesores al desarrollo del currículo con foco en los programas de formación (Llinares et al., 2023). Esta manera de entender la formación se refleja en identificar prácticas profesionales específicas en la práctica de enseñar matemáticas y aspectos del conocimiento especializado para enseñar matemáticas que se convierten en foco de atención en la formación de profesores, y el papel que desempeñan los referentes teóricos generados desde la Didáctica de la Matemática para articular las decisiones de los investigadores. Las investigaciones realizadas en este ámbito en los últimos años permiten identificar algunos rasgos característicos comunes, independientes de la aproximación teórica adoptada, el tipo de participantes o del contexto

particular. Por ejemplo, usar "representaciones de la práctica" para apoyar las formas de razonar de los docentes; y apoyar los procesos de reflexión/análisis sobre lo observado, usando referenciales teóricos desde la Didáctica de la Matemática. Estas formas de hacer en los programas de formación (inicial y continua), y en la investigación en la formación de los docentes de matemáticas puede ser entendida como maneras de describir, explicar y usar el aprendizaje de prácticas profesionales específicas para ayudar a los formadores a decidir qué hacer y cómo explicar lo que observamos. Además, el análisis de cómo los estudiantes para profesor aprenden a realizar determinadas prácticas profesionales específicas, y el uso de dominios específicos de conocimiento especializado, sugiere desde las diferentes investigaciones que el aprender la práctica apoya el aprendizaje de conocimiento especializado mostrando la simbiosis entre conocer y hacer.

4. INVESTIGACIÓN SOBRE LOS PROCESOS COGNITIVOS DE ESTUDIANTES CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

En el contexto educativo español, el término "necesidades educativas especiales" se asociaba tradicionalmente a la atención a los estudiantes con dificultades de aprendizaje. Así, los especialistas de apoyo de los centros escolares de educación primaria y secundaria se dedicaban a atender de manera individualizada a estudiantes con problemas de aprendizaje de diferentes tipos. Sin embargo, las últimas leyes de educación españolas señalan la obligación de prestar atención diferenciada también a los estudiantes cuyas necesidades educativas especiales se deben a "sus altas capacidades intelectuales" (Jefatura del Estado, 2020, p. 122909). Este cambio legislativo ha hecho que aumente el reconocimiento por el profesorado de la necesidad de identificar y atender a los estudiantes con superdotación o altas capacidades, en particular a los que tienen ACM.

En el contexto de la investigación en educación matemática, también ha habido siempre interés por estudiar la problemática de los estudiantes con dificultades de aprendizaje de las matemáticas y solo en las últimas décadas se está produciendo una cantidad significativa de investigaciones sobre los estudiantes con ACM. Los objetivos centrales de esta agenda de investigación incluyen, por una parte, la identificación de estudiantes con esta característica y su atención diferenciada en contextos escolares y extraescolares y, por otra parte, el estudio de los procesos de razonamiento matemático y de la afectividad de estos estudiantes y de sus diferencias con los de estudiantes medios.

El programa del XXI Simposio de la SEIEM incluyó un seminario dedicado a la diversidad en educación matemática. Una de las intervenciones (Planas, 2017) estuvo dedicada a la diversidad lingüística, tema que se aborda en otra sección de este documento. En la otra intervención, Jaime y Gutiérrez (2017) se centraron en la ACM; en su presentación y en el texto de las actas, ofrecen una síntesis de investigaciones nacionales e internacionales de aproximadamente los diez años previos a ese simposio, por lo que aquí nos centramos principalmente en la literatura más reciente. A continuación, presentamos una síntesis de la investigación sobre los estudiantes con dificultades de aprendizaje y con ACM y, para cada tema, describimos con detalle una investigación, sobre el aprendizaje de la estructura multiplicativa por un estudiante con trastorno del espectro autista (TEA) y sobre la capacidad de generalización de estudiantes con ACM.

4.1. Estudiantes con dificultades de aprendizaje

El campo de actividad de la investigación sobre los estudiantes de matemáticas con dificultades de aprendizaje es muy amplio y diverso, pues incluye todo tipo de causas (Bruno y Noda, 2010), principalmente discapacidades intelectuales, psicológicas, físicas y sociales (p. ej., desconocimiento del idioma). Es necesario diferenciar las dificultades de aprendizaje debidas a una discapacidad de las debidas a una capacidad cognitiva por debajo de la media (de razonamiento matemático en nuestro caso). Además, cada tipo de dificultad tiene unas características que generalmente hacen que sea diferente de los otros. Bruno y Noda (2010) hacen un recorrido por la literatura de diferentes tipos de dificultades de aprendizaje de las matemáticas. Diversas publicaciones informan sobre investigaciones centradas en estudiantes con síndrome de Down (Bruno y Noda, 2010; Bruno et al.,

2022), con TEA (Bruno et al., 2022; Goñi-Cervera et al., 2022) o estudiantes ordinarios con dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

Bruno y Noda (2010) discuten el aprendizaje de la aritmética por estudiantes con síndrome de Down, mostrando características diferenciadoras de estos estudiantes y metodologías de enseñanza adaptadas. Bruno et al. (2022) completan el texto anterior mostrando experimentos de enseñanza combinada de contenidos de geometría y aritmética, concluyendo que esta combinación de contenidos produjo mejores resultados de aprendizaje que trabajando con unos u otros contenidos por separado. Estos autores también informan de experimentos de enseñanza con estudiantes con TEA que les sirven como contexto para mostrar diferentes formas adecuadas de presentar la información matemática a estos estudiantes. García-Moya et al. (2024) se centran en la resolución de problemas multiplicativos de tipo producto cartesiano por un estudiante con TEA y Goñi-Cervera et al. (2022) presentan una investigación con estudiantes con TEA de los diferentes cursos de primaria en la que les plantearon problemas de patrones geométricos para observar el desarrollo de su pensamiento algebraico.

Por su parte, Castro y Cañadas (2016) se centran en discutir y clasificar las diversas dificultades de aprendizaje de la aritmética, desde el punto de vista del contenido matemático (por ejemplo, dificultades de comprensión de un enunciado verbal, de manejo de los signos aritméticos y las reglas de operatoria, etc.), que encontraron, siendo la discalculia la causa más frecuente.

Bruno et al. (2024) presentan un estudio de caso del proceso de aprendizaje de las estructuras multiplicativas de los números naturales de un niño con TEA que, además, tenía deficiencia intelectual. En este contexto, los autores organizaron un experimento de enseñanza basado en la resolución de problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa, con los objetivos de identificar las estrategias de resolución del estudiante, explorar si algunas características relacionadas con el TEA podían influir en dichas estrategias e identificar los componentes de la metodología de enseñanza que jugaron un papel destacado en el proceso de aprendizaje del estudiante. Los autores se basaron en la caracterización de estrategias de resolución de problemas verbales multiplicativos propuesta por Mulligan (1992), que diferencia las estrategias según los procedimientos de cálculo y sus grados de abstracción: modelización directa con conteo, conteo sin modelización y hechos numéricos aprendidos o deducidos. Las investigaciones reportadas en la literatura muestran que los estudiantes ordinarios progresaron a lo largo de las tres categorías, mientras que los estudiantes con dificultades de aprendizaje no consiguieron progresar a las categorías superiores. El marco de la investigación se completa con la adopción de la metodología de enseñanza COMPS, creada para facilitar el establecimiento de conexiones entre diferentes tipos de problemas mediante el uso de un diagrama que representa los datos y operaciones del problema, y ayudar a identificar las operaciones que debe realizar el estudiante. Los autores citan publicaciones en las que esta metodología ha mostrado ser positiva para la enseñanza de estrategias de resolución de problemas multiplicativos a estudiantes con dificultades de aprendizaje.

El experimento presentado por Bruno et al. (2024) se realizó con un niño de 14 años diagnosticado con TEA y con una forma de comportamiento típica de estos niños. Además, el niño necesitaba una adaptación curricular en matemáticas, porque mostraba dificultades de aprendizaje. Bruno et al. describen con detalle la secuencia de problemas que plantearon y muestran ejemplos de las hojas de trabajo y de las respuestas del niño; los problemas correspondían a tres modelos de representación de las multiplicaciones: agrupamientos iguales (suma reiterada), comparación multiplicativa (una cantidad es *n* veces mayor que otra) y producto cartesiano. El experimento de enseñanza empezó con un pretest, siguió con 13 sesiones de enseñanza intercaladas con sesiones de evaluación y terminó con un postest inmediato y otro diferido 5 semanas después. El resto del artículo está dedicado a describir y analizar las estrategias de resolución mostradas por el estudiante en los tres tipos de problemas. Entre las conclusiones planteadas por los autores, podemos destacar: que el estudiante mostró a lo largo del experimento diferentes rasgos típicos del TEA tales como preferencia por

expresar sus ideas mediante dibujos; que experimentó dificultades para entender algunas expresiones matemáticas como "tres veces más", que con frecuencia interpretaba como sumar 3; que el estudiante tuvo diferentes niveles de éxito en los tipos de problemas, mostrando más destreza en los problemas de agrupamientos iguales y más dificultad en los de comparación multiplicativa; y que la metodología COMPS resultó útil para favorecer el aprendizaje.

Las TIC están mostrando su utilidad también en la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con dificultades de aprendizaje, en particular a los que tienen dificultades de motricidad fina y les resulta difícil usar materiales manipulativos. Estas dificultades pueden reducirse mediante el uso de pantallas táctiles (González et al., 2015). También ha habido investigaciones que han desarrollado aplicaciones específicamente orientadas a estudiantes con síndrome de Down (González et al., 2015) o con TEA (Blanco et al., 2024b). García-Moya y Blanco (2024) ofrecen una recopilación, clasificación y análisis de aplicaciones informáticas adecuadas para la enseñanza a niños con TEA.

4.2. Estudiantes con alta capacidad matemática

Uno de los focos de atención de los investigadores en educación matemática es analizar los procesos de razonamiento matemático de los estudiantes con ACM en actividades específicas como la visualización, la creatividad, la generalización o la demostración, entre otras. Los resultados de diversas investigaciones ponen de relieve que, en unas ocasiones, los estudiantes con ACM son capaces de empezar a realizar determinados tipos de razonamiento (por ejemplo, razonamiento deductivo) mucho antes que sus compañeros de curso o edad y, en otras ocasiones, los estudiantes con ACM realizan los mismos procesos de razonamiento que sus compañeros, pero lo hacen de maneras más flexibles, complejas u originales.

El nexo común de la mayoría de las investigaciones sobre ACM son los problemas, tanto en la resolución como en la invención (*problem posing*), con investigaciones basadas en muy diversos contextos, como geometría (Ramírez-Uclés y Ruiz-Hidalgo, 2022; Sua et al., 2024), grafos eulerianos (Blanco y García-Moya, 2021) o generalización prealgebraica (Mora et al., 2022). Así, Ramírez-Uclés y Ruiz-Hidalgo (2022) plantearon en una sesión de ESTALMAT varios problemas geométricos de demostración en diversos formatos (oral, gráfico, escrito, con SGD). Los autores usaron los tipos de pensamiento matemático de Krutetskii para clasificar las resoluciones de los estudiantes, que mostraron una diversidad de preferencias, dependiendo de los problemas.

Por su parte, Gutiérrez et al. (2018b) realizaron un experimento con dos estudiantes con ACM de Granada y Valencia que se comunicaban entre ellos y con los investigadores mediante videoconferencias y debían construir de manera colaborativa la solución. Cada estudiante disponía de dos proyecciones ortogonales de una ciudad formada por torres de cubos y de cubos para construir la ciudad. Los estudiantes no podían intercambiarse información gráfica, por lo que necesitaron desarrollar habilidades de comunicación verbal para transmitir sus imágenes mentales y lo que veía cada uno en su propia construcción.

Las competiciones matemáticas son un buen contexto para observar el razonamiento matemático de posibles estudiantes con ACM. Guinjoan et al. (2015) analizaron las respuestas de estudiantes que se presentaron a las pruebas Cangur y quedaron clasificados en los puestos más altos. Una peculiaridad de las pruebas Cangur es que los problemas planteados ofrecen varias posibles soluciones y los estudiantes tienen que elegir la que consideran correcta. Los autores centraron su atención en las estrategias y heurísticas usadas por los estudiantes y su uso de la intuición y de la visualización para decoro cuál era la respuesta correcta. A pesar de que todos los estudiantes de la muestra habían obtenido excelentes resultados en la prueba, los análisis muestran diferencias significativas entre sus formas de tomar decisiones y de resolver los problemas.

En el contexto de las olimpiadas de primaria de Costa Rica, Mora et al. (2023a, 2023b, 2024a, 2024b) analizaron y compararon los procesos de resolución de determinados problemas por estudiantes que

habían obtenido las puntuaciones más altas y más bajas en la prueba y el uso que hicieron de sus capacidades de generalización, visualización y flexibilidad. Los resultados indican que los problemas planteados y buena parte de los descriptores definidos en su marco teórico para caracterizar cada capacidad mencionada son adecuados para discriminar a los estudiantes con ACM en cada capacidad de razonamiento.

Por otra parte, Espinoza et al. (2016) realizaron un experimento de invención de problemas por estudiantes de secundaria con ACM y ordinarios. Sus resultados muestran una clara diferencia entre los problemas inventados por unos y otros estudiantes. Las principales diferencias son la riqueza de los enunciados, la cantidad de operaciones requeridas (dificultad de resolución), los tipos de números empleados. Este estudio permitió también identificar características diferenciadoras de los estudiantes con ACM en invención de problemas.

La capacidad de generalización es un componente central de la actividad matemática, por lo que son numerosas las investigaciones que han explorado características diferenciadoras de los procesos de generalización de los estudiantes con ACM. Mora et al. (2024b) realizaron una investigación cuyos objetivos eran analizar los procesos de razonamiento de generalización de estudiantes y analizar la validez de los problemas planteados para diferenciar estudiantes con ACM de estudiantes medios. Los autores informan de que, en las investigaciones sobre generalización, normalmente se utilizan contextos de razonamiento aritmético (Rott, 2013), algebraico (Amit y Neria, 2008), etc., dependiendo de las edades de los estudiantes, pero Krutetskii (1976) hablaba de la importancia de observar la capacidad de generalización de procedimientos matemáticos y estrategias de cálculo de los estudiantes.

Mora et al. (2024b) presentan los resultados del análisis de las respuestas a dos problemas planteados en la prueba de admisión a ESTALMAT. Los estudiantes que se presentaron a dicha prueba de admisión eran de 6º de primaria y 1º y 2º de ESO. En un problema había que realizar movimientos entre los números naturales de acuerdo con ciertas reglas; en el otro había que cubrir rectángulos aplicando un criterio de cubrimiento. La clave para la resolución de ambos problemas es identificar y generalizar una estrategia de cálculo (o cubrimiento) que produce soluciones correctas. El marco teórico del estudio está formado por la caracterización de la ACM en lo relativo a la generalización y por un conjunto de descriptores originales de la actividad de generalización de métodos de solución, que evalúan los tipos de métodos de solución usados y los niveles de generalización de esos métodos alcanzados por los estudiantes.

De los 312 estudiantes que se presentaron a la prueba, los autores analizaron las respuestas de los 25 estudiantes que obtuvieron las mejores puntuaciones globales en la prueba, los 25 que obtuvieron las puntuaciones intermedias y los 25 que obtuvieron las puntuaciones más bajas. Para obtener conclusiones sobre la validez de los problemas como identificadores de ACM, los autores realizaron un análisis mixto: el análisis cualitativo se centró en clasificar las respuestas de los estudiantes de acuerdo con los descriptores de generalización, que habían definido previamente, que podían reconocerse en las respuestas; el análisis cuantitativo se basó en el índice de discriminación (Allen y Yen, 1979), que mide las diferencias entre las respuestas a un ítem o problema particular de los sujetos que obtuvieron mejores y peores puntuaciones en el cuestionario completo. Entre las conclusiones de los autores, destacan que los dos problemas y varios descriptores son muy adecuados para la identificación de estudiantes con ACM, mientras que otros descriptores (que corresponden a estrategias no correctas o niveles bajos de generalización) permiten identificar estudiantes que no tienen ACM. Este artículo abre una línea de investigación novedosa sobre una forma de desarrollar y evaluar la capacidad de generalización de los estudiantes y, en particular, de identificar a potenciales estudiantes con ACM.

5. INVESTIGACIÓN SOBRE EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En España, igual que en una mayoría de países con niveles medios y altos de desarrollo socioeconómico, los centros escolares han incorporado, desde hace bastantes años, las tecnologías de la información y comunicación (TIC) a la enseñanza de las diferentes asignaturas y, en especial, de las matemáticas. Por ello, desde hace varias décadas se han realizado numerosas investigaciones dirigidas a explorar diversos aspectos de la presencia de las TIC en las aulas de los diferentes niveles educativos. Además, los años de confinamiento por el Covid19 han propiciado, por necesidad, la experimentación de numerosas formas de interacción con la tecnología. El interés de la educación matemática española por la investigación relacionada con las TIC se evidencia en la cantidad de artículos que se publican.

El seminario de investigación del XXV Simposio de la SEIEM estuvo dedicado al papel de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una de las presentaciones (Arnau, 2022) reflexionaba sobre diversas relaciones entre la tecnología y la educación matemática, desde la época inicial de los sistemas informáticos programados para simular la actividad de un profesor o un estudiante en un contexto de resolución de problemas de matemáticas, desde el surgimiento de software educativo como Logo (ahora Scratch), hasta diversos sistemas tutoriales inteligentes y algunas aplicaciones en desarrollo en la actualidad. Además, Arnau (2022) informaba sobre diversos estudios realizados en España, mayoritariamente del equipo de investigación del autor. También están actualmente realizándose diversas investigaciones en el uso de la robótica educativa, en relación con el pensamiento computacional.

Esta sección está dividida en dos partes, dedicadas a dos periodos educativos muy diferentes, infantil y primaria por una parte y secundaria y universidad por otra.

5.1. Las TIC en educación infantil y primaria

El uso de las TIC con niños pequeños ha sido problemático durante mucho tiempo, por la dificultad de los niños para manejar elementos como comandos, cursores, menús desplegables, teclados, ratones, etc. Los niños cometían con frecuencia errores en el uso de la tecnología que les impedían poner en práctica sus ideas correctas y resolver los problemas. La popularización de productos como las pantallas táctiles y los robots de suelo ha ayudado a superar esas dificultades y a crear entornos mucho más amigables para los niños pequeños. Estas potencialidades del hardware táctil han permitido la inclusión del pensamiento computacional en los currículos de educación infantil y primeros cursos de educación primaria. En España encontramos estudios que plantean una diversidad de cuestiones de investigación y utilizan diferentes contextos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas.

Del Olmo-Muñoz et al. (2023) realizaron una investigación con estudiantes de primaria durante la época del confinamiento por el Covid-19 sobre el uso del sistema tutorial inteligente HINTS, que permite resolver problemas verbales aritmética o algebraicamente. Los estudiantes accedían al tutorial desde sus casas, sin la colaboración del profesor. Una de las características del tutorial es que está programado para que los estudiantes puedan utilizarlo de manera autónoma, pues pueden tener interacciones de la aplicación y recibir sugerencias adaptadas a las respuestas, sin necesidad de un profesor. Los autores plantearon el objetivo de analizar la relación entre el estatus socioeconómico de los estudiantes que participaron en el experimento y su éxito en el aprendizaje mediante el uso de HINTS. El artículo incluye una detallada revisión bibliográfica sobre los papeles de profesores y estudiantes cuando se usa tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Las conclusiones señalan que no encuentran diferencias estadísticamente significativas entre los aprendizajes de estudiantes de diferentes niveles socioeconómicos.

Por su parte, Diago et al. (2018) presentaron una investigación dirigida a observar el desarrollo del pensamiento computacional, utilizando un robot de suelo programable, en estudiantes de infantil y primeros cursos de primaria. Las tareas planteadas a los estudiantes consistieron en elegir y programar recorridos del robot para alcanzar determinados objetivos. Los investigadores analizaron las heurísticas mostradas por las respuestas de los estudiantes y sus motivos o justificaciones de sus elecciones o decisiones.

En un contexto diferente de los otros que presentamos aquí, Escrivà et al. (2018) presentaron los resultados de un experimento de enseñanza de habilidades de visualización en geometría espacial con estudiantes de un grupo ordinario de 6º de primaria y estudiantes de 5º y 6º de primaria que participaban en un taller extraescolar de matemáticas para niños superdotados. Los problemas que les plantearon requerían realizar manipulaciones de cubos para identificar las figuras que decoraban sus caras y sus posiciones en ellas. Para ello, los estudiantes utilizaron, según los problemas, cubos físicos, dibujados en papel y construidos en archivos dinámicos de ordenador. Usando el marco teórico de las habilidades de visualización de Gutiérrez (1996), los autores realizaron un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes, tratando de identificar las imágenes mentales creadas y manipuladas y las habilidades de visualización puestas en juego. Entre sus conclusiones destacan que cada tipo de problemas indujo el uso de imágenes y habilidades diferentes.

Del Olmo et al. (2024) presentan resultados de dos investigaciones conectadas en las que niños de educación infantil y primer curso de educación primaria (edades entre 5 y 7 años) resolvieron tareas de movimiento de un robot de suelo, en las que tenían que programar el robot para ir desde su posición actual a otro lugar (los movimientos disponibles son avance y retroceso de un paso y giros de ±90º). En una investigación, los estudiantes usaron un robot real y en la otra usaron un simulador de ese robot programado en un ordenador. La investigación, de tipo mixto, tiene como objetivo general identificar y analizar procesos metacognitivos de control realizados por los estudiantes durante la resolución de las tareas; más concretamente: i) describir y categorizar los criterios aplicados por los estudiantes en sus tomas de decisiones y ii) evaluar las posibles relaciones entre dichos procesos metacognitivos, la eficacia en la resolución de las tareas, la edad y el género de los niños.

El marco teórico de la investigación incluye elementos de metacognición, como la toma de decisiones en la elección de los recorridos y de los movimientos, la autorregulación durante la resolución de los problemas, y de pensamiento computacional, en particular relacionado con la resolución de tareas de programación de robots de suelo. La metodología de este artículo es típica de los estudios mixtos, con la particularidad de que los autores no han hecho el doble análisis cualitativo y cuantitativo de los mismos datos. La parte del experimento basada en el uso de robots de suelo incluía información sobre los recorridos previstos y realizados por los niños, así como respuestas de estos en entrevistas, por lo que es adecuada para un análisis cualitativo. Sin embargo, la parte de los experimentos basada en el simulador solo tenía datos referidos a los pasos de los recorridos programados por los niños, por lo que su análisis solo puede ser de tipo cuantitativo.

Uno de los resultados más destacables indica que, en las tareas donde los niños tenían que seleccionar uno de dos posibles destinos del robot, hay diferencias entre los niños de educación infantil y los de primaria: los primeros tendían a elegir el destino más próximo, a pesar de que el recorrido corto era más complejo porque incluía curvas y el largo era recto; por el contrario, la mayoría de los estudiantes de primaria elegían el recorrido más sencillo de programar. Por otra parte, los resultados sobre posibles diferencias debidas al grado muestran que, como es previsible, los estudiantes de 1º de primaria tienen más éxito en la resolución de las tareas que los de educación infantil. En cuanto al género, los autores no observaron ninguna diferencia estadísticamente significativa. Como conclusiones finales, los autores señalan la relevancia del estudio para mostrar que es posible realizar actividades formativas interesantes con los niños de estos grados, como desarrollo del planteamiento hecho por el actual currículo oficial español que propone la inclusión del pensamiento computacional en las asignaturas de matemáticas (Jefatura del Estado, 2020).

5.2. Las TIC en educación secundaria y superior

Las investigaciones centradas en los niveles educativos superiores son poco frecuentes y muy diversas en cuanto al tipo de estudiantes y los contextos de estas, lo cual dificulta la creación de líneas de investigación que se mantengan y evolucionen en el tiempo. Camacho et al. (2022) ofrecen una revisión de las principales publicaciones españolas de los últimos 25 años centradas en la enseñanza de las matemáticas universitarias.

Gómez-Chacón et al. (2016) analizaron la relación entre elementos afectivos y de aprendizaje. El artículo se sitúa en el marco de los espacios de trabajo matemático y los tipos de geometrías (natural, natural axiomática y axiomática) y explora, mediante un experimento de enseñanza de 25 sesiones de clase, la influencia del SGD en la estabilización de aspectos afectivos en estudiantes de 3º de ESO que transitan de la geometría natural a la natural axiomática, así como la influencia del profesor como mediador entre el software y los estudiantes.

Hoyos et al. (2021) presentan los resultados de una parte de un curso de geometría analítica 3-dimensional para futuros profesores de matemáticas, centrada en el estudio de las superficies cuádricas y con una metodología de resolución de problemas mediante dos aplicaciones informáticas creadas por el primer autor; una permite crear superficies tridimensionales a partir de secciones planas de las mismas y la otra representa las superficies cuádricas y sus proyecciones ortogonales de manera dinámica y permite modificarlas cambiando los parámetros de sus ecuaciones. Los problemas que plantearon son crear la superficie correspondiente a una ecuación dada, encontrar la ecuación correspondiente a una superficie dada e identificar la superficie a la que pertenece un conjunto de secciones planas dadas.

El libro de Richard et al. (2022) aborda el tema, de plena actualidad, de los usos que se pueden dar a la inteligencia artificial en el mundo escolar para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunos autores abordan el tema de la demostración automática y su uso para enseñar a demostrar. En particular, el capítulo de T. Recio muestra algunas utilidades de GeoGebra que pueden emplearse con este fin y el de J.L. Rodríguez presenta experiencias que se están desarrollando en la Universidad de Almería en un entorno de realidad virtual creado por este grupo (Neotrie VR).

En la sección 2.2 hemos comentado el artículo de Santos-Trigo et al. (2024), entre cuyos objetivos está el de informar sobre resultados de investigaciones que analicen las posibles ventajas del uso habitual del SGD en asignaturas de cálculo de secundaria. Los autores se centran en el aprendizaje de la derivada de una función. Para su introducción inicial, sigue siendo habitual que libros de texto y profesores presenten a los estudiantes la tradicional aproximación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente límite de las pendientes de rectas secantes. Los autores muestran investigaciones que avalan que los entornos de SGD suponen una metodología de enseñanza muy interesante para representar la clásica aproximación geométrica a la derivada. La posibilidad de desplazarse a lo largo de la curva y poder observar los cambios que se producen en los diferentes valores relevantes supone una forma mucho más eficaz que los dibujos estáticos en el libro de texto o la pizarra; por ejemplo, al desplazarse alrededor de un punto de la curva cuya tangente ha sido construida, se observa que varían *dx* y *dy*, pero su cociente dy/dx permanece constante.

El grupo de la Universidad de la Laguna (Santos-Trigo et al., 2024) presenta resultados de investigaciones experimentales, en las cuales los estudiantes han resuelto problemas sencillos típicos y también problemas avanzados, que serían difíciles de abordar por los estudiantes solo con papel y lápiz, por la complejidad de los dibujos que tendrían que realizar. Muestra que el uso del SGD permite a los estudiantes concentrarse en entender y usar los aspectos conceptuales implícitos en la resolución, al poder liberarse de la necesidad de hacer dibujos exactos. Dos de las conclusiones de estas investigaciones son que el SGD es una importante herramienta para fomentar dicha comprensión y que sigue necesitándose estudios para identificar las fortalezas de diferentes tecnologías en la enseñanza del cálculo.

6. CONTRIBUCIONES A TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La educación matemática, como joven disciplina que es, integra actualmente una diversidad de enfoques teóricos de distinta índole, que adoptan formas particulares de concebir la investigación didáctica, sus métodos, objetivos y fundamentaciones. Destacamos en España dos grupos de investigación que se inscriben cada uno en un marco teórico concreto, enraizando en él sus producciones y contribuyendo a su desarrollo. Ambos grupos coincidieron a inicios de los años 1990 en lo que se llamó el Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM), que fue integrando progresivamente un número cada vez mayor de investigadores de distintas universidades españolas. Se celebraba entre dos y tres veces al año para compartir el estudio de los dos enfoques principales que se estaban desarrollando entonces en Francia: la TSD, creada por Guy Brousseau (1986), y la entonces emergente TAD creada por Yves Chevallard (1992). El SIIDM se convirtió posteriormente en el grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica de la SEIEM, que agrupa investigadores que trabajan en dos enfoques: la TAD y el EOS; el segundo empezó su desarrollo en la Universidad de Granada a finales de los años 1990 (Godino, 2024).

Nos centraremos aquí en la presentación y análisis de estos dos marcos teóricos, al que el número especial de ZDM dedica dos artículos específicos (Gascón, 2024; Godino et al., 2024a). Estos dos enfoques agrupan en España un número considerable de investigadores que, como ya se ha indicado en algunas secciones anteriores, han presentado contribuciones en distintas áreas, como la enseñanza del álgebra y el cálculo diferencial, la enseñanza de la probabilidad y la estadística, la formación del profesorado, la modelización matemática y la enseñanza universitaria. Queremos resaltar en esta sección las investigaciones que se inscriben claramente dentro de estas dos teorías, que abordan problemas de investigación formulados desde las propias teorías y cuyos resultados contribuyen a su desarrollo.

Empecemos por el caso de la TAD. A finales de los años 1980 y principios de los 1990, un grupo de investigadores españoles empezaron a desarrollar tesis doctorales bajo la dirección de Guy Brousseau en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) o de Yves Chevallard en la entonces incipiente TAD originada a partir de los primeros trabajos de este autor sobre los procesos de transposición didáctica (Chevallard, 1985). Ambas teorías participaban del proyecto propuesto por Brousseau de creación de una ciencia que llamó Didáctica de las Matemáticas cuyo objetivo es "el estudio directo y científico – es decir, teórico experimental – de la relación de enseñanza en lo que tiene de específico del conocimiento que se quiere transmitir" (Brousseau, 1986, resumen).

El SIIDM facilitó la generación de un equipo de investigación muy activo cuyo marco de referencia es la TAD, pero que recurre con facilidad a herramientas complementarias de la TSD. Es un grupo de referencia en la comunidad internacional sobre la TAD, con un papel activo en colaboraciones con otros equipos, incluyendo a su creador, Yves Chevallard. El grupo español sobre la TAD ha desarrollado investigaciones en distintos ámbitos: la modelización matemática; el álgebra elemental; la modelización algebraico-funcional y el cálculo diferencial; la geometría en secundaria; la enseñanza universitaria de las matemáticas y la estadística, junto con los problemas de transición entre la secundaria y la universidad; así como la formación del profesorado de los distintos niveles educativos, desde infantil hasta la universidad. Estos últimos 20 años, la principal línea de desarrollo se centra en el estudio de las condiciones necesarias para un cambio de paradigma educativo, que permita hacer evolucionar el paradigma dominante caracterizado como "de la visita de las obras" a un nuevo paradigma, todavía incipiente, caracterizado como "del cuestionamiento del mundo" (Chevallard, 2013). En muchas ocasiones, estas líneas de investigación han entrado en "diálogo" con otros enfoques teóricos, como la TSD y los estudios de clase (*lesson studies*) en la formación del profesorado de educación infantil y primaria (García et al., 2024), distintas concepciones de la modelización matemática (Barquero, 2020, 2023; Florensa et al., 2020) o la teoría APOS y la resolución de problemas en la enseñanza universitaria (Bosch et al., 2017; Florensa et al., 2024). En esta línea de diálogo con otros enfoques, Gascón y Nicolás (2017, 2019, 2023) han propuesto un

trabajo sistemático sobre la naturaleza de la didáctica como ciencia y el papel que en ella tienen los juicios de valor. Finalmente, algunos investigadores del equipo utilizan la TAD como marco analítico para estudios sobre historia de la educación matemática (Sánchez et al., 2020).

No detallaremos aquí las principales contribuciones del equipo español al desarrollo teórico y metodológico de la TAD, que han quedado recogidos en Gascón (2024). Allí se describen en particular las investigaciones sobre el álgebra elemental, las funciones y el cálculo diferencial abordadas desde una perspectiva integradora basada en la modelización algebraico funcional. Solo destacaremos la importancia de la noción de modelización matemática para elaborar modelos epistemológicos de referencia de las matemáticas escolares, cuyo desarrollo futuro permitirá abarcar una parte sustancial de las matemáticas escolares desde finales de la educación primaria hasta principios de la universidad, aportando así una herramienta valiosa para sustentar el análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Cid et al., 2020).

Nos centraremos en las líneas de trabajo de este grupo sobre el estudio de las condiciones que facilitan – así como de las restricciones que dificultan – la transición entre el paradigma de la visita de las obras y el del cuestionamiento del mundo (García et al., 2019). Una de estas líneas se centra en la enseñanza universitaria, tanto de matemáticas como de estadística, en primeros cursos de grados de ingeniería y de administración y dirección de empresas. Desde el trabajo pionero de Barquero (2009), se han venido diseñando, implementando y analizando un número importante de procesos de enseñanza y aprendizaje basados en la indagación bajo la forma de lo que se designa como "recorridos de estudio e investigación" (REI). Los REI ofrecen un marco metodológico a la vez amplio, para abarcar cualquier posible proceso de estudio, desde los más guiados hasta los más abiertos, pero también concreto para aportar las herramientas de diseño y gestión necesarias para asegurar su sostenibilidad en el contexto universitario actual (Markulin et al., 2024). Ofrecen además un marco idóneo para la formación del profesorado universitario, como se muestra en Florensa et al. (2021).

Las investigaciones sobre los REI se han llevado también a la enseñanza secundaria, aunque con intervenciones más puntuales, generalmente asociadas a la enseñanza de algún tema o ámbito concreto. Los trabajos actuales en este nivel refieren a la enseñanza de la combinatoria (Vásquez et al., 2021), de la geometría (Rojas y Sierra, 2021) y de la modelización matemática en contextos multidisciplinarios (Vásquez et al., en prensa). Bosch (2018) presenta una panorámica de las investigaciones en esta línea hasta la fecha, apuntando las relaciones entre los REI y los modelos epistemológicos de los distintos ámbitos matemáticos involucrados. Desde entonces, se ha progresado en el estudio de la ecología de los REI, es decir las condiciones de todo tipo (sociales, escolares, pedagógicas, matemáticas, etc.) que permiten su implementación, así como las restricciones, principalmente institucionales, que la limitan (Barquero et al., 2021; Bosch et al., 2022). En la actualidad, las investigaciones avanzan en el desarrollo de dicha ecología para facilitar al profesorado de secundaria y de la universidad las infraestructuras didácticas y matemáticas necesarias para el cambio de paradigma, incidiendo particularmente en la enseñanza secundaria, con la reciente introducción de las situaciones de aprendizaje y en la enseñanza universitaria con diferentes modalidades de integración de los REI en las asignaturas (Barquero et al., 2024).

En cuanto a la formación del profesorado, se están desarrollando dos grandes líneas de investigación. Una extiende las propuestas de los REI a la formación del profesorado a partir de la propuesta inicial de Ruiz-Olarría (2015). Distintos estudios describen estas propuestas, tanto en la formación del profesorado de secundaria y la modelización (Barquero et al., 2018, 2019, 2022b; Barquero y Ferrando, 2024), el cálculo diferencial (Lucas et al., 2023) o la estadística (Verbisck et al., 2022), como en la formación del profesorado de primaria en distintos temas curriculares, como la numeración (García et al., 2017), la probabilidad y el análisis de datos (Hakamata et al., 2024) o la lógica (Lerma et al., 2021), entre otros. La segunda línea se centra en la formación del profesorado de educación infantil, utilizando la TAD como marco analítico, pero adoptando los principios de la TSD como marco principal para la formación del profesorado. El ámbito matemático que se considera

es el de la numeración y las investigaciones más recientes plantean procesos formativos en formato de estudio de clases, tomando como lección de estudio alguna situación de las estudiadas previamente en TSD (García et al., 2019, 2024). La originalidad, así como el interés de la investigación radican precisamente en el análisis del papel que tienen los conocimientos sobre la TSD aprendidos previamente por los estudiantes en el desarrollo del estudio de clases, no solo para diseñar las lecciones experimentadas, sino también –y, sobre todo– para analizar en vivo y tomar decisiones durante el desarrollo de las lecciones, así como para identificar episodios relevantes al respecto. Dentro de esta línea, trabajos más recientes están relacionando el análisis praxeológico de las operaciones aritméticas elementales con las propuestas didácticas basadas en el "structured problem-solving" de Japón (García et al., 2024).

Finalmente, no queremos dejar de mencionar aquí las investigaciones sobre la historia de la educación matemática que se han comentado más arriba, y que abren una línea de desarrollo de la TAD muy original, tanto dentro como fuera de España.

El segundo marco teórico que destacamos es el Enfoque Onto-Semiótico que empezó a desarrollar Juan Díaz Godino en los años 1990 con el objetivo de articular los distintos constructos utilizados en educación matemática para describir los fenómenos cognitivos, así como las nociones principales de marcos teóricos como la TSD, la TAD, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990) o la teoría de los registros de representación teórica de Duval (1995). Godino et al. (2024a) presentan una descripción de lso principales cpmponentes del EOS. En la actualidad, podemos distinguir cinco líneas de desarrollo de este enfoque. El primero es el trabajo continuado de sistematización del EOS y la profundización sobre sus fundamentos y antecedentes, un esfuerzo que queda recogido en Godino (2024). La segunda línea es la aplicación de las herramientas teóricas del EOS a diferentes bloques de contenidos de la matemática escolar, algunos de los cuales ya se han comentado previamente en la sección 2, como el razonamiento algebraico y funcional (Begué et al., 2018; Burgos et al., 2024; Godino et al., 2024b) o el razonamiento diagramático (Giacomone et al., 2023). En esta línea se realizan análisis detallados de la actividad matemática con el fin de comprender la complejidad de los objetos y procesos implicados en la resolución de problemas, proporcionando un fundamento para los procesos educativos-instruccionales de matemáticas. Esta línea de investigación se extiende en estudios como el de Godino et al. (2023), centrada en el diseño, planificación e implementación de procesos educativos-instruccionales en matemáticas. Se utiliza la teoría de la idoneidad didáctica como guía para diseñar procesos instruccionales en matemáticas localmente idóneos para lograr los fines educativos planificados.

Los estudios sobre la formación de profesores, que han sido comentados previamente, se distinguen también como una de las líneas de desarrollo abordadas por el EOS en la comunidad española (Fernández-López et al., 2024; Morales-López et al., 2024). Esta línea se centra en el diseño, implementación y evaluación de programas y acciones específicas de formación de profesores de matemáticas. En estas acciones, el sistema de categorías de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas desarrollado y los criterios de idoneidad se usan para describir y comprender la actividad de formadores y profesores de matemáticas, e identificar posibles mejoras. Destacamos finalmente los estudios sobre la articulación del EOS con otros enfoques, una línea de investigación que caracteriza este marco teórico desde sus primeras publicaciones y que ha dado lugar a trabajos recientes (como Ledezma et al., 2024; Hummes et al., 2023; Manolino et al., 2023; Rodríguez-Nieto et al., 2023, 2024).

7. CONCLUSIONES

Este trabajo intenta mostrar ideas que están siendo centro de atención de los investigadores de educación matemática en nuestro país, independientemente de los referentes teóricos y metodológicos usados. Por lo tanto, no es en sí mismo una revisión sistemática de investigaciones, sino un intento de identificar preocupaciones y aportes realizados de manera conjunta, canalizados a través de los

simposios de la SEIEM en los últimos años y de publicaciones destacables. Somos conscientes de que puede haber ideas que no hayamos recogido con el énfasis suficiente y de que la instantánea que proponemos, además de necesariamente subjetiva, también es provisional, dado que la investigación se sigue desarrollando en nuestro día a día, algunas líneas evolucionarán, otras igual desaparecerán y dejarán lugar a nuevas propuestas y avances.

Al observar la panorámica que hemos presentado, no deja de sorprender la diversidad de temáticas, problemáticas y enfoques que han adoptado los distintos grupos de investigación, aunque se puedan encontrar en algunos casos agrupaciones o sinergias que integran números importantes de investigadores y que la SEIEM intenta facilitar a través de sus propios grupos. Al intentar destacar aspectos comunes, surge en primer lugar el estrecho contacto de la mayoría de los grupos con investigadores europeos y, sobre todo, de América Latina. No es extraño que la proximidad lingüística y cultural se traduzca en colaboraciones científicas, intercambio de estudiantes y organización de conferencias y publicaciones. En cierta manera, cuando hablamos de la investigación española en educación matemática, nos estamos refiriendo más a una comunidad lingüística que a un país.

Otra característica común, aunque no específica de la comunidad española, es el predominio de estudios exploratorios, basados en métodos observacionales y cualitativos cuyo objetivo es ayudar a identificar y delimitar fenómenos vinculados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, más que a generar evidencia sobre la eficacia de determinadas propuestas o políticas educativas al respecto. Finalmente, y sin duda vinculado a lo anterior, en todos los casos se observa la necesidad de seguir desarrollando, al lado de la investigación fundamental, estudios dirigidos a analizar las condiciones necesarias para que la investigación pueda impactar en nuestros sistemas educativos y aportar respuestas a las nuevas necesidades que este plantea. Estos estudios requieren esfuerzos conjuntos de investigadores en educación matemática, profesores de todos los niveles educativos y políticas educativas curriculares que se desarrollen de forma coordinada. También requieren de infraestructuras colaborativas particulares. Se trata de una tarea pendiente de nuestra comunidad de investigación, que es muy consciente de su importancia. Los desarrollos recientes de algunos equipos españoles sobre el álgebra elemental y el pensamiento computacional, la estadística y el análisis de datos, la enseñanza a través de situaciones de aprendizaje o la formación del profesorado abren una rendija de esperanza al respecto.

Referencias

Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre desarrollo de sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11–25). SEIEM.

Allen, M. J. y Yen, W. M. (1979). *Introduction to measurement theory.* Brooks/Cole.

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). What mathematical knowledge do prospective teachers reveal when creating and solving a probability problem? *Mathematics, 9*(24), 3300. https://doi.org/10.3390/math9243300

Alsina, À., Cornejo-Morales, C. y Salgado, M. (2021). Argumentación en la matemática escolar infantil: Análisis de una actividad STEM usando la Situación Argumentativa en Conexión Interdisciplinar. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 141–159. https://doi.org/10.35763/aiem20.3999

Alsina, À., Pincheira, N. y Delgado-Rebolledo, R. (2024). The professional practice of designing tasks: how do preservice early childhood teachers promote mathematical processes in early algebra? *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01636-1

Álvarez-Arroyo, R., Batanero, C. y Gea, M. M. (2024). Probabilistic literacy and reasoning of prospective secondary school teachers when interpreting media news. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01586-8

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 111–129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5

Arbona, E., Beltrán, M. J., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2017). Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra. En Codina, A., Puig, L., Arnau, D., Sánchez, M.T., Montoro, A. B., Claros, J., Arnal, M. y Baeza, M. A. (Eds.), *Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017* (pp. 38–47). Universidad Rey Juan Carlos y SEIEM.

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A.M. (2020). Prospective secondary mathematics teachers read Clairaut: professional knowledge and original sources. *Educational Studies in Mathematics, 105*(2), 237-259.

Arnau, D. (2022). De la tecnología a la educación matemática: ¿una vía de doble sentido? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 17–29). SEIEM.

Arteaga, P., Díaz-Levicoy, D. y Batanero, C. (2021a). Primary school students' reading levels of line graphs. *Statistics Education Research Journal, 20*(2), Article 6. https://doi.org/10.52041/serj.v20i2.339

Arteaga, P., Jiménez-Castro, M. y Batanero, C. (2021b). Variables que caracterizan los gráficos estadísticos y las tareas relacionadas con ellos en los libros de texto de educación secundaria en Costa Rica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 125–140. https://doi.org/10.35763/aiem20.4001

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2019). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 359–382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Badillo, E., Climent, N., Fernández, C. y González-Astudillo, M. T. (Eds.). (2019). *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/3110

Barquero, B. (2020). Introducción a 'Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de a modelización matemática: Aproximaciones a la problemática de su diseño, implementación y análisis'. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *17*, 1–4. https://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/326

Barquero, B. (2023). Mathematical modelling as a research field: Transposition challenges and future directions. En Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K. y Kónya, E. (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 6–30). Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME. https://hal.science/hal-04427884

Barquero, B., Beltrán, P., López, P., Marí, M. y Vásquez, S. (2024). Puentes entre investigación y transferencia: el proyecto Labinquiry en Secundaria. *XXVII Simposio de la SEIEM*

Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I. y Ruiz-Munzón, N. (2021). Study and research paths in the frontier between paradigms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(5), 1213–1229. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1988166

Barquero, B., Bosch, M. y Florensa, I. (2022b). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 21*, 87–106. https://doi.org/10.35763/aiem21.4232

Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM–Mathematics Education*, *50*, 31–43. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z

Barquero, B., Bosch, M. y Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: The cake box. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the CERME 11* (pp. 1144–1152). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Barquero, B. y Ferrando, I. (2024). Teacher Education for mathematical modelling: exploring the experiences of secondary school teachers in two courses. *ZDM Mathematics Education*, https://doi.org/10.1007/s11858-024-01609-4

Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education, 56*(1), 5–17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en la educación infantil. *PNA, 15*(4), 267–288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Batanero, C., Begué, N., Borovcnik, M. y Gea, M. M. (2020). Ways in which high-school students understand the sampling distribution for proportions. *Statistics Education Research Journal, 19*(3), 32–52.

Batanero, C., Hernandez-Solis, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analyzing Costa Rican and Spanish students' comparisons of probabilities and ratios. *Statistics Education Research Journal, 22*(3), article 7. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Batanero, C., López-Martín, M. M., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2018). Characterizing probability problems posed in university entrance tests in Andalucia. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics. Advances in probability education research* (pp. 103–123). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_7

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 63–79. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2256

Begué, N., Batanero, C., Gea, M. M. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2023). Prospective secondary school teachers' knowledge of sampling distribution properties. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(5), em2265. https://doi.org/10.29333/ejmste/13159

Berciano Alcaraz, A., Ortega del Rincón, T. y Puerta Rebuel, M. (2015). Aprendizajes de las interpolaciones gráficas y algebraicas. Análisis comparativo. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 43–58. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1454

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021a). Levels of Sophistication in Elementary Students' Understanding of Polygon Concept and Polygons Classes. *Mathematics, 9*, 1966, https://doi.org/10.3390/math9161966

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021b). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics, 106,* 251–270, https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 49–70.https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2024). Polygon Class Learning Opportunities: Interplay Between Teachers' Moves, Children's Geometrical Thinking and Geometrical Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*, 1381–1403. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10425-3

Blanco, T. F., Camargo, L. y Sequeiros, P. G. (2024a). How visualization and argumentation are articulated in research on teaching and learning geometry. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01619-2

Blanco, R. y García-Moya, M. (2021). Graph theory for primary school students with high skills in mathematics. *Mathematics, 9*(13), 1567. https://doi.org/10.3390/math9131567

Blanco, R., García-Moya, M. y Gómez-Atienza, D. (2024b). Design of a mathematical problem-solving application for students with autism spectrum disorder. *Educational Technology & Society*, *27*(2), 220–242. https://doi.org/10.30191/ETS.202404_27(2).RP09

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: A model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. De Souza y M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians, 3* (pp. 4001–4022). World Scientific Publishing Co.

Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. J. y Monaghan, J. (2020). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in mathematics education. A comprehensive casebook*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429198168

Bosch, M., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (2022). Real or fake inquiries? Study and research paths in statistics and engineering education. En R. Biehler, M. Liebendörfer, G.Gueudet, C. Rasmussen y C.Winsløw (Eds.), *Practice-oriented research in tertiary mathematics education. Advances in mathematics education* (pp. 393–409). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_19

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and ATD. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 39–52. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9734-3

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255–278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* (Tesis Doctoral). Université Bordeaux I. Disponible en https://theses.hal.science/tel-00471995/fr/

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Bruno, A. y Almeida, R. (2023). Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 27–41). SEIEM.

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 141–162). SEIEM.

Bruno, A., Gil-Clemente, E., Gutiérrez, A., Jaime, A. y Polo-Blanco, I. (2022). Pensemos en unas matemáticas para todo el alumnado. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 322–347). SEIEM.

Bruno, A., Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y González-López, M. J. (2024). Strategies for solving multiplicative problems using a conceptual model-based problem-solving approach. A case study with a student with autism spectrum disorder. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01568-w

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23*(76), 229–251.

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. y Brown, L. (2022). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(2), 425–443, https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J.D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2475. https://doi.org/10.29333/ejmste/14753

Callejo, M. L., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 5–25.

Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P., Moreno, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2022). The use of a length and measurement HLT by pre-service kindergarten teachers' to notice children's mathematical thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 597–617. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10163-4

Camacho, M., Perdono, J., Trujillo, R. (2022). Matemáticas en la Universidad. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 224–259). Ediciones Universidad de Granada-SEIEM.

Camargo, L., Perry, P., Molina, Ó., Samper, C. y Vargas, C. (2024). Diversidad de acepciones de argumento: necesidad de la formación de profesores. *PNA, 18*(3), 313–338. https://doi.org/10.30827/pna.v18i3.26749

Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3–9). SEIEM.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87–103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Comares.

Cañadas, M. C., Molina, M. y del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 19–37. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Cañadas, M. C., Moreno, A. J. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2

Carrillo, D. (2004). La codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas: Pestalozzi y la enseñanza mutua. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(1), 11–44.

Carrillo, D., Maurandi, A. y Olivares, P. (2018). El cálculo y la medida en el primer grado de la escuela Decroly: Análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Revista Colombiana de Matemática Educativa RECME, 3,* Número Especial. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, A., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzalez, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalan, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E. y Cañadas, M. C. (2016). Enseñanza de las matemáticas para alumnos con necesidades educativas especiales. En L. Rico, M. C. Cañadas, A. Marín y M. T. Sánchez (Eds.), *Investigaciones en didáctica de la matemática. Homenaje a Moisés Coriat* (pp. 25–33). Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C., Molina, M. y Rodríguez-Domingo, S. (2022). Difficulties in semantically congruent translation of verbally and symbolically represented algebraic statements. *Educational Studies in Mathematics, 109*(3), 593–609. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10088-3

Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M. y Ruiz-Munzón, N. (2020). Research on negative numbers in school algebra. En: M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García y J. Monhagan (Eds.), *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education. A comprehensive casebook* (p. 61–76). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429198168

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. En R. Douady et al. (Eds.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Selected Papers* (pp. 131–167). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation. *XIe École d'Été de Didactique Des Mathématiques* (pp. 41–56). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161–182 https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M. y Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8

Del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., Arnau, D., Arnau-Blasco, D. y González-Calero, J. A. (2024). Metacognitive control during problem solving at early ages in programming tasks using a floor robot. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01621-8

Del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2023). Intelligent tutoring systems for word problem solving in COVID-19 days: could they have been (part of) the solution? *ZDM – Mathematics Education, 55*(1), 35–48. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01396-w

Diago, P. D., Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2018). Elementos de resolución de problemas en primeras edades escolares con Bee-bot. *Educación Matemática en la Infancia (Edma 0-6), 7*(1), 12–41.

Dólera, J. y Sánchez-Jiménez, E. (2024). Pedro Puig Adam y el método heurístico en la enseñanza de las matemáticas en España. *El Futuro del Pasado, 15*, 703–723. https://doi.org/10.14201/fdp.31159

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Kluwer.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Escrivà, M. T., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. *Educación Matemática en la Infancia (Edma 0-6), 7*(1), 42–62.

Espinoza, J., Lupiañez, J. L. y Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(2), 368–392. http://dx.doi.org/10.14204/ejrep.39.15067

Fernández, C., Llinares, S., Rojas, Y. (2020). Prospective mathematics teaches' development of noticing in an online teacher education program. *ZDM Mathematics Education, 52,* 959–972, https://doi.org/10.1007/s11858-020-01149-7

Fernández, C., Moreno, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2024) Prospective secondary teachers' noticing of students' thinking about the limit concept: pathways of development. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01573-z

Fernández, C., Sánchez–Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018a). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias, 36*, 143–162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Fernández, C., Sánchez–Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018b). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39–61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Toscano, R. (2021). A case study of the practices of conjecturing and proving of research mathematicians. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(5), 767–781.

Fernández-López, A., Blanco, T. F. y González Sequeiros, P. (2024). Exploring pre-service primary teachers' emotions in a geometry project with 3D design. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(6), em2451. https://doi.org/10.29333/ejmste/14589

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Fernández Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias,* 33(2), 211–229. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575

Fiallo, J. y Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 145–167.

Florensa, I., Barbero, M. y Martínez-Planell, R. (2024). Comparative analysis between three theoretical approaches through empirical experiences at university level. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01632-5

Florensa, I., Bosch, M. y Gascón, J. (2021). Question–answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*, 203–225. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09454-4

Florensa, I., García, F. J. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática. Estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2018*(17), 21–37. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315

Font, V., Breda, A., Sala-Sebastia, G. y Pino-Fan, L.R. (2024). Future teachers' reflections on mathematical errors made in their teaching practice. *ZDM Mathematics Education,* https://doi.org/10.1007/s11858-024-01574-y

Frank, K. y Thompson, P. W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM Mathematics Education, 53*(3), 549–562. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01231-8

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124–158. https://doi.org/10.2307/749671

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 63–84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E. y Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 374–392. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508

Fuentealba, C., Trigueros M., Sánchez-Matamoros, G. y Badillo, E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 21*, 23–44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241seiem.es

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 75–94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

García, F. J., Lendínez, E. M., Lerma, A. M. y Abril, A. M. (2024). Mechanisms and evidence of prospective teachers' learning through enquiry-oriented practices: the case of a lesson study intervention. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01620-9

García, F. J., Lendínez, E. M. y Sierra, T. A. (2017). La enseñanza del número en la escuela infantil: un estudio exploratorio del logos de la profesión. *REDIMAT*, *6*(1), 33–55. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.2059

García, F. J., Wake, G., Lendínez, E.M. y Lerma, A.M. (2019). The role of epistemological and didactic models in the education of teachers through lesson study. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 137–156. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2512

García-Moya, M. y Blanco, R. (2024). Applications with mathematical content for users with autism. *IEEE Revista Iberoamericana de Tecnologías del Aprendizaje, 19*, 111–119. https://doi.org/10.1109/RITA.2024.3368351

García-Moya, M., Blanco, R. y Rodrigues, M. (2024). Use of a conceptual model-based approach for a student with autism spectrum disorder to learn to solve Cartesian product problems in an inclusive context. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 59*(1), 30–44.

Gascón, J. (2024). Contributions of the Anthropological Theory of the Didactic to the Epistemological Programme of Research in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s11858-024-01563-1

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, 37 (3), 26–30.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2019). Research ends and teaching ends in the anthropological theory of the didactic. *For the learning of mathematics*, 39 (2), 42–47.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2023). El papel de los juicios de valor en la ciencia didáctica. Diálogo entre la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista de Educación*, *35*(2), 47–68. https://doi.org/10.24844/EM3502.02

Gea, M. M., Pallauta, J. D., Batanero, C. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2022). Statistical tables in Spanish primary school textbooks. *Mathematics, 10*, 2809. https://doi.org/10.3390/math10152809

Giacomone, B., Godino, J.D., Blanco, T.F. y Wilhelmi, M. R. (2023). Onto-semiotic analysis of diagrammatic reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 21, 1495–1520. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10316-z

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw-Hill, Aula Magna.

Godino, J. D., Aké, L., Contreras, Á., Estepa, A., Fernandez, T., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Díaz, C., Oliveras, M. L., Lacasta, E. y Lasa, A. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 127–150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468

Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(6), em2270. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. y Wilhelmi, M. R. (2024). Understanding the onto-semiotic approach in mathematics education through the lens of the cultural historical activity theory. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01590-y

Godino, J. D, Burgos M y Wilhelmi M. R. (2024). Onto-semiotic analysis of the emergence and evolution of functional reasoning. *RIME, 1*(1), 09–37. https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400013181

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández Blanco, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(2), 109–130.

Gómez-Chacón, I. M. y Marbán, J. M. (2024). Epistemic emotions and pre-service mathematics teachers' knowledge for teaching. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01624-5

Gómez-Chacón, I. M., Romero Albaladejo, I. M. y García López, M. M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a mathematical working space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 909–924. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0755-2

González, C., Noda, A., Bruno, A., Moreno, L. y Muñoz, V. (2015). Learning subtraction and addition through digital boards: a Down syndrome case. *Universal Access in the Information Society, 14*(1), 29–44. https://doi.org/10.1007/s10209-013-0330-3

Gónzalez-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2020). Various ways to determine rational number size: an exploration across primary and secondary education. *European Journal of Psychology of Education, 35*, 549–565. https://doi.org/10.1007/s10212-019-00440-w

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022a). Profiles in understanding operations with rational numbers. *Mathematical Thinking and Learning, 24*(3), 230–247, https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1882287

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022b). Profiles in understanding the density of rational numbers among primary and secondary school students. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 47–70. https://doi.org/10.35763/aiem22.4034

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2023). Incorrect ways of thinking about the size of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21,* 2005–2025, https://doi.org/10.1007/s10763-022-10338-7

Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I. (2022). Generalisation in students with autism spectrum disorder: an exploratory study of strategies. *ZDM – Mathematics Education, 54*(6), 1333–1347. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01415-w

Gorgorió, N., Albarracín, Ll., Laine, A. y Llinares, S. (2021). Primary education degree programs in Alicante, Barcelona and Helsinki: Could the differences i n the mathematical knowledge of incoming students be explained by the access criteria? *LUMAT General Issue, 9*(1), 174–207, https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1468

Grossman, P. (2018). *Teaching core practices in teacher education.* Harvard Education Press.

Guinjoan, M., Fortuny, J. M. y Gutiérrez, Á. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 29–46. https://doi.org/https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1438

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3–19). PME. Disponible en http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf

Gutiérrez, A., Benedicto, C., Jaime, A. y Arbona, E. (2018a). The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems. En F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 169–198). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_7

Gutiérrez, A., Ramírez, R., Benedicto, C., Beltrán-Meneu, M. J. y Jaime, A. (2018b). Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis. En K. S. Mix y M. T. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought* (309–337). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_14

Hakamata, R., Fukuda, H., Otani, H., Otaki, K., Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Potential of Brousseau's guessing game in teacher education: two complementary cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321587

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023). Costa Rican students' proportional reasoning and comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(12), em2373. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

Hoyos, E., Acosta, C. A., Aristizábal, J. H., Mesa, M. J., Trujillo, C. A., Rincón, J. A., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2021). Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis, 49*, 123–142.

Hummes, V., Breda, A., Font, V. y Seckel, M. J. (2023). Improvement of reflection on teaching practice in a training course that integrates the lesson study and criteria of didactical suitability. *Journal of Higher Education Theory & Practice, 23* (14). https://doi.org/10.33423/jhetp.v23i14.6395

Ivars, P., Fernandez, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), em1599

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020a). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(3), 105–124. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947

Ivars, P.; Fernandez, C. y Llinares, S. (2020b). A Learning Trajectory as a Scaffold for Preservice Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18,* 529–548, https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71–89). SEIEM.

Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340*, 122868–122953.

Kosslyn, S. M. (1994). *Elements of graph design.* W. H. Freeman.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. The University of Chicago Press.

Kuzniak, A., Montoya, E. y Richard, P. (Eds). (2022). Mathematical work in educational context. *The perspective of the Theory of Mathematical Working Space*. Springer.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in pupils' construction of meaning in geometry. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159–179). Springer.

Ledezma, C., Rodríguez-Nieto, C. A. y Font, V. (2024). The role played by extra-mathematical connections in the modelling process. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 25*, 81–103. https://doi.org/10.35763/aiem25.6363

Lerma, A. M., Barquero, B., García, F. J., Hidalgo-Herrero, M., Ruiz-Olarría, A. y Sierra, T. (2021). Los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica de maestros. En P. D. Diago, D. F. Yañez, M. T. González y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 385–392). SEIEM.

Lin, F. L. y Rowland, T. (2016). Preservice and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 483–520). Brill-Sense.

Llinares, S. (2018). Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 1–3.

Llinares, S. (Coord.) (2023). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (p. 480–524). Ediciones Universidad de Granada-SEIEM.

Llinares, S. y Clemente, F. (2019). Characteristics of the shifts from configural reasoning to deductive reasoning in geometry. *Mathematics Education Research Journal, 31*, 259–277, https://doi.org/10.1007/s13394-018-0253-7

Lucas, C., Ruiz-Olarría, A. y Gascón, J. (2023). Una estrategia para la formación del profesorado: El caso del cálculo diferencial elemental, *Enseñanza de las Ciencias 41*(2), 71–92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5640

Lupiáñez, J. L., Olivares, D. y Segovia, I. (2024). Examining the role played by resources, goals and orientations in primary teachers' decision-making for problem-solving lesson plans. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01614-7

Madrid, M. J., León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2023a). The introduction of the algebraic thought in Spain: the resolution of the second degree equation. En S. Romero Sánchez, A. Serradó Bayés, P. Appelbaum y G. Aldon (Eds.), *The role of the history of mathematics in the teaching/learning process* (pp. 79–115). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29900-1_4

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y López-Esteban, C. (2023b). Aplicaciones de las matemáticas a la vida diaria en los libros de aritmética españoles del siglo XVI. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 1082–1100. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a12

Madrid, A. E., Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C. y Garzón-Guerrero, J. A. (2022). Comprensión de la mediana por estudiantes universitarios. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 1–21. https://doi.org/10.35763/aiem22.3902

Manero, V. y Arnal-Bailera, A. (2021). Understanding proof practices of pre-service mathematics teachers in geometry. *Mathematics Teaching Research Journal 13*(3), 99–130.

Manolino, C., Giacomone, B. y Beltrán-Pellicer, P. (2023). Semiotic bundle approach and onto-semiotic approach: a dialogue between two theories on an arithmetic-algebraic problem. *Educação e Pesquisa*, 49, e256699. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349256699eng

Markulin, K., Bosch, M. y Florensa, I. (2024). Inquiry dynamics at the crossroads of descriptive and inferential statistics, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2309278

Márquez, M., Fernández, C. y Callejo, M.L. (2021). Pre-service primary school teachers' knowledge and their interpretation of students' answers to a measurement division problem with fractions. *Mathematics, 9*(24), 3163. https://doi.org/10.3390/math9243163

Matsumoto-Royo, K. y Ramirez-Montoya, M. S. (2021). Core Practice-based teacher education: a systematic literature review of its teaching and assessment processes. *Studies in Educational Evaluation, 70,* 101047, https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101047

Molina Jaime, O. J., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93–116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Montero, E., Callejo, M. L. y Valls, J. (2020). Instrumentación de una progresión de estrategias por estudiantes para maestro. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(2), 83–101. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.303

Montero, E., Callejo, M.L. y Valls, J. (2022). Anticipación de estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones mediante una progresión de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(3), 289–310. https://doi.org/10.12802/relime.22.2532.Montero

Mora, M., Gutiérrez, A., Jaime, A. (2023a). Identification of pre-algebra problems of generalization that discriminate mathematical giftedness. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 608–615). ERME.

Mora, M., Gutiérrez, A., Jaime, A. (2023b): Descriptores para analizar la flexibilidad en la resolución de problemas como indicador del talento matemático. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, P. Ivars (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 395–402). SEIEM.

Mora, M., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024a). Analysis of visualization as an indicator of mathematical giftedness. En T. Lowrie, A. Gutiérrez y F. Emprin (Eds.), *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference* (pp. 207–214). ICMI.

Mora, M., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2022). Descriptors of generalization in primary school mathematically gifted students. En S. A. Chamberlin (Ed.), Proceedings of the 12th International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness (pp. 203–209). IGMCG.

Mora, M., Ramírez, R., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024b). Traits of generalization of problem solution methods exhibited by potential mathematically gifted students when solving problems in a selection process. ZDM *Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01625-4

Morales Merino, R. A., Cañadas, M., Brizuela, B. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59–78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Morales-López, Y., Breda, A. y Font, V. (2024). Articulation between a technological model and an educational model to deepen the reflection of prospective mathematics teachers. *International Journal of Educational Methodology, 10* (3), 479–494. https://hal.science/hal-04634421

Moreno, M., Sánchez-matamoros, G., Callejo, M.L., Perez-Tyteca, P. y Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentalization of a learning trajectory. *ZDM Mathematics Education, 53*, 57–72. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to partition problems. En B. Southwell, R. Perry y K. Owens (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference of the MERGA* (pp. 410–420). MERGA.

Muñoz-Escolano, J.M. y Oller-Marcén, A.M. (2020). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados en España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación, 11*, 51-85. https://doi.org/10.5944/HME.11.2020.23545.

Muñoz-Escolano, J.M., Oller-Marcén, A.M. y Santágueda-Villanueva, M. (2022). La sección de problemas matemáticos del Boletín La Escuela (193-1916). *Historia y Memoria de la Educación, 16*, 425-458. https://doi.org/10.5944/hme.16.2022.30828.

Oller-Marcén, A. M. (2023). Mathematics in 18th Century Spanish Daily Press. The Early Years of Diario de Barcelona. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 37*(77), 1317-1335. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a19.

Oller-Marcén, A.M. y Muñoz-Escolano, J.M. (2019). Conceptions about mathematics, its teaching and learning in Compendio Mathematico (1707) written by the Spanish Thomas Vicente Tosca (1651-1723). *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*(64), 635-648. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a09

Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2023). Caracterización de tareas de inecuaciones propuestas en textos escolares de Educación Primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 427–434). SEIEM.

Pallauta, J. D., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023a). Un instrumento para evaluar la comprensión de tablas estadísticas en educación secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(3), 89–112. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5926

Pallauta, J., Gea, M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2023b). Algebraization levels of activities linked to statistical tables in Spanish secondary textbooks. En G. F. Burrill, L. Oliveria Souza y E. Reston (Eds.), *Research on reasoning with data and statistical thinking: internationalperspectives* (pp. 317–339). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_23

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2023). Una mirada a través de gráficos funcionales del alumnado de quinto de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 435–442). SEIEM.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: The case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63–94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F. y Font, V. (2023). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher' practice. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21,* 1407–1432. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(6), 1183–1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Planas, N. (2017). Dimensiones de la diversidad en Educación Matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 69–70). SEIEM.

Planas, N. (2021). How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? *ZDM – Mathematics Education, 53*(2), 277–288. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6

Planas, N., Alfonso, J.M., Arnal-Bailera, A. y Martin-Molina, V. (2024). Mathematical naming and explaining in teaching talk: Noticing work with two groups of mathematics teachers. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01576-w

Prior, J. y Torregrosa, G. (2020). Razonamiento configural y espacio de trabajo geométrico en la resolución de problemas de probar. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*, 178–198. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a09

Puig, L. (2022). Ideas of structure in the history of algebra and its teaching. En T. Rojano (Ed.), *Algebra structure sense development among diverse learners* (pp. 20–35). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003197867

Quevedo Gutiérrez, E., Zapatera Llinares, A. y Lijó Sánchez, R. (2023). Invención de situaciones aditivas con número enteros. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 459–466). SEIEM.

Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A., Gutiérrez, A. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 447–457). SEIEM.

Ramírez, R., Cañadas, M. C. y Damián, A. (2022). Structures and representations used by 6th graders when working with quadratic functions. *ZDM – Mathematics Education, 54*(6), 1393–1406. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01423-w

Ramírez-Uclés, R., Flores, P. y Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 29–56. https://doi.org/10.12802/relime.18.2112

Ramírez-Uclés, R. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Reasoning, representing, and generalizing in geometric proof problems among 8th grade talented students. *Mathematics, 10*(5), 789. https://doi.org/10.3390/math10050789

Recio T., Richard, P. R. y Vélez, M. P. (2019). Designing tasks supported by GeoGebra automated reasoning tools for the development of mathematical skills. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 26*(2), 81–89. https://doi.org/10.1564/tme_v26.2.05

Remillard, J. (2012). Modes of engagement: Understanding teachers' transactions with mathematics curriculum resources. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From text to «lived» resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 105–122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_6

Richard, P. R., Oller Marcén, A. M. y Meavilla Seguí, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 843–859. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0805-9

Richard, P. R., Vélez, M. P. y Van Vaerenbergh, S. (Eds.) (2022). *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning*. Springer.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de Didáctica de la Matemática. *Revista de Educación, 328*, 35–58.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA, 9*(4), 273–293.

Rodríguez-Nieto, C. A., Cabrales González, H. A., Arenas-Peñaloza, J., Schnorr, C. E. y Font, V. (2024). Onto-semiotic analysis of Colombian engineering students' mathematical connections to problems-solving on vectors: A contribution to the natural and exact sciences. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(5), em2438. https://doi.org/10.29333/ejmste/14450

Rodriguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M. y Font, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f'. *Educational Studies in Mathematics, 114*, 63–88. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10246-9

Rojas, C. y Sierra, T. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 41–63. https://doi.org/10.35763/aiem20.4031

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29–49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Rott, B. (2013). Comparison of expert and novice problem solving at grades five and six. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of 37th PME Conference* (Vol. 4, pp. 113–120). PME.

Rubio-Chueca, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P. (2021). Análisis de los problemas de probabilidad en las olimpiadas matemáticas. En A. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (Eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 143–150). Universidad de La Rioja.

Ruiz-Catalán, J., Madrid, M. J. y Maz-Machado, A. (2024). El Método General de Resolución de Ecuaciones en la Arithmetica Universal de José Zaragoza (1669). *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 38*, e230084. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Madrid. https://repositorio.uam.es/handle/10486/665889?show=full

Sánchez, I. M. y González, M. T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(3), 89–106. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2348

Sánchez, I. M. y González, M. T. (2019). La geometría analítica en el Curso Completo de Matemáticas Puras (1829) de José de Odriozola. *Historia y Memoria de la Educación, 11*, 113–149. https://doi.org/10.5944/HME.11.2020.24165

Sánchez-Jiménez, E., Carrillo, D., Chevallard, Y. y Bosch, M. (2020). The Second Spanish Republic and the project method: A view fron the ATD. En M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological theory of the didactic in mathematics education* (pp. 101–117). Routledge.

Sánchez-Jiménez, E (2020). Materiales didácticos y renovación de la enseñanza de la matemática en la «Edad de Plata». ¿Cómo puede contribuir la TAD a la investigación en Historia de la Educación Matemática? En I. B. Dos Santos, E. Z. Búrigo y W. R. Valente (Org.), *Materiais didácticos e história da educaçao matemática* (pp. 49–79). Editora Livraia da Física.

Sánchez-Jiménez, E. y Dólera, J. (2023). Algunos dispositivos didácticos para las matemáticas en las escuelas normales españolas durante la edad de plata. *Revista Paradigma, XLIV* (2), 596–622. https://doi.org/10.1590/2236-3459/125566

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P. y Callejo, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203–228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124

Sánchez-Matamoros, G., Fernandez, C. y Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics, 100*, 83–99. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M. y Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a Dynamic Geometry System. *ZDM Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s11858-024-01607-6

Saorín, A., Quesada, H. y Torregrosa, G. (2019a). Razonamiento configural y desarrollo del discurso en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico. *Enseñanza de las Ciencias*, 37, 89–109. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2431

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H., (2019b). Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*, 213–244. https://doi.org/10.12802/relime.19.2224.

Scheiner, Th., Montes, M.A., Godino, J.,D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L.R. (2019). What makes Mathematics TEacher Knowledge Specialized? Offering Alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17,* 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. Routledge.

Schwarz, B. y Kaiser, G. (2019). The professional development of mathematics teachers. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 325–342). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_15

Selden, J., Mason, A. y Selden, A. (1989). Can average calculus students solve nonroutine problems? *Journal of Mathematical Behavior, 8*, 45–50.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Sinclair, N., Cirillo, M. y De Villiers, M. (2017). The learning and teaching of geometry. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 457–489). NCTM.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344–350.

Soneira, C., González-Calero, J. A. y Arnau, D. (2018a). Indexical expressions in word problems and their influence on multiple referents of the unknown. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(6), 1147–1167. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9824-4

Soneira, C., González-Calero, J. A. y Arnau, D. (2018b). An assessment of the sources of the reversal error through classic and new variables. *Educational Studies in Mathematics, 99*(1), 43–56. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9828-1

Soneira, C., González-Calero, J. A. y Arnau, D. (2023). Effect of algebraic language and problem text wording on problem model accuracy when solving age word problems. *Educational Studies in Mathematics, 114*(1), 109–127. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10236-x

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3d y realidad aumentada. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579–586). SEIEM.

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024). Analogies: a way to promote the learning of proof in 3d geometry using dynamic geometry environments. En T. Lowrie, A. Gutiérrez, F. Emprin (Eds.), *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference* (pp. 409–416). ICMI.

Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R. y Cañadas, M. C. (2024). The Evolution from "I think it plus three" Towards "I think it is always plus three." Transition from Arithmetic Generalization to Algebraic Generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*(5), 971–991. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10414-6

Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. y Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). Significado de derivada en las tareas de los libros de 1º de Bachillerato. *Bolema, 34*(68), 911–933. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a04

Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Acta Scientiae, 21*(3), 131–154. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215

Vásquez Ortiz, C. A., Alsina, Á., Pincheira, N., Gea, M. M. y Chandia, E. (2020). Construcción y validación de un instrumento de observación de clases de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(2), 25–43. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2820

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (2021). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (en prensa) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Verbisck, J., Bittar, M., Bosch, M., Barquero, B. y Benito, R. (2022). Study and research paths for statistics teacher education at secondary school level: An exploratory study. En S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini y A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics*. International Association for Statistical Education. https://doi.org/10.52041/iase.icots11.t2a2

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133–170.

Vicente, S., Verschaffel, L. y Ramos, M. (2022a). Dificultad de los problemas aritméticos verbales de los libros de texto singapurenses y españoles. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 137–156. https://doi.org/10.35763/aiem22.4412

Vicente, S., Verschaffel, L., Sánchez, R. y Múñez, D. (2022b). Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 111*(3), 375–397. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10169-x

Zorrilla, C., Roos, A.K., Fernández, C., Llinares, S. y Prediger, S. (2024). Connecting operation-choice problems by the variation principle: Sixth graders' operational or deeper relational pathways. *Journal of Mathematical Behavior, 73*, 101104. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101104

COMUNICACIONES

UNA PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA DE LA CONTEXTUALIZACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

An ethnomathematical perspective on the contextualisation of mathematical problems

Albanese, V.

Universidad de Granada

Resumen

En este estudio se cuestiona el papel de una perspectiva etnomatemática en la construcción de problemas contextualizados, dada la relevancia que se otorga al contexto de un problema para su proceso de resolución. El objetivo es analizar la autenticidad de problemas elaborados por profesorado en formación o en servicio en el marco de un curso sobre Etnomatemática después de una breve investigación que pone en diálogo saberes involucrados en una situación real con las matemáticas escolares. Se seleccionan los problemas que abordan el sentido algebraico y se analizan los elementos del problema (evento, datos y pregunta) respecto a su grado de autenticidad. Los resultados son alentadores dado que todos los problemas analizados son auténticos o realistas. Se necesitan más estudios para acotar el rol de la perspectiva etnomatemática en la formación necesaria del profesorado para la construcción de problemas contextualizados.

Palabras clave: *etnomatemática, contextualización, autenticidad, problema matemático.*

Abstract

This study questions the role of an ethnomathematical perspective in the construction of contextualised problems, given the relevance of the problem context for its resolution process. The aim is to analyse the authenticity of problems elaborated by trainee or in-service teachers in the framework of a course on Ethnomathematics after a brief investigation that puts in dialogue knowledge involved in a real situation with school mathematics. Problems dealing with algebraic meaning are selected and the elements of the problem (event, data and question) are analysed in terms of their degree of authenticity. The results are encouraging given that all the problems analysed are authentic or realistic. More studies are needed to narrow down the role of the ethnomathematical perspective in the necessary teacher training for the construction of contextualised problems.

Keywords: *ethnomathematics, contextualisation, authenticity, mathematical problem.*

INTRODUCCIÓN

Desde sus orígenes, el Programa Etnomatemática se ha centrado no solo en el quehacer matemático de pueblos originarios, sino también en el quehacer matemático de grupos culturales determinados "tales como comunidades urbanas y rurales, grupos de trabajadores, grupos de profesionales, niños de cierta edad, sociedades indígenas y otros, que se identifican por objetivos o tradiciones comunes" (D'Ambrosio, 2008, p. 9).

El objeto de estudio del Programa ha ido evolucionando. Al principio se trataba de identificar prácticas matemáticas de grupos culturales determinados, según la perspectiva de lo que es matemático por el investigador (Barton, 1996), hasta llegar a la idea más inclusiva de entender las etnomatemáticas (nótese el minúsculo y plural) como las formas y técnicas de entender y lidiar con y en el entorno (D'Ambrosio, 2008), a partir de un proceso de deconstrucción y reconstrucción de la idea de lo que se puede considerar como matemático.

Albanese, V. (2024). Una perspectiva etnomatemática de la contextualización de problemas matemáticos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 97-104). SEIEM.

Cabe destacar que el Programa Etnomatemática, debido al carácter situado de las investigaciones que se desarrollan en su seno, suele abarcar implicaciones educativas -así como metodologías- distintas según el lugar y la situación social de los participantes. En particular, se pueden identificar dos amplias líneas dentro de las cuales se mueven la intervenciones educativas con trasfondo etnomatemático: por un lado, las que se proponen establecer un diálogo entre saberes locales o cotidianos con saberes escolares para una mejor integración de ambos; por otro lado, las que se proponen un cambio de concepciones respecto a la naturaleza, desarrollo, difusión y validación del conocimiento a veces enmarcadas en perspectivas decoloniales (Albanese et al., 2017; Fuentes, 2019; Parra y Valero, 2021). Entre las primeras propuestas, se encuentran las que se relacionan con procesos de modelización de prácticas propias de algunos grupos culturales en términos de las matemáticas escolares, indicándose este proceso como una etnomodelización (Orey y Rosa, 2021), mientras otro aspecto de relevancia lo cobra la contextualización de los problemas matemáticos escolares que deberá ser auténtica en el sentido que respete los elementos de la situación real a la que se hace referencia, así como la cultura propia del entorno del estudiantado (Chamoso et al., 2014; Chavarría-Arroyo y Albanese, 2023b; Palm, 2008).

Reflexiones previas han llevado a establecer cómo el contexto de un problema puede condicionar de manera significativa la elección de las estrategias de resolución. Asimismo, se destaca la importancia que se otorga a la elección de un contexto que favorezca el aprendizaje del estudiantado. Ahora bien, el papel del contexto cobra especial relevancia en la definición de las situaciones de aprendizaje como núcleo de la reforma curricular que se ha implementado en España en los cursos 2022-2023 y 2023-2024 (Moreno y Cruz, 2023). El uso de problemas con contexto cercano a la realidad es esencial para otorgar significatividad a los objetos matemáticos promoviendo además el desarrollo de la competencia matemática, es decir, la habilidad para resolver problemas en diferentes situaciones (Godino et al., 2015).

En este documento se plantea explorar si una perspectiva etnomatemática que ponga en diálogo saberes involucrados en prácticas cotidianas con matemáticas escolares favorece la construcción de problemas auténticos o realistas. Por lo tanto, se propone analizar la autenticidad de la contextualización de unos problemas creados por un grupo de estudiantes a partir de una concienciación sobre la relevancia de poner en diálogo saberes locales y saberes escolares en un curso de postgrado sobre Etnomatemática.

MARCO TEÓRICO

Un reciente enfoque propone considerar el objeto de estudio del Programa Etnomatemática como aquellas relaciones que se establecen entre elementos de las culturas y elementos de las matemáticas en contraposición con concepciones previas que veían la Etnomatemática como un campo que surgía de la intersección de varias disciplinas (Parra-Sánchez, 2017). Aclaradora es la metáfora del trueque de saberes que permite el enriquecimiento mutuo a través del valor añadido que proporciona una perspectiva diferente a la propia de la práctica (matemática pero contextualizada) en observación, ya que “el esfuerzo por describir las prácticas del otro en los propios términos exige un replanteamiento del propio conocimiento. Esta reorganización implica la creación de *conocimientos híbridos* que amplían el "núcleo" de la disciplina y la cultura” (Parra-Sánchez, 2017, p. 97, traducción propia, énfasis original).

Consideramos el contexto como la situación extra-matemática en la que se enmarca un problema matemático, haciendo referencia a su uso *ecológico* (Ramos y Font, 2006), siendo esto estrechamente relacionado con la contextualización de un objeto matemático entendido como el uso de referentes concretos y cercanos a la cotidianeidad –a la realidad– utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular en los problemas matemáticos, para dar significado al objeto matemático (Nuñez y Font, 1995).

El principal concepto teórico implicado en el análisis que se propone a continuación es la de autenticidad de la contextualización de un problema matemático. Para determinar si la contextualización es auténtica se identifican distintos elementos de un problema que deben ser presentados en el problema de manera que sea acorde a su presencia en la realidad: el evento, la pregunta, el propósito, el lenguaje y los datos, entre otros (Palm, 2008). En particular aquí se analizan evento, pregunta y datos, tal como es planteado en Cáceres et al. (2015). Ahora bien, los problemas auténticos son aquellos cuyos eventos, datos y pregunta son auténticos, en el sentido de acordes a la realidad, mientras los problemas realistas son aquellos cuyo evento es bien situado en la realidad, pero cuyos datos o preguntas no respetan la situación real, siendo realistas pero no reales (Maaß, 2010). Matizaremos más adelante en la metodología como se clasificarán los problemas en esta investigación.

Ahora bien, para la construcción de un problema con contextualización auténtica es necesario que se lleve a cabo un trueque de saberes entre los objetos matemáticos entendidos como productos del proceso de institucionalización del cuerpo de conocimiento matemático, de aquí en adelante referidos como matemáticas escolares o académicas, y los saberes que se ponen en juego en las prácticas cotidianas que se eligen como contexto del problema. Este proceso implica el desarrollo de una *mirada matemática* por parte del profesorado (Canals, 2013) que debe ser objeto de formación, ya que es de cierta complejidad. De hecho, investigaciones previas han identificado ciertas dificultades por parte del profesorado en la selección o elaboración de problemas con contextos adecuados para el concepto matemático involucrado –análisis fenomenológico– (Gómez y Cañadas, 2016) o con contextualización culturalmente significativa –auténtica– (Chavarría-Arroyo y Albanese, 2023a).

Antecedentes

Hay diversas investigaciones que analizan, entre otras variables, la cercanía a la realidad –el grado de autenticidad– del contexto o situaciones de problemas matemáticos existentes en los libros de texto (Chamoso et al., 2014; Vicente y Manchado, 2017), presentes en el currículo especifico de un país (Chavarría-Arroyo y Albanese, 2021) o que proponen en la formación docente la formulación de problemas cercanos a la realidad (Cáceres et al., 2015; Chamoso y Cáceres, 2018).

En la literatura hay evidencias de otros cursos para la formación docente cuyo contenido incluía la identificación del uso de objetos matemáticos relacionados con rasgos idiosincráticos de la cultura o realidad de los propios participantes (Gerdes, 1998; Naresh, 2015), la identificación de procedimientos matemáticos en labores artesanales (Oliveras, 1996), o la revalorización de saberes locales propios de los estudiantes para su introducción en las matemáticas escolares (Gavarrete, 2015). Siguiendo esta línea, la investigación que presentamos propone que los profesores (en formación o en servicio) relacionen los saberes locales involucrados en alguna práctica cotidiana familiar (en adelante indicada como rasgo cultural) con las matemáticas escolares.

METODOLOGÍA

Contexto y participantes

El grupo de estudiantes que participó en el estudio está compuesto por maestros de educación primaria en formación (8) o en servicio (1 persona) y profesores de secundaria de matemáticas en servicio (8 personas) o en formación (1 persona) que están cursando un postgrado, siendo 18 personas en total. Cabe destacar la diversidad de nacionalidades presentes en el grupo: España (13), Argentina (1), Uruguay (1), India (1), Colombia (1), Ecuador (1). En algunos casos, los estudiantes han trabajado en pareja, mientras que, en otros, han trabajado de manera individual.

Curso

El curso se compone fundamentalmente de tres bloques, en el primero se vivencia con un taller un proceso de concienciación sobre la relatividad de la concepción del espacio respecto a los elementos

sociales, culturales y naturales del contexto. En el segundo se profundiza sobre elementos filosóficos, teóricos y metodológicos respecto al Programa Etnomatemática a través de la co-construcción compartida de significados en sesiones basadas sobre la reflexión de la experiencia vivida en el taller y la discusión colectiva de aportes de la literatura acuradamente seleccionados. En la tercera se propone la realización de un proceso de investigación de índole etnomatemática que se desarrolla en tres fases: elección de un rasgo cultural cercano al estudiante, análisis de las relaciones entre los saberes involucrados en el rasgo y las matemáticas escolares, y construcción de un problema matemático cuyo contexto ecológico sea el rasgo. En este último bloque, cada fase viene presentada al grupo clase para recibir retroalimentación de pares y formadores.

Recogida y selección de datos

Los datos son constituidos por las producciones del estudiantado bajo el formato de portafolio que fue entregado como producto final del cursado de la asignatura. En el portafolio se reflejan las tres fases descritas para el último bloque en el apartado anterior cuyas instrucciones han sido: 1) realizar una breve descripción del rasgo elegido por cada estudiante, 2) realizar un análisis de las relaciones entre los saberes locales involucrados en la práctica relacionada con el rasgo y los saberes matemáticos escolares 3) construir un problema matemático escolar cuyo contexto sea el rasgo. Cabe destacar que el contenido matemático abordado en el problema era determinado por los resultados de la investigación del rasgo, mientras se ha dejado libertad respecto al nivel educativo para adaptarlo al contenido y también a la experiencia previa de cada estudiante.

A continuación, se seleccionan, para su análisis en este documento, los problemas cuyo contenido matemático está relacionado con el sentido algebraico (principalmente proporcionalidad y/o relaciones lineales), y solo aquellos desarrollados por estudiantes que dieron su consentimiento informado, tratándose de 6 problemas. La razón de esta elección es que la mitad de los problemas propuestos abordaban este contenido, mientras la otra mitad estaba relacionada con el sentido espacial (en particular figuras geométricas y sus propiedades).

Análisis

El análisis es cualitativo, estableciéndose como categorías a priori los elementos del problema indicados en el marco teórico en relación a la autenticidad: evento, pregunta y datos. Vamos a utilizar la siguiente codificación y detallamos respectivamente a que nos referimos:

- Auténtico (2): el evento es auténtico cuando es acorde a la realidad; la pregunta es auténtica cuando se presentan evidencias de que en la situación real se plantea tal como se presenta; los datos son auténticos cuando emergen de la investigación del rasgo.
- Realista (1): el evento es realista cuando se podría presentar en la realidad; la pregunta es realista cuando tiene sentido y se podría realizar en ese contexto, aunque no se aportan evidencias de que así es en la situación real; los datos son realistas cuando se pueden presentar así en la realidad, pero no hay evidencias de ellos.
- No realista (0): el evento no es realista cuando no se puede presentar en la realidad; la pregunta no es realista cuando no está relacionada con la situación real; los datos son no realistas cuando no se pueden presentar como tal en la situación real.

Aquí nos interesa matizar, respecto a investigaciones anteriores, entre las categorías que son auténticas porque surgen de los resultados de la investigación previa del rasgo, y las categorías que son realistas, es decir son coherentes con la realidad pero no hay evidencias de que surjan directamente de la investigación del rasgo.

Por lo tanto, definiremos aquí como problemas auténticos aquellos que presentan las tres categorías -evento, datos y preguntas- como auténticas, codificándolos como (2, 2, 2). Mientras indicaremos

como realistas los problemas que tengan al menos una categoría codificada como realista, y ninguno no realista, entonces (≥1, ≥1, ≥1), con al menos un elemento =1.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se presentan dos de los problemas y se explica cómo se ha realizado el análisis. Cabe aclarar que, en algunos casos, se presentan varios conjuntos de datos (o de relaciones entre ellos), algunos de los cuales surgen directamente de la situación del rasgo, mientras otros son proporcionados sin ser explícitamente relacionado con la investigación del rasgo, en estos casos se asignará la valoración más baja.

El problema presentado en la Figura 1 describe distintas formas de tomar mate, una bebida típica de algunos países latinoamericanos como Uruguay y Argentina, y plantea cuál de ellas permite optimizar la cantidad de yerba que se usa. En la investigación del rasgo se habían relatado distintas técnicas de preparación del mate puestas en acto por personas cercanas.

Analizando los datos del problema y poniéndolo en relación con la anterior investigación del rasgo, se destaca cómo el evento es auténtico. ya que la preparación del mate en la realidad se presenta tal como indicada en el problema, se identifican las distintas formas en las que se suele utilizar la yerba para consumir mate por parte de familiares y amigos, con lo cual los datos son auténticos. Por otro lado, se evidencia que esta discusión se ha generado, efectivamente, dentro de grupos de amigos para averiguar quién optimiza más el uso de la yerba, por lo tanto, la pregunta también se considera auténtica. Por tanto, la codificación de este problema es (2, 2, 2).

Figura 1. Problema sobre el Mate

Tarea propuesta

Tres hermanos van a tomar mate al parque, cada uno con su respectivo grupo de amigos. Sabemos que la preparación del mate depende de los gustos de cada persona.

- Uno de los hermanos, Pedro, toma mate con el siguiente criterio: utiliza 70 gramos de yerba para armar el mate que le dura un termo de 1 litro de agua. Pedro no respeta la montañita, así que en caso de comenzar un segundo termo, arma un mate nuevo.
- Camila, la segunda hermana, tiene un mate igual al de Pedro, es decir, utiliza la misma cantidad de yerba inicial. Ella sostiene que solamente le rinde 3/4 litros de agua antes de lavarse. Sin embargo, las veces que consume más de 3/4 litros de agua no necesita armar un mate nuevo sino que va agregando 10 gramos de yerba nueva cada 1/4 litros de agua, con el objetivo de mantener el gusto. Sostiene que así se mantiene amargo hasta los 2 litros.
- Ana, la tercera hermana, tiene un mate más grande. Para armarlo, debe iniciarlo con 90 gramos de yerba. Respeta la montañita, y va dando vuelta el mate a medida que se va lavando. Sabe que, de este modo, puede tomar hasta 2 litros sin reponer la yerba.

¿Qué hermano es más económico con el uso de yerba si los tres grupos de amigos consumen 1 litro de agua? ¿Y si consumen 2?
¿Qué crees que pasará con la economicidad de la yerba a lo largo de la toma de varios termos de mate? ¿Cuál crees que es la razón?

Esta tarea tiene dos objetivos: por un lado, promover el debate en el aula a través del trabajo con los contenidos matemáticos que fueron mencionados anteriormente y, por otro, la aplicación concreta y real a la costumbre de tomar mate, en particular, reconocer las ventajas del uso de la montañita dando vuelta el mate para gastar menos cantidad de yerba si se van a tomar varios litros de agua (tal como se observaría en la resolución para la tercera hermana Ana).

Fuente: datos de la investigación

El problema presentado en la Figura 2 describe la receta de la tortilla y plantea una comida colectiva en la cual se quieren preparar tortillas para una celebración multitudinaria. La investigación del rasgo había rescatado las proporciones de ingredientes que se emplean en la receta por tradición familiar pero no se presentan informaciones sobre celebraciones multitudinarias.

En este caso, el evento es realista pero no auténtico ya que, tal como se ha explicado en la presentación del problema, si bien es plausible, no hay indicios de que exista tal oferta de tortilla en una comida multitudinaria.

La pregunta del problema gira alrededor de la cantidad de ingredientes necesarios para la cantidad de personas que se espera participen en la celebración, tratándose de una pregunta realista pero no auténtica, ya que no se muestran evidencias de que ocurra de verdad.

Se presentan dos conjuntos de datos, los relacionados con la receta de una tortilla para un determinado número de personas, que han sido rescatados de la investigación del rasgo y por lo tanto se consideran auténticos, y otros conjuntos de datos relacionados con la hipotética comida colectiva y la posible oferta por parte de un supermercado de una parte de los ingredientes, siendo este conjunto de datos realista, pero no auténtico. Por tanto, la codificación de este problema sería (1, 1, 1).

Figura 2. Problema sobre la Tortilla colectiva

Para celebrar la trigésima edición de la comida en la calle, que tiene lugar el día del Bollo, el ayuntamiento de Avilés ha decidido convidar a los miles de avilesinos que llenan el casco histórico tortilla de patatas. Se estima que tendrán que dar de comer a unas 11 000 personas. Teniendo en cuenta que:

- *Para 6 personas se necesitan unos 1200 g de patatas, 180 g de cebolla y 9 huevos.*
- *Una cadena de supermercados va a aportar 1125 decenas de huevos.*

¿Cuántas personas podrían comer tortilla (sin variar la receta) con esa cantidad de huevos? ¿Será necesario que el ayuntamiento compre más? Indica la cantidad de kgs de patatas y cebollas necesarios para dar de comer a las 11 000 personas.

Fuente: datos de la investigación

En la siguiente Tabla 1 se presentan los resultados del análisis de los seis problemas relacionados con el sentido algebraico.

Tabla 1. Matriz de análisis de datos

Problemas	Análisis		
	Evento	Pregunta	Datos
Mate	2	2	2
Trono	2	2	1
Panela	2	1	2
Tortilla española	1	1	2
Aguja	2	2	2
Tortilla colectiva	1	1	1

Fuente: elaboración propia

Cabe destacar la ausencia de preguntas y datos no realistas, posiblemente debido a la insistencia en una investigación previa del rasgo que permita llegar a un conocimiento sólido de lo que sucede en la situación real elegida como contexto del problema. Por otro lado, y utilizando la clasificación de Maaß (2010), se han identificado dos problemas auténticos (el del mate y el de la aguja) y cuatro problemas realistas. En línea con otros autores (Maaß, 2010; Palm, 2008), se ha observado que la presencia de datos y preguntas realistas pero no auténticos suele responder a la necesidad de abordar contenidos matemáticos que se ajusten a las exigencias de los currículos, ya que la instrucción era crear un problema matemático *escolar*, esto es, para usar en el aula.

Asimismo, estos resultados alentadores están en línea con los obtenidos en investigaciones previas (Chavarría-Arroyo y Albanese, 2023b), respecto a la construcción de problemas a partir de investigaciones sobre rasgos culturales.

REFLEXIONES FINALES

En este estudio se ha planteado la pregunta de si el ejercicio de poner en diálogo saberes involucrados en las prácticas cotidianas con las matemáticas escolares favorece la construcción de problemas auténticos. Los resultados arrojan alentadores resultados respecto a la construcción de problemas auténticos y realistas contextualizados en los rasgos previamente investigados por los participantes. Cabe también destacar que cuando se solicitan problemas contextualizados en rasgos culturales los contenidos algebraicos, en particular de proporcionalidad, son entre los más abordados.

El estudio presenta limitaciones debido a la acotada muestra de datos, así como al reducido número de categorías consideradas para el análisis. Por tanto, se consideran necesarias ulteriores investigaciones y reflexiones respecto a cuál es la formación necesaria para la construcción de problemas contextualizados en situaciones reales por parte del profesorado y al rol que una perspectiva etnomatemática puede aportar en este proceso.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-I00, Ministerio de Ciencias e Innovación de España.

Referencias

Albanese, V., Adamuz-Povedano, N. y Bracho-López, R. (2017). The Evolution of Ethnomathematics: Two Theoretical Views and Two Approaches to Education. En M. Rosa, L. Shirley, M. E. Gavarrete y W. V. Alangui (Eds.), *Ethnomathematics and its Diverse Approaches for Mathematics Education* (pp. 307–328). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-59220-6

Barton, B. (1996). Making sense of ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1), 201–233.

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M. y Cárdenas, J. A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201–210). SEIEM.

Canals, M. A. (2013). *Vivir las matemáticas*. Octaedro-Rosa Sensat.

Chamoso, J. M. y Cáceres, M. J. (2018). Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *13*(17), 83–94.

Chamoso, J. M., Vicente, S., Manchado, E. y Múñez, D. (2014). Los Problemas de Matemáticas Escolares de Primaria, ¿son solo Problemas para el aula? *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *9*(12), 261–279.

Chavarría-Arroyo, G. y Albanese, V. (2021). Problemas matemáticos en el caso de un currículo: Análisis con base en el contexto y en la contextualización. *AIEM - Avances de Investigación En Educación Matemática*, *19*, 39–54. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i19.359

Chavarría-Arroyo, G. y Albanese, V. (2023a). Contextualized Mathematical Problems: Perspective of Teachers about Problem Posing. *Education Sciences*, *13*(1), 1–16. https://doi.org/10.3390/educsci13010006

Chavarría-Arroyo, G. y Albanese, V. (2023b). Problemas matemáticos elaborados por docentes: un análisis desde la contextualización culturalmente significativa. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, *37*(76), 731–753. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a17

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática - Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. Limusa.

Fuentes, C. (2019). Articulación de la etnomatemática y las propuestas decoloniales: Una invitación a la re-existencia. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *12*(3), 59–82. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274063987005

Gavarrete, M. E. (2015). Etnomatemáticas indígenas y formación docente: una experiencia en Costa Rica a través del modelo MOCEMEI. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 136–176. http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/article/view/206

Gerdes, P. (1998). On culture and mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(1), 33–53.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En B. D'Amore y M. I. Fandiño (Eds.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249–269). Universidad de la Sabana.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *19*(3), 311–334. https://doi.org/10.12802/relime.13.1933

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285–311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Moreno, A. y Cruz, M. F. (2023). Acercamiento a la idea de situación de aprendizaje matemático en el currículo de matemáticas. *Epsilon*, *115*, 7–19.

Naresh, N. (2015). The role of a critical ethnomathematics curriculum in transforming and empowering learners. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 450–471.

Nuñez, J. M. y Font, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica. *Revista de Educación*, *306*, 293–314. http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=19061

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Comares.

Orey, D. C. y Rosa, M. (2021). Ethnomodelling as a glocalization process of mathematical practices through cultural dynamism. *The Mathematics Enthusiast*, *18*(3), 439–468. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1533

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 37–58. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3

Parra-Sánchez, A. (2017). Ethnomathematical Barters. En H. Straehler-Pohl, N. Bohlmaer y A. Pais (Eds.), *The Disorder of Mathematics Education* (pp. 89–106). Springer, Cham.

Parra, A. y Valero, P. (2021). Propio as a decolonising tool for mathematics education. En A. Andersson y R. Barwell (Eds.), *Applying critical mathematics education* (pp. 71–99). Brill.

Ramos, A. y Font, V. (2006). Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e La Sua Didattica*, *20*(4), 535–556.

Vicente, S. y Manchado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, *11*(4), 253–279. https://doi.org/10.30827/pna.v11i4.6242

INVESTIGACIÓN DE DISEÑO PARA REFINAR UN TALLER FORMATIVO SOBRE PRÁCTICAS DE NOMBRAR Y EXPLICAR EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD[2]

Design-based research for refining a developmental workshop on practices of naming and explaining in probability teaching

Alfonso, J. M. y Planas, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Presentamos una investigación de diseño para mejorar un taller formativo que apoye a profesores de matemáticas de secundaria en su comprensión del potencial didáctico de prácticas matemáticas-lingüísticas de nombrar y explicar en la enseñanza de la probabilidad. Hemos diseñado e implementado los materiales de una primera iteración, centrados en la introducción de dos retos comunes en el aprendizaje escolar de la probabilidad (i.e. sesgos de equiprobabilidad y de representatividad) seguida de tareas profesionales relativas a prácticas de nombrar y explicar para ayudar a los alumnos a superar estos retos. El análisis de datos de la discusión conjunta en el taller está sirviendo para refinar los materiales y su gestión en una segunda iteración. Si bien las tareas promovieron la participación de los profesores en discusiones sobre nombrar y explicar probabilidad, apenas se mencionaron relaciones con retos en el aprendizaje de los alumnos.

Palabras clave: *investigación de diseño, talleres con profesores de matemáticas, prácticas matemáticas-lingüísticas de nombrar y explicar, enseñanza de la probabilidad en secundaria.*

Abstract

We present a design-based research aimed at improving a developmental workshop that supports secondary-school mathematics teachers in their understanding of the didactical potential of mathematical-linguistic practices of naming and explaining in probability teaching. We have designed and implemented the materials of a first iteration, addressing the introduction of two common challenges in the school learning of probability (i.e. equiprobability and representativity biases) followed by professional tasks relative to naming and explaining for supporting students in overcoming these challenges. The analysis of data from the workshop group discussion is being used as a means for refining the materials and their implementation towards a second iteration. Whereas the tasks enacted the teachers' participation in the discussion of practices of naming and explaining probability, relationships with student learning challenges were hardly mentioned.

Keywords: *design-based research, workshops with mathematics teachers, mathematical-linguistic practices of naming and explaining, secondary-school probability teaching*

INTRODUCCIÓN

El problema de formar al profesorado de matemáticas de secundaria se ha estudiado desde distintas perspectivas, algunas de las cuales se sitúan en la tradición epistemológica sociocultural y destacan la importancia de trabajar los modos de comunicación matemática en las prácticas de enseñanza. Neumayer De Piper et al. (2021) y Adler et al. (2023), por ejemplo, han desarrollado sendas propuestas formativas centradas en el trabajo de los modos lingüístico –oral y escrito– y visual de la

[2] Estudio realizado con fondos del Proyecto PID2019-104964GB-I00, MICIU, y GIPEAM, 2021SGR-00159, AGAUR.

Alfonso, J. M. y Planas, N. (2024). Investigación de diseño para refinar un taller formativo sobre prácticas de nombrar y explicar en la enseñanza de la probabilidad. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVII (pp. 105-112). SEIEM.

comunicación matemática en la enseñanza, mientras que Smith y Stein (2018) se han centrado en el trabajo del modo lingüístico oral en las discusiones matemáticas con los alumnos en clase.

En 2020 iniciamos un proyecto de investigación y formación del profesorado sobre cómo promover prácticas lingüísticas de nombrar y explicar en la enseñanza de contenidos matemáticos orientadas a facilitar un aprendizaje con comprensión de estos contenidos en los alumnos. Hemos diseñado, desarrollado y analizado talleres con profesores de matemáticas centrados en contenidos del currículo de secundaria (e.g., ángulos en Rave-Agudelo y Planas, 2022; ecuaciones lineales, fracciones e isometrías planas en Planas y Alfonso, 2023) y un módulo de enseñanza con futuras maestras (relación entre área y volumen en Caro y Planas, 2021). En este texto, presentamos el proceso para el diseño y desarrollo de un taller sobre nombrar y explicar en la enseñanza de la probabilidad. Con base en datos de una primera iteración del taller y de acuerdo con el objetivo de crear un entorno formativo que facilite discusiones sobre el potencial didáctico de vocabulario y explicaciones matemáticamente relevantes en la enseñanza de la probabilidad, planteamos dos preguntas: (1) ¿Cómo el taller ha promovido que los profesores reflexionen sobre las prácticas de nombrar y explicar en la enseñanza de la probabilidad? (2) ¿Cómo el taller ha promovido que los profesores relacionen estas prácticas con retos específicos de los alumnos en el aprendizaje de la probabilidad?

MARCO TEÓRICO

En el proyecto y en esta investigación, la noción de práctica es básica, entendida como un conjunto de actividades con significado en una cierta cultura y orientadas a determinados fines sociales. Las prácticas matemáticas-lingüísticas en la enseñanza son actividades que movilizan conocimientos matemáticos y recursos de una o más lenguas, por lo que adquieren significado en el contexto de cultura de la matemática escolar, con fines de facilitación del aprendizaje. Estas prácticas se insertan en prácticas comunicativas más amplias y se articulan con prácticas pedagógicas, entre otras. Hay pocos estudios sobre las prácticas matemáticas-lingüísticas de nombrar y de explicar en la enseñanza, a pesar de ser las que sostienen otras prácticas lingüísticas como las de definir y argumentar matemáticamente. Por otra parte, tampoco abundan los estudios sobre el trabajo en torno a nombrar y explicar con el profesorado de matemáticas (Adler et al., 2023).

Prácticas matemáticas-lingüísticas de nombrar y explicar

Las prácticas matemáticas-lingüísticas de nombrar son más que utilizar vocabulario. Nombrar interactúa con lo que nombramos, de modo que los nombres o expresiones que utilizamos para referirnos a un objeto o actividad contribuyen a la comunicación de significado. La forma de nombrar $x=5$, por ejemplo, y lo que luego hacemos con este nombre en relación con otros nombres y los objetos que representan, es un mediador de significado. Nombrar $x=5$ como ecuación, ecuación lineal o solución, entre otros nombres con sentido en el registro matemático escolar en lengua castellana, tiene un impacto distinto en los procesos de construcción de significado. En la enseñanza, un objeto o actividad se caracterizan por presentarse y discutirse mediante una diversidad de nombres y significados que responden a distintas versiones de la pregunta '¿Qué es esto?' (Halliday, 1978; Planas y Alfonso, 2023). Describir no es más que una secuencia de nombres que aluden a características de un mismo objeto o actividad. Ahora bien, la función de nombrar es referencial y descriptiva, no es explicativa. 'Ecuación' moviliza y delimita significados en la cultura de la matemática escolar, además de contribuir a fijar la atención en lo que se nombra y sus significados.

Incluso ciñéndonos al modo lingüístico, lo que se entiende por una explicación matemática sigue siendo motivo de debate en el área (Weber et al., 2008). En nuestra investigación, las prácticas matemáticas-lingüísticas de explicar movilizan enunciados, con formas de mayor o menor complejidad gramatical, y conocimientos matemáticos que responden a distintas versiones de la pregunta '¿Por qué ocurre esto?' (Halliday, 1978; Planas y Alfonso, 2023). Así, explicar se refiere a movilizar recursos lingüísticos y, en particular nombres, para ofrecer relaciones que se dan entre significados matemáticos. Una explicación sería decir que $x=5$ y $3x=15$ son ecuaciones equivalentes

porque comparten solución. También sería una explicación decir que $x=5$ y $3x=15$ son la misma ecuación, porque se puede partir de una y realizar operaciones sobre ella hasta llegar a la otra. En el primer ejemplo, la equivalencia de ecuaciones se relaciona con el conjunto de soluciones de cada ecuación. En el segundo ejemplo, la equivalencia de ecuaciones se relaciona con los principios de transformación de una ecuación. Lingüísticamente, las expresiones 'ecuaciones equivalentes' o 'la misma ecuación' son nombres con función referencial que admiten distintas explicaciones, cada una de ellas generadoras de relaciones entre significados.

Talleres formativos con profesores sobre la enseñanza de contenidos matemáticos

Batanero et al. (2004) identificaron varias de las razones por las cuales la enseñanza de la probabilidad resulta difícil para los profesores de matemáticas y argumentaron la necesidad de apoyar aprendizajes profesionales al respecto. Un instrumento para el aprendizaje profesional del profesorado son los talleres formativos, en particular para aprender aspectos de la enseñanza de contenidos matemáticos específicos. Holm Knudtzon (2019) realizó y analizó dos talleres con dos grupos de profesores sobre la enseñanza de la probabilidad, en 2010 y 2016. Los talleres iban acompañados de materiales con contenidos que el formador presentaba y con tareas para la reflexión que se iniciaban con la resolución de un problema, e.g., "¿Cuál es la probabilidad de sacar un caramelo rojo y uno amarillo de una bolsa con dos caramelos rojos y dos amarillos?" (p. 3). Tras la resolución del problema por escrito e individualmente, se pedía a los profesores del taller que, en pequeños grupos o en parejas, discutieran y propusieran tres maneras de abordar el trabajo del problema en el aula, que respectivamente contribuyeran a promover razonamientos experimentales, combinatorios y probabilísticos. Aunque la participación en cada taller solo ocupó una tarde, esta autora documentó aprendizajes en los dos grupos de profesores acerca de la importancia de seleccionar problemas de probabilidad cuya resolución con los alumnos admita razonamientos experimentales, combinatorios y probabilísticos.

El Proyecto MARBLE –Mathematics in Australian Reform-Based Learning Environments– (Watson et al., 2012) también puso en marcha talleres formativos con grupos de profesores acerca de la enseñanza de la probabilidad y de otros contenidos matemáticos (e.g., numeración, razonamiento proporcional, medida). MARBLE fue un proyecto de investigación y de desarrollo profesional con acciones puntuales mediante talleres y una acción sostenida durante tres años con un grupo estable de profesores de matemáticas. Con los recursos de los que se disponía se plantearon talleres, en distintas escuelas de primaria y de secundaria, para que una mayor cantidad de profesores de matemáticas pudiera participar en discusiones sobre la enseñanza de contenidos matemáticos en un contexto de reforma curricular con especial énfasis en aspectos de la comunicación matemática. Un resultado del Proyecto, recogido con datos de una encuesta, fue que los profesores que habían participado en un taller dijeron haber aprendido estrategias de enseñanza útiles para sus clases y estar dispuestos a participar en más talleres formativos sobre otros contenidos del currículum.

PARTICIPANTES Y MÉTODOS

Seis profesores de matemáticas (P1 a P6) en centros de secundaria participaron en la primera iteración del taller en mayo de 2023. Cinco de estos profesores eran licenciados en matemáticas, mientras que otro era ingeniero. Los años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas variaban entre 4 y 10 años. Los materiales escritos del taller consistieron en tarjetas de presentación de los sesgos de equiprobabilidad y representatividad y tareas profesionales. El primer autor actuó de formador (F). Antes de entregar los materiales, empezó introduciendo la dinámica y el propósito del taller. Luego presentó tareas matemáticas para trabajar la probabilidad en la etapa de secundaria obligatoria. Las tareas iban acompañadas de preguntas relativas a prácticas lingüísticas de nombrar y explicar matemáticamente relevantes en aulas donde hubiera alumnos con razonamientos sesgados de equiprobabilidad y de representatividad. La Tabla 1 muestra una tarea profesional.

Tabla 1. Ejemplo de tarea profesional en el taller

A. Una caja contiene 2 bolas negras, 2 blancas y 2 azules. Se cogen 4 bolas de una en una al azar. Cada vez que se coge una bola, se anota el color y se devuelve a la caja. Si las primeras tres son negras, ¿de qué color es menos probable que sea la cuarta? a. Blanca b. Azul c. Negra d. Todos los colores son igual de probables Un estudiante responde que la opción correcta es la c.	
¿Cómo le ayudarías a entender que no es así?	¿Qué expresiones y explicaciones utilizarías?
B. Una ruleta está dividida en cinco áreas iguales numeradas del 1 al 5. ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable cuando giramos la ruleta tres veces? a. 2, 1, 5 en este orden b. 2, 1, 5 en cualquier orden c. 1, 1, 5 en cualquier orden d. a, b y c son igual de probables Un estudiante responde que la opción correcta es la d.	
¿Cómo le ayudarías a entender que no es así?	¿Qué expresiones y explicaciones utilizarías?

La Tabla 2 muestra una de las tarjetas informativas sobre los sesgos para favorecer la interpretación y la toma de decisiones en las tareas profesionales. Cada tarjeta contenía una definición sencilla del sesgo respectivo y una respuesta a una tarea matemática guiada por un razonamiento sesgado.

Tabla 2. Ejemplo de tarjeta sobre el sesgo de equiprobabilidad

Definición	Sesgo de equiprobabilidad
Tendencia a pensar los resultados posibles de un experimento como resultados con igual probabilidad	
Información	
Una urna contiene cuatro bolas negras y una blanca. En una extracción, ¿qué es más probable? a. Sacar una bola negra b. Sacar una bola blanca c. Sacar bola negra y sacar bola blanca es igual de probable El sesgo de equiprobabilidad puede conducir a la opción c porque los dos resultados son posibles	

En la última tarea profesional, se pedía a los profesores que valoraran las respuestas escritas de otros participantes a una tarea anterior, como paso previo a la discusión final en grupo. Se les preguntaba, por ejemplo, si podían completar alguna de las explicaciones matemáticas elaboradas por otros participantes, o si había expresiones en las que ellos no habían pensado y que les parecían útiles para aulas de matemáticas con alumnos en proceso de aprendizaje de la probabilidad. Durante la parte final del taller, el formador invitó a compartir comentarios en torno a lo que se había trabajado. Para promover la discusión y orientarla hacia las prácticas de nombrar y explicar en la enseñanza de la probabilidad, algunas de las preguntas fueron las siguientes: ¿Qué uso hacéis en clase de la palabra equiprobable? ¿Ha surgido la diferencia entre posible y probable en vuestras respuestas? Cuando decís que utilizáis lenguaje simple para explicar y que os entiendan, ¿qué queréis decir?

Para responder a nuestra primera pregunta (¿Cómo el taller ha promovido que los profesores reflexionen sobre las prácticas de nombrar y explicar en la enseñanza de la probabilidad?), transcribimos la discusión conjunta en la parte final del taller y nos familiarizamos con los datos leyendo varias veces la transcripción. Luego buscamos los momentos en los cuales los profesores se referían a prácticas de nombrar y/o explicar en la enseñanza de la probabilidad. Tras identificar estos momentos en la transcripción, buscamos evidencias de si estas prácticas de enseñanza se comentaban

en relación con los sesgos de equiprobabilidad y representatividad introducidos en el taller o bien en relación con otros retos en el aprendizaje de la probabilidad. De este modo, pudimos responder a nuestra segunda pregunta (¿Cómo el taller ha promovido que los profesores relacionen estas prácticas con retos específicos de los alumnos en el aprendizaje de la probabilidad?). En todo este proceso, aplicamos métodos cualitativos de análisis deductivo del contenido (Harwood y Garry, 2003) para "ver", en los datos de la transcripción, menciones a: (i) vocabulario y prácticas de nombrar, (ii) explicaciones y prácticas de explicar (iii) dificultades y sesgos en el razonamiento de los alumnos en situaciones de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Los contenidos identificados sobre nombrar y explicar y sobre relaciones con el sesgo de equiprobabilidad, el de representatividad u otro fueron validados por los dos autores en reuniones dedicadas a compartir los resultados del análisis que cada uno había obtenido independientemente y a su triangulación.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

La primera iteración del taller ha promovido que los profesores identifiquen, interpreten y propongan prácticas de nombrar y explicar en la enseñanza de la probabilidad, como ocurrió con los profesores participantes en los talleres sobre ecuaciones lineales, fracciones e isometrías planas (Planas y Alfonso, 2023). En esta sección, primero ilustramos las discusiones en torno a la expresión 'incierto' y a la explicación de teoremas de probabilidad. El tercer resultado se refiere a la ausencia de relaciones entre estas prácticas y los sesgos de equiprobabilidad y representatividad en la discusión final.

Prácticas de nombrar: 'Incierto' en la enseñanza de la probabilidad

Una de las tareas profesionales partía de una tarea habitual en la introducción de contenidos de probabilidad. Se proporcionaron expresiones, de una lista que abarcaba distintas probabilidades, y se pidió a los profesores que asignaran un valor numérico a cada expresión dentro del intervalo [0, 1], con 0 ya asignado a 'imposible' y 1 a 'seguro'. Del total de 12, dos de las expresiones eran 'cierto' e 'incierto'. Para evitar la sugerencia de un orden, las expresiones de la lista se colocaron en filas y columnas. Esta tarea profesional, con las preguntas en torno a la tarea matemática y su resolución, se diseñó para orientar la atención de los profesores hacia identificar, interpretar y proponer prácticas de nombrar probabilidades con expresiones lingüísticas no numéricas, incluyendo expresiones que no estuvieran en la lista y que surgieran en el taller. Se esperaba generar discusión sobre las ventajas comunicativas, pero también las ambigüedades, de asociar expresiones verbales con numéricas. Además, se esperaba hacer notar que la lengua no permite asignar expresiones únicas a valores del intervalo (0, 1) como 0.5, 0.01 y 0.99. Ni siquiera para el 0 o el 1, las expresiones son únicas si se utilizan expresiones fuera del registro matemático, ya que la lengua permite nombrar el 0 como 'imposible' y 'totalmente imposible' y el 1 como 'seguro' o 'absolutamente seguro'.

Los profesores notaron que nombres como 'posible' tienen la ventaja de comunicar una probabilidad distinta de 0 en situaciones en las que no se tiene información para fijar un valor numérico, mientras que nombres como 'incierto' o 'bastante probable' son ambiguos. Al preguntarles cuáles de las expresiones utilizaban en sus clases, cuáles no y por qué, sin embargo, los profesores no justificaron sus prácticas de nombrar con respecto a los efectos potenciales en el desarrollo del razonamiento probabilístico de sus alumnos. Reproducimos un fragmento de la transcripción que se corresponde con el momento en el cual la atención de los profesores se centró en la variabilidad del significado de 'incierto' y en la distinción entre las nociones de probabilidad y de incertidumbre.

P3: Cierto, incierto, tampoco lo suelo usar mucho.

P4: Sí, yo tampoco.

P2: Incertidumbre.

P3: Algo es cierto y es verdad o mentira, ¿no?

P4: Justo.

P3: En probabilidad, no sé por dónde va.

P5: Con incierto me ha pasado a mí. Cuando algo es incierto es que no lo sabes, ¿no? No sabes… ¿qué es? ¿Poco probable, muy probable?

P2: Se queda en duda.

P5: ¿Dónde lo sitúas?

P4: Parece... un poco los alumnos pueden tomarlo como lo contrario a cierto, y en realidad no es eso porque... o no lo sé, pero vamos, algo incierto, un futuro incierto no significa que no se vaya a cumplir, significa que no sabes lo que va a ocurrir.

P2: Justamente con ese ejemplo del futuro puede ser que lo entiendan mejor que con un ejemplo más de probabilidad. Si tú les dices tu futuro es incierto, yo creo que ellos mismos son capaces de pensar, vale, no sé qué va a pasar en mi futuro, entonces no puedo decir ni que no ni que sí. No sé lo que va a pasar. A lo mejor justo ese es el ejemplo que hay que usar con ellos.

Prácticas de explicar: Teoremas en la enseñanza de la probabilidad

En las distintas tareas profesionales se buscó centrar la atención en las prácticas de explicar durante la enseñanza de la probabilidad (ver, e.g., la tarea de la Tabla 1). Los profesores, durante la discusión final del taller, empezaron refiriéndose a prácticas de explicar en la enseñanza de otros contenidos matemáticos. Cuando el formador recondujo la conversación al cabo de unos minutos, surgió la cuestión de la explicación de teoremas como el de Bayes y el de la probabilidad total. Los profesores notaron que dar explicaciones mediante razonamientos a modo de diagramas de árbol es una práctica distinta a dar o aplicar técnicamente las fórmulas algebraicas, que por sí solas no explican los teoremas. Los razonamientos basados en diagramas de árbol con los alumnos se consideraron como prácticas de explicación de los teoremas, esto es, explicaciones acerca de por qué son como son las fórmulas y cuál es el papel de sus distintos elementos. Los profesores del taller vieron estas prácticas de explicar como maneras de facilitar el aprendizaje con comprensión de los teoremas. No se mencionaron tablas de doble entrada o de contingencia.

Es importante que los profesores notaran no solo que nombres del registro matemático de la probabilidad tienen que explicarse durante la enseñanza, sino que también las fórmulas algebraicas tienen que explicarse. Las fórmulas sin explicaciones asociadas se relacionaron con las dificultades de los alumnos con la lectura y comprensión de la lengua simbólica de los teoremas de la probabilidad para la representación de conceptos a su vez complejos (e.g., nombraron el concepto ‘probabilidad de la intersección’). Así, las prácticas de explicar fórmulas se relacionaron con las prácticas de explicar conceptos representados mediante símbolos matemáticos en las fórmulas. La atención a las dificultades de los alumnos estuvo, por tanto, presente en la discusión final, pero no se volvió sobre los sesgos de equiprobabilidad y de representatividad introducidos por el formador. Reproducimos un fragmento de la transcripción que se corresponde con el momento en el cual la atención de los profesores se centró en la explicación del Teorema de Bayes y del Teorema de la probabilidad total, así como en la distinción entre explicar teoremas y dar fórmulas.

F: Algún ejemplo de alguna palabra o concepto que explicáis en clase.

P2: Es que como probabilidad se lo explico a los mayores y siempre acabamos igual...

P6: A mí me pasa con el Teorema de Bayes, el Teorema de la probabilidad total. Como empieces con la fórmula, has terminado, las fórmulas son infumables. Entonces tú empiezas con las ramas y empiezas con los caminos, y este camino lleva por aquí, y este camino lleva por acá. Y arriba qué te pone, la probabilidad de la intersección, y arriba qué te pone, la probabilidad de… Pues venga, intersección, camino, estoy mirando por aquí. Intersección asociada al camino. La probabilidad de abajo, qué camino me lleva a la probabilidad de que sea chico, que sea chica,

> venga, cuántos caminos hay y tal. Cuando ya has practicado varios ejercicios con eso, entonces dices, a ver esto qué tiene que ver con la fórmula. Entonces ya muestras la fórmula y dices, a ver aquí pone la multiplicación de esto por esto. Ah, pues yo creo que hemos hecho justo aquí con este camino. Y esto que aparece aquí abajo creo que es lo que hemos hecho aquí abajo. Entonces al final ellos asocian.

Interpretaciones amplias de las prácticas de nombrar y explicar

El taller se diseñó para promover que los participantes identificaran, interpretaran y propusieran prácticas de nombrar y explicar que pudieran favorecer el aprendizaje con comprensión de la probabilidad en los alumnos, y en particular, la superación de sesgos de equiprobabilidad y representatividad en los razonamientos. Se esperaba que, a lo largo del taller, emergieran prácticas lingüísticas de nombrar y explicar que los profesores consideraran matemáticamente relevantes para facilitar el aprendizaje de los alumnos en relación con los sesgos. Por un lado, las tarjetas en el material del taller incorporaban definición de los sesgos y ejemplos de posibles respuestas de alumnos suponiendo que razonaran de forma errónea debido a alguno de estos sesgos. Por otro lado, las tareas profesionales incluían vocabulario y explicaciones matemáticas en situaciones hipotéticas de aula en torno a la resolución de tareas donde estos sesgos podían mostrarse. El formador también había comentado los sesgos de equiprobabilidad y de representatividad, pero se pensó que no era conveniente insistir demasiado en las dificultades de los alumnos para no crear un discurso general del taller que fuera penalizador con respecto a la enseñanza y sus efectos en el aprendizaje.

El resultado fue una interpretación amplia de las prácticas de nombrar y explicar en la enseñanza, desligada del impacto en la superación de sesgos comunes en el aprendizaje de la probabilidad (Batanero et al., 2004). El análisis de las respuestas de los profesores, guiadas por las preguntas en las tareas profesionales, indica interpretaciones de posibles dificultades en la enseñanza de la probabilidad relativas al uso de palabras como ‘incierto’, o a la ausencia de explicaciones de teoremas. No obstante, en la discusión final, los sesgos no se relacionaron con prácticas específicas de nombrar y explicar. No hubo, por ejemplo, propuestas de nombres para referirse a la no equiprobabilidad (e.g., dado trucado, moneda desequilibrada), ni de explicaciones para referirse a experimentos no equiprobables (e.g., si se lanza un dado pocas veces es difícil saber si está trucado porque hay mucha variabilidad). Como las futuras maestras en Caro y Planas (2021), los profesores del presente estudio se implicaron en la discusión y elaboración de prácticas matemáticas-lingüísticas, pero no decidieron maneras de nombrar y explicar relevantes para la superación de sesgos en el aprendizaje.

CONCLUSIONES

A pesar de que un taller de una tarde tiene necesariamente un impacto limitado en el aprendizaje profesional de cualquier grupo de profesores (Holm Knudtzon, 2019; Watson et al., 2012), las discusiones documentadas señalan la atención a prácticas específicas de nombrar y explicar, tal como también se observó en Planas y Alfonso (2023). Si bien los profesores del taller reflexionaron sobre prácticas de nombrar y explicar relevantes en la enseñanza de la probabilidad, apenas asociaron estas prácticas con su potencial como apoyo a la superación de sesgos de equiprobabilidad y representatividad en los razonamientos de los alumnos. Esto sugiere que no se logró, en la línea de Smith y Stein (2018), vincular suficientemente la reflexión sobre la enseñanza con el aprendizaje.

En la segunda iteración del taller, estamos considerando cambios en el diseño de las tareas profesionales y en el momento de introducción de los sesgos. Vemos importante presentar los sesgos al inicio del taller, dedicándoles más tiempo, e incluir sistemáticamente preguntas a lo largo de las tareas profesionales donde se pida a los profesores que interpreten las prácticas de nombrar y explicar que hayan identificado o propuesto con respecto a su función potencial en el apoyo a la superación de los sesgos en los razonamientos de los alumnos. Cada una de las tareas profesionales, habrá de incluir preguntas orientadas a la identificación de prácticas de nombrar y explicar, preguntas orientadas a la interpretación de la relevancia de estas prácticas con respecto a los sesgos y preguntas

orientadas a la toma de decisiones que lleven a propuestas de nombrar y explicar que completen las prácticas identificadas y cuya relevancia se relacione con los sesgos introducidos. Otro cambio que estamos considerando es la gestión más pautada de la discusión final, con preguntas que requieran la revisión de las respuestas a cada tarea. La discusión final ocupará más tiempo porque se facilitará la reflexión conjunta de las respuestas de identificación de prácticas de nombrar y explicar y de interpretación y toma de decisiones en relación con los sesgos introducidos al inicio del taller. Como hemos mostrado en este texto, los profesores de la primera iteración del taller compartieron reflexiones importantes acerca del papel de nombrar y explicar en la enseñanza de la probabilidad. No obstante, creemos que los futuros talleres que se diseñen e implementen estarán mejor enfocados si los materiales y la discusión guían más explícitamente la asociación entre las prácticas matemáticas-lingüísticas en la enseñanza y el aprendizaje matemático de los alumnos.

Referencias

Adler, J., Mwadzaangati, L. y Takker, S. (2023). From defining as assertion to defining as explaining meaning: teachers' learning through theory-informed lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 12*(1), 38–51. https://doi.org/10.1108/IJLLS-02-2022-0029

Batanero, C., Godino J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*(19), 1–15. https://doi.org/10.1080/10691898.2004.11910715

Caro, A. y Planas, N. (2021). Estudio exploratorio con futuras maestras sobre lenguas matemáticas para enseñar la relación entre área y volumen. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *19*, 117–131. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i19.361

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. Edward Arnold.

Harwood T. G. y Garry T. (2003). An overview of content analysis. *The Marketing Review, 3*, 479–498. https://doi.org/10.1362/146934703771910080

Holm Knudtzon, S. (2019). Pitfalls and surprises in probability: The battle against counterintuition. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1–8). Utrecht University.

Neumayer De Piper, J., Louie, J., Nikula, J., Buffington, P., Tierney-Fife, P. y Driscoll, M. (2021). Promoting teacher self-efficacy for supporting English learners in mathematics: Effects of the Visual Access to Mathematics professional development. *ZDM–Mathematics Education*, *53*, 489–502. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01227-4

Planas, N. y Alfonso, J. M. (2023). Secondary-school teachers' noticing of aspects of mathematics teaching talk in the context of one-day workshops. *The Journal of Mathematical Behavior, 71*, 101084. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101084

Rave-Agudelo, J. G. y Planas, N. (2022). Concepto de ángulo: Una revisión de literatura para diseñar tareas profesionales. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 479–487). SEIEM.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (2018). 5 practices: Professional development guide. En M. S. Smith y M. K. Stein (Eds.), *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (pp. 80–94). The National Council of Teachers of Mathematics.

Watson, J., Beswick, K. y Brown, N. (2012). *Educational research and professional learning in changing times: The MARBLE experience*. Springer.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. y Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 247–261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9114-8

CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE FUNCIONES POR NIÑOS DE EDUCACIÓN INFANTIL

Construction of function tables by pre-school children

Anglada, L[a]., Pinto, E[b]., Cañadas, M. C[c]. y Fuentes, S.[c]

[a] Centro Universitario María Inmaculada de Antequera, [b]Universidad de O'Higgins, [c]Universidad de Granada

Resumen

Los objetivos de esta investigación son identificar las características de las tablas de funciones construidas de forma libre por niños de 5 años al trabajar con una tarea que involucra la función f(n)=n+2; y describir las maneras en que los niños identifican las relaciones entre valores de las variables en dichas tablas. Esta tarea se realizó con una máquina de funciones. Analizamos aquí parte de la información recogida en una entrevista individual semiestructurada a ocho niños de 5 años, realizada después de cuatro sesiones con el grupo clase. Los resultados evidencian que todos los niños hicieron representaciones con características propias de las tablas de funciones convencionales. Además, en tres de ellas mostraron evidencias de que habían identificado una relación entre las variables.

Palabras clave: *educación infantil, pensamiento funcional, tablas, tablas de funciones, representación.*

Abstract

The aims of this research are to identify the characteristics of the function tables freely constructed by 5-year-old children when working with a task involving the function f(n)=n+2; and to describe the ways in which children identify the relationships between variable values in such tables. This task was performed with a function machine. We analyze here part of the information collected in a semi-structured individual interview with eight 5-year-old children, carried out after four sessions with the class group. The results evidenced that all the children made with typical characteristics of conventional function tables. Moreover, in three of them they showed evidence that the children had identified a relationship between the variables.

Keywords: *early childhood education, function tables, functional thinking, tables, representation.*

INTRODUCCIÓN

Esta investigación se enmarca en una propuesta curricular que tiene por objetivo promover el pensamiento algebraico desde edades tempranas (*early algebra*). Esta propuesta se centra en guiar a los niños, mediante el uso de diferentes representaciones, en sus maneras de pensar y actuar con objetos, relaciones y estructuras matemáticas (Blanton et al., 2011). Específicamente, nos situamos en una de las aproximaciones al pensamiento algebraico: el pensamiento funcional. Esta aproximación se considera adecuada para niños de educación infantil (e.g., Carraher et al., 2008). El pensamiento funcional tiene a la función como elemento matemático central e involucra la interacción con problemas contextualizados que implican una relación de dependencia entre cantidades que covarían (Blanton y Kaput, 2011). Por tanto, nuestro interés está puesto en profundizar sobre cómo niños abordan problemas que involucran funciones.

Nos centramos en una de las prácticas algebraicas que proponen Blanton et al. (2011): la representación. Al trabajar con funciones, los niños pueden usar diversas representaciones para

Anglada, L., Pinto, E., Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2024). Construcción de tablas de funciones por niños de educación infantil. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 113-120). SEIEM.

expresar las relaciones entre variables, tales como dibujos, tablas, símbolos, materiales manipulativos, entre otros (Carraher et al., 2008). En este estudio, nos enfocamos en las tablas de funciones, las cuales permiten organizar la relación entre dos o más variables, lo que las hace adecuadas para generalizar la relación entre las variables (Schliemann, 2001). Las tablas de funciones son herramientas que apoyan el desarrollo temprano del pensamiento funcional (Tanisli, 2021) y su construcción implica identificar las variables y la relación que se establece entre ellas (Martí et al., 2010), entre otras nociones. Por tanto, tener información sobre la forma en que los niños construyen las tablas de funciones puede arrojar luz sobre la relación que identifican entre las variables.

Investigaciones previas han reportado cómo niños de 5 años crean tablas como un medio para organizar datos que covarían al resolver problemas que involucran funciones lineales como: f(n)=n, f(n)=n+2, f(n)=n–1 y f(n)=2n (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Brizuela et al., 2021). En particular, en Anglada et al. (2023a) presentamos un estudio sobre las estructuras identificadas por 24 niños de 5 años al trabajar con un problema contextualizado que involucraba las funciones f(n)=n+1 y f(n)=n+2, en el contexto de una sesión de clase. En ese trabajo nos aproximamos a la construcción de tablas de funciones a través de entrevistas semiestructuradas realizadas a ocho de estos niños. Con este trabajo contribuimos a esta línea de estudio.

En general, estudios previos concuerdan que las tablas son representaciones importantes para los niños desde los primeros años de escolaridad, pero la mayor parte de la investigación sobre esto se ha realizado en educación primaria. Por tanto, como destacan Brizuela et al (2021), se hace necesario entender las formas en que los niños usan las tablas de funciones en las primeras edades. En este trabajo nos proponemos dos objetivos: (a) identificar las características de las tablas de funciones construidas de forma libre por niños de 5 años al trabajar con una tarea que involucra la función f(n)=n+2; y (b) describir las maneras en que los niños identifican las relaciones entre valores de las variables en dichas tablas.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

Las representaciones son herramientas que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, y con las que los individuos abordan e interactúan con el conocimiento matemático (Rico, 2009). La representación, junto a la generalización son prácticas algebraicas clave en edades tempranas. Sea esta representación mediante palabras, tablas, gráficos, imágenes o través de la notación algebraica (simbólica) (Brizuela, 2023)

Consideramos que el pensamiento funcional es un proceso cognitivo centrado en "la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211). Esto implica establecer relaciones entre cantidades que covarían, realizar generalizaciones de estas relaciones y expresarlas mediante diferentes representaciones. Específicamente, en este trabajo nos centramos en la representación tabular.

De manera general, las tablas son organizaciones gráficas donde la información se organiza según un doble eje que ordena y sistematiza datos relacionados entre sí (Campbell-Kelly et al., 2003). Las tablas de funciones permiten representar la relación entre dos cantidades que covarían y en ellas podemos distinguir: (a) disposición de los valores en filas y columnas, respetando un orden, de manera que los valores correspondientes a la variable independiente van a la izquierda y los de la dependiente a la derecha (Martí et al., 2010); (b) encabezado de las columnas que indique a qué variable se hace referencia en cada una (Brizuela y Alvarado, 2010) y (c) separación mediante una línea u otro elemento de los valores de la variable independiente y la dependiente (Estrella, 2014). Diferentes autores han informado sobre las tablas de funciones construidas por niños de 5 años. Blanton y Kaput (2004) abordaron cómo niños de esta edad resolvieron un problema contextualizado que involucraba las funciones f(n)=n y f(n)=2n. Los autores describieron que los niños, con ayuda, utilizaron una tabla para organizar datos y establecieron relaciones entre variables. Por otra parte, Mulligan et al. (2008) y Anglada et al. (2023b) observaron que niños de 5 años utilizaron

representaciones con características propias de las tablas de funciones convencionales para representar la relación entre dos variables, de forma espontánea. Brizuela et al. (2021) estudiaron la manera en que un niño usó tablas al resolver problemas que involucraban las funciones f(n)=n, f(n)=n+1 y f(n)=2n. Estas tablas sirvieron al niño de andamiaje para la identificación de relaciones funcionales y de la generalización. Estos autores concluyeron que los niños pueden usar tablas como herramientas de organización y no solo "mirarlas", sino también "mirar a través" de las tablas para desarrollar la comprensión de las relaciones funcionales.

En este trabajo usamos una máquina de funciones. Estas comenzaron a usarse con la idea de cambio, para realizar operaciones aritméticas y para realizar transformaciones de atributos cualitativos por autores como Dienes (1971) y Canals (1989). Willoughby (1997), con esta idea de cambio, utilizó estas máquinas para trabajar funciones en educación infantil y las llamó máquinas de funciones.

MÉTODO

Desarrollamos una investigación cualitativa de tipo exploratorio, ya que el uso de tablas funcionales en educación infantil es escaso; y descriptiva porque especifica características de un grupo (niños de cinco años) que se somete a análisis (Hernández et al., 2010).

Contexto y participantes

Esta investigación forma parte de una investigación más amplia que se realizó en una clase de 24 niños de 5 años. Los niños pertenecían a un centro educativo público del sur de España, seleccionado intencionalmente, según la disposición del centro y de los docentes. En el aula implementamos cuatro sesiones de trabajo con el grupo clase completo, seguidas de una entrevista individual semiestructurada realizada a ocho niños, con la finalidad de profundizar en sus ideas. Nos centramos aquí en las respuestas de estos ocho niños, a los que nos referimos como Ai, con i = 1, ,..., 8).

Seleccionamos a los ocho niños con ayuda de la maestra, considerando que durante las sesiones se hubieran mostrado participativos y con capacidad de expresarse. Estos niños conocían los números hasta el 10. Los niños conocían algunas letras, pero no tenían desarrolladas habilidades de lecto-escritura. Antes de comenzar la investigación, los niños no habían trabajado con tareas que involucraran relaciones entre variables, ni habían utilizado tablas de funciones. Esto permitió observar cómo se aproximaban a la construcción de estas tablas sin instrucción.

Recogida de información

Nos centramos en la información que provenía de entrevistas individuales semiestructuradas. Para el diseño de la entrevista, consideramos el desarrollo de las sesiones y los aportes provenientes de la literatura (e.g., Warren et al., 2013; Willoughby, 1997). Trabajamos con máquinas de funciones, en las cuales entraba un número de elementos y salía otro. En las sesiones trabajamos con las funciones f(n)=n+1 y f(n)=n+2 (para más detalles, ver Anglada et al., 2023a). Esta última función la retomamos en la entrevista. En la Tabla 1 resumimos el trabajo de las sesiones.

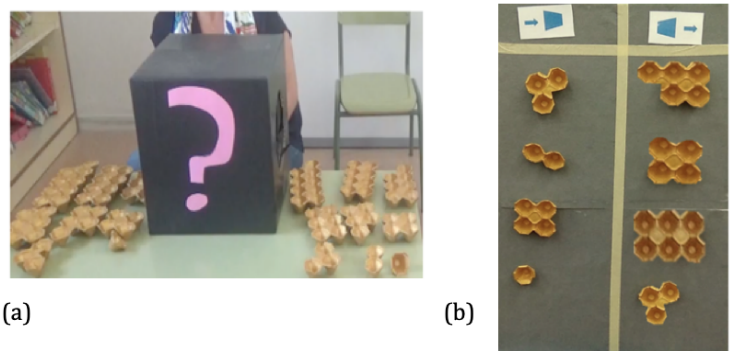
Tabla 1. Organización de sesiones

Sesiones	Descripción
1	Toma de contacto y familiarización con el contexto. Cambio cualitativo: Tamaño
2	Función f(n)=n+1. Máquina de funciones y tabla la tabla manipulativa
3	Función f(n)=n+2. Máquina de funciones y tabla la tabla manipulativa. Representación libre en una hoja en blanco.
4	Función f(n)=n+2. Máquina de funciones y tabla manipulativa. Traducción de las representaciones en papel de la sesión anterior la tabla manipulativa.

Varios miembros del equipo de investigación (www.pensamientoalgebraico.es) implementamos las entrevistas, que fueron videograbadas y duraron aproximadamente 30 minutos cada una. La máquina

de funciones presentada en la entrevista involucró piedras lunares que entraban (variable independiente) y otras que salían (variable dependiente). A la vez que se usaba la máquina de funciones (Figura 1a) trabajamos con una tabla hecha con material manipulativo (Figura 1b). Nos referimos a ella como tabla manipulativa.

Figura 1. Máquina de funciones (a) y tabla usada (b)



(a) (b)

Durante la entrevista, seguimos la misma dinámica que en las sesiones con el grupo clase. Los niños exploraron el funcionamiento de la máquina de funciones a partir de ciertos casos particulares y, con la mediación de la investigadora, los niños fueron registrando las parejas de valores en una tabla manipulativa. Para construir la tabla utilizamos un material inspirado en las tarjetas de Herbinière Lebert (ver Figura 1b). En concreto, consistía en hueveras recortadas para los números del 1 al 10 a las que llamamos cápsulas (J. M. Belmonte, comunicación personal, 28 de octubre de 2022). Este material permitía subitizar cantidades, por lo que podían cuantificar también de ese modo. Con esto evitamos, en lo posible, errores derivados del conteo, minimizando así otros elementos que pudieran interferir en el desarrollo del pensamiento funcional. Los niños representaban parejas de valores para la función $f(n)=n+2$ en la tabla usando este material. La investigadora daba al niño un número de piedras, este buscaba la cápsula correspondiente a esa cantidad. Luego, el niño pegaba la cápsula en la tabla y metía las piedras en la máquina de funciones. En el interior de la máquina se producía una transformación del número de piedras. Salían las piedras, que recogía el niño. Este buscaba la cápsula correspondiente a las piedras que salían y la pegaba en la tabla. Usamos la máquina y la tabla desde la primera sesión, por lo que los niños estaban familiarizados con la dinámica al llegar a la entrevista.

A continuación, pretendíamos pasar de lo trabajando con la máquina de funciones y la tabla manipulativa, a una representación escrita. Para ello, les dijimos lo siguiente: “la tabla hay que llevársela para otros niños, ¿qué podemos hacer para acordarnos el próximo día de lo que hemos hecho?, ¿podrías explicarlo en este papel?”. Les dimos una hoja en blanco y un rotulador para lo explicaran de forma libre. Aunque nuestro propósito era que pasaran de la representación tabular manipulativa a una representación tabular escrita, no les dimos ninguna instrucción. Tenían a la vista la tabla que habían completado en la tabla manipulativa. Después, en otra hoja, representaron una tabla con la guía de la investigadora. En este trabajo nos centramos en el estudio de las primeras representaciones, las construidas sin intervención de la entrevistadora.

Análisis de datos

Analizamos las respuestas escritas de los ocho niños para identificar las características de las tablas de funciones construidas (objetivo 1) y describir cómo los niños identifican las relaciones entre valores de las variables (segundo objetivo 2). Realizamos un análisis inductivo a las producciones escritas y empleamos dos categorías analíticas que recogemos en la Tabla 2.

Tabla 2. Categorías de análisis

Categoría	Subcategorías	Descripción
Estructura tabular	Incluye nombre o símbolo para las variables (Brizuela y Alvarado, 2010)	No incluye ningún símbolo o palabra que indique a qué variable nos referimos en cada caso.
		Incluye algún símbolo o palabra que indique a qué variable nos referimos en cada caso y lo repite para cada pareja.
		Incluye algún símbolo o palabra que indique a qué variable nos referimos en cada caso y lo pone encabezando una columna.
	Respeta el orden de las variables (Martí et al., 2010)	No podemos identificarlo
		No respeta el orden de los valores de la variable de manera que los valores correspondientes a la variable independiente van a la izquierda y los de la dependiente a la derecha.
		Respeta el orden de los valores de las variables.
	Separa los valores de las variables (Estrella, 2014)	No utiliza ninguna línea u otro elemento que separe los valores de la variable independiente y los de la variable dependiente
		Utiliza alguna línea u otro elemento que separe los valores de la variable independiente y los de la variable dependiente
	Representa las parejas de valores en filas (Martí et al., 2010)	No representa cada par de valores en una fila diferente
		Representa cada par de valores en una fila diferente
Relaciones entre valores de las variables		No establece relaciones entre parejas de valores
		Representa solo las parejas que están representadas en la tabla manipulativa
		Representa otros pares de valores distintos a los que aparecen en la tabla manipulativa, pero sin seguir ninguna regularidad
		Representa otros pares de valores distintos a los que aparecen en la tabla manipulativa, siguiendo una regularidad

Analizamos la producción escrita de cada niño considerando simultáneamente las dos categorías. El proceso de codificación fue realizado por la primera autora y para garantizar la confiabilidad de las codificaciones, se realizó primero un proceso de calibración entre los primeros dos autores que incluyó sesiones conjuntas de discusión de las categorías y sus alcances.

RESULTADOS

Atendiendo a las categorías de análisis definidas, presentamos los resultados relativos a la estructura tabular y a las relaciones entre los valores de las variables en las producciones de los niños.

Características de las tablas de funciones

En la Tabla 3 resumimos los resultados correspondientes a la estructura tabular.

En general, observamos que en todas las producciones hay algunas características de la estructura convencional de una tabla de funciones. Respecto a la inclusión de un símbolo para las variables, A3, A4 y A5 utilizaron un símbolo para cada variable. Destacamos que A3 puso un símbolo en cada variable en todas las parejas (ver Figura 2a). El símbolo elegido en todos los casos anteriores, coincidía con el que utilizamos en la tabla manipulativa. En el caso de A3, aunque usó el mismo para ambas variables, verbalmente decía lo que significaba cada uno. En cuanto al orden en que aparecen las variables, tenemos evidencia de que seis niños respetaron el orden de las variables, la variable

independiente a la izquierda y la variable dependiente a la derecha. En los otros dos casos no disponemos de evidencias. Uno de ellos es A8, ya que no apreciamos una regularidad. Tampoco A6, ya que este completó, por un lado, la primera columna; y a continuación, la segunda, sin establecer relación entre las variables. En relación con la separación de los valores de la variable, salvo A1, A5 y A7, todos separaron el valor correspondiente a la variable independiente del correspondiente a la variable dependiente mediante un signo o una la línea vertical. No obstante, aunque no usaron ningún símbolo para separar los valores, estos tres niños dejaron un espacio entre ellos. Salvo A6 y A8, todos representaron las parejas de valores situándolas por filas, unas debajo de otras.

Tabla 3. Comprensión de la estructura tabular

Niños	Incluye símbolo para las variables	Respeta el orden de las variables	Separa los valores de las variables	Representa las parejas de valores en filas
A1	No	Sí	No	Sí
A2	No	Sí	Sí	Sí
A3	Sí*	Sí	Sí	Sí
A4	Sí	Sí	Sí	Sí
A5	No	Sí	No	Sí
A6	Sí	NI	Sí	No
A7	No	Sí	No	Sí
A8	No	NI	Sí	No

Nota. NI = no se puede identificar, *= pone símbolo para las variables en cada pareja

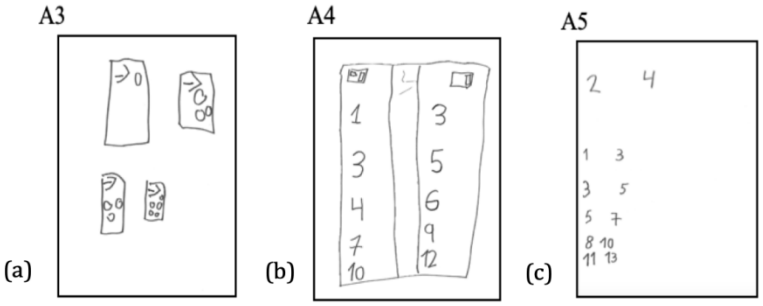
Relaciones entre variables identificadas

En cuanto a la identificación de relaciones entre valores de las variables, la mayoría copiaron los valores que aparecían en la tabla manipulativa, salvo A1, A4 y A5 que representaron parejas de valores distintos a los que aparecían en la tabla manipulativa. A1, A4 y A5 apenas miraron la tabla manipulativa mientras escribían y siguieron una regularidad, lo que muestra que identificaban una relación entre las variables. En A6 no apreciamos relación alguna, ya que primero representó cantidades en una columna y luego en la otra, copiando las que aparecían en la tabla manipulativa. A8 representó valores distintos de los que aparecían en la tabla manipulativa, pero sin seguir ninguna regularidad. En la Figura 2b se aprecia la producción de A4, que tiene la estructura de una tabla de funciones y en la que se evidencia que ha identificado una relación entre las variables. La producción de A5 la podemos observar en la Figura 2c. Si bien no ha incluido encabezado ni las líneas de la tabla, tiene similitud con una tabla de funciones y se aprecia que ha identificado una relación entre las variables. En ambos casos la relación identificada corresponde a la función $f(n)= n+2$.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Hemos analizado las producciones escritas de cada niño. Por un lado, nos enfocamos en identificar en sus respuestas evidencias de uso de la estructura tabular y, por otro, en evidenciar una relación entre las variables en sus representaciones. Observamos que en las producciones de los ocho niños hay características propias de las tablas de funciones, destacando que dos de ellas corresponden prácticamente a lo que consideramos como tal. Respecto a la identificación de relaciones entre los valores de las variables, tres de ellos mostraron evidencias de regularidades al representar pares de valores. Además, algunos niños, mientras trabajaban en su representación, expresaron: “entran dos y salen 4”, “si entra una salen tres”, de forma espontánea. Esto muestra que distinguían las variables, llamándoles “las que entran” a la variable independiente y “las que salen” a la variable dependiente.

Figura 2. Ejemplos de producciones de los niños



Comparando con nuestros antecedentes, en Brizuela et al. (2021) el estudiante construyó la tabla de derecha a izquierda. En nuestro caso, salvo A6 y A8, presentaron los valores de la variable de la forma convencional, de izquierda a derecha. Podemos conjeturar que el contexto los ayudó, ya que en la máquina de funciones entraba un número de piedras por la izquierda (variable independiente) y salían por la derecha (variable dependiente). El hecho de que la mayoría no incluyera nombre o símbolo para las variables difiere de nuestros antecedentes en los que los estudiantes necesitaban poner nombre a las variables (e. g., Brizuela et al., 2021). Esto puede ser consecuencia del proceso manipulativo, ya que al trabajar con la máquina de funciones y la tabla manipulativa tenían claro a qué correspondía cada valor de la variable sin necesidad de especificarlo.

Después de construir tablas manipulativas, esperábamos encontrar en las producciones escritas de los niños evidencias de una identificación de la relación entre las variables y que estas representaciones presentaran características propias de las tablas de funciones. Aunque los resultados se han aproximado bastante a lo esperado, debemos ser cautos a la hora de llegar a conclusiones puesto que la muestra sobre la que hemos realizado el estudio es pequeña. Además, sería bueno trabajar con otro tipo de tareas, involucrando otros contextos y funciones.

Este trabajo contribuye al conocimiento sobre el proceso de construcción de tablas de los niños y cómo las utilizan para expresar relaciones entre variables. En este trabajo los niños construyeron tablas para expresar relaciones entre variables. En futuros trabajos sería interesante seguir indagando sobre esto y estudiar el uso de las tablas para descubrir relaciones entre variables.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, y el proyecto Fondecyt Iniciación 11220843, financiado por ANID (Chile).

Referencias

Anglada, L., Cañadas, M. C., Fuentes, S. y Brizuela, B. M. (2023a). Estructuras en un contexto funcional con niños de 5 años. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 131-138). SEIEM.

Anglada, M. L., Fuentes, S., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2023b). Representación de relaciones funcionales por niños de cinco años. Una aproximación a las tablas funcionales. En P. Scott, Y. Morales y Á. Ruiz (Eds.). *Educación Matemática en las Américas 2023. Investigación. Memorias XVI CIAEM* (Vol. 10, pp. 384-390). CIAEM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5.* NCTM

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Brizuela, B. M. (2023). Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á., A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.)*, Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 43-57). SEIEM

Brizuela, B. M. y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE*, *21*, 37-43

Brizuela B. M., Blanton M. y Kim Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R. E. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults*. Springer. https://doi.org/ 10.1007/978 -3-030-69657-3_8

Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood y R. Robson, E. (Eds.). (2003). *The history of mathematical tables: From sumer to spreadsheets*. Oxford University Press.

Canals, M. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola*. I. Parvulari. Eumo.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3-22.

Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores.(Vol. 1): Operadores aditivos*. Teide.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: Una revisión de literatura*. Actualidades Investigativas en Educación, 14*(2), 449-478.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación, 5° edici*ón. McGraw Hill.

Martí, E., Pérez, E. y de la Cerda, C. (2010). Alfabetización gráfica. La apropiación de las tablas como instrumentos cognitivos. *Contextos, 9*(10), 65-78

Mulligan, J, Mitchelmore, M., Kemp, C., Marston, J. y Highfield, K. (2008). Encouraging mathematical thinking through pattern and structure: An intervention in the first year of schooling. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(1), 10-15.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática [On the notions of representation and understanding notions in mathematics education research]. *PNA, 4*(1), 1-14. http://hdl.handle.net/11162/79435

Schliemann A. D., Carraher D. W. y Brizuela B. M. (2001). When tables become function tables. En M.V.D. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 145-152).

Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students*. The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84

Willoughby, S. S. (1997). Functions from Kindergarten through Sixth Grade. *Teaching Children Mathematics, 3*(6), 314-318.

INICIACIÓN AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL A TRAVÉS DE TAREAS DESCONECTADAS SOBRE PATRONES

Initiation to computational thinking through unplugging tasks about patterns

Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N. y Sánchez-Cruzado, C.

Universidad de Málaga

Resumen

Dada la reciente introducción del pensamiento computacional en el currículo del área de matemáticas en España, es importante plantear propuestas posibles de implementar en el aula. En esta investigación nuestro objetivo es analizar las respuestas de un grupo de estudiantes de cuarto de primaria (9 a 10 años) cuando resuelven una tarea que involucra patrones de repetición, empleando un recurso manipulativo que simula una máquina de Turing. A partir de un análisis microgenético del proceso de solución de diversas tareas, se describe cómo desarrollan destrezas propias del pensamiento computacional en tareas desconectadas. Los resultados contribuyen a la comprensión de destrezas tales como organización de datos, la creación de algoritmos, testeo y depuración y generalización. Los algoritmos que se propusieron tienen distintos grados de eficiencia y se muestra cómo los gestos tienen un rol importante en la comunicación de las soluciones.

Palabras clave: *educación primaria, patrones, pensamiento computacional, tareas desconectadas, máquinas de Turing.*

Abstract

Given the recent introduction of computational thinking in the Spanish mathematics curriculum, it is essential to set out possible proposals which could be brought to classes. Our goal in this investigation is to analize the answers of a group of students in fourth grade in primary school (9 to 10 years old) when they solve tasks that involve patterns of repetition, using a manipulative resource which simulates a Turing machine. We describe how they develop computational thinking skills in unplugged tasks based on a microgenetic analysis. The results contribute to comprehending abilities such as data organization, algorithm creation, testing, debugging and generalization. The proposed algorithms have various degrees of efficiency and showcase the importance of gestures when communicating the solutions.

Keywords: *primary education, patterns, computational thinking, unplugged tasks, Turing machines.*

INTRODUCCIÓN

La legislación educativa española actual (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022), incorpora en el currículo del área de matemáticas el pensamiento computacional, en concreto, dentro de los saberes algebraicos. En la legislación autonómica se contempla la competencia específica "Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar situaciones de la vida cotidiana." (Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional, 2023, p. 139). El desarrollo del pensamiento computacional es clave para el futuro del estudiantado, ya que está directamente vinculado con la resolución de problemas y la formulación de procedimientos (Brennan y Resnick, 2012).

El diseño de propuestas didácticas basadas en el currículo es un aspecto fundamental en la labor docente, y la inclusión del pensamiento computacional en el mismo es un reto para el profesorado

Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N. y Sánchez-Cruzado, C. (2024). Iniciación al pensamiento computacional a través de tareas desconectadas sobre patrones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 121-128). SEIEM.

que se auto percibe poco preparado para tal fin (Santaengracia et al., 2023). Resulta necesario contar con propuestas referentes que, mediante indicadores objetivos, garanticen la eficacia didáctica del uso de determinados recursos y materiales para el desarrollo de estas competencias. Se han encontrado numerosas iniciativas en las que se ha trabajado el pensamiento computacional utilizando ordenadores, las cuales incluyen lenguajes básicos de programación o robots (Acosta et al., 2022), pero pocas en las que se desarrollen estas destrezas mediante manipulación de elementos y materiales. Para Boaler (2020) al iniciar al alumnado al pensamiento computacional, concretamente en educación primaria, se deben implementar actividades experienciales manipulativas sin el uso del ordenador, fomentando así la reflexión y el razonamiento. De esta forma, se evitan potenciales inconvenientes como el aprendizaje de un lenguaje de programación o los posibles problemas logísticos, tales como disponibilidad de ordenadores o las dificultades en el acceso a internet, especialmente para el caso del alumnado en los niveles iniciales (Curzon, 2013). Es imprescindible utilizar lo que en inglés se denominan como *pedagogical unplugged experiences*, que traducimos como experiencias pedagógicas *desconectadas* (Kotsopoulos, 2017; Zhan et al., 2022).

La novedad de este estudio es aportar pruebas sobre la iniciación al pensamiento computacional a través de actividades sin ordenadores (experiencias desconectadas). El objetivo de esta comunicación es: analizar y describir cómo seis estudiantes, de cuarto de primaria (9-10 años), desarrollan habilidades propias del pensamiento computacional mientras construyen patrones de repetición en tareas desconectadas. Para esto utilizamos un recurso denominado *Turing Tumble,* juego de programación sin ordenadores, que promueve el pensamiento computacional a través de materiales manipulativos. En este estudio indagamos sobre cuáles son las capacidades del pensamiento computacional que se evidencian mientras resuelven las tareas y comunican sus ideas.

MARCO DE REFERENCIA

No es sencillo dar una definición consensuada de pensamiento computacional (Polanco et al., 2021). Una de las primeras definiciones fue dada por Wing (2006) en la que el pensamiento computacional implicaba resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano, basándose en los conceptos fundamentales de la ciencia de la computación.

Por otro lado, Brennan y Resnick (2012), para estudiar y evaluar el pensamiento computacional, definen tres perspectivas: una relaciona con los conceptos computacionales (secuencias, ciclos o bucles, condicionales, operadores y datos, entre otros), otra perspectiva relacionada con las prácticas computacionales (iteraciones, ensayar (testear) y depurar, reusar y remezclar, abstraer y modularizar), y finalmente perspectivas computacionales (expresar, conectar y cuestionar). Por su parte, Selby y Woolland (2014) describen el pensamiento computacional como un método de resolución de problemas que incorpora procesos de reflexión y utiliza la descomposición, los algoritmos, las abstracciones, la evaluación y el reconocimiento de patrones.

El propósito de iniciar al alumnado al pensamiento computacional sin utilizar ordenadores es introducir conceptos preliminares y fundamentales sin necesidad de conocimientos técnicos, tales como lenguaje de programación o diseño de algoritmos complejos (Kotsopoulos, 2017). También ayuda a que el estudiantado pueda disfrutar trabajando de forma colaborativa y aumente su motivación e interés (Curzon et al. 2014). De igual manera, al no usar ordenadores, se evitaría la posible brecha digital que puede existir, con lo que se atendería a todo el alumnado de manera equitativa.

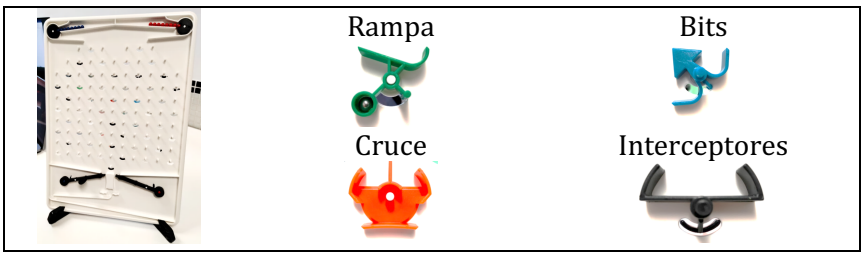
Un recurso para el desarrollo computacional serían las máquinas de Turing. Una máquina de Turing es aquella que es capaz de resolver cualquier problema por complejo que sea estableciendo un algoritmo, es decir una serie de pasos para su resolución (Roncoroni y Bailón, 2020).

Sáez y Delgado (1979) fueron pioneros simulando máquinas de Turing con materiales didácticos para ver el impacto producido en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La investigación en este campo

sigue siendo muy activa, Rodríguez et al. (2023) han llevado a cabo una experiencia con máquinas de Turing creando un recurso educativo desconectado, construido en el marco del diseño participativo. En su investigación proporciona indicios alentadores de que este tipo de recurso educativo favorece la construcción efectiva de conocimientos disciplinares de carácter abstracto.

Desde la perspectiva de la didáctica de la matemática, en esta comunicación se proponen actividades donde se desarrollen habilidades del pensamiento computacional relacionadas con la resolución de problemas, ejecutando tareas simples en lenguaje máquina (base binaria) relacionadas con la manipulación de elementos. Esto se llevó a cabo con el juego Turing Tumble (ver figura 1), juego para montar computadoras mecánicas con componentes plásticos (rampas, cruces, interceptores, bits, entre otros). Dichas piezas simulan puertas lógicas básicas y son impulsadas por pequeñas canicas de metal que ruedan por la superficie donde se insertan los componentes. Esta máquina se relaciona con la matemática través del trabajo con patrones y secuencias lógicas, el conteo, la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Figura 1. Juego *Turing Tumble*



Alsina (2020) recomienda seguir un itinerario de aprendizaje que incluya distintos contextos que ayuden a visualizar las ideas matemáticas de manera concreta a través de situaciones reales, materiales manipulativos y juegos. Basándonos en estas ideas, en esta experiencia buscamos promover el pensamiento computacional a través de juegos con dicho material manipulativo.

MARCO METODOLÓGICO

La investigación forma parte de un proyecto más amplio para promover el pensamiento computacional mediante tareas que no requieran el uso de computadoras, y desarrollar destrezas socioafectivas en la enseñanza de la matemática en Educación Primaria. Tiene un enfoque cualitativo y los datos que aquí se analizan corresponden a entrevistas semiestructuradas, que forman parte de un estudio piloto. Este estudio piloto pretende evaluar la viabilidad, claridad, comprensión y funcionalidad del protocolo de investigación. El objetivo de esta comunicación es: analizar y describir cómo seis estudiantes, de cuarto de primaria (9-10 años), desarrollan habilidades propias del pensamiento computacional mientras construyen patrones de repetición en tareas desconectadas.

Participantes y contexto

Las seis participantes fueron seleccionadas como muestra intencional según disponibilidad. Se recogió el consentimiento informado de sus progenitores para participar en la experiencia. Todas cursaban cuarto de primaria en el mismo colegio público, y aceptaron participar en la experiencia de forma positiva. Solo Alma conocía y había utilizado el juego *Turing Tumble* antes de la implementación, en un nivel muy básico. Mía tenía nociones previas de programación básica realizada en extraescolares. El resto afrontaba la experiencia sin ningún conocimiento previo. Para mantener el anonimato se han cambiado sus nombres.

Diseño de las tareas y recolección de datos

Las entrevistas semiestructuradas constaban de tres tipos de tareas: 1) tareas con la máquina de *Turing*; 2) Tareas sobre patrones de repetición con mosaicos manipulativos; 3) tareas sobre patrones numéricos en fichas de trabajo. Cada tarea tuvo una duración entre 40 y 50 minutos.

En este trabajo solo analizamos las tareas con el juego *Turing Tumble* las cuales se llevaron a cabo en dos días. El resto de las tareas nos permitió verificar que el grupo de participantes identificaba sin dificultad patrones de repetición y numéricos. Las tareas con el *Turing Tumble* se basaron en la propuesta de Boswell y Boswell (2017), creadores del material manipulativo empleado. Las elegimos para trabajar problemas conectados y de dificultad escalada (ver tabla 1). En la implementación, las seis participantes se agruparon aleatoriamente en duplas, y se les pidió que de forma colaborativa resolvieran las situaciones que algún miembro del equipo de investigación propuso de forma oral.

Tabla 1. Descripción tareas máquina de *Turing Tumble*

Tarea	**Descripción de la tarea**
Introducción a la máquina	Indagación libre para reconocer cómo funciona la máquina y cada una de las piezas que la componen.
Tarea 1	A) Se presenta un camino incompleto y se pide que coloquen tantas rampas como sea necesario para que solo caigan canicas azules. B) Tras solucionar lo antes planteado se les pregunta qué camino pueden hacer para que solo caigan canicas rojas.
Tarea 2	Modificando la solución anterior o creando una nueva, se les pide obtener un camino para que la primera canica sea roja y el resto azules.
Tarea 3	Empleando el cruce se le pide construir un camino que permita crear el patrón: rojo, azul, rojo, azul; hasta que no queden más canicas en la máquina.
Tarea 4	A) Variando el camino anterior colocando un bit al empezar, se pide modificarlo para que creen el patrón: azul, azul, rojo, azul, azul, rojo. B) Se pregunta sobre cómo puede variar su solución para que, en vez de tener el patrón anterior obtengamos un patrón de azul, azul, rojo, rojo.
Tarea 5	A) Se introduce el interceptor y se pregunta cómo completar el camino para que la primera canica azul caiga en el interceptor y no abajo del todo. B) Al completar el camino, se les pide añadir piezas para que la canica que caiga en el interceptor sea roja.

Análisis de datos

Las fuentes de información fueron las grabaciones en vídeo y sus transcripciones. Con base en estas, realizamos un análisis microgenético de la actividad de las participantes. Este análisis permite estudiar una habilidad, concepto o estrategia en un breve periodo. Además, permite detectar la variabilidad del comportamiento ante una misma tarea (Wertsch y Stone, 1978).

En primer lugar, basándonos en los trabajos de Brennan y Resnick (2012) y de Selvy y Woolard (2014), se identifican las destrezas del pensamiento computacional que las participantes evidenciaban en las tareas 1 a la 5. Luego, se seleccionan las destrezas mostradas y se describen según lo observado en los vídeos (ver tabla 2). Es importante tener en cuenta que, a la hora de categorizar, en este tipo tareas las destrezas computacionales se evidencian en manifestaciones muy elementales.

Tabla 2. Categorías de análisis de tareas máquina de Turing

Destrezas	**Descripción**
Organizar o analizar datos	Entender los elementos que conforman la situación: a) número y el color de canicas iniciales, b) patrón de la secuencia final que se quiere lograr y c) tipo y número de piezas de las que disponen.
Crear algoritmos	Conjunto de instrucciones resultantes de la ubicación de las piezas en el tablero creando una secuencia o camino que permite obtener la respuesta a lo solicitado en la tarea (patrón repetición u otro), a partir de una disposición previa de piezas o un tablero en blanco.
Testear y depurar	A través del ensayo y error observar si se logra el objetivo de la tarea y en caso de errores, los resuelven cambiando el algoritmo testeado.
Generalizar	Transferir soluciones a otros desafíos. Extender patrones sobre el funcionamiento de las piezas del tablero.

Para analizar los algoritmos en cuanto a su eficiencia y eficacia establecimos los siguientes grados: (a) alto, se propone una solución correcta con el menor número de pasos o elementos; (b) medio, se propone una solución correcta con elementos redundantes; (c) bajo, se propone una solución, pero no es la solución del problema.

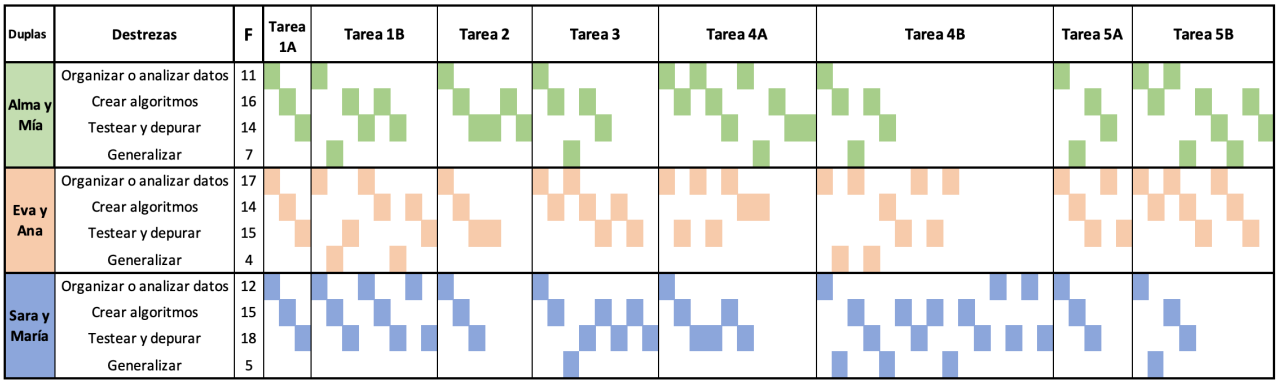
RESULTADOS

Los resultados los dividimos en dos apartados: (a) proceso de creación del algoritmo y (b) algoritmo como respuesta a la tarea planteada. En el primer apartado mostramos las destrezas evidenciadas por las participantes. En el segundo analizaremos el grado de eficiencia de los algoritmos creados.

El proceso de crear algoritmos desconectados

A las participantes se les presentó diversas tareas en las que debían crear distintos patrones de repetición con dificultad creciente. En la figura 2 se muestran en orden cronológico las destrezas evidenciadas por las duplas en cada una de las tareas. A modo general, las destrezas de organizar o analizar datos, crear algoritmos y, testear y depurar, se evidenciaron casi en igual medida en las tres duplas. Además, se observan siguiendo el orden mencionado. La destreza de generalizar se observa en menor medida, principalmente en aquellas tareas en las que en el diseño buscaba de forma intencionada transferir los resultados obtenidos en las tareas previas (tareas 1B, 4B y 5B).

Figura 2. Destrezas evidencias por cada dupla



Al *organizar o analizar los datos*, las participantes requerían información que les permitían aclarar el número y el color de canicas; el patrón de la secuencia que se pretendía lograr o el tipo y número de piezas disponible. En las tareas 4 y 5 fue necesario organizar o analizar los datos un mayor número de veces, quizás por la dificultad del patrón a construir y porque el funcionamiento de los elementos denominados bits implica una lógica más avanzada.

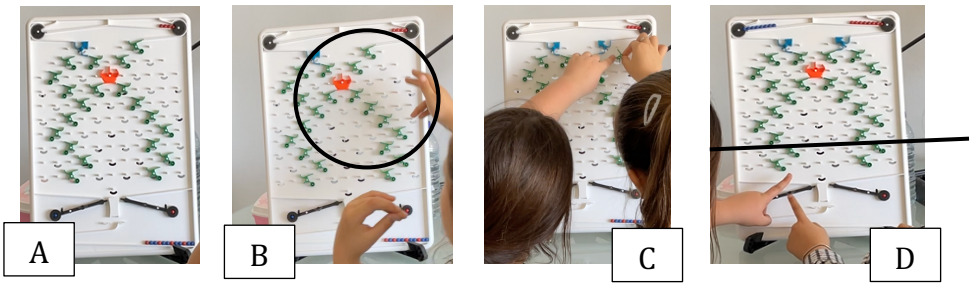
Al *crear algoritmos*, las participantes ponían las piezas directamente en el tablero, o planificaban el camino sin construirlo, verbalizando y dibujando con los dedos dónde debían ir las piezas y cuál sería la trayectoria de las canicas, para ubicar las piezas en el camino acordado como solución.

El *testear y depurar* se evidenció cuando las participantes creaban un camino y querían saber si lograban el patrón pedido. En las tareas de la figura 3, las participantes creaban un camino completo y luego probaban, pero en la tarea de introducción a la máquina a veces construían partes de caminos y probaban, continuaban el camino y volvían a testear. En caso de error, dependiendo de cual fuera, lo depuraban agregando más piezas o cambiando posición alguna que ya fuera parte de la solución.

Finalmente, la *generalización* la observamos cuando transferían las soluciones anteriores a los problemas nuevos. Por ejemplo, Eva y Ana resolvieron la tarea 4A, tal como se muestra en la figura 3A. El investigador les comentó que el siguiente desafío (4B) consistía en modificar el camino para que el patrón fuera azul, azul, rojo, rojo. Tras escuchar esto, Eva apuntó a su derecha y bajo las canicas rojas comentando: “Ah, entonces hacemos aquí el mismo camino” (figura 3B). Eva vuelve a

preguntar cuál era el patrón y la dupla completa el camino comparando el lado derecho y el izquierdo (figura 3C), así lograr un camino parcialmente simétrico (figura 3D).

Figura 3. Ejemplo de generalización en la tarea 4B



Grado de eficiencia y eficacia de los algoritmos creados

La eficiencia de los algoritmos la entendemos como la capacidad que tiene este para crear el patrón pedido en la tarea utilizando la menor cantidad de piezas posibles y de manera rápida. Por otro lado, la eficacia se refiere a la capacidad del algoritmo para resolver la tarea de manera correcta. En la figura 4 clasificamos los algoritmos creados en cada una de las tareas.

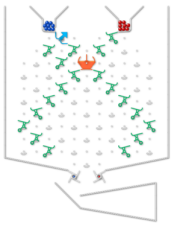
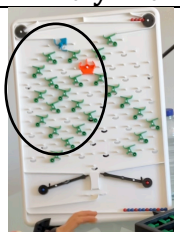
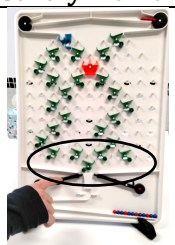
Figura 4. Tipos de algoritmos según su eficiencia y eficacia

Dupla	Tarea 1A	Tarea 1B	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4A	Tarea 4B	Tarea 5A	Tarea 5B
Alma y Mia	Alto	Alto	Alto	Alto	Medio	Alto	Alto	Alto
Eva y Ana	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
Sara y María	Alto	Medio	Alto	Medio	Medio	Medio	Alto	Alto

En la figura 4 se observa que todas las respuestas presentadas fueron eficaces, observándose solo algoritmos de grado alto y medio. Es importante señalar que lo han logrado de forma espontánea y sin realizar procesos de optimización.

Con respecto a los algoritmos con un grado medio de eficiencia, podemos observar detalles como: un uso mayor de piezas del necesario, o incluso cambios de dirección evitables. Lo que da lugar a la duplicidad de caminos y a caminos simétricos. En la figura 5 mostramos ejemplos de los algoritmos creados para la tarea 4A. En el caso de Alma y Mía a la izquierda tienen piezas innecesarias y en el caso de Sara y María, estas se observan en la parte inferior del tablero. Eva y Ana logran un algoritmo de grado algo, similar a la solución esperada.

Figura 5. Ejemplos algoritmos tarea 4A

Solución esperada	Alma y Mia	Eva y Ana	Sara y María
			

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es describir cómo, seis estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años), construyen patrones de repetición en tareas desconectadas que promueven el pensamiento computacional.

Los resultados muestran que las participantes logran desarrollar destrezas computacionales, creando algoritmos sin usar ordenadores y sin recurrir a un lenguaje de programación específico (por. ej. Programación por bloques, por código o por etiqueta). Estos hallazgos están en consonancia con los

estudios de Curzon (2013) sobre los beneficios de las actividades desconectadas. Es importante considerar que en las tareas desconectadas las destrezas computacionales desarrolladas se manifiestan a un nivel elemental, no están al mismo nivel de las especificadas para programación con ordenadores. No podemos olvidar que esta experiencia es solo una iniciación al pensamiento computacional.

Las participantes interactúan con el material manipulativo, crean algoritmos con distintos grados de eficiencia y expresan con gestos las soluciones que permiten crear los patrones de repetición solicitados. La importancia de los gestos ha sido investigada desde la perspectiva del pensamiento algebraico (Radford, 2018), destacando su importancia en la expresión de generalizaciones e ideas más sofisticadas, sin tener que recurrir a la simbología alfanumérica. En nuestro caso, con gestos se comunicaron las secuencias, los bucles, condicionales y se testearon las soluciones. Estas ideas que podrían ser abstractas se favorecieron a través de las actividades desconectadas, tal como lo mencionaba Rodríguez et al. (2023), quien encontró indicios que muestran que este tipo de recursos educativos tienen amplias posibilidades para favorecer la construcción de estos conceptos abstractos.

Esta experiencia nos ha servido para evaluar la viabilidad, claridad, comprensión y funcionalidad del protocolo de investigación, nos ha permitido rediseñar determinadas tareas y procedimientos para la intervención en otros contextos. Se ha contribuido en la descripción de una propuesta didáctica basada en el currículo español, en las que las participantes pudieron desarrollar el pensamiento computacional organizando datos, reconociendo patrones y creando algoritmos. Esto puede ser un referente para el profesorado, quienes como señalan Santaengracia et al. (2023) se perciben poco preparados para este fin. Una limitación del estudio es la muestra pequeña, pero esto permitió comparar en detalle las acciones de las participantes. Dado que se trata de un estudio piloto, buscamos que la generalización de nuestros resultados se logre al contrastar estos hallazgos con otros contextos, para esto presentamos en detalle las actividades realizadas, así seguimos los criterios de calidad de las investigaciones cualitativas.

Agradecimientos

Proyecto B1-2023_029 financiado por Plan Propio de Investigación, Transferencia y Divulgación Científica de la Universidad de Málaga. Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033. El equipo de investigación forma parte de los grupos de investigación: FQM-193, HUM-324 y SEJ-462.

Referencias

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2023). Patrones en educación infantil: vinculando pensamiento computacional y algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 115–122). SEIEM.

Alsina, A. (2020). Itinerario de enseñanza para el álgebra temprana. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(1), 5-20. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.16

Boswell, P. y Boswell, A. (2021) *Turing Tumble: Libro de Problemas.* Upper Story.

Boaler, J. (2020). *Mentalidades matemáticas: cómo liberar el potencial de los estudiantes mediante las matemáticas creativas, mensajes inspiradores y una enseñanza innovadora.* Editorial Sirio.

Brennan, K. y Resnick, M. (2012, abril). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. En AERA 2012 - *annual meeting of the American educational research association* (Vol. 1, p. 25). AERA

Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional (2023). Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *Boletín nº 104,* de 2 de junio de 2023.

Curzon, P. (2013). cs4fn and computational thinking unplugged. *WiPSE '13 Proceedings of the 8th Workshop in Primary and Secondary Computing Education*, 47–50.

Curzon, P., McOwan, P., Plant, N. y Meagher, L. (2014). Introducing teachers to computational thinking using unplugged storytelling. *WiPSCE'14 Proceedings of the 9th Workshop in Primary and Secondary Computing Education*, 89–92.

Kotsopoulos, D., Floyd, L., Khan, S., Namukasa, I. K., Somanath, S., Weber, J. y Yiu, C. (2017). A pedagogical framework for computational thinking. *Digital experiences in mathematics education,* 3, 154-171. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0031-2

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52,* de 2 de marzo de 2022, 24386–24504.

Polanco Padrón, N., Ferrer Planchart, S. y Fernández Reina, M. (2021). Aproximación a una definición de pensamiento computacional. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 24*(1), 55-76. https://doi.org/10.5944/ried.24.1.27419

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 3-25). Springer.

Rodríguez, J., Parra, G., Gili, G., Parra, S., Dolz, D. y Roumec, H. (2023). A Turing Machine at Secondary School. En P. Pesado (eds) *Computer Science – CACIC 2022. CACIC 2022. Communications in Computer and Information Science*, *1778*(1), 295-306. Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-031-34147-2_19

Roncoroni, U. y Bailón Maxi, J. (2020). Pensamiento computacional. Alfabetización digital sin computadoras. *Revista Icono 14. Revista científica de comunicación y tecnologías emergentes, 18*(2), 379–405. https://doi.org/10.7195/ri14.v18i2.1570

Román-González, M., Pérez-González, J. y Jiménez-Fernández, C. (2017). Which cognitive abilities underlie computational thinking? criterion validity of the computational thinking test. *Computers in Human Behavior,* 72, 678-691.https://doi.org/10.1016/j.chb.2016.08.047

Sáez Vacas, F. y Delgado Kloos, C. (1979). *Simulador de máquinas de Turing para fines didácticos*. [Comunicación]. 4º Congreso Informática y Automática. Madrid. Archivo digital Universidad Complutense de Madrid.

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Selby, C. y Woollard, J. (2014). *Refining an understanding of computational thinking* (pp. 1–23). University of Southampton. https://eprints.soton.ac.uk/372410/

Wertsch, J. y Stone, C. A. (1978). Microgenesis as a tool for developmental analysis. *Quaterly Newsletter Laboratory of Comparative Human Cognition*, *1*(1) 8-10.

Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Zhan, Z., He, W., Yi, X. y Ma, S. (2022). Effect of unplugged programming teaching aids on Children's computational thinking and classroom interaction: *With respect to Piaget's four stages theory. Journal of Educational Computing Research, 60*(5), 1277-1300. https://doi.org/10.1177/07356331211057143

FINALIDADES DE LAS TAREAS DE PATRONES PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA EN COSTA RICA

Purposes of the pattern tasks included in elementary textbooks in Costa Rica

Bolaños, H. y Moreno, A.

Universidad de Granada, España

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo conocer las finalidades de las tareas de patrones presentes en los libros de texto más utilizados en los niveles de cuarto y sexto de primaria en el contexto costarricense. Se trabaja desde un paradigma cualitativo para realizar un análisis de contenido aplicado a 88 tareas seleccionadas de los libros de texto. Lo anterior nos permite describir la vinculación de las metas de las tareas analizadas, con las habilidades propuestas por diferentes autores para trabajar en el tema de patrones, donde el abordaje de todas las habilidades propuestas se relaciona con la mejora del rendimiento y la adquisición de conocimientos matemáticos necesarios para los niveles superiores.

Palabras clave: *currículo, libros de texto, patrones, primaria, tareas.*

Abstract

The objective of this paper is to know the purposes of the pattern tasks present in the most used textbooks at the fourth and sixth levels of primary school in the Costa Rican context. We work from a qualitative paradigm to carry out a content analysis applied to 88 tasks selected from the textbooks. The above allows us to describe the link between the goals of the analyzed tasks and the skills proposed by different authors to work on the topic of patterns, where the approach of all the proposed skills is related to the improvement of performance and the acquisition of mathematical knowledge necessary for higher levels.

Keywords: *curriculum, patterns, primary, tasks, textbooks.*

INTRODUCCIÓN

El uso del libro de texto en primaria cada vez es más frecuente. Ruiz (2018) menciona que "los docentes diseñan las lecciones teniendo a mano los diversos textos y utilizando aquellos cuyos enfoques les resultan más convenientes" (p. 242). En el caso de Costa Rica no se cuenta con un sistema oficial que asegure que los libros de texto son pertinentes, que cumpla con criterios de calidad y congruencia con respecto al currículo oficial (Ruiz, 2018), dejando en manos del profesorado la decisión de seleccionar el que mejor se adapte a su realidad de aula.

En muchas ocasiones el libro de texto juega un rol importante en la planificación de la lección de matemática, este podría verse como una teoría curricular que lleva la organización del currículo, y se adapta al contexto y sus características (Haro y Torregrosa, 2002). Además, este recurso a menudo se caracteriza por la influencia en cómo, cuándo e incluso el orden que se aprende el contenido (Otte, 1986).

Con respecto a la selección de una tarea, Aguayo-Amagada et al. (2018) resaltan la importancia de tener claridad en los objetivos que pretende alcanzar cuando planifica una tarea matemática. También estos autores manifiestan que existe una dificultad de los futuros docentes para establecer y definir la meta de una tarea matemática escolar.

Bolaños, H. y Moreno, A. (2024). Finalidades de las tareas de patrones presentes en los libros de texto de primaria en Costa Rica. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 129-136). SEIEM.

Según Moreno y Ramírez (2016) la tarea parte de conceptos y procedimientos ya aprendidos por el estudiantado y constituye un reto. En las tareas se tiene presente la actividad del alumnado en relación con el contenido y el o la docente, quien la planifica para su lección de matemáticas como instrumento de aprendizaje o evaluación.

El objetivo de la investigación es conocer las finalidades de las tareas de patrones presentes en los libros de texto más utilizados en los niveles de cuarto y sexto de primaria en el contexto costarricense. El presente trabajo tiene el interés de indagar cuáles son las metas de las tareas encontradas en el libro de texto y analizar la correspondencia con las habilidades que según expertos en el tema se deben trabajar en patrones. La selección del tema de patrones se toma en cuenta debido a la incorporación del contenido de relaciones y álgebra en los Programa de Estudio del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012).

MARCO TEÓRICO

Las y los docentes en la mayoría de los casos seleccionan las tareas existentes en los libros de texto para su planificación, rara vez con alguna modificación (Kullberg et al., 2013). Según Ruiz (2018), las tareas presentes en los libros de texto deben "ser objeto de una valoración que permita establecer su pertinencia curricular" (p. 147). Algunos de los componentes para la valoración de tareas, según este autor son los elementos curriculares como los conocimientos, contextos, habilidades y procesos. Otro elemento que se considera al seleccionar una tarea es la meta o finalidad de la tarea (Moreno y Ramírez, 2016).

Además, es importante mencionar que la tarea está bajo la influencia de las y los docentes, así como del conocimiento de la materia que posee y del conocimiento de las y los estudiantes (Sullivan et al., 2010).

Por otra parte, es importante definir el término de expectativas de aprendizaje, este se refiere a aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, habilidades, técnicas, destrezas y actitudes que se esperan de las y los estudiantes ante la tarea a desarrollar (Lupiáñez, 2010). De manera similar Moreno y Ramírez (2016) definen la meta de la tarea o finalidad como "la expectativa de aprendizaje que trabaja la tarea" (p. 245).

En vista de las similitudes en ambas definiciones, en el presente trabajo se considera una diferencia entre ambos términos, mientras que la "meta" de la tarea se define como expectativa a corto plazo, la "expectativa de aprendizaje" plantea a largo plazo. En el presente trabajo la expectativa de aprendizaje se tomará como aquellas que están dadas en los programas de estudio; mientras, que la meta de tarea se debe deducir en el enunciado de la tarea específica.

El presente trabajo se plantea en el contenido de patrones como parte del algebra temprana (Acosta et al., 2023), por lo que se hace necesario caracterizar el concepto de patrón en la educación primaria, este se aborda desde la perspectiva de "lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro et al., 2010, p. 57).

Para el presente estudio se trabajan tareas de los niveles cuarto y sexto de primaria en el contexto costarricense. Al respecto el MEP (2012) menciona que una diferencia entre ambos niveles es que en cuarto grado se propone trabajar sucesiones recursivas y sucesiones que requieren dos operaciones como la suma, resta, multiplicación o división para que cada estudiante explorare el concepto, conjeture e identifique el patrón, mientras que, en sexto grado implica mayor nivel de complejidad, donde el tipo de patrón puede incluir dos operaciones, y además se utiliza el simbolismo matemático.

Específicamente en el contexto costarricense, los programas de estudio (MEP, 2012) plantean las siguientes expectativas de aprendizaje, las cuales consideraremos para el análisis. En el caso de cuarto grado tenemos E1: Analizar patrones en sucesiones con figuras representaciones geométricas y en

tablas de números naturales menores que 1 000 000 y E2: Aplicar sucesiones y patrones para resolver problemas contextualizados.

Para el nivel de sexto grado de primaria, tenemos E1: Analizar sucesiones y patrones con números figuras y representaciones geométricas y E2: Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones. Estas expectativas deben guiar al docente en la planificación de la clase de matemática en relación con el tema de patrones.

Según Ruiz (2018) la tarea se asocia a conocimientos y habilidades precisas que se consignan para el grado escolar. Durante la etapa de primaria es importante abordar distintas habilidades. Autores como Zapatera (2018), Mason (1999) y Acosta et al., (2022) apuntan a la exploración o detección de patrones y la generalización de patrones. Así mismo Dreyfus (1991), señala que es importante identificar la propiedad común, así como generalizar a todos los términos de la secuencia y utilizar esta para obtener la regla general, que permita encontrar cualquier término de la secuencia.

Por otra parte, Castro et al., (1997), Cañadas y Castro (2006) y Pittalis et al. (2020) mencionan ciertas habilidades más específicas como extender patrones, identificar una regla, continuar una sucesión numérica, extrapolar, generalizar, obtener el término general o utilizar este para términos concretos. Lüken y Sauzet (2021) también mencionan la creación de patrones como una competencia de mayor nivel cognitivo. Estos autores afirman que las habilidades de crear patrones podrían establecer un vínculo entre el conocimiento temprano de patrones y el desempeño posterior en la matemática.

METODOLOGÍA

Tipo de investigación

La investigación se enmarca en el paradigma cualitativo. Hernández et al. (2014) mencionan que este tipo de metodología permite comprender un fenómeno complejo, además resaltan que los datos cualitativos son descripciones de situaciones o eventos de interés para la investigación.

Según Herrera (2018) el análisis de contenido es una técnica que permite la interpretación de texto. Para la presente investigación se utilizará dicha técnica para el análisis de las tareas presentes en los libros de texto de primaria.

Objeto de estudio

Para este estudio se consideró las dos series de libros de texto según Jiménez et al. (2020) más utilizadas por el profesorado de primaria en Costa Rica y estas atienden las nuevas políticas curriculares de la reforma matemática implementada en el año 2012. Las series de los libros que se utilizan son la Asociación Libros para Todos del Grupo Nación y Editorial Santillana, de donde se seleccionaron 88 tareas del área de relaciones y álgebra que se vinculan con patrones, y sucesiones de los libros de cuarto y sexto grado.

Para la toma de datos se consideraron cuatro libros de texto en total. Del grupo la Nación, proyecto Todos Juntos en cuarto se tomó en cuenta la 2da reimpresión del 2019, en sexto grado la 4ta reimpresión del 2021. En el caso de la editorial Santillana, en cuarto y sexto grado se consideró la primera impresión del 2019.

La selección de los libros se escoge de manera intencional, considerando criterios como a) atender las nuevas políticas curriculares de la reforma matemática implementada en el año 2012, b) ser editoriales de gran prestigio a nivel nacional, c) ser utilizadas por una gran mayoría de docentes.

Fuentes de información

- Revisión documental de distintos escritos que traten temas referentes a patrones en la educación primaria, y las habilidades que deben enseñarse en relación al tema de patrones. De acuerdo con Hernández-Sampieri et al. (2014) la revisión documental “implica detectar,

consultar y obtener la bibliografía (referencias) y otros materiales que sean útiles para los propósitos del estudio".

- Ficha de registro de la tarea, este instrumento se aplicó a cada tarea con el propósito de clasificar la tarea según la expectativa de aprendizaje e identificar la meta de la tarea.

Unidad de análisis

Los indicadores que se consideran para el análisis de los datos son los siguientes:

- Expectativas de aprendizaje de las tareas matemáticas presentes en los libros de texto: se considera a aquellas capacidades, competencias, conocimientos o saberes que la tarea requiere para su solución. En este caso se consideran las propuestas por el Ministerio de Educación Pública.
- Las metas de las tareas matemáticas presentes en los libros de texto: esta se refiere a la finalidad específica propuesta para dicha tarea a corto plazo (No son necesariamente excluyentes).

Para el análisis de los datos, es necesario contrastar las metas de las tareas presentes en los libros de texto con respecto a lo que señala la literatura revisada. Según la revisión de antecedentes anterior (Acosta et al., 2022; Cañadas y Castro, 2006; Luken y Sauzet, 2021; Pittalis et al., 2020; entre otros), se identifican nueve habilidades para trabajar el tema de patrones en primaria, teniendo entendido que la habilidad se basa en cómo se realiza la tarea. A continuación, se detallan: (H1) duplicar un patrón, (H2) interpolar o encontrar el elemento faltante, (H3) ampliar o continuar la secuencia siguiendo el patrón, (H4) abstraer o traducir: construir el mismo patrón con diferentes elementos, (H5) identificar el patrón, (H6) describir el patrón, (H7) crear o inventar un patrón, (H8) determinar la regla o fórmula general de una secuencia, (H9) construir una sucesión a partir de ciertos criterios.

RESULTADOS

Las tareas presentes en los libros de texto

A continuación, en la Tabla 1 se muestra la cantidad de tareas según las metas encontradas. Estas metas se logran agrupar en ocho categorías emergentes a partir de un recorrido de todas las tareas de patrones presentes en los libros de texto analizados, este resultado se obtiene al aplicar la ficha de registro de la tarea.

Tabla 1. Cantidad de tareas según las metas encontradas

Metas de la tarea	Cuarto	Sexto
M1. Identificar el patrón y completar los términos de la sucesión.	24	11
M2. Describir el patrón de la sucesión.	6	2
M3. Dada la sucesión justificar si un término dado es continuación de dicha sucesión o no.	1	0
M4. Completar la sucesión dado el criterio.	12	11
M5. Dada la sucesión escriba la notación simbólica	0	3
M6. Calcular el término o los términos de una sucesión para resolver un problema.	4	6
M7. Sumar los términos de una sucesión para resolver un problema.	3	1
M8. Construir una sucesión a partir del enunciado de un problema.	0	4
Total	50	38

Fuente: Elaboración propia

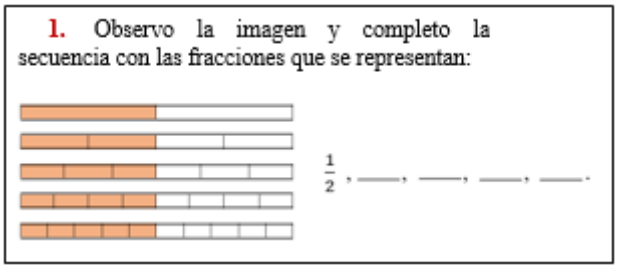
Algunas tareas analizadas son, por ejemplo, en la tarea de la figura 1 es necesario que el o la estudiante primero busque los datos faltantes situándose en la meta M6 para ello, y luego aplicar la meta M7 al sumar los términos de la sucesión y finalmente resolver la tarea planteada. En el caso de la figura 2, esta tarea requiere que se identifique y complete una sucesión lo que permite aplicar conceptos ya aprendidos en clase para resolver dicha tarea permitiendo evidenciar la meta M1.

Figura 1. Tarea de cuarto



Fuente: Editorial Santillana, 4to

Figura 2: Tarea de sexto



Fuente: Editorial Grupo la Nación, 6to

ANÁLISIS DE LAS TAREAS SEGÚN LAS HABILIDADES

En este apartado se visualiza la relación entre la meta de la tarea y las habilidades en el tema de patrones. En la Tabla 2 se presenta la relación que podría vincular las metas encontradas en las tareas de los libros de texto, con las habilidades que diversos autores señalan para la enseñanza del tema de patrones en primaria.

Respecto a las expectativas de aprendizaje se han considerado para el análisis las planteadas en programas de estudio (E1, E2) para el nivel cuarto y sexto grado. En este caso E1 responde al análisis de patrones, E2 se refiere a aplicar el tema de patrones en la resolución de problemas tanto para cuarto como sexto grado, tal como se han definido en el apartado del marco teórico.

Tabla 2. Relación entre las metas y habilidades en cada expectativa

Expectativa E1		**Expectativa E2**	
Metas de la tarea	Habilidades de patrones	Metas de la tarea	Habilidades de patrones
M1	H2, H3, H5	M6	H2, H3, H5, H8, H9
M2	H6	M7	*-No tenemos habilidades para esta meta-*
M3	H5		
M4	H3	M8	H9
M5	H5, H8		

Fuente: Elaboración propia

Según el análisis de contenido realizado se puede afirmar que las habilidades que se presentaron con mayor frecuencia son (H2) interpolar, (H3) ampliar e (H5) identificar el patrón en correspondencia con las metas de las tareas M1 y M4, descritas en el apartado anterior. Por otra parte, es interesante observar que M7 no se vincula con ninguna habilidad esto puede responder a qué esta meta es la suma de términos lo cual no implica trabajar habilidades de patrones.

Otro de los resultados que es interesante mencionar lo observamos en las habilidades H2, H3, H5, H8 Y H9 y su relación con la meta M6, siendo esta la más frecuente en la expectativa E2, se evidencia que para calcular el término de una sucesión se podría trabajarse habilidades como interpolar, ampliar,

identificar o incluso determinar la regla o construir la sucesión para darle respuesta al planteamiento del problema. Por lo anterior, podemos concluir que existen diferentes maneras de plantear un problema que conlleva a trabajar distintas habilidades que permiten abordar el tema de patrones en primaria.

También se identificó la habilidad H6 está solo se vincula con las tareas de la expectativa E1, mientras que la habilidad H9 solo se relaciona con la expectativa E2. Al respecto el MEP (2012) menciona que en sexto grado "para las sucesiones, el nivel de complejidad será mayor que el de los años anteriores" (p. 243). Lo cual nos permite suponer que (H6) describir la unidad de repetición tiene menor grado de dificultad que (H9) construir una sucesión. Esto responde a la complejidad de la tarea y está acorde a lo planteado en la propuesta de los planes de estudio.

Es importante aclarar que el MEP (2012) señala que el nivel de cuarto grado se debe centrar en habilidades para la identificación y construcción de patrones y sucesiones, mientras que en sexto en la conjetura y la comunicación de la estrategia. Este análisis de las tareas nos permite reflexionar si realmente lo que está en el libro de texto está en concordancia con los planes de estudio.

Finalmente se debe mencionar que se detectó H1, H4 y H7 como habilidades que no se evidenciaron en las tareas de cuarto y sexto de primaria. Esto se reflejó tanto en la expectativa E1 como en la E2.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos nos permiten analizar la relación entre la propuesta de las tareas presentes en los libros de texto y la propuesta del currículo. Así como brindar elementos para el análisis crítico de las tareas presente en el libro de texto de matemática, por parte del personal docente encargado de la educación primaria costarricense.

Este estudio ha permitido identificar habilidades en el tema de patrones que no se evidencian en las tareas analizadas, como por ejemplo H1 duplicar un patrón, H4 abstraer o traducir un patrón y H7 crear o inventar un patrón. Los datos de esta investigación han evidenciado una escasa presencia de tareas de patrones que cumplan con las distintas habilidades para enseñar patrones en primaria, a pesar de que existen diversos estudios que sugieren incluir estas habilidades en la educación primaria (Dreyfus, 1991; Luken y Sauzet, 2018; Rittle-Johnson et al. 2018; Pittalis et al., (2020); entre otros). Dichas habilidades, según estos autores, se relacionan con la mejora de los conocimientos matemáticos en los primeros años escolares.

Aunado a lo anterior, una posible explicación a la falta de profundidad en las tareas para la enseñanza del tema patrones en primaria, podría ser fruto de la interpretación de las expectativas E1 y E2 para los niveles de cuarto y sexto grado, que si bien es cierto son demasiado generales, los planes de estudio incluyen otros elementos que deben considerase en conjunto para su adecuada interpretación.

Además, es importante este tipo de estudio para brindarle conocimientos y herramientas al profesorado de primaria respecto al tema de patrones, y dar a conocer que habilidades son importantes para trabajar en la clase de matemáticas, específicamente en patrones. Las y los docentes de primaria deben reflexionar sobre qué elementos considerar al seleccionar el tipo de tarea presente en los libros de texto, que esté acorde a la propuesta curricular vigente, y pueda aportar al conocimiento matemático necesario para la formación posterior del estudiantado.

Ante esta situación, parece evidente que las editoriales deberían tratar los contenidos con mayor profundidad, resaltando las ideas de generalización, estructura y relaciones, desde el razonamiento algebraico (Zapatera, 2018). De esta manera, se podría abordar el tema de patrones desde el razonamiento matemático, con un enfoque de exploración de patrones, formulación de conjeturas, uso correcto del lenguaje matemático de manera oral y escrita (MEP, 2012). Sin dejar de lado las nueve habilidades que ya han sido señaladas en este estudio como fundamentales para la enseñanza de patrones a nivel escolar.

Finalmente, deseamos recordar a los lectores que este estudio se centró en la educación matemática en Costa Rica a partir de 4 libros de texto, dos por cada nivel. Por lo anterior, no podemos generalizar los resultados, sin embargo, este estudio es un primer acercamiento a la situación problema presentada en este escrito. Es necesario realizar otros estudios similares, y profundizar en el análisis de contenido, dejando estas líneas abiertas para futuras investigaciones.

Referencias

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2023). Patrones en educación infantil: vinculando pensamiento computacional y algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI*, 115–122. SEIEM.

Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 22*, 91–110. https://aiem.es/article/view/v22-acosta-pincheira-alsina

Aguayo-Amagada, C. G., Flores, P. y Moreno, A. (2018). Concepto de objetivo de una tarea matemática de futuros maestros. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 990–1011. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a12

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa*, *4*, 13–24. http://hdl.handle.net/10481/5518

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática*, *54*, 55–67.

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 15* (3), 361–371. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21505

Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library*, *11*, 25–41.

Haro, M. J. y Torregrosa, G. (2002). El análisis de libros de texto como tarea del profesorado de matemáticas. *En Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 357–372). Universitat d´ Alacant/Universidad de Alicante.

Herrera, C. D. (2018). Investigación cualitativa y análisis de contenido temático. Orientación intelectual de revista Universum. *Revista general de información y documentación*, *28*(1), 119. https://doi.org/10.5209/RGID.60813

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill (6 ª edición).

Jiménez-Castro, M., Arteaga, P. y Batanero, C. (2020). Los Gráficos Estadísticos en los Libros de Texto de Educación Primaria en Costa Rica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 132–156. Epub April 17, 2020. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a07

Kullberg, A., Runekiullsson, U. y Mårtensson, P. (2013). The same task?-different learning possibilities. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in Mathematics Education. Procedings of ICMI Study 22* (pp. 609–616).

Lüken, M. y Sauzet, O. (2021) Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies, *Mathematical Thinking and Learning*, 23(1), 28–48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Lupiáñez, J. L. (2010). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada). https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.543

Moreno, A. y Ramírez R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243–258). Madrid: Pirámide.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA. 4*(3), 232–246. http://funes.uniandes.edu.co/1100/

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programa de estudios. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada.* Matemáticas. Costa Rica.

Otte, M. (1986). What is a text? In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 173–203). Dordrecht: Springer.

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2020). Young Students' Functional Thinking Modes: The Relation Between Recursive Patterning, Covariational Thinking, and Correspondence Relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 5*1(5), 631–674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Rittle-Johnson, B, Zippert, E. L. y Boice, K. L. (2018). The Roles of Patterning and Spatial Skills in Early Mathematics Development. *Early Childhood Research Quarterly, 46,* 166–178. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.006

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores.* Comité Interamericano de Educación Matemática (México). https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B., y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133–142. http://hdl.handle.net/10481/4449

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones: una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números: revista de didáctica de las matemáticas.* (97), 51–67. http://funes.uniandes.edu.co/12877/

EL SENTIDO ESTRUCTURAL EN EL ESTUDIANTADO DE CARRERAS DE INGENIERÍA

The Structural Sense in Engineering Students

Cancec-Murillo, G.[a], Montoro, A. B.[a], Flores, P.[a] y Rojano, T.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]CINVESTAV

Resumen

Esta comunicación analiza el sentido estructural que posee el estudiantado de ingeniería en su último año de formación. Para esto se diseñó y utilizó un instrumento con ejercicios de manipulación algebraica elemental y ejercicios de límite. Los resultados revelan que los sujetos muestran mayor sentido de la estructura en los ítems en los que intervienen menos objetos matemáticos, observándose dificultades en aquellos donde existe integración de varios objetos, relación entre entidades y aplicación a un contexto. Por lo tanto, se sugiere a las instituciones de educación superior tomar las medidas necesarias para fortalecer el desarrollo del sentido de la estructura desde los primeros años de formación académica, y así, evitar el arrastre de carencias y errores algebraicos hasta los últimos años de formación y posterior ejercicio profesional.

Palabras clave: *sentido estructural, sentido algebraico, manipulación algebraica, errores algebraicos, educación superior.*

Abstract

This communication analyses the structural sense possessed by engineering students in their final year of education. To accomplish this, an instrument designed to analyse this capacity was used in exercises involving elemental algebraic manipulation and limit exercises. The results reveal a development of structural sense in items involving fewer mathematical objects; however, difficulties are observed in items where multiple objects are integrated, there are relationships between structures, and application to a context is required. Therefore, it is suggested that higher education institutions take necessary measures to strengthen the development of structural sense from the early years of academic training, thus avoiding the persistence of deficiencies and algebraic errors until the final years of education and subsequent professional practice.

Keywords: *structural sense, algebraic sense, algebraic manipulation, algebraic mistakes, higher education.*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del cálculo diferencial e integral representa un desafío significativo para muchos estudiantes en educación superior, particularmente en ingeniería. A pesar de contar con una formación escolar completa y, en muchos casos, con programas de nivelación, estos estudiantes continúan enfrentando dificultades en la manipulación y aplicación de estructuras algebraicas fundamentales en el contexto del cálculo y en su especialidad. Investigaciones previas han identificado una serie de factores que contribuyen a estas dificultades (Moreno-Armella, 2021).

Según Kieran (2004), el álgebra transformativa podría ofrecer una solución a estas dificultades. Este enfoque se centra en capacitar a los estudiantes para transformar expresiones algebraicas mediante la aplicación de propiedades, lo que resalta la importancia de desarrollar un sentido estructural en ellos. Para ello, hemos emprendido una investigación cuyo objetivo principal es describir el sentido

Cancec-Murillo, G., Montoro, A. B., Flores, P. y Rojano, T. (2024). El sentido estructural en el estudiantado de carreras de ingeniería. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 137-144). SEIEM.

estructural que presenta el estudiantado de ingeniería, con lo que esperamos contribuir a mejorar la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en estudiantes de ingeniería y disciplinas afines.

MARCO TEÓRICO

El término sentido estructural fue inicialmente utilizado por Linchevski y Livneh (1999) para hacer referencia, de manera amplia, a un conjunto de competencias relacionadas con la manipulación de expresiones algebraicas, que capacitan al estudiante para utilizar de manera más efectiva las técnicas algebraicas adquiridas. Estos académicos argumentan que la introducción de estructuras aritméticas en las etapas tempranas del aprendizaje algebraico podría mitigar ciertos errores estructurales que suelen cometer los alumnos al enfrentarse a problemas algebraicos (Livneh y Linchevski, 2007).

Con el propósito de fomentar el desarrollo del sentido estructural, entendido como la capacidad de apercibimiento de las estructuras de los objetos algebraicos (Rojano, 2022), un equipo de investigadores mexicanos ha concebido una serie de actividades integradas en un entorno web denominado Máquina de Expresiones (MEx) (Muñoz-Porras, 2015).

Molina (2010), en sus investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra, emplea el término estructura para hacer referencia a los componentes de una expresión algebraica, los símbolos que los conectan, el orden de los términos y las relaciones entre ellos. Es evidente que las expresiones algebraicas exhiben diversas estructuras, identificadas por Hoch y Dreyfus (2004) como fundamentales para discernir distintos componentes de las expresiones algebraicas que se relacionan entre sí.

Dentro de la variedad de estructuras de expresiones algebraicas, destacan los productos notables, las fracciones algebraicas, las ecuaciones y las funciones. Vega-Castro et al. (2011) identifica sentido estructural con las habilidades que permiten discernir qué interpretación de las expresiones es más adecuada según el contexto, para cambiarlas por otras que faciliten la resolución de problemas. Para ello se requiere encontrar expresiones algebraicas que compartan la misma apariencia (estructura externa) o la relación entre las cantidades y las operaciones (estructura interna) (Vega-Castro et al., 2013). Por ejemplo, en las expresiones a) $(x+3)^2$; b) x^2+9+6x; c) $(3x+6)^2$; d) $x^2+9x-3x+10-1$, observamos que a) y c) son similares en estructura externa, forma de cuadrado de binomio, pero internamente difieren por incorporar componentes distintos. En contraste, a), b) y d) comparten la estructura interna, aunque su estructura externa varía, requiriendo transformaciones algebraicas para relacionarlas. Comúnmente, tanto en problemas de cálculo como en álgebra, es necesario obtener expresiones equivalentes (misma estructura interna), para lo que conviene identificar estructuras algebraicas conocidas, como los productos notables (misma estructura externa).

Para caracterizar el sentido estructural se han establecido diversas componentes. Hoch y Dreyfus (2006) señalan tres niveles de sentido estructural que reflejan las habilidades alcanzadas por los estudiantes:

- Reconocen una estructura conocida en su forma más básica.
- Tratan un término compuesto como una entidad única y reconocen una estructura conocida en una forma más compleja (suma o producto).
- Eligen las manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.

En Vega-Castro (2013) vemos un amplio listado de componentes del sentido estructural, que incluyen los niveles anteriores y otras capacidades como distinguir subestructuras dentro de una entidad más compleja y reconocer relaciones entre ellas, anticipar el efecto de trasformaciones en la estructura de una expresión, reconocer relaciones de igualdad en estructura de expresiones presentes, y extraer información relevante a partir de la estructura externa de una expresión, relativa al objeto que representa o a su estructura interna.

Muñoz-Porras (2015) destaca la técnica del cambio de variable como una herramienta común en el cálculo que permite reconocer estructuras en expresiones algebraicas. En este sentido, Freudenthal (1983) menciona esta acción como sustitución algebraica, en la que una expresión puede ser reemplazada por otra si son equivalentes y también enfatiza la interpretación estática de las expresiones algebraicas para que la sustitución formal sea efectiva, extendiendo su validez más allá de la simple sustitución.

Los niveles y descriptores señalados por los estos autores, nos ha permitido seleccionar componentes (C1-C8 de la Tabla 1) y un noveno que agrega el equipo para hacer referencia a la aplicación de sentido estructural en otros contextos, respaldado por las observaciones de Rojano y Palmas (2022), quienes señalan las dificultades del estudiantado para aplicar conceptos matemáticos en contextos diversos.

Tabla 1. Componentes del sentido estructural.

Componente	Descriptor
C1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.
C2	Identificar subestructuras dentro de una expresión y tratarlas como una sola entidad al transformar la expresión.
C3	Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.
C4	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.
C5	Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas.
C6	Aplicar la sustitución, ya sea internamente o de manera explícita.
C7	Reconocer relaciones de igualdad en estructura de expresiones presentes.
C8	Extraer información relevante a partir de la estructura externa de una expresión, relativa al objeto que representa o a su estructura interna.
C9	Aplicar estructuras en otros contextos.

MÉTODOLOGÍA

El presente estudio es de tipo cualitativo, exploratorio, descriptivo y transeccional que utiliza una muestra por conveniencia, la cual se aplica a casos disponibles a los que se tiene acceso en el momento del estudio (Hernández et al., 2010). Participan 16 estudiantes de ingeniería (química, electricidad, electrónica y en automatización) de una institución de Educación Superior Técnico Profesional (TP) de Chile, que se encuentran en su último año de formación.

Instrumento

Similar a los trabajos de Hoch y Dreyfus (2006) y Muñoz-Porras (2015), nuestro cuestionario consta de un apartado sobre factorización y de resolución de ecuaciones (A y C), ambos con dos preguntas cada uno. Por otro lado, se incluyeron dos ítems (B) en los que los sujetos deben completar los recuadros de manera que se verifique la igualdad, aspecto que aparece en las guías de trabajo de la institución y en los trabajos de Vega-Castro (2013). Se cuenta con la autorización de las autoras para su aplicación. Por último, se incluyeron cuatro preguntas sobre el cálculo de límites de una función en un punto (D), la última de ellas contextualizada, seleccionadas de evaluaciones realizadas por los docentes de la institución. Esta decisión fue motivada ya que esta investigación pretende analizar el sentido estructural de estudiantes de ingeniería, como una mejora de sus habilidades en cálculo, dimensión ausente en los instrumentos existentes.

Se solicitó a tres expertos de sentido estructural la revisión del diseño del instrumento y a tres docentes de la institución en que se aplica, que resolvieran el instrumento y dieran su retroalimentación. En la Tabla 2, se muestran los ítems del cuestionario.

Tabla 2. Ítems del cuestionario

A) Transforme las expresiones en otras equivalentes mediante factorización.

1) $x^4 - 7x^2 + 10 =$ 2) $50x^2y^4 - 18z^6 =$

B) Complete cada recuadro de tal forma que las expresiones sean equivalentes y se pueda simplificar.

3) $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x - \square}{\square\,(\sqrt{x} + \square)}$

4) $\frac{(h+2)^2-4}{\square} = \frac{(\square + 2)(\square - 2)}{(h+2)-2}$

C) Resuelva las ecuaciones, calculando el valor de la expresión solicitada

5) Si $6(2-a) + 3(2-a) = 0$, ¿cuánto vale $2-a$?

6) Si $4a^2b^2 - 4ab + 1 = 0$, ¿cuánto vale ab?

D) Transforme las expresiones, indicando los códigos de las estructuras utilizadas para determinar el valor de los siguientes límites:

7) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$ 8) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ 9) $\lim_{x\to 0} \frac{2sen(3x)}{5x}$

10) El ingreso promedio por artículo X en una empresa es $I = \frac{x}{200x - 0{,}2x^2}$

¿Qué sucede si los productos disminuyen a cero?

Los estudiantes los ítems propuestos individualmente, contando con 80 minutos en horario de clases. Durante la aplicación del instrumento se le solicitó al estudiantado hacer el desarrollo completo de sus respuestas, indicando la importancia de estas para la investigación y se les pide registrar los códigos de las estructuras utilizadas. Para ello, se les entrega una guía de código-estructura con productos notables, propiedades de potencias, propiedades de raíces, ecuaciones y límites trascedentes.

RESULTADOS

En la Tabla 3 se presenta un resumen de los resultados, indicando el número de estudiantes que respondieron a cada ítem, los que mostraron únicamente destrezas de manipulación y los que evidencian las diferentes componentes de sentido estructural, considerando que en algunos ítems se aplica más de una componente, razón por la cual la suma pueda ser mayor al número total de respuestas.

Tabla 3. Resumen de resultados por ítem

			Componentes								
Ítem	Respuestas	Manipulación	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
I1	16	6			10						
I2	14	4	10		5	5					
I3	12	10				2	2		1		
I4	12	7		5	5		5				
I5	15	11		2				2			
I6	15	13			2			1			
I7	13	9	4				4				4
I8	11	7	4			4	4		2		4
I9	9	6			3		3				3
I10	9	4	5				5			3	5

En relación con la participación del estudiantado se puede destacar que de las 10 preguntas realizadas las ocho primeras fueron contestadas por la mayoría de los estudiantes, sin embargo, las últimas dos preguntas superan levemente el 50% de respuestas (independiente si estas están correctas o no).

En el ítem A referido a preguntas de factorización, encontramos que todos los estudiantes contestaron a la primera pregunta, de los cuales 10 evidencian sentido estructural, pues transformaron de forma correcta la expresión, identificando la estructura en su forma compuesta (C3) ya que reconocen la identidad $a^2+(b+c)a+bc=(a+b)(a+c)$ y pueden aplicar $a^4=(a^2)^2$ para poder sustituir en la estructura (Figura 1).

En la segunda pregunta, el nivel de participación del estudiantado baja un poquito, así como el grado en que evidencian sentido estructural. De los 14 estudiantes que respondieron, solo cinco evidencian sentido estructural, eligiendo manipulaciones para hacer el mejor uso de una estructura, en este caso, sacar factor común 2 (C4), que a su vez supone reconocer la estructura (factor común) en su forma más simple (C1), lo que permite identificar la diferencia de cuadrados $a^2 - b^2=(a+b)(a - b)$ en su estructura más compleja (C3), aplicando propiedades de potencia $a^{mn}=(a^m)^n$. En la Figura 2 vemos un ejemplo de dicha resolución. Otros cinco estudiantes solo llegan a determinar el factor común 2 (C1), no identificando la diferencia de cuadrados.

Figura 1. Ejemplo de respuesta al ítem 1 con sentido estructural

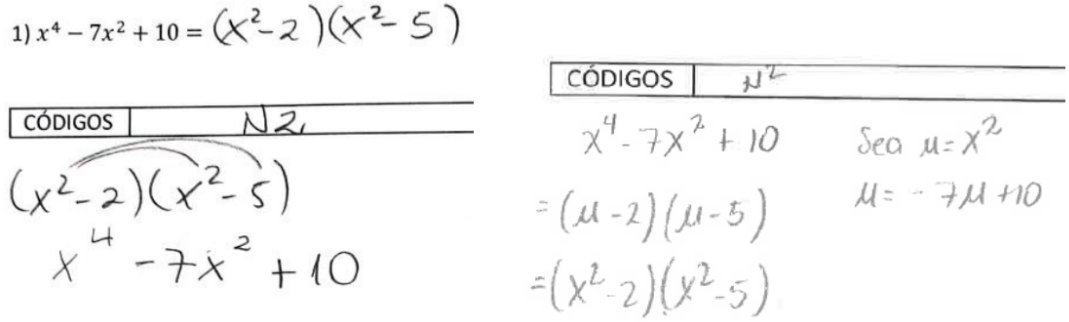
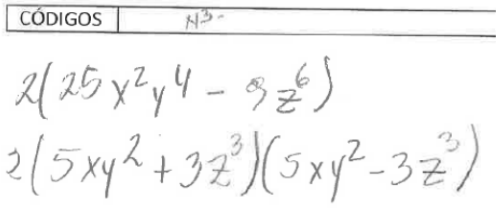


Figura 2. Ejemplo de respuesta al ítem 2 con sentido estructural



Otro apartado con alto índice de respuesta fue el referido a la resolución de ecuaciones (C), cuyos apartados fueron resueltos por la mayoría de los estudiantes. Si bien los resultados en sus dos ítems son muy diferentes. En el caso del ítem 5, si bien 10 de los 15 estudiantes respondieron correctamente, no necesariamente están utilizando sentido estructural. La mayoría optó por la manipulación mecánica de resolución de paréntesis, calculando el valor de "a" para luego calcular "2 – a" (Figura 3 izquierda). Concretamente, solo cuatro apreciaron el marcador visual del paréntesis para considerar "2 – a" como una entidad al transformar la expresión (C2), obteniendo así la solución (Figura 3 derecha).

En contraste, en el ítem 6, solo dos de los 15 estudiantes que resuelven la tarea tratan ab como una única identidad, reconociendo que se trata de una ecuación cuadrática (C3). En la Figura 4 vemos la solución de dichos estudiantes, en el que el estudiante de la derecha, además, reconoce la estructura de cuadrado del binomio en su forma compuesta (C3), aplicando sustitución (C6).

Figura 3. Manipulación vs sentido estructural en resolución de ecuaciones. Respuesta al ítem 5

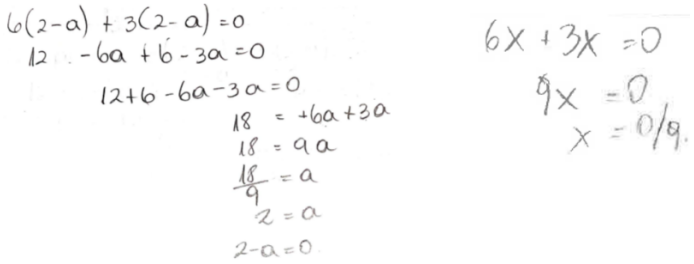
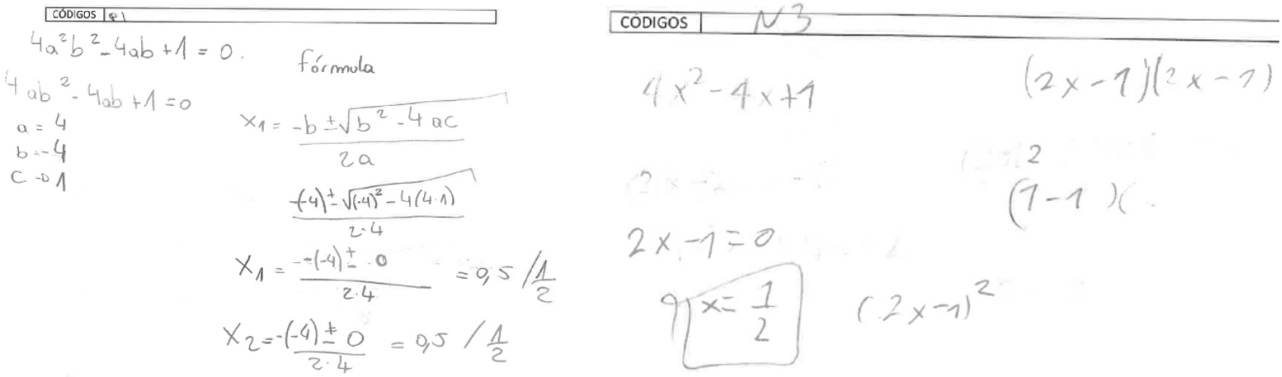
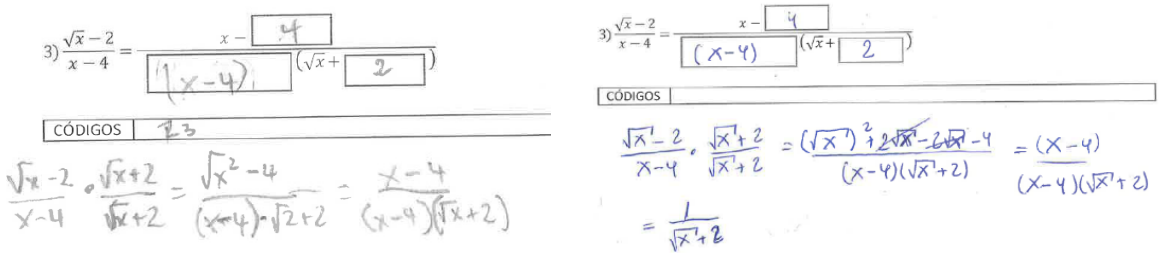


Figura 4. Ejemplo de respuesta al ítem 6 con sentido estructural



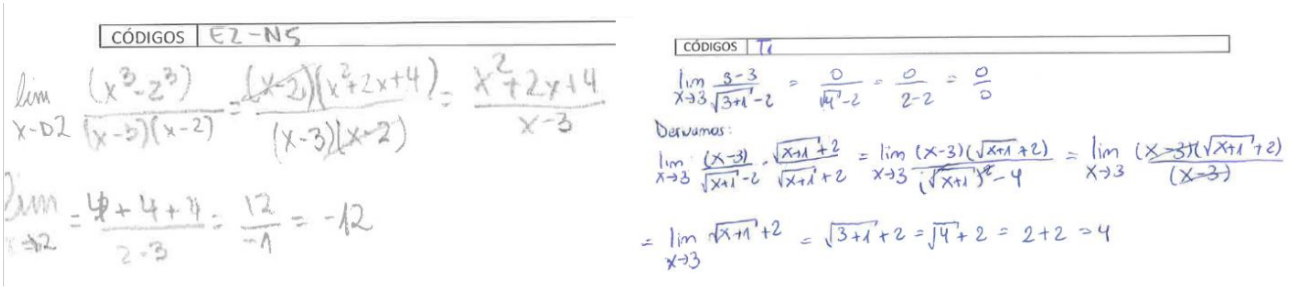
En el caso del apartado B, en el que se pide completar las ecuaciones, son 12 los estudiantes que responden. De estos, únicamente dos estudiantes responden correctamente al ítem 3 (Figura 5), usando manipulaciones previas para determinar la respuesta (C4), distinguiendo subestructuras dentro de la fracción algebraica y relaciones entre ellas (C5) a través de la racionalización. En el caso del ítem 4, son 5 los estudiantes que responden correctamente: identifican subestructuras dentro de una expresión, en este caso h+2 y la tratan como una sola entidad (C2), identificando una estructura diferencia de cuadrados de forma compuesta, (h+2)2 – 22(C3) y reconocen subestructuras en la fracción algebraica (C5) para determinar relación entre ellas (C7).

Figura 5. Manipulación vs sentido estructural en la resolución al ítem 3



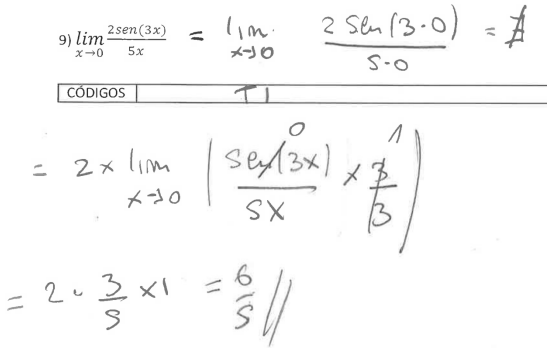
En el ítem D referido a operatoria y aplicación de límites, se puede apreciar que únicamente cuatro estudiantes responden correctamente a los ítems 7 y 8 (de los 13 y 11 que contestan, respectivamente). En el caso del ítem 7, identifican estructuras en su forma simple tanto en el numerador como el denominador, a3 – b3 y a2+(b+c)a+bc (C1) y determinan relaciones entre las subestructuras para simplificar(C5) y luego poder calcular el valor del límite (C9). En el ítem 8, además de estas últimas componentes, vemos que realizan manipulaciones previas para determinar la estructura en su forma compuesta (C4) en este caso la diferencia de cuadrados a2 – b2 por medio de racionalización (C7). En la Figura 6 se muestra un ejemplo de resolución del ítem 7 (izquierda) y el ítem 8 (derecha) donde se perciben dichas componentes.

Figura 6. Ejemplo de respuesta al ítem 7 (izquierda) y el ítem 8 (derecha) con sentido estructural



En el ítem 9, como se muestra en la Figura 7, únicamente tres de los nueve estudiantes que responden a esta pregunta lo hacen de manera correcta, identificando la estructura en su forma compuesta (C3) en contexto de límites trigonométricos y relacionan las subestructuras involucradas (C5) para finalmente calcular el valor del límite (C9).

Figura 7. Ejemplo de respuesta al ítem 9 con sentido estructural



DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos del análisis muestran una clara discrepancia entre la manipulación algebraica y el sentido estructural por parte de los estudiantes. Si bien se observa una destreza en la manipulación algebraica en los ítems A, B y C, en la pregunta 5, donde se constata que a pesar de que un número considerable de estudiantes obtienen respuestas correctas, su proceso de resolución se limita a una ejecución mecánica del procedimiento sin identificar marcadores visuales, ni comprender el significado de las expresiones algebraicas. Estos hallazgos coinciden con las ideas planteadas por Vega-Castro (2010), quien sostiene que el trabajo de los estudiantes con expresiones algebraicas suele ser superficial y mecánico, sin una verdadera comprensión de estas, lo que demuestra la necesidad de mejorar el sentido estructural de los estudiantes en el ámbito algebraico.

Por otro lado, el análisis revela que el ítem D presenta la mayor cantidad de preguntas sin desarrollo o con desarrollos incorrectos. Estos resultados muestran la importancia de fomentar en los estudiantes una comprensión más profunda y flexible de los conceptos matemáticos, capacitándolos para aplicarlos de manera efectiva en diferentes situaciones y contextos.

Además, se observa que un alto porcentaje de estudiantes no registró los códigos utilizados en sus desarrollos. Esto podría atribuirse a la falta de familiaridad con este tipo de evaluación, a la priorización del desarrollo de los ejercicios sobre la argumentación de estos o incluso al desconocimiento de las estructuras involucradas. Estos hallazgos resaltan la importancia de propiciar en el estudiantado el desarrollo de habilidades que les permitan reflexionar sobre sus procesos de resolución y registrar adecuadamente sus estrategias y razonamientos.

En última instancia, los resultados del estudio destacan la necesidad de potenciar el desarrollo del sentido estructural en el estudiantado desde los primeros años de formación. Dotar al estudiantado con las herramientas necesarias para comprender profundamente las expresiones algebraicas y aplicar

conceptos matemáticos en diversos contextos, no solo mejorará su desempeño en asignaturas específicas como cálculo y especialidad, sino que también los preparará mejor para enfrentar desafíos de modelización y resolver problemas del mundo real de manera efectiva.

En cuanto al marco conceptual y de análisis utilizado en este estudio, cabe mencionar que las componentes y categorías que lo conforman permitieron dar cuenta, en unos casos, de la presencia de rasgos particulares de sentido estructural algebraico en los estudiantes participantes, y en otros, permitieron identificar la ausencia (o no utilización) de esta capacidad. Será interesante analizar la naturaleza y las características de los ítems en donde se observó lo anterior, así como los antecedentes de los estudiantes en cuanto a su experiencia y conocimientos matemáticos.

Referencias

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Hardcover.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). PME.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). PME.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chic, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Kluwer AP.

Linchevski, L. y Livneh D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.

Livneh, D. y Linchevski, L. (2007). Algebrification of arithmetic: Developing algebraic structure sense in the context of arithmetic. En J. Woo, H. Lew, K. Park y D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 217-225). PME

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *SUMA*, 65, 7-15.

Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM, Mathematics Education*, 53, 621-633. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9.

Muñoz-Porras, V. (2015). *Herramienta ad hoc para el Sentido de la Estructura en Álgebra.* [Tesis Doctoral]. Departamento de Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Rojano, T y Palmas, S. (2022). The Importance of Algebra Structure Sense for the Teaching and Learning of Mathematics. En T. Rojano (Ed.), *Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners* (pp. 141-155). Routledge.

Rojano, T. (2022). Algebra *structure sense development amongst diverse learners*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003197867.

Vega-Castro, D. (2013). Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el Sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas. [Tesis Doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Vega-Castro, D., Molina y M., Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M.ª M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, 575-584. SEIEM.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. Relime, 15(2), 232-258.

MENTALIDAD DE CRECIMIENTO Y RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE 6.º DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Growth mindset and mathematics achievement in 6th grade elementary school students

Cárceles-Martínez, J. F., Monroy, F. e Ibáñez-López, F. J.

Universidad de Murcia

Resumen

La mentalidad de crecimiento (MC) tiene cada vez más presencia en la legislación educativa española y viene asociada a un mayor rendimiento académico del alumnado entre otros muchos beneficios. Sin embargo, en España existe aún muy poca investigación en esta temática. Los objetivos de este trabajo fueron valorar los efectos que puede tener una intervención en MC y analizar la relación entre el grado de MC con el rendimiento en matemáticas mediante un cuestionario de ocho ítems con tres preguntas abiertas. Los participantes fueron estudiantes de 6.º de Educación Primaria repartidos en un grupo experimental (GE) y grupo control (GC). Al GE se le aplicó una intervención de cuatro sesiones en una semana. Los resultados apuntaron que existen diferencias significativas entre las puntuaciones en MC antes y después de la intervención en el GE, no siendo así en el GC. En la relación entre el grado de MC y el rendimiento en matemáticas no se observó una correlación significativa.

Palabras clave: *mentalidad de crecimiento, rendimiento académico, matemáticas, Educación Primaria.*

Abstract

Growth mindset (GM) is increasingly present in Spanish educational legislation, and it is associated with higher academic performance, among many other benefits. However, there is still very little research on this subject in Spain. The objectives of this study were to assess the effects of an intervention in GM and to analyse the relationship between a prevalence of GM and mathematics achievement by means of an eight-item scale and three open-ended questions. The participants were 6th grade primary school students divided into an experimental group (EG) and a control group (CG). The EG received an intervention of four sessions in one week. The results showed that there were significant differences between the GM scores before and after the intervention only in the EG. No significant correlation was observed between GM and mathematics performance.

Keywords: *growth mindset, academic performance, mathematics, Elementary School.*

INTRODUCCIÓN

Es frecuente escuchar en nuestra sociedad y en las aulas comentarios como "las matemáticas no se me dan bien" o "yo no soy de números, soy más de letras". Se trata de expresiones empleadas para justificar el buen o mal desempeño académico y que pueden ser perjudiciales, ya que pueden limitar oportunidades de aprendizaje propias o de otros (Boaler, 2019). Estas creencias son realidades construidas mentalmente desde nuestras propias experiencias personales y que moldean nuestro pensamiento (Latorre-Medina et al., 2007), están formadas por elementos afectivos, evaluativos y sociales que se mantienen estables a lo largo del tiempo (Marbán et al., 2020), pero estas pueden llevar a los estudiantes a bloqueos y a determinar en gran medida su desempeño en ciertas áreas como

Cárceles-Martínez, J.F., Monroy, F. e Ibáñez-López, F. J. (2024). Mentalidad de crecimiento y rendimiento en matemáticas en estudiantes de 6.º de Educación Primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 145-152). SEIEM.

las matemáticas (Gamboa y Moreira-Mora, 2016). A estas creencias se las conoce también como teorías implícitas. Son "teorías" porque constituyen un marco que usamos para tomar decisiones y emitir juicios de valor y se consideran "implícitas" porque se utilizan de forma inconsciente y no se someten a evaluación (García-Coni et al., 2022).

Dweck (2019) establece los términos de mentalidad de crecimiento (MC) y mentalidad fija (MF) para describir los dos extremos de este espectro que son las teorías implícitas. Así, la MC se define como la creencia de que nuestras cualidades y habilidades básicas son algo que se puede trabajar y mejorar con esfuerzo y dedicación, afirmando que todo el mundo puede cambiar y crecer con la experiencia.

En este trabajo exploramos si se puede cambiar el tipo de mentalidad llevando a cabo una intervención en estudiantes de primaria y si el grado de MC tiene relación con el rendimiento académico en matemáticas, entendido este como el resultado que consigue un estudiante expresado en la interacción y capacidades adquiridas tras un proceso de enseñanza-aprendizaje (Grasso, 2020). A continuación, se describe el marco teórico, la metodología, los resultados y la discusión de los mismos.

MARCO TEÓRICO

La MC es un factor de calidad, pues se centra en ver los errores como una oportunidad de aprendizaje y fomenta la creencia de que siempre se puede mejorar (Brock y Hundley, 2016). Los dos tipos de mentalidad se pueden definir muy bien en función a cómo den respuestas a cada uno de estos cinco dominios: retos, obstáculos, esfuerzo, críticas y éxito de los demás (Brock y Hundley, 2016). Las personas con una MC están más motivadas ante los retos porque los ven como una oportunidad para aprender. Cuando se encuentran con un obstáculo muestran perseverancia y no desisten con facilidad. El esfuerzo se concibe como algo positivo y como parte del aprendizaje. Si bien el esfuerzo no lo es todo y no se debe confundir la MC con este, las personas con esta mentalidad buscan nuevas estrategias y piden ayuda a otros cuando lo necesitan para avanzar (Dweck, 22 de septiembre 2015). En cuanto a las críticas al trabajo lo ven como algo positivo y necesario. Por último, el éxito de los demás se ve como un recurso más del que pueden disponer para mejorar y del que obtener ayuda.

Su popularidad y relevancia vienen dadas por los numerosos beneficios que intervenciones en MC pueden traer consigo, como son: mejorar el rendimiento académico de los estudiantes (García-Coni et al., 2019); ayudar a reducir la brecha en rendimiento que generan a nivel escolar las desigualdades socio económicas y de género (Dweck, 2015); ver los errores como una oportunidad de mejora y cultivar la cultura del esfuerzo, aumento de la motivación y la perseverancia, un mayor bienestar emocional (Brunette et al., 2022); y reducir conflictos y problemas derivados de prejuicios implícitos en el ámbito escolar (Nalipay et al., 2021). Se han hecho numerosas intervenciones en este ámbito para intentar modificar el tipo de mentalidad que han demostrado ser eficaces y encontrando relación entre la MC y el rendimiento académico (Blackwell et al., 2007; García-Coni et al., 2019, 2022; Medina-Garrido y León, 2017; Paunesku et al., 2015).

En los últimos años en Estados Unidos está teniendo lugar un aumento de la popularidad de las intervenciones en MC en contextos educativos (Brunette et al., 2022). En España, su popularidad no está aún al nivel del país americano, pero ya se puede ver en del Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, el término "mentalidad de crecimiento" en un criterio de evaluación del cuarto curso.

La primera intervención que se publicó en este ámbito (Aronson et al., 2002) se dirigió a un grupo de estudiantes universitarios afroamericanos con el objetivo de mejorar su motivación y su rendimiento académico. Al final del estudio encontraron que fomentar la mentalidad de crecimiento conseguía una mejora en la motivación y un incremento de las calificaciones del GE en comparación con el GC. Desde entonces se han llevado a cabo muchísimas otras. Brunette et al. (2022) realizaron una revisión sistemática analizando un total de 53 intervenciones realizadas entre 2002 y 2020. Tras su análisis

encontraron que existe una gran variedad en la eficacia de las mismas y en su capacidad para mejorar el rendimiento académico. Los resultados apuntaron a que cuando las intervenciones se realizan a estudiantes que se encuentran en situaciones socioeconómicas desfavorecidas o en situaciones de riesgo el efecto de la intervención era cuatro veces mayor que la media.

En Argentina, García-Coni et al. (2019) llevaron a cabo una intervención en mentalidad de crecimiento de cinco sesiones de una hora espaciadas en cinco semanas a 84 estudiantes de cuarto de Primaria. El objetivo fue evaluar si la intervención tenía un efecto en la MC comparando el pretest y el postest, encontrando una respuesta afirmativa (p-valor < .01). Siguiendo en Argentina un trabajo posterior también realizado por García-Coni et al. (2022) estudió la relación entre el tipo de mentalidad y la capacidad lectora y matemática en una muestra de 247 estudiantes de 9 a 12 años. En este estudio se empleó el mismo cuestionario que se usó en el presente trabajo y se pasaron pruebas estandarizadas de lectura y matemáticas, además de usar las notas finales de las asignaturas. Los análisis confirmaron una relación más fuerte con las notas de las asignaturas que con las pruebas estandarizadas.

Backwell et al. (2007) realizaron un estudio con 373 estudiantes de séptimo grado encontrando una relación entre sus notas de matemáticas y la creencia de que la inteligencia es un atributo moldeable. También Blackwell et al. (2007) en un segundo estudio comprobaron la eficacia de una intervención en MC aumentando la motivación y los resultados en matemáticas de 91 estudiantes de 12-13 años teniendo un grupo de comparación. La intervención consistió en ocho sesiones de 25 minutos en ocho semanas. A incluso mayor escala (n = 1594) Paunesku et al. (2015) evidencian que cuando se consigue que los estudiantes comprendan la idea de que el cerebro es un músculo y como tal se puede entrenar, resulta en una mayor motivación, una mayor determinación hacia el éxito y así obtener un mayor rendimiento académico. Lo sorprendente de esta intervención fue que se implementó en una sola sesión en línea de 45 minutos.

Un estudio más reciente con estudiantes de China (Dong et al., 2023) encontró, sin embargo, que la MC en sí no es un predictor directo del rendimiento en matemáticas y sugiere que para que tenga efecto hay que trabajar también factores concretos como la motivación intrínseca y la ansiedad matemática.

En vista de los resultados arrojados por las diversas investigaciones mencionadas, los efectos positivos y transformadores que puede traer consigo, su presencia en el currículum de Educación Primaria y el escaso número de investigaciones en esta temática en España nos preguntamos, ¿realmente son eficaces las intervenciones en alumnado de Educación Primaria y consiguen cambiar su mentalidad en centros españoles? ¿Afectan las intervenciones al rendimiento académico? ¿Contribuyen a mejorar las creencias de este alumnado sobre las matemáticas? Partiendo de esta base, el presente trabajo tuvo como objetivos:

- Analizar los dos tipos de mentalidad (crecimiento y fija) en los estudiantes de 6.º curso de Educación Primaria de un centro de la Región de Murcia.
- Analizar la relación entre la presencia de MC y el rendimiento académico en matemáticas en los mismos estudiantes de 6.º curso de Educación Primaria.

METODOLOGÍA

Diseño

La investigación se llevó a cabo con un único diseño en forma de estudio cuasi-experimental, cuyo propósito es doble: exploratorio y correlacional. Para el primer objetivo se analizó el efecto de la intervención comparando la MC y la MF antes y después de la intervención en un grupo experimental (GE). Así mismo, se comparó la MC y la MF en un grupo de comparación (GC) en dos momentos que coincidieron con el pretest y postest del GE. Para el segundo objetivo se analizó la relación entre

las puntuaciones en MC obtenidas en el postest con sus calificaciones en matemáticas obtenidas en la evaluación trimestral más reciente.

Participantes

La muestra invitada fue de 52 estudiantes de ambos sexos con edades comprendidas entre los 11 y 13 años, si bien la muestra participante y real fue finalmente de 51 estudiantes, 26 niñas (51%) y 25 niños (49%). Todos ellos cursaban sexto de Educación Primaria en un centro concertado de la ciudad de Murcia, España, durante el curso escolar 2022/2023.

El muestreo se realizó de forma no probabilística por conveniencia y accesibilidad. De entre las dos clases de sexto disponibles para realizar la intervención se seleccionó de forma aleatoria el grupo que sería GE en el que se realizaría la intervención y el GC en el que no se implementaría la intervención. El GE estuvo conformado por 26 estudiantes (54% niñas, 46% niños) y el GC tuvo 26 estudiantes (50% niñas, 50% niños).

Intervención

Para la intervención se aplicó un modelo de cuatro sesiones cortas con una fundamentación muy parecida a las usadas en Blackwell et al. (2007), Medina-Garrido y León (2017), García-Coni et al. (2019, 2022). Cada sesión se centró en un aspecto diferente de la MC usando siempre ejemplos del contexto del aula de matemáticas. Así la primera sesión trató la diferencia entre MF y MC, la segunda sobre cómo aprende nuestro cerebro, la tercera sobre cómo los errores nos ayudan a aprender y, por último, el poder del "todavía" donde se recapitula lo aprendido en las otras sesiones.

Instrumento

Se diseñó una herramienta ad hoc usando la aplicación *Formularios* de *Google*. El primer apartado presentaba información sobre la investigación y se pedía su colaboración voluntaria en la investigación. El consentimiento informado había sido solicitado días antes a las familias. En el segundo apartado se recogían datos sobre el curso y las calificaciones finales de los estudiantes en la segunda evaluación. Seguidamente, se presentaron preguntas abiertas que invitaban a la reflexión personal que los estudiantes debían responder libremente y de forma individual. La redacción de las preguntas (Tabla 1) estuvo inspirada en los trabajos de Brock y Hundley (2016) y Mercer y Ryan (2019). Cada una de las preguntas esta asociada a un dominio clave de la MC y fueron validadas por un docente investigador experto en metodología.

Tabla 1. Dominios y preguntas abiertas

Dominio	Pregunta abierta
Obstáculos	A. Te encuentras ante una tarea de clase muy difícil. ¿Cómo reaccionas?
Críticas	B. Cuando un profesor te dice las cosas en las que te has equivocado en tu trabajo, ¿cómo reaccionas? ¿te gusta? ¿te desanima?
Esfuerzo	C. "Hay gente a la que las matemáticas se le dan bien y otras a las que no." ¿Qué opinas?

El GE contestó estas preguntas abiertas antes y después de la intervención en MC. Finalmente, se presentaba una escala Likert para medir la MC, basada en la Escala de Mentalidad de Crecimiento de Dweck (2012). Esta estuvo compuesta por ocho ítems con cinco opciones de respuesta (*totalmente en desacuerdo, en desacuerdo, ni de acuerdo ni en desacuerdo, de acuerdo y totalmente de acuerdo*), de los que cuatro ítems describían rasgos de la MC y cuatro la MF (Tabla 2). Los ítems de MC se valoraron de uno a cinco (*de totalmente desacuerdo a totalmente de acuerdo*) en orden ascendente mientras que las puntuaciones en MF se invirtieron de cinco a uno, de forma que los estudiantes podían obtener una puntuación final en MC máxima de 40 puntos y mínima de 8. En García-Coni et al. (2022) se llevó a cabo una traducción de este cuestionario, así que tomamos como buenos los

valores del proceso de validación que realizaron investigadores externos obteniendo una valoración positiva ($\alpha = .59$).

Tabla 2. Ítems de del cuestionario

Mentalidad fija	Mentalidad de crecimiento
1. Si una tarea es difícil, me desanimo y la dejo de hacer.	2. Pienso que los errores me ayudan a aprender.
3. Si algo me cuesta mucho, es porque no soy inteligente.	5. Está bien pedir ayuda, porque me permite aprender más.
4. Nacemos con una cantidad fija de inteligencia.	6. Pienso que puedo llegar a ser más inteligente de lo que soy.
8. Para aprender no tengo que cometer errores.	7. Cuando las tareas son difíciles, me esfuerzo más.

Procedimiento

Para la intervención en MC se aplicó un modelo de cuatro sesiones cortas con una fundamentación similar a la usada en Blackwell et al. (2007), García-Coni et al. (2019, 2022) y Medina-Garrido y León (2017). En las sesiones se trató la diferencia entre MC y MF, la plasticidad cerebral, el aprender de los errores y el poder del "todavía", todo ello con ejemplos y conexiones a situaciones familiares que se dan en clases de matemáticas. Para la recogida de datos, se utilizó el instrumento descrito anteriormente. El docente tenía las calificaciones disponibles por si algún estudiante no las recordaba en ese momento. El cuestionario estaba configurado de tal forma que primero se presentaban las preguntas abiertas y seguidamente la escala en MC, sin posibilidad de retroceder a la ventana anterior con el fin de que los estudiantes no pudieran editar sus respuestas a las preguntas abiertas tras leer los ítems de la escala.

Análisis de la información

La información recabada mediante la escala Likert fue procesada y analizada con el paquete estadístico de software libre R. Para la búsqueda de diferencias significativas en los ítems según variables sociodemográficas se aplicaron test no paramétricos por ser estos test los más robustos para datos ordinales. En concreto, se empleó la U de Mann-Whitney (estadístico W) para variables independientes con dos niveles de respuesta y la prueba de Wilcoxon (estadístico V) para muestras relacionadas (se tomó p-valor inferior a .05 y nivel de significación $\alpha = .05$). Se contrastó la hipótesis nula que dice que no hay diferencias significativas entre los grupos comparados con la alternativa que sí las admite.

RESULTADOS

Respecto del primer objetivo, se analizaron los datos extraídos de las respuestas a la escala Likert de MC, así como las respuestas a las preguntas abiertas tanto antes como después de la intervención en el GE. Primeramente, se compararon entre sí las puntuaciones en MC del GE y del GC antes de la intervención (pretest) con el fin de asegurar de que no existían diferencias significativas entre ambos grupos antes de iniciar la intervención y ver, por tanto, si eran equivalentes en esta variable. El test reveló que no había diferencias estadísticamente significativas entre el GE y el GC antes de llevar a cabo la intervención ($W = –0.493$, *p-valor* = .622), lo que significa que ambos grupos eran similares en cuanto a su MC en pretest. A continuación, se realizó una comparación intragrupo pretest-postest tanto para el GE como para el GC, que comparó la media de las puntuaciones obtenidas en la escala de MC al principio y después de la intervención en cada grupo de manera separada. Los resultados mostraron que había mejoras estadísticamente significativas de pretest a postest en la MC en el GE ($V = –1.967$; *p-valor* = .049), mientras que no se observaron cambios en esta variable en el GC ($V = –0.259$; *p-valor* = .795). Por tanto, se podría concluir que el cambio en la MC en los estudiantes del GE podría estar motivado por la aplicación de la intervención.

Para conocer en mayor profundidad el posible efecto de la intervención también se recogió información en el GE por medio de preguntas abiertas que fueron iguales en el pretest (A, B, C) y en el postest (A', B' y C'). Las respuestas se clasificaron en cuatro grupos según mostraran claramente una MF, una tendencia a MF, una tendencia a MC o completamente MC (Tabla 3).

Tabla 3. Ejemplos de clasificación de las respuestas

MF	Tendencia MF	Tendencia MC	MC
A. "Aburrido y muy agobiado."	A. "Intento resolverlo pero si veo que no puedo me pongo nervioso."	A. "Yo reacciono enfadado, pero después me digo yo mismo lo voy a intentar una y otra vez."	A. "Intento superarla de diferentes formas hasta que lo consigo y si no pregunto y sigo intentándolo."
B. "Me frustra saber que me he equivocado."	B. "No es que sea que me gusta porque por lo menos lo he intentado."	B. "No me gusta pero me anima a mejorar."	B. "Reaccionaría bien porque así aprendo de los errores."
C. "Todo el mundo tiene sus cosas buenas y sus cosas malas, no se puede cambiar."	C. "Si te gustan es más fácil estudiarlo pero si te cuesta mucho yo lo veo difícil."	C. "Eso es verdad, pero no por nada si no por que esa persona a estudiado y practicado más.	C."Practicando puedes aprender lo que quieras, sólo te tienes que esforzar."

Tras clasificar todas las afirmaciones de pretest y postest destacan los cambios especialmente en las afirmaciones con MF, con tendencia a MF y con MC que se pueden observar en la Tabla 4. Las respuestas con MF y con tendencia a MF pasan de representar un 23% a 9% y de un 22% a un 10% respectivamente. Las afirmaciones con MC se incrementan pasando del 33% al 55%.

Tabla 4. Comparación GE pretest y postest a preguntas abiertas

Pregunta	MF	Tendencia a MF	Tendencia a MC	MC
A	17%	33%	13%	38%
A'	9%	14%	18%	59%
B	24%	20%	32%	24%
B'	8%	16%	48%	28%
C	28%	12%	24%	36%
C'	9%	0%	13%	78%
Media Pretest	23%	22%	23%	33%
Media Postest	9%	10%	26%	55%

Respecto al segundo objetivo, para comprobar si existía relación entre la presencia de MC y el rendimiento en matemáticas se utilizaron las puntuaciones en MC de ambos grupos en el pretest y sus calificaciones del segundo trimestre en matemáticas. Para buscar si existía correlación entre las calificaciones y la presencia de MC se usó la prueba de correlación para datos no paramétricos de Spearman. El resultado mostró que en pretest no existía correlación entre la puntuación en MC y la calificación de matemáticas (r = .080, n = 51, p = .576).

DISCUSIÓN

La existencia de diferencias significativas entre las puntuaciones prestest-postest en MC en el GE estaría en línea con los resultados de intervenciones similares como las de García-Coni (2019) o Medina-Garrido et al. (2017), que mostraron que la implementación de una intervención en MC trajo consigo que los estudiantes desarrollaran y reforzaran su MC, apoyando así que el docente en el aula puede llevar a cabo acciones que provoquen un cambio en las actitudes y creencias de los estudiantes (Gamboa y Moreira-Mora, 2016). Este resultado coincide también con Brunette et al. (2022) donde tras su revisión sistemática afirman que las intervenciones pueden y fomentan una mayor MC y que incluso tienen impacto sobre los procesos de comportamiento. En Blackwell et al. (2007) de igual manera observan el impacto de su intervención sobre la MC de los estudiantes. La diferencia

observada en las respuestas de los estudiantes a las preguntas abiertas en pretest y postest refuerzan aún más la tesis de que la intervención ha tenido un impacto notable sobre su tipo de mentalidad. Mencionan en su investigación Paunesku et al. (2015) que la eficacia de la intervención depende de las oportunidades de aprendizaje que existen en el propio alumno y su contexto, y si son muy reducidas puede llevar a una inefectividad de la intervención. En nuestro caso, a pesar de ser un alumnado generalmente de nivel socioeconómico medio, sí que se encontraron diferencias significativas.

En cuanto al segundo objetivo, los resultados obtenidos no concuerdan con trabajos como el de García-Coni et al. (2022) donde sí se encuentra una conexión entre el rendimiento matemático y la puntuación en MC. Tampoco concuerdan nuestros resultados con la investigación de Blackwell et al. (2007), pues estos sí observan una mejora en el rendimiento académico. Sin embargo, a diferencia de este trabajo, ellas realizaron un seguimiento de las notas en matemáticas a lo largo de una intervención mucho más dilatada en el tiempo y no toman una única nota antes de la intervención como se hizo en el presente estudio. Se observan similitudes con el trabajo de Dong et al. (2023), donde en los estudiantes chinos no encuentran que la MC sea un predictor directo de un buen rendimiento académico en matemáticas.

En conclusión, podemos extraer de esta investigación que una intervención en MC puede fomentar en los estudiantes de 6.º de Educación Primaria la MC incluso siendo grupos donde la prevalencia en MC de inicio es media-alta con un contexto familiar y socio-económico medio. Sin embargo, no se encuentra una correlación estadísticamente significativa entre las puntuaciones en MC y el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas, aunque estas puntuaciones se compararon en pretest y no se les hizo un seguimiento después de la intervención que es donde otras intervenciones sí que han obtenido una correlación significativa.

En cuanto a las limitaciones encontradas durante la realización de este trabajo hay que mencionar que el tamaño de la muestra es reducido. Al recoger datos en solo una ocación no podemos observar el impacto que este tipo de intervenciones pueden tener a largo plazo. Al ser estudiantes aún de Educación Primaria, algunos de ellos muestran dificultad a la hora de comprender ciertos términos empleados en los ítems. Asimismo, los participantes pudieron estar condicionados por la desabilidad social a la hora de contestar la escala.

De este trabajo se derivan algunas ideas para futuras investigaciones. Sería realmente interesante realizar estudios en esta temática que trabajen de manera longitudinal (García-Coni et al., 2019; Medina-Garrido, 2017), estudiando así si los efectos de este tipo de intervenciones a largo plazo muestran regresión o no y ver si la intervención en MC tiene efecto a más largo plazo en el rendimiento académico en matemáticas. Existe mucha investigación en este campo en el contexto de Estados Unidos (Blackwell et al. 2007, Brunette et al. 2022) pero sería necesaria tanto la realización de una revisión sistemática en MC en España como aumentar las experiencias que nos permitan tener una base científica más sólida en el contexto escolar español.

Referencias

Aronson, J., Fried, C. B. y Good, C. (2002). Reducing the effects of stereotype threat on African American college students by shaping theories of intelligence. *Journal of Experimental Social Psychology, 38*, 113–125. https://doi.org/10.1006/jesp.2001.1491

Blackwell, L. S., Trzesniewski, K. H. y Dweck, C. (2007). Implicit Theories of Intelligence Predict Achievement Across an Adolescent Transition: A Longitudinal Study and an Intervention. *Child Development, 78*(1), 246–263. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.00995.x

Boaler, J. (2019). *Mente sin límites: Aprendizaje sin fronteras.* Kairós.

Brock, A. y Hundley, H. (2016). *Growth mindset coach.* Ulysses Press.

Burnette, J. L., Billingsley, J., Banks, G. C., Knouse, L. E., Hoyt, C. L., Pollack, J. M. y Simon, S. (2022). A Systematic Review and Meta-Analysis of Growth Mindset Interventions: For Whom, How, and Why Might Such Interventions Work?. *Psychological Bulletin. Advance Online Publication*. http://dx.doi.org/10.1037/bul0000368

Cantavella Edo, S. y Andrés-Roqueta, C. (2018) Un estudio sobre la mentalidad de crecimiento en niños con dislexia. *Escritos de Psicología*, *11*, 25–33. https://dx.doi.org/10.5231/psy.writ.2018.0205

Dong, L., Jia, X. y Fei, Y. (2023) How growth mindset influences mathematics achievements: A study of Chinese middle school students. *Front. Psychol, 14*, 1148754. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1148754

Dweck, C. (2012) *Mindset: How You Can Fulfill Your Potential*. Constable y Robinson.

Dweck, C. (22 de septiembre, 2015). Carol Dweck revisits "Growth mindset". *Education Week*. https://www.edweek.org/leadership/opinion-carol-dweck-revisits-the-growth-mindset/2015/09

Dweck, C. (2019) *Mindset: La actitud del éxito.* Sirio.

Gamboa Araya, R. y Moreira-Mora, T. E. (2016). Un modelo explicativo de las creencias y actitudes hacia las Matemáticas: Un análisis basado en modelos de ecuaciones estructurales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 27–51. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.155

García-Coni, A., Belén, L., Villarramos, C., Andrés, M. L. y Canet, L. (2022). El papel de la mentalidad de crecimiento en el desempeño de estudiantes de escuela Primaria. *Actualidades en Psicología, 36*(133), 42–57. http://dx.doi.org/10.15517/ap.v36i133.45774

García-Coni, A., Fernández Puentes, C., Andrés, M. L. y Canet Juric, L. (2019). Mejorar el aprendizaje escolar a partir de promover la mentalidad de crecimiento. En S. Vernucci y E. Zamora (Comps.), *La ciencia de enseñar. Aportes desde la psicología cognitiva a la educación* (pp. 85–92). Universidad Nacional de Mar del Plata.

Grasso Imig, P. (2020). Rendimiento académico: un recorrido conceptual que aproxima a una definición unificada para el ámbito superior / Academic performance: a conceptual journey that approximates a unified definition for the higher level. *Revista de Educación, 0*(20), 89-104.

Latorre-Medina, M. J. (2007). Algunos conceptos clave en torno a las creencias de los docentes en formación. Docencia e Investigación, *32*(17), 147–170.

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del domino afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *18*, 73–86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

Medina-Garrido, E. y León, J. (2017). Mejorando la percepción sobre la inteligencia: una intervención breve para alumnos de Educación Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 15*(2), 377–397. https://doi.org/10.14204/ejrep.42.16051

Mercer, S. y Ryan, S. (2019). A mindset for EFL: learners' beliefs about the role of natural talent. *ELT Journal. 64*(4), 436–444. https://doi.org/10.1093/elt/ccp083

Nalipay, M., King, R., Mordeno, I. y Wang, H. (2021). Are good teachers born or made? Teachers who hold a growth mindset about their teaching ability have better well-being. *Educational Psychology, 42*(1), 23–41. https://doi.org/10.1080/01443410.2021.2001791

Paunesku, D., Walton, G. M., Romero, C., Smith, E. N., Yeager, D. S. y Dweck, C. S. (2015). Mind-Set Interventions Are a Scalable Treatment for Academic Underachievement. *Psychological Science*, *26*(6), 784–793. https://doi.org/10.1177/0956797615571017

Real Decreto 157/2022, del 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del estado, 52,* de 3 de marzo de 2022. Recuperado de https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157/con

MODOS DE USO DE UN LIBRO DE TEXTO PARA ENSEÑAR CUADRILÁTEROS: UN ESTUDIO COMPARATIVO

Modes of using a textbook to teach quadrilaterals: a comparative study

Castillo, M. y Vargas, J.

CIMM- Centro de Investigación en Matemáttica y Meta-Matemática- Universidad de Costa Rica

Resumen

Los docentes pueden tener varias perspectivas sobre cómo utilizar los libros de texto como un recurso en el aula. Se realiza un estudio comparativo, con dos docentes de primaria con diferente experiencia práctica, sobre los modos de uso de un libro para impartir el tema de cuadriláteros. En este estudio se caracterizan las acciones realizadas por cada docente de acuerdo con las dimensiones de idoneidad didáctica, según el modo de uso de libros, y se describen las razones que las llevaron a actuar de ese modo. Los resultados muestran que la docente experta se adhirió casi por completo al libro, mientras que la novel elaboraba sus lecciones usando dicho libro como uno de otros recursos. No obstante, la docente novel omitió otras acciones que influyen en las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos. Se concluye la necesidad de tomar en cuenta un equilibrio en las adaptaciones del libro considerando las múltiples dimensiones que se proponen en la idoneidad didáctica.

Palabras clave: *modos de uso, libros de texto, idoneidad didáctica, cuadriláteros, docentes en ejercicio.*

Abstract

Teachers may have various perspectives on how to use textbooks as a resource in the classroom. A comparative study is carried out with two elementary school teachers with different practical experience on the ways of using a textbook to teach the topic of quadrilaterals. This study characterizes the actions performed by each teacher according to the dimensions of didactic suitability, according to the way of using books, and describes the reasons that led them to act in this way. The results show that the expert teacher adhered almost completely to the book, while the novice teacher elaborated her lessons using the book as one of the other resources. However, the novice teacher omitted other actions that influence her students' learning opportunities. We conclude the need to consider a balance in the adaptations of the book considering the multiple dimensions proposed in the didactic suitability.

Keywords: *modes of use, textbooks, didactic suitability, quadrilaterals, practicing teachers.*

INTRODUCCIÓN

Investigaciones muestran que los profesores interactúan de modos distintos cuando usan materiales curriculares, como el libro de texto, para enseñar un determinado contenido y emplean diferentes estrategias para usarlos (Brown, 2009; Nicol y Crespo, 2006; Remillard, 2005; Rezat, 2012). Además, la experiencia docente (entendida como años de laborar impartiendo clases en el aula), puede ser un factor influyente en el modo de interactuar con los libros (Drake y Sherin, 2009). Por ejemplo, los profesores más experimentados tienen más confianza para adaptar los materiales curriculares (Drake y Sherin, 2009; Qi et al., 2018). De esta manera, el modo de uso de los libros de texto de matemáticas son un factor influyente en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes y su rendimiento (Guillén et al., 2009; Rezat, 2012).

Castillo, M. y Vargas, J. (2024). Modos de uso de un libro de texto para enseñar cuadriláteros: un estudio comparativo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 153-160). SEIEM.

En Costa Rica no se hallan estudios sobre el uso real de libros de texto de matemáticas por parte de docentes de primaria en el aula. Si bien, en otros contextos existen investigaciones sobre el tema. Por ejemplo, en Nicol y Crespo (2006) y Drake y Sherin (2009) los maestros adaptaron los materiales considerando las necesidades de los estudiantes. También se han estudiado patrones de uso del libro por parte de los profesores, por ejemplo, en Brown (2009) se afirma que los profesores pueden: descargar, adaptar o improvisar con los materiales curriculares. En Nicol y Crespo (2006) se proponen modos de uso de los materiales tales como: adhesión, elaboración y creación. Otros estudios se centran en la capacidad de los profesores de notar oportunidades para actuar y reconocer posibles acciones en el trabajo curricular, esto es curricular noticing (Dietiker et al., 2018).

En este sentido, el presente estudio resulta un área de investigación novedosa al centrarse en el análisis comparativo del uso real que dos docentes costarricenses hacen de un libro de texto al enseñar cuadriláteros. Nos delimitamos al contenido de cuadriláteros, abordado en 4° año de primaria en el área de Geometría, siendo importante para promover habilidades de pensamiento y estrategias de resolución de problemas (Guillén et al., 2009; Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012).

ELEMENTOS TEÓRICOS

A continuación, se describe una propuesta teórica de modos de uso del libro en el aula y referimos a las dimensiones que se deben contemplar en un proceso instruccional.

Modos de uso de libro de texto

En este estudio se asume que el profesor debe interpretar y transformar activamente los materiales para diseñar su instrucción, y que las diferentes maneras de usarlo influyen en el proceso de instrucción (Brown, 2009; Remillard, 2005). Adoptamos la propuesta teórica de Nicol y Crespo (2006), quienes clasificaron el uso de libros de texto por docentes de matemática en tres modos de uso descritos a continuación. En el modo de adhesión, el docente acepta como autoridad el libro, determinando el para qué y cómo enseñar determinado contenido, de modo que no suele hacer adaptaciones y si hay alguna es superficial, contextual (es decir, refiere a cambios relativos al entorno del aula, por ejemplo: dificultades de los alumnos, obligaciones institucionales impuestas, entre otras) más que conceptual (es decir, referente al contenido matemático). Además, el docente no se conceptualiza como un recurso, en su lugar se adhiere a un recurso principalmente. En el modo de elaboración, el libro constituye una guía sobre qué y cómo enseñar, siendo el recurso principal, aunque el docente elabora su lección con otros recursos, y amplía las propuestas del libro (lecciones, tareas, problemas y ejercicios). En éste, el docente hace elaboraciones contextuales y conceptuales, y se admite a sí mismo como un recurso más. En el modo de creación, el docente analiza el potencial y las limitaciones del libro para decidir cómo usarlo, considerándolo como uno entre múltiples recursos. El texto es utilizado para generar ideas de estructura, secuencia y contexto para diseñar sus lecciones. El docente hace adaptaciones conceptuales y se concibe como un recurso con conocimientos suficientes tales que le permiten diseñar problemas.

Teoría de la idoneidad didáctica: dimensiones de un proceso instruccional

El EOS, específicamente la Teoría de la Idoneidad Didáctica permite el análisis y valoración sistemática de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En dicho marco teórico se reconoce la complejidad de la práctica docente y se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta diversas dimensiones implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas (Godino, 2013): (a) La dimensión epistémica se refiere al contenido matemático como tal, en esta se examinan los diversos tipos de problemas y contextos, la diversidad y adecuación de las representaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos que las sustentan, así como los procesos matemáticos asociados (comunicación, argumentación, generalización, etc). (b) La dimensión cognitiva considera los conocimientos previos de los alumnos, las diferencias individuales, la progresión en la dificultad de aprendizaje, es decir, si se contemplan situaciones con

niveles de dificultad diversos y si se advierten errores y dificultades, por último, se considera la evaluación. (c) La dimensión afectiva se centra en las actitudes, emociones, creencias del alumnado en el proceso de estudio y los valores en tanto utilidad de las matemáticas. (d) En las dimensiones interaccional y mediacional se presta atención a las interacciones entre el profesor y los alumnos, y entre los mismos alumnos, así como a la autonomía de los estudiantes, también se consideran los recursos materiales empleados en el proceso de estudio y la secuencia de los contenidos y materiales. (e) Finalmente, en la dimensión ecológica se contempla la adaptación al currículo de los objetivos, contenidos y su desarrollo, así como la educación en valores, la adaptación socio-profesional y las conexiones intra e interdisciplinares.

En este estudio combinamos las seis dimensiones propuestas por Godino (2013) con los modos de uso de libros propuestos por Nicol y Crespo (2006) para determinar y comparar las acciones de los docentes que conllevaron modificaciones al libro. Además, se entiende que las acciones son conceptuales si interfiere adecuadamente en el contenido matemático (dimensión epistémica) y no dependen del contexto o del entorno (otras dimensiones).

OBJETIVOS

Los objetivos del presente estudio son: (1) Identificar los modos de uso del libro (adhesión, elaboración, creación) adoptados por docentes de primaria con un nivel de experiencia práctica diferente (una novel y una experta). (2) Determinar y comparar las acciones específicas realizadas por las docentes que conllevaron modificaciones a lo establecido en el libro, según las dimensiones del proceso instruccional. (3) Determinar la razón de ser de las acciones realizadas por las docentes que conllevaron modificaciones a lo establecido en el libro.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

El enfoque metodológico es cualitativo (Strauss y Corbin, 1990), el método es un estudio de casos. Los participantes de este estudio fueron dos docentes de primaria de una misma institución educativa de Costa Rica y con diferentes años de experiencia laboral. La docente experta cuenta con 22 años impartiendo docencia en primaria y estudió una licenciatura, de Ciencias de la Educación con Énfasis I y II Ciclo. La docente novel tiene 3 años de experiencia y estudió un grado en la misma carrera. La institución educativa donde imparten docencia es pública y se ubica en una zona urbana.

Los datos proceden de las grabaciones transcritas de las lecciones que impartieron ambas docentes sobre los cuadriláteros y de entrevistas individuales realizadas al finalizar la instrucción, para indagar sobre las decisiones que tomaron en cuanto al uso del libro. Ambas docentes usaron el libro Matemática 4 de la Asociación libros para todos (2023) para impartir las lecciones (pp. 112-123). En el libro se inicia el tema con dos problemas de identificación de cuadriláteros (p. 112). Seguidamente se define cuadrilátero (p. 113), un código QR permite acceder a un enunciado que implica usar GeoGebra para caracterizar cada cuadrilátero a partir de las diagonales. En las p.114-115 existen ejercicios de identificación de elementos de los cuadriláteros, después se define paralelogramo y no paralelogramo y se proponen representaciones gráficas. Finalmente existen ejercicios para: identificar y clasificar en paralelogramos o no paralelogramos, determinar semejanzas y diferencias, definir algunos cuadriláteros (pp. 116-117), construir un cuadrado y rombo con regla y compás (pp. 118-119), trazar cuadriláteros (pp. 120-121), reconocer y trazar cuadriláteros (pp. 122-123). La docente experta empleó 4 lecciones para abarcar el tema, mientras que la novel empleó 5, cada lección tenía una duración de 80 minutos.

Se realiza un análisis de contenido para examinar las transcripciones y entrevistas. Se consideran los tres modos de uso propuestos por Nicol y Crespo (2006) y las seis dimensiones de la idoneidad didáctica (Godino, 2013) como categorías a priori que permiten caracterizar las acciones que las docentes llevaron a cabo en cada dimensión, la comparación de estas acciones se realiza por medio de la Tabla 1. El análisis se realizó de forma independiente por cada investigador y luego se

consensuó. Por ejemplo, en el fragmento "indica resolver los ejercicios de las páginas 115 y 116, y llama a los alumnos para revisar la tarea (p.114)", se evidencia el uso directo del libro, y la asignación como evaluación de los ejercicios (p.114), aunque la intención del autor no era esa, esto responde a la dimensión cognitiva, y la reportamos como la acción 17 (Tabla 1).

RESULTADOS

En este apartado se muestran los modos de uso del libro de las docentes, se determinan y comparan las acciones llevadas a cabo por las docentes que conllevaron modificaciones al libro y se describen las principales razones que llevaron a las maestras a realizar una u otra acción.

Modos de uso adoptados por la docente experta

En la lección 1 la docente experta formuló preguntas orales dirigidas al grupo para asegurarse que los estudiantes tuvieran los conocimientos previos antes de usar del libro. Luego, se empeñó en explicar los ejercicios (pp.112-113), en cuanto detectaba que los niños presentaban alguna dificultad. Esto no se considera en el libro como tal (no trae indicaciones para el docente), por lo que son adaptaciones contextuales. Después, la docente siguió lo estipulado en el libro hasta la página 114, soló que omitió el código QR (p. 113) Por ende, en esta lección, la docente adopta un modo de uso de adhesión.

En la lección 2, esta docente propuso un ejercicio distinto a los del libro, posteriormente solicitó a los niños dibujar con regla varios cuadriláteros con medidas de lados específicas, lo cual no estaba indicado en el libro. La docente tomó tiempo para explicar en la pizarra el uso de la regla, aclaró que la medida se debe hacer a partir de cero, dibujó en la pizarra un fragmento de la regla colocando el cero y haciendo divisiones. La docente posteriormente propuso otros ejercicios muy similares a los del libro. Finalmente, la docente utilizó la página 115 del libro para explicar la definición de paralelogramo y no paralelogramo y resolver los ejercicios. El modo de uso fue de elaboración, el libro fue una base para planear su lección, pero ella proporcionó otros ejercicios.

En la lección 3, la docente experta siguió la secuencia del libro sin innovaciones del contenido, repasó la página 115 y trabajó los ejercicios de las páginas 116 y 117, luego se revisó en la pizarra el trabajo. Las modificaciones fueron contextuales únicamente, por ejemplo, recordó lo visto en las clases previas y ayudó a los estudiantes con las dificultades al resolver los ejercicios, resultando en un modo de uso de adhesión. Este mismo estilo de recordatorios y preguntas guía se dieron en la lección 4. La docente omitió las páginas 118 y 119 del libro, en donde se proponían dos ejercicios para construir con regla y compás un cuadrado y un rectángulo. Esto la llevó a modificar la instrucción del ejercicio 1 de la página 120, en cuanto a la medida del cuadrado y del rectángulo, así como del uso de la regla, pero no del compás como se proponía en el libro. Se trabajaron los ejercicios de l páginas 120-123 en el aula sin realizar adaptaciones conceptuales. La docente invirtió tiempo en explicar cómo trazar figuras en la cuadrícula y en revisar el trabajo de los niños. Las modificaciones fueron superficiales y contextuales, siguiendo la secuencia del libro, por lo que el modo de uso es de adhesión. En concreto, la docente sigue un modo de uso de adhesión en todas las lecciones a excepción de 2.

Modos de uso adoptados por la docente novel

En la lección 1 la docente novel comenzó con una situación diferente a la indicada por el libro de texto. La situación fue: Kimberly, Diana y Elena, en la clase de arte, hicieron figuras geométricas (dibujos de distintos cuadriláteros), ¿qué tienen en común las figuras? Seguidamente, propuso trabajar con las páginas 112 y 113 del libro y terminó la clase con un resumen de lo visto. Al igual que la docente experta omitió el código QR (p. 113). El modo de uso del libro es de elaboración. En la lección 2, se hizo un uso indirecto del libro en la página 115. La docente no indicó que leyeran dicha página, pero las definiciones y representaciones que utilizó son las mismas para los paralelogramos y no paralelogramos. Ella amplío la propuesta del libro con preguntas guía y con una situación en la cual solicitó construir paralelogramos con plastilina, lo que permitió manipulación directa de la representación del cuadrilátero. Por ende, en esta lección, el modo de uso fue de elaboración.

En la lección 3 la docente usó los ejercicios de las páginas 115 y 116 del libro. Posteriormente, escribió en la pizarra de forma diferente al libro definiciones de cada cuadrilátero, esto constituye una ampliación del material. Finalmente, continuó con los ejercicios de la página 117. Por ello, el modo de uso empleado fue de elaboración. En la lección 4 empezó revisando los ejercicios de la página 117. Luego, escribió en la pizarra: en todo cuadrilátero, la suma de los ángulos internos es igual a 360°, esta es una ampliación significativa del material utilizado, pues es una propiedad no considerada en el libro, ni en el currículo para 4° año. También, pidió que anotaran la medida de cada ángulo faltante en algunas figuras. Luego, repasó lo visto hasta el momento. Posteriormente, empleó los ejercicios de las páginas 120 y 121 del libro. Por lo tanto, el modo de uso es de elaboración. En la lección 5 usó los ejercicios de la página 122 del libro, pero realizó una ampliación con actividades de repaso para realizar en el cuaderno. Se observó el uso del libro, pero un mayor uso de actividades de otros recursos, con lo que se deduce que el modo en que lo usó fue de elaboración.

Análisis y comparación de los modos del uso del libro de texto por ambas docentes junto con las dimensiones del proceso instruccional

La Tabla 1 resume las acciones específicas identificadas en los procesos instruccionales llevados a cabo por las docentes que implicaron modificaciones al libro. Las acciones se presentan según refieran a una u otra dimensión del proceso instruccional de acuerdo con Godino (2013). Además, se proporciona información sobre el momento específico en que las docentes las llevaron a cabo, para la docente experta en las lecciones de la 1 a la 4 y para la docente novel en las lecciones de la 1 a la 5. Por último, se incluye el modo de uso del libro de texto según los resultados del apartado previo.

En primer lugar, algunas acciones (por ejemplo, la 2) realizadas por ambas docentes no conllevaron un mismo modo de uso (Nicol y Crespo, 2006), esto es porque para estar en uno u otro modo de uso se considera si la acción es contextual o conceptual y su frecuencia. Se distinguió entre acciones diferidas a la propuesta del libro que se hacen sin este o con este, esto para identificar cuando el libro se usó o no de modo directo. En lo epistémico, a pesar de que la docente experta definió conceptos que no aparecen en el libro, sólo lo hizo una vez, en la lección 1 al definir el concepto de diagonal, con lo cual, no se alcanzó el modo de elaboración, sino que estuvo en todo momento en el modo de uso de adhesión del libro de texto. Dicho esto, la docente experta sí llevó a cabo adaptaciones conceptuales, pero de manera aislada u ocasional. Esto difiere de la docente novel, quien realizó este tipo de adaptaciones más frecuentemente. Nótese que las únicas adaptaciones conceptuales que no hizo la docente experta y que la docente novel si considera son la 3, 4 y 7. No obstante, cabe aclarar que estas tres acciones se asocian al tema de "suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero", temática que no debía abordase en cuarto año de primaria. Entonces, ambas realizaron las mismas acciones conceptuales al abordar los mismos contenidos, sólo que la frecuencia con las que las realizaron no fue la misma, lo que llevó a la novel a estar en el modo de "Elaboración" en todas las lecciones, mientras que a la experta sólo en la lección 2.

Si nos enfocamos en las adaptaciones realizadas en la dimensión cognitiva, con o sin libro, puede notarse que la docente experta realizó adaptaciones contextuales que la novel no realizó, específicamente las acciones 13, 15. Estas refieren a repasar conceptos o términos que aparecen en el libro (vértice, ángulo, semejanza), o cómo hacer un uso adecuado de la regla. En cuanto a dar una atención más individual al trabajo y dudas de los niños, la docente experta solía pasar mucho tiempo entre las filas guiando el trabajo, mientras que la docente novel, solía dar indicaciones y dejar a los niños trabajando solos, mientras revisaba tareas pendientes. También es de notar que la docente experta llevó a cabo adaptaciones en esta dimensión con más frecuencia que la docente novel: tratar errores o dificultades de los alumnos (12), realizar preguntas adicionales para garantizar que se comprende la instrucción y el problema (14), y supervisar el trabajo en la clase (16). La única acción que la docente experta no lleva a cabo es la de asignar como tarea páginas del libro (17).

En la dimensión afectiva se identificó que ambas docentes motivaron la participación oral y en la pizarra de los niños, esto con o sin el libro. En la dimensión interaccional la docente experta realizó acciones que la docente novel no llevó a cabo, esto es, agregar explicaciones sobre el enunciado de un problema y sobre las formas de resolverlos y los procedimientos que se deben llevar a cabo, la docente solía resolver un ejemplo y luego delegar el resto a los niños (24). En la dimensión mediacional únicamente la docente novel propuso usar otro recurso adicional, en este caso trabajar con plastilina para construir cuadriláteros. Por otro lado, ambas docentes decidieron no utilizar el recurso tecnológico (GeoGebra) propuesto en el libro y el uso del compás, además eligieron alterar el orden propuesto en el libro, al omitir ejercicios de la p. 113, p. 118 y p. 119. Finalmente, en la dimensión ecológica únicamente la docente novel abordó contenidos fuera de los establecido en el currículum, por su parte, con relación a la educación en valores ambas docentes promovieron el realizar una oración para agradecer por los alimentos y para comenzar el día lectivo.

Tabla 2. Acciones realizadas por las docentes según las dimensiones con o sin el libro

Dimensiones	Acciones realizadas por las docentes que conllevaron prácticas diferentes a lo establecido en el libro	Modo de uso		
		Adhesión	Elaboración	
		D.E	D. E	D. N
Epistémica (SL)	1. Proponer problemas diferentes al texto	-	2	1-2, 4-5
	2. Definir conceptos diferentes al libro	1	-	2, 3
	3. Usar representaciones diferentes al libro	-	-	4, 5
	4. Enunciar proposiciones diferentes al libro	-	-	4
	5. Realizar o solicita procedimientos diferentes al libro	-	2	2, 4
	6. Comprobar proposiciones diferentes al libro	-	2	4
	7. Solicitar justificar respuestas fuera del libro	-	-	5
	8. Generalizar características comunes de cuadriláteros	-	2	1
Epistémica (CL)	9. Proponer no ejemplos de lados paralelos y consecutivos, al tratar un problema del libro.	-	2	-
Cognitiva (SL)	10. Repasar lo visto en cada clase anterior (resumen, preguntas, recordatorio oral)	1, 3, 4	2	Todas
	11. Proponer ejercicios de refuerzo	4	2	4, 5
	12. Prever dificultades y tratar errores	1, 4		1
Cognitiva (CL)	13. Repasar definiciones conocidas (vértice, ángulo), el uso de la regla y el término semejanza	1, 3, 4	2	-
	14. Agregar preguntas para comprender un problema del libro o guiar la resolución de este	1, 3		3
	15. Preguntar si tienen dudas, atención individual	1, 3, 4	2	-
	16. Supervisar individualmente el trabajo de clase	1, 3, 4	2	1, 2
	17. Asignar como evaluación páginas del libro	-		1, 3, 4, 5
Afectiva (SL)	18. Motivar la participación oral, en la pizarra	1	2	1, 2, 4, 5
Afectiva (CL)	23. Motivar la participación oral, en la pizarra	1, 3, 4	2	Todas
Mediacional (SL)	19. Usar otros recursos (plastilina)	-		2
Mediacional (CL)	25. Omitir recursos propuestos en el libro.	1, 4	-	1, 4
Ecológica (SL)	26. Omitir ejercicios del libro (cambio en el orden)	1, 4	-	1, 4
	21. Rezar al comenzar la clase y antes de ir al comedor	1, 3, 4	2	Todas
	22. Conectar con otras materias		2	1
Interaccional (CL)	24. Explicar un problema del libro, indicando posibles formas de resolverlos y los procedimientos demandados, o conceptos asociados.	1, 3, 4	-	-

Nota. D.E significa docente experta y D.N docente novel. SL significa sin libro, CL con libro.

Razones por las que las docentes realizan ciertas acciones

Para conocer las razones que motivaron a las docentes a realizar las acciones previamente expuestas se analizaron los datos de la entrevista. En primer lugar, se preguntó si antes de planear las lecciones revisaron el libro y cómo lo hicieron. La docente experta afirmó haber revisado el programa de estudios para ver si el contenido del libro correspondía. La docente novel precisó haber revisado las actividades para buscar otras adicionales o bien temas como "la suma de los ángulos internos del cuadrilátero" que no se consideraba en el texto (ni en el tema de 4°) u otros conceptos.

En segundo lugar, se les preguntó qué partes del libro decidieron usar y por qué, qué partes decidió descartar y por qué. La docente experta afirmó no usar las páginas 118 y 119 debido a la dificultad que conlleva usar la regla y compás, ni GeoGebra pues no tienen laboratorio de cómputo y porque se requiere de mucho tiempo. Por su parte, la docente novel afirmó descartar las mismas páginas debido a que es peligroso usar compás para los niños. La docente novel confirmó que no se había percatado de la existencia del código QR hasta el momento de la entrevista, aun así, afirmó que lo descartaría por falta de recursos tecnológicos. En tercer lugar, se les consultó si usaron otros recursos adicionales, ambas afirmaron usar otros libros e internet para buscar otras actividades.

Seguidamente, se les consultó sobre las principales fortalezas y debilidades del libro de texto, una debilidad destacada por la docente experta fue que algunos ejercicios en los que se debía usar regla son difíciles para los niños pues no saben cómo usarla para medir. La docente novel reclamó la falta de contenidos, por lo que se debe recurrir a internet para completarlos. Finalmente, se preguntó si realizaron cambios producto de considerar las debilidades y si evidenciaron errores en el texto, a lo que ambas docentes afirmaron que no encontraron errores. En cuanto a los cambios, la docente experta mencionó que la cuadrícula era difícil para los niños, por lo que dedicó tiempo para explicarlo en el aula, la docente novel solo afirmó un cambio: incluir más teoría.

De la idea anterior se refleja que la docente experta llevó a cabo adaptaciones contextuales en la dimensión cognitiva e interaccional de manera consciente. No obstante, no mencionó haber incluido definiciones, o situaciones problemas fuera del libro, esto indica falta de consciencia de las adaptaciones conceptuales. Cabe destacar que la docente experta en varias ocasiones mencionó que necesitaba dedicar un tiempo de la clase para que los niños escribieran la materia en sus cuadernos pues era un requisito institucional. Es decir, la razón de incluir problemas u otras definiciones puede asociarse meramente a un requisito por cumplir en el contexto de la escuela, y no por una intención de adaptar el contenido matemático. Por su parte, la docente novel sí afirmó haber revisado los problemas y conceptos, aunque estaba convencida que hacían falta contenidos.

CONCLUSIONES

En este estudio nos planteamos identificar los modos de uso que adoptaban dos maestras de educación primaria en Costa Rica que tenían diferencias en años de experiencia laboral. En contraste con estudios previos realizados en otros países (Drake y Sherin, 2009; Nicol y Crespo, 2006; Qi et al., 2018), aquí la docente experta no realizó suficientes adaptaciones que la condujeran a estar en un nivel más alto que el alcanzado por la docente novel, esto principalmente se debe a que la experta priorizó adaptaciones contextuales antes que las conceptuales. También se determinaron y compararon las acciones realizadas por las docentes. Se encontró que a pesar de que las docentes alcanzan niveles de uso distintos, las adaptaciones conceptuales no son distintas cuando abordaron los mismos contenidos, sino que fue la frecuencia al realizar estas acciones las que fueron determinantes para alcanzar un nivel u otro.

Finalmente, analizamos las razones de las docentes para llevar a cabo determinadas acciones. Los resultados reflejaron que los principios que guiaron la acción de la docente experta son más contextuales (dificultades de los alumnos, la obligación de tener en el cuaderno algo escrito, etc.) que conceptuales, es decir, basados en la reflexión del abordaje oportuno del contenido matemático. De

hecho, la docente experta sólo evidenció ser consiente de haber llevado a cabo acciones contextuales. La docente novel, por su parte, tiene un modo de uso de elaboración, pues llevó a cabo adaptaciones conceptuales más que contextuales, siendo, consciente de llevar a cabo las conceptuales. Esto refleja la importancia de ahondar en las razones que los docentes dan al uso del libro, y no sólo centrarse en el análisis de la instrucción, pues, aunque una acción tenga una repercusión conceptual, los docentes pueden no ser conscientes de esto. Por último, el hecho de que ninguna docente alcanzara el nivel de creación implica que no han tenido un posicionamiento crítico, analizando y detectando errores, debilidades o fortalezas, hecho que invita a la reflexión.

A pesar de que la docente novel se enfocó en la dimensión epistémica, otras dimensiones fueron descuidadas, dado que esto también puede repercutir en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes, conviene reflexionar sobre la importancia de mantener un equilibrio entre las dimensiones involucradas en cada modo de uso. En efecto, la docente novel solía asignar como tarea páginas del libro, con lo cual sus alumnos, no tuvieron oportunidad de verificar soluciones en el aula. Una conclusión en relación con las herramientas teóricas empleadas para analizar los procesos instruccionales es la utilidad de la idoneidad didáctica para dar cuenta qué dimensiones deben priorizarse en posteriores implementaciones. Además, invita a reflexionar sobre la posibilidad de adaptar los modos de uso propuestos por Nicol y Crespo (2006), de forma que en cada uno de estos (adhesión, elaboración, creación) se considere como un criterio de clasificación, la existencia de un equilibrio de las adaptaciones en cada dimensión, esto es una cuestión abierta.

Referencias

Asociación libros para todos. (2023). *Matemática 4. Libros para todos*.

Brown, M. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. En J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann y G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17– 36). Routledge.

Dietiker, L., Lorraine, M., Males, J. y Amador, D. (2018). Curricular noticing: A comprehensive framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(5), 521– 532. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.5.0521

Drake, C. y Sherin, M. (2009) Developing curriculum vision and trust: Changes in teachers' curriculum strategies. En J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann y G. M. Lloyd (Eds), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 321–337). Routledge.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111–132.

Guillén, G., González, E. y García, M.A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 247-258). SEIEM.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas. Ministerio de Educación Pública*. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Nicol, C. y Crespo, S. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 331–355. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5423-y

Qi, C., Zhang, X. y Huang, D. (2018). Textbook use by teachers in junior high school inrelation to their role. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat y J. Visnovska (Eds.), Research on mathematics textbooks and teachers' resources (pp. 29–51). ICME-13Monographs. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_2

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211–246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources Mathematics Teacher Education* (Vol. 7, pp. 231–245). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94- 007-1966-8_12

Strauss, L. y Corbin, J. (1990). *Basis of Qualitative Research*. Sage.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA

Mathematical problem solving in primary education teacher training in Spain

Castro-Rodríguez, E.[a], Piñeiro, J. L.[b] y Castro, E.[a]

[a]Universidad de Granada, España. [b]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile.

Resumen

Este trabajo describe la presencia de la resolución de problemas y su enseñanza en las guías docentes de las asignaturas obligatorias del área de Didáctica de la Matemática pertenecientes a los grados de Maestro en Educación Primaria en España. Para ello, hemos realizado un análisis de contenido de 114 guías de las 39 universidades públicas españolas. Los resultados muestran un énfasis en la competencia para resolver problemas por encima de elementos de conocimiento especializado. Asimismo, sobre el conocimiento sobre la resolución de problemas aparecen con mayor frecuencia tipos de problemas, mientras que respecto al conocimiento didáctico de la resolución de problemas los tópicos relativos a la invención de problemas son los más frecuentes. Concluimos la necesidad de incluir aspectos como la consideración del resolutor o factores no cognitivos para mejorar la formación sobre resolución de problemas de los futuros maestros.

Palabras clave: *educación matemática, resolución de problemas, formación de docentes de primaria, análisis de documentos curriculares, Educación Universitaria.*

Abstract

This work describes the presence of problem solving and its teaching in the syllabuses of the compulsory subjects in the area of Didactics of Mathematics belonging to the university degrees of Teacher in Primary Education in Spain. We have carried out a content analysis of 114 syllabuses from 39 Spanish public universities. The results show an emphasis on problem-solving competence over elements of specialized knowledge. Likewise, regarding knowledge about problem characterization appear more frequently, while regarding pedagogical problem solving knowledge, topics related to the problem posing are more frequent. We conclude the need to include aspects such as the consideration of the solver or non-cognitive factors to improve teacher training on problem solving.

Keywords: *mathematics education, problem solving, primary teacher training, syllabi analysis, University Education.*

INTRODUCCIÓN

En la etapa de educación primaria, la resolución de problemas (RP)—entendida como una tarea para la que el resolutor no dispone de un procedimiento inmediato y directo a la solución, pero sí la asunción de que existe un camino posible— es un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático (Carrillo et al., 2019; Olivares et al., 2020; Schoenfeld, 2013). Esta relevancia queda manifestada en el documento curricular español para la etapa de educación primaria, ya que se promueve como principio pedagógico fomentar la integración de las competencias dedicando un tiempo del horario lectivo a la RP (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). En este currículo, la resolución de problemas es la competencia a la que se dedica especial atención,

Castro-Rodríguez, E., Piñeiro, J. L. y Castro, E. (2024). Resolución de problemas matemáticos en la formación de maestros de educación primaria en España. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 161-168). SEIEM.

"considerándola más como principio metodológico que como contenido en sí mismo" (Contreras, p. 66, 2022).

Sin embargo, para que esto pueda llevarse a cabo es necesario formar a los docentes y conocer sus planes de estudio, pues si estos son internamente coherentes tienden a tener un mayor impacto en el conocimiento de los futuros docentes (Tatto, 2018). En este sentido, este trabajo pretende contribuir a este campo planteándonos como objetivo describir la presencia de la RP en las guías docentes de las asignaturas del área de Didáctica de la Matemática pertenecientes a los títulos universitarios oficiales que habilitan para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria en España.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Aunque la investigación se ha centrado en la RP durante décadas, su implementación continúa siendo un desafío para muchos profesores (Chapman, 2016). Independientemente de las causas, el desarrollo profesional es fundamental para aquellos docentes que necesitan ayuda para desarrollar la RP en su aula.

Recientemente, diversos expertos en el área se han centrado en el desarrollo profesional relativo a la RP (e.g., Carrillo et al., 2019; Gourdeau, 2019; Masingila et al., 2018; Mellone et al., 2021). Por ejemplo, en Estados Unidos, Masingila et al. (2018) llevaron a cabo un estudio en el que dos formadores de maestros novatos trabajaron con un formador experimentado a través de tutorías en donde reflexionaron sobre el proceso de aprender a enseñar a través de la RP. Los resultados mostraron que las relaciones de tutoría, junto con una postura de indagación, permitieron a los dos formadores novatos elegir y usar tareas de RP de manera efectiva y desarrollar su capacidad para fomentar su enseñanza en los futuros maestros. En el contexto de un profesor de secundaria español, Carillo et al., (2019) se centran en analizar el conocimiento para manejar la RP en una sesión de clase. Los autores concluyen que, a través de la RP, se pueden mejorar las interconexiones matemáticas, los modos de hacer matemáticas y la comprensión para encontrar soluciones.

Alternativamente, existen estudios que indagan el desarrollo profesional que puede tener lugar en programas más estructurados (e.g., Felmer y Perdomo-Díaz, 2017; Leung, 2016; Wake et al., 2016). Por ejemplo, en Chile, se llevó a cabo la iniciativa denominada Activación de Resolución de Problemas en Aula con el objetivo de introducir la RP en las clases de los docentes de primaria y secundaria (Felmer y Perdomo-Díaz, 2017; Felmer et al., 2019; Saadati y Felmer, 2021). Para ello, se llevaron a cabo tres talleres de carácter práctico en varias regiones del país. Los resultados mostraron que hubo una mejora estadísticamente significativa en el desempeño al resolver problemas entre los escolares cuyos maestros participaron en los talleres (Saadati y Felmer, 2021). En otras ocasiones, el desarrollo profesional se llevó a cabo a través de proyectos, como en Estados Unidos (Hähkiöniemi y Francisco, 2019), Taiwán (Leung, 2016) o Inglaterra (Wake et al., 2016), en donde los investigadores tienen reuniones con los docentes para reflexionar sobre la planificación de la enseñanza y posteriormente, sobre su puesta en práctica.

Otras investigaciones se han centrado en el desarrollo profesional relativo a la RP llevado a cabo en la formación inicial (e.g., Gourdeau, 2019; Mellone et al., 2021; Morris y Hiebert, 2017). Por ejemplo, Mellone et al. (2021) analizaron los cambios en las concepciones y creencias de futuros profesores de secundaria sobre la RP después de un curso de Matemáticas elementales donde se utilizó un método de enseñanza relacionado con la RP. A través de cuestionarios y entrevistas, mostraron que las concepciones y creencias que tienen sobre RP están condicionadas por sus experiencias y por el contexto cultural en el que viven. También relativo a la formación inicial de profesores, Gourdeau (2019) describe un curso para futuros profesores de secundaria donde la RP ocupa un papel central, tanto como tema y como enfoque pedagógico, ya que su objetivo es que los futuros profesores experimenten la RP en un nivel profundo y comprendan los procesos involucrados. En cualquier caso,

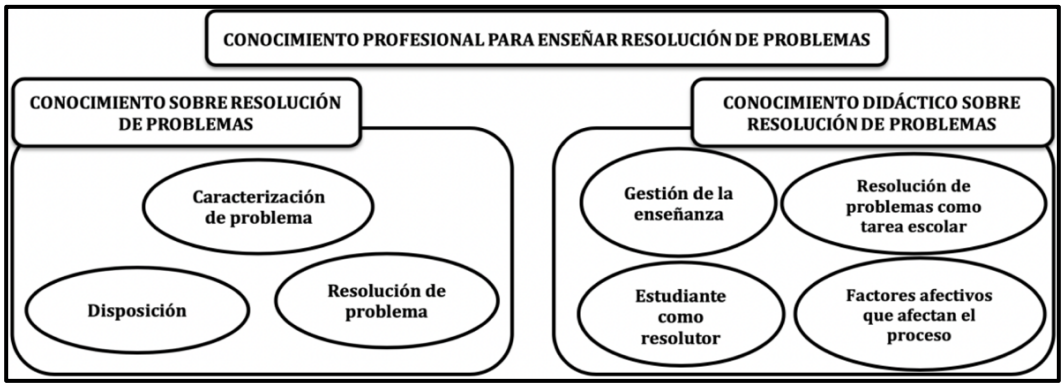
los contenidos a los que los futuros profesores son enfrentados en su formación inicial suelen ser utilizados posteriormente en su práctica.

En España, algunas universidades incluyen asignaturas en el plan de formación inicial de maestros de primaria que desarrollan el conocimiento profesional sobre la RP. Por ejemplo, la Universidad de Almería con la asignatura Resolución de Problemas y Conexiones Matemáticas, o la Universidad de Huelva, con la asignatura Introducción a la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria, en las que se contempla la enseñanza de estrategias o heurísticos, tipos de problemas y aspectos metacognitivos entre otros. Sin embargo, hasta el momento no hemos encontrado indicios de estudios que se centren en la enseñanza de la RP que se desarrolla en el actual plan de formación inicial de maestros en España.

CONOCIMIENTO PROFESIONAL PARA ENSEÑAR RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Dado que en este trabajo nos centramos en la formación inicial de los maestros de primaria relativa a la enseñanza y aprendizaje de la RP, tomamos como marco de referencia el trabajo de Piñeiro et al. (2019). Este trabajo presenta una propuesta destacando elementos del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico o pedagógico vinculados a la resolución de problemas (Figura 1).

Figura 1. Componentes del conocimiento profesional para enseñar resolución de problemas (Piñeiro et al., 2019)



En el modelo, la primera componente se compone de tres elementos que describimos a continuación.

- Caracterización del problema. Esta componente hace referencia a los conocimientos sobre lo que constituye un problema.
- Conocimiento sobre cómo resolver problemas. La RP, se suele entender como el proceso personal, dirigido y procesual que es realizado a través de fases. Poder realizarlo adecuadamente se corresponde con una competencia propia para resolver problemas. Sin embargo, otros aspectos teóricos deben ser conocidos por los profesores: el conocimiento de las etapas o fases de resolución de problemas, esto es, comprender el problema, establecer un plan, ejecutarlo y evaluarlo (Polya, 1981), y que dicho proceso no es lineal, pues normalmente es necesario ir hacia atrás para poder avanzar (fases de resolución y su caracterización); el conocimiento de estrategias heurísticas; el conocimiento de las formas en las que los resolutores de problemas se autorregulan, monitorean y controlan los heurísticos y los conocimientos para resolver un problema, permitiendo que pueda tomar decisiones acertadas sobre lo que se hace (metacognición); y el conocimiento de la influencia del dominio afectivo en la RP (aspectos no cognitivos).
- Disposición. Dada la importancia de plantear desafíos adecuados para que los estudiantes disfruten durante la RP, se considera la disposición a aceptar el desafío como otro aspecto a considerar dentro del conocimiento sobre la resolución de problemas.

La segunda componente, el conocimiento didáctico sobre la RP, tiene como eje articulador el triángulo didáctico y sus interacciones, por lo que en él distinguimos cuatro elementos:

- Conocimiento del estudiante como resolutor de problemas. Este se corresponde con la interacción entre el estudiante y la RP, específicamente con los elementos concernientes al aprendizaje. En nuestro contexto, supone un conocimiento del profesor que permite poner atención en lo que pueden hacer, qué puede interferir y hasta dónde se podrá desarrollar la competencia para resolver problemas de los estudiantes. Es decir, el conocimiento de las características de los resolutores exitosos y al conocimiento de los principales errores y dificultades que pueden aparecer durante la RP.
- Conocimiento sobre la resolución de problemas como tarea escolar. La interacción que se produce entre el profesor y la RP implica conocimientos relativos al problema y al proceso de resolución como tarea escolar como el centrado en la capacidad para seleccionar y plantear problemas, el conocimiento de estrategias y modelos de RP, y el conocimiento sobre los beneficios de la invención de problemas y dónde y cuándo plantearla.
- Conocimiento sobre los factores no cognitivos que afectan a la RP. El tercer componente tiene relación con la interacción entre el profesor y el estudiante en términos de los factores no cognitivos (emociones, actitudes y creencias) de cada uno en torno a la RP. El metaconocimiento sobre las concepciones y creencias y las implicaciones mutuas que estos tienen en el aprendizaje y la enseñanza de la RP. En este sentido, es necesario proponer situaciones que favorezcan creencias relacionadas con el tiempo necesario para resolver un problema, las opciones de resolución múltiple o la posibilidad de varias respuestas, así como ser conscientes de que la ansiedad y frustración son emociones normales en el proceso de resolución de un problema, al igual que el disfrute y la satisfacción al resolverlos.
- Conocimiento sobre la gestión de la RP. Un cuarto componente supone la relación triple entre el profesor, el estudiante y la RP. En él se incluye el conocimiento de los enfoques de enseñanza de la RP, la gestión del discurso, la gestión de los bloqueos de los estudiantes, la gestión de la evaluación de la RP y la gestión de los recursos.

MÉTODO

Llevamos a cabo un análisis de documentos (Bowen, 2009) de las guías docentes de las asignaturas que han de cursar todos los estudiantes para finalizar sus estudios (de carácter básico u obligatorio) del área de Didáctica de la Matemática pertenecientes al Grado en Maestro de Educación Primaria de las universidades públicas españolas. En las 39 universidades públicas españolas que imparten dicha titulación, existen un total de 114 asignaturas del área de Didáctica de la Matemática de carácter básico u obligatorio. Particularmente, las guías analizadas pertenecen al curso académico 2022-2023.

Las unidades de análisis fueron aquellos fragmentos con alguna mención a la RP pertenecientes a los apartados de objetivos, competencias, contenidos, metodología y evaluación. Las categorías para el análisis de los documentos en este estudio atienden a las componentes de conocimiento profesional sobre RP, obtenidas del marco teórico presentado anteriormente y presentes en la Tabla 1. Además, se codificó con la categoría denominada Tema aquellas menciones que sólo contienen los términos "Resolución de problemas" sin mayor especificación.

Los fragmentos de los documentos se codificaron en torno a las categorías de análisis utilizando la herramienta MAXQDA. Se utilizó un proceso deductivo ya que las categorías consideradas para la codificación están formuladas desde la teoría. Dos de los investigadores codificaron de manera independiente el 5% de los documentos alcanzando una índice kappa de 0,944, siendo el porcentaje de acuerdo entre codificadores del 95%. Los desacuerdos fueron revisados y se llegaron a acuerdos para la codificación del resto de documentos. Una vez codificados los datos, calculamos tablas de frecuencias y estadísticos descriptivos de las categorías.

Tabla 1. Categorías de análisis

Categoría	Subcategoría
Conocimiento sobre la RP	
Noción de problema	Tarea sin procedimiento de resolución conocido Consideración del resolutor Tipos de tareas que se presentan como problemas
RP	Fases de resolución y su caracterización Estrategias Metacognición Factores no cognitivos
Disposición	Aceptación del desafío de resolver el problema
Conocimiento didáctico sobre la RP	
Estudiante como resolutor	Características de resolutores exitosos Dificultades y errores
RP como tarea escolar	Selección de problemas Modelos de resolución y estrategias Invención de problemas
Factores no cognitivos	Influencia mutua de creencias y concepciones
Gestión de la enseñanza de la RP	Enfoques o vías de acceso Gestión del discurso Gestión de los atascos Gestión de la evaluación Gestión de los recursos

RESULTADOS

Respecto a la situación general de las asignaturas de carácter básico u obligatorio del área de Didáctica de la Matemática, dado que las directrices nacionales (MEC, 2007) para la formación inicial de maestros de primaria no especifican el número de asignaturas y sus créditos, encontramos que la mediana del número de asignaturas es 3, siendo en 6 universidades sólo 2 asignaturas, mientras que 3 instituciones presentan el máximo de 4. En relación con los créditos totales por universidad, la mediana es 18, el mínimo es 12 y el máximo 27, además el número de créditos de las asignaturas varía desde 3 hasta 12, constando en su mayoría (82,5%) de 6 créditos.

La mayoría de las guías docentes contienen alguna mención a la RP pues sólo un 5% de las asignaturas no presentan ninguna mención a esta. No existen grandes diferencias al distinguir entre tipos de conocimiento en los documentos analizados, siendo algo superiores las menciones a la competencia RP con un 37% de segmentos codificados, seguido del conocimiento sobre la RP con un 33,6% y el conocimiento didáctico sobre RP con un 28,2% (Tabla 2).

Tabla 2. Frecuencia de las componentes generales en las guías analizadas

	Documentos (N=114)	Segmentos (N=1092)
Competencia RP	103 (90,4%)	412 (37,7%)
Conocimiento sobre RP	100 (87,8%)	367 (33,6%)
Conocimiento didáctico sobre RP	103 (90,4%)	308 (28,2%)
Tema	5 (4,4%)	5 (0,5%)
Documentos con categoría(s)	108 (95%)	
Documentos sin categoría(s)	6 (5%)	

Centrándonos en las categorías de conocimiento sobre RP encontramos que la categoría con mayor presencia en las guías analizadas es tipos de tareas la que se pueden presentar como problemas (por ejemplo, los contenidos de la guía docente de la asignatura Bases Matemática para la Educación Primaria de la Universidad de Granada incluyen “Tipos de problemas aritméticos”), y en menor medida encontramos las categorías tarea sin procedimiento de resolución conocido (por ejemplo, el

tema RP de la asignatura Matemáticas y su Didáctica I, de la Universidad del País Vasco, incluye "Distinción entre problema y ejercicio"), fases de resolución (por ejemplo, "Fases en la resolución de un PAEV" asignatura RP y Conexiones Matemáticas de la Universidad de Almería) y estrategias (por ejemplo. "Estrategias heurísticas" de la Universidad de Barcelona dentro del bloque temático de RP de la asignatura Razonamiento y Actividad Matemática en Primaria). El resto de categorías tiene una presencia casi nula con un porcentaje menor al 3%.

Tabla 3. Frecuencia de las componentes de conocimiento sobre la RP

		Documentos (N=114)	Segmentos (N=1092)
Noción de problema	Tarea sin procedimiento de resolución conocido	31 (27,2%)	48
	Consideración del resolutor	2 (1,8%)	3
	Tipos de tareas que se presentan como problemas	95 (83,3%)	258
RP	Fases de resolución y su caracterización	29 (25,4%)	46
	Estrategias	30 (26,3%)	57
	Metacognición	3 (2,6%)	6
	Factores no cognitivos	3 (2,6%)	5
Disposición	Aceptación del desafío de resolver el problema	2 (1,8%)	2

En relación al conocimiento didáctico sobre RP, la invención de problemas es la categoría con mayor presencia en las guías (Tabla 4) pues la encontramos en un 66,7% de los documentos. En segundo lugar, encontramos la categoría gestión del discurso con ejemplos como la competencia "Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado" de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III de la Universidad de Salamanca. En las guías también existe mención a la selección de problemas (por ejemplo, el resultado de aprendizaje "Extraer problemas de la vida cotidiana para plantear situaciones de aprendizaje" de la asignatura El Conocimiento Matemático en la Educación Primaria II, de la Universidad de Cádiz), los modelos de resolución y estrategias (por ejemplo, el contenido "análisis de estrategias de resolución" Matemáticas y su Didáctica I, de la Universidad de La Rioja) y los enfoques o vías de acceso (como el contenido "pautas para la aplicación de conocimientos y RP en el aula de Primaria" de la asignatura Matemáticas y su Didáctica I de la Universidad Autónoma de Madrid).

Tabla 4. Frecuencia de las componentes de conocimiento didáctico sobre RP

		Documentos (N=114)	Segmentos (N=1092)
Estudiante como resolutor	Características de resolutores exitosos	5 (4,4%)	5
	Dificultades y errores	10 (8,8%)	15
RP como tarea escolar	Selección de problemas	28 (24,6%)	42
	Modelos de resolución y estrategias	22 (19,3%)	54
	Invención de problemas	76 (66,7%)	125
Factores no cognitivos	Influencia mutua de creencias y concepciones	6 (5,3%)	6
Gestión de la enseñanza de la RP	Enfoques o vías de acceso	19 (16,7%)	34
	Gestión del discurso	48 (42,1%)	71
	Gestión de los atascos	0	0
	Gestión de la evaluación	1 (0,9%)	2
	Gestión de los recursos	11 (9,6%)	14

CONCLUSIONES

En este trabajo nos planteamos como objetivo describir la presencia de la RP en las guías docentes de las asignaturas del área de Didáctica de la Matemática pertenecientes a los títulos universitarios oficiales que habilitan para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria en España. Los resultados obtenidos muestran que casi la totalidad de las guías docentes contienen alguna mención a la RP. La mayoría de estos documentos incluyen los distintos tipos de tareas que se pueden presentar como problemas y fomentan fundamentalmente la competencia de resolver problemas. Este último hallazgo es esperable ya que una competencia propuesta a nivel nacional por el MEC (2007) es: "Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana". Sin embargo, destaca el hecho de que el planteamiento o invención de problemas es muchas veces suprimido en los documentos, incluyendo únicamente la competencia de RP, aspecto a destacar pues ser buen resolutor de problemas no asegura ser un buen profesor. Por otra parte, parece peligroso focalizar solo en aspectos de la competencia para resolver problemas. Esto debido a que numerosa literatura señala que ser competente resolviendo problemas no es garantía de enseñarla con éxito (e.g., Chapman, 2016).

Entre los resultados encontramos que aspectos considerados relevantes por la literatura (Piñeiro et al., 2019; Chapman, 2016) en el conocimiento sobre RP se encuentran ausentes en los documentos. Uno de ellos es la consideración del resolutor, el cual es decisivo en la enseñanza pues si no se tiene en cuenta al estudiante, se corre el riesgo de que las tareas que se planteen o seleccionen no sean verdaderos problemas. Asimismo, considerar al estudiante al enseñar a resolver problemas es un elemento crítico para lograr esta competencia profesional (Chapman, 2016). Otras componentes ausentes son los factores no cognitivos o la disposición del resolutor. En relación a las componentes del conocimiento didáctico sobre RP, detectamos ausencias destacables como la gestión de los atascos, la evaluación y los recursos.

Dado que las directrices curriculares de educación primaria indican que hay que dedicar un tiempo del horario lectivo a la RP (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022), y que la investigación muestra que existe influencia entre los contenidos estudiados en la formación y el conocimiento especializado utilizado en la práctica (e.g., Morris y Hiebert, 2017) es necesario preparar a los futuros maestros en lo que respecta a su conocimiento profesional para la enseñanza de la RP. Esta preparación ha de ir más allá de una competencia a desarrollar (Contreras, 2022) y para ello, un modelo que detalla qué conocimiento profesional es necesario para la enseñanza de la RP es el propuesto por Piñeiro et al. (2019).

Finalmente, a pesar de que este estudio aporta información sobre la formación inicial de los maestros de primaria relativa a la RP en España que puede ser útil para el diseño de futuros planes de formación, somos conscientes de las limitaciones del estudio. En este sentido, surge la duda de si las asignaturas optativas incluyen otros aspectos no considerados en las obligatorias o si las guías docentes son demasiado escuetas y desarrollan fundamentalmente aspectos organizativos. Esto debido a que el currículo pretendido suele diferir del currículo realmente implementado.

Referencias

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Carrillo J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes M. Á. (2019). Mathematics teachers' specialised knowledge in managing problem-solving classroom tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (pp. 297-316). Springer.

Chapman, O. (2016). An exemplary mathematics teacher's way of holding problem-solving knowledge for teaching. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 139-146). PME.

Contreras, L. C. (2022). La nueva propuesta curricular y la formación del profesor. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 63-79). SEIEM.

Felmer, P. y Perdomo-Díaz, J. (2017). Un programa de desarrollo profesional docente para el nuevo currículo de matemática: la resolución de problemas como eje articulador. *Educación Matemática, 29*(1), 201-217.

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J. y Reyes, C. (2019). The ARPA experience in Chile: problem solving for teachers' professional development. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical problem solving, ICME-13 monographs* (pp. 311-337). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_14

Gourdeau, F. (2019). Problem solving as a subject and as a pedagogical approach, and the ongoing dialogue between mathematics and mathematics education. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (pp. 23-42). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_21

Hähkiöniemi, M. y Francisco, J. (2019). Teacher guidance in mathematical problem- solving lessons: Insights from two professional development programs. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (pp. 279-296). Springer.

Leung, S. S. (2016). Mathematical problem posing: A case of elementary school teachers developing tasks and designing instructions in Taiwan. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems, research in mathematics education* (pp. 327-344). Springer.

Masingila, J., Olanoff, D. y Kimani, P. (2018). Mathematical knowledge for teaching teachers: Knowledge used and developed by mathematics teacher educators in learning to teach via problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*, 429-450. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9389-8

Mellone, M., Pacelli, T. y Liljedahl, P. (2021). Cultural transposition of a thinking classroom: To conceive possible unthoughts in mathematical problem solving activity. *ZDM, 53*, 785-798. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01256-z

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educacion Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 312*.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 52,* 24386-24502.

Morris, A. K. y Hiebert, J. (2017). Effects of teacher preparation courses: Do graduates use what they learned to plan mathematics lessons? *American Educational Research Journal, 54*(3), 524-567. https://doi.org/10.3102/0002831217695217

Olivares, D. O., Segovia, I. S. y Lupiáñez, J. L. (2020). Roles de la resolución de problemas en el currículo oficial. *AIEM*, (18), 41-54. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.270

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA, 13*(2), 124-139.

Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (2a ed.). Trillas.

Saadati, F. y Felmer, P. (2021). Assessing impact of a teacher professional development program on student problem-solving performance. *ZDM, 53,* 799-816 https://doi.org/10.1007/s11858-020-01214-1

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 9-34.

Tatto, M. T. (2018). The mathematical education of primary teachers. En M. T. Tatto, M. C. Rodriguez, W. M. Smith, M. D. Reckase y K. Bankow (Eds.), *Exploring the mathematical education of teachers using TEDS-M data* (pp. 205-256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92144-0_8

Wake, G., Swan, M. y Foster, C. (2016). Professional learning through the collaborative design of problem-solving lessons. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2), 243-260.

ANÁLISIS DEL NIVEL DE DEMOSTRACIÓN EN ALUMNADO DE SECUNDARIA Y BACHILLERATO: EVALUACIÓN INICIAL Y ENFOQUE EN EL USO DE LOS EJEMPLOS

Analysis of the level of proof in secondary and high school students: initial evaluation and focus on the use of examples

Cerqueda-Santacreu, G.[a], Colom-Torrens, Y.[a] y Deulofeu-Piquet, J.[b]

[a]Universitat d'Andorra, [b]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

A través de un análisis cualitativo, el estudio examina los niveles iniciales de demostración y el uso de los ejemplos de 28 estudiantes de secundaria y 41 de bachillerato en la realización de una demostración en una prueba diagnóstica inicial. Los resultados muestran que el uso de los ejemplos es mayoritario en los dos niveles educativos y que el alumnado combina diferentes niveles de desarrollo en un mismo intento de demostración. Aunque algunos alumnos han mostrado ejemplos potencialmente genéricos, estos no incorporan evidencia de generalidad.

Palabras clave: *demostración, razonamiento, ejemplos.*

Abstract

Through a qualitative analysis, the study examines the initial levels of demonstration and the use of examples by 28 high school and 41 undergraduate students in performing a demonstration in an initial diagnostic test. The results show that the use of examples is predominant at both educational levels and that students combine different levels of development in the same demonstration attempt. Although some students have shown potentially generic examples, these do not incorporate evidence of generality.

Keywords: *proof, reasoning, examples.*

INTRODUCCIÓN

Desde hace más de tres décadas, hay consenso entre los investigadores en que uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática sea desarrollar el sentido de demostración. Tanto los educadores en matemáticas como los redactores de los documentos de políticas educativas coinciden en la relevancia de la demostración y reclaman que esta tenga un papel más importante en los planes de estudios. A pesar de la importancia que le otorgan los investigadores y las recomendaciones de los currículos, la presencia de la demostración en las aulas de educación básica es mínima (Stylianides et al., 2017) y uno de los principales retos que tienen los profesores de matemáticas de secundaria es cambiar sus creencias sobre la demostración, considerarla adecuada para todos sus estudiantes incluirla de forma natural en sus actividades de clase (Knuth, 2002). Actualmente, los estudios realizados permiten establecer que los estudiantes tienen habitualmente una concepción errónea del concepto de prueba (Stylianides et al., 2017). En particular, una de las principales dificultades a la hora de construir demostraciones es la tendencia a apoyarse en razonamientos empíricos, considerando que un conjunto de ejemplos es suficiente para establecer la validez de una propiedad y los utilizan tanto para aceptar como para producir demostraciones (Reid y Knipping, 2010; Stylianides et al., 2017). Aun así, no hay que desestimar el rol que tienen los razonamientos basados en ejemplos en el proceso de crear, explorar y comprender conjeturas y hay que diseñar practicas educativas que ayuden al alumnado a usarlos productivamente (Knuth y Na, 2020).

Cerqueda-Santacreu, G., Colom -Torrens Y. y Deulofeu-Piquet, J. (2024). Análisis del nivel de demostración en alumnado de secundaria y bachillerato: evaluación inicial y enfoque en el uso de los ejemplos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 169-176). SEIEM.

Los resultados que se presentan en esta comunicación forman parte de un estudio más amplio, enmarcado en la realización de una tesis doctoral, que tiene por objetivo describir y analizar la influencia de los ejemplos genéricos en la capacidad de producir demostraciones en alumnado de secundaria y bachillerato. Para ello, se ha diseñado un experimento de enseñanza formado por seis sesiones de 60 minutos para el aprendizaje de la demostración basado en los ejemplos genéricos, con una prueba diagnóstica previa y una prueba de evaluación final. El objetivo de la investigación que se presenta aquí es analizar el nivel de demostración del alumnado y categorizar el uso que hacen de los ejemplos en sus intentos de demostración iniciales.

MARCO TEÓRICO

Demostración en la matemática escolar

Para llevar a cabo nuestra investigación, tenemos que definir que entendemos por demostración en el contexto escolar en el que se realiza. Tomamos como referencia la definición propuesta por Stylianides (2007), quien define demostración como un argumento matemático (es decir, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de un enunciado) con las siguientes propiedades: utiliza propiedades aceptadas por la comunidad de clase que son ciertas y no necesitan justificación; utiliza métodos de razonamiento válidos y conocidos (o dentro de su alcance) en la comunidad de clase; y se comunica con formas de expresión o representación que son apropiadas y conocidas (o dentro de su alcance) por la comunidad de clase. El hecho de que los tres elementos que forman la demostración tengan que ser válidos, hace que esta definición sea coherente con la consideración de demostración de la disciplina matemática. Por otro lado, también se requiere que estos tres elementos sean conocidos por los estudiantes, lo que dota a la definición de flexibilidad suficiente para adaptarse a los distintos niveles educativos y permite que se introduzca desde los cursos más elementales.

Knuth et al. (2010) definen un marco con cuatro niveles para situar la progresión en el desarrollo de la capacidad para producir una demostración. En el nivel 0, los alumnos ignoran la necesidad de una demostración y pueden no presentar argumentos o presentar argumentos autoritarios. En este nivel encontramos justificaciones que cumplen con los esquemas de demostración por convicción externa (Harel y Sowder, 1998), que incluyen los esquemas de demostración ritual (basado en la apariencia) y autoritario (basado en referenciar el libro de texto o al docente). En el nivel 1, el alumno ve la necesidad de demostrar, pero su argumento no es general. Este nivel se subdivide en cuatro niveles, según el uso que les dan a los ejemplos. Gradualmente, los alumnos creen suficiente testear algunos ejemplos (1.a), testean casos de manera sistemática (1.b), testean casos extremos (1.c) y utilizan ejemplos genéricos para justificar (1.d). Estos cuatro subniveles pasan progresivamente de una simple verificación hasta una demostración genérica, progresando por los subniveles intermedios que, aunque no constituyen una demostración, incrementan la plausibilidad de la conjetura. En el nivel 2, el alumno es consciente de la limitación empírica e intenta producir un argumento general, aunque este no es matemáticamente aceptable por ser incompleto o incorrecto. Los niveles del 0 al 2 se diferencian por conciencia de la necesidad de demostrar y por la expresión concreta o general de los argumentos. Finalmente, en el nivel 3 el alumno es consciente de la necesidad de un argumento general y es capaz de producirlo, incluyendo referencias a las condiciones del enunciado y generando una cadena de deducciones con una conclusión explicita. Aunque pueda faltar formalismo o rigor, forman parte de este nivel los alumnos producen una demostración general completa.

Uso de los ejemplos para demostrar. Evidencia empírica y ejemplos genéricos

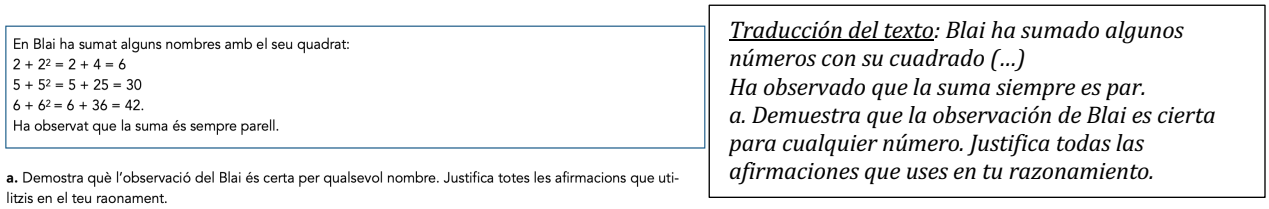
Analizar ejemplos específicos puede proporcionar una comprensión más profunda de una conjetura y puede dar ideas para el desarrollo de una demostración (Knuth y Na, 2020). Sin embargo, gran parte de los alumnos consideran que la evidencia empírica es suficiente para demostrar una propiedad. Esta dependencia excesiva de los ejemplos como medio de justificación es una de las principales dificultades al producir demostraciones (Reid y Knipping, 2010, Knuth et al., 2010). En

contraposición al uso de los ejemplos como verificación empírica, encontramos los ejemplos genéricos. Un ejemplo genérico es un ejemplo presentado de manera que destaca su rol como portador de generalidad y una demostración sobre un ejemplo genérico se presenta sobre un objeto específico, pero solo solo se utilizan las características que son generales a la clase que representa y no en aquellas que son concretas del ejemplo (Mason y Pimm, 1984). Lo que caracteriza el ejemplo genérico es la manera en que se presenta la verificación y no el hecho de haber verificado la propiedad para un caso. Se pueden encontrar ejemplos y demostraciones genéricos del ámbito de la educación secundaria en el estudio de Karunakaran et al. (2014) y en nuestra publicación reciente (Cerqueda Santacreu, 2024). El razonamiento usado en el ejemplo genérico puede ser reproducido sobre cualquier otro ejemplo de la clase, lo que nos da generalidad. Por esto, coincidimos con Rowland (1998) en considerar que no es justificable que las demostraciones genéricas sean vistas como inferiores a las demostraciones formales en un contexto escolar, sobre todo teniendo en cuenta su poder de explicación. Aunque los ejemplos genéricos se sitúen en el último subnivel del Nivel 1 de Knuth et al. (2010), consideramos que un alumno produce una demostración aceptable usando un ejemplo genérico cuando podamos observar que el alumno es consciente de que su argumento es general y que no usa el ejemplo como validación empírica (evidencia de generalidad) y cuando muestre las razones matemáticas que permiten que la estructura utilizada se pueda reproducir en cualquier otro ejemplo (evidencia de razonamiento) (Reid y Vallejo Varga, 2018).

METODOLOGÍA

En esta comunicación se describen los resultados obtenidos en una de las actividades de la prueba inicial, aquella que consiste en realizar una demostración y que nos permite hacer un diagnóstico del nivel de demostración inicial de los alumnos, así como del uso que hacen de los ejemplos en sus demostraciones. En esta actividad, cuyo enunciado se presenta en la Figura 1, se muestran tres sumas de un número con su cuadrado, se observa que el resultado siempre es par y se pide al alumnado demostrar que esta afirmación es cierta para cualquier número natural.

Figura 1. Enunciado de la actividad



En esta investigación hemos seguido una metodología cualitativa mayoritariamente descriptiva. Para analizar el nivel de demostración, empleamos los niveles de desarrollo de la demostración de Knuth et al. (2010), discutiendo y acordando la clasificación entre los autores de la comunicación. Además, hemos revisado las producciones de los alumnos generando las categorías inductivamente, buscando una jerarquización en el uso de los ejemplos sin partir de una categorización previa.

Muestra

Los datos que se presentan en este artículo son relativos al estudio realizado con una muestra de 28 alumnos de primero de segundo ciclo de Segona Ensenyança del sistema educativo andorrano, que es equivalente por edad a tercero de ESO, y 41 alumnos de primero de bachillerato. El estudio se realizó durante dos semanas del primer trimestre en los cursos 2022/23 y 2023/24. Los participantes en el estudio no han realizado con anterioridad actividades de demostración en clase en ninguno de los dos niveles educativos en los que se realiza la investigación. Las autoras de la comunicación son las profesoras que realizan la aplicación de las pruebas.

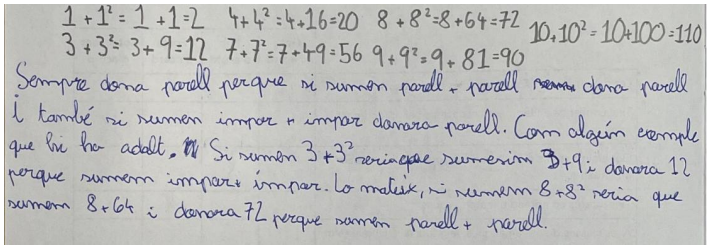
RESULTADOS Y EJEMPLOS

Alumnado de tercero de educación secundaria

La demostración pedida se puede realizar usando el hecho que la suma de dos números con la misma paridad tiene como resultado un número par y que elevar al cuadrado conserva la paridad del número. Todos los participantes de ESO que han utilizado algún razonamiento en su intento de demostración, excepto una, han usado este razonamiento. Aun así, solo dos de los alumnos han afirmado que el cuadrado de un número tiene la misma paridad que el número y ninguno de ellos lo demuestra. Por otro lado, ocho alumnos afirman que la suma de dos números pares o dos impares es par y solo uno de estos alumnos hace una demostración general de este hecho. Cinco alumnos usan una propiedad falsa, afirmando que, si el exponente de una potencia es par, el resultado será par. Esta propiedad falsa genera una contradicción en el razonamiento que no es detectada por los alumnos.

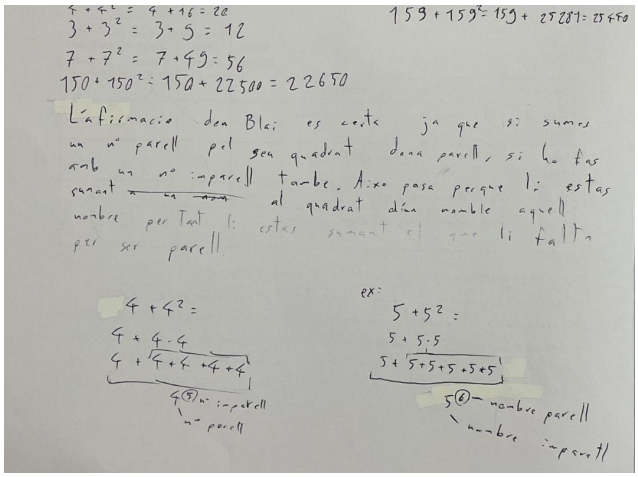
Entre el alumnado de ESO hay cinco alumnos (18%) que dejan la actividad en blanco y seis (21%) que no ofrecen ningún argumento para demostrar la propiedad y se sitúan en el nivel 0 de desarrollo de la demostración. Estos alumnos escriben una justificación tautológica, reescribiendo la propiedad. Además, hay tres alumnos (11%) que utilizan un razonamiento puramente empírico y se sitúan en el nivel 1.a, ya que consideran suficiente testear algunos casos. Estos alumnos consideran que su razonamiento es general, aunque una de ellas afirma no saber cómo razonarlo. Uno de los alumnos acompaña su verificación empírica de una afirmación tautológica. Un cuarto de los alumnos de secundaria intenta producir una demostración general usando propiedades ciertas, pero escriben una demostración incompleta. Ninguno de estos alumnos escribe su intento de demostración siguiendo una cadena deductiva, que parta de un número cualquiera y se deduzca la conclusión a partir de las propiedades generales, por lo que no encontramos alumnos en el nivel 3. En cambio, el alumnado redacta su justificación ofreciendo los motivos por los cuales considera que la propiedad es cierta. En todos estos casos el alumnado combina diferentes niveles de demostración en un mismo intento de redacción de demostración. Por ejemplo, en la producción de la Figura 2 vemos que se inicia la demostración con un testeo, en este caso sistemático (nivel 1.c), y que a continuación se intenta producir una demostración usando una propiedad general para argumentar la validez de la propiedad, aunque esta no se demuestra. Tampoco se menciona ni demuestra que las potencias mantengan la paridad. Por lo tanto, el intento de demostración no es completo, ya que no hay una cadena deductiva de razonamientos y la única propiedad utilizada no se demuestra. En la parte final, se vuelven a usar casos concretos para ejemplificar la propiedad utilizada. En la Figura 3, observamos como inicialmente se testea la propiedad con casos extremos (nivel 1.b) y después intenta producir una demostración general (nivel 2) expresando narrativamente un argumento, aunque este es incompleto y solo tiene sentido en el caso en que el número sea impar. Finalmente, se usan dos ejemplos para buscar una estructura general, aunque esta tampoco es completa y presenta un error de notación. También encontramos alumnos que combinan aspectos del nivel 0 y del 2 en una misma demostración, ya que argumentan de manera general que la suma de dos números de la misma paridad es par pero no consideran necesario justificar la acción de la potencia, escribiendo, por ejemplo, que "el que ha hecho ha sido juntar dos números iguales, uno con una potencia, pero es igual, ya que la suma será siempre par".

Figura 2. Intento de demostración del participante A313 combinando razonamientos de distinto nivel



Traducción del texto: Siempre da par porque si sumamos par + par da par y también si sumamos impar + impar dará par. Como algún ejemplo que hay arriba. Si sumamos 3 + 3² sería que sumáramos 3 + 9 y dará 12 porque sumamos impar + impar. Lo mismo si sumamos 8 + 8² sería que sumamos 8 + 64 que da 72 porque sumamos par y par.

Figura 3. Intento de demostración del participante A324 combinando razonamientos de distinto nivel



Traducción del texto: La afirmación de Blai es cierta porque si sumas un número par por su cuadrado da par, si lo haces con un impar también. Esto pasa porque le estás sumando al cuadrado de un número aquel número y por lo tanto le estás sumando lo que le falta para ser par.

En referencia al uso de ejemplos, 16 de los 23 alumnos (70%) que contestan la actividad usan algún ejemplo que puede aparecer solo o combinado con un razonamiento general. Podemos clasificar estos ejemplos en cuatro grupos distintos, independientemente de la corrección o completitud del resto de razonamientos que aparecen en el intento de demostración. Dos alumnos realizan operaciones para verificar que los ejemplos dados en el enunciado son correctos y explicar el funcionamiento de estas operaciones, sin ofrecer ningún razonamiento sobre la paridad de los resultados. La mayoría de los alumnos (36%) usan ejemplos para verificar la propiedad y cuatro de ellos no acompañan esos ejemplos de ningún razonamiento general. Cuatro alumnos (14%) usan los ejemplos para ejemplificar propiedades que usan en su razonamiento. Es decir, en su intento de demostración emplean propiedades ciertas y generales, pero estas no se demuestran de manera general, sino que se verifican con el testeo de casos concretos. Una alumna usa un ejemplo para detectar una estructura en la operación que permitiría demostrar la propiedad (ver Figura 3). Distinguimos estos ejemplos, que designamos como potencialmente genéricos, de aquellos en que el alumno proporciona directamente el resultado de la operación, puesto que muestran una estructura que podría ser generalizable. En este caso, la alumna muestra en sus dos ejemplos que la operación requerida por la actividad es análoga a multiplicar un número por su siguiente. Sin embargo, la alumna no usa la estructura presentada en la redacción de su argumento y no hay evidencia escrita de generalidad, por lo que no producen un ejemplo genérico que sea demostración.

Alumnado de primero de bachillerato

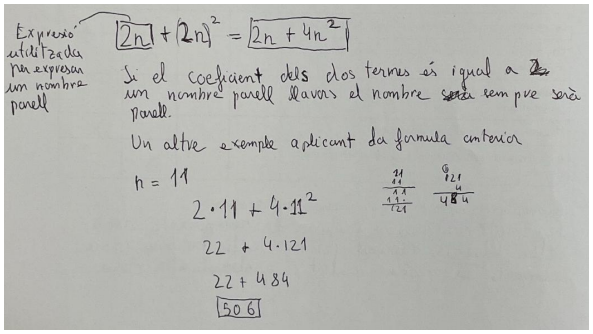
Entre el alumnado de bachillerato, hay dos alumnos que no responden a la actividad. Encontramos nueve (22%) alumnos que usan un razonamiento puramente empírico, situándose en el nivel 1 de demostración. Estos alumnos acompañan los ejemplos de una afirmación general que repite tautológicamente la propiedad, sin ofrecer ninguna argumentación sobre la validez de esta más allá de la comprobación empírica realizada. Cinco de estos alumnos consideran que su verificación demuestra la propiedad para todos los números.

Un total de nueve alumnos (22%) se sitúan en el nivel 2 de desarrollo, presentando intentos de demostración generales, aunque no del todo completos, y haciendo uso de propiedades generales que no son demostradas. Además, hay 12 alumnos (29%) que combinan razonamientos de nivel 1 y 2 en su intento de demostración. Diez de estos alumnos utilizan afirmaciones generales en su intento de demostración, pero las verifican con casos concretos. Un alumno solo demuestra correctamente parte de la propiedad, usando el lenguaje algebraico, y verifica su expresión algebraica con un ejemplo concreto. El alumno restante utiliza una expresión algebraica para traducir el enunciado, intentando hacer un razonamiento general, pero la manipulación simbólica que realiza no permite producir una demostración algebraica ya que no muestra ninguna propiedad de los números representados. Igual

que el otro alumno, usa un ejemplo para verificar su expresión algebraica. Todos los alumnos que se sitúan en el nivel 2 o en una combinación de nivel 1 y 2, excepto tres, consideran que su razonamiento es general. Finalmente, cinco alumnos (12%) se sitúan en un nivel 3 de demostración, produciendo un argumento general aceptable. Cuatro de estos alumnos realizan una demostración algebraica, aunque en tres de los casos falta formalismo y se producen errores de notación. En estos casos, la demostración cumple la función de verificación, pero no de explicación.

En cuanto al uso de ejemplos, 24 de los 39 (62%) que realizan la actividad usan algún ejemplo en su intento de demostración, que puede aparecer combinado con un razonamiento general expresado narrativamente o en lenguaje algebraico. Podemos clasificar los ejemplos en siete funciones distintas, cuatro de las cuales coinciden con las usadas por el alumnado de secundaria. Un alumno usa un valor concreto para ejemplificar la operación y el resultado que describe en una tautología. La mayoría de los alumnos (22%) usan los ejemplos para verificar la propiedad. Siete de estos nueve alumnos no acompañan los ejemplos de ningún razonamiento. Los dos alumnos restantes intentan producir un razonamiento general sin usar estos ejemplos. Además, hay ocho alumnos (19%) que usan ejemplos para ejemplificar pasos en un proceso general deductivo, es decir, usan los ejemplos para justificar las propiedades generales que emplean en su razonamiento. Otros dos alumnos usan un ejemplo para explicar los motivos por los cuales una propiedad es cierta para cualquier número. Un alumno usa un ejemplo para detectar una estructura en la operación que permitiría demostrar la propiedad, aunque la estructura detectada no es general. Dos alumnos usan ejemplos para ilustrar una expresión algebraica encontrada en un proceso de demostración algebraica (ver Figura 4); es decir, llevan a cabo una demostración algebraica de la propiedad, pero emplean valores concretos para demostrar la validez de la misma. Podemos conjeturar en estos casos que, aunque la demostración algebraica esté completa, no genera suficiente convencimiento en los alumnos, quienes incluyen una verificación numérica. Finalmente, un alumno usa un ejemplo como contraejemplo, aunque evidentemente este no cumple las condiciones del enunciado.

Figura 4. Intento de demostración del participante AB12 que ilustra una expresión algebraica con un ejemplo



Traducción del texto:
Expresión usada para expresar un numero par.

Si el coeficiente de los dos términos es igual a ~~2~~ un número par entonces el numero será par.

Otro ejemplo aplicando la fórmula anterior.

Los alumnos que usan el ejemplo para explicar los motivos por los cuales una propiedad usada es cierta y para descubrir una estructura utilizan representaciones del ejemplo que podrían potencialmente generar un ejemplo genérico, del mismo modo que hemos visto en la producción de una alumna de secundaria en la Figura 3. Sin embargo, los alumnos no explicitan en ninguno de los casos los motivos por los cuales esta estructura es general a cualquier otro ejemplo, de manera que no hay evidencia escrita de generalidad.

Finalizamos la presentación de resultados con una tabla comparativa (Tabla 1) de los porcentajes de alumnos que se sitúan en cada nivel o combinación de niveles de demostración. Se incluyen los alumnos que han dejado la actividad en blanco y aquellos que han respondido sin cumplir las condiciones del enunciado. Como se ha descrito en el marco teórico, el nivel 2 incluye razonamientos generales que no son aceptables por ser incorrectos o incompletos. Los alumnos de secundaria que se sitúan exclusivamente en el nivel 2 presentan razonamientos incorrectos mientras que los de bachillerato ofrecen razonamientos incompletos.

Tabla 3. Porcentajes de alumnos por niveles de demostración en ESO y Bachillerato

	Blanco	Otros	N0	N1				N0-2	N1-2	N2	N3
				1.a	1.b	1.c	1.d				
Alumnos ESO	17,9	3,6	21,4	10,7	3,6	0	7,1	14,3	10,7	10,7	0
Alumnos Bachillerato	4,9	2,4	7,3	17,1	0	4,9	0	0	29,2	22	12,2

DISCUSIÓN Y COMENTARIOS FINALES

El nivel de demostración detectado se correlaciona con la revisión bibliográfica realizada, que señala las dificultades que enfrentan los alumnos de todos los niveles al realizar demostraciones. De acuerdo con la literatura consultada, se esperaría un excesivo respaldo de los ejemplos en las justificaciones (Reid y Knipping, 2010; Stylianides et al., 2017). En el caso del alumnado de secundaria, se ha observado una menor cantidad de justificaciones de nivel uno del previsto. Esta situación podría atribuirse al hecho de que el enunciado de la actividad ya ejemplifica la conjetura dada, lo que podría llevar a los estudiantes a considerar que dichos ejemplos son suficientes para demostrar la propiedad. Como resultado, se observa que muchos alumnos no proporcionan una verificación empírica, pero tampoco presentan un argumento general; este último es tautológico, emplea propiedades falsas o es notablemente incompleto. La proporción de estudiantes que intentan elaborar una demostración general es similar en ambos niveles educativos, y muchos de ellos combinan más de un nivel en la misma demostración, aunque solo encontramos alumnos capaces de redactar una demostración aceptable en bachillerato. La combinación de distintos niveles en un mismo estudiante ya ha sido previamente abordada por investigadores como Ibañez (2001), quien prefiere referirse al esquema de prueba utilizado en un problema determinado más que en el esquema de prueba del alumno.

En relación al empleo de ejemplos, se observa una similitud en el porcentaje de estudiantes entre los dos niveles de nuestro estudio, siendo mayoría los alumnos quienes los emplean. Además, en ambos niveles, la mayoría del alumnado que usa los ejemplos lo hace con el único propósito de verificar la propiedad, seguidos de los alumnos que emplean los ejemplos para ofrecer una justificación empírica a propiedades que usan en su intento de producir una demostración general. Especialmente, la afirmación de que un número mantiene su paridad al ser elevado al cuadrado es respaldada principalmente mediante la verificación empírica en los casos en los que se utiliza y se justifica. Además, son escasos los alumnos de secundaria que la emplean en su intento de demostración, incluso cuando intentan aplicar un razonamiento que la requiere. Por consiguiente, no podemos considerarla como una propiedad conocida en la comunidad de la clase de este nivel, lo que implica que los estudiantes que la utilizan sin justificación generan argumentos que no pueden ser aceptados como demostraciones válidas. Por otro lado, hemos encontrado diferencias significativas en el uso del álgebra en los dos niveles educativos (por motivos de espacio no se incluyen en esta comunicación) pero destacamos los dos alumnos de bachillerato que usan los ejemplos para ilustrar una expresión algebraica usada en una demostración general. Este uso de los ejemplos concuerda con la dificultad descrita por Knuth et al. (2010), que concluyeron que algunos estudiantes no se convencen del poder deductivo para establecer la validez general de una propiedad.

En el conjunto de la muestra, hemos identificado únicamente cuatro estudiantes que emplearon una representación del ejemplo capaz de revelar una estructura en la operación, lo que potencialmente podría generar una demostración genérica. Aunque se percibe evidencia de razonamiento, ninguno de estos alumnos ha incluido en estos ejemplos evidencia de generalidad. Distinguimos entre estos alumnos los que han usado la representación para mostrar los motivos por los que una propiedad es cierta y los alumnos que han usado la representación para encontrar una estructura generalizable. Estos últimos alumnos han realizado únicamente uno y dos ejemplos respectivamente, lo que no les ha permitido inferir los motivos por los cuales la propiedad es cierta. Los resultados obtenidos en

nuestra investigación difieren de los presentados por Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019), quienes observaron una incidencia más alta de estudiantes capaces de generar ejemplos genéricos productivos para la demostración. Sin embargo, es importante señalar que su estudio se llevó a cabo mediante entrevistas individuales, a diferencia de nuestra investigación. Sus resultados respaldan el uso de ejemplos genéricos en la demostración y en el aprendizaje de cómo demostrar y, al mismo tiempo, destacan las diferencias en la competencia de los estudiantes para comprender la idea general de una demostración a través de tales ejemplos genéricos. Siguiendo su recomendación de promover prácticas que usen los ejemplos genéricos, aplicamos una secuencia de actividades de aprendizaje y esperamos que el análisis de los resultados de la prueba final muestre una mejoría en el uso de los ejemplos genéricos y en su productividad para demostrar.

Referencias

Aricha-Metzer, I. y Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *The Journal of Mathematical Behavior, 53,* 304–322. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002

Cerqueda Santacreu, G., (2024). Los ejemplos genéricos para trabajar la demostración en secundaria. *Revista SUMA*, 106, 31–40.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in College Mathematics Education III* (pp. 234–283). AMS.

Ibañez, I. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Actas del V simposio de la SEIEM* (pp. 9–26). SEIEM.

Karunakaran, S., Freeburn, B., Konuk, N. y Arbaugh, F. (2014). Improving Preservice Secondary Mathematics Teachers' Capability With Generic Example Proofs. *Mathematics Teacher Educator*, *2*(2), 158–170. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.2.2.0158

Knuth, E. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1)*,* 61–88. https://doi.org/10.1023/A:1013838713648

Knuth, E., Choppin, J. M. y Bieda, K. N. (2010). Middle school students' production of mathematical justifications. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 153–170). Routledge.

Knuth, E. y Na, G. (2020). A comparative study of example use in the proving-related activities of korean and american students. *The 14th International Congress on Mathematical Education*.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3)*,* 277–289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

Reid, D. A. y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching.* Brill. https://doi.org/10.1163/9789460912467

Reid, D. A. y Vallejo Vargas, E. (2018). When is a generic argument a proof? En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 239–251). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_17

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* - Volume 4, 65–72.

Stylianides, A. J. (2007). The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1)*,* 1–20. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237–266). NCTM.

CONEXIONES Y RAZONABILIDAD EN EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO

Connections and reasonableness in the development of number sense

De Gamboa, G.[a], Caviedes, S.[b] y Badillo, E.[a]

[a]Universitat Autònoma de Barcelona, [b]Universidad de los Lagos

Resumen

En este estudio analizamos la relación entre los diferentes tipos de conexiones matemáticas que se establecen en un aula y la movilización de la componente de razonabilidad del sentido numérico. Se analizan ocho sesiones de clase de un grupo de 1º de ESO que estudia los números decimales. Los resultados muestran que la componente razonabilidad se vincula con el establecimiento de conexiones que enfatizan procedimientos y que incluyen el desarrollo de argumentaciones vinculadas con el uso de tales procedimientos o de propiedades.

Palabras clave: *conexiones, sentido numérico, razonabilidad.*

Abstract

In this study we analyse the relationship between the different types of mathematical connections that are established in a classroom and the mobilization of the reasonableness component of number sense. Eight class sessions of a 1st year of ESO group that studies decimal numbers are analysed. The results show that the reasonableness component is linked to the establishment of connections that emphasize procedures and that include the development of argumentations linked to the use of such procedures or properties.

Keywords: *connections, number sense, reasonableness.*

INTRODUCCIÓN

La noción de conexión en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha utilizado en diversos ámbitos, con significados implícitos que, aunque varían, convergen en la idea de conexión como relación entre dos objetos. En los últimos años, esta noción ha sido caracterizada por diversos autores, y se han propuesto diversas clasificaciones p.e. Businskas, 2008; Eli et al, 2011; Hatisaru, 2023; Rodríguez-Nieto et al., 2023; De Gamboa et al., 2023. Aunque estas clasificaciones se han centrado en actividades relacionadas con diversos contenidos matemáticos, el papel de las conexiones en el desarrollo del sentido numérico puede ser relevante (De Gamboa et al.,2023). En particular, las conexiones pueden jugar un papel significativo en la aplicación del sentido numérico con números decimales a otros conjuntos numéricos como son los decimales o los enteros.

Por otro lado, las caracterizaciones del sentido numérico incorporan de manera implícita la noción de conexión matemática. Esto se debe a que el sentido numérico abarca la relación entre los números y sus magnitudes (p.e. Ghazali et al., 2021; Nickerson y Whitacre, 2010), la vinculación entre números, operaciones y puntos de referencia o benchmarks (p.e. McIntosh et al., 1992; Yang et al., 2004), así como el desarrollo de estrategias flexibles de cálculo (p.e. Yang et al., 2004). En este estudio denominamos a esta parte del sentido numérico (vinculada con el desarrollo de estrategias flexibles) como "razonabilidad", siguiendo las descripciones previas.

En consecuencia, proponemos un estudio que utiliza las conceptualizaciones recientes de las conexiones matemáticas (Rodríguez-Nieta et al., 2023; De Gamboa et al., 2023) para identificar cómo diferentes tipos de conexiones pueden influir en el desarrollo de la componente razonabilidad en el

De Gamboa, G., Caviedes, S. y Badillo, E. (2024). Conexiones y razonabilidad en el desarrollo del sentido numérico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp177-184). SEIEM.

contexto del trabajo con números decimales en un aula de 1º de ESO (12-13 años). Así, formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué tipos de conexiones matemáticas se relacionan con la componente de razonabilidad del sentido numérico?

CONEXIONES MATEMÁTICAS

La noción de conexión matemática se ha venido conceptualizando por diversos autores a lo largo de los últimos años (p.e. Businskas, 2008; Eli et al, 2011; Hatisaru, 2023; Rodríguez-Nieto et al, 2023; De Gamboa et al., 2023). Entendemos una conexión matemática como una relación entre dos objetos matemáticos (Font et al., 2013), que pueden ser problemas, definiciones, representaciones, procedimientos, propiedades o argumentos. En un contexto de aula, estas conexiones pueden emerger a través de intervenciones discursivas tanto de los alumnos como de la profesora, las cuales incorporan nuevos objetos a la discusión, generando nuevas conexiones (De Gamboa et al., 2023). En consecuencia, en muchos casos las conexiones se establecen como resultado de coordinar otras conexiones. Las conexiones que no se descomponen en otras, se llaman conexiones elementales. Por ejemplo (tal y como se observa en el apartado de análisis, conexión C12), se puede producir una conexión entre las representaciones $12{,}5$ y $12{,}50$ formada por dos conexiones elementales, una definida por una intervención discursiva que afirma que las dos representaciones son representaciones equivalentes del mismo número, y otra que afirma que, dado que son equivalentes, se puede cambiar de una a la otra como estrategia para resolver una operación. En consecuencia, las conexiones se pueden caracterizar en dos niveles diferentes de concreción que llamamos global y específico. En el nivel global se caracteriza qué conecta la conexión (problemas de otras disciplinas, procesos, conceptos), en qué contexto se produce dicha conexión y con qué finalidad se produce. En el presente estudio, y por motivos de espacio, nos centramos en las conexiones que de forma global se pueden clasificar como conexiones intramatemáticas conceptuales de tratamiento (IMCT), que son conexiones que no vinculan las matemáticas con situaciones de otras disciplinas, están centradas en conceptos matemáticos y en las que no se producen cambios de registro semiótico (Duval, 2006). Estas conexiones IMCT se dividen en cuatro subtipos, dependiendo de qué se enfatiza en el contexto en el que se producen: representaciones, definiciones, procedimientos o propiedades.

Desde una perspectiva específica, se caracterizan los elementos específicos que se conectan (problemas, definiciones, representaciones, procedimientos o proposiciones) y cómo se produce dicha conexión. Esta clasificación recoge los resultados de otros estudios y describe cuatro grupos de conexiones elementales: las conexiones representacionales entre dos representaciones de un objeto (Businskas, 2008; Rodríguez-Nieto et al, 2023; De Gamboa et al., 2023); las conexiones de rasgo común entre dos objetos matemáticos por compartir un rasgo común, por ejemplo las operaciones $11 - 3 \cdot (2 - 3)$ y $11{,}84 - 3{,}2 \cdot (2{,}3 - 3{,}7)$ (Eli et al., 2011, De Gamboa et al., 2023); las conexiones procedimentales que relacionan un procedimiento con un problema, concepto o con otro procedimiento (Businskas, 2008; Rodríguez-Nieto et al, 2023); y las conexiones argumentales que conectan dos proposiciones, P1 que actúa premisa y P2 que actúa de conclusión (Businskas, 2008; De Gamboa et al., 2023), y que incluyen razonamientos de tipo inductivo, justificaciones, generalizaciones o particularizaciones. En el apartado de metodología se muestra un ejemplo de cómo se utilizan de manera complementaria estas dos clasificaciones. Es importante señalar que, aunque en los niveles global y específico se usen términos similares, éstos no están correlacionados. En el ejemplo previamente mencionado (conexión entre las representaciones 12,5 y 12,50) se identificó una conexión IMCT con énfasis en procedimientos (cambio estratégico de representación) formada por dos conexiones elementales, una de tipo representacional y otra de tipo argumental.

SENTIDO NUMÉRICO Y RAZONABILIDAD

La noción de sentido numérico ha sido objeto de la atención de numerosos investigadores en educación matemática a lo largo de las últimas décadas (Adamuz-Povedano, 2023). En las definiciones propuestas por diversos autores se puede observar un consenso al describir el sentido

numérico incluyendo tres componentes: los números y su magnitud, las operaciones y el uso estratégico de los números y las operaciones para la resolución de un problema o actividad (McIntosh et al, 1992; Sowder, 1992; Yang y Li, 2004). En la revisión sistemática de la definición de sentido numérico realizada por Ghazali et al. (2021) se identifican cinco temas emergentes en la literatura sobre sentido numérico: la composición de números, la identificación de números, la magnitud de los números, las operaciones aritméticas, y la realización de juicios y la toma de decisiones (Make Judgement). Mientras que los cuatro primeros temas están caracterizados por descriptores de habilidades, el quinto tema incorpora de manera implícita elementos de toma de decisiones estratégicas para la resolución de un problema o una actividad. En este estudio nos centramos en el uso estratégico (Yang et al, 2004) de los números y las operaciones para la resolución de una situación problemática, lo que Ghazali et al. (2021) denominan Make Judgement.

En particular, denominamos a esta componente razonabilidad, partiendo de la descripción de Ghazali et al. (2021), pero ampliando el sentido de ésta a lo que McIntosh et al. (1992) describen como comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; ser consciente de que existen múltiples estrategias (cálculo mental, escrito, estimación…) y escoger la más adecuada; utilizar una representación y/o un método eficiente; y revisar los datos y los resultados. El uso de términos como necesaria, adecuada, eficiente o revisión conllevan de manera implícita una finalidad en el uso de los números y las operaciones, y por lo tanto la necesidad de desarrollar estrategias flexibles para el uso de los números y las operaciones en los diferentes contextos en los que deben ser utilizados en el sentido de Heinze et al. (2009). En particular, entendemos la razonabilidad como tomar decisiones estratégicas flexibles (Yang et al, 2004) sobre la exactitud y pertinencia de un cálculo, una representación, un procedimiento o una propiedad, para abordar problemas numéricos.

METODOLOGÍA

El presente estudio se enmarca en un paradigma cualitativo e interpretativo. Se analizan 8 sesiones de clase de una hora de duración, en las que se trabajan los números decimales y las operaciones con ellos, en una clase de 1º de ESO (12-13 años) en un centro público de una ciudad española. El grupo clase estaba compuesto por 23 alumnos (13 alumnos y 10 alumnas). La profesora era licenciada en matemáticas y, en el momento de la investigación, contaba con más de cinco años de experiencia como profesora de educación secundaria. Se propone un estudio de caso, que es la emergencia de conexiones matemáticas en el aula. Dadas las características del grupo clase, consideramos que se trata de un caso de tipo común en el sentido de Yin (2014), por lo que la validez externa de los resultados se fundamenta en las características que las sesiones de clase analizadas pueden compartir con muchas otras clases de matemáticas sobre números decimales. Las sesiones de clase son grabadas en video realizando una observación no participante (Cohen et al., 2000).

El análisis se centra en las interacciones entre los alumnos y la profesora en el contexto de discusiones de todo el grupo clase sobre las actividades que propone la profesora. En primer lugar, se analizan los videos grabados para identificar las conexiones matemáticas que se producen, describiendo cómo se produce la conexión entre los dos objetos matemáticos. Una vez descritas las conexiones se procede a identificar todas las intervenciones (de la profesora y de los estudiantes) que aportan significado a la conexión. Una vez identificadas las intervenciones se procede a la transcripción literal de las intervenciones.

El análisis de las conexiones matemáticas identificadas y transcritas que se muestra en esta comunicación se realizó en cuatro etapas, que se describen en la Tabla 1:

Tabla 1: Etapas del análisis

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4
Se realiza un análisis global de las conexiones identificadas	Se realiza un análisis específico de las conexiones identificadas	Se analiza la relación entre cada conexión y el sentido numérico	Se analiza la relación entre los tipos de conexiones y la componente razonabilidad

A continuación, se muestra el análisis correspondiente a las dos primeras etapas (análisis global y análisis específico) para la conexión C12, cuya transcripción es:

La profesora corrige en la pizarra la operación 16,25-12,5. Para ello escribe en columna, siguiendo la colocación propia del algoritmo estándar:

$$\begin{array}{rr} & 16{,}25 \\ - & 12{,}50 \\ \hline \end{array}$$

PROFESORA: He escrito doce coma cincuenta. Fijémonos que el enunciado no dice doce coma cincuenta, el enunciado dice, ¿cómo dice el enunciado?

ALUMNA: Doce coma cinco

PROFESORA: y cuando leo este número, ¿cómo lo leo? [mostrando lo que ha escrito en la pizarra pero tapando el 0 de 12,50]

ALUMNA: Doce unidades y cinco décimas

PROFESORA: ¿Y ahora cómo lees este número? [mostrando el 12,50 entero]

ALUMNA: Doce unidades y cincuenta centésimas

PROFESORA: Entonces en este momento ya están expresados en el mismo idioma y podemos operar.

En este episodio se conectan dos representaciones verbales equivalentes del mismo número (doce coma cinco y doce coma cincuenta), en el contexto de una resta con decimales y con el objetivo de validar el procedimiento a seguir, utilizando el algoritmo estándar. Por lo tanto, se trata de una conexión intramatemática conceptual de tratamiento (IMCT) con énfasis en procedimientos. Desde el punto de vista del análisis específico, se pueden observar dos conexiones elementales. La primera conexión elemental es una conexión de representación equivalente entre 12,5 y 12,50. A continuación se identifica una conexión elemental argumental entre dos proposiciones. La primera proposición es que el número 12,5 se puede leer como doce unidades y cinco décimas, o como doce unidades y cincuenta centésimas. La segunda proposición es que expresar los números decimales en el mismo idioma permite restarlos mediante el uso del algoritmo estándar. Así, se puede observar que, aunque la conexión global hace énfasis en un procedimiento, el análisis específico introduce una conexión elemental argumental. Esta dualidad en el análisis se discute de manera más detallada en la sección final del documento.

RESULTADOS

Se identificaron 37 conexiones matemáticas, de las cuales 28 fueron conexiones intramatemáticas conceptuales de tratamiento. De estas últimas, 13 estaban relacionadas con la componente razonabilidad. La Tabla 2 presenta la codificación de cada conexión, su descripción, en la que se justifica su relación con la razonabilidad, y su clasificación resultante del análisis global.

Tabla 2: Clasificación de las conexiones relacionadas con el componente razonabilidad según el análisis global

Código	Descriptor	Análisis global
C2	Se conecta la situación del partido de fútbol con la noción de muestra estadística. Se produce una conexión entre la situación analizada y la noción de muestra en un estudio estadístico para valorar el procedimiento a utilizar. Se valora la adecuación de los procedimientos para el propósito que se persigue.	IMCT-Procedimiento.
C12	Se argumenta que hay que expresar los números con la misma exactitud: centésimas. Se conectan dos formas de leer un número con el objetivo de decidir qué procedimiento utilizar.	IMCT-Procedimiento
C14	Se conectan las representaciones de 2,286 y 0,5, para decidir cuál es mayor.	IMCT-Representación
C17	Un alumno se confunde y relaciona una suma con el procedimiento de redondeo. Se discute la razonabilidad de la aplicación del redondeo.	IMCT-Procedimiento

C19	Un alumno propone no escribir todos los ceros al multiplicar decimales acabados en ceros. Se conectan dos formas de aproximarse al algoritmo estándar valorando la economía en la escritura.	IMCT-Procedimiento
C20	La profesora utiliza un ejemplo sin decimales $11 - 3 \cdot (2 - 3)$ para mostrar el orden de las operaciones para $11{,}84 - 3{,}2 \cdot (2{,}4 - 3{,}7)$. Se conectan dos operaciones que comparten estructura para decidir qué procedimiento utilizar.	IMCT-Procedimiento
C21	Se enfatiza en el caso $2{,}4 - 3{,}7$ a partir de recordar la operación $2 - 3$. Se conectan dos operaciones que comparten estructura para decidir qué procedimiento utilizar. Además, se relacionan $2{,}4 - 3{,}7$ con $3{,}7 - 2{,}4$, para decidir el signo del resultado.	IMCT-Procedimiento
C27	A partir de un problema en que se dividen 35 metros de manera equivalente por seis árboles, se relacionan las operaciones 35:6 y 36:7 con relación al significado del problema para decidir qué operación utilizar.	IMCT-Procedimiento
C28	Se conectan las operaciones 35:7 con 34:7. Se justifica la estimación del resultado para 34:7 como menor a 5 argumentando que si disminuye el dividendo y el divisor no varía, disminuye el cociente.	IMCT-Propiedad
C29	Se conecta la noción decimal periódico y decimal infinito no periódico a partir de la operación 34:7. Se valora la razonabilidad de que el resultado no sea periódico	IMCT-Propiedad
C33	Se justifica que al dividir entre diez se mueve la coma hacia la izquierda, ya que el resultado es más pequeño.	IMCT-Propiedad
C34	Se conectan operaciones en las que dividendo y divisor se han multiplicado por el mismo número justificando que, al multiplicar el dividendo y el divisor en una división, el cociente no varía, emergiendo un procedimiento para la división de decimales.	IMCT-Propiedad
C37	Se conectan los cuadrados de números positivos mayores y menores que 1. Se justifica la razonabilidad de obtener un resultado menor al elevar al cuadrado.	IMCT-Propiedad

El análisis específico de las conexiones anteriores permitió identificar y describir de manera detallada las conexiones elementales que definieron las conexiones de la Tabla 2. La Tabla 3 muestra los resultados de los análisis global y específico para cada conexión. Hay conexiones que aparecen en más de una fila de una misma columna, ya que están formadas por conexiones elementales de distinto tipo, como es el caso de C12, cuyo análisis se detalló en el apartado anterior.

Tabla 3: Clasificación de las conexiones siguiendo los dos niveles de análisis

		Subtipo de conexión intramatemática con tratamiento		
		Representación	Procedimiento	Propiedad
Tipos de conexiones elementales que aparecen (análisis específico)	Rp*	C14	C12	
	Rc*		C17, C20, C21, C27	
	Pl*		C19, C27	
	Ag*		C2, C12, C20, C21	C28, C29, C33, C34, C37

Rp: representacional; Rc: Rasgo común; Procedimental; Ag: Argumental

La Tabla 3 muestra un protagonismo de las conexiones IMCT con énfasis en los procedimientos, así como de las conexiones elementales de tipo argumental. Las conexiones IMCT con énfasis en procedimientos observadas fueron potencialmente útiles para validar procedimientos (C2, C12, C20, C21), y para validar la adecuación de un procedimiento en comparación a otros (C17, C27). En el caso de las conexiones elementales argumentales se dieron a partir de dos situaciones. Por un lado, cuando la conexión argumental se produjo en una conexión IMCT con énfasis en propiedades, la proposición P1 de la conexión elemental argumental fue la formulación de una propiedad conocida o trabajada anteriormente (p.e. en C33 la P1 es que dividir entre 10 es hacer más pequeño lo que se divide), o la identificación de un patrón (p.e. en C29 un alumno observa el patrón de restos de la división y formula que es posible que el patrón cambie). Por otro lado, cuando la conexión elemental

argumental se produjo en una conexión con énfasis en procedimientos, la proposición P1 se construyó a partir de otra conexión previa (p.e. en C12 se observa que el número 12,5 se puede leer como doce unidades y cinco décimas, o como doce unidades y cincuenta centésimas a partir de una conexión anterior entre las dos representaciones verbales). Para profundizar en la relación entre ambos niveles de análisis (global y específico) en el caso de IMCT con énfasis en procedimientos y conexiones elementales argumentales, a continuación, mostramos con más detalle el análisis de las conexiones IMCT con énfasis en procedimientos que incluyen conexiones elementales de tipo argumental: C2, C12, C20 y C21.

La conexión C12 se analizó a modo de ejemplo en la metodología. En el caso de la conexión C20, en el contexto de la corrección de la resolución de la operación 11,84-3,2·(2,4-3,7), varios alumnos muestran su desacuerdo en relación al orden de las operaciones y al signo de la resta dentro del paréntesis. Como respuesta a las dudas de los estudiantes la profesora les propone una operación similar:

> PROFESORA: Eh, voy a ponerlos al siguiente ejercicio. No es un ejercicio del libro, pero si yo les pusiera este ejercicio que se llama $11 - 3 \cdot 2$ [lo escribe y lo dice en voz alta] menos… oye ahh vamos a ponerle este número ¿qué les parece si le pongo un 3 en lugar de un 3,7? ¿Qué hacen ustedes? $[11 - 3 \cdot (2 - 3)]$
>
> ALUMNOS: Paréntesis
>
> PROFESORA: paréntesis, genial. Lo que te está pasando, lo que te están diciendo, pero aquí es que tenías que dejarlo todo igual y solo sustituir el paréntesis, algo que decía Tomás. Vale, entonces paréntesis ¿qué les sale? [de $(2 - 3)$]

Se produce una conexión entre dos operaciones combinadas que coinciden en las operaciones que hay que realizar y en el orden en el que hay que realizarlas. La segunda operación propuesta es una versión simplificada de la primera, ya que se eliminan los decimales para poner el foco en las operaciones, por lo que se trata de una conexión IMCT que enfatiza procedimientos. En este fragmento, se identifica una conexión elemental entre las dos operaciones, $11{,}84 - 3{,}2 \cdot (2{,}4 - 3{,}7)$, y $11 - 3 \cdot (2 - 3)$, basadas en el rasgo común de compartir las operaciones y la aplicación de las reglas de prioridad de operaciones. Esta conexión da paso a otra conexión elemental de argumentación entre dos proposiciones. La primera proposición P1 es: las dos operaciones combinadas anteriores -una en números racionales no enteros y la otra en números enteros- coinciden en las operaciones que aparecen y en el orden en que deben ser resueltas. La proposición P2 es: si en la operación en enteros se resuelve el paréntesis y se sustituye, entonces en la operación en racionales no enteros también hay que calcular el paréntesis y sustituirlo.

En el caso de la conexión C2 se conecta la situación de un partido de fútbol con los procedimientos numéricos que se utilizan (cálculo de razones y su expresión decimal) y se dan argumentos sobre la validez de los resultados obtenidos para el partido de fútbol analizado. Además, se señala la falta de validez estos resultados para realizar predicciones sobre los resultados de los mismos equipos en otros partidos, lo que constituye una conexión elemental argumental. En la conexión C21, que sigue a la conexión C20 analizada más arriba, se conectan las operaciones $2{,}4 - 3{,}7$ y $3{,}7 - 2{,}4$ a partir de un procedimiento propuesto por un alumno. La respuesta de la profesora permite el establecimiento de una conexión elemental argumental que concluye que el procedimiento propuesto por el alumno $(3{,}7 - 2{,}4)$ es una buena estrategia siempre que se tenga en cuenta el signo del resultado.

CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados de la tercera columna de la Tabla 2, junto con la lectura vertical de la Tabla 3 muestra el protagonismo de las conexiones intramatemáticas conceptuales de tratamiento (IMCT) con énfasis en procedimientos. Sin embargo, el análisis horizontal de la Tabla 3 muestra que las conexiones elementales que más se identificaron fueron las de tipo argumental. El análisis más detallado de las

cuatro conexiones que se encuentran en la intersección señala que, en las conexiones que se relacionan con el componente razonabilidad del sentido numérico, existe un énfasis en los procedimientos al considerar el análisis global (qué se conecta y para qué). Sin embargo, al examinar las conexiones elementales (cómo se formulan las relaciones que permiten establecer la conexión), se observan conexiones de tipo argumental en varios casos. En particular se observa que, en este caso, la proposición P1 que desencadena la conexión elemental argumental emerge de otra conexión elemental anterior de tipo representacional, de rasgo común, o procedimental. Esto subraya la relevancia de abordar ambos análisis para una comprensión más profunda del papel de las conexiones en el desarrollo del sentido numérico. En este sentido, es fundamental explorar cómo se puede desarrollar un conocimiento estratégico (Fariña y Bruno, 2021; Heinze et al., 2009; Yang et al., 2004), el cual podría forjarse, al menos en parte, mediante la formulación de proposiciones basadas en conexiones representacionales, de rasgo común y procedimentales. Así, las conexiones que se relacionan con la componente razonabilidad implican la argumentación de procedimientos y propiedades, que implican la construcción más o menos explícita de proposiciones y el establecimiento de conexiones que las relacionen para el desarrollo de estrategias de cálculo. En este sentido, el análisis de las conexiones que aparecen cuando se desarrolla el sentido numérico puede resultar una herramienta útil para comprender mejor cómo se desarrolla el sentido numérico en el aula y para el diseño de propuestas metodológicas o programas formativos con el objetivo de promover el desarrollo del SN (Adamuz-Povedano, 2023). Para profundizar en la relación entre las conexiones matemáticas y la componente razonabilidad es crucial explorar otros contextos educativos, como el estudio de los números naturales en educación primaria o la introducción de los números enteros en educación secundaria.

Referencias

Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11–25). SEIEM.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Dissertation [Doctoral dissertation, Simon Fraser University].

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. London: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203224342

De Gamboa, G., Badillo, E. y Font, V. (2023). Meaning and Structure of Mathematical Connections in the Classroom. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 23*(2), 241-261. https://doi.org/10.1007/s42330-023-00281-2

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. y Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middlegrades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297–319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

Fariña, M. y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261 – 268). Valencia: SEIEM.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Ghazali, M., Mohamed, R. y Mustafa, Z. (2021). A Systematic Review on the Definition of Children's Number Sense in the Primary School Years. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(6), 1-12. https://doi.org/10.29333/ejmste/10871

Hatisaru, V. (2023) Mathematical connections established in the teaching of functions. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 42* (3) 207–227. https://doi.org/10.1093/teamat/hrac013

Heinze, A., Star, J. R. y Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM, 41*, 535-540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics, 12*(3), 2-44.

Nickerson, S. D. y Whitacre, I. (2010). A local instruction theory for the development of number sense. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(3), 227-252. https://doi.org/10.1080/10986061003689618

Rodríguez-Nieto, C.A., Rodríguez-Vásquez, F.M. y Font, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f'. *Educational Studies in Mathematics, 114*, 63–88. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10246-9

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouw (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). MacMillan Publishing Company.

Yang, D. C., Hsu, C. J. y Huang, M. C. (2004) A Study of Teaching and Learning Number Sense for Sixth Grade Students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education* (2), 407–430 https://doi.org/10.1007/s10763-004-6486-9

Yin, R. (2014). *Case Study Research: Design and Methods*. Sage.

EL SENTIDO ESTOCÁSTICO EN LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM (2010-2023)

Stochastics sense in the SEIEM symposiums (2010-2023)

De la Fuente, A. y Garrido-Martos, R.

Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Esta revisión sistemática tiene como objetivo caracterizar las investigaciones presentadas en los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), desde el año 2010 hasta 2023, en el ámbito de la Estadística y la Probabilidad. En conexión con el currículo actual, se emplea el término Sentido Estocástico como puente entre ambos campos. Se observa un incremento progresivo de contribuciones a lo largo de los años. No obstante, se encuentran similitudes con resultados previos, especialmente en lo que respecta a la escasez de trabajos de evaluación centrados en estudiantes de Educación Primaria.

Palabras clave: *probabilidad, estadística, sentido estocástico, revisión sistemática.*

Abstract

This systematic review aims to describe the research presented at the symposiums of the Spanish Society for Research Mathematics Education (SEIEM), from 2010 to 2023, in Statistics and Probability. In connection with the current curriculum, the term Stochastic Sense is used as a bridge between the two fields. A progressive increase of contributions is observed over the years. However, similarities are found with previous results, especially with regard to the scarcity of assessment work focused on Elementary School students.

Keywords: *probability, statistics, stochastics sense, systematic review.*

INTRODUCCIÓN

La presencia de la estadística y la probabilidad ha experimentado un crecimiento significativo dentro de los currículos de Educación Matemática en los últimos años. En una sociedad como la actual, la necesidad de formar futuros ciudadanos competentes en este ámbito es innegable, y todo empieza por una buena formación desde la etapa escolar.

Las recomendaciones de distintos organismos, como el National Council of Teachers of Matematics (NCTM), llevan desde los años 90 proponiendo la introducción del estudio de esta área de contenido desde las edades más tempranas (NCTM, 2003). De preescolar a grado 12º tenemos propuestas como la Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II) (Bargagliotti et al., 2020) que ofrecen una estructura conceptual de la educación estadística en tres niveles de desarrollo, incorporando la necesidad de entender lo fundamental sobre la probabilidad para aplicar la inferencia estadística.

Dado el creciente protagonismo que ha adquirido el estudio de este bloque en los últimos años (Vásquez et al. 2019), el propósito de la presente comunicación es ofrecer una descripción de los trabajos presentados acerca del sentido estocástico en los simposios de la SEIEM. Este trabajo, que se enmarca en una revisión sistemática más amplia, se inspira en una investigación previamente presentada en este mismo foro por Ortiz en 2010 titulada "La Educación Estadística en los simposios de la SEIEM (1997-2009)". En este sentido, se ha

De la Fuente, A. y Garrido-Martos, R. (2024). El Sentido Estocástico en los simposios de la SEIEM (2010-2023). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 185-192). SEIEM.

optado por tomar dicho trabajo como punto de referencia y actualizar la revisión de las investigaciones presentadas los trece años posteriores.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Definir las finalidades de la enseñanza de la estadística y la probabilidad pasa en primer lugar por un posicionamiento respecto a la terminología utilizada. Alsina (2021) ofrece una síntesis de algunos de los términos más habituales: educación, alfabetización, pensamiento o razonamiento, cultura y sentido. La conexión entre esta diversidad de términos describe en su conjunto el contexto de la estocástica.

En el contexto español, la última Ley Orgánica de Educación (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) ha optado por denominar "Sentido Estocástico" al conocido bloque de "Estadística y Probabilidad", englobando los saberes de "organización y análisis de datos", "incertidumbre" e "inferencia". Este cambio de terminología pasa por el conocimiento específico de lo que se trabaja en este bloque, destacando conocer la diferencia esencial entre la matemática determinista y la que maneja incertidumbre (Rodríguez-Muñiz et al., 2020). De este modo, se pueden establecer puentes entre la estadística y la probabilidad con el propósito de resaltar las estrechas relaciones que existen entre ambas, en lugar de presentarlas de manera aislada y desvinculada.

La investigación en torno a este estudio está en constante evolución. Las conclusiones de una revisión sistemática reciente llevada a cabo por Batanero y Álvarez-Arroyo (2023) sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, reflejan que, a pesar de que la investigación sobre las intuiciones y el proceso de aprendizaje de los estudiantes tiene una larga historia, los cambios en los planes de estudio y el impacto de la tecnología sugieren que este campo de estudio continuará desarrollándose en los próximos años. Estos cambios curriculares representan un desafío significativo, especialmente para los docentes, quienes deben recibir una sólida formación inicial. Este aspecto es preocupante según lo evidencian los datos de investigaciones recientes, que indican que la enseñanza de la estadística y la probabilidad, así como de su didáctica, aún no está extendida en todos los programas del grado de maestros y maestras en Educación Infantil y Primaria de las universidades públicas españolas (Alsina y García-Alonso, 2023).

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Al igual que se consideró en Ortiz (2010), el objetivo principal es caracterizar la investigación recogida en las comunicaciones de los Simposios de la SEIEM respecto al sentido estocástico entre 2010 y 2023. Se ha realizado una revisión sistemática de las Actas publicadas en la web de la SEIEM desde 2010 hasta la actualidad. En este período, el formato del congreso y el acceso a los documentos presentados ha ido evolucionando. En particular, desde el 2012 se dejaron de publicar las actas de los grupos de investigación y la presentación en formato póster surgió en 2014.

Este análisis es de tipo descriptivo. Nos hemos limitado a la información recabada en las comunicaciones presentadas y seguido las fases de la revisión sistemática (Okoli, 2015).

Selección.

En marzo de 2024 se realizó una revisión de las comunicaciones publicadas en las Actas del Congreso de la SEIEM entre los años 2010 – 2023, ambos incluidos. De las 583 comunicaciones presentadas, se han identificado por título todas las producciones escritas sobre estadística y probabilidad. El único criterio de exclusión tomado para la selección final es sobre la temática. La comunicación debe hacer alusión a que el tema de investigación gira en torno a algún contenido del sentido estocástico. Se excluyen los trabajos que tratan de Educación Matemática en general o sobre otros bloques de la Matemática.

Para la extracción de la información se utilizaron las siguientes categorías de análisis: producción diacrónica, terminología utilizada, patrones de productividad de autores, temas tratados y participantes de los estudios. A continuación, se detallan los resultados obtenidos.

RESULTADOS

Producción diacrónica

Entre 2010 y 2023 se han publicado 583 comunicaciones en las actas de la SEIEM. Se observa una notable variabilidad entre el número total de comunicaciones por edición presentadas a lo largo de estos años. Se aprecia un ligero incremento con el paso del tiempo, empezando por 32 en 2010 (Lleida) y alcanzando alrededor de las 50 publicaciones en los últimos cinco años. Destaca el año 2021 (Valencia), con un total de 66 publicaciones. Este hecho seguramente sea atribuible a la COVID-19, dado que la edición de 2020 no pudo celebrarse.

En esta revisión sistemática se han seleccionado 83 de estos trabajos, lo que representa un 14,24% del total de comunicaciones. La media de artículos presentados son 6,38 comunicaciones por año, con una desviación típica del 2,47. Entre 2012 y 2018, el número de comunicaciones presentadas sobre la temática se mantiene constante entre 7 y 9. La proporción de estos años respecto al total, se mueve en un rango entre el 16% y 22%, destacando 2016 (Málaga) con un 22% respecto del total. Desde 2019 hasta la actualidad, esta proporción ha ido descendiendo, resaltando una baja participación en los dos últimos años, 2022 (Santiago) y 2023 (Logroño).

Tabla 1. Datos de producción por edición

Año	Ciudad	S. Estocástico	Total	%
2010	Lleida	5	32	16%
2011	Ciudad Real	4	36	11%
2012	Baeza	8	39	21%
2013	Bilbao	7	43	16%
2014	Salamanca	9	46	20%
2015	Alicante	7	43	16%
2016	Málaga	9	41	22%
2017	Zaragoza	8	38	21%
2018	Gijón	9	50	18%
2019	Valladolid	5	46	11%
2021	Valencia	8	66	11%
2022	Santiago	1	48	2%
2023	Logroño	3	55	5%
	Total	83	583	14%

Terminología utilizada

De las 83 comunicaciones seleccionadas, un total de 57 incluyen en el título y/o en sus palabras clave alguno de los términos “probabil*” OR “estadístic*” OR “estocástic*”. En concreto, 21 contienen estadística, 24 probabilidad, o con algunas de sus respectivas variantes del término como, por ejemplo, “probabilístico”, y 2 con ambos términos. Además, 10 comunicaciones incluían alguno de estos términos sólo en sus palabras clave: 4 con estadística y 6 con probabilidad. En sus títulos contienen diferentes términos relacionados con el tema en cuestión: “Espacio muestral” (1); “Inferencial” (1); “Gráfico” (1); “Azar” (1); “Media” (1); “Aleatorio/a” (2); “Incertidumbre” (1); “Falacia" (1); “Inferencial” (1). Es importante resaltar que únicamente se ha encontrado una comunicación que contiene el término “estocástico” en una de sus palabras clave. Esta comunicación en concreto corresponde a una de las dos que mencionan “Estadística y Probabilidad” en su título.

Además de estos trabajos, también se han seleccionado comunicaciones sobre el tema en cuestión que no utilizan estos términos más generales ("probabil*" OR "estadístic*" OR "estocástic*"), ni en el título ni en las palabras clave. Se han encontrado 22 palabras diferentes que nos han ayudado a identificar que 26 trabajos están relacionados con algunos contenidos que engloba el sentido estocástico. Estos términos más específicos se han encontrado en la lectura de los títulos con una frecuencia muy puntual: "Tablas" (4); "Dispersión" (2); "Media" (2); "Distribución" (2); "Correlación" (1); "Varianza" (1); "Regresión" (1); "Combinatoria" (1); "p-valor" (1); "Centralización" (1); "Varianza" (1); "Aleatorios" (1); "Pictogramas" (1); "Significación" (1); "Muestreo" (1); "Dependencia e independencia" (1); "Contraste de hipótesis" (1); "Gráfico" (1); "Chi-cuadrado" (1); "Candado" (1).

Tabla 2. Número de comunicaciones por términos

Términos más generales		
Aparecen en el título	Estadístic*	21
	Probabil*	24
	Estocást*	0
	Estadística y Probabilidad	2
Aparecen en las palabras clave	Estadístic*	4
	Probabil*	6
Términos más específicos		
Aparecen en el título	20 términos diferentes	26

Patrones de productividad de autores

Se han identificado un total de 94 autores que han contribuido a alguna de las 83 comunicaciones. De estos autores, 55 han participado en un solo documento, mientras que 19 han contribuido en dos. Los siguientes 8 autores firman en tres de los documentos: Díaz-Levicoy, García, Godino, González, López-Martín, Ruz, Salinas y Vásquez. La autoría de 4 o más documentos por parte de 12 autores se detalla en la tabla 3. Se incluye también la posición de cada firmante en el artículo y la universidad de procedencia.

Tabla 3. Autores con más trabajos presentados

Autor	Universidad	1.º	2.º	3.º	4.º	Total
Arteaga, P.	Universidad de Granada	4	3	3	4	14
Batanero, C.	Universidad de Granada	0	14	13	2	29
Cañadas, G. R.	Universidad de Granada	5	0	3	2	10
Contreras, J. M.	Universidad de Granada	4	2	3	4	13
Díaz, C.	Universidad de Huelva	0	4	2	0	6
Estrada, A.	Universidad de Lleida	1	1	2	0	4
Gea, M. M.	Universidad de Granada	3	4	2	3	12
Huerta, M. P.	Universidad de Valencia	2	3	0	0	5
Molina-Portillo, E.	Universidad de Granada	1	1	1	1	4
Ortiz, J. J.	Universidad de Granada	5	0	0	0	5
Sánchez, E.	Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México	6	8	1	1	16
Serrano, L.	Universidad de Granada	0	0	4	0	4

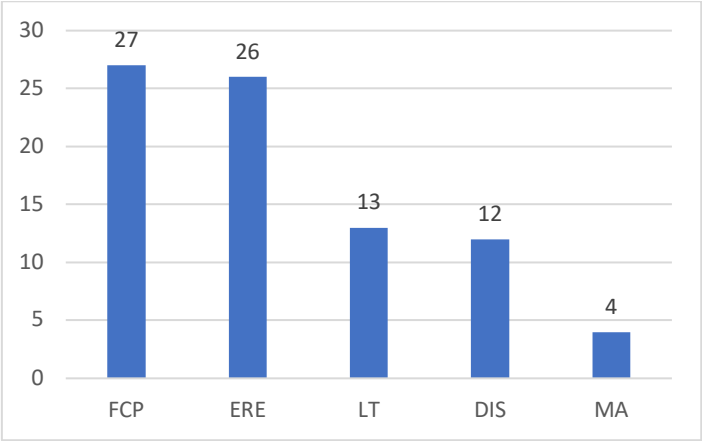
En su mayoría la presentación de comunicaciones son colaboraciones entre autores. De los resultados obtenemos que solo 5 de las comunicaciones están firmadas bajo un nombre y 1 con la colaboración de cinco autores. Las colaboraciones de tres autores son las que más se repiten, con 31 trabajos

publicados, seguida de los presentados por dos autores (24 comunicaciones) y de cuatro autores (22 comunicaciones).

Temas tratados

Para la categorización de los temas abordados en las comunicaciones, en vista de los resultados, se ha adaptado la clasificación de líneas de investigación presentada en Cañizares et al. (2006) que utilizó Ortiz (2010), dejando cinco grandes bloques de clasificación. La categoría de "Evaluación del razonamiento probabilístico (EVR)" se ha sustituido por un término más global según el contexto de definición propuesto: "Evaluación del razonamiento estocástico". Se nombran en el mismo orden de frecuencia resultante: "Formación y concepciones de los futuros profesores (FCP)", "Evaluación del razonamiento estocástico (ERE)", "Análisis de libros de texto y otros programas formativos (ALT)", "Diseño y evaluación de experiencias de enseñanza (DIS)" y "Medición de actitudes (MA), esta última es una nueva incorporación como categoría. Para esta clasificación no se ha considerado el propio trabajo de revisión de Ortiz (2010). En la figura 1 se muestran las frecuencias de los 82 trabajos restantes.

Figura 1. Frecuencias temas tratados en las comunicaciones



Las líneas de investigación de "Inferencia Estadística (INFE)" y de "Razonamiento combinatorio (RCO)" no se han considerado como categorías independientes, en diferencia a la clasificación en Ortiz (2010), pero sí se han tenido en cuenta como contenidos específicos que se abordan dentro de algunas de las categorías definidas. En particular, el RCO aparece en dos ocasiones, como uno de los temas de estudio en el análisis de libros de texto y en el diseño de una propuesta didáctica de un recorrido de estudio de investigación (REI). Las investigaciones en torno al razonamiento probabilístico son predominantes, al igual que otro tema de interés destacado es la lectura de gráficos estadísticos.

Participantes de las investigaciones

De las comunicaciones revisadas, 68 de ellas tomaban un perfil de muestra participante según se indica en la Tabla 4. Las investigaciones en las que participan estudiantes de enseñanzas no universitarias conciernen a un 39.70% respecto al total de comunicaciones, destacando que el 22% son estudiantes de Bachillerato. Un 54.41% corresponde a todos los participantes universitarios. Aquellas investigaciones que utilizaban como muestra la participación de dos o más grados o máster de formación de docentes, se han englobado en una misma categoría: "Distintas combinaciones futuros profes". La formación de futuros docentes alcanza el 40% de entre todos los trabajos, con una alta participación de futuros maestros de Educación Primaria. Las investigaciones que se centran en profes en activo y en estudiantes de primaria son minoría.

Tabla 4. Perfiles de la participante

Participantes	Frecuencia
Estudiantes de Bachillerato	15
Estudiantes de la ESO	8
Estudiantes de Primaria	3
Estudiantes Formación Profesional Básica	1
Estudiantes universitarios (otras carreras)	10
Futuros profes Ed. Secundaria/Bach	5
Futuros profes de Ed. Primaria	16
Futuros profes (otras especialidades)	1
Distintas combinaciones futuros profes	5
Profes en activo	4

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El trabajo de Ortiz (2010), en el que se estudió la presencia de la Educación Estadística los años 1997-2009, ha servido como punto de referencia para comparar, discutir y actualizar los resultados obtenidos. En esta investigación se realiza una revisión sistemática, a partir de las actas de los Simposios de la SEIEM respecto al sentido estocástico entre 2010 y 2023.

De las 583 comunicaciones encontradas en las actas se han seleccionado 83 comunicaciones. El uso de términos como probabilidad o estadística aparecen en 57 trabajos en el título y/o palabras clave. En las 26 comunicaciones restantes, se han empleado 20 conceptos diferentes que nos indican que la investigación realizada tiene que ver con el tema de estudio de esta revisión. Estos datos, por un lado, nos permiten apreciar la gran variedad de temas abordados dentro del sentido estocástico. Por otro lado, resulta sorprendente la escasa presencia de términos como "azar" o "incertidumbre", los cuales están estrechamente relacionados con los significados e interpretaciones habituales de este concepto. Dado el alto volumen de producciones que se empiezan a manejar, la sistematización de la búsqueda permite una mayor rigurosidad. Este resultado hace plantearnos la importancia de seleccionar cuidadosamente los términos que se utilizan para los trabajos en título y palabras clave, de cara a poder ser seleccionadas en otras revisiones más amplias.

Una curiosidad reseñable es el título de ambas revisiones. En 2010, se utilizó Educación Estadística, para abarcar no solo lo referente a la estadística, sino también los trabajos relacionados con la probabilidad. Es interesante observar cómo ha evolucionado la terminología y la coexistencia de diferentes conceptos en la literatura para referirnos al bloque de Estadística y Probabilidad (Alsina, 21). Trece años más tarde, en la revisión actual, se ha optado por el término “Sentido Estocástico”, al igual que establece el currículo como conexión entre ambos bloques. De momento, no es un término que esté presente en las publicaciones de la SEIEM, puesto que su aparición se limita a una única comunicación que incluye el término “estocástico” en sus palabras clave. Sin duda, prestar atención a la evolución de estos términos empleados nos da información sobre la conceptualización y los temas abordados en la investigación.

Es importante tener en cuenta que no se puede realizar una comparación directa con los resultados de la producción total de Ortiz (2010). En nuestro caso, no se han contabilizado los seminarios ni se ha tenido acceso a las actas del grupo de investigación “Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria” (DEPC). Sin embargo, si tomamos como referencia los 29 trabajos (seminarios y comunicaciones) correspondientes al ámbito de Educación Estadística de los 274 que se encontraron en 2010, con una media de 2.23 por año, podemos observar un claro incremento en la producción. En este rango de revisión, que comprende también 13 años, los trabajos seleccionados han sido un 14% del total y la media por año es de 6.38.

Es relevante mencionar que, si bien la media de artículos presentados ha aumentado significativamente, es preocupante observar que los últimos dos años (2021 y 2022) han sido los de menor producción, con solo 3 y 1 artículos respectivamente. Este hecho sugiere la necesidad de prestar atención a la situación de la investigación en Educación Estocástica y evitar que entre en una fase de decadencia, especialmente dada la importancia de esta área temática en el contexto de las necesidades formativas actuales. Es esencial buscar puntos de referencia y estrategias comunes para promover la investigación en este campo.

El análisis del patrón de productividad de autores revela que el foco de la investigación estos años ha seguido siendo muy destacado en Granada. En la tabla 3 se recoge la posición en la que firma cada autor como evidencia de las colaboraciones presentes. Se destaca la notable productividad de Sánchez con 16 documentos, del Departamento de Matemática de México, que no apareció en la revisión anterior (Ortiz, 2010). Este autor se sitúa en segunda posición en número de producciones totales, justo después de Batanero que encabeza la lista con 29 comunicaciones. Si cruzamos esta información con la obtenida en la categoría anterior, se puede observar que, a excepción de Sánchez, coincide con que ninguno de los autores de universidades españolas de la tabla 3 presentaron trabajos en los dos últimos años. En estos años, la coordinación del grupo DEPC también ha cambiado, por lo que podemos inferir que se está produciendo un cambio en este ámbito de la investigación. Será interesante seguir recabando información sobre las líneas de investigación y la productividad en los próximos simposios de la SEIEM para observar cómo se consolida el grupo a lo largo del tiempo.

Los temas tratados se han identificado según las categorías “Formación y concepciones de los futuros profesores (FCP)”, “Evaluación del razonamiento estocástico (ERE)”, “Análisis de libros de texto y otros programas formativos (ALT)”, “Diseño y evaluación de experiencias de enseñanza (DIS)” y “Medición de actitudes (MA)”. Al igual que en Ortiz (2010), los temas relacionados con la formación de futuros docentes destacan como los más abordados en las comunicaciones. Además, los resultados muestran que, dentro de la categoría FCP, las investigaciones que toman futuros profesores de Educación Primaria como participantes son las más frecuentes. En cambio, a nivel no universitario, las investigaciones van dirigidas en su mayoría a trabajar con estudiantes de Bachillerato.

Es relevante destacar que, en el estudio de 2010, Ortiz señalaba que los trabajos centrados en Educación Primaria eran prácticamente inexistentes en ese momento. Dado que los nuevos decretos de enseñanzas mínimas empezaban a introducir la estadística y probabilidad desde el primer ciclo, se propuso incluir esta temática también como una línea preferente de investigación. En estos años, este bloque de contenido se ha ido afianzando en el currículum y encontramos en la literatura que esta investigación se lleva a cabo, incluida la etapa de infantil. Sin embargo, en los simposios de la SEIEM solo se han encontrado tres artículos con participantes de Educación Primaria y ninguno de Educación Infantil. Por lo tanto, sirva esta revisión para retomar la recomendación de Ortiz (2010) y abogar por que los trabajos centrados en estudiantes de estas etapas educativas sean también una línea de investigación preferente en el futuro.

Por último, nos gustaría expresar nuestro agradecimiento a Ortiz por su trabajo inicial y a los 94 autores que han contribuido al campo de la educación estadística y probabilística en este foro. Destacamos la importancia de este tipo de trabajos que además de caracterizar, informar y actualizar sobre lo que se ha venido tratando en los Simposios de la SEIEM, se quiere contribuir a orientar futuros estudios y abrir posibles líneas de investigación.

Referencias

Alsina, Á. (2021). “Ça commence aujourd'hui”: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA*, 15(4), 243-266. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357

Alsina, Á. y García-Alonso, I. (2023). La estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de maestros en España. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 6(2), 11-27.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II)*. American Statistical Association.

Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023) Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education* 56, 5–17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Cañizares, M. J., Estepa, A., Batanero, C. y Vallecillos (2006). Una década de investigaciones del grupo de estadística, probabilidad y combinatoria de la SEIEM. *Tarbiya: Revista de investigación e innovación educativa*, 38, 39-60.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 2022/157, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157/con

Okoli, C (2015). A Guide to Conducting a Standalone Systematic Literature Review. *Communications of the Association for Information Systems*, 37, 879-910. https://doi.org/10.17705/1CAIS.03743

Ortiz, J.J. (2010). La educación estadística en los Simposios de la SEIEM (1997-2009). En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 475-486). SEIEM.

National Council of Teachers of Mahematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. Vásquez, C. y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números. Revista de Didáctica de la Matemática*, 104, 217-238.

Vásquez, C., Pincheira, N., Piñeiro, J.L. y Díaz-Levicoy, D. (2019). ¿Cómo se promueve el aprendizaje de la estadística y la probabilidad? Un análisis desde los libros de texto para la Educación Primaria. *Bolema: Boletín de Educaçao Matemática*, 33(65), 1133-1154.

NOTAS AL CAPÍTULO EN LAS PRIMERAS OBRAS DE LA COLECCIÓN ELEMENTAL INTUITIVA (REY PASTOR Y PUIG ADAM)

Notes to the chapter in the first works of the Colección Elemental Intuitiva (Rey Pastor y Puig Adam)

Dólera-Almaida, J. y Sánchez-Jiménez, E.

Universidad de Murcia

Resumen

La primera colaboración conjunta de Rey Pastor y Puig Adam, como autores de libros de texto dirigidos a la enseñanza secundaria, tuvo lugar con la publicación de los dos primeros tomos de su Colección Elemental Intuitiva: Elementos de Aritmética (1927) y Elementos de Geometría (1928). Estos libros de texto tuvieron una gran aceptación entre el profesorado secundario debido, en parte, a su orientación intuitiva. El objetivo de este trabajo es estudiar las notas al capítulo que se incluyeron en los dos primeros tomos de la Colección e identificar algunos de los usos que los autores pretendieron dar a estos apuntes. En su realización, se han tenido en cuenta las distintas funciones que Genette (1987) atribuyó a los paratextos de una obra literaria. Los resultados han permitido poner de manifiesto la importancia que estos autores concedieron a la historia de la matemática y los usos que asignaron a estas referencias históricas.

Palabras clave: *Rey Pastor, Puig Adam, notas, libros de texto, educación secundaria*

Abstract

Rey Pastor and Puig Adam's first joint collaboration as authors of textbooks for secondary education took place with the publication of the first two volumes of their Colección Elemental Intuitiva: Elementos de Aritmética (1927) and Elementos de Geometría (1928). These textbooks were very popular among secondary school teachers due, in part, to their intuitive orientation. The aim of this work is to study the chapter notes included in the first two volumes of the Collection and to identify some of the uses that the authors intended to make of these notes. In doing so, we have taken into account the different functions that Genette (1987) attributed to the paratexts of a literary work. The results have revealed the importance that these authors attached to the history of mathematics and the uses that they assigned to these historical references.

Keywords: *Rey Pastor, Puig Adam, notes, textbooks, secondary education*

INTRODUCCIÓN

En el siglo XX, Julio Rey Pastor (1888-1962) y Pedro Puig Adam (1900-1960) fueron dos profesores relevantes en el ámbito de la didáctica matemática en España. El interés que ambos profesores compartían por la enseñanza de las matemáticas, en la etapa secundaria, propició que Rey Pastor propusiera a Puig Adam la elaboración de una colección de libros de texto para el bachillerato. Los autores defendían que la enseñanza de las matemáticas debía ser eminentemente intuitiva en los primeros cursos del bachillerato, por lo que no es de extrañar que asignaran a este proyecto conjunto la denominación de Colección Elemental Intuitiva.

El primer tomo de la Colección, Elementos de Aritmética (Rey Pastor y Puig Adam, 1927), estaba dirigido al primer curso del bachillerato. Un año más tarde se publicó, para el segundo curso, el tomo siguiente, Elementos de Geometría (Rey Pastor y Puig Adam, 1928). El título de ambas obras se

Dólera-Almaida, J. y Sánchez-Jiménez, E. (2024). Notas al capítulo en las primeras obras de la Colección Elemental Intuitiva (Rey Pastor y Puig Adam). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 193-200). SEIEM.

correspondía con el nombre de las asignaturas de matemáticas que se impartían en estos cursos en el momento de su edición (Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, 1926).

El profesorado de educación secundaria mostró interés por la aplicación del método intuitivo en la enseñanza de las matemáticas, por lo que las obras tuvieron una gran acogida entre la profesión docente. Ambos textos continuaron reeditándose en años posteriores, a pesar de no estar adaptados a los planes de estudio que estaban vigentes (Dólera-Almaida y Sánchez-Jiménez, 2019). Pascual Ibarra (1960, p. 801), catedrático de matemáticas e Inspector de Enseñanza Media, llegó a afirmar que, con la elaboración de la Colección Elemental Intuitiva, Rey Pastor y Puig Adam "colocaron a nuestra patria en las avanzadas de la didáctica internacional, y constituyeron entonces una auténtica revolución en los métodos de enseñanza matemática".

En los dos primeros tomos de la Colección, Rey Pastor y Puig Adam introdujeron, al final de los capítulos que componían la obra, un apartado denominado "Notas al capítulo"; que versaba sobre los contenidos expuestos en el capítulo correspondiente. Según figura en el prólogo de la obra Elementos de Aritmética (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, p. VIII), con la inclusión de estas notas los autores pretendían despertar el interés del estudiante hacia los contenidos que estudiaba, además de "mantener viva la curiosidad del escolar y brindar al profesor ocasiones en las que pueda amenizar sus clases" (p. VI). En este mismo texto, mostraron su intención de elaborar un Libro del Maestro con soluciones y más notas; pero no se tiene constancia de su publicación.

La alusión a estas "Notas al capítulo", por parte de los autores, en el prólogo del primer tomo de la Colección Elemental Intuitiva y su intencionalidad de seguir ampliándolas en futuras publicaciones, nos lleva a cuestionar si el contenido de estas notas podría aportar información interesante a la investigación en Historia de la Educación Matemática (HEM). El objetivo de este trabajo es estudiar las "Notas al capítulo" que se incluyeron en los dos primeros tomos de la Colección Elemental Intuitiva, Elementos de Artimética (Rey Pastor y Puig Adam, 1927) y Elementos de Geometría (Rey Pastor y Puig Adam, 1928), e identificar los usos que los autores pretendieron darles.

Algunas de publicaciones que Rey Pastor y Puig Adam escribieron, ya fuese de forma conjunta o por separado, han sido objeto de estudio en investigaciones de HEM. Un ejemplo son los trabajos de Gónzalez Astudillo y Codes (2016, 2021) sobre la obra Didáctica Matemática Eurística de Puig Adam, en los que las autoras abordan diversos aspectos de la misma, como contenidos matemáticos, estrategias de enseñanza, etc. Este estudio se enmarca en una investigación más amplia sobre las aportaciones del catedrático de instituto Pedro Puig Adam a la enseñanza de las matemáticas en España, desde que ganó por oposición una cátedra en el Instituto San Isidro de Madrid (1926) hasta su fallecimiento en 1960. Algunos resultados de esta investigación ya han sido publicados (Dólera-Almaida et al., 2024; Dólera-Almaida y Carrillo-Gallego, 2023a, 2023b; Dólera-Almaida y Sánchez-Jiménez, 2019, 2024).

CUESTIONES TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Genette (1987) identifica en una obra literaria diferentes paratextos, entre ellos alude a los títulos, los índices, los prólogos y las notas. A estas últimas las define como un "enunciado de longitud variable (puede ser una palabra) relativo a un segmento más o menos determinado del texto, y dispuesto junto a ese segmento o en referencia a él" (p. 321). Aunque también señala que existen otro tipo de notas, en las que se aborda "de manera más o menos libre sobre tal o cual detalle o sobre el conjunto del capítulo" (p. 323).

Los paratextos aclaran las intenciones de los autores y ayudan a situar a los destinatarios de la obra. Según Genette (1987), las notas pueden desempeñar distintas funciones como: aportar definiciones o aclarar términos que aparecen en el texto, exhibir autoridades de apoyo y documentos confirmatorios o complementarios, precisar afirmaciones que se mencionaron en el texto de forma vaga o imprecisa,

señalar inexactitudes o complejidades a las que no se alude en el texto, y realizar argumentos suplementarios o anticipaciones a objeciones, entre otras.

En Historia de la Educación Matemática (HEM) se han realizado varias investigaciones en las que los paratextos de diversas obras, de carácter matemático, han sido analizados. Los prólogos, por ejemplo, han sido estudiados por Maz-Machado y Rico (2009, 2015), Oller-Marcén y Muñoz-Escolano (2019) y Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2020). También existen trabajos que se han ocupado de las notas a pie, como los elaborados por Carrillo-Gallego (2005), por Puig (2006) y por Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2021). Cabe señalar que, en este último, los autores consideraron para su análisis las funciones señaladas por Genette.

Para la realización de este trabajo se han considerado las fases del método histórico, aplicadas a la investigación en HEM (Gónzalez Astudillo, 2009). En la primera de ellas se han localizado varios ejemplares de las fuentes primarias de este trabajo, *Elementos de Aritmética* (Rey Pastor y Puig Adam, 1927) y *Elementos de Geometría* (Rey Pastor y Puig Adam, 1928), y se han seleccionado las primeras ediciones. Posteriormente, se han localizado y transcrito las "Notas al capítulo" de ambas obras. Finalmente, se ha analizado la información obtenida, se han identificado las finalidades principales que los autores asignaron a estas notas y se ha realizado una comparación de sus usos con las funciones que Genette (1987) atribuye a las notas de una obra impresa.

RESULTADOS

El estudio de las "Notas al capítulo", en los dos primeros tomos de la *Colección Elemental Intuitiva* (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, 1928), muestra que estas notas podían estar formadas por una o por varias secciones. En la Tabla 1 se muestran los títulos de las secciones y su localización en las obras estudiadas.

Tabla 1. Secciones que componen las "Notas al capítulo" en las obras estudiadas (Elaboración propia a partir de Rey Pastor y Puig Adam, 1927, 1928)

Sección	Capítulos	
	Elementos de Aritmética (EA)	Elementos de Geometría (EG)
La numeración a través de la historia (S1)	1	
Medios auxiliares para contar (S2)	1	
Teoría euclídea (S3)	5	
Apuntes históricos (S4)	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	3, 4, 5, 6, 7, 9
Otras unidades (S5)	6	
Resumen histórico (S6)		2
Origen de algunos nombres (S7)		3
El teorema de Euler (S8)		7
Acerca de los ejercicios prácticos correspondientes a este capítulo (S9)		6
Sin título (S10)	8, 10	1

La mayor parte de las "Notas al capítulo" abordan aspectos relacionados con la historia de las matemáticas. En este apartado se presentan las finalidades principales de las notas que tienen mayor presencia en los libros de texto (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, 1928).

Se han localizado notas que pretenden informar de documentos confirmatorios, como la siguiente:

> Toda la teoría expuesta, así como la notable demostración de que la serie de números primos es ilimitada, se encuentra ya en los famosos *Elementos de Euclides*, genio matemático griego que vivió unos tres siglos antes que Jesucristo. Ello demuestra la atención prestada por los griegos a la teoría de números, que dejaron completamente organizada en su parte elemental (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, p. 130).

O esta otra: "La mayor parte de las proposiciones acerca de las posiciones relativas de rectas y planos se hallan contenidas en el libro 11.º de los Elementos de Euclides, enunciados y demostrados con la tendencia logística que caracteriza las obras griegas" (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 197).

En otras ocasiones, los autores buscan aclarar sus decisiones didácticas ante el lector de la obra. En Elementos de Aritmética (Rey Pastor y Puig Adam, 1927), en el capítulo dedicado a los números decimales, los autores utilizan las notas al capítulo para justificar la anteposición del estudio de los números decimales al de las fracciones ordinarias, orden que no era habitual en el plan de estudios de 1926, periodo al que pertenece el libro de texto. Consideramos conveniente señalar que, en el prólogo de la obra, los autores ya abordan esta cuestión. Indican que secuenciar estos contenidos en el orden contrario –fracciones ordinarias y, posteriormente, números decimales- respondía, en la mayoría de ocasiones, al deseo de querer presentar estos contenidos matemáticos en el mismo orden en el que surgieron históricamente o bien, a la comodidad que ofrece el pasar de lo general a lo particular; justificación que, a su entender, carecía de valor. Así pues, refiriéndose al cálculo con números decimales indican:

> En las Aritméticas destinadas a los usos corrientes del comercio, los autores, incluso en pleno siglo XVIII, despreciaban este cálculo, que muy escasa utilidad tenía, dada la arbitrariedad de los sistemas de medida. Sólo cuando los países fueron adaptando el sistema *métrico decimal* fué cuando el cálculo con decimales adquirió todo su interés en la vida práctica. Atendiendo a este interés y a consideraciones pedagógicas hemos antepuesto el cálculo con decimales al cálculo con fracciones ordinarias (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, p. 185).

También se han hallado notas que tratan sobre el origen del nombre de términos matemáticos, como la siguiente:

> Los nombres de *cubo*, *exaedro*, *tetraedro*, *prisma*, *pirámide*, etc., son de origen griego. En particular ya hemos dicho que *diedro*, *triedro*, etc., significa *dos caras*, *tres caras*, etc.; el nombre de *prisma* proviene, al parecer, del nombre que en griego daban a la operación de *serrar*; *pirámide* parece provenir de *pira*, recordando tal vez la forma de las piras de fuego (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 219).

O la que se muestra a continuación:

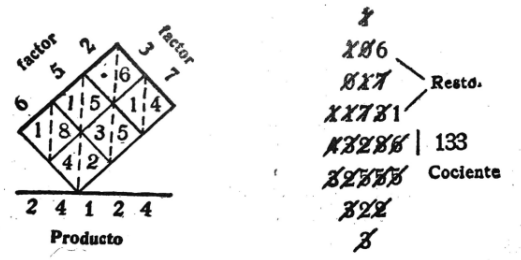
> La mayor parte de los nombres usados en Geometría se conservan desde tiempos de Grecia, con levísimas modificaciones. Así, los nombres *cateto*, *hipotenusa*, *isósceles*, *rombo*, *trapecio*, *paralelógramo*, etc., netamente griegos. Algunos tienen composición curiosa; por ejemplo, *hipotenusa* significa *subtendida*; *isósceles* significa *piernas iguales* (de *isos* igual, *skelos* pierna); *paralelógramo* se compone de *para* (al lado) *allelos* (uno de otro) y *grammee* (línea), etc." (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 114).

Otras notas se centran en mostrar al lector la evolución de la notación matemática a lo largo de la historia. En algunas de ellas, los autores indican que el uso de notaciones antiguas no siempre había contribuido al progreso de la ciencia matemática:

> Prevaleció durante mucho tiempo la notación por medio de iniciales combinadas y más o menos deformadas de aquellas palabras. Esta desdichada notación impidió ver claras las leyes del cálculo con potencias, hasta que ciertos matemáticos del siglo XVI introdujeron poco a poco la noción de exponente (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, p. 104).

Hay notas que buscan mostrar al estudiante técnicas de cálculo antiguas, así como poner de manifiesto las limitaciones de estas respecto a las actuales. Un ejemplo lo encontramos cuando los autores aluden a algoritmos aritméticos, a los que atribuyen un origen hindú y que están en desuso, como la multiplicación en celosía o la división por el método de la galera (Figura 1), donde añaden, refiriéndose a este último: "No es extraño que, ante tal amontonamiento de cifras, el vulgo considerase el cálculo como privilegio de inteligencias superiores (…) tachando las cifras corregidas, los procedimientos se tornaron engorrosos" (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, p. 94).

Figura 5. Algoritmos de multiplicación y división antiguos (Rey Pastor y Puig Adam, p. 94)



Mientras que otras notas pretenden destacar a figuras relevantes de la disciplina matemática. Para ello, los autores aludieron a diversos aspectos que estaban relacionados con el referente matemático que deseaban ensalzar ante el estudiante. Los temas que aparecen en ellas se pueden clasificar en tres grupos: datos biográficos, aportaciones a las matemáticas y anécdotas. En el primer grupo se encuentran, por ejemplo, las referencias que mencionan el origen o procedencia de la persona, las que lo sitúan en un momento cronológico determinado, o las que informan sobre cómo adquirieron determinados conocimientos matemáticos. Una nota perteneciente a este primer grupo es la siguiente:

> El primer matemático griego de que nos habla la Historia es Thales de Mileto, que vivió seis siglos antes de J.C. Viajó por Egipto, de donde importó sin duda muchos conocimientos prácticos de Geometría. Fundó la escuela llamada jónica, a la que pertenecen *Anaximandro*, *Anaxágoras*, *Archytas* (siglo V antes de J.C.), etc. (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 74).

En el segundo grupo, sobre aportaciones a las matemáticas, se enmarcan las notas que tratan sobre hallazgos en determinados temas, como esta: "No aparece propiamente notación decimal hasta Vieta (siglo XVI), quien distinguió las unidades decimales de las enteras, poniendo aquéllas en tipo más pequeño, o separando unas de otras con un trazo vertical |, primer vestigio de la coma" (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, p. 185).

O la siguiente, en la que se enumeran algunas de las contribuciones de Arquímedes a la Geometría:

> Otro genio griego (...) Arquímedes, calculaba el valor de π, el área del círculo, de la elipse, de segmentos de parábola, el volumen del cono, la esfera, etc.; resolvía, en fin, un cúmulo tan grande de problemas de medida y de orden físico, que ha sido considerado como el mayor genio técnico de la antigüedad (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 75).

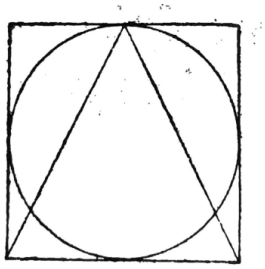
En el tercer grupo, anécdotas, se localizan notas que relatan hechos que pueden parecer curiosos a los estudiantes, como la siguiente:

> Los cinco poliedros regulares eran ya conocidos de la antiquísima escuela pitagórica (…). El último descubierto fué el dodecaedro. La escuela pitagórica atribuyó extraordinaria importancia metafísica a tales cuerpos, creyendo que el exaedro, octaedro, tetraedro e icosaedro eran la forma adoptada por las partículas de los elementos fundamentales: Tierra, aire, fuego y agua. El descubrimiento de un quinto poliedro regular desconcertó algo tan singular teoría (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 219).

O esta otra, en la que se muestra que la Figura 2 está relacionada con el problema del cálculo de volúmenes:

> El cálculo de volúmenes es problema antiquísimo, y probablemente resuelto antes de los griegos, para los cuerpos más sencillos (…) El portentoso genio de *Arquímedes* se ocupó (…) con entusiasmo del problema, dando un paso formidable con la cubicación de figuras esféricas; sus resultados le tenían tan orgulloso que, a pesar de la importancia de otros de sus descubrimientos, pidió que se grabara en su tumba la figura adjunta, que recuerda la relación entre el cilindro, cono y esfera (…) descubierta por él. Esta figura sirvió muchos años después para identificar su tumba (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 252).

Figura 6. Imagen grabada en la tumba de Arquímedes (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 252)



Para finalizar, se muestran en la Tabla 2 las secciones en las que se localizan, con mayor frecuencia, las finalidades de las "Notas al capítulo" que se han estudiado en este trabajo. Se indica, también, la obra a la que pertenecen (Rey Pastor y Puig Adam, 1927, 1928).

Tabla 2. Finalidades principales de las "Notas al capítulo" en las obras estudiadas (Elaboración propia a partir de Rey Pastor y Puig Adam, 1927, 1928)

Finalidad principal	Sección				
	S1	S3	S4	S6	S7
Informar de documentos confirmatorios			EA / EG		
Aclarar decisiones didácticas		EA	EA		
Aludir al origen del nombre de términos matemáticos			EA / EG		EG
Mostrar la evolución de la notación matemática a lo largo de la historia	EA		EA		
Exponer técnicas de cálculo antiguas y señalar sus limitaciones al compararlas con las actuales		EA	EA		
Destacar a figuras relevantes de la disciplina matemática: datos biográficos, aportaciones a las matemáticas y anécdotas	EA		EA / EG	EG	

Esta información revela que la finalidad que aparece de forma más recurrente, en las "Notas al capítulo" de los dos primeros tomos de la Colección Elemental Intuitiva, es la que pretende destacar a figuras relevantes de la matemática. Del mismo modo, se puede concluir que la obra en la que se localizan las notas con finalidades más variadas es Elementos de Artimética (Rey Pastor y Puig Adam, 1927).

COMENTARIOS FINALES

La mayoría de las "Notas al capítulo" que se han localizado en las obras Elementos de Aritmética (Rey Pastor y Puig Adam, 1927) y Elementos de Geometría (Rey Pastor y Puig Adam, 1928) están enmarcadas en hechos históricos relacionados con las ciencias matemáticas. Por lo que podemos afirmar que Rey Pastor y Puig Adam otorgaron a la historia de las matemáticas un papel predominante en estas notas.

Algunas de las notas se corresponden con los usos que Genette (1987) identifica en su trabajo. La función exhibir autoridades de apoyo y documentos confirmatorios está presente en las notas que señalan que Elementos de Euclides es una obra de referencia para estudiar la divisibilidad y las posiciones de rectas y planos. Cuando se hace referencia al origen del nombre de varios términos matemáticos, se busca aportar definiciones o aclarar términos. Y cuando los autores justifican que en la ordenación de su libro de texto el estudio de los decimales precede al de las fracciones, parece evidente que lo que pretenden es aportar argumentos suplementarios o anticipaciones a objeciones. Como se ha indicado anteriormente, la secuenciación de los temas que Rey Pastor y Puig Adam

plantearon en el primer tomo de la Colección Elemental Intuitiva no era la habitual. Por ello, no es de extrañar que incluyeran en este capítulo una nota que pretendiera frenar posibles críticas ante la ordenación de los contenidos que proponían.

Otras notas buscan presentar técnicas de cálculo antiguas a los estudiantes con la intención de poner en valor, a través de comparaciones con la actuales, las ventajas que estas últimas tenían frente a las primeras; en la nota que los autores incluyen sobre el algoritmo de la división por el método de la galera, por ejemplo, se ensalza la claridad escrita de la técnica actual. Esta comparativa también muestra la necesidad de evolucionar hacia nuevas técnicas de resolución, desechando aquellas que, a pesar de ser eficaces, dejan de ser óptimas.

También se han localizado notas dirigidas a destacar a figuras relevantes de la disciplina matemática. Un ejemplo lo encontramos en las notas que mencionan a Thales de Mileto, Vieta o Arquímedes. El hecho de aportar datos biográficos de estos referentes y resaltar algunas de las aportaciones que estos hicieron a las matemáticas, permite al profesor presentar la asignatura como una construcción humana. La ciencia matemática se muestra ante el alumno como una creación colectiva en cuya evolución han contribuido diferentes personas o civilizaciones a lo largo del tiempo. Esto contrasta con la idea que tienen algunos estudiantes sobre las matemáticas, al considerar que todo está hecho en esta disciplina.

Como se ha podido comprobar a lo largo de este trabajo, hay notas que responden a más de una función. Un ejemplo lo encontramos en la nota que indica que la serie de números primos es ilimitada. En ella se exhiben autoridades de apoyo y documentos confirmatorios, al señalar que dicha demostración está en Elementos de Euclides; del mismo modo, se busca destacar la figura de Euclides, aportando datos biográficos sobre el matemático y aludiendo a la calidad de las aportaciones de la civilización griega a la teoría de números.

El estudio de las notas al capítulo, en los dos primeros tomos de la Colección Elemental Intuitiva, pone de manifiesto que los autores utilizaron la historia de la disciplina matemática para despertar el interés de los alumnos hacia los contenidos que estudiaban.

Referencias

Carrillo-Gallego, D. (2005). *La Metodología de la aritmética em los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.

Dólera-Almaida, J. y Carrillo-Gallego, D. (2023a). Dynamic and Multipurpose Teaching Models at the First International Exhibition of Mathematics Teaching Material. *Education Sciences*, 13(3), 265. https://doi.org/10.3390/educsci13030265

Dólera-Almaida, J. y Gallego-Carrillo, D. (2023b). Títulos, índices y prólogos de los libros intuitivos de Rey Pastor y Puig Adam. *Revista De História Da Educação Matemática*, 9, 1–18.

Dólera-Almaida, J. y Sánchez-Jiménez, E. (2019). La resolución de la ecuación de primer grado en los textos de Rey Pastor y Puig Adam. *Revista de História da Educação Matemática*, 5(3), 18-42.

Dólera-Almaida, J. y Sánchez-Jiménez, E. (2024). Pedro Puig Adam y el método heurístico en la enseñanza de las matemáticas en España. El Futuro del Pasado. https://doi.org/10.14201/fdp.31159

Dólera-Almaida, J., Carrillo-Gallego, D. y Sánchez-Jiménez, E. (2024). Puig Adam y el Instituto-Escuela de Madrid. *Historia y Memoria de la Educación*, 19, 401-435.

Genette, G. (1987). *Seuils*. Éditions du Seuils.

González Astudillo, M. T. (2009). La investigación en historia de la educación matemática. *Educación y Ciencia*, 1(36), 37-58.

González Astudillo, M. T. y Codes, M. (2016). Lecciones de Aritmética de Pedro Puig Adam. En M. Chaquiam, I. Abreu y W. Valente (Eds.), *Anais III Congresso Iberoamericano Historia da Educaçao Matemática* (pp. 78-90). SBHMat.

González Astudillo, M. T. y Codes, M. (2021). El libro "Didáctica Matemática Heurística" de Pedro Puig Adam. *Ensino Em Re-Vista*, 28, 1-25. https://doi.org/10.14393/ER-v28a2021-19

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2009). Las Liciones de Mathemáticas de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *SUMA*, 60, 35-41. http://hdl.handle.net/10396/9647

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos de textos españoles de matemáticas em los siglos XVIII y XIX. Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, 18(1), 49-76. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428003

Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes (1926). Real Decreto de 25 de agosto de 1926, relativo al nuevo plan del Bachillerato. *Gaceta de Madrid*, 240, 1234-1237.

Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2021). Notas al pie en libros de texto españoles del siglo XIX. El caso de Juan Cortázar. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. Gónzalez y D. Carrillo-Gallego (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 457-464). SEIEM.

Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2020). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados em España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación*, 11, 51-85. https://doi.org/10.5944/hme.11.2020.23545

Oller-Marcén, A. M. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). Conceptions about mathematics, its teaching and its learning in the Compendio Mathematico (1707) written by the Spanish Thomas Vicente Tosca (1651-1723). *Boletim De Educação Matemática*, 26(44), 1227-1260. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a09

Pascual Ibarra, J.R. (1960). Pedro Puig Adam. Una vida al servicio de una vocación. *Enseñanza Media*, 59-62, 795-804.

Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En A. Maz-Machado, M. Torralbo y L. Rico (Eds.), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 113-138). Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1927). *Elementos de Aritmética*. Imprenta de A. Marzo.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1928). *Elementos de Geometría*. Imprenta de A. Marzo.

HERRAMIENTAS DIGITALES EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE FRACCIONES POR FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

Digital tools on posed problems with fractions by pre-service primary teachers

Embid, S. y Perdomo-Díaz, J.

Universidad de La Laguna

Resumen

La formación matemática de los docentes de primaria es un tema que preocupa e interesa a nivel educativo, de investigación, político y social. En este trabajo se presenta un estudio exploratorio cuyo objetivo general es identificar diferencias entre problemas de fracciones formulados por futuros docentes de primaria sin y con la herramienta digital Polypad. El estudio está acotado al ámbito de las fracciones y en él se compara el número de problemas sin errores matemáticos y con información suficiente que 71 futuros maestros de primaria formulan en dos escenarios: sin tecnología y usando la herramienta indicada. Los resultados muestran que el 38% de los sujetos formula más problemas con estas características cuando utiliza Polypad. Además, la herramienta hace visibles dificultades conceptuales asociadas a las fracciones que con lápiz y papel permanecían ocultas.

Palabras clave: *formulación de problemas, herramientas digitales, fracciones, formación docente*

Abstract

The mathematical training of primary school teachers is a topic of concern and interest at educational, research, political, and social levels. This paper presents an exploratory study whose main objective is to identify differences in how future primary school teachers approach fraction problems with and without the digital tool Polypad. The study is constrained to the field of fractions and compares the number of problems without mathematical errors and with sufficient information that 71 future primary school teachers pose in two scenarios: one without technology and one using that digital tool. Results show that 38% of the subjects indicate more plausible problems meeting these criteria when using Polypad. Moreover, the use of the tool makes visible some conceptual difficulties associated with fractions that remained hidden with pencil and paper methods.

Keywords: *problem posing, digital tools, fractions, teacher training*

INTRODUCCIÓN

La incorporación de la formulación de problemas en el aula ha ido en aumento en los últimos años debido, en parte, a que es una actividad que permite acceder al pensamiento de los estudiantes y evaluar su comprensión (Cai y Hwang, 2020). Esto ha contribuido a que la formulación de problemas por parte del profesorado en formación se haya convertido en una línea de investigación sobre la que se están realizando numerosas contribuciones (p.e. Chico et al., 2022; Sosa-Martín et al., 2024; Liljedahl y Cai, 2021). Entre las inquietudes a nivel de investigación está estudiar cómo el formato y las diferentes variables que aparecen en las actividades de formulación de problemas influyen en las características de los problemas formulados (Cai y Leikin, 2020; Sosa-Martín et al., 2024; Zhang et al., 2022).

Los aportes de la tecnología a la formulación de problemas también han sido estudiados, aunque en menor medida. Dichas investigaciones señalan que el uso apropiado de herramientas digitales puede motivar y servir de apoyo en actividades de formulación de problemas, puesto que trabajar en

Embid, S. y Perdomo-Díaz, J. (2024). Herramientas digitales en la formulación de problemas de fracciones por futuros maestros de primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVII (pp. 201-208). SEIEM.

entornos de tecnología favorece la experimentación y la exploración de fenómenos y situaciones diversas (por ejemplo, Abramovich y Cho, 2015; Santos-Trigo, 2019). Sin embargo, integrar herramientas digitales en educación resulta un desafío dado que para usarlas eficientemente se requiere de una serie de saberes y capacidades específicas (OCDE, 2018).

En este manuscrito incluimos un estudio exploratorio que forma parte de una investigación más amplia, de la que ya se han obtenido algunos resultados parciales (Embid et al., 2023a; Sosa-Martín et al., 2024). Este trabajo complementa la información obtenida hasta el momento, al incorporar una herramienta digital concreta para la formulación de problemas y contrastar los problemas que emergen de su uso con los que se habían realizado a lápiz y papel.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación, usamos la expresión formulación de problemas para referirnos al diseño, la creación o la invención de problemas matemáticos, que pueden ser completamente nuevos o surgir a partir de la reformulación de otros problemas (Silver, 1994). Las actividades de formulación de problemas incluyen una situación y un requerimiento o *prompt* (Cai et al., 2022). La situación es el punto del que parte la actividad de formulación de problemas, esto es la información inicial (p.e. un contexto o un dato numérico). La situación puede ser abierta, semi-estructurada o estructurada (Stoyanova y Ellerton, 1996). Una situación abierta sería aquella en la que se da únicamente una información general; la situación semi-estructurada proporciona una imagen o una estructura matemática; y la situación estructurada un problema. Por su parte, el requerimiento es la solicitud que se hace (p.e. formula un problema usando tecnología y otro sin usarla).

En cuanto a los problemas formulados, Leavy y Hourigan (2020) indican un conjunto de características deseables para los mismos, entre las que se encuentran una formulación correcta en el sentido de no contener errores matemáticos, un lenguaje cuidado, cierta demanda cognitiva y la promoción del razonamiento. En este sentido, Grundmeier (2015) establece cuatro categorías de problema: a) no plausible, si contiene afirmaciones no válidas, no pudiendo ser resuelto aun cuando se añada más información; b) plausible sin información suficiente si puede resolverse asumiendo información que no aparece de forma explícita; c) plausible con información suficiente de una tarea si para resolverlo se requiere un único paso; y d) plausible con información suficiente de varias tareas matemáticas si requiere más de un paso para su resolución.

Por su parte, Abramovich y Cho (2015) trabajan desde un marco centrado en la coherencia didáctica de los problemas formulados con herramientas digitales. La coherencia didáctica de un problema refiere, entre otros aspectos pedagógicos, a la resolubilidad formal del problema según el nivel o etapa educativa para el que es planteado. Centradas en estas consideraciones, el estudio que proponemos tiene por objetivo general identificar diferencias entre problemas de fracciones formulados por futuros docentes de primaria sin y con la herramienta digital *Polypad*. Particularmente, analizar los cambios en el número de problemas plausibles y con información suficiente para ser resueltos que formulan los futuros docentes, al pasar de escenarios analógicos a escenarios digitales.

METODOLOGÍA

En este trabajo se utiliza una metodología de tipo mixto, combinando e integrando los enfoques cuantitativo y cualitativo (Creswell, 2012).

Participantes e instrumento

La investigación de la que surge este estudio está siendo realizada con estudiantes de 3.º del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna. Para la recolección de datos se diseñó un cuestionario del que se generaron dos versiones, una para ser realizada sin tecnología (ST) y otra para resolverse con tecnología (CT), en concreto con la herramienta *Polypad*. Cada versión

está formada por tres actividades de formulación de problemas de fracciones. En este documento, presentamos un análisis de los datos obtenidos a partir de la actividad 1 de cada versión. La situación es abierta para ambas versiones (incluir 1/4 y 3/8 en ST; 1/3 y 2/9 en CT) y el *prompt* análogo, aunque exigiendo evidencias de *Polypad* en CT:

> *Actividad 1 (ST).* Formula tres problemas, de diferente dificultad, en los que aparezcan los números 1/4 y 3/8. Cada uno de estos números puede ser un dato o una solución. Recuerda que puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto…).
>
> *Actividad 1 (CT).* Formula tres problemas, de diferente dificultad, en los que aparezcan los números 1/3 y 2/9. Cada uno de estos números puede ser un dato o una solución. Recuerda que puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto…). Debes adjuntar las imágenes de lo que hayas realizado con *Polypad* en cada problema planteado.

Los cuestionarios se aplicaron mientras los participantes estaban cursando la asignatura Didáctica de la Numeración, la Estadística y el Azar, en la que no habían recibido formación explícita sobre formulación de problemas y sí habían utilizado *Polypad*. Se hizo con una semana de diferencia, comenzando por la versión ST y dispusieron de un máximo de 15 minutos por actividad.

Proceso de análisis de los datos

Para atender al objetivo de este estudio concreto, se decidió analizarlos datos de estudiantes que cumplieran las siguientes condiciones: haber formulado tres problemas en la actividad 1, para cada versión del cuestionario (ST y CT), que fueran de fracciones, tal y como pedía la actividad, y haber incluido evidencias del uso de *Polypad* para todos los problemas en la versión CT. De esta forma, los datos analizados corresponden a 71 participantes y un total de 426 problemas (6 problemas por cada participante, 3 ST y 3 CT).

Para cada uno de los problemas se analizaron varias características, que fueron codificadas mediante un proceso de codificación ciega entre pares (Embid et al., 2023a; Sosa-Martín et al., 2024). En este estudio concreto interesa una de ellas: la plausibilidad y suficiencia de datos del problema (Grundmeier, 2015). Para analizar los cambios en la plausibilidad de los problemas formulados sin y con tecnología se definieron, para cada participante, dos variables: "número de problemas plausibles y con información suficiente formulados sin tecnología" y "número de problemas plausibles y con información suficiente formulados con *Polypad*". Esas variables pueden tomar los valores 0, 1, 2 o 3, lo que nos permitió asignar a cada uno de los 71 participantes una categoría que indicara cuántos problemas plausibles y con información suficiente para ser resueltos había formulado en cada una de las versiones del cuestionario, ST y CT (Tabla 1).

Tabla 1. Categorías definidas según el número de problemas plausibles con información suficiente

Categoría	Descripción
0-P	0 problemas plausibles con información suficiente para ser resueltos.
1-P	1 problema plausible con información suficiente para ser resuelto.
2-P	2 problemas plausibles con información suficiente para ser resueltos.
3-P	3 problemas plausibles con información suficiente para ser resueltos.

Así, la categoría 0-P se asigna a aquellos participantes que formulan cero, uno, dos o tres problemas con falta de información y el resto con errores matemáticos. La categoría 1-P se asigna a aquellas personas que han formulado únicamente 1 problema sin errores matemáticos y que puede resolverse sin añadir información. En la categoría 2-P estarían los futuros maestros y maestras que formularon dos problemas sin errores matemáticos y sin falta de información. Por último, en 3-P estarían los sujetos que no indicaron problemas no plausibles y/o sin información suficiente.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En primer lugar, presentamos un análisis global de lo que se observa en los datos correspondientes a cada una de las dos versiones del cuestionario (ST y CT). Un primer resultado obtenido es que los 71 estudiantes considerados en este estudio formularon al menos un problema plausible y con información suficiente en alguna de las dos versiones y que 14 de ellos (19,71%) formularon tres problemas plausibles y con información suficiente en ambas versiones (Tabla 2).

En el cuestionario ST, algo menos de la mitad del alumnado (47,89%) formula 2 problemas plausibles y completos (2-P). En cambio, en el cuestionario CT, algo más de la mitad de los participantes (50,70%) formuló 3 problemas plausibles y con información suficiente (3-P). Esto parece mostrar una mejora al formular problemas CT. Sin embargo, fueron 5 participantes (7,04%) los que en CT formularon sus tres problemas con errores o falta de información (0-P) frente a los 3 participantes (4,23%) que hicieron lo análogo en la versión ST.

Tabla 2. Número (porcentaje sobre el total) de participantes por categoría

	CT				
ST	0-P	1-P	2-P	3-P	Total
0-P	0 (0,00)	1 (1,41)	1 (1,41)	1 (1,41)	3 (4,23)
1-P	3 (4,23)	3 (4,23)	3 (4,23)	6 (8,45)	15 (21,13)
2-P	1 (1,41)	4 (5,63)	14 (19,72)	15 (21,13)	34 (47,89)
3-P	1 (1,41)	2 (2,82)	2 (2,82)	14 (19,72)	19 (26,76)
Total	5 (7,04)	10 (14,08)	20 (28,17)	36 (50,70)	71 (100,00)

En un análisis más detallado, diferenciamos tres regiones de datos según su posición con respecto a la diagonal (en gris) de la Tabla 2: (i) por debajo; (ii) sobre ella y (iii) por encima.

En esta primera región (i), se muestra el número (porcentaje) de participantes que en la versión CT formularon un menor número de problemas plausibles con información suficiente frente a ST. En la región sombreada en gris (ii), los participantes que no reflejaron cambios en la plausibilidad y suficiencia de datos de los problemas formulados en la versión ST frente a los formulados en la versión CT. Finalmente, en (iii) se muestran los participantes que en la versión CT formularon un mayor número de problemas plausibles y completos frente a su predecesora ST.

Particularmente 13 de los 71 participantes considerados en este estudio (18,31%) formularon más problemas plausibles y con información suficiente en la versión ST según datos de la región (i). Precisando, un 12,68% del total de participantes formuló un problema plausible y completo menos al usar la herramienta digital *Polypad* frente al 4,23% que formuló dos problemas menos.

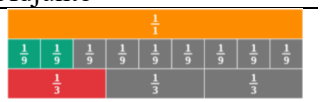
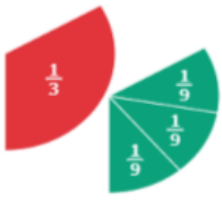
Un único alumno (1,41%) formuló sus tres problemas de CT sin aportar datos suficientes o con errores matemáticos. Mostramos en la Tabla 3 los problemas formulados por este alumno que indicó tres problemas plausibles y con información suficiente en ST (3-P) y dos problemas con errores matemáticos y uno con información insuficiente en la versión CT (0-P). Todos los problemas propuestos en ST responden a operativas adecuadas y son perfectamente resolubles siendo el 1 y el 3 problemas centrados en la estructura operador y el 2 en la estructura aditiva. En la versión CT, en cambio, presenta errores matemáticos en los problemas 1 y 3; falta de información en el problema 2. En el problema 1, el diámetro se define sobre el círculo en vez de la circunferencia sin indicar si las fracciones 1/3 y 2/9 refieren al diámetro o al área del círculo. El problema 2 no especifica unidades de medida y no concreta qué significan las fracciones ni si van a operar sobre cantidades enteras. Por último, el problema 3 no proporciona unidad de medida común para poder comparar los regalices y operar con las fracciones asociadas. En cualquier caso, el participante no aprovecha la potencia de *Polypad* para representar barras y círculos de fracciones, sino que más bien lo utiliza para formas geométricas (problemas 1 y 2) y expresión de fracciones con cajas numéricas (problema 3) resultando en un uso ineficiente de la herramienta digital.

Tabla 3. Problemas de las versiones ST y CT formulados por sujeto en la región (i)

ST	CT	
	Enunciado	Adjunto
1. Paula tiene 80€ que le dejó su abuela. Quiere destinar 3/8 del total a una ONG y 1/4 de lo que queda a comprarse una mochila. ¿Cuánto dinero destina para cada cosa? ¿Sobra algo finalmente?	1. El diámetro de esta circunferencia es de 18 cm. Calcula cuánto sería la porción de 1/3 y de 2/9.	
2. Mi padre me dio dos billetes de monopoly. Dice que uno de ellos vale 1/4 y el otro 3/8. ¿Cuánto dinero del monopoly tengo en total?	2. Halla el área de esta figura sabiendo que un lado mide 1/3 y otro 2/9.	
3. La edad de Sofi es 3/8 que la edad de Jesús y la de este es 1/4 que la edad de Emma. Sabiendo que Emma tiene 64 años. ¿Cuántos años tiene Jesús? ¿Y Sofía?	3. Si Pablo tiene 1/3 de regalices rojos y Alana tiene 2/9 de regalices azules. ¿Qué porcentaje de regalices tienen entre los dos?	

En la segunda región (ii), se observa que 31 participantes (43,66%) formularon el mismo número de problemas plausibles y con suficiencia de información en ambas versiones. Concretamente, un 4,23% de los sujetos formuló un problema plausible y completo para cada cuestionario frente al 39,43% que formuló dos o tres problemas (19,72% en cada caso). Mostramos en la Tabla 4 problemas enunciados por un estudiante que indicó un problema plausible con datos suficientes en ST (problema 3) y un problema plausible con datos suficientes en CT (problema 1).

Tabla 4. Problemas de las versiones ST y CT formulados por sujeto en la región (ii)

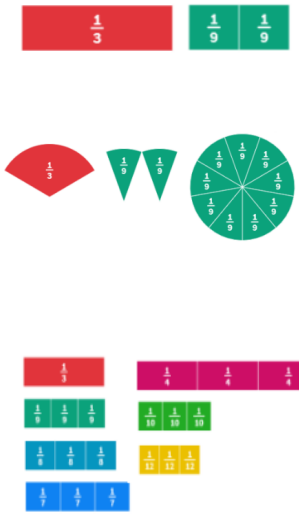
ST	CT	
	Enunciado	Adjunto
1. Ayer fue el cumpleaños de Aaron y lo celebró en su casa con sus amigos. En la fiesta había una tarta la cual estaba dividida en trozos para que cada persona se comiera 2 trozos, pero al final Javier se comió 3 trozos, Acaymo 1 trozo, Luis 2 trozos y Aaron 2 trozos. ¿Qué porción de tarta se comió Javier? Representa la fracción.	1. Pedro y María fueron a comer una salchicha de metro por su aniversario. Cuando el camarero les trajo la salchicha, estos la partieron en 9 trozos. Marta se comió 2/9 de salchicha y Pedro se comió 1/3 de la salchicha. Representa las porciones de salchicha que se come cada uno y calcula cuántos trozos sobraron que no se comieron.	
2. Si me comí 1/4 de golosinas y Juan se comió el doble, ¿cuántas golosinas se comió Juan?	2. En el cumpleaños de María compraron una tarta para nueve niñ@s. Todos los niños comieron tarta, pero sobró 1/3 de la tarta que compraron para el cumpleaños de María. ¿Cuántas porciones se comieron? Representa si es necesario.	
3. Si tengo 12 canicas y pierdo 1/4 de esas canicas, ¿cuántas me quedan? Representa con un dibujo 1/4 de 12 y escribe la porción de canicas que quedan.	3. Si partimos la tarta en tres trozos, y separamos 1/3 de la tarta. ¿Cuántas porciones de nueve trozos de 1/3 de tarta que separamos podríamos comer?	

En los problemas 1 y 2 formulados sin tecnología, se aprecia falta de información al no indicar la igual de los trozos en que se divide la tarta y el monto total de golosinas, respectivamente. El problema 3, en cambio, trata sobre canicas y es perfectamente resoluble con la información proporcionada. Con los problemas formulados con *Polypad*, evidenciamos varios hechos. En el problema 1 se usa la herramienta digital para indicar gráficamente el proceso de resolución siendo un problema plausible

y completo. El problema 2, en cambio, no está completo ya que no se indica el número de porciones en que estaba dividida la tarta y aunque se tome 1/9 de referencia no tienen por qué corresponder a 9 porciones iguales (podrían ser 18, 27, etc.). Por último, el problema 3 contiene errores conceptuales al referir a "nueve trozos de 1/3" e indicar que esta cantidad va a ser 1/3 cuando en realidad se corresponde con tres tartas completas.

Finalmente, en la región (iii) se observa que 27 participantes (38,03%) formulan un mayor número de problemas plausibles y con información suficiente para ser resueltos en la versión del cuestionario con *Polypad*. En cifras, un 26,76% de los sujetos indicaron un problema plausible y completo más en CT frente al 9,86% que indicaron dos más y al 1,41% que indicó tres más. Este último porcentaje se corresponde con un único estudiante del que extraemos la información referente a todos sus problemas en la Tabla 5.

Tabla 5. Problemas de las versiones ST y CT formulados por sujeto en la región (iii)

ST	CT	
	Enunciado	Adjunto
1. Tengo dos tartas y las dividimos en 4 trozos y en 8 trozos. Yo quiero comerme 1/4 de la tarta que dividimos en 4 trozos. Mi hermano quiere comerse 1/8 de la tarta que dividimos en 8 trozos. ¿Cuántos trozos nos hemos comido entre los dos? ¿Quién ha comido más tarta? 2. Manu ha ido a una tienda y ha cogido una bolsa y ha colocado 3/8 de chuches. Cuando sale de la tienda quiere darle 1/4 a su amigo. ¿Cuántas le da a su amigo? 3. Tengo 3/8 de una caja de chocolate, el resto me lo he comido. De esa cantidad me como hoy 1/4 más. ¿Cuántos chocolates me quedan?	1. Pedro tiene 1/3 de su caja de galletas y a Marta le quedan 2/9 de ellas. ¿Quién tiene más cantidad de galletas? 2. Manolo tiene una tarta y se come 2/9 y Paola se come 1/3 más. ¿Qué porción queda de esa tarta? 3. Quiero dividir una barra de fracción de 1/3 en tres barras de fracciones que tengan su mismo tamaño, es decir, al sumarlas tiene que dar 1/3. ¿Cómo lo llevarías a cabo?	

En la versión ST, el participante formuló tres problemas plausibles con falta de información. En el problema 1, no indicó la igualdad de las partes en un contexto de tartas; en cambio, en los problemas 2 y 3 le faltó indicar la unidad de referencia en contextos de chuches y chocolates, respectivamente. Al completar la versión CT y utilizar *Polypad*, el estudiante pudo incluir representaciones que complementan la información dada en los enunciados. Ante la falta de información (igualdad de las partes) del problema 1 en ST, tenemos el problema 2 en CT en el que el círculo de fracciones visibiliza esa igualdad. Asimismo, el problema 1 en CT muestra que la unidad de referencia para Pedro y María es la misma por las barras de fracciones empleadas (en contraposición a los problemas 2 y 3 de ST). Por último, el problema 3 de CT presenta un enunciado sobre fracciones equivalentes con representaciones que facilitan la resolución pudiendo disponer las barras unas sobre otras y comparar gráficamente. Solamente sería fracción equivalente a 1/3, 3/9 de entre las fracciones representadas con las barras.

CONCLUSIONES

Este estudio exploratorio nos ha permitido conocer ciertos aspectos sobre la forma en que los futuros maestros de primaria abordan la formulación de problemas de fracciones, centrando la atención en el efecto que tiene el uso de la herramienta tecnológica *Polypad.* La investigación se realizó a partir de la actividad 1 de un cuestionario con dos versiones: una para ser realizada sin tecnología (ST) y otra para resolverse con tecnología (CT). A cada uno de los 71 futuros docentes se le asignó una categoría

para indicar cuántos problemas plausibles y con información suficiente para ser resueltos había formulado en cada una de las versiones del cuestionario (Tabla 1).

En relación con el objetivo propuesto, los datos evidenciaron que un porcentaje considerable de participantes (38,0%) formuló un menor número de problemas con errores matemáticos y/o información suficiente utilizando *Polypad* (Tabla 2). Sin embargo, en más de la mitad de los casos, la tecnología parece no haber facilitado el proceso de formulación de problemas puesto que el número de problemas plausibles y completos se ha mantenido (43,66%) o ha disminuido (18,31%). Si bien el uso de herramientas digitales induce procesos de experimentación (Santos-Trigo, 2019), ciertos participantes aún muestran dificultades para aprovechar plenamente las prestaciones de *Polypad*. Lo ilustramos en la Tabla 3 donde un estudiante no emplea los *applets* específicos para el trabajo con fracciones (barras y círculos interactivos) y se limita a incluir elementos geométricos y cajas numéricas. Este hecho sugiere que la tecnología puede no ser beneficiosa para todos los estudiantes por igual. El informe TALIS (OCDE, 2018) enfatiza la necesidad de desarrollar ciertos saberes y capacidades para un uso eficiente de la tecnología y trabajos previos sobre los modos de uso de la herramienta *Polypad* para la formulación de problemas de fracciones (Embid et al., 2023b) coincidieron en la necesidad de proporcionar instrucción o apoyo específico para el uso eficiente de las herramientas digitales que se pretendan integrar en el aula de matemáticas. Conjeturamos que la tecnología puede facilitar la formulación de problemas matemáticos, proporcionando un apoyo visual y de representación que ayude a clarificar los enunciados como sucede en casos como el descrito en la Tabla 5. No obstante, este estudio preliminar se limita al análisis de una única variable sobre plausibilidad y suficiencia de datos en sujetos que formulan problemas en escenarios con y sin tecnología digital. Así, para valorar los aportes y el impacto del uso de tecnología en la formulación de problemas proponemos estudios exhaustivos que involucren, por ejemplo, variables relativas al uso de representaciones gráficas (ausente, círculos o barras) y a la relación de la tecnología con los problemas formulados (imprescindible o complemento en los datos o la resolución). Estas dimensiones se están analizando actualmente, por lo que no han podido incluirse en este estudio.

Formular problemas es una tarea que pone de manifiesto qué comprenden y qué dificultades tienen los futuros maestros (Xie y Masingila, 2017); por lo que es importante considerar las necesidades individuales de los estudiantes al integrar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y proporcionar el apoyo adecuado para maximizar su efectividad.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al Proyecto PID2022-139007NB-I00 y al contrato predoctoral PREP2022-000959 financiados por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 /FEDER, UE y FSE+.

Referencias

Abramovich, S. y Cho, E.K. (2015). Using digital technology for mathematical problem-posing. En Singer, F., F. Ellerton, N. y Cai, J. (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 72-102). *Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_4

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 119-145). PME.

Cai, J. y Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 287–301.

Chico, J., Montes, M. y Badillo, E. (2022). Transformaciones de la información en la formulación de problemas: una mirada hacia los futuros maestros. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 219-227). SEIEM.

Creswell, J. W. (2012). *Educational Research: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. Pearson.

Embid, S., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., García-Alonso, I. y Sosa-Martín, D. (2023a) Errores en la formulación de problemas de fracciones y efectos de la variable situación en futuros docentes de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á.A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 219 – 226). SEIEM.

Embid, S., García-Alonso, I. y Bruno-Castañeda, A. (2023b). El uso de herramientas digitales en la formulación de problemas sobre fracciones: un estudio exploratorio con futuros maestros. *XV Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática (FPIEM),* 89-99

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds), *Mathematical problem posing* (pp. 411-431). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_20

Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 341-361. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w

Liljedahl, P. y Cai, J. Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education, 53*, 723–735 (2021). https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

OCDE (2018). Talis 2018. Estudio internacional de la enseñanza y el aprendizaje. Informe español.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical Problem Solving and the Use of Digital Technologies. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research* (pp. 63-89). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Sosa-Martín, D., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., Almeida, R. y García-Alonso, I. (2024). The influence of problem-posing task situation: Prospective primary teachers working with fractions. *The Journal of Mathematical Behavior, 73*, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101139

Stoyanova, E. y Ellerton, N.F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Mathematics Education Research Group of Australasia

Xie, J. y Masingila, J.O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 101-118.https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9

Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z. y Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: The impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM-Mathematics Education, 54*, 497–512. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01324-4

SOBRE LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN EN ESPAÑA (SIGLO XIX)

On the teaching of the numeral system in Spain (19th century)

Espín Buendía, J. G.[a], López Cánovas, V.[b] y Carrillo-Gallego, D.[a]

aUniversidad de Murcia, bIES Miguel Hernández (Alhama de Murcia)

Resumen

Muchas propuestas sobre la enseñanza de la aritmética en el siglo XIX tuvieron en cuenta el principio de intuición formulado por Pestalozzi a comienzos de ese siglo. El trabajo se cuestiona cómo se concretó dicho principio en lo que se refiere al aprendizaje de los sistemas de numeración. Es un trabajo de Historia de la Educación Matemática y las fuentes utilizadas han sido obras de la época dirigidas a la formación del magisterio y catálogos de material escolar del siglo XIX.

Palabras clave: *historia de la educación matemática, sistemas de numeración, material didáctico, metodología de la aritmética, aprendizaje intuitivo.*

Abstract

Many proposals on the teaching of arithmetic in the 19th century took into account the principle of intuition formulated by Pestalozzi at the beginning of that century. The paper questions how this principle was put into practice with regard to the learning of numeral systems. It is a work on the History of Mathematical Education and the sources used for it are works of the period aimed at teacher training and catalogues of school material from the 19th century.

Keywords: *history of mathematical education, numeral systems, didactic materials, arithmetic methodology, intuitive learning.*

INTRODUCCIÓN

A comienzos del siglo XIX, Pestalozzi defendió que la enseñanza debía basarse en la intuición, ir de lo concreto a lo abstracto. A partir de ese momento se formularon propuestas de enseñanza que consideraron que el aprendizaje debía ser intuitivo, responder al Principio de intuición de Pestalozzi (1746-1827); así lo defendieron es España, entre otros, Montesino (1843, 1850, 1988) y Vallejo (1833). Correlativamente, se propusieron materiales didácticos para favorecer ese tipo de aprendizaje. La actividad intuitiva también podía partir de la vida diaria del niño y de su entorno. Aun defendiendo el principio de intuición, su concreción en propuestas para el aula fue variada.

En lo que se refiere a la aritmética, en sus obras *Cómo Gertrudis educa a sus hijos* y *Cartas sobre la educación de los niños*, Pestalozzi (1980) concretó su propuesta en el uso de colecciones para la iniciación en el número y la aritmética. Para el aprendizaje de los números enteros y quebrados en sus escuelas elaboró unas tablas (Figura 1), cuyo uso fue recogido por Chavannes (1807).

Estas tablas fueron criticadas por ser poco intuitivas. Así lo hizo José Mariano Vallejo, catedrático de matemáticas del Real Seminario de Nobles de Madrid que había asistido al ensayo sobre el método de Pestalozzi que se realizó en el Real Instituto Pestalozziano de Madrid (Carrillo, 2006). Vallejo (1833) proponía el uso de un aparato de bolas para la enseñanza de los números enteros (cien bolas colocadas por decenas, en diez alambres) y un bastidor de quebrados, propuesta muy diferente a las tablas de Pestalozzi (Figura 2). Aparatos de este tipo para el aprendizaje de los primeros números (hasta 100) fueron propuestos también por otros autores como el inglés Wilderspin (1840), el director de la Escuela Normal Central de Madrid, Pablo Montesino o el francés Cochin (1833). Estos aparatos

Espín Buendía, J. G., López Cánovas, V. y Carrillo-Gallego, D. (2024). Sobre la enseñanza del número natural en España (siglo XIX). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVII (pp. 209-216). SEIEM.

no son ábacos, pues el valor de cada bola, independientemente de su posición, es 1 (Carrillo et al., 2021).

Figura 1. Tablas 1 y 2 de Pestalozzi (enteros y quebrados)

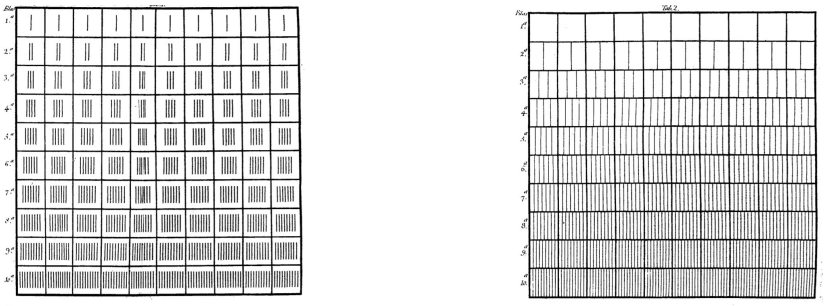
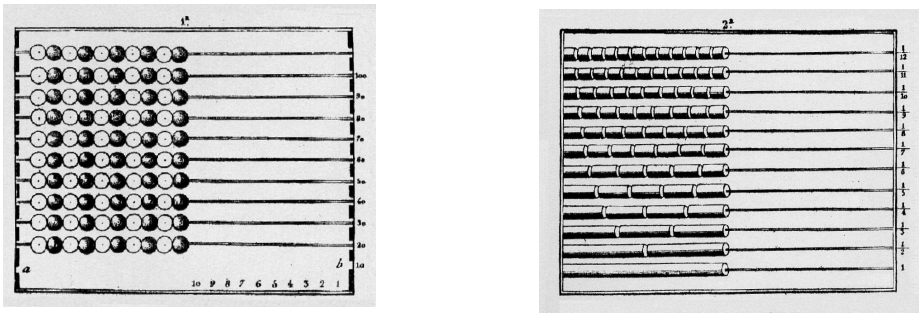


Figura 2. Bastidores de Vallejo: de enteros y de quebrados



La investigación que estamos realizando surge de la cuestión de estudiar cómo se interpretó el principio de intuición en la enseñanza del sistema de numeración en España (siglo XIX). En trabajos anteriores se ha abordado la enseñanza intuitiva de los primeros números (Carrillo, 2006; Carrillo et al., 2021); ahora se considera una etapa posterior: el aprendizaje del sistema de numeración; y se considera el siglo XIX pues es el momento en el que se inician propuestas de enseñanza intuitiva basadas en Pestalozzi.

El reto es conocer cómo se organizaban realmente las actividades de enseñanza de las matemáticas en las escuelas, acercarnos a la caja negra que son las prácticas que se han realizado en las escuelas. Pero es un acercamiento difícil y una de las vías de acceso a la caja negra es el estudio de los materiales didácticos que se utilizaron en el aula.

En una investigación de estas características, es necesario utilizar una variedad de tipos de fuentes que deben ser contrastadas entre sí. En este trabajo se presentan resultados referentes a dos de esos tipos de fuentes: los manuales que se utilizaban para la formación pedagógica de los futuros maestros (que pueden proporcionar las teorías didácticas que fundamentaban el trabajo en el aula) y los catálogos de material escolar (que informan de qué materiales comercializados estaban al alcance de los maestros).

Por ello, el objetivo de este trabajo es estudiar cómo se interpretó el principio de intuición de Pestalozzi en las propuestas sobre la enseñanza del sistema de numeración realizadas en los manuales de pedagogía para la formación del magisterio del siglo XIX y en los materiales comercializados que presentaban los catálogos de las casas comerciales en esa época.

Es una investigación sobre la cultura material de la escuela. Los objetos presentes en el aula nos informan de lo que se considera deseable y de lo que es posible hacer. Por ello, hay investigaciones sobre la génesis de diversos materiales didácticos y sobre su utilización en las aulas (Karp, 2018;

Madrid et al., 2023; Meavilla y Oller, 2013; Roberts, 2019). Sobre los aparatos de bolas y su uso en la enseñanza de la aritmética están los trabajos de Bjarnadóttir (2014); Carrillo (2018); Carrillo y Dólera (2021); Carrillo et al. (2021) y Karp (2018). Como señalan Freiman y Volkov (2018, p. 4), debería estudiarse la conexión entre los conceptos y procedimientos matemáticos y didácticos y los dispositivos de cálculo, cuya introducción en las escuelas durante los siglos XIX y XX ha sido poco investigada. La cuestión planteada en el trabajo trata de avanzar en esa dirección.

FUENTES DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con el objetivo planteado, en este trabajo se han utilizado, principalmente, dos tipos de fuentes. En primer lugar, se han tenido en cuenta propuestas de autores para la enseñanza de la aritmética en las escuelas primarias. Estas propuestas se han buscado en obras dedicadas a la formación del magisterio, en particular en obras aprobadas para la formación pedagógica en las Escuelas Normales. Se han consultado veinte obras. Una de ellas son los apuntes de clase de Pablo Montesino, director y profesor de Pedagogía de la Escuela Normal Central de Madrid, lo que ha llevado a utilizar unos artículos sobre la enseñanza de la aritmética que publicó en el Boletín Oficial de Instrucción Pública (Montesino, 1843).

Para comprobar la existencia de material comercializado para la enseñanza del sistema de numeración se han utilizado catálogos de material escolar del siglo XIX. Catálogos de este tipo son una fuente importante para el estudio de los materiales que pudieron estar en las aulas (Carrillo, 2018). La localización de ejemplares de catálogos no es fácil pues se trata de objetos que son considerados fungibles y, la mayoría de las veces, destruidos al quedar obsoleta la oferta que presentan. Se han localizado cinco catálogos, tres de la Casa Bastinos de Barcelona (1871, 1881 y 1897) y otros dos de la Casa Hernando de Madrid (1892 y 1894).

PROPUESTAS SOBRE LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN

La consulta de los libros de Pedagogía para el magisterio primario ha permitido identificar tres «expertos» que defendían el principio de intuición de Pestalozzi con propuestas algo diferentes y de los que son deudores el resto de los autores; se trata de José Mariano Vallejo, Pablo Montesino y Mariano Carderera. Estas personas fueron consideradas «expertos» en su momento y tuvieron responsabilidades administrativas relacionadas con el sistema educativo.

José Mariano Vallejo

Como se ha comentado en la introducción, Vallejo defendía la importancia de la intuición en los primeros aprendizajes numéricos y describió actividades a realizar con su bastidor de enteros con números hasta 100. Tras estas actividades, Vallejo (1833) afirma:

> No juzgo necesario el continuar dando intuitivamente ideas de los números mayores que ciento ; porque esto en mi concepto ya más bien retrasaría á los niños, haciendo que concretasen sus idéas, que les dispondría para generalizarlas [...] en habiendo adquirido los niños ideas individuales de todos los números hasta el ciento, están ya en disposición de entender y de hacerse cargo de estas mismas ideas de un modo más general [...] y elevarse ya, siempre concibiendo y discurriendo en abstracto y con toda generalidad, á la consideración de los demás números, al modo de escribirlos tanto en el sistema de numeración actual, como en el de los Romanos, etc. (pp. XVI-XVIII).

Y tras la realización también de los ejercicios sobre quebrados, considera que los niños están preparados para estudiar su Aritmética de niños (Vallejo, 1806), «y si se continúa aprendiendo por ella, según el método que se prescribe en su prólogo, se notarán los más rápidos progresos sin el más pequeño inconveniente» (Vallejo, 1833, p. 65).

Pablo Montesino

Pablo Montesino (1781-1849) fue una persona de gran influencia en la enseñanza primaria española entre 1836 y 1849 (año en que falleció). Fue el primer director de la Escuela Normal Central (ENC),

donde se formaron los profesores de las escuelas normales de provincias. Fue profesor de Pedagogía en dicha ENC y, por ello, el que formó a los primeros profesores de las Escuelas Normales sobre Metodología de la aritmética. Sus apuntes de clase (Montesino, 1988) han sido estudiados y publicados por Anastasio Martínez Navarro (Carrillo y Espín, 2021).

Montesino perteneció a la Sociedad encargada de propagar y mejorar la educación del pueblo, que pretendía la creación de escuelas de párvulos. Por encargo de dicha sociedad, Montesino elaboró un Manual para los maestros de las escuelas de párvulos (Montesino, 1850) en el que plantea el aprendizaje de la primera centena utilizando colecciones y un tablero contador como el descrito por Vallejo; no plantea el aprendizaje del sistema de numeración.

Su propuesta sobre el sistema de numeración se encuentra en los apuntes de clase (Montesino, 1988) y en los artículos que publicó sobre enseñanza de la aritmética en el Boletín Oficial de Instrucción Pública (Montesino, 1843; Carrillo y Espín, 2021). Montesino consideraba que la comprensión de la aritmética se fundaba en este aprendizaje, en la comprensión de la expresión escrita de los números de varias cifras. Para ello proponía que se «adquieran nociones claras de los números hasta 100 por medio de objetos» (Montesino, 1988, p. 213) utilizando también el tablero contador, y un «método analítico» sobre el significado de las cifras en la representación escrita y oral de los números. Este método permitía plantear el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones aritméticas de forma razonada, y describía variantes de esos algoritmos que especificaban las operaciones intermedias a realizar (Montesino, 1843). Montesino describe el uso del ábaco (no le da nombre), pero no lo ve adecuado para la escuela; prefiere el tablero de contar porque en él la decena (un alambre) tiene efectivamente diez bolas (Montesino, 1843, p. 125).

Tanto Montesino como Vallejo defendían el Principio de intuición para el aprendizaje de la aritmética, pero solo utilizaban materiales didácticos con los primeros números. Para números mayores se basaban en explicaciones que eran verbales; estos autores propugnaban un aprendizaje de las matemáticas «razonado», pero lo identificaban con la capacidad de dar explicaciones verbales.

Otras propuestas sobre el aprendizaje del sistema de numeración

En total, se han consultado veinte textos del siglo XIX, dedicados a la formación del magisterio. En tres de ellos no se hace referencia a la enseñanza intuitiva de la aritmética (Gerando, 1853; Figuerola, 1842; Nard, 1858).

El resto de las obras sí defienden el principio de intuición, aunque cuatro de ellas (Dunn, 1853; Matter, 1851; Rendu, 1845; Schwarz, 1846) se centran en cuestiones generales sobre educación y sobre la enseñanza de la aritmética dicen cosas muy generales, aunque se advierte la influencia de Pestalozzi; pero lo que privilegian es lo verbal, el cálculo mental en detrimento del escrito interpretándolo como defensa de lo conceptual frente a lo mecánico. Algunas solo comentan el aprendizaje de la primera centena (Anónimo, 1844; Soto, 1894).

El resto de las obras, en lo que se refiere a la enseñanza de la aritmética, se basan muy estrechamente en el Curso de Educación de Montesino y en sus artículos en el BOIP, pero de forma resumida; en general, se trata de profesores de Escuelas Normales que han sido alumnos de Montesino o han estudiado en la ENC. En estas propuestas se propone el aprendizaje de la primera centena utilizando colecciones, entre ellas, las bolas del tablero contador, y para el aprendizaje de los números superiores se realiza un análisis de la escritura de los mismos, diferenciando los órdenes de unidades.

Una propuesta algo diferente es la realizada por Mariano Carderera, que comentamos en el siguiente apartado.

Mariano Carderera

Mariano Carderera (1816-1893) fue alumno y n. º 1 de la primera promoción de la ENC. Director de la EN de Huesca y, más tarde, de Barcelona. Cuando, en 1849, se creó el cuerpo de inspectores de

enseñanza primaria fue nombrado inspector general; desde 1856 fue Jefe del Negociado de Instrucción Primaria, sin dejar de ser inspector general, siendo la persona más influyente en esos momentos en los asuntos relacionados con la enseñanza primaria (y con las Escuelas Normales). Fundó y dirigió, de forma más o menos explícita, varias revistas dirigidas a los maestros (*Revista de Instrucción Primaria*, entre 1849 y 1851, y *Anales de Primera Enseñanza*, entre 1861 y 1868). Viajó por el extranjero y asistió a exposiciones internacionales.

Fue autor de dos obras pedagógicas, declaradas de texto para las Escuelas Normales, en las que hay apartados dedicados a la enseñanza de la aritmética.

El *Curso elemental de Pedagogía* (Avendaño y Carderera, 1850) fue escrito en colaboración con Joaquín Avendaño. La parte de metodología de la aritmética reproduce el *Manual* de Avendaño para las Escuelas Normales (Avendaño, 1846) que, en lo que se refiere al aprendizaje de la aritmética, es un resumen de los artículos del BOIP de Montesino (a quien no cita), incluso con los mismos ejemplos.

Diez años después, Carderera publicó *Principios de educación y métodos de enseñanza* (Carderera, 1866). En esta obra recoge las ideas de Montesino sobre la enseñanza de la aritmética, como la importancia de comprender el sistema de numeración para el aprendizaje de la aritmética o el uso del tablero contador porque da una buena idea de los números hasta el 100, con la descomposición en decenas y unidades. Aunque también cita un aparato de bolas que es un ábaco (el valor de cada bola depende del alambre en el que está), no lo recomienda (Carrillo y Dólera, 2022).

Para el aprendizaje del sistema de numeración, defiende el interés de realizar agrupamientos de diez unidades y reagrupamientos, usando palitos y paquetes de palitos. Estas actividades permiten la visualización de las decenas, centenas, millares, y ayudan a conseguir una buena intuición de las cantidades superiores a diez.

EN LOS CATÁLOGOS DE MATERIAL ESCOLAR

Hemos localizado cinco catálogos de material escolar del siglo XIX, tres de la casa Bastinos (1871, 1881 y 1897) de Barcelona y dos de la casa Hernando (1892 y 1894) de Madrid.

La casa Hernando dice que es «la más antigua en el ramo especial de librería a que principalmente se dedica». En 1892 ofrece un tablero contador de enteros y otro de quebrados (sin ilustración). En 1894 no ofrece tableros contadores (vuelve a hacerlo en 1933 con la misma descripción de 1892).

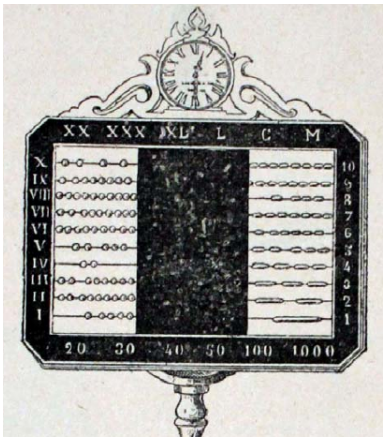
En los dos catálogos ofertaba unos «cuadros mecánicos para aprender a sumar, restar y multiplicar» (p. 24); muy baratos (3,5 pesetas, mientras que un tablero contador simple costaba 10 pts.)

La casa Bastinos se fundó en 1852 como librería; amplió su acción a la edición de libros y al material escolar. En 1881 dicen que es un catálogo «única y exclusivamente dedicado a los libros y material de enseñanza propios de esta casa, y a nuestra iniciativa debidos en su mayor parte, editados o fabricados bajo nuestra dirección» (s.p.). Publicó la revista El Monitor de Primera Enseñanza. Comercializó unos dones de Froebel «arreglada bajo la dirección de D. Julián López Catalán».

En los catálogos de 1871 y 1881 presenta tres tableros contadores, uno de ellos doble: «De madera, para enteros y decimales, con doble numeración y pizarra corredera, montado sobre pie giratorio y esmeradamente decorado» (Bastinos, 1881, s.p.). Las descripciones son similares en ambos catálogos, pero en 1871 no hay imágenes de los mismos; en 1881, la imagen que acompaña al texto informa que, aunque se diga que es «para enteros y decimales», es para enteros y quebrados, pues es la unión en un mismo aparato de los dos bastidores de Vallejo. En 1997 se describe «para enteros y quebrados» y le han agregado un reloj arriba (Figura 3a). También ofertan en 1997 uno aparato doble: un aritmeticón junto a un tablero contador, que describen así: «Ábaco instructor ó tablero contador manual, destinado a la enseñanza elemental del cálculo, aplicable lo mismo a las escuelas de párvulos que a las elementales y a la enseñanza doméstica. Compónese el aparato de un marco de 30

centímetros de lado, dividido en dos casillas, destinadas a las bolas que representan las decenas y las unidades, llevando en el marco la numeración: completa el aparato un mango fijo para facilitar su manejo» (Bastinos, 1897, p. 136; Figura 3b); en 1907, el mismo aparato con la misma descripción e imagen lo ofertaba otra casa, Matías Real (Real, 1907); pero no hemos encontrado referencias a cómo se utilizaba.

Figura 3. Aparatos de bolas del catálogo de la casa Bastinos de 1897



(a)



(b)

CONSIDERACIONES FINALES

En general, las obras dirigidas a la formación del magisterio, en el siglo XIX, consideraban que el aprendizaje de la aritmética debía ser intuitivo en sus inicios; siguiendo las propuestas de Pestalozzi, el aprendizaje de los primeros números se realizaba asociándolos a colecciones de las que eran el cardinal. Pero no se utilizaban las tablas creadas por Pestalozzi, por considerarlas poco intuitivas.

Muchos autores recomendaban el uso de tableros contadores para números hasta 100, pues se hacía perceptible la descomposición de esas cantidades en decenas y unidades. Sin embargo, para números mayores se defendía un aprendizaje razonado del sistema de numeración, pero sin basarlo en colecciones, sino en las descripciones verbales. Es la propuesta que realizaron José Mariano Vallejo y Pablo Montesino, dos personas que fueron referentes para la educación primaria y, en el caso de Montesino, para la formación del magisterio.

Algunos autores, como Pablo Montesino y Mariano Carderera, conocían el uso como ábacos de los aparatos de bolas para el aprendizaje de la numeración, pero no lo consideran adecuado porque consideraban que no se veía de forma palpable qué es una decena, centena, etc. y, por ello, preferían usar los tableros contadores que proporcionaban la intuición del tamaño de esas unidades.

Mariano Carderera defendía dar idea de los diferentes órdenes de unidades del sistema de numeración realizando actividades de agrupamiento en base decimal.

Los catálogos de material escolar consultados ofertaban aparatos de bolas para el aprendizaje de la numeración, pero las descripciones de los mismos presentan ambigüedades y las indicaciones sobre su uso son muy escuetas e inexactas. Parece que las casas comercializadoras no conocían bien el uso de estos aparatos que ofertaban. No se encuentran en los catálogos de esta época otros materiales para el aprendizaje del sistema de numeración.

Esta investigación está siendo completada con el estudio de las aritméticas que se utilizaron tanto en las escuelas primarias como en las escuelas normales del siglo XIX.

Referencias

Anónimo (1844). Manual práctico de profesores de instrucción primaria. Im. de la Unión Comercial.

Avendaño, J. (1846). *Manual completo de instrucción primaria elemental y superior, para uso de los aspirantes a maestros.* Tomo III. Imprenta de José González y Cia.

Avendaño, J. y Carderera, M. (1850). *Curso elemental de Pedagogía*. Im. A. Vicente.

Bastinos, A.J. (1897). *Catálogo Ilustrado de los Productos de esta Casa. Libros y Material Escolar*. Antonio J. Bastinos Editor

Bastinos, J. (1871). *Catálogo de la librería de Juan Bastinos e hijo*. Imp. de Jaime Jepús Roviralta.

Bastinos, J. y A. (1881). *Catálogo de los efectos y libros propios de la casa*. Juan y Antonio Bastinos.

Bjarnadóttir, K. (2014). History of Teaching Arithmetic. En: Karp, A. and Schubring, G. (eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education*. Springer, pp. 431-458.

Carderera, M. (1866). *Principios de Educación y Métodos de Enseñanza*. Imprenta del colegio de sordo-mudos y de ciegos, 3a edición.

Carrillo, D. (2006). Vallejo y las «Ideas primarias acerca de los números». En A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Eds), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación matemática* (pp. 25-47). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Carrillo, D. (2018). Los catálogos de material escolar como fuente de la historia de la educación matemática: el caso de los ábacos. *Historia y Memoria de la educación.* 7, 573-613. https://doi.org/10.5944/hme.7.2018.18638

Carrillo, D. y Dólera, J. (2016). Los catálogos de material y la Historia de la Educación Matemática. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*. SEIEM.

Carrillo, D. y Dólera, J. (2022). La aritmética en los «Principios de educación y métodos de enseñanza» de Mariano Carderera. *REAMEC,* 10 (2). https://doi.org/10.26571/reamec.v10i2.13657

Carrillo, D. y Espín-Buendía, J.G. (2021). Pablo Montesino y la formación matemática del magisterio en España (1838-1850). *REAMEC*, 9(3). https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.13012

Carrillo, D., Maurandi, A. y Olivares, P. (2021). From Pestalozzi's intuition principle to classrooms: the counting frame and innovations in the teaching of mathematics (Spain, nineteenth century). Paedagogica Historica https://doi.org/10.1080/00309230.2021.1906713

Chavannes, D.A. (1807). Exposición del método elemental de Henrique Pestalozzi. Imprenta de Gomez Fuentenebro.

Cochin, D. (1833). *Manuel des fondateurs et des directeurs des premières écoles de l'enfance connues sous le nom de salles d'asile*. Hachette.

Dunn, H (1853). *Principios de enseñanza ó Manual de Escuela Normal.* Biblioteca económica de educación y enseñanza.

Figuerola, L. (1842). *Manual completo de enseñanza simultánea, mutua y mixta.* Lib. de A. Mateis Muñoz.

Freiman, V. y Volkov, A. (Eds.). (2018). *Computations and Computing Devices in Mathematics Education Before the Advent of Electronic Calculators*. Springer.

Gerando, B. (1853). *Curso normal para maestros de primeras letras*. Imprenta de la Biblioteca económica de educación y enseñanza.

Hernando y Cia. (1892) *Catálogo del Material y efectos para las clases, libros de primera enseñanza y obras de consulta y de utilidad para los maestros*. Librería de la Viuda de Hernando

Hernando y Cia. (1894). *Catálogo de Material, libros de texto para institutos, escuelas normales y seminarios de carreras especiales*. Viuda de Hernando y Cia.

Karp, A. (2018). Toward a History of the Teaching of Calculation in Russia. En A. Volkov y V. Freiman (Eds.) *Computations and Computing Devices in Mathematics Education before the advent of electronic calculators* (pp. 385-405). Springer.

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Maz-Machado, A. (2023). Recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas en la prensa para mujeres del siglo XIX: materiales y recursos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI*. SEIEM.

Matter, M. (1851). *El maestro de primeras letras*. Imprenta de A. Vicente.

Meavilla, V. y Oller, A.M. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 82, 89-100.

Montesino, P. (1843). Métodos especiales de enseñanza. Enseñanza de la aritmética. *Boletín Oficial de Instrucción Pública*, V, 77–84, 122–128, 178–190.

Montesino, P. (1850). *Manual para los maestros de escuelas de párvulos*. Im. del Colegio de Sordo-mudos y Ciegos.

Montesino, P. (1988). *Curso de educación y Métodos de Enseñanza y Pedagogía*. M.E.C. Edición, estudio preliminar y notas de Anastasio Martínez Navarro.

Nard, F. (1858). *Manual del profesorado de Instrucción Primaria Elemental y Superior*. Tip. Mellado.

Pestalozzi, J.E. (1980). *Cómo Gertrudis enseña a sus hijos. Cartas sobre la educación de los niños.* Libros de educación elemental (prólogos). Porrúa.

Real, M. (1907). *Catálogo de obras de Primera Enseñanza y Libros de Consulta y de Utilidad para los Maestros. Material y Efectos para toda clase de Establecimientos Docente*s. Obras Religiosas de Devoción. Libros y Objetos para Premios. Librería de Matías Real.

Rendu, A. (1845). Curso de Pedagogía. Im. de Puigrubí y Canals.

Roberts, D.L. (2019). History of Tools and Technologies in Mathematics Education. En A. Karp y G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 431-458). Springer.

Romero, M. M. (1878). Nociones de pedagogía cristiana. Juan Mariana y Sanz, Editor,.

Schwarz, J.H.C. (1846). *Pedagogía o Tratado completo de educación y enseñanza* (3 vol.). Librería de la viuda é hijos de D. Antonio Calleja, Madrid.

Sobrino, F. (1864). *Programa de Sistemas y Métodos de Enseñanza y Nociones de Educación*. Tip. Manuel Frías.

Soto de la Virgen de los Dolores, C. (1894). *Tesoro de Educación Cristiana Católica. Curso completo de Pedagogía teórico-práctica*. Imprenta de San Francisco de Sales.

Vallejo, J.M. (1806). *Aritmética de niños, escrita para uso de las escuelas del reyno*. Imprenta Real.

Vallejo, J.M. (1833). *Ideas primarias que deben darse a los niños en las escuelas acerca de los números al mismo tiempo que se están ejercitando en la clave analítica de la lectura*. Imp. de D. Miguel de Burgos.

Wilderspin, S. (1840). *The infant system for Developing the Intellectual and Moral Powers of all Children, from One to Seven Years of Age*. James S. Hodson.

RIQUEZA DE LOS PROBLEMAS INVENTADOS Y REFORMULADOS POR ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO

Richness of the problems posing and reformulated by mathematically talented students

Espinoza, J.[a], Lupiáñez, J. L[b] y Segovia, I.[b]

[a]Universidad Nacional, [b]Universidad de Granada

Resumen

El estudio contrasta la capacidad de invención y reformulación de problemas de un grupo de estudiantes con talento matemático con otro de un colegio público estándar, en función de la riqueza de los problemas que formulan. Para ello se elaboró un instrumento conformado por siete tareas de invención de problemas y se definieron nueve variables de estudio, así como una rúbrica que permitió valorar la riqueza de los problemas. El estudio concluye que existen diferencias significativas en la capacidad de invención de problemas de ambos grupos, ya que la puntuación media de la riqueza general, así como el nivel de riqueza general mostrado, es mayor en el grupo con talento matemático; más no fue así en la capacidad de reformulación de problemas con mayor riqueza, donde se encontraron diferencias por tarea. Además, se destacan las potencialidades que tiene la invención de problemas para estudiar el talento matemático en términos de su caracterización e identificación.

Palabras clave: *análisis de tareas, invención de problemas, talento matemático.*

Abstract

The study contrasts the ability to posing and reformulate problems shown by a group of students with mathematical talent with another from a standard public school, depending on the richness of the problems they formulate. For this purpose, an instrument was developed consisting of seven problem posing tasks and nine study variables were defined, as well as a rubric that allowed the richness of the problems to be assessed. The study concludes that there are significant differences in the problem invention ability of both groups, since the average score of general wealth, as well as the level of general wealth shown, is higher in the group with mathematical talent. This was not the case, however, in the ability to reformulate problems with greater richness, where differences were found by tasks. Furthermore, the potential of the problem posing to study mathematical talent in terms of its characterization and identification is highlighted.

Keywords: *gifted students, problem posing, task analysis.*

INTRODUCCIÓN

La invención de problemas es reconocida como una actividad relevante dentro de la experiencia matemática de los estudiantes (Brown y Walter, 1990; Ellerton, 1986; Krutetskii, 1976), ya que promueve la participación de los estudiantes en una auténtica actividad matemática, que los reta a encontrar problemas, métodos, soluciones y poner en práctica sus conocimientos y creatividad (Ayllón y Gómez, 2014).

En los estudios de invención de problemas se distinguen los que analizan la capacidad de invención de problemas de estudiantes con talento matemático. Al respecto, Krutetskii (1976) reportó que tienen más facilidad para observar la estructura de los problemas matemáticos, así como aquellos enunciados que surgen de una situación dada. Ellerton (1986) concluye que los problemas implican mayor

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2024). Análisis de la riqueza de los problemas planteados por estudiantes con talento matemático. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 217-224). SEIEM.

dificultad de cálculo, presentan mayor cantidad de operaciones, implican un sistema numérico más complejo y utilizan el lenguaje matemático con mayor fluidez que sus compañeros.

Silver y Cai (1996) reportan que generan no solo más problemas matemáticos, sino que también más problemas matemáticos complejos, ya que implicaban una mayor cantidad de relaciones semánticas. Asimismo, Espinoza (2011) concluye que generan problemas más extensos, que implican una mayor cantidad de procesos y pasos para ser resueltos. Manuel y Freiman (2017), analizaron la riqueza de los problemas resultando que, de los 23 problemas creados, siete son de un nivel de riqueza bajo, 11 presentaban una riqueza media y cinco de riqueza alta. Por último, Ruiz-Socolado y Lupiáñez (2022), concluyen que las producciones de los sujetos con talento matemático son notablemente más ricas, originales y complejas respecto a su nivel curricular.

Así, en este estudio nos planteamos como propósito analizar la capacidad de invención y reformulación de problemas que muestra un grupo de estudiantes considerados con talento matemático con base en la riqueza de los problemas que formulan. Para ello se diseñó una rúbrica conformada por nueve variables de estudio en la que se definieron niveles de actuación que permitieron asignar un valor numérico a la riqueza del problema inventado. Además, dicha capacidad fue contrastada con la de un grupo de estudiantes de un colegio público estándar. La pregunta de investigación abordada es ¿Existen diferencias en la capacidad de invención de problemas entre ambos grupos en función de la riqueza de los problemas que formulan? Creemos que este estudio podría aportar información relevante para el proceso de caracterización e identificación del talento matemático.

MARCO TEÓRICO

Invención de problemas

La invención de problemas ha sido concebida de varias formas. Por ejemplo, Ayllón y Gómez (2014) la conceptualizan como la acción de crear un enunciado a partir de un planteamiento, historia o ciertos datos. Para Koichu y Kontorovich (2013) los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos. Incluso Pólya (1979) hace referencia a este proceso cuando cuestiona ¿Cómo podemos plantear el problema de manera diferente? ¿Cómo variar el problema descartando parte de la condición? En este estudio se adoptó la concepción dada por Espinoza et al. (2016), quienes señalan que es un proceso matemático complejo en el que se formulan enunciados a partir de la interpretación personal o significado que le da un sujeto a una situación concreta o a un problema previamente dado, el cual puede ocurrir antes, durante o después del proceso de resolución.

Talento matemático

Una de las formas más sencillas de definir este constructo es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media (Pasarín et al., 2004). Morales (1998, citado en García, 2014) agrega que poseen un alto grado de dedicación a las tareas asignadas y que presentan altos niveles de creatividad a la hora de abordar tareas matemáticas. Ramírez (2012) señala que suelen preguntarse cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas propuestas, buscan patrones, relaciones, localizan la clave de los problemas, producen ideas originales, valiosas y extensas, desarrollan estrategias eficientes y piensa de modo crítico. En esta investigación elegimos el término talento matemático, en el sentido que define Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas. Esto porque uno de los grupos seleccionados está conformado por estudiantes que han demostrado, con base en pruebas de selección, aptitudes específicas en matemáticas.

Variables de estudio del talento matemático asociadas a la invención de problemas

Existen una serie de rasgos que caracterizaran a los sujetos con talento matemático y que pueden servir de señales para el estudio de este constructo mediante tareas de invención de problemas. Al respecto, estos sujetos prestan mayor atención a los detalles y poseen un razonamiento lógico sobre relaciones cuantitativas y especiales (Banfield, 2005; Freiman, 2006; Reyes-Santander y Karg 2009), por lo que se les facilitaría observar, identificar y establecer relaciones a partir una tarea de invención problemas. Además, podrían incluir ideas complejas y de diferentes campos de conocimiento en sus enunciados, ya que se caracterizan por comprender en profundidad ideas complejas de diferentes campos de conocimiento (Reyes-Santander y Karg, 2009).

Los estudiantes aventajados en esta disciplina también podrían evidenciar una facilidad para emplear diferentes tipos de números en sus producciones, ya que según Greenes (1981) muestran flexibilidad para la manipulación de datos. De igual forma podrían incluir diferentes tipos de ideas a partir de la información suministrada, ya que se caracterizan por añadir a partir de una idea varios y diversos pensamientos relacionados con la misma (González y Domigues 2015). Asimismo, estos sujetos podrían evidenciar un control cognitivo cuando inventan problemas, al realizar cambios en el enunciado para verificar su coherencia o reformular problemas de mayor riqueza, puesto que han evidenciado tener control cognitivo durante el proceso de resolución de problemas, (Greenes, 1981), que se asocia con la actividad metacognitiva de cómo piensan y controlan sus propios procesos de pensamiento los seres humanos (Silva, 2006). Según Cruz (2002), la formulación de problemas requiere de una actividad metacognitiva específica que podría observarse a partir de los cambios que realiza el estudiante a sus producciones y de las respuestas a preguntas como ¿Qué fue lo que hizo? ¿Por qué lo hizo? ¿Qué modificaste? ¿Tiene dominio de esta técnica? ¿Cómo valora lo que has hecho?

La creatividad es otra de las características propias de este tipo de estudiantes (Freiman, 2006; do Carmo y de Souza, 2013). Al respecto, Barbarán y Huguet (2013) mencionan que la invención de problemas le permite a los estudiantes proyectar diversidad de ideas, potenciar su originalidad y poner en práctica su creatividad. Así, se constata la existencia de características que han sido identificadas en estudiantes con talento, que nos sirvieron como punto de partida para definir las variables utilizadas en esta investigación.

METODOLOGÍA

Este estudio se enmarca dentro de un diseño mixto, aunque predominantemente cuantitativo. Además, corresponde a un estudio descriptivo transversal (Cohen, et al., 2007), que busca ampliar la información relacionada con los sujetos con talento matemático mediante el análisis de los problemas que inventan. También presenta características del diseño ex post facto, ya que no se tiene control sobre la variable independiente, puesto que sus manifestaciones ya han ocurrido (Bisquerra, 2005).

Sujetos de estudio

Se seleccionaron dos grupos de estudiantes. El primero, denominado grupo talento, conformado por 23 estudiantes del Colegio Científico de Costa Rica, sede Universidad Nacional, Región Brunca, con edades entre 16 y 17 años. Este centro forma parte de un sistema diferenciado de nueve colegios de educación secundaria ubicados en diferentes regiones del país, que buscan fomentar y desarrollar el talento en el área científica de 30 estudiantes durante dos años lectivos. Aunque el sistema de colegios científicos realiza un proceso de selección, el instrumento empleado no está validado como test de identificación del talento, por lo que se aplicó el test de Matrices Progresivas de Raven (Raven, et al., 1993), resultando que los 23 estudiantes seleccionados obtuvieron una puntuación por encima del percentil 75. Por tanto, siguiendo la recomendación de Benavides (2008), se puede afirmar que dicho grupo representa una muestra real de estudiantes con talento.

El segundo grupo, denominado grupo estándar, está conformado por 22 estudiantes de un colegio público estándar de la misma región, con edades entre los 16 y los 17 años. La selección de este grupo

se debió a que estaba conformado por un conjunto de estudiantes típicos de un colegio público normal de la región a los que no se les ha aplicado un test para ser identificados con talento. Es importante señalar que ninguno de los estudiantes seleccionados recibió preparación previa con respecto a resolver tareas de invención de problemas, ni sus profesores habían realizado actividades de este tipo en sus clases.

Instrumento de invención de problemas

El instrumento está conformado por siete tareas organizadas en cuatro cuestionarios. El primero contiene dos tareas que solicitan inventar un problema a partir de una información textual. El segundo contiene dos en el que se inventa un enunciado a partir de una imagen o recorte de periódico. Estas tareas se incluyeron porque Espinoza (2011) afirma que promueve la invención de problemas ricos. El tercer cuestionario contiene una tarea que solicita primero resolver un problema y luego inventar otro modificando sus datos, información o pregunta. Esto porque Singer y Voica (2013) afirman que es una de las situaciones de invención de problemas más productivas. Por último, el cuarto cuestionario está constituido por dos tareas libres que pide formular y reformular su propio problema sin ninguna restricción. El cuestionario empleado se describe con mayor detalle en Espinoza (2018).

Rubrica empleada para analizar la riqueza de un problema

Para analizar la capacidad de invención de problemas se definió una rúbrica conformada por nueve variables de estudio, en la que se definieron criterios y niveles de actuación que van desde las cuestiones más sencillas a aquellas que indican un mayor dominio de la tarea. La siguiente Tabla 1 muestra la rúbrica empleada y los niveles definidos en cada una de las variables de estudio.

Tabla 1. Rúbrica para valorar la riqueza de los problemas matemáticos

Variable	Criterios	Nivel
Longitud del enunciado	1-3 proposiciones	1
	4-6 proposiciones	2
	7 o más proposiciones	3
Cantidad de tipos de números	Emplea más de un tipo de número	1
Cantidad de pasos distintos para ser resuelto	1-2 pasos	1
	3-4 pasos	2
	5 o más pasos	3
Complejidad según PISA	Reproducción	1
	Conexión	2
	Reflexión	3
Cantidad de campos de conocimiento	Emplea más de un campo de conocimiento	1
Demanda cognitiva (Stein, et al., 2009)	Memorización	1
	Algoritmo sin conexión	2
	Algoritmo con conexión	3
	Haciendo matemática	4
Control metacognitivo	Realizó cambios al problema	1
Conexión entre los hechos	Una relación	1
	Dos relaciones	2
	Tres o más relaciones	3
Fluidez de ideas	1-2 proposiciones	1
	3-4 proposiciones	2
	5 o más proposiciones	3

Así, el puntaje de riqueza de un problema podía oscilar entre 9 y 22; valor que se calcula sumando los puntos obtenidos en cada uno de los criterios definidos. Luego, la riqueza general corresponde a la media aritmética simple de la riqueza obtenida en cada uno los problemas inventados. En Espinoza (2018), se explica con mayor detalle la rúbrica empleada. Por último, se definieron tres niveles de riqueza con base en el análisis de las puntuaciones: bajo (7-11), medio (12-15) y alto (16-22).

La riqueza en la reformulación de problemas se estudió a partir de los enunciados inventados en primera tarea del C3 (T1-C3) y la segunda tarea del C4 (T2-C4). Los problemas inventados en la T1-C3 se analizaron con la rúbrica de la Tabla 1; mientras que para los de la T2-C4 se elaboró una rúbrica que valoró el cambio realizado a estos problemas de acuerdo con la presencia (un punto) o ausencia (cero puntos) de los siguientes indicadores: presenta una mayor cantidad de proposiciones, incluye más tipos de números, requiere más pasos para ser resuelto, incluye más campos de conocimiento, incrementa su complejidad según la clasificación de PISA (2012), presenta mayor fluidez de pensamiento, presenta mayor cantidad de conexiones entre los hechos y presenta mayor nivel de demanda cognitiva. Así, la riqueza en la reformulación de problemas se definió como la suma de los indicadores presentes (que podía variar de 0-8) y se clasificó con base en una escala de tres niveles: bajo (0-2), medio (3-5) y alto (6-8).

RESULTADOS

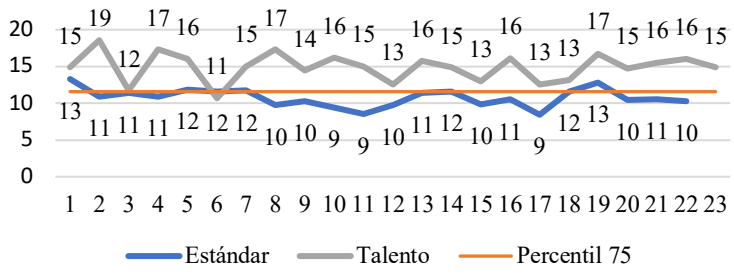
Se obtuvieron 303 problemas matemáticos de 315 posibles (96,19%), de los cuales 154 corresponden a problemas matemáticos inventados por el grupo talento y 149 por el grupo estándar.

Con respecto a la riqueza en la invención de problemas, se encontró que las puntuaciones obtenidas por el Grupo talento oscilan entre 11 y 19, mientras que las del Grupo estándar entre 9 y 13 puntos. Estas diferencias también se observaron en las medias de la riqueza general de ambos grupos, ya que del Grupo talento (14,92) es mayor que la del Grupo estándar (10,73). Al realizar el contraste de hipótesis mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto, mediante el contraste de hipótesis de Mann-Whitney se verificó que existen diferencias significativas entre las medias citadas, ya que el p-valor asociado es 0,0.

Además, resultó que el 25% de los estudiantes del Grupo estándar obtuvieron una puntuación igual o mayor a 11,57; mientras que 95,65% del Grupo talento (22 estudiantes) obtuvieron una puntuación mayor o igual a ésta. De manera que, si consideramos con talento matemático, del mismo modo como lo hizo Benavides (2008), a los estudiantes que obtuvieron una puntuación superior o igual a 11,57, entonces el 95,65% de los estudiantes del grupo talento hubiesen sido identificados como tal.

En el siguiente gráfico (Figura 1) se muestra la distribución de los puntajes de la riqueza general de ambos grupos, así como el percentil 75. En este se oberva que sólo el estudiante 6 del grupo talento no hubiera sido identificado como tal.

Figura 1. Riqueza general de los problemas



Con respecto al nivel de riqueza general por grupo, resultó que el grupo talento inventó problemas con un nivel medio o alto (87.10%), mientras que el grupo estándar en un nivel bajo (68.5%). El

análisis estadístico realizado reveló diferencias significativas por grupo y el nivel de riqueza (Chi-cuadrado=118,9 gl=2, p<.0.

En relación con la riqueza en la reformulación de problemas a partir de la T1-C3, resultó que la media de la riqueza de los problemas del grupo talento (15.86) es mayor que la del grupo estándar (11.18). Al realizar el análisis estadístico mediante la prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto se realizó la prueba de Mann-Whitney para muestras independientes y se verificó con un nivel de significancia de .05 que existen diferencias significativas entre dichas medias, ya que el p-valor asociado es .0.

En relación con las producciones a partir de la T2-C4, resultó que el 65.21% y 59.09% de los estudiantes del grupo talento y estándar, respectivamente, mejoraron alguno de los indicadores tomados en cuenta en el estudio. En cuanto a las puntuaciones de la riqueza en la reformulación del problema, resultó que la media en el grupo talento es ligeramente mayor (2.05) que en el grupo estándar (1.95). Al realizar la prueba de Mann-Whitney para muestras independientes se verificó con un nivel de significancia de 0.05 que la distribución de las puntuaciones de la riqueza en la reformulación de problemas es la misma en ambos grupos, ya que el p-valor asociado es 0.0917, por tanto, las diferencias no son significativas.

Además, resultó que el 36.3% de los estudiantes del grupo talento reformularon problemas con mayor riqueza al aumentar la cantidad de proposiciones, los pasos para ser resueltos, la complejidad según PISA y el nivel de demanda cognitiva. En el caso del grupo estándar, el 50% agregó más proposiciones al problema y el 45% aumentó el nivel de demanda cognitiva. Además, el 35% de los estudiantes de este grupo formularon problemas con mayor fluidez. Así, ambos grupos reformularon problemas más ricos al mejorar los indicadores de las variables "cantidad de proposiciones", "cantidad de pasos para ser resueltos" y "nivel de demanda cognitiva".

En cuanto a los niveles de riqueza en la reformulación de problemas, se encontró que ambos grupos se caracterizaron por reformular problemas en un nivel de riqueza bajo, ya que el 68,2% y 70% de los estudiantes del grupo talento y estándar respectivamente se encuentran en dicha categoría. A pesar de esto, la media de riqueza que presentan los problemas planteados por el grupo talento con base en esta tarea (14.8) es mayor que la del grupo estándar (11.25). Al realizar el análisis estadístico mediante la prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0.1. Por tanto, al contrastar empíricamente empleando la técnica del ANOVA con un nivel de confianza de 0.05 se concluye que las diferencias son significativas, ya que el p-valor asociado es .0

DISCUSIÓN

El análisis de las producciones con base en la rúbrica diseñada en este estudio, así como el análisis estadístico realizado, pudo constatar que sí existen diferencias en la capacidad de invención de problemas de ambos grupos en función de la riqueza de los problemas que plantean. Esto se evidenció tanto en el puntaje medio obtenido en la riqueza general, como en el nivel de riqueza general alcanzado por ambos grupos, de manera que el grupo talento obtuvo puntuaciones y niveles mayores. Este resultado coincide con estudios previos de corte cualitativo como los de Ellertón (1986), Silver y Cai (1996) y Manuel y Freiman (2017), que afirman que los estudiantes con talento muestran diferencias en cuanto a su capacidad de invención de problemas.

Con respecto a su capacidad de reformular problemas con mayor riqueza, llama la antención que se encontraron diferencias significativas en la reformulación de problemas a partir de la T1-C3, más no así en los problemas reformulados con base en la T2-C4. Una hipótesis es que al solicitar en la T1-C3 resolver primeramente el problema, le permite al estudiante interiorizar mejor las ideas, conceptos y relaciones entre la información dada, de manera que logra reformular el problema con mayor

riqueza. Esto no es así en la T2-C4, en el que se solicitaba inventar un problema que no debía resolver y luego reformularlo. Otro aspecto que pudo influir es que los estudiantes se sintieran cansados por ser la última tarea del isntrumento. Este último resultado no coincide con lo expuesto por Singer y Voica (2013), quienes afirman que reformular problemas a partir de uno previamente dado resulta una de las tareas más productivas para los estudiantes. Por tanto, consideramos necesario realizar estudios similares que aborden estos dos tipos de tareas con otras poblaciones de sujetos con talento, en el que se utilice la rúbrica empleada en este estudio o se diseñen nuevas rúbricas que permitan verificar si en efecto existen las diferencias encontradas o si este tipo de estudiantes se caracterizan por reformular o no problemas con mayor riqueza.

Por otra parte, la investigación aporta resultados valiosos que amplían el estudio de la caracterización e identificación del talento matemático. Con respecto a la primera, el estudio evidencia algunas características propias de estos sujetos cuando se enfrentan a tareas de invención de problemas que los diferencian de sus compañeros de un colegio público estándar, ya que sus problemas son más extensos, contienen diferentes tipos de números, implican más pasos para ser resueltos, incluyen más campos de conocimiento, presentan un nivel de complejidad alto según la clasificación de PISA, requieren una alta demanda cognitiva, evidencian mayor control metacognitivo y presentan más fluidez de ideas. En relación con la identificación del talento matemático, se mostró que si tomamos el grupo estándar como control e identificamos con talento matemático aquellos estudiantes que obtuvieron puntuaciones superiores al percentil 75 de riqueza general de los problemas, entonces el 95.65% de los estudiantes del grupo talento hubiesen sido identificados como tal, que corresponden a 22 de 23 estudiantes de este grupo. Así, coincidimos con estudios previos que sugieren la incorporación de este tipo de actividades como una herramienta para identificar estudiantes con talento matemático (Ellerton, 1986; Espinoza, 2011; Krutetskii, 1976).

Por último, coincidimos con Espinoza (2011) en que la riqueza de los problemas también se reflejó en la sensación de dificultad percibida en la resolución de los problemas, ya que en las producciones del grupo estándar fue relativamente sencillo encontrar un procedimiento para resolverlos; mientras que varios problemas del grupo talento no son tan fáciles de resolver luego de leer el enunciado o incluso al analizar la solución dada por el estudiante. De igual forma, coincidimos con Ayllón y Gómez (2014) y Ruiz-Socolado y Lupiáñez (2022) en que las tareas de invención de problemas suponen un reto para los estudiantes, que les permite desplegar su potencial y plasmar con mayor libertad sus habilidades y conocimientos aprendidos al no haber un resultado concreto esperado.

Referencias

Ayllón, M. F. y Gómez, I. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela Abierta, 17*, 29–40.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Bisquerra, A. (2005). *Metodología de la investigación educativa*. Editorial La Muralla.

Brown, S. y Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates.

Cohen, L. M., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education*, (6th ed). Rougtledge Falmer

Ellerton, N. (1986). Children´s made-up mathematics problems: A new perspectiveon talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 261–271.

Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio*. (Tesis de Maestría). Universidad de Granada, Granada.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., y Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(39), 368–392.

Espinoza, J. (2018). *Caracterización de estudiantes con talento matemáticos mediante tareas de invención de problemas*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

García, R. (2014). *Diseño y validación de un instrumento de evaluación de la Competencia Matemática. Rendimiento matemático de los alumnos más capaces*. (Tesis doctoral). Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

González, M. y Domingues, F. S. (2015). ¿Existen indicadores para identificar el talento? *Aula, 21*, 21–32.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher, 28*(6), 14–17.

Koichu, B. y Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 71–86.

https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Universidad de Chicago Press.

Manuel, D. y Freiman, V. (2017). Differentiating Instruction Using a Virtual Environment: A Study of Mathematical Problem Posing Among Gifted and Talented Learners Introduction. *Global Education Review, 4*(1), 78–97.

OCDE (2006). El programa PISA de la OCDE. *¿Qué es y para que sirve?* París: OCDE. Recuperado el 20/01/2018 de http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. y Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *FAISCA: Revista de Altas Capacidades, 11*, 83-102

Passow, A. (1993). National/State Policies Regarding Education of the Gifted. En K.Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Pergamon Press.

Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Ramírez (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Raven, J. C., Court, J. H. y Raven, J. (1993). *Test de matrices progresivas*. Escalas Coloreadas, General y Avanzadas. Paidós.

Ruiz-Socolado, G. R y Lupiáñez, J. L (2022). Análisis de una tarea de invención de problemas realizada por alumnos con talento matemático. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 519-527). SEIEM.

Silva, C. (2006). Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje. *Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle, 7*(26), 81–91.

Silver, E. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for research in Mathematics Education, 27(5), 521-539.*

Singer, F. M. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 9–26.

https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x

Stein, M. K., Smith, M., Henningsen, M. y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.

ERRORES ASOCIADOS AL USO DEL ESQUEMA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR UNA ESTUDIANTE CON AUTISMO

Errors associated with the use of the schema for additive problem-solving by a student with autism

Fernández-Cobos, R., González-de Cos, L. y Polo-Blanco, I.

Universidad de Cantabria

Resumen

En este trabajo, se analizan los errores cometidos por una estudiante con autismo, discapacidad intelectual y dificultades del lenguaje durante la fase de instrucción de resolución de problemas de una intervención diseñada en el marco de la instrucción basada en esquemas modificada (MSBI). Con el objetivo de que la estudiante aprenda a resolver problemas de combinación con estructura aditiva, se utiliza un esquema con material manipulativo, una hoja de trabajo y una hoja de pautas; y se pone en práctica una instrucción explícita planificada. Los errores observados en relación con el uso del esquema manifiestan dificultades relacionadas con el uso procedimental de los materiales (tanto del esquema como de los policubos) y con la comprensión del problema. Se discute el efecto de las medidas desplegadas como respuesta a lo largo de la instrucción.

Palabras clave: *resolución de problemas, instrucción, autismo.*

Abstract

This study delves into the errors made by a student with autism, intellectual disability, and language difficulties within the problem-solving instruction phase of an intervention designed under the Modified Schema-Based Instruction (MSBI) framework. With the aim of helping the student learn to solve combination problems with an additive structure, a schema with manipulatives, a worksheet, and a task analysis are utilized, along with planned explicit instruction. Identified errors concerning the schema usage manifested challenges associated with the procedural use of materials (both the schema and the manipulatives) as well as difficulties in problem comprehension. The impact of the implemented measures throughout the instructional process is discussed.

Keywords: *problem solving, instruction, autism.*

INTRODUCCIÓN

Resolver problemas aritméticos verbales requiere movilizar una serie de habilidades que trasciende el ámbito exclusivamente matemático, como, por ejemplo, la comprensión de enunciados y situaciones, el uso de la memoria de trabajo para crear una representación mental o la planificación del proceso de resolución (Daroczy et al., 2015). Para los estudiantes con trastorno del espectro autista (TEA), la resolución de problemas plantea, en general, dificultades añadidas, en la medida en que muchos de ellos experimentan dificultades de comprensión verbal y alteraciones en las funciones ejecutivas (Polo-Blanco, Suárez-Pinilla et al., 2024).

La instrucción basada en esquemas (SBI; por sus siglas en inglés) ha demostrado ser una práctica útil en la enseñanza de resolución de problemas a alumnado con TEA (Root et al., 2021). Para incluir medidas que se adapten a diversos perfiles de estudiantes con discapacidades severas, Spooner et al. (2017) presentaron un modelo de instrucción basada en esquemas modificada (MSBI) que pone un énfasis especial en la comprensión conceptual de la resolución de problemas, no solo proporcionando

Fernández-Cobos, R., González-de Cos, L. y Polo, I. (2024). Errores asociados al uso del esquema en resolución de problemas aditivos por una estudiante con autismo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 225-232). SEIEM.

un formato accesible, sino trabajando también las relaciones implícitas en su estructura y cuyo dominio, eventualmente, permitiría generalizar las habilidades adquiridas. Algunos estudios han mostrado la utilidad de la metodología MSBI para la enseñanza de problemas de estructura aditiva a estudiantes con TEA. En particular, Root et al. (2017) establecieron una relación funcional entre su intervención y las habilidades de resolución de problemas de comparación de tres estudiantes con TEA y discapacidad moderada. También, Polo-Blanco, González et al. (2024) observaron una mejora en la resolución de problemas de cambio en tres estudiantes con discapacidad moderada (dos de ellos con TEA). Trabajando específicamente problemas de combinación —aquellos que plantean una situación en la que dos conjuntos de elementos (partes) se juntan para conformar el total (Carpenter y Moser, 1984)—, Root y Browder (2017) probaron una relación funcional entre su intervención basada en MSBI y las habilidades de resolución de problemas de tres estudiantes con TEA y discapacidad intelectual. Por otra parte, Root et al. (2018) constataron el impacto positivo de otra intervención basada en MSBI en tres estudiantes con TEA (dos de ellos con discapacidad intelectual, y uno de estos, además, con dificultades del lenguaje).

El análisis que recoge este trabajo se contextualiza en la implementación de una metodología MSBI para enseñar resolución de problemas de combinación (suma y resta) a cuatro estudiantes con TEA, discapacidad intelectual y dificultades del lenguaje (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, 2024). En particular, se analizan los errores cometidos durante la instrucción por una participante del estudio mencionado que necesitó utilizar el esquema con material manipulativo. Planteamos las siguientes preguntas de investigación: (a) ¿cuáles son los principales errores relacionados con el uso del esquema que comete la estudiante durante la instrucción?; y (b) ¿qué medidas se desplegaron como respuesta y qué impacto tuvieron en el progreso de la estudiante?

METODOLOGÍA

La intervención se concibió originalmente con la intención de evaluar la metodología MSBI empleada utilizando un diseño de línea de base múltiple (Horner y Baer, 1978) con cuatro sujetos. El diseño considerado en Fernández-Cobos y Polo-Blanco (2024) contempla las siguientes fases: establecimiento de una línea de base, instrucción, seguimiento, generalización y mantenimiento. Este trabajo se focaliza en un componente de la instrucción: los problemas en modalidad guía, para los que se puede ofrecer retroalimentación al estudiante. En particular, se presentan los errores en las resoluciones espontáneas de una sola estudiante al utilizar el esquema grande con material manipulativo durante los problemas de suma, resta y mezclados, así como las medidas que la instructora puso en marcha como respuesta para ayudarle en el proceso de resolución.

Participante

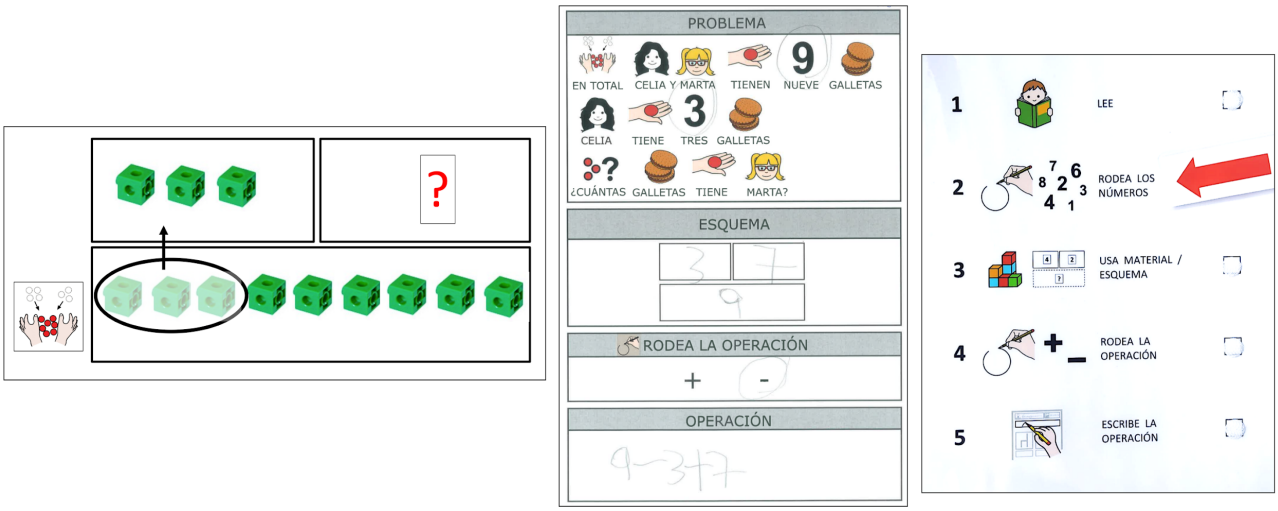
Emmy (pseudónimo) es una niña de nacionalidad española que fue diagnosticada con TEA —a la edad de 3 años— y discapacidad intelectual. Cuando comenzó el estudio, Emmy tenía 13 años y estaba escolarizada a tiempo completo en el centro de Educación Especial donde se realizó la intervención. Mostraba dificultades de comprensión y comunicación, con presencia de estereotipos y ecolalias, pero leía y escribía textos sencillos. De acuerdo con el Test de Vocabulario en Imágenes Peabody (PPTV-III; Dunn et al., 2006), Emmy tenía una edad verbal equivalente a 5 años. En matemáticas, Emmy contaba, reconocía los números hasta el 20 y era capaz de realizar sumas, aunque no movilizaba esta habilidad en contextos de resolución de problemas. Todavía no sabía restar. Su edad matemática, de acuerdo con el Test de Competencia Matemática Básica (TEMA-3; Ginsburg et al, 2007) era equivalente a 5 años y un mes.

Materiales de la intervención

Las adaptaciones consideradas (ver Figura 1) incluyen una hoja de pautas, con intención de ayudar a estudiantes con posibles dificultades de planificación o memoria de trabajo, proponiéndoles unos pasos para organizar el proceso de resolución; una hoja de trabajo, que estructura este proceso e

incluye una versión del enunciado con pictogramas y un esquema de combinación; y una versión grande (tamaño A4) y plastificada del esquema con material manipulativo y dos pictogramas que se pueden pegar con velcro para identificar la cantidad "total" del problema y la cantidad desconocida, respectivamente. El uso del esquema permite desplegar, si se necesita, una estrategia informal usando la representación que más convenga (concreta o simbólica) en función de la comprensión que muestre el estudiante y ayuda a comprobar que atribuye el significado adecuado a los datos. En su versión simbólica, facilita el paso a la resolución formal del problema mediante hechos numéricos.

Figura 1. Materiales empleados durante una intervención MSBI (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, 2024): esquema con policubos y pictogramas (izquierda), hoja de trabajo (centro) y hoja de pautas (derecha)



Recogida de datos

La intervención se llevó a cabo de marzo a junio de 2023, en el mismo centro de Educación Especial en que los participantes estaban escolarizados y con una frecuencia de dos o tres días a la semana; dedicando de 15 a 30 minutos por día, en función de la concentración del estudiante. Se realizó de forma individualizada en un aula sin distracciones y conducida por una instructora con experiencia previa como profesora de apoyo de alumnado con necesidades educativas especiales. Para identificar los errores cometidos por la estudiante relacionados con el uso del esquema grande y el material manipulativo, así como para proponer posibles medidas a implementar durante las siguientes sesiones de instrucción, se analizaron los vídeos de las sesiones de instrucción.

Diseño de la instrucción

Durante cada sesión de instrucción, se siguió una secuencia modelización-guía-evaluación (Spooner et al., 2017), en la que la instructora modelizaba primero la resolución de uno o dos problemas; después, acompañaba a la estudiante durante la resolución de otros problemas (su número podía variar en función de las necesidades), ofreciéndole guía cuando manifestaba dificultades; y, por último, la estudiante resolvía sin ayuda otros problemas, lo que permitía a los investigadores evaluar los aprendizajes adquiridos. En la modalidad guía, siguiendo prácticas habituales en las metodologías MSBI (Spooner et al., 2017), la instructora llevó a cabo una instrucción explícita, en la que se utilizó un sistema planificado de apoyos mínimos (según el cual se ajustaba la ayuda suministrada a las necesidades de la estudiante) y se corregían los errores (dando un margen de unos segundos antes de ofrecer indicaciones, para dar la oportunidad a la estudiante de mostrar conductas espontáneas y autocorregirse). Dadas las dificultades lingüísticas de los participantes, también se utilizaron una serie de preguntas guía, para enfatizar el significado de los datos que aparecían en los enunciados (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, 2024). La instrucción se llevó a cabo en tres fases secuenciales: una con problemas de suma, otra con problemas de resta y una última fase con problemas mezclados

para enseñar a discriminar entre los dos tipos. En todos ellos, se insistía durante las preguntas guía en identificar el total y la cantidad desconocida y se pedía a la estudiante que colocara ambos pictogramas (total y cantidad desconocida) en los lugares correspondientes del esquema. La estrategia de suma que se enseñó consistió en representar con policubos las cantidades dadas en el enunciado en las dos casillas superiores del esquema, para juntarlas luego en la casilla grande de abajo, donde previamente se habían colocado los pictogramas del total y la cantidad desconocida. En los problemas de resta, se colocaba primero el total en la casilla grande del esquema, y después se le quitaba la parte conocida (moviendo los policubos correspondientes a la primera casilla). El resto de policubos, que representaba la solución, se colocaba en la segunda casilla.

Categorías de análisis

Para definir las categorías de análisis, se llevó a cabo un análisis cualitativo de las grabaciones. Una vez identificados los errores, se clasificaron en los tipos que se muestran en la Tabla 1, agrupados a su vez en dos dimensiones. Por un lado, si el error se relaciona con la estrategia desplegada con el esquema o con el uso de los policubos; por otro lado, si la naturaleza del error se considera procedimental o conceptual, entendiendo por procedimentales aquellos errores que se asocian al desarrollo de un proceso o algoritmo en diferentes pasos y por conceptuales aquellos relacionados con la comprensión o la relación entre representaciones del problema (Rittle-Johnson y Schneider, 2015). Los errores fueron codificados de forma independiente por dos de los autores de este trabajo, revisando después las codificaciones hasta llegar a un consenso. Siguiendo las recomendaciones de Spooner et al. (2017), la instructora tenía como indicación proporcionar corrección de errores en un formato de "modelización y evaluar otra vez". En consecuencia, la mayor parte de las medidas asociadas, recogidas *a posteriori* en la Tabla 1, comportan modelización por parte de la instructora para dejar, a continuación, que la estudiante reproduzca el procedimiento.

En primer lugar, se identificaron errores vinculados al desarrollo procedimental de la estrategia informal. Estos errores se cometieron cuando la estudiante no consiguió replicar la estrategia que modelizaba la instructora. Esto ocurría cuando la estudiante no establecía, en base a su significado, una correspondencia entre las cantidades del problema y las casillas del esquema (E1); o cuando no llevaba a cabo de manera consistente la secuencia de pasos que conformaban la estrategia (E2). Por otra parte, aunque el orden de las cantidades que representan las partes del problema no es relevante en el caso de la suma, sí lo es en los problemas de resta. En estos casos, un intercambio de las partes en el esquema (E3) podía inducir errores en los pasos posteriores del proceso de resolución, como, por ejemplo, en la escritura formal de la operación. En todos estos casos, la modelización fue la medida desplegada como respuesta por parte de la instructora, así como el uso del pictograma de "total" para facilitar la asignación de la cantidad correspondiente a la casilla grande del esquema.

En segundo lugar, se identificaron errores debidos a dificultades para comprender la relación entre el tipo de problema y la estrategia informal elegida. En este sentido, la estudiante podía no vincular la estrategia con la situación del problema y el cálculo de la solución (E4); pero también podía elegir una estrategia informal sin tener en cuenta el tipo de problema, como ocurrió cuando eligió la estrategia de la operación inversa (E5). Como respuesta a E4, la instructora pidió a la estudiante que contara de nuevo los policubos, al tiempo que hacía referencia a la modelización del problema; frente a E5, proponía repasar los datos en el enunciado y hacía énfasis en el pictograma de "total" colocado en la casilla grande del esquema.

Por último, registramos errores procedimentales vinculados con el uso de los policubos. Por un lado, encontramos errores de conteo. Registrábamos un error de coordinación (E6) cuando la estudiante obtenía un resultado incorrecto debido a que recitaba la secuencia de números a un ritmo diferente al que realizaba la asignación señalando con el dedo. En estos casos, la instructora le pedía a Emmy que contara de nuevo los policubos, acompañándola cuando lo creía necesario. A la luz de los datos, consideramos también un error debido al uso de todos los policubos disponibles sin comprobar si

coincidían con la cantidad total (E7). Cuando la estudiante manifestaba este comportamiento, la instructora incidía en la correspondencia entre los policubos y el dato del problema.

Tabla 1. Categorías de errores en el uso del esquema grande con material manipulativo, con las respectivas medidas desarrolladas

Tipo de error	Código	Error	Medidas
Procedimental (estrategia)	E1	No asigna las cantidades del problema a las casillas adecuadas del esquema	Modelización. Uso del pictograma de "total"
	E2	No sigue los pasos de la estrategia de manera consistente	Modelización
	E3	En la resta, separa correctamente el total en partes, pero intercambia las posiciones de las partes en el esquema	Modelización
Conceptual (estrategia)	E4	No vincula la estrategia con el cálculo de la solución	Modelización y recuento
	E5	Aplica la estrategia de la operación inversa	Repasar enunciado y datos. Uso del pictograma de "total"
Procedimental (policubos)	E6	No realiza correctamente el conteo por dificultades de coordinación	Modelización y recuento
	E7	Al colocar policubos en una casilla, utiliza todos los disponibles sin verificar si corresponde al número requerido	Repasar enunciado y datos. Recuento

RESULTADOS

La Tabla 2 recoge las dificultades que Emmy encontró con el uso del esquema grande con material manipulativo durante la fase guía de la instrucción. Los problemas se identifican con un código *[instrucción]-[problema]*, en función del tipo de instrucción —suma (IS), resta (IR) o mezclados (IM, con una letra entre paréntesis que indica si es de suma o de resta)—, seguido del número del problema. La tabla solo recoge aquellos problemas en los que la estudiante cometió al menos un error.

Emmy apenas necesitó dos sesiones de instrucción para reproducir el procedimiento de resolución de los problemas de suma (de IS-1 a IS-5). Durante esta instrucción, solo se registraron dificultades relacionadas con el esquema grande en un problema de guía (IS-2). Cuando la instructora le pidió que colocara los policubos correspondientes a una de las partes, Emmy ensambló todos los policubos que tenía a su disposición y los colocó en la casilla correspondiente, sin preocuparse de si el número de policubos coincidía con la cantidad del enunciado (E7). Ocurrió lo mismo con la segunda de las partes, Emmy colocó en la casilla correspondiente el resto de policubos a su disposición. En ambos casos, la instructora le preguntó de nuevo cuántas necesitaba poner (señalando al enunciado) y la incitó a comparar el número con la cantidad de policubos que había colocado. Además, cometió un error de coordinación al calcular el total mediante conteo de los policubos uno a uno (E6).

Durante la instrucción de resta (de IR-1 a IR-10), Emmy manifestó dificultades para colocar las cantidades de policubos en las casillas correspondientes del esquema (E1). En particular, en el problema IR-2, separó del total de policubos la parte conocida, pero colocó el resto en la primera casilla del esquema. En el problema IR-4, colocó la cantidad de policubos total en la primera casilla. Salvo el error registrado en el problema IR-9, en el que Emmy realizó correctamente la estrategia de resta, pero intercambió las posiciones en el esquema grande de las cantidades de policubos que representan las partes del problema (E3); las dificultades registradas a partir de la tercera sesión (a partir de IR-5) se debieron a que la estudiante no comprobaba si el total de policubos disponibles coincidía con la cantidad total del enunciado (E7). Este error se mostró de manera persistente en cinco problemas en fase guía, a pesar de las correcciones y la modelización de la instructora.

Tabla 2. Errores atribuidos al uso del esquema grande con material manipulativo durante la resolución de problemas en la fase guía de la instrucción

	Procedimental (estrategia)			Conceptual (estrategia)		Procedimental (policubos)	
Problema	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
IS-2						X	X
IR-2	X						
IR-4	X						
IR-5							X
IR-6							X
IR-7							X
IR-9			X				X
IR-10							X
IM(S)-1				X	X		X
IM(R)-2					X		X
IM(S)-3					X		X
IM(R)-4		X					X
IM(R)-6						X	X

En el primer problema de guía (de suma) de la instrucción de problemas mezclados (de IM-1 a IM-10), Emmy desarrolló espontáneamente la estrategia de los problemas de resta (E5), utilizando todos los policubos disponibles (E7). Cuando la instructora la guio para colocar las cantidades de policubos que representaban los datos del problema en los recuadros de las partes, Emmy no supo cómo calcular el total (E4); fue la instructora la que le indicó, tras unos segundos, que tenía que contar los policubos. En el siguiente problema (de resta), ensambló todos los policubos disponibles (E7) pero los colocó en la primera casilla, emulando la estrategia de suma (E5) desarrollada gracias a la guía de la instructora en el problema anterior. En el siguiente problema (de suma), Emmy ensambló todos los policubos disponibles (E7) y procedió a utilizar una estrategia de resta (E5), colocándolos en la casilla del total. En el siguiente problema (de resta), colocó todos los policubos disponibles (E7) en la casilla del total, siendo consistente con la estrategia de resta. Sin embargo, cuando dividió el total en dos grupos, con la cantidad de la parte conocida y el resto, no identificó cuál era la solución, y realizó un recuento de todos los policubos (E2). A partir del cuarto problema, Emmy consigue, gracias a la instrucción, identificar adecuadamente el tipo de problema.

Tras constatar la persistencia de E7, la instructora buscó una alternativa para ayudar a Emmy. En el problema IM(S)-5, le entregó de antemano una cantidad desproporcionadamente grande de policubos, con la intención de que viera claramente que eran más de los que necesitaba. En este caso, contó las cantidades de policubos necesarias para representar los datos del enunciado y las colocó correctamente en el esquema, desarrollando una estrategia correcta de suma. Para resolver el siguiente problema (de resta), Emmy volvió a colocar todos los policubos disponibles en la casilla del total (E7). Cuando la instructora le pidió que los volviera a contar, cometió un error de coordinación (E6).

Como Emmy mostraba comprensión de la situación de los distintos tipos de problema y del procedimiento a seguir en la resolución, se decidió realizar los siguientes problemas de guía sin apoyo del esquema grande con material manipulativo para ayudarle a avanzar en el uso de estrategias más formales, basadas en hechos numéricos. Se plantearon en fase guía dos problemas de suma y dos de resta. La estudiante resolvió correctamente los dos problemas de suma utilizando solo el esquema pequeño en versión simbólica. Sin embargo, Emmy no supo calcular la solución del primer problema de resta utilizando solo el esquema pequeño, necesitó que la instructora modelizara una estrategia de cálculo utilizando los dedos. Después de eso, resolvió el segundo problema de resta mediante cálculo mental utilizando solo el esquema pequeño.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los errores cometidos durante la instrucción sugieren que Emmy adquirió la modelización de las situaciones (asociadas con un tipo determinado de problema, suma o resta) con material manipulativo en una o dos sesiones. A pesar de ello, durante la instrucción de resta cometió persistentemente un error debido a que no comprobaba si la cantidad de policubos disponible representaba o no la cantidad total del problema. Este carácter rutinario del error, en apariencia imperturbable a las correcciones de la instructora, resulta consistente con el tipo de pensamiento rígido o inflexibilidad cognitiva que manifiestan algunos estudiantes con TEA (Polo-Blanco, Suárez-Pinilla, et al., 2024). También lo es el hecho de que, durante la fase de instrucción con problemas mezclados, Emmy mostrara una clara tendencia a resolver los problemas siguiendo una estrategia compatible con la última que había aplicado. A pesar de ello, la instrucción con problemas mezclados tuvo sus efectos a partir de la tercera sesión, en la que Emmy empezó a escoger adecuadamente la estrategia en función del tipo de problema. Esta observación confirma lo que apuntaron estudios previos en relación con la necesidad de enseñar explícitamente a distinguir entre tipos de problemas basándose en el desarrollo de conocimiento conceptual y en la estructura de los problemas (Spooner et al., 2017; Root et al., 2018).

La investigación educativa muestra que las intervenciones basadas en MSBI son útiles para enseñar resolución de problemas a estudiantes con TEA (e.g., Polo-Blanco, González et al., 2024; Root et al., 2017; Root et al., 2021). Estas metodologías son especialmente importantes cuando se enseña a estudiantes con TEA y discapacidad intelectual, pues permiten identificar sus dificultades para ayudarles a avanzar en la comprensión de las operaciones (e. g., Bruno et al., en prensa; Polo-Blanco et al., 2018). Los esquemas y el material manipulativo ayudan a comprender la situación del problema y reducen la carga cognitiva de los estudiantes. En la medida en que el uso de estos mismos materiales puede implicar el desarrollo de rutinas procedimentales que interfieren en la correcta resolución de los problemas, los docentes deben monitorizar el proceso de aprendizaje y valorar en todo momento los beneficios que comportan. En el caso de Emmy, la metodología MSBI resultó efectiva durante la instrucción. Una vez supo identificar el tipo de problema, y a la vista de que presentaba buen cálculo mental, resultó beneficioso retirarle el material manipulativo, animándola a resolver los problemas únicamente con el esquema simbólico.

Aunque estudios de caso como este permiten profundizar en los procedimientos de resolución de problemas desplegados por cada estudiante particular, sus resultados no son generalizables. Pese a ello, ponen de manifiesto la importancia de adaptar las distintas medidas de la metodología al perfil de cada estudiante y llevar a cabo una continua retroalimentación docente-estudiante con el fin de promocionar el uso de estrategias de resolución más formales.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos PID2022-136246NB-I00, financiado por MCIN/AEI / 10.13039/501100011033 / FEDER, UE; PID2022-136246NB-I00 y SUBVTC-2023-0014, financiado por el Gobierno de Cantabria.

Referencias

Bruno, A., Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y González-López, M. J. (En prensa). Strategies for solving multiplicative problems using a conceptual model-based problem-solving approach. A case study with a student with autism spectrum disorder. *ZDM-Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01568-w

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 179–202. https://doi.org/10.2307/748348

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D. y Nuerk, H. -C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numeral factors contributing to their difficulty. *Frontiers of Psychology, 6*(348), 1–13. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348

Dunn, Ll. M., Dunn, L. M. y Arribas, D. (2006). *PPVT-III. PEABODY. Test de vocabulario en imágenes* [edición en español]. Tea ediciones.

Fernández-Cobos, R., y Polo-Blanco, I. (2024). Using modified schema-based instruction to teach problem-solving to students with autism and language impairments: A single case design study. *International Journal of Developmental Disabilities*, [Avance de publicación online] https://psycnet.apa.org/doi/10.1080/20473869.2024.2369741

Ginsburg, H. P, Baroody, A. J., Núñez del Río, M. C. y Lozano Guerra, I. (2007). *Tema3. Test te competencia matemática básica* [edición española]. Tea ediciones.

Horner, R. D. y Baer, D. M. (1978). Multiple-probe technique: A variation of the multiple baseline. *Journal of Applied Behavior Analysis, 11*, 189–196. https://doi.org/10.1901/jaba.1978.11-18

Polo-Blanco, I., Bruno, A. y González, M.J. (2018). Errores en la resolución de problemas de división por un estudiante con trastorno del espectro autista. En L. J. Rodríguez, L. Muñiz, A. Aguilar, P. Alonso, F. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 467–476). SEIEM.

Polo-Blanco, I., González, M. J., Bruno, A. y González, J. (2024). Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction, *Learning Disability Quarterly, 47*(1), 3–15. https://doi.org/10.1177/07319487211061421

Polo-Blanco, I., Suárez-Pinilla, P., Goñi-Cervera, J., Suárez-Pinilla, M. y Payá, B. (2024). Comparison of mathematics problem-solving abilities in autistic and non-autistic children: The influence of cognitive profile. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 54*, 353–365. https://doi.org/10.1007/s10803-022-05802-w

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2015). Developing conceptual knowledge of mathematics. En R. C. Kadosh y A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition*. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014

Root, J. R. y Browder, D. M. (2017). Algebraic problem solving for middle school students with autism and intellectual disability. *Exceptionality.* [Avance en línea de la publicación], 118–132. https://doi.org/10.1080/09362835.2017.1394304

Root, J. R., Browder, D. M., Saunders, A. F. y Lo, Y. (2017). Schema-Based Instruction with concrete and virtual blocks to teach problem solving to students with autism. *Remedial and Special Education, 38*(1), 42–52. https://doi.org/10.1177/0741932516643592

Root, J. R., Henning, B. y Boccumini, E. (2018). Teaching students with autism and intellectual disability to solve algebraic word problems. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 53*(3), 325–338.

Root, J. R., Ingelin, B. y Cox, S. (2021). Teaching mathematical word problem solving to students with autism spectrum disorder: A best-evidence synthesis. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 56*(4), 420–436.

Spooner, F., Saunders, A., Root, J. y Brosh, C. (2017). Promoting access to common core mathematics for students with severe disabilities through mathematical problem solving. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities*, *42*(3), 171–186. https://doi.org/10.1177/1540796917697119

ANÁLISIS DE LOS ERRORES EN LA MEDIDA DE LONGITUDES EN EL MESOESPACIO EN EL CONTEXTO DE UN PROYECTO STEAM

Analyzing Errors in Length Measurement within the Mesospace in the Context of a STEAM Project

Fraile-González, J., Méndez, M., Palop, B. y Belmonte, J.M.

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

La integración de la educación STEAM en el currículo de educación primaria permite a los estudiantes abordar problemas del mundo real favoreciendo un aprendizaje significativo de la matemática. En este contexto, se lleva a cabo un proyecto de educación STEAM integrado en el Grado de Educación Primaria, enmarcado en una investigación-acción. El estudio analiza los errores cometidos por 21 estudiantes en la resolución de un problema relacionado con la estimación y medición de longitudes en el mesoespacio. Se identifican errores en las estrategias para medir el espacio, el uso incorrecto de los instrumentos de medida y en la interpretación de los resultados matemáticos en un contexto real. Estos resultados subrayan la importancia de la educación STEAM y de la resolución de problemas del mundo real en la formación de maestros.

Palabras clave: *educación STEAM; formación de maestros; errores; medida; resolución de problemas del mundo real.*

Abstract

The integration of STEAM education into the primary education curriculum enables students to engage with real-world problems, thereby facilitating significant learning outcomes in mathematics. Within this framework, a primary education-level integrated STEAM education project is implemented, situated within an action research paradigm. The study examines the errors made by 21 students while addressing a problem concerning estimation and measurement of lengths in mesospace. Errors in measuring strategies, use of measuring tools, and interpreting mathematical results in real-world contexts are identified, emphasizing the crucial role of STEAM education and real-world problem-solving in teacher training.

Keywords: *STEAM education; teacher training; errors; measurement; real-world problem-solving.*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas debe integrar los contenidos y tendencias del currículo para poder dar una respuesta adecuada en el aula escolar. La incorporación de la competencia STEM en los currículos de primaria (Real Decreto 157/2022) hace necesario buscar formas para integrar esta formación en los planes de estudio del Grado de Maestro en Educación Primaria. La educación STEAM (*Science, Technology, Engineering Arts and Mathematics*) se ha definido como una enseñanza de los contenidos y procedimientos de las áreas de Ciencias, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas de forma integrada (Moore et al., 2020). STEAM permite llevar al aula de primaria problemas de contexto real que favorecen un aprendizaje significativo de las matemáticas conectando esta disciplina con otras áreas (Albarracín y Gorgorió, 2014; Blum y Niss, 1991).

Fraile-González, J., Méndez, M., Palop, B. y Belmonte, J.M. (2024). Análisis de los errores en la medida de longitudes en el mesoespacio en el contexto de un proyecto STEAM. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 233-240). SEIEM.

A continuación, se presenta parte de un proyecto STEAM desarrollado el Grado de Maestro en Educación Primaria en una asignatura optativa durante el curso 2023-2024. La tarea que se presenta es una actividad de medir, en un espacio real, utilizando instrumentos de medida. El objetivo de nuestro trabajo se centra en identificar e interpretar los errores de medida, estimación y viabilidad de las respuestas que cometen los estudiantes en tareas de contexto real que requieren la medición en el mesoespacio en el primer ciclo de una investigación-acción (I-A). Los errores de medida de longitud, superficie y volumen en la educación básica han sido objeto de investigación (Lehrer et al., 2003). Chamorro (2003) denunciaba que la escuela abandonaba parte de la enseñanza, como la medida de los objetos, en el convencimiento de que el alumno acabará aprendiendo por su cuenta, centrándose en cuestiones aritméticas de la medida.

MARCO TEÓRICO

En el enfoque educativo STEAM la enseñanza de las disciplinas que integra está conectada por grandes ideas, habilidades y prácticas comunes (Moore et al., 2020). Hay diferencias en la investigación sobre lo que supone esa integración en el número de áreas a integrar y en el rol de cada una. Otra característica de la educación STEAM es la utilización de problemas de contexto real (Kloser et al., 2018). La matemática realista proponía la integración de situaciones problemáticas de contextos reales a través de los cuales los estudiantes redescubren las matemáticas fomentando en ellos las habilidades de resolución de problemas, razonamiento, así como una comprensión significativa de los contenidos (Dawkins, 2015).

El uso de las matemáticas para resolver problemas del mundo real se ha llamado modelización matemática (Niss et al., 2007). Esta modelización matemática puede ser tomada como contenido para aprender y como procedimiento para resolver una tarea. No hay consenso en la investigación sobre la definición de los problemas de modelización y los procedimientos de resolución (Doerr et al., 2017). Sin embargo, la resolución de estas tareas comienza en un problema real, con la comprensión de la situación; posteriormente se afronta la resolución de la tarea matemática y con esos resultados matemáticos se interpretan y se validan con la situación propuesta del problema real (Blum y Leiss, 2007). La habilidad de modelización matemática está integrada en los currículos escolares (Doerr et al., 2017) y es necesario que los maestros reciban formación para plantear las actividades que la desarrollen. Thompson (1985) recomienda que los profesores experimenten la resolución de problemas desde la posición de resolutores antes de afrontar su enseñanza.

La enseñanza de la medida de la longitud es un contenido importante para la comprensión de otras magnitudes geométricas como el área y el volumen. El objetivo de esta enseñanza está en adquirir los conocimientos de medida y la habilidad de los instrumentos para medir (Lehrer et al., 2003). Estos autores recomiendan que la enseñanza se focalice en la construcción de dos grandes conceptos: la unidad de medida y la escala para medir. En su desarrollo aparecen dificultades y errores, algunos de ellos debido a las prácticas de enseñanza del aula (Chamorro y Belmonte, 1991). Con respecto de la unidad de medida de longitud, aparecen errores en la medición de longitudes utilizando patrones de medida dejando huecos entre ellos o solapando los patrones de medida que se toman o en la conclusión de que no se puede medir más porque se han acabado los patrones de medida (Lehrer et al., 2003); estos autores comentan otros errores y dificultades con respecto a la construcción de la escala como son la lectura de las medidas utilizando el instrumento desde el 1 en vez del 0, o que la medida de 10 la podemos tener de 0-10 y del 10-20 en el instrumento. Dificultades con respecto del contenido de la magnitud del área y su medida, muestran estos autores, la necesidad de los estudiantes de utilizar patrones de medida con forma similar a la superficie medida; o si las unidades de superficie utilizadas pavimentan el borde de la superficie rechazarlas como unidad, no entendiendo los encuadramientos. Baturo y Nason (1996) muestran que, en vez de identificar un área cubriendo el espacio con unidades cuadradas, los estudiantes intentan utilizar la fórmula del rectángulo. López-Serentill (2022) denuncia que la enseñanza de esta magnitud y su medida se centraba en el aula en el uso de las fórmulas del cálculo de áreas.

METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en un trabajo de I-A sobre la integración de la Educación STEAM en los planes de formación de maestro de primaria, en concreto en la asignatura Taller de Ciencias Físico-Químicas en la que participan seis formadores de las didácticas de tres áreas (Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales y Matemáticas). La I-A se organiza temporalmente en una espiral de ciclos siguiendo las fases generales de planificación, acción-observación y reflexión (Suárez, 2002). Se focaliza en este trabajo la atención desde la didáctica de las matemáticas en las tareas relacionadas con la medida en el mesoespacio que los alumnos deben realizar en el proyecto. Como señala Elliot (1986), en la I-A los docentes investigan situaciones problemáticas de su práctica con el objetivo de mejorarlas.

Junto a los 6 formadores participaron 21 estudiantes usando una metodología *Scrum* adaptada a la educación superior similar a la descrita por Lourakis y Petridis (2023). Esta metodología favorece que los alumnos se autoasignen las tareas del proyecto, generalmente en parejas y compartiendo los avances y resultados. Se acompañó a los estudiantes fuera del aula con una cámara de vídeo. Se ha realizado una interpretación cualitativa de los datos recogidos desde un paradigma interpretativo (Kvale, 1996). En este primer ciclo interpretamos los datos bajo la lente de las categorías de errores tipificadas en la investigación: errores del cálculo de medidas del aula (EM), que se dividen en errores de estimación (EM1), uso inadecuado del instrumento de medida de longitud (EM2), falta de precisión en los resultados de medidas (EM3) y procedimientos de medición erróneos (EM4); y errores por no tener en cuenta el contexto real del problema propuesto (EC) que se dividen en: errores en la contextualización del procedimiento de medición (EC1), y de validación de las respuestas al devolverlas a su contexto real (EC2). Siguiendo a Schoenfeld (2000), se decide fragmentar cada vídeo en episodios, siguiendo como criterio la aparición de un error.

RESULTADOS

Se presentan en esta sección las fases de planificación y acción-observación del primer ciclo de I-A, cuya reflexión se recoge en la siguiente sección junto con las conclusiones.

Planificación

Los formadores diseñaron una propuesta formativa de Educación STEAM basada en el Aprendizaje Basado en Proyectos en la que los alumnos debían movilizar competencias y saberes del contenido de las tres áreas. En la primera sesión, además de la descripción de la metodología de trabajo y algunas nociones de *Scrum* y de trabajo por proyectos, se proporcionó a los alumnos la siguiente consigna:

> La Facultad de Educación planea construir un nuevo edificio/aula para enseñar Matemáticas y Ciencias Sociales y Naturales a estudiantes de Primaria. Debe alojar a un grupo de 25 escolares, estar situado en el recinto de la Facultad, separado de los edificios existentes, sin interferir con áreas comunitarias, vegetación o estacionamiento. Debe tener aislamiento térmico y acústico, y un diseño exterior coherente con la estética del edificio principal. Se requieren planos a escala detallando las medidas exteriores e interiores, incluyendo ventanas y puertas, y garantizando que el espacio cumple con las normativas establecidas.

La propuesta se implementó durante 9 sesiones de dos horas cada una. El plan de trabajo incluyó tres *sprints* con tres sesiones de aula cada uno, donde los estudiantes elaboran prototipos y reciben correcciones de los formadores para mejorar el producto final. Respecto a las tareas concretas de medida que nos ocupan en este trabajo, se esperaba que todos los equipos detectarían de manera inmediata (entre las sesiones 1 y 2) la necesidad de salir del aula a encontrar una ubicación que cumpliera los requisitos propuestos. También se esperaba que surgiera de manera natural la necesidad de medir el espacio disponible para, a continuación, ubicar en ese espacio su propuesta de aula. Se puso a disposición de los alumnos dentro del aula varios instrumentos de medida: varias cintas métricas de 15 metros, algunas reglas de 40 centímetros, algunas ruedas de medición y varios flexómetros de 5 metros entre los que debían elegir conforme a sus necesidades.

Acción-observación

En el proceso de medición participaron varios alumnos de cada grupo: Grupo 1 (G1: A8 y A9), Grupo 2 (G2: A1 y A2), Grupo 3 (G3: A6 y A7) y Grupo 4 (G4: A3, A4 y A5). Los alumnos resolvieron el problema a lo largo de una secuencia temporal de 9 sesiones (Tabla 1).

Tabla 1. Acciones de los alumnos y formadores relacionadas con la medida. Elaboración propia.

Sesión	Alumnos	Formadores
1	Exploran el mesoespacio buscando una ubicación en la que situar el aula.	Recuerdan la normativa que deben cumplir ante la dificultad de interpretar las estimaciones.
	Identifican la única ubicación posible y realizan mediciones (rueda de medición).	Cuestionan la precisión de las medidas obtenidas y el uso del instrumento de medida.
2	Algunos realizan nuevas mediciones.	Proponen comparar las propuestas de aula con un modelo real.
3	Entregan el primer prototipo.	Realizan mediciones y cuestionan las medidas realizadas por los alumnos.
4	Efectúan correcciones. No realizan mediciones en el mesoespacio	Muestran cómo utilizar los instrumentos de medida y criterios para su elección.
5-6	Un grupo realiza mediciones y corrige sus resultados. Entregan el segundo prototipo.	Dan *feedback*. Identifican errores de medida en un grupo. Guía en el proceso de medición.
7-8-9	Trabajo de aula y entrega del modelo final.	

En el plazo esperado (1ª sesión), todos los equipos reconocen la necesidad de localizar una ubicación adecuada, comenzando con una exploración del entorno sin valorar la posibilidad de analizar el espacio con herramientas digitales como Google Maps. Describimos a continuación desde el foco del sentido de la medida cómo los alumnos se enfrentan a la tarea. Algún grupo recorrió inicialmente varios lugares sin llevar instrumentos de medida y sin plantearse previamente cuáles serían las dimensiones necesarias para su aula. En estas exploraciones surgieron dificultades de estimación evidenciadas en un extracto de conversión entre los alumnos A1 y A2 y el formador F1 cuando los primeros evalúan si su aula imaginada cabría en un posible emplazamiento (EM1).

A1: a ver que sea grande, pero tampoco es necesario que sea tan grande.

A2: bueno como la nuestra de ahora.

A1: bueno un poco más grande, si son 25 alumnos…

A2: el laboratorio es más grande, igual como el laboratorio.

F1: ¿Cómo de grande es el laboratorio?

A1: un poco más grande que la nuestra de ahora.

Este intento de realizar comparaciones de espacios estimando llevó a los alumnos a necesitar medir en el mesoespacio. Justamente A1 y A2, después de estimar si les cabe el aula en un cierto espacio, solicitan instrumentos de medida para comprobarlo. Esta fase de percepción del mesoespacio se saldó con la identificación por parte de todos los equipos de la misma ubicación, de entre las posibles. Todos los equipos optaron por la rueda de medición la primera vez que fueron a medir. Una única alumna (A6) valoró la elección de la cinta métrica de quince metros y en su apreciación se observa restos de necesidad de la unidad objetal en tanto que necesitan materializar físicamente la unidad en el objeto a medir y manifestando una falta del uso de la aditividad de la medida.

A6: ¿No la hay más larga?... Si no, cuando lleguemos a 15… Era por si había una de 30.

Todos los alumnos mostraron errores en el proceso de medición en el mesoespacio, siendo reiterado un uso inapropiado de los instrumentos de medida. En particular, fueron frecuentes las situaciones en las que los alumnos comenzaban a medir con la rueda sin inicializarla (EM2). Nótese que el proceso de medición con este instrumento consiste en contar el número de vueltas que da la rueda al recorrer con ella un segmento. A3 manifestó confusión al medir un segmento en sucesivas ocasiones, la primera comenzando a contar desde uno (EM2) y la segunda desde cero.

A3: ¿se va haciendo más pequeño cada vez que damos una vuelta?

Podemos subrayar también los errores relativos al procedimiento de medición con el instrumento, que no obliga -como sí sucede con la cinta métrica- a seguir una línea recta. También llamó la atención que, habiendo líneas rectas en el pavimentado del suelo, los estudiantes no las emplearon para obtener las medidas y seguían recorridos sin asegurar trayectorias rectas (EM4). Los formadores dan realimentación al grupo completo sobre los procedimientos erróneos seguidos. Se les propone entonces el uso de instrumentos más adecuados para medir las dimensiones del espacio elegido. Todos los grupos optan ens esta ocasión por la cinta métrica de quince metros de longitud. Aunque algunos solicitaron aclaraciones por parte de los formadores para identificar el cero en este instrumento, varios grupos cometieron aún errores en su uso, como el de no tensar la cinta métrica (EM2, EM4). Se detecta en las mediciones en el mesoespacio el uso adecuado del metro como unidad de medida para la tarea, pero los alumnos se restringen a los valores enteros. Así, tratan de encajar una forma rectangular donde ambos lados tienen una medida entera de metros. Por este motivo, los alumnos optan por redondear la longitud de un segmento cuando tiene un valor entre dos enteros. Los alumnos A8 y A1 lo expresan de forma similar en distintos momentos, lo que también muestra una intención clara de descartar decimales en las medidas (EM3).

A8: son 14 exactos, así ya está, 14 y un pelín.

A1: mide 7 y pico, se queda en 7.

El Grupo G4 realizó las mediciones con el odómetro de manera incorrecta, resultando evidente el error en el segundo prototipo. Un integrante del grupo al emplear la rueda de medición levantaba la rueda para evitar obstáculos longitudinales en el suelo (EM4) -en este caso, un alcorque- y no la inicializaba en cada medición subsiguiente (EM2). Los formadores acompañaron a los alumnos A3 y A4 para repetir las mediciones, esta vez utilizando una cinta métrica correctamente. Los alumnos manifiestan su confusión al encontrar mediciones discrepantes.

A4: Pero si es que antes daba mal ahora va a dar mal… Es imposible que dé lo mismo.

Además del enfoque desde el sentido de la medida, resulta también interesante observar cómo los alumnos se han enfrentado a la tarea desde el prisma de la resolución de un problema real. De manera inesperada, los alumnos no realizaron una medida del espacio disponible para, a continuación, encajar en él el aula. Por el contrario, al encontrar un espacio "suficientemente grande", procedían a realizar directamente mediciones sobre una idea mental de cómo y dónde se ubicaría el aula. Así, imaginaron un aula de planta rectangular a la que asignaron los valores de las medidas que realizaban en el mesoespacio, con frecuencia entre puntos arbitrarios. Todos los grupos en algún momento obviaron elementos no modificables (árboles, rejillas de ventilación) cuando estos interferían en su solución imaginada (EC1). Este proceso condujo a resultados matemáticos poco adecuados al contexto real como se aprecia en una propuesta de aula que presentan A6 y A7 al formador F2. Cuestionan si un aula de planta rectangular con unas dimensiones de 23 y 11 metros es adecuada ya que desconocen las medidas de un aula real (EC2). Tras tomar nuevas medidas redujeron las dimensiones del aula a 6,5 y 13 metros. A pesar de las sugerencias de F2 de comparar sus resultados con las medidas de un aula real, calcularon el área del aula propuesta, que consideraron demasiado grande. A7 sugiere

reducir la longitud de un lado mientras que A6 prefiere concluir el proceso de medida, mostrando su preocupación por ofrecer resultados matemáticos más que resultados reales (EC2).

A6: Tenemos las medidas que es lo importante, ahora pensamos como hacemos los planos.

Este problema también se evidencia cuando A1 y A2 realizan mediciones focalizándose en la resolución matemática del problema sin prestar atención al contexto real. Miden un lado arbitrario desde el borde de la pared de un edificio sin mostrar especial consideración por el punto desde el que comenzaban a medir (EC1). Así, proponen un aula de planta rectangular con lados de 18 y 9 metros. Después deciden reducir la longitud de cada lado en dos metros, estimando que esa longitud ofrece una separación suficiente de la pared. No sabían interpretar si el área del aula que proponían era adecuada porque no tenían un tamaño esperado con el que comparar (EC2). Tampoco se cuestionan si la ubicación en el espacio escogido es adecuada. Esta dificultad también se manifiesta en el trabajo de A8 y A9 al evaluar la viabilidad de su primera propuesta de aula con planta rectangular de lados de 13 y 14 metros (EC2).

A9: Es muy grande, pero está bien porque tiene que incluir muchos materiales porque es para 3 departamentos.

Después de cuestionar el formador F2 el tamaño del aula, realizaron nuevas mediciones (desde puntos arbitrarios) que le llevaron a reducir las dimensiones a 9 y 10 metros, respectivamente. Esta segunda propuesta de aula se ubicó en otra parte, aunque dentro del mismo espacio.

A3 y A4 (G4) tuvieron dificultades similares al ubicar su aula en el mesoespacio. Las medidas que tomaron fueron imprecisas y su proceso de planificación defectuoso lo que condujo a una propuesta de aula de planta rectangular poco realista. Al constatar que una de las dimensiones de su aula no podía superar 7 metros por encontrarse entre dos alcorques, decidieron alargar la figura hasta aprovechar todo el espacio disponible, resultando en una longitud de 28 metros (EC1 y EC2), si bien uno de los integrantes de la pareja parece ser consciente de lo inhabitual de esta dimensión.

A3: 7 es enano, o sea que aprovechamos y hacemos la clase más larga (...). Es que la clase es *superlarga* y necesitamos mucha luz.

Esto condujo a sobredimensionar algunos objetos del aula como las ventanas de más de 2 metros de largo y pizarras de 1 metro de profundidad en el plano final (EC2). Así, al trabajar en un contexto estrictamente matemático, no logran interpretar la validez de los resultados en la realidad.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se presenta en este apartado la reflexión, última fase de la I-A, a modo de discusión y conclusión.

De manera general, los alumnos no asumieron como propia la tarea que se les encomendaba: El diseño de un aula. La formulación de la consigna no establecía elementos que obligaran a movilizar muchas de las herramientas propias de un proceso de medición, lo que evidencia una ausencia de un buen proceso de modelización matemática. El mero contexto general de la construcción de un aula parece que no ha resultado suficiente para que los alumnos se apropien de la tarea. Así, aspectos como los procedimientos de medición, el uso de instrumentos o la precisión de los resultados de medida, que han generado ciertas respuestas de dudosa realización, no fueron percibidos como de imprescindible aplicación en el desarrollo de los trabajos de diseño del aula. Este hecho ha provocado dificultades en lo que Brousseau (1988) denomina devolución de la tarea, asumir la responsabilidad de su aprendizaje.

Algunos de los errores descritos, ya documentados en la literatura, son debidos a una enseñanza del área centrada en la aplicación de fórmulas, a una escasez de referentes de superficie (Baturo y Nason, 1996; López-Serentill, 2022) y a una falta de ocasiones de hacer mediciones reales como indican Chamorro y Belmonte (1991). Lehrer et al. (2003) plantean que, si los estudiantes entienden la medida, podrían adaptar su conocimiento a nuevas situaciones, aunque el uso que hacen del odómetro

plantea dudas sobre esto. Todos los alumnos estudiaron las posibilidades de la construcción del aula directamente en el mesoespacio, sin hacer un trabajo previo de dimensiones en el microespacio, lo que les hubiera permitido afrontar mejor las tareas de búsqueda del emplazamiento la planificación de la tarea a partir de conocer las medidas del aula necesarias y la viabilidad real de las medidas propuestas en sus prototipos. También cabe añadir la posible falta de experiencias de tareas de contexto real encontradas durante su formación puede haber sido la causa (Verschaffel et al., 2020). El enfoque transdisciplinar desplaza a los alumnos de su entorno habitual de aprendizaje matemático, requiriendo una aplicación consciente de sus conocimientos. Es crucial asegurar que el contexto promueva el uso de herramientas matemáticas específicas, aunque no se establezca un mandato explícito para "aprender a medir". Por ello, es fundamental verificar que las condiciones del contexto transdisciplinar promuevan el uso necesario de las herramientas matemáticas en el aprendizaje.

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79–96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Baturo, A. y Nason, R. (1996). Student Teachers' Subject Matter Knowledge within the Domain of Area Measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), 235-268.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37–68.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics, ICTMA* (pp. 222–231). Horwood Publishing.

Brousseau, G. (1988). Los Diferentes Roles del Maestro. En C. Parra, y I. Saiz, (Eds), *Didáctica de Matemáticas, Aportes y reflexiones* (pp. 65-94). Paidós.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales.* Síntesis.

Chamorro, M. C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En Mª C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 221-244). Pearson.

Dawkins, P. C. (2015). Explication as a lens for the formalization of mathematical theory through guided reinvention. *The Journal of Mathematical Behavior, 37*, 63-82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.11.002.

Doerr, H.M., Ärlebäck, J.B. y Misfeldt, M. (2017). Representations of Modelling in Mathematics Education. In: Stillman, G., Blum, W., Kaiser, G. (eds) Mathematical Modelling and Applications. *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_6

Elliott, J. (1986). "Action-research": normas para la autoevaluación en los colegios. En L. Haynes (Ed.), *Investigación-acción en el aula* (pp. 21-48). Conselleria de Cultura, Educació i Ciència.

Kvale S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Sage.

Kloser, M., Wilsey, M., Twohy, K. E., Immonen, A. D. y Navotas, A. C. (2018). We do STEM: Unsettled conceptions of STEM education in middle school S.T.E.M. classrooms. *School Science y Mathematics, 118*(8), 335–347. https://doi.org/10.1111/ssm.12304

Lehrer, R., Jaslow, L. y Curtis, C. L. (2003). Developing understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements y G. Bright (Eds.), *Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook* (pp. 100–121). National Council of Teachers of Mathematics.

López-Serentill, P. (2022). Categorización de los errores de los estudiantes para maestro de primaria en tareas de medida de magnitudes. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 363-371). SEIEM.

Lourakis E. y Petridis K. (2023). Applying Scrum in an Online Physics II Undergraduate Course: Effect on Student Progression and Soft Skills Development. *Education Sciences, 13*(2), 126-140. https://doi.org/10.3390/educsci13020126

Moore, T. J., Johnston, A. C. y Glancy, A. W. (2020). STEM integration: A synthesis of conceptual frameworks and definitions. In C.C. Johnson, M. J. Mohr-Schroeder, T. J. Moore, y L. D. English (Eds.), *Handbook of Research on STEM Education* (pp. 3–16). Routledge.

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications of Mathematics* (pp. 3–32). Springer.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, 52, de 1 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243-261. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0

Suárez, M. (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación-acción colaboradora en educación. *REEC: Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 1*(1), 40-56.

Tan Sisman, G. y Aksu, M. (2016). A Study on Sixth Grade Students' Misconceptions and Errors in Spatial Measurement: Length, Area, and Volume. *Int J of Sci and Math Educ 14*, 1293–1319. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5

Thompson A. (1985). Teachers' conceptions of mathematics and the teaching of problem solving. In Silver E. A., *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 281–294). Lawrence Erlbaum.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. y Dooren, W. V. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM Mathematics Education 52*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4.

DE LOS PATRONES CUANTITATIVOS AL PENSAMIENTO FUNCIONAL

From quantitative patterns to functional thinking

Fuentes, S.[a], Cañadas, M. C.[a] y Anglada, L.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Centro Universitario María Inmaculada de Antequera

Resumen

Esta investigación se enmarca en un proyecto de investigación sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria realizado en España (www.pensamientoalgebraico.es). Describimos el trabajo de alumnos de último curso de infantil y primer curso de primaria al abordar una tarea de generalización con patrones cuantitativos. Diseñamos cuatro y cinco sesiones para cada curso, respectivamente. Implementamos las sesiones con las clases completas: 25 alumnos de 5 años y 26 de 6 años. Analizamos el trabajo en una sesión en la que propusimos una tarea que involucra la función f(n)=n+2. Nos centramos en las evidencias que mostraron los alumnos desde los casos particulares hacia la generalización, encontrando una regularidad. Utilizaron expresiones como "siempre son dos más" o "hay que sumarle dos al anterior".

Palabras clave: *early algebra, educación infantil, educación primaria, patrones cuantitativos, pensamiento funcional.*

Abstract

This research is part of a project on algebraic thinking in early childhood and primary education carried out in Spain (www.pensamientoalgebraico.es/en). We describe the work of the students in the last year of kindergarten and the first year of primary school in tackling a generalization task with quantitative patterns. We designed four and five sessions for each grade, respectively. We implemented the sessions with the whole classes: 25 5-year-olds and 26 6-year-olds. We analyzed the work in one session in which we set a task involving the function f(n)=n+2. We focused on the evidence that students showed from particular cases to generalization, finding a regularity. They used expressions such as "it is always two more" or "you have to add two to the previous one".

Keywords: *childhood education, early algebra, functional thinking, primary school, quantitative patterns.*

INTRODUCCIÓN

Esta investigación está inmersa en el *early algebra*, una propuesta curricular que fomenta el trabajo con tareas algebraicas desde infantil, introduciéndolo de forma gradual durante la educación primaria, de forma que se mitiguen las dificultades manifiestas en educación secundaria con el álgebra. En educación infantil se trabajan patrones de diferentes tipos, incluyendo los que se hacen con base en atributos cualitativos y en atributos cuantitativos. Específicamente, nos enfocamos aquí en el paso desde el trabajo con patrones cuantitativos al pensamiento funcional. Por tanto, involucramos dos de los enfoques propuestos por algunos autores (e.g., Drijvers, 2003; Kaput et al., 2008) para introducir el álgebra escolar en educación infantil: patrones y funciones.

En España, se incorporó al currículo de educación primaria el sentido algebraico (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a). En él se establece que los alumnos de primaria deben desarrollar nociones algebraicas como establecer relaciones entre variables. En educación infantil no se explicita el sentido algebraico, pero sí hay referencia al trabajo con secuencias, predecir, o analizar, entre otras nociones matemáticas que deben ser desarrolladas en el aula (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022b).

Fuentes, S., Cañadas, M. C. y Anglada, L. (2024). De los patrones cuantitativos al pensamiento funcional. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVII (pp. 241-248). SEIEM.

Los patrones se han trabajado de forma habitual en las aulas españolas de educación infantil. Abordarlo desde la propuesta *early algebra* implica ver más allá de ubicar un elemento faltante; es predecir qué elemento sigue, identificar cuál es la unidad que se repite o identificar qué cambio ocurre de un elemento a otro del patrón. La literatura reciente se ha interesado en los procesos algebraicos que los alumnos de infantil evidencian en el trabajo con tareas de patrones (e.g., Acosta y Alsina, 2018; Anglada et al., 2023; Fuentes y Cañadas, 2023) y también en los alumnos de los primeros cursos de primaria (e.g., Fuentes y Cañadas, 2024; Morales et al., 2018), donde los alumnos parecen tener ciertas habilidades para generalizar sin haber recibido instrucción directa previa. En la mayoría de estas investigaciones intervenían dos variables, es decir, se buscaba que desarrollaran el pensamiento funcional, aunque las actividades podían ser abordadas desde los patrones cuantitativos, lo que se evidenciaba en las estrategias recursivas que utilizaban los alumnos para solucionar los problemas planteados. Surge aquí nuestro problema de investigación al plantearnos cómo hacer la transición de los patrones al pensamiento funcional en los primeros niveles educativos. Esta investigación contribuye a esta línea de trabajo, centrándose en alumnos de 5 y 6 años y fijando su interés en el trabajo de los estudiantes para pasar desde patrones cuantitativos al pensamiento funcional.

El objetivo principal de esta investigación es describir el trabajo de los alumnos ante una tarea de generalización con patrones cuantitativos y las estrategias que utilizan para generalizar.

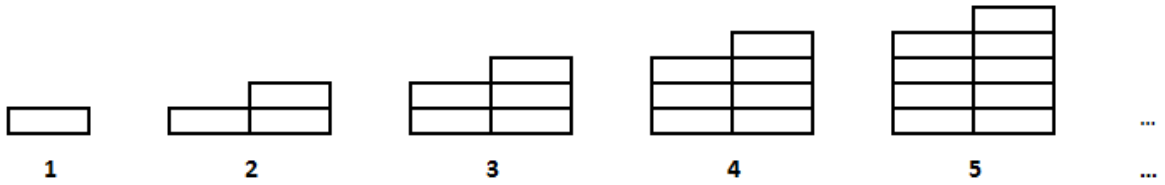
ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

El objetivo principal del early algebra es promover el pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización. Dos de los enfoques para ello son los patrones y el pensamiento funcional. En esta investigación proponemos a los alumnos una tarea que puede ser abordada desde ambos enfoques, pasando de la repetición del patrón a lo funcional.

Para Papic et al. (2011), el término patrón hace alusión a cualquier regularidad replicable. Trabajar un patrón de crecimiento en una secuencia de elementos, como una relación entre cada elemento y su posición en la secuencia es un ejemplo de pensamiento funcional. En los estudios de Kaput (2008), los alumnos de infantil trabajaban con patrones que los llevaban a pensar algebraicamente a través de la generalización. “La exploración de patrones se puede considerar como una especie de trampolín útil para promover la generalización” (Acosta et al., 2022, p. 92).

En esta investigación adoptamos la noción de patrón como una secuencia de elementos donde se observa una regularidad. Por tanto, se involucra un único conjunto de datos o variable. Por otro lado, en las funciones es fundamental evidenciar la relación entre dos o más variables que covarían.

Figura 1



En la Figura 1, podemos ver construcciones de ladrillos que van creciendo. Si enfocamos esta actividad desde los patrones, se van agregando 2 ladrillos de una construcción a la siguiente. Pero si lo vemos desde el enfoque funcional, se podría expresar como f(n)=n+(n-1), f(n)=2n-1, o f(n)=2(n-1)+1. Estas expresiones son equivalentes y se corresponden con diferentes formas de ver la función que relaciona el número de ladrillos con el número de posición de la construcción de ladrillos correspondiente. Por tanto, los patrones y las funciones son dos enfoques del pensamiento algebraico estrechamente relacionados.

El pensamiento funcional es una actividad cognitiva que se centra en las funciones como noción matemática, se basa en la construcción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Blanton y Kaput, 2004; Cañadas y Molina, 2016; Smith, 2008).

METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter descriptivo y exploratorio (Hernández et al., 2010). Descriptivo porque recopilamos, analizamos y presentamos los datos del trabajo de los alumnos en la tarea propuesta. Dado que hay pocas las investigaciones que se centran en esta temática, este trabajo constituye un estudio exploratorio.

Trabajamos con 25 alumnos de infantil-5 años y con 26 alumnos de 1.º de primaria, en el último trimestre del curso 21-22. Diseñamos e implementamos sesiones de trabajo, 4 y 5, respectivamente, en un colegio público de Granada. La selección del centro fue intencionada, por la disponibilidad de la comunidad educativa a participar. En cuanto a los conocimientos previos del alumnado de 5 y 6 años, ya han trabajado el conteo de series numéricas, por ejemplo, de dos en dos, de tres en tres y están consolidando el concepto de sumar y restar, agregando o quitando elementos de un conjunto, también han trabajado con patrones geométricos.

En las sesiones se abordaron diferentes patrones en diversas situaciones (Ver Tabla 1). El alumnado no había tenido instrucción directa previa sobre este tipo de tareas.

Tabla 1. Sesiones

Sesión	5 años de infantil	1.° de primaria
1	Loro Gruñón Patrones ABC y ABB	El Loro Gruñón Patrones ABC, ABBC
2	Loro Gruñón Patrones ABC y ABB	El Loro Gruñón Patrones ABC, ABB y ABBC
3	Loro Gruñón Patrones AB, ABC, ABB y ABBC	Croc y Quito Patrones numéricos 1-3-5-...
4	Croc y Quito Patrones numéricos 1-3-5… 16-14-12…	Croc y Quito Patrones numéricos 16-14-12…
5	-	Mesas y Sillas Patrones geométricos

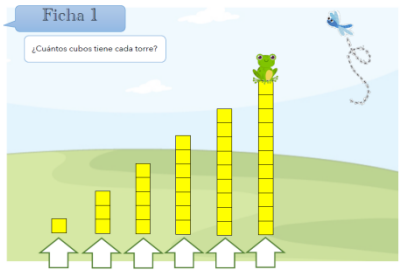
Miembros del proyecto de investigación en el que se enmarca este trabajo diseñamos, validamos e implementamos las sesiones. Tres investigadoras entraron al aula: dos dirigieron las sesiones y una se encargó de su grabación. Las sesiones tuvieron una duración aproximada de 50 minutos.

Nos centramos en el cuento de la rana Croc y el mosquito Quito. Croc tenía que subir torres de cubos para alcanzar a Quito, quien trataba de escapar cuando Croc se acercaba. Como se observa en la Tabla 1, se corresponde con la sesión 4 en 5 años y las sesiones 3 y 4 en 1.º de primaria. A continuación, describimos las 5 fichas que trabajamos en ambos cursos en estas sesiones.

Aunque las fichas eran iguales para los dos cursos, la metodología fue distinta. En 5 años, compartimos las fichas en la pizarra digital y, de forma oral, los alumnos contestaban a cada una de ellas, respetando el turno de palabra que daba la investigadora. Después de terminar con las 5 fichas, les facilitamos una base de ábaco y cubos apilables, para que pudieran libremente hacer un patrón de cubos que ayudara a Croc a alcanzar el mosquito. Después les pedimos a algunos alumnos que explicaran al resto de la clase lo que habían hecho. En 1.º de primaria les entregamos un cuadernillo con las 5 fichas y una bolsita con pegatinas con las que construyeron las torres que les pedimos. Proyectamos las fichas y las fuimos realizando en grupo. Primero, les leímos las preguntas de las fichas y les dábamos tiempo para que las resolvieran. Después, las discutimos en grupo. Para fomentar

el debate, les pedimos a algunos alumnos que en el transcurso de la resolución de la ficha habían utilizado diferentes estrategias, la compartieran con sus compañeros.

Figura 2: Fichas 1, 2 y 3

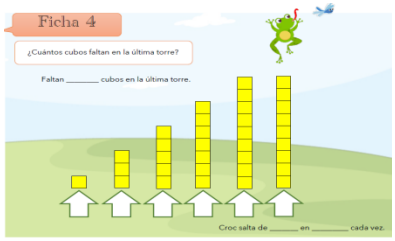
a) 

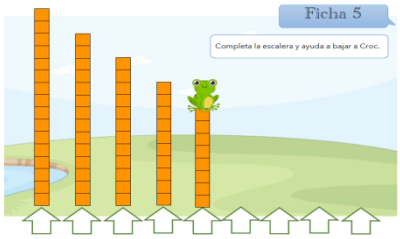
b) 

c) 

En la ficha 1 (Figura 2a), representamos torres que se correspondía con la secuencia 1-3-5-7-9-11. Preguntamos a los alumnos cuántos cubos tenía cada torre y qué observaban. Les fuimos preguntando a varios alumnos por cada una de las torres. Ellos tenían la oportunidad de salir adelante junto a la investigadora y decir su respuesta mostrando la pizarra. Fuimos escribiendo los valores que nos decían los alumnos y que el resto de compañeros validaban. En la ficha 2 (Figura 2b), les presentamos las primeras seis torres que se correspondían con la secuencia 1-3-5-7-9-11 y debían completar las dos torres siguientes, colocando las pegatinas necesarias para construir las torres y alcanzar al mosquito. Les preguntamos cómo habían logrado saber cuántas pegatinas eran necesarias. En la ficha 3 (Figura 2c), les pedimos a los alumnos que construyeran con pegatinas las torres que se había llevado el viento, las torres faltantes se correspondían con los números 3, 9 y 13. Les preguntamos cómo pudieron encontrar los valores que faltaban.

Figura 3: Ficha 4 y 5

a) 

b) 

En la ficha 4 (Figura 3a), les presentamos las torres que se correspondían con los números 1-3-5-7-9-9 y les preguntamos por los cubos que faltaban en la última torre, también le preguntamos si sabían de cuánto en cuánto saltaba la ranita. En la ficha 5 (Figura 3b), les presentamos unas torres descendentes que se correspondía con la secuencia 16-14-12-10-8 y les pedimos completar las torres que faltaban para que Croc pudiese bajar. En esta ficha, la serie cambió a una serie descendente de números pares. En 5 años, después de terminar las 5 fichas, se les entregó material concreto (ábacos) y se les pidió que crearan una secuencia de torres para ayudar a Croc, esta actividad fue libre.

Grabamos en vídeo las sesiones, que tuvieron una duración de 50 minutos cada una, aproximadamente. Las investigadoras del equipo y autoras de este trabajo, analizamos los vídeos de las sesiones buscando respuestas de los alumnos que evidenciaran estrategias que los llevaran a generalizar. Como criterio buscamos respuestas que (a) identificaran la regularidad y (b) explicitaran una estrategia. Como criterio en las estrategias, utilizamos las de Fuentes y Cañadas (en revisión), donde identifican estrategias físicas y cognitivas, las primeras ejercen una acción sobre un objeto o su cuerpo, las segundas lo hacen sobre un número o un concepto abstracto. Analizamos estas producciones en el siguiente apartado.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Analizamos los vídeos de las sesiones, en búsqueda de respuestas que evidenciaran la generalización del patrón, o la identificación de la regularidad. La unidad de análisis es la ficha. Para mantener el anonimato utilizaremos la codificación curso-n°lista. Por ejemplo, 5I12 es el alumno 12 de la lista de 5 años de infantil; y 1P18, es el alumno 18 de la lista de 1.º de primaria.

Tabla 2. Sesiones

Ficha	5 años	1.º primaria
1	5I1: Porque para ver le añadimos siempre 2, hay que ponerle 2. 5I6: Que hay que añadirle dos, 1 más 2 son 3, 3 más 2 son 5, 5 más 2 son 7, 7 más 2 son 9.	1P14: Va de dos en dos. 1P4: Porque va de dos en dos.
2	5I12: Se han saltado el 2 y el 4, tiene el 1, se salta el 2, tiene el 3, se salta el 4. 5I1: Hizo una fila de 1-2-3-4-5-6… y sacó el 2-4-6… 5I2: Si pusieran los números que faltan serían 1-2-3-4-5… 5I10: Yo los conté. 5I16: Después del 11 va el 12. 5I15: Ya no ocupamos los números del medio.	1P15: Uno menos, empecé con la última. 1P16: Yo puse la última, en la última sobraran 4 y en la anterior sobraran 2. 1P8: Fui completando desde la más pequeña. 1P19: [Completa las dos columnas hasta el mosquito] 1P26: Yo creo que 1P19 pensó en que así llegaría al mosquito. Yo hago la línea negra y la uso hasta donde llegar y así sé dónde llegar y entonces le sumo dos y así sé cómo sigue el otro.
3	5I7: Está el 11. El 12 me lo salto, está el 13, me salto el 14 y está el 15.	1P2: Comencé de la torre más alta y luego completé hacia abajo. 1P6: Cómo dijimos que eran de dos en dos, como hay dos barritas que faltan, primero puse los números y luego dibujé las barritas que faltaban. 1P12: Primero completé los números y luego coloqué las fichas. 1P5: Yo completé con dos escaleras iguales, 1-5-5-7-7… 1P8: Yo comencé desde el medio y después completé lo que faltaba.
4	5I1: Salta de 2 en 2.	1P18: Falta un cuadrado y Croc salta de 2 en 2. 1P6: Como decía de 2 en 2, entonces puse dos en la última fila. 1P25: Miré esta raya para que los dos quedaran a la misma altura y después subí dos. 1P1: Yo conté los cuadrados y en el 11 no habían 11 habían 9, yo puse 2. 1P21: Croc salta de dos en dos, luego puse los números sobre los cuadrados.
5	5I21: Tiene que saltar para abajo. 5I1: 4 y el que sigue 2, es como quitar dos números al 4, y dos números al 6.	1P2: Yo empecé por el medio y las fui colocando hacia abajo y hacia arriba. 1P9: Yo empecé por el medio y después fui bajando para abajo. 1P22: Empecé del medio, hacia arriba y hacia abajo. 1P15: bajo 2 y completo hacia abajo. 1P1: Yo puse 6, como 10 más 6 y 4 como 10 más 4.

En la Tabla 2 podemos observar y comparar algunas respuestas que los alumnos entregaron en cada ficha. En la ficha 1, los alumnos identificaron la regularidad; alguno de los de 5 años manifestaron que hay que ponerle o añadirle 2, lo que implica una acción física y el curso validó estas expresiones.

En cambio, el alumnado de 1.º identificó que la serie "va de dos en dos", lo que implica una estrategia cognitiva. Esto puede deberse al trabajo de conteo de dos en dos o de tres en tres realizado en el aula regular. En la ficha 2, el alumnado de 5 años encontró otras características en el número de cubos de las torres. Por ejemplo, vieron los números asociados a las torres que no estaban (2-4-6-8) y los incorporaron en la secuencia (1-2-3-4-5-6-7-8-9). En 1.º de primaria, las respuestas de los 5 alumnos de la Tabla 2 evidencian estrategias distintas que los llevaron a dar una respuesta (correcta o no). Se aprecia la estrategia física de 1P26, de marcar una línea que sirve de base para saber hasta dónde llegar y añadirle dos. En la puesta en común de la ficha 3, en 5 años prevaleció el conteo de los números que están y de los que no están, estrategia cognitiva encontrada en la ficha anterior. En 1.º, siguieron el patrón de "van de dos en dos" y verbalizaron las estrategias que utilizaban para saber cuántas fichas son. Una mayoría de alumnos de ese curso primero rellenó con la secuencia numérica y luego completó con las pegatinas. Destacamos el alumno 1P5, que generó otra serie donde las torres que no estaban tenían los mismos elementos que la anterior. En la ficha 4, el alumno de 5 años (5A1) verbalizó el patrón "salta de dos en dos" y sus compañeros validaron la respuesta como correcta. Los alumnos de 1.º utilizaron la regularidad encontrada en las fichas anteriores y la utilizaron para saber cuántos cubos faltaban en la última torre.

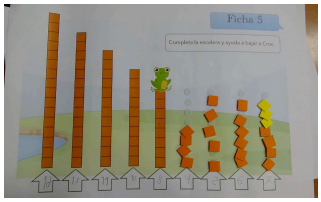
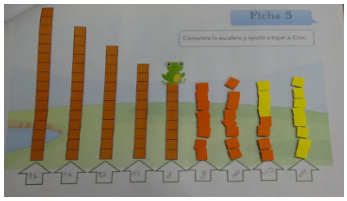
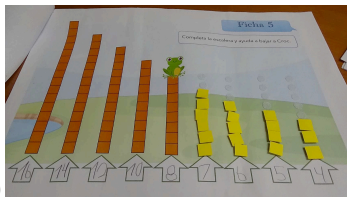
En la ficha 5, los alumnos de 5 años identificaron que la serie era descendente y que había que quitarle o restarle dos al número anterior, lo que puede deberse al trabajo de la suma y la resta en el aula regular. En 1.º de primaria generaron otras series que no eran descendentes, es el caso de 1P3 que colocó todas las torres con la misma cantidad de cubos, el alumno 1P1 utilizó una estrategia única, la descomposición de las cantidades entregadas para descubrir las que faltaban, el 16 lo descompuso en 10+6, que coincidía con la torre de 6 cubos y luego el 14, al descomponerlo, también coincidía con la torre de 4, por lo que su estrategia le sirvió para todas las torres faltantes.

Figura 4. Trabajo con material concreto en 5 años

a)  b)  c) 

En la Figura 4, podemos ver algunas producciones del alumnado. Al crear de forma libre una secuencia de torres para Croc, varios de los alumnos de 5 años utilizaron la secuencia que se corresponde con los números 1-2-3-4-5-6 (Figura 4a). En la Figura 4b, vemos que 5I21 creó la secuencia de torres que se corresponde con los números 2-2-3-5-5-8, al parecer de forma aleatoria y en la Figura 4c, el alumno 5I6, creó la secuencia de torres que se corresponde con los números 1-2-3-4-5-8, es posible que en la última torre apilara todos los cubos que le habían sobrado.

Figura 5. Trabajo con material concreto 1° primaria

a)  b)  c) 

Del trabajo realizado en la ficha 5 en 1.º de primaria, en la Figura 5 podemos ver algunos ejemplos, en la Figura 5a, el alumno 1P4 continúa la secuencia 16-14-12-10-8 con los números y torres 4-5-6-7, el alumno 1P3 mantuvo la altura de la última torre dada, quedando la secuencia 16-14-12-10-8-8-

8-8-8 (Figura 5b) y en la Figura 5c, el alumno 1P19 bajó de uno en uno completando las torres y secuencia que faltaban con los números 7-6-5-4.

En el análisis de la información, percibimos que el alumnado tendió a generalizar la tarea con patrones. Esto emerge de forma espontánea desde el inicio de la sesión. Esto se puede deber a que ven el patrón en su conjunto y no como una secuencia de elementos, priorizando saber la regla de formación del patrón y no sólo cuál es el número que sigue.

CONCLUSIONES

Nuestro objetivo principal fue describir el trabajo de los alumnos ante una tarea de generalización con patrones cuantitativos y las estrategias que utilizan para generalizar. Lo logramos mediante el análisis del trabajo del alumnado, buscando un acercamiento a la generalización en el enfoque funcional. Esta vinculación se evidenció en que los alumnos de 5 y 6 años buscaron las regularidades desde la presentación de la actividad, expresando "le añado dos" o "van de dos en dos". Estas estrategias les llevaron a la generalización. Durante el trabajo con las fichas corroboraron que el patrón encontrado era el correcto y que les ayudaba a encontrar los valores pedidos. Por ejemplo, marcaban el valor anterior y le sumaban dos, si tenían 9, el siguiente es 11 y el que sigue es 13.

Al comparar este estudio con nuestros antecedentes, concordamos en la importancia que tiene la identificación del cambio (Anglada et al., 2023), ya que los alumnos de 5 y 6 años descubrieron el cambio que se generaba de una torre a la otra y pudieron establecer que “siempre” ocurría lo mismo, con ello les fue fácil encontrar los valores faltantes, lo cual les servía no sólo para el siguiente elemento de la torre, si no para cualquiera.

Aportamos evidencia de lo que el alumnado pudo hacer cuando se les presentó una actividad de patrones, que buscaron estrategias para resolver el problema y encontrar los valores desconocidos. Las estrategias identificadas coinciden con Fuentes y Cañadas (en revisión) y son de dos tipos: (a) estrategias físicas, cuando demanda una acción sobre un objeto o su cuerpo; y (b) estrategias cognitivas, cuando la acción se centra en un número o concepto abstracto. El alumnado de 5 años utilizó la estrategia de considerar lo que no estaba, llevándolo a una serie conocida: los números naturales. En cambio, el de 1.º de primaria utilizó estrategias donde aplicaron el patrón de ir de dos en dos.

Valoramos la importancia de la justificación de las diferentes estrategias que los llevan a sus respuestas, sean estas correctas o erróneas, ya que al justificar se apropian de la tarea. Este es sólo un ejemplo de lo que se puede trabajar en el aula. Sabemos que, al ser una muestra intencionada y unas tareas concretas, los hallazgos encontrados no son generalizables. Confiamos en la contribución de este al ámbito docente (donde se puedan considerar tareas en las que se vincule el trabajo con patrones y el pensamiento funcional), investigador (quedan muchos aspectos por abordar a partir de este trabajo) y curricular pues el sentido algebraico no está incluido ni en el currículo de educación infantil ni en los planes de estudio de formación de maestros de Educación Infantil (estando los alumnos capacitados para abordar ciertos aspectos algebraicos y los profesores necesitados de esta formación).

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y ANID n° 72210402, Gobierno de Chile.

Referencias.

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: El caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111–120). SEIEM.

Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 91–110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Anglada, M. L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del sentido algebraico en Educación Infantil a través de tareas con patrones. *Epsilon, 113,* 9–19.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). PME.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Comares.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht University.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2024). f(n)=3n: Representaciones, estrategias y estructuras por alumnado de primero de primaria. *PNA, 18*(2), 161–188. https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.27701

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (en revisión). *Generalización con la función f(n)=n-1 en infantil desde un enfoque funcional del álgebra escolar*.

Fuentes, S., Cañadas, M. C. y Anglada, L. (2023). Cambio en variables cuantitativas por alumnos de 4 años desde un enfoque funcional. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 243–250). SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (5° ed.). McGraw Hill.

Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. Routledge.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 56*, 24386–24504.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 28*, 1–33.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59–78.

Papic, M., Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237–269. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). Routledge.

INTRODUCCIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES Y JAPONESES. UN ESTUDIO COMPARATIVO PRELIMINAR ORIENTADO A LA FORMACIÓN DE MAESTROS[3]

Introduction of multiplication in Spanish and Japanese textbooks. A preliminary comparative study aimed at teacher education

García, F.J.[a], Sierra, T.A.[b] y Gascón, J.[c]

[a] Universidad de Jaén, [b] Universidad Complutense de Madrid, [c] Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

El análisis de libros de texto puede ser una herramienta poderosa en la formación inicial de docentes. Sin embargo, todo análisis implica la adopción de herramientas teóricas concretas, así como de un punto de vista explícito. Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, proponemos integrar este análisis dentro de la perspectiva más amplia de la caracterización de los paradigmas didácticos vigentes en una institución escolar, y desde la perspectiva de un paradigma didáctico de referencia construido por el investigador. En el contexto de la introducción de la multiplicación en la Educación Primaria, proponemos un posible paradigma de referencia, con el que iniciamos un análisis de libros de texto españoles y japoneses. Este análisis permite entrever la existencia de dos paradigmas vigentes sustentados en modelos epistemológicos diferentes, y persiguiendo fines educativos distintos, cuyo estudio y análisis comparativo podría enriquecer la formación de los futuros docentes.

Palabras clave: *formación inicial de profesorado, multiplicación, libros de texto, paradigmas didácticos.*

Abstract

Textbook analysis can be a powerful tool in initial teacher education. However, any analysis involves the adoption of concrete theoretical tools as well as an explicit point of view. From the Anthropological Theory of the Didactic, we propose to insert this analysis within the broader perspective of the characterization of the current didactic paradigms in a school institution, and from the perspective of a reference didactic paradigm constructed by the researcher. In the context of the introduction of multiplication in primary education, we propose a possible reference paradigm, with which we begin an analysis of Spanish and Japanese textbooks. This analysis allows us to foresee the existence of two current paradigms based on different epistemological models and pursuing different didactic ends, whose study and comparative analysis could enrich the education of future teachers.

Keywords: *initial teacher education, multiplication, textbooks, didactic paradigms.*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre libros de texto y otros materiales curriculares es un ámbito de interés creciente en la investigación en educación matemática (Fan, 2013; Rezat et al., 2021), bien sea como objeto de análisis en sí mismos, bien desde la perspectiva de cómo estos afectan a otros aspectos de las prácticas docentes. Marco-Buzunáriz et al. (2016), en una revisión de comunicaciones en los simposios de la SEIEM, observan que la mayoría de las investigaciones en este campo son de tipo empírico, predominando las primeras (objeto de análisis) en detrimento de las segundas (uso y/o impacto). Desde una visión complementaria de ambas facetas, abordamos un posible análisis de libros de texto

[3] Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto PID2021-126717NB-C32, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación

García, F.J., Sierra, T.A. y Gascón, J. (2024). Introducción de la multiplicación en libros de texto españoles y japoneses. Un estudio comparativo preliminar orientado a la formación de maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 249-256). SEIEM.

con vistas a su posterior explotación en la formación de docentes, desde una perspectiva ampliada de los libros de texto y materiales curriculares como instrumentos de cambio (Rezat et al., 2021).

Un caso particularmente relevante de este uso de materiales curriculares se da en el estudio japonés de clases. En el mismo, tras identificar un tema de investigación, los docentes se embarcan en un estudio profundo (kenkyuu) de materiales curriculares (kyouzai), que ofrece la oportunidad de comprender los contenidos de los libros de texto y desarrollar sus conocimientos didácticos y matemáticos (Shinno y Mizoguchi, 2021). Esta fase de indagación, crucial en el estudio de clases en Japón, es a menudo desatendida cuando el estudio de clases se realiza en otros países (Doig et al., 2011), y se apoya en unos libros de texto de cuidado diseño. Por ello, consideramos que el análisis y la comparación de libros de texto japoneses y españoles puede ofrecer una perspectiva privilegiada.

Postulamos que cualquier uso de un material curricular en la formación de docentes debe ir precedido de un análisis del mismo, desde cierta perspectiva y con ciertas herramientas teóricas. Por ello, el problema de investigación concreto que abordaremos en esta comunicación, dentro del contexto anteriormente esbozado, es el de la caracterización de los paradigmas didácticos vigentes en las instituciones escolares (Gascón y Nicolás, 2021), tomando como base empírica ciertos libros de texto. En particular, nos centraremos en la multiplicación de números naturales en libros de texto españoles y japoneses de la institución Educación Primaria (EP), abordando las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo se introduce la multiplicación de números naturales en libros de texto de España y de Japón?
- ¿Qué diferencias existen entre los paradigmas didácticos subyacentes en uno y otro caso?

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Consideremos una institución escolar I y un ámbito $\mathcal{Q}$ más o menos delimitado de la matemática a enseñar en I. Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se propone la noción de *paradigma didáctico vigente* en I relativo a $\mathcal{Q}$, $PDV_I(\mathcal{Q})$, como una forma de representar la manera más o menos explícita en la que los sujetos de la institución I interpretan la educación matemática en torno a $\mathcal{Q}$ (Gascón y Nicolás, 2021). Un paradigma didáctico se interpreta como una unidad funcional, compuesta de cuatro componentes: (1) un modelo epistemológico relativo al ámbito $\mathcal{Q}$, (2) los fines didácticos que la institución I asume respecto al aprendizaje de $\mathcal{Q}$, (3) los medios didácticos que la institución I considera adecuados para alcanzar dichos fines, y (4) los fenómenos didácticos que el modelo epistemológico saca a la luz y a los que el paradigma, globalmente considerado, responde.

Para el análisis didáctico del $PDV_I(\mathcal{Q})$, en la TAD se asume la hipótesis fundamental de que el investigador debe adoptar un "punto de vista" explícito, a modo de referencia. Este se concreta en la noción de *paradigma didáctico de referencia*, que amplía la de modelo epistemológico de referencia como instrumento fundamental de emancipación de la didáctica (Gascón, 2014). De forma análoga, estaría compuesto por un modelo epistemológico de referencia de $\mathcal{Q}$ en I, construido de forma explícita a modo de forma alternativa de interpretar el estudio de dicho ámbito en I, junto con los fines didácticos y los medios didácticos de referencia que este paradigma propugne, y los fenómenos didácticos de referencia respecto al estudio de $\mathcal{Q}$ en I que este paradigma permite visibilizar y ante los que surge como una repuesta alternativa (Gascón y Nicolás, 2021). Un paradigma didáctico de referencia $PDR_I(\mathcal{Q})$ se interpreta como una hipótesis científica, a modo de forma alternativa de entender el estudio de $\mathcal{Q}$ en I respecto al $PDV_I(\mathcal{Q})$. Y ayudará al didacta a evidenciar fenómenos didácticos asociados a la modalidad de estudio de $\mathcal{Q}$ vigente en I y a conjeturar que un proceso de estudio de $\mathcal{Q}$ en I regido por el $PDR_I(\mathcal{Q})$ permitiría soslayar tales fenómenos (Gascón y Nicolás, 2021).

Para el análisis del $PDV_I(\mathcal{Q})$, el didacta toma en consideración diversas fuentes, que analiza desde la perspectiva explicitada en el $PDR_I(\mathcal{Q})$ que asuma. En la medida en que todo libro de texto, como medio didáctico, puede ser interpretado como mediador entre un saber a enseñar y un saber enseñado

(Rezat et al., 2021), se puede interpretar que un libro de texto propone una modalidad de estudio de $\mathfrak{A}$ en I y, en consecuencia, ofrece una puerta de entrada privilegiada para el análisis del $PDV_I(\mathfrak{A})$.

En el tipo de análisis que iniciamos aquí, consideramos variables ligadas a los cuatro componentes de la noción de paradigma didáctico. Análisis más finos, que se llevarán a cabo en el futuro, implicarían la ampliación y concreción del conjunto de variables desde la perspectiva de la TAD, para analizar en detalle el proceso de estudio que el libro propone. Entre otras, variables como el tipo de tareas, técnicas y tecnologías matemáticas; tipo de tareas, técnicas y tecnologías didácticas; momentos de estudio; dialécticas de un proceso de estudio; etc. De hecho, algunas de estas, como los tipos de tareas, las técnicas o las tecnologías matemáticas, también serán usadas a continuación.

ELEMENTOS DE UN PARADIGMA DIDÁCTICO DE REFERENCIA DE LA MULTIPLICACIÓN EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Esbozamos aquí algunos rasgos fundamentales de un posible PDR que incluya a la multiplicación de números naturales en la institución EP. Por la extensión de esta comunicación, no es posible una descripción de este en detalle. Metodológicamente, su construcción se fundamenta en la asunción de un conjunto de hipótesis, que serán las que el paradigma propone, y que se contrastarán en virtud de los fenómenos didácticos que permitan sacar a la luz (Gascón y Nicolás, 2021):

- Hipótesis 1: para la construcción de este paradigma, la multiplicación debe ser interpretada dentro de un ámbito $\mathfrak{A}$ más amplio, que integre, de alguna forma, lo que se conoce comúnmente como "la aritmética" en la EP. Denotaremos por $\mathfrak{A}$ a dicho conglomerado de componentes praxeológicos no nítidamente determinado.
- Hipótesis 2: el $PDR_I(\mathfrak{A})$ ha de ser compatible con cierto paradigma de referencia disciplinar de las matemáticas asumido por el investigador. En el caso de la TAD, este es el que se denomina como paradigma de la modelización matemática, que postula que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de construcción de modelos de sistemas matemáticos o extramatemáticos, y que ha sido puesto a prueba y contrastado en diversas investigaciones dentro de la TAD (Gascón y Nicolás, 2021).
- Hipótesis 3: "lo artimético", por mucho que trate de los números, de sus propiedades y de las operaciones entre ellos, toma sentido en el contexto de las magnitudes y de su medida (Chambris, 2022; Chevallard y Bosch, 2001). Por consiguiente, el ámbito $\mathfrak{A}$, que no es posible describir aquí en detalle, integraría no sólo lo que tradicionalmente se asocia con la aritmética escolar, sino un dominio más amplio que incluiría así mismo a las magnitudes y su medida.

A partir de estas hipótesis, en el modelo epistemológico de referencia sobre el que se erige este $PDR_I(\mathfrak{A})$, la génesis de "lo aritmético" se interpreta fuertemente conectada con el universo de las magnitudes y su medida, asumiendo que son estas las que proporcionarían, inicialmente, una razón de ser del trabajo aritmético en EP. La aritmética escolar tendría su origen en el estudio de cuestiones que se plantean en torno a sistemas extramatemáticos cuyos objetos constituyen el "soporte" de ciertas magnitudes, emergiendo, inicialmente, como modelo de estos. Eso no significa que, necesariamente, la aritmética escolar se restrinja al estudio de estos sistemas. El carácter recursivo de la relación sistema-modelo que postula la TAD daría lugar a un progresivo alejamiento de lo aritmético respecto de las magnitudes, llegando incluso, en etapas posteriores, al estudio y modelización de sistemas de naturaleza aritmética (como el sistema de los números primos, o de los divisores de un número). Este paradigma de referencia aboga, como fin didáctico, por hacer vivir en la EP una genuina actividad de modelización de dichos sistemas, que dé lugar a la construcción de los objetos aritméticos dentro del juego sistema-modelo. Este $PDR_I(\mathfrak{A})$ surgiría como reacción a fenómenos didácticos como el de la progresiva degeneración de las prácticas matemáticas en torno a las magnitudes y su medida, que tienden a olvidar el papel que las entidades extramatemáticas juegan

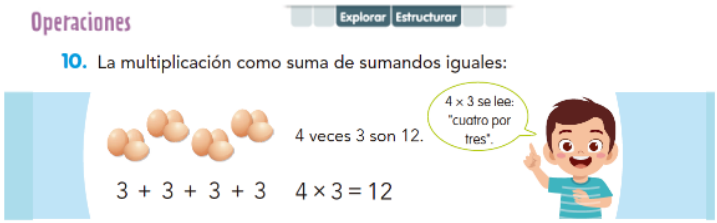
en la construcción de los conocimientos aritméticos, debilitando la que Chambris (2022) considera una posible razón de ser de la aritmética en EP. Las magnitudes quedan convertidas en sombras en el trabajo aritmético escolar (Chevallard y Bosch, 2001), donde se tienden a evitar problemáticas como la construcción de las aplicaciones medida, la elección de la unidad o los cambios de unidades.

En el caso concreto de la multiplicación de números naturales, y en una primera aproximación, la interpretación de esta desde el $PDR_I(@)$ esbozado implicaría considerarla dentro de la problemática más amplia de la medida de cantidades de magnitudes discretas en sistemas extramatemáticos de objetos soporte a partir de unidades simples y múltiples. Cuestiones relacionadas con la equivalencia de dichas medidas, y que conducirían a procesos de cambio de unidad, serían las que estarían en el germen de la noción de multiplicación (Chambris, 2022; Hino y Kato, 2019; Isoda y Olfos, 2021; Izsák y Beckmann, 2019). Esta actividad se podría extender y articular con procesos de medida de cantidades continuas y de cambio de unidades, lo que permitiría progresivas extensiones de la multiplicación más allá de los números naturales, su conexión con las situaciones de proporcionalidad (Isoda y Olfos, 2021) y la construcción de la magnitud producto.

INTRODUCIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA Y JAPÓN

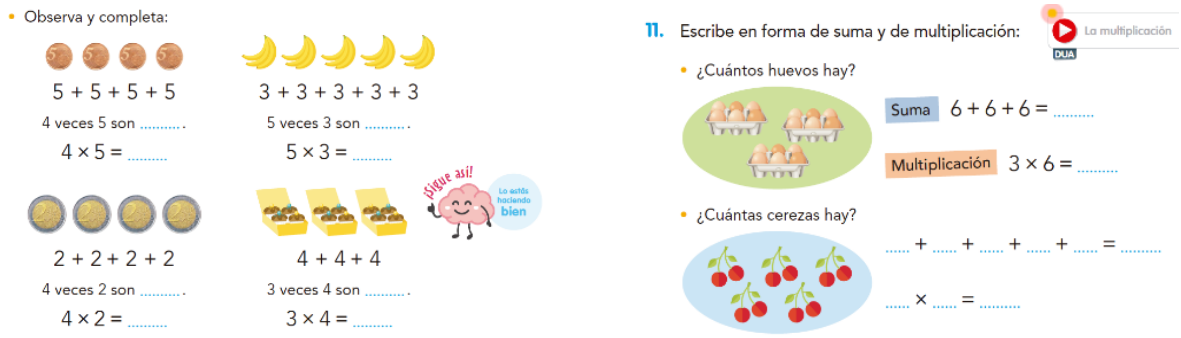
En el caso español, consideraremos dos libros de texto, de 2º y 3er curso (Fraile y Pineda, 2023a, 2023b), aunque otros textos también han sido revisados, observando características similares. En el 2º curso, la Figura 1 muestra cómo se introduce la noción de multiplicación, mientras que en la Figura 2 podemos observar tipos de ejercicios que suceden a dicha introducción.

Figura 1. Introducción de la multiplicación en libro de 2º de EP (Fraile y Pineda, 2023a, p. 214)



El texto no es ajeno al número natural como medida de colecciones discretas. De hecho, incluye diversas representaciones de colecciones (por ejemplo, colecciones de huevos, en la Figura 1, o de plátanos, en la Figura 2). La multiplicación se introduce, de forma explícita, como solución al problema de cómo expresar una suma de sumandos iguales (Figura 1). Así, en el primer encuentro de los estudiantes con esta, se trata de una nueva operación que emerge para dar solución a ciertas situaciones que se interpretan en términos de sumas.

Figura 2. Ejercicios de multiplicación en libro de 2º de EP (Fraile y Pineda, 2023a, p. 214 y 215)

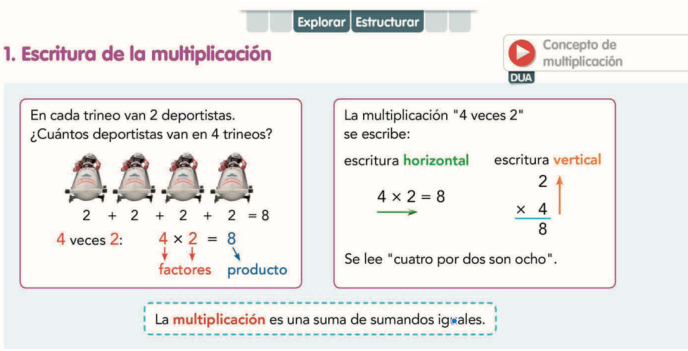


De forma consistente con la noción de suma, las tareas que se muestran obedecen a la estructura aditiva de combinación (dadas las partes, determinar el total). Frases como “4 veces 3 son 12” (Figura

1) o “4 veces 5 son …” (Figura 2) se refieren, a la vez, al número de veces que un sumando se repite, y al número de veces que una cantidad se repite. Las cantidades de magnitudes discretas juegan un papel tecnológico, describiendo y justificando la multiplicación como la medida de la colección que resulta de unir colecciones iguales, y que es intercambiable, rápidamente, por sumar sumandos iguales. Ejercicios como el 11 (Figura 2), en los que se propone expresar como “suma” y como “multiplicación” el resultado de reunir ciertas colecciones equipotentes, apoyan esta interpretación. Cantidades cociente, de naturaleza multiplicativa, del tipo “huevos por grupo” o “plátanos por racimo”, están ausentes.

Análogamente, en el manual de 3er curso se vuelve a definir la multiplicación, explícitamente, como “suma de sumandos iguales” (Figura 3) y de nuevo asociada a la idea de unir/juntar colecciones de igual medida. Así se describe en la guía didáctica de apoyo al docente, como uno de los aprendizajes competenciales de este tema: reconocer la multiplicación “como suma de sumandos iguales”.

Figura 3. Definición de a multiplicación en libro de 3er de EP (Fraile y Pineda, 2023b, p. 40)



En Japón, la forma de presentar la multiplicación está ampliamente descrita en la literatura (Hino y Kato, 2019; Isoda y Olfos, 2021). Se introduce, tanto en el currículo como en los libros de texto, en el sentido de medida de magnitudes, y en relación con la elección de la unidad que se haga: “el significado de la multiplicación de números enteros, decimales y fracciones se representa como B × P = A, donde B es la cantidad base, P es el valor relativo, y A es la correspondiente cantidad que tiene el tamaño relativo especificado con respecto a B” (Hino y Kato, 2019, p. 129, traducción propia).

Figura 4. Introducción a la multiplicación en un libro de 2º de EP en Japón (Fujii y Majima, 2020, p. 4 y 5)

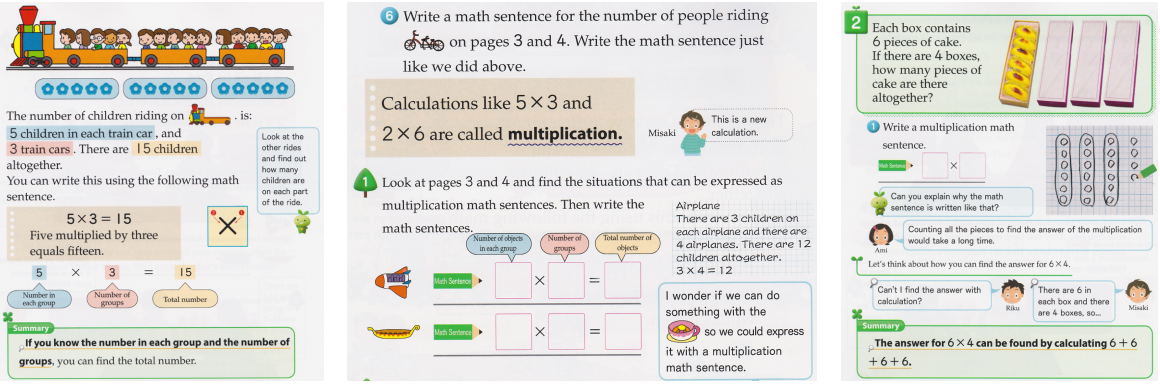


En el caso de la multiplicación de números naturales, esto implica que el primer contacto con la multiplicación se lleve a cabo a partir de situaciones en las que el tipo de problema que se aborda es

el de medir colecciones discretas (de niños, en la Figura 4), y expresar dicha medida, cuando se usan unidades, como la pareja (en las bicicletas), la tripleta (en los aviones), la cuaterna (en los coches), el quinteto (en el tren), o el sexteto (en la montaña rusa) (Figura 4).

En principio, se pretende que los estudiantes resuelvan estos problemas a partir de técnicas que ya disponen, como son el conteo del total de la colección o técnicas derivadas de este (conteo de dos en dos, de tres en tres…). Consecuentemente, el discurso tecnológico se organiza en torno a la institucionalización de las "frases matemáticas multiplicativas": "número de objetos en cada grupo" x "número de grupos" = "total de objetos" (Figura 5). En este contexto, la suma de sumandos iguales no se presenta como un significado de la multiplicación, sino como una técnica para determinar el resultado de esta, cuando el conteo directo del total es pesado (Figura 5, imagen de la derecha).

Figura 5. La multiplicación en un libro de 2º de EP en Japón (Fujii y Majima, 2020, p. 7, 8 y 10)



ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En los textos de ambos países, el hecho de mostrar colecciones equipotentes de objetos (cantidades de magnitudes discretas) y cadenas de sumas de sumandos iguales puede inducir a una interpretación prácticamente equivalente de la multiplicación. Bajo esta visión superficial, existen profundas diferencias que se pueden interpretar como reflejo de dos paradigmas didácticos vigentes ($PDV_{ES}(q)$ y $PDV_{J}(q)$), con rasgos diferenciados, cuando son analizados desde la perspectiva del $PDR_{I}(q)$.

En relación con los modelos epistemológicos vigentes, en ambos casos lo aritmético aparece ligado a sistemas de cantidades de magnitudes discretas. La multiplicación se vincula a sistemas compuestos por cantidades discretas equipotentes. Sin embargo, el sentido de la multiplicación respecto de estos sistemas diverge. En el $PDV_{ES}(q)$, la multiplicación es un modelo de la unión de estas colecciones, mientras que en el $PDV_{J}(q)$, es un modelo de la medida de la colección total a partir de una unidad múltiple. Según Isoda y Olfos (2021), se trata de una particularización de la definición de la multiplicación por medida, para el caso de los números naturales, que es extensible más adelante.

Si bien en ambos casos se observa una tendencia a desligar los números de las cantidades que representan (Chambris, 2022), este fenómeno es más temprano y abrupto en el caso de los libros españoles, donde las magnitudes juegan un potencial papel tecnológico, explicativo y justificativo del tipo de relación que se quiere introducir, pero no son verdaderos medios de la actividad matemática que se propone en torno a la multiplicación. De hecho, esta, casi desde el comienzo, tiende a identificarse más como un modelo de un sistema compuesto por entidades matemáticas (cifras), que podría existir desligado de las cantidades que estas representan. En las expresiones multiplicativas, el primer factor se refiere, principalmente, al número de veces que el segundo se repite en una cadena de sumas, quedando las cantidades de magnitud convertidas en *sombras* de la actividad matemática que se propone (Chevallard y Bosch, 2001). Al contrario, en el caso japonés hay una necesidad de mantener la relación con la cantidades de magnitud durante el mayor tiempo posible, ya que el significado de la multiplicación que se desea introducir no se sostiene sin ellas, si bien, la confluencia final en la suma reiterada, como estrategia para determinar el resultado de una

multiplicación, parece tener un efecto en cierto desvanecimiento de las magnitudes, que formulamos con cautela aquí, por el extracto tan limitado de los libros que estamos analizando.

En coherencia con lo anterior, los fines que ambos paradigmas propugnan también difieren. En el $PDV_{ES}(q)$, interpretamos que se pretende mantener al niño muy cerca de su conocimiento anterior de la suma, sin que sufra una ruptura epistemológica fuerte. Por ello, perduran los significados aditivos y se promueve una identificación de facto de la multiplicación con la suma. Este hecho vendría a reforzar el papel tan secundario de las cantidades de magnitud que ya hemos identificado, al asumir que el sentido de suma como combinación ya fue construido, y ahora no volvería a ser necesario un trabajo explícito de reunión de colecciones. Sin embargo, en el $PDV_J(q)$, se persigue que los estudiantes accedan a un nuevo tipo de relación en la que, al contrario que en la suma, cada número tiene un significado diferente (unidades por grupo, número de grupos) (Isoda y Olfos, 2021). Se trata de una ruptura epistemológica que requiere de la construcción de nuevas relaciones entre cantidades de magnitud y de una extensión de los procesos de medida. Aun cuando este trabajo se apoye en conocimientos previamente construidos (conteo y suma), la multiplicación no se identifica con estos.

Al nivel de los medios didácticos, no es posible interpretar el $PDV_J(q)$ sin considerar su vinculación con la *resolución estructurada de problemas*, como paradigma disciplinar de la enseñanza de las matemáticas vigente en Japón. Como sintetizamos en García et al. (2023), este propugna, como fin de la educación matemática, promover el *pensamiento matemático* de los estudiantes, que se concreta, entre otras facetas, en promover la actividad de resolución de problemas. Para ello, propone, como medios didácticos privilegiados, el uso de problemas de tipo abierto-cerrado (de solución final única, pero abordables usando diferentes estrategias) y una organización de la clase basada en la emergencia de diferentes estrategias, un debate sobre el alcance y las limitaciones de estas y una institucionalización final de un nuevo cocimiento. El problema "cuántos niños hay en cada atracción" que se presenta en el libro japonés obedece a esta estructura (Isoda y Olfos, 2021). Siendo de solución única, admite el uso de diferentes estrategias (contar de uno en uno, de varios en varios, sumar) cuya exploración y comparación conduce a institucionalizar la suma reiterada como la mejor estrategia posible en ese momento para llegar a la solución del problema propuesto. En el caso español no hay descrito, con tanto detalle y unanimidad, un paradigma global vigente. No obstante, consideramos que extractos como los mostrados bien podrían vincularse a ciertos paradigmas disciplinares clásicos de tipo tecnicista, que identifica aprender y enseñar matemáticas con aprender y enseñar técnicas matemáticas (Gascón, 2001) y, por tanto, abusa de medios didácticos tales como las representaciones ostensivas de las técnicas y los ejercicios de aplicación directa de estos, orientados a su rutinización.

CONCLUSIONES

Este análisis inicial permite ya entrever rasgos importantes de los paradigmas vigentes representados en libros de texto de España y Japón, desde la perspectiva del $PDR_I(q)$. En el caso de la introducción de la multiplicación en la institución EP, bajo desarrollos aparentemente similares se esconden propuestas esencialmente distintas, que hunden sus raíces en modelos epistemológicos, fines educativos y medios didácticos diferentes. El $PDR_I(q)$ también nos ha permitido cuestionar el papel que los sistemas de cantidades de magnitud y los procesos de modelización desempeñan en esta construcción escolar, abriendo la puerta a un análisis más extenso que debe avanzar hacia la ampliación de la multiplicación a números racionales y reales y a su relación con la proporcionalidad entre magnitudes. Isoda y Olfos (2021) describen esta extensión en el caso de la EP en Japón, mostrando cómo la definición de la multiplicación por medida se amplía a nuevos dominios numéricos. Sería relevante, continuar este análisis comparativo de libros de texto.

En la formación inicial de maestros, el diseño de procesos formativos en los que tengan la oportunidad de analizar y cuestionar libros de texto como los que hemos usado en esta comunicación, contribuiría a cuestionar la relatividad institucional de la construcción de los objetos matemáticos y a poner en evidencia la existencia de paradigmas didácticos vigentes con rasgos diferenciados. Postulamos que

puede ser una estrategia fecunda, que ya estamos explorando, que contribuiría a la emancipación de los futuros docentes de los paradigmas vigentes y los dotaría de herramientas para superar la ilusión de transparencia de las prácticas docentes escolares.

Referencias

Chambris, C. (2022). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités.* Habilitation à diriger des recherches. CY Cergy Paris Université.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques ou collège. *Petit X, 55*, 5–32.

Doig, B., Groves, S. y Fujii, T. (2011). The critical role of task development in lesson study. En L. C. Hart, A. S. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 181–199). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_15

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM - Mathematics Education, 45*(5), 765–777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Fraile, J. y Pineda, A. (2023a). *Matemáticas 2 Primaria. Proyecto abanico*. Vicens Vives.

Fraile, J. y Pineda, A. (2023b). *Matemáticas 3 Primaria. Proyecto abanico*. Vicens Vives.

Fujii, T y Majima, H. (2020). *New Mathematics 2B for Elementary School*. Tokyo Shoseki.

García, F. J., Gascón, J., Nicolás, P. y Sierra, T. A. (2023). Los paradigmas didácticos como componentes esenciales de la infraestructura del estudio de clases. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 251–258). SEIEM.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 129–149.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática, 25 años*, 99–123.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021). Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 23–39. https://doi.org/10.35763/aiem20.4033

Hino, K. y Kato, H. (2019). Teaching whole-number multiplication to promote children's proportional reasoning: a practice-based perspective from Japan. *ZDM - Mathematics Education, 51*(1), 125–137. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0993-6

Isoda, M. y Olfos, R. (2021). *Teaching Multiplication with Lesson Study: Japanese and Ibero-American Theories for International Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6

Izsák, A. y Beckmann, S. (2019). Developing a coherent approach to multiplication and measurement. *Educational Studies in Mathematics, 101*(1), 83–103. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09885-8

Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325–334). Málaga: SEIEM.

Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM - Mathematics Education, 53*(6), 1189–1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Shinno, Y. y Mizoguchi, T. (2021). Theoretical approaches to teachers' lesson designs involving the adaptation of mathematics textbooks: two cases from kyouzai kenkyuu in Japan. *ZDM - Mathematics Education, 53*(6), 1387–1402. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01269-8

RELACIÓN ENTRE SUPERFICIE Y VOLUMEN MEDIANTE MANIPULATIVOS Y REALIDAD VIRTUAL

Surface area to volume relationship through manipulatives and virtual reality

García, M. M. y Romero, I. M.

Universidad de Almería

Resumen

El estudio que presentamos muestra los avances experimentados en la comprensión de las magnitudes superficie y volumen de un grupo de estudiantes para maestro cuyo conocimiento inicial era bastante limitado. Se han empleado recursos manipulativos y realidad virtual inmersiva (RVI) para trabajar en el aula actividades diseñadas a tal efecto. Los resultados de los análisis realizados evidencian una mejora más significativa para los estudiantes que usaron realidad virtual y un avance menos notorio para el grupo que usó materiales manipulativos. Se describen y ejemplifican los errores y estrategias más comunes empleadas por los futuros maestros al abordar el cálculo de superficies y volúmenes de ortoedros, tanto al inicio como al final de la experiencia.

Palabras clave: *futuros maestros, manipulativos, realidad virtual, volumen, superficie.*

Abstract

The study presented here shows the progress made in the understanding of the magnitudes surface area and volume in a group of pre-service teachers whose initial knowledge was quite limited. Manipulative resources and immersive virtual reality (IVR) have been used to work on classroom activities designed for this purpose. The results of the analyses carried out show a more significant improvement for the students who used virtual reality and a less noticeable improvement for the group that used manipulative materials. The most common errors and strategies used by the prospective teachers when dealing with the calculation of surfaces and volumes of orthohedra, both at the beginning and at the end of the experience, are described and exemplified.

Keywords: pre-service teachers, manipulatives, virtual reality, volume, surface-area.

INTRODUCCIÓN Y MARCO

No es novedad en España la preocupación por la deficiente formación inicial en matemáticas de los futuros maestros, como ya señalaba el estudio internacional TEDS-M (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012), al situarnos por debajo de la media de los países de nuestro entorno. Esta deficiencia se atribuye, en parte, a que muchos estudiantes dejaron atrás las matemáticas al finalizar la ESO (Asensio et al., 2022). Por otra parte, si el profesor es considerado el factor más influyente en el desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes (Castro, 2021), no es de extrañar que estudios como TIMSS informen de un nivel bajo de competencia matemática de los estudiantes de primaria españoles, que sigue situándonos por debajo de la media europea en su última edición de 2019. Por tanto, desde el grado de Educación Primaria (EP), es necesario proporcionar a los futuros maestros una formación que mejore su competencia matemática y permita corregir esta situación. No es tarea fácil, dado que el porcentaje de créditos asignados en el grado de EP a la Didáctica de la Matemática en las distintas universidades españolas se sitúa muy por debajo del necesario (Nolla et al., 2021).

En particular, los futuros docentes han de ser competentes en la enseñanza de la medida de magnitudes. La medida no solo es indispensable en matemáticas y otras disciplinas, sino también en nuestro quehacer diario. Además, su inclusión es vital en la educación primaria, al vincular el número con el espacio (Rupnow et al., 2022). Sin embargo, la literatura señala que muchos estudiantes siguen

García, M. M. y Romero, I. M. (2024). Relación entre superficie y volumen mediante manipulativos y realidad virtual. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 257-264). SEIEM.

experimentando problemas para diferenciar magnitudes y, específicamente, para resolver problemas que implican el cálculo del área y del volumen de prismas (Baiduri, 2019; Chiphambo et al., 2020).

Sisman y Aksu (2016) indicaron una amplia gama de errores y concepciones erróneas en relación con la medida de superficies en figuras tridimensionales. Por una parte, errores conceptuales, al confundir superficie (2D) con volumen (3D) o creer que un ortoedro tiene más de una superficie y, por otra parte, falta de conocimientos procedimentales al calcular el área de la superficie como suma de la longitud más la anchura más la altura o aplicando la fórmula del volumen. Otros errores comunes están relacionados con las unidades de medida, con la naturaleza 3D de los sólidos, con la aplicación de fórmulas incorrectas al calcular la superficie de un ortoedro, con la concepción errónea de que superficie y volumen son magnitudes dependientes, etc. (López-Serentill, 2022; Rupnow et al., 2022; Romero et al., 2023). Caro y Planas (2021) ponen de manifiesto la debilidad del conocimiento matemático de maestros en formación en torno a la relación entre área y volumen.

Así pues, es necesario mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la medida, todavía usuales en las aulas, centrados en cálculos aritméticos y uso de fórmulas, para brindar al alumnado la oportunidad de aprender la medida con sentido y que no se perpetúen los errores señalados. En esta línea, Kontas (2016), al analizar los efectos del uso de materiales manipulativos, concluyó que permiten la transición de lo concreto a lo simbólico, promueven la comprensión de los conceptos de área y volumen, promueven la observación, el razonamiento, el trabajo en equipo e impulsan la generalización a través de experiencias concretas. Otros estudios, aunque también encontraron beneficios al trabajar con materiales manipulativos advertían de que, a pesar de su uso, algunos estudiantes seguían sin diferenciar un objeto 2D de un objeto 3D (Chiphambo et al. (2020) y demandaban seguir investigando para corregir este error de concepto. En esa dirección, Demitriadou et al. (2020) probaron que, usando Realidad Virtual Inmersiva (RVI) en el aula, los alumnos comprendieron los sólidos geométricos y percibieron la diferencia entre los objetos 3D y 2D. Por su parte, los estudios recientes de Rodríguez et al. (2021) y de Romero et al. (2023) mostraron que el uso del software de geometría dinámica tridimensional de RVI NeoTrie permitió a los escolares afrontar retos difíciles de superar con otros tipos de materiales, fomentando las aproximaciones flexibles a situaciones problemáticas y el desarrollo del razonamiento visual y estructural.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo utiliza el modelo de competencia matemática propuesto por National Research Council (2001) para explorar el impacto del uso de materiales manipulativos y de RVI en el desarrollo de dicha competencia por parte de futuros maestros. El modelo contempla cinco componentes: comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva. En la línea de Chiphambo et al (2020), en esta comunicación, abordamos únicamente las dos primeras componentes. La comprensión conceptual se refiere a la comprensión unificada y con sentido de los conceptos matemáticos, mientras que la fluidez procedimental conlleva la habilidad para discernir cuándo y cómo utilizar las destrezas adquiridas de forma flexible, precisa y eficiente.

El objetivo de este trabajo es indagar en el efecto que produce el uso de recursos manipulativos y de RVI en la comprensión conceptual y en la fluidez procedimental relativas a la superficie y volumen de ortoedros, así como a la relación entre las dos magnitudes, en estudiantes del Grado de EP.

MÉTODO

Este estudio se encuadra dentro de la metodología de investigación-acción, en el que las autoras participan como profesoras-investigadoras. La muestra está formada por 106 estudiantes de dos grupos de 2º curso del grado de EP, que cursaron la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida durante el curso 2022/23 en la Universidad de Almería quienes, atendiendo a su calificación en el bloque de Geometría (previo al de Medida) fueron clasificados en 5 niveles de conocimiento (Deficiente, Bajo, Medio, Satisfactorio y Excelente). Todos ellos realizaron individualmente un test inicial (pretest) sobre superficie y volumen de ortoedros, cuyo análisis reveló

una muy deficiente formación inicial. Con esta información, se diseñaron actividades para trabajar en el aula en gran grupo desde un enfoque experimental, un taller práctico (1,5h de duración), en el que los estudiantes fueron distribuidos en equipos de 4 a 6 personas del mismo nivel de conocimientos, y un postest individual que realizaron al término de la intervención. El pretest, el taller y el postest contenían preguntas sobre cálculo de superficie y volumen de ortoedros y el mismo reto final de encontrar una pareja de ortoedros, uno con mayor superficie y menor volumen que el otro. El taller se repitió 5 veces, ya que los 106 estudiantes estaban divididos en 5 subgrupos de prácticas, disponiendo todos los equipos de materiales manipulativos (centicubos y papel milimetrado) para los cálculos de superficies y volúmenes de ortoedros, mientras que, para resolver el reto final, un equipo en cada taller usó el software de RVI, NeoTrie, en lugar de manipulativos. En total, 22 estudiantes usaron NeoTrie distribuidos en 5 equipos, uno representativo de cada nivel de conocimientos. El recurso de RVI consistía en unas gafas Oculus Quest 2 con mandos inalámbricos y un ordenador para transmitir simultáneamente lo que se veía en las gafas, de modo que, todo el equipo podía participar en la tarea, aunque era un estudiante quien, por turnos, manejaba NeoTrie. NeoTrie recrea un escenario 3D en el que se puede interactuar con diferentes herramientas y figuras geométricas permitiendo a los estudiantes tener una experiencia inmersiva donde visualizar, crear y manipular objetos sobre los que explorar, razonar y argumentar. (Más información en https://www2.ual.es/neotrie/).

Durante el estudio se recopilaron las respuestas escritas individuales del pretest y del postest, junto con los protocolos escritos de resolución del taller práctico En cada repetición del taller, una autora tenía el rol de profesora y la otra el de investigadora encargada de registrar observaciones. En esta comunicación analizamos las respuestas de los estudiantes en el pretest y en el postest (calificadas entre 0 y 5). Se ha usado el paquete estadístico SPSS V29 para realizar la prueba de Kolmogorov-Smirnov, para descartar la normalidad de los datos; la prueba de Rangos con Signo de Wilcoxon de comparación de medias de la puntuación total entre pretest y postest y la prueba U de Mann-Whitney, para analizar la dependencia de los resultados del postest de las variables recurso y género.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En cuanto a resultados generales, la Tabla 1 muestra las pruebas estadísticas realizadas (nivel de confianza 95%) que informan de diferencias significativas entre pretest y postest, así como de la influencia en los resultados del postest del recurso utilizado en el taller práctico (manipulativos o NeoTrie). La variable género no ha resultado influyente ni en el Pretest ni en el Postest.

Tabla 1. Media (M), desviación típica (DT) y Pruebas con SPSS para 106 estudiantes

	Puntuación			Sig. Asin. (bilateral)		
	N	*M*	*DT*	*Wilcoxon*	*U de Mann-Whitney*	*Kolmogorov-Smirnov*
Pretest	106	0,81	1,08			<0,001
Postest	106	2,56	2,23			<0,001
Pretest-Postest				<0,001		
Postest-Recurso					0,007	
Pretest-Género					0,464	
Postest-Género					0,852	

Vamos a profundizar en estos resultados comenzando por el pretest, cuya calificación media (sobre 5) para los que usaron solo manipulativos (N=84) fue de 0,79 y para los de RVI (N=22) fue de 0,82, siendo el porcentaje de estudiantes con calificación igual o superior a 2,5 del 10,71% y 13,64%, respectivamente. Las respuestas de los estudiantes ponían de relieve bastantes dificultades en relación a la superficie y el volumen de un ortoedro, que variaban en función de la formulación de la pregunta y de la imagen usada para representar la situación que en ella se planteaba.

En referencia a la magnitud superficie, en la pregunta 1, el enunciado no preguntaba de forma explícita por esta magnitud, sino que pedía a los estudiantes obtener justificadamente cuántos cuadrados de papel se necesitan para envolver la caja de la Figura 1.

La visualización de la caja permitió al 77,21% de los estudiantes responder correctamente, aunque el 37,97% de ellos obtuvo su respuesta contando cuadrados en la imagen.

En cuanto al volumen, en la pregunta 2, se les preguntaba por el número de cubos que pueden encajar en la caja de la Figura 2. Nuevamente sin alusión explícita al volumen en el enunciado. El 89,87% de los estudiantes respondió correctamente: el 40,51% multiplicó las 3 dimensiones de la caja y el 30,38% lo hizo contando los cubos que caben en una cara y multiplicando el resultado por la otra dimensión. Hasta aquí, los resultados eran más o menos los esperados, pero el análisis de las siguientes preguntas muestra otra panorámica más inquietante de sus conocimientos iniciales.

Figura 1. Caja de la pregunta 1 del pretest

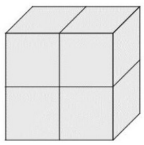
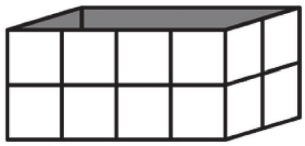
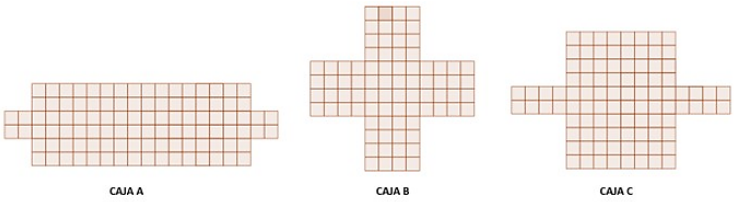


Figura 2. Caja de Pregunta 2 del pretest



La tercera pregunta les mostraba el desarrollo plano de tres cajas sin tapa, como muestra la Figura 3 y los estudiantes debían de responder justificadamente cuál de ellas tiene mayor volumen:

Figura 3. Cajas de la Pregunta 3 del pretest



Resulta preocupante que solamente el 12,87% de los estudiantes respondieran correctamente a esta pregunta (las 3 cajas tienen el mismo volumen), de los cuales únicamente el 7,92% justificó su respuesta. Pero hay un dato que contrasta con las respuestas de la pregunta 2 y es que, solo el 5,94% empleó la fórmula del volumen para obtenerlo, mientras que, en la pregunta anterior, el 40,51% de ellos la usaron para obtener el número de cubos. Es decir, se aprecia una falta de comprensión conceptual de la magnitud volumen en estos estudiantes, dado que asociaban el volumen de cada caja con el número de cubos que les caben dentro y, por ello, no aplicaron el mismo razonamiento ni la misma fórmula que usaron para resolver la pregunta 2. Entre los estudiantes que contestaron incorrectamente a la pregunta 3, el 29,70% no justificó su respuesta, siendo los errores más usuales: confundir volumen con superficie o fijarse en la superficie y considerar que a mayor superficie mayor volumen tendrá la caja (24,75% de los estudiantes), y no considerar las 3 dimensiones de cada caja (17,82%). Algunas respuestas de los estudiantes fueron:

E50: La caja A es la que mayor volumen tiene porque he contado los cuadros y es la que más tenía

E38: La A porque tiene más superficie de cuadrados

E85: Caja A, porque al cerrar sus extremos, al ser más largo, le coge más cantidad de líquido

De ello se deduce que, a pesar de haber respondido bien una o las dos primeras preguntas, en la tercera pregunta, en la que se les pregunta explícitamente por el volumen de ortoedros, más del 80% de los estudiantes tiene problemas para distinguir conceptualmente las magnitudes volumen y superficie o a la hora de visualizar las cajas a partir de su desarrollo plano.

En la cuarta pregunta debían resolver justificadamente el siguiente reto: ¿Puede haber 2 cajas que cumplan la condición de que una tenga más superficie que la otra, pero menos volumen? Solamente el 8,91% de los estudiantes respondieron y argumentaron correctamente, mientras que el 26,73% respondió con argumentos no concluyentes, que indicaban una ligera idea de cómo resolver el reto y el 19,8% respondió afirmativamente, pero sin justificación. El resto dieron una respuesta incorrecta (32,67%) o no contestaron al reto (11,88%). El error más frecuente fue considerar que el volumen depende de la superficie y, el argumento más repetido proponía reducir la base de la segunda caja y aumentar su altura para conseguir más superficie y menos volumen que la caja inicial. Para ilustrar algunos errores conceptuales de los estudiantes mostramos algunas de sus respuestas:

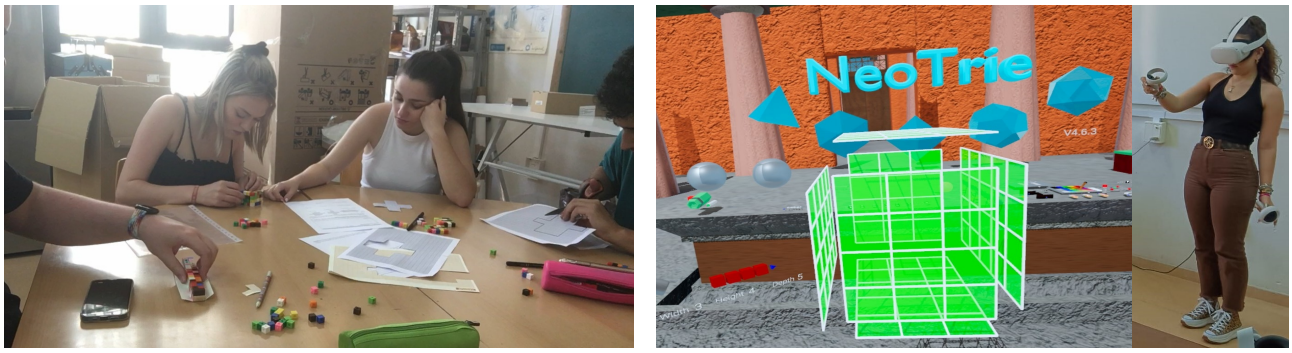
E59: No, porque el volumen depende de la superficie

E95: Yo creo que no, porque según la posición que tengan las cajas pueden ocupar distinta superficie manteniendo el mismo volumen

E96: Sí, ya que puede tener una superficie, pero el volumen depende del peso

El reto volvió a poner de relieve la deficiente comprensión conceptual que presentaba gran porcentaje de la muestra en relación a superficie y volumen, así como la confusión entre magnitudes. Si en las preguntas iniciales el porcentaje de acierto era mayor del 75%, en las dos últimas este porcentaje disminuyó hasta situarse por debajo del 15%. Este hecho provocó la realización en el aula de actividades con materiales manipulativos y con RVI (Figura 4) para trabajar la superficie y el volumen de ortoedros con sentido, en un intento de mejorar la competencia matemática de los estudiantes.

Figura 4. Imágenes de estudiantes trabajando con manipulativos (izquierda) y con NeoTrie (derecha)



Durante el taller práctico, los equipos de estudiantes contaban con centicubos y papel milimetrado para construir sus ortoedros y dibujar su desarrollo plano, que les permitía obtener razonadamente su volumen y su superficie. Los estudiantes con mayores dificultades necesitaron apoyar físicamente el ortoedro de centicubos sobre el papel milimetrado, calcar sus caras, recortar el desarrollo plano obtenido y comprobar que, efectivamente, envolvía totalmente a su ortoedro. Por otra parte, para resolver el reto, los 5 equipos seleccionados usaron NeoTrie en lugar de manipulativos. En NeoTrie comenzaron usando la herramienta ortoedro (el usuario introduce las 3 dimensiones y la herramienta crea las 6 caras que hay que unir para formar el ortoedro) pudiendo manipular las caras, comprobar su superficie individualmente, su superficie total y su volumen. Después, entraron en una escena que tenía dos ortoedros, cuyas dimensiones podían ser modificadas por los estudiantes permitiéndoles comprobar cómo las variaciones en una o varias dimensiones afectaban a su volumen y superficie.

Analizamos ahora las respuestas de los estudiantes al postest, diferenciando los resultados según el recurso empleado para el reto, dadas las diferencias significativas señaladas en los análisis estadísticos realizados con SPSS.

En el postest, para obtener el volumen de ortoedros de dimensiones conocidas, el 83,96% de la muestra aplicó correctamente la fórmula largo x ancho x alto, el 2,83% dio respuestas erróneas y el 13,21% no contestó. De los 22 estudiantes que usaron NeoTrie, 21 usaron correctamente la fórmula

del volumen, mientras que fueron 68 de los 84 que usaron manipulativos los que también la aplicaron de forma correcta. Es decir, en lo referente al volumen, la situación inicial mejoró notablemente.

Asimismo, en el postest, el 49,05% de los estudiantes consiguió hallar correctamente la superficie de varios ortoedros (hallando la superficie de las 3 caras diferentes, multiplicando cada resultado por dos y sumándolos). El 36,79% de la muestra siguió cometiendo errores al calcular la superficie y el 14,15% no contestó. Centrándonos en el recurso utilizado, hubo un 72,73% de acierto entre los que usaron NeoTrie y un 42,86% entre los que usaron manipulativos. Los errores más comunes fueron: considerar que todos los ortoedros son cubos (hallaron la superficie de una cara cualquiera y multiplicaron por 6 ese resultado para hallar la superficie total); calcular la superficie total sin tener en cuenta todas sus caras; y asumir que todos los ortoedros tienen 4 caras iguales y otras dos diferentes pero iguales entre sí (calcularon (superficie cara1) x 4 + (superficie cara2) x 2). Aunque cabía esperar una mayor fluidez procedimental en cuanto a cálculo de superficies, la instrucción de corte experimental realizada sí que se consiguió mejorar su comprensión conceptual y eliminar la confusión inicial de muchos estudiantes entre superficie y volumen.

En el postest, al igual que en el pretest y en el taller práctico, se les propuso el reto de obtener un ortoedro con mayor superficie y menor volumen que un ortoedro de dimensiones dadas. Si en el pretest, el 8,91% de los estudiantes respondieron y argumentaron correctamente, en el postest este porcentaje aumentó hasta el 47,17%. De la muestra, el 31,13% siguió dando una respuesta incorrecta y el 21,70% no contestó al reto. Si atendemos al recurso empleado durante el taller práctico, el 68,18% de los que usaron NeoTrie superaron el reto, el 27,27% dio una respuesta errónea y solamente el 4,55% no contestó al reto. En cambio, de los que usaron materiales manipulativos, el 41,67% superó el reto, el 32,14% respondió de forma incorrecta y el 26,19% no intentó el reto. Nuevamente, cabía esperar una mejora más significativa, pero muchos de los estudiantes calcularon mal la superficie de los ortoedros y, al hacerlo, creían que la caja que habían encontrado cumplía las condiciones del reto cuando en realidad no las satisfacía, siendo este el error más frecuente en el reto del postest.

De los análisis realizados a las respuestas del pretest y postest, distinguimos 5 niveles de mejora:

- Deficiente (D): Estudiantes con puntuación nula o muy baja tanto en pretest como en postest. De ellos, el 13,21% no contestan al postest y el 30,19% solo llegan a comprender qué es el volumen de un ortoedro y a calcularlo correctamente.
- Bajo (B): Comparando con el pretest, ahora ya son capaces de calcular correctamente el volumen y la superficie de un ortoedro, pero siguen sin resolver el reto (6,60% de la muestra).
- Medio (M): En el postest progresan en el reto, al aplicar una estrategia correcta que les permite obtener una caja que lo cumple, calculan correctamente el volumen, pero siguen teniendo errores de concepto al obtener la/s superficie/s (5,66% de los estudiantes).
- Satisfactorio (S): Partiendo de un pretest con calificación nula o muy baja, resuelve el postest correctamente, salvo por error/es de cálculo (1,89% de los estudiantes).
- Excelente (E): Partiendo de un pretest con calificación nula o muy baja, resuelve el postest correctamente sin ningún tipo de error (42,45% de la muestra).

Sintetizando lo anterior, en general, se observa una mejora significativa de la mitad de la muestra. Si ahora atendemos a la variable recurso, los niveles de mejora quedan como aparecen en la Tabla 2.

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes según nivel de mejora tras la experimentación (desde el pretest al postest)

	Nivel de mejora				
	D	*B*	*M*	*S*	*E*
Manipulativos	50,00	8,33	3,57	2,38	35,71
NeoTrie	18,18	0,00	13,64	0,00	68,18

Al observar la Tabla 2, se comprende la influencia de NeoTrie en los resultados del postest, señalada por los análisis estadísticos. Los manipulativos resultaron eficaces para ayudar a comprender conceptualmente la diferencia entre superficie y volumen así, como para inferir las fórmulas del volumen y superficie de un ortoedro. Sin embargo, fue en el reto donde NeoTrie resultó más potente al conseguir que más del 80% de los estudiantes que lo usaron comprendiera cómo resolver el reto, reforzando su capacidad de visualización y su fluidez procedimental. Las observaciones de la profesora-investigadora justifican este resultado debido a que el software brindó a los estudiantes la posibilidad de generar y visualizar de forma rápida múltiples ortoedros (variando sus dimensiones) y, a partir de ellos, pudieron testar conjeturas y razonar estrategia/s para resolver el reto planteado, siendo capaces de obtener diferentes respuestas. La fluidez procedimental con NeoTrie les permitió inducir estrategias como la de aumentar notablemente una dimensión y reducir considerablemente las otras dos; o aumentar ligeramente dos de las dimensiones del ortoedro y reducir mucho la otra, para conseguir otro ortoedro de más superficie y menos volumen (garantizando que el producto de sus 3 dimensiones fuese inferior al producto de las 3 dimensiones del primero); es decir, "alargar" o "aplastar" el primer ortoedro. Para los que usaron manipulativos, al no visualizar de forma dinámica cómo cambiaba la superficie y volumen de un ortoedro al modificar una o varias dimensiones, les costó más tiempo y esfuerzo resolver el reto y muchos de ellos consiguieron solo una solución.

CONCLUSIONES

La conclusión principal del estudio presentado es que, aunque el pretest puso de relieve muchos de los errores reportados por la literatura (Rupnow et al., 2022), el aprendizaje con sentido (experimentación frente a aritmetización) permitió a un muchos estudiantes de la muestra superar su dificultad previa para distinguir superficie y volumen en sólidos, inducir la fórmula del volumen y aplicarla correctamente en variadas situaciones y eliminar el preconcepto erróneo de que, cuerpos con mayor superficie también tienen mayor volumen. No obstante, a pesar de la experimentación con materiales manipulativos y con RVI, un porcentaje continuó manteniendo dificultades en relación a la superficie de ortoedros o para encontrar una estrategia adecuada para resolver el reto, planteado en diferentes momentos de la asignatura. Son varias las causas atribuibles a este último resultado, por un lado, el número de sesiones dedicado a estos contenidos puede haber sido insuficiente para derribar las preconcepciones erróneas de algunos estudiantes y favorecer un aprendizaje más significativo, por lo que sería recomendable dedicar más tiempo a estudiar estos contenidos en el grado de EP, pero ello contrasta con la poca presencia otorgada a las matemáticas en dicho grado. Por otro lado, para que el sistema educativo cuente con docentes cualificados es necesario el reclutamiento de candidatos altamente capacitados (Darling-Hammond, 2017), lo que dista bastante de la situación actual de acceso al grado en EP en España.

Otra conclusión del estudio es que los estudiantes que usaron RVI, partiendo de unos conocimientos iniciales escasos reflejados en sus pretests, sí que experimentaron, en su mayoría, un grado de mejora notorio, coincidiendo estos resultados con los encontrados por Demitriadou et al. (2020), Rodríguez et al. (2021) y Romero et al. (2023). Si bien el uso de manipulativos favoreció la comprensión conceptual de los contenidos trabajados, NeoTrie potenció aún más la competencia matemática de los estudiantes optimizando la fluidez procedimental, que les condujo a aumentar el número de soluciones correctas al reto y la inferencia de estrategias de resolución. Este resultado invita a seguir investigando la potencialidad del recurso.

Una reflexión final a la luz de los resultados es que los formadores de maestros debemos seguir indagando sobre formas más eficaces de enseñar y mejorar nuestra práctica docente, pero al mismo tiempo es crucial una revisión de los planes actuales de estudios y del sistema de acceso al grado de EP, para otorgar a las matemáticas la importancia que merecen y garantizar que la competencia matemática inicial de los futuros maestros sea la deseable y necesaria.

Referencias

Asensio, I., Arroyo, D., Ruiz-Lázaro, J., Sánchez-Munilla, M., Ruiz, C., Constante-Amores, A. y Navarro-Asencio, E. (2022). Perfil de acceso a la universidad de los maestros en España. *Educación XX1, 25*(2), 39-63. https://doi.org/10.5944/educxx1.31924.

Baduri, B. (2019) The Generalization Process of Secondary School Students on the Concept of Volume and Surface Area of Prism. In Farah, R. R., Rahayu, E. L., Inayati, N. (Eds.), *Advances in Social Science. Education and Humanities Research, 349*. [Proceedings of the 6th International Conference on Community Development (ICCD 2019)], pp. 103-107. Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/iccd-19.2019.29.

Caro, A., y Planas, N. (2021). Estudio exploratorio con futuras maestras sobre lenguas matemáticas para enseñar la relación entre área y volumen. *Avances de investigación en educación matemática, 19*, 117-131. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i19.361

Castro, M. (2021). Profesores para el siglo XXI: Perfil académico, formación inicial y prácticas docentes de los profesores españoles. Introducción. *Revista de Educación, 393*, 11-35. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2021-393-495.

Chiphambo, S. M., Mashologu, M. N. y Mtsi, N. (2020). Effect of physical manipulatives on learners' understanding of surface area and volume of prisms. In Motseke, M., Chitiyo, M., Ogbonnaya, U.I., Dada, O.C., Charles-Ogan, G. (Eds.), *Proceedings of the South Africa International Conference on Education (SAICEd)* (pp. 328-338). African Academic Research Forum. https://aa-rf.org/wa_files/saiced-2020proceedings.pdf.

Darling-Hammond, L. (2017). Teacher education around the world: What can we learn from international practice? *European Journal of Teacher Education, 40*(3), 291-309. https://doi.org/10.1080/02619768.2017.1315399

Demitriadou, E., Stavroulia, K. E. y Lanitis, A. (2020). Comparative evaluation of virtual and augmented reality for teaching mathematics in primary education. *Education and Information Technologies, 25*, 381-401. https://doi.org/10.1007/s10639-01909973-5.

National Research Council (2001). The strands of mathematical proficiency. En J. Kilpatrick, J. Swafford, y B. Findell (Eds.), *Adding it up: Helping children learn mathematics* (pp. 115-156). National Academies Press.

Kontas, H. (2016). The effect of manipulatives on mathematics achievement and attitudes of secondary school learners. *Journal of Education and Learning, 5*(3), 10 -20. https://doi.org/10.5539/jel.v5n3p10

López-Serentill, P. (2022). Categorización de los errores de los estudiantes para maestro de primaria en tareas de medida de magnitudes. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 363-371). SEIEM.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2012). *TEDS-M Informe Español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Secretaria General Técnica.

Nolla, A., Muñoz, R., Cerisola, A. y Fernández, B. (2021). La formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 96*(35.1), 185-208. https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.1.85882.

Rodríguez, J.L., Romero, I.M. y Codina, A. (2021). The Influence of NeoTrie VR's immersive virtual reality on teaching and learning of geometry. *Mathematics*, *9(19)*, 2411. https://doi.org/10.3390/math9192411.

Romero, I. M., Rodríguez-Martínez, J. A. y Rodríguez, J. L. (2023). Optimizing the surface of orthohedra with virtual reality in primary school. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(9), em2325. https://doi.org/10.29333/ejmste/13508.

Rupnow, T. J., O'Dell, J. R., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Clements, D. H., Sarama, J. y Rutherford, G. (2022). Children's construction of a volume calculation algorithm for a rectangular prism with a dynamic virtual manipulative. *The Journal of Mathematical Behavior, 67*, 100998. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100998.

REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS EN PAPEL DE ESTUDIANTES DE I5 SOBRE LA DESCOMPOSICIÓN DEL NÚMERO 7

Mathematical Representations on Paper by 4-6-year-old students about the Decomposition of the Number 7.

García-Triana B., Edo M. y Albarracín, L.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Este estudio tiene como objetivo identificar las ideas sobre la descomposición del número 7 expresadas por niños y niñas de 4-6 años a través de Representaciones Matemáticas en Papel. Siguiendo un paradigma cualitativo interpretativo, se recopilaron las Representaciones Matemáticas en Papel, durante tres años académicos consecutivos, elaboradas por los estudiantes de I5 en talleres dedicados a la descomposición del número 7. En total, se analizaron 126 Representaciones. Los resultados muestran que las ideas matemáticas que expresan los estudiantes en estas representaciones se clasifican en 9 subcategorías, lo que permite identificar una progresión detallada en el desarrollo del contenido matemático. Esta progresión brinda oportunidad para que los maestros de educación infantil puedan interpretar las representaciones realizadas por sus estudiantes y los investigadores profundicen en el tema.

Palabras clave: *representaciones Matemáticas en Papel, descomposición de números, educación infantil, página en blanco.*

Abstract

This study aims to identify the ideas about the decomposition of the number 7 expressed by 4-6 year-old boys and girls through Mathematical Representations on Paper. Following an interpretative qualitative paradigm, Mathematical Representations on Paper were collected, during three consecutive academic years, elaborated by I5 students in workshops dedicated to the decomposition of the number 7. In total, 126 Representations were analyzed. The results show that the mathematical ideas expressed by students in these representations are classified into 9 subcategories, which allows us to identify a detailed progression in the development of mathematical content. This progression provides an opportunity for early childhood teachers to interpret the representations made by their students and for researchers to delve deeper into the topic.

Keywords: *mathematical representations on paper, number decomposition, early childhood education, blank page.*

INTRODUCCIÓN

Los niños y niñas poseen conocimientos matemáticos antes de comenzar su educación formal. Sin embargo, en el entorno escolar, a menudo no se considera este conocimiento informal, provocando una desconexión y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Baroody, 1988). La escuela debe ofrecer oportunidades de aprendizaje, teniendo en cuenta las formas individualizadas en que los niños crean el significado de las ideas matemáticas. Una manera de lograrlo es mediante actividades abiertas, de exploración y experimentación que permitan a los estudiantes crear sus propios significados de los conceptos matemáticos y puedan tener un sentido real para ellos (Carruthers y Worthingthon, 2006; van Oers, 2010).

García-Triana, B., Edo, M. y Albarracín, L. (2024). Representaciones matemáticas en papel de estudiantes de I5 sobre la descomposición del número 7. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 265-272). SEIEM.

Varios organismos y autores (NCTM, 2003; Alsina y Coronata, 2014, entre otros) mencionan que para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es necesario relacionar los procesos y los contenidos matemáticos. Actualmente, en algunas prácticas escolares, esto no se contempla. En educación infantil, se emplean muchas hojas de trabajo con actividades de repetición y memorización, sin fomentar la expresión personal y la evolución del pensamiento matemático (Edo, 2005).

Los maestros deben comprender que para una enseñanza eficaz del concepto del número es necesario contemplar tanto los aspectos informales como los formales. Transmitir a los estudiantes que las matemáticas van más allá de aplicar algoritmos o copiar gráficos; por ello es necesario promover una comprensión profunda de los conceptos y la capacidad de resolver problemas de manera reflexiva (Edo, 2005; Salgado y Salinas, 2012).

Así, este estudio se sitúa en la continuidad de la línea de investigación sobre las representaciones matemáticas, complementando un trabajo previo que estableció un entendimiento general en este campo (García-Triana et al., 2024). La investigación actual se enfoca en una exploración más profunda, buscando expandir y enriquecer el conocimiento sobre las ideas de la descomposición del número 7 que expresan los niños y niñas de 4-6 años en las Representaciones Matemáticas en Papel. Promoviendo la representación matemática mediante la propuesta 'La página en blanco' (Edo y Marín, 2017).

MARCO TEÓRICO

La Representación Matemática en Papel

Diversos autores (Duval, 1993; Goldin y Shteingold, 2001; Carruthers y Worthingthon, 2006; van Oers, 2010; entre otros) han estudiado las representaciones y consideran que es un elemento importante para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones matemáticas son todas aquellas herramientas, como signos o gráficos, que hacen presentes los conceptos y procesos matemáticos y con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento matemático (Rico, 2009). Permiten a los estudiantes visualizar, manipular, conectar y comunicar ideas matemáticas a través de gráficos, tablas, modelos manipulativos y símbolos (NCTM, 2003).

En esta investigación nos centramos en las *Representaciones Matemáticas en Papel* (en adelante, Representaciones MP) entendiendo estas como las producciones que realizan los niños para representar y expresar sus ideas o conceptos matemáticos de forma visual, gráfica, simbólica o escrita que han plasmado en un papel sin el modelaje explícito de un adulto. Son ellos mismos quienes eligen y producen sus formas de expresión, escogiendo los trazos y los signos que consideran adecuados para comunicar sus ideas (García-Triana et al., 2024).

Se han realizado numerosas investigaciones (Bruner, 1966; Carruthers y Worthington, 2006; entre otros), centradas en las tipologías de marcas que registran los alumnos en las primeras edades y en los tipos de representaciones matemáticas que producen estos estudiantes. Reconocer los tipos de representaciones que los niños elaboran en una tarea matemática, permitirá a los maestros identificar las diferentes formas de pensamiento y los aspectos más importantes que toman en cuenta al trabajar determinadas nociones matemáticas. También nos permite establecer relaciones entre las habilidades que adquieren con la forma de representación que utilizan (Berciano et al., 2017).

Una forma para desarrollar la representación matemática personalizada en educación infantil es mediante el uso del instrumento 'La página en blanco' (Edo y Marín, 2017). Esta propuesta permite a los estudiantes crear sus propias representaciones bajo una consigna abierta. Para comprender el significado de las representaciones en grados iniciales, se requiere completar las representaciones gráficas con lo que los niños expresan verbalmente y así, mediante la comunicación gráfica y oral, el alumnado puede organizar su pensamiento y construir conocimientos matemáticos a partir de las experiencias que se viven en el aula.

La Descomposición del Número en Educación Infantil

La descomposición de un número se entiende como la acción de separar un todo en sus partes, permite a los niños comprender la relación parte-todo, un pilar fundamental en la aritmética. Esta comprensión, a su vez, facilita la composición de números, es decir, la acción de juntar partes para formar un todo. Dominar ambas habilidades, descomposición y composición, es crucial para que los niños construyan el concepto de número. (Castro et al., 2013).

Clements y Sarama (2015) mencionan que los niños desarrollan la competencia aritmética en la etapa de la educación infantil a través del uso de la composición y descomposición de números. En la Trayectoria de Aprendizaje–Composición de Número describen como los niños pueden pre-reconocer partes y totalidades de un número hasta comprender la composición de decenas y unidades.

El conocimiento del esquema parte-todo en matemáticas facilita la comprensión de la relación que hay entre números. Cada número se compone de números más pequeños, y cualquier número puede dividirse en diversos números cuya suma equivale al total (Bermejo, 2004). Entender esta relación es crucial para abordar problemas aditivos donde dos partes se suman para constituir un todo o se busca una parte conociendo el total y la otra (Castro y Castro, 2013).

La habilidad de composición y descomposición de números capacita a los niños para emplear diversas estrategias en la resolución de problemas numéricos, fomentando así el pensamiento matemático (Baroody, 2004). El NCTM (2003) establece que en los programas de enseñanza para la etapa de 3 a 5 años deberían capacitar a todos los estudiantes para reconocer equivalencias de números y producirlas mediante la composición y descomposición de números. Por lo tanto, la educación infantil tiene la responsabilidad de brindar oportunidad a los niños para trabajar estas habilidades que permiten la comprensión de las matemáticas en diversos contextos.

MÉTODO

Participantes y Contexto

El estudio se sitúa dentro del paradigma cualitativo interpretativo, se busca interpretar los datos para comprender las representaciones matemáticas y conocer aspectos del pensamiento matemático infantil. Los participantes del estudio son niños y niñas de entre 4 y 6 años que cursan I5 en educación infantil. La escuela donde se obtuvieron los datos se encuentra en Terrassa, Catalunya.

Instrumento y Procedimiento

En el estudio se utilizó el instrumento didáctico ‘La página en blanco’ como instrumento de recogida de datos. Propuesta creada por Edo y Marín (2017) que sirve para realizar representaciones personales, en las que cada alumno elige qué quiere representar del taller que acaban de participar y cómo quiere hacerlo. Consiste en proporcionar a cada estudiante una hoja toda en blanco y un rotulador negro. Se les da una consigna abierta, como, ¿quieres explicar qué hemos hecho hoy?, para que los estimule a seleccionar, comunicar y compartir las soluciones que ha encontrado a las situaciones abordadas durante una sesión, o bien, para explicar lo que han aprendido en ella, usando dibujos, palabras, números, esquemas, operaciones, etc., es decir, el tipo de marcas que ellos deseen.

Los datos de este estudio provienen de una situación elaborada por Innovamat. En la escuela se realizan dos talleres de trabajo del contenido matemático de la descomposición del número siete.

Taller 1 (T1). Se centra en la identificación de parejas que suman 7 mediante un juego de puntería. Los alumnos lanzan 7 patos de goma a una caja, anotando sus puntuaciones. Al finalizar el juego, se les entrega el instrumento ‘La página en blanco’. Se les da la consigna abierta: *“¿Quieres contarnos qué habéis hecho hoy?”,* la cual les permite representar de la manera que deseen lo que han vivido durante la actividad. Al finalizar, cada alumno pasa con la investigadora y explica verbalmente lo representado en su hoja.

Taller 2 (T2). Los alumnos buscaban diferentes maneras de descomponer el número 7 en dos sumandos. Para ello, usan las puntuaciones del Taller 1 como referencia y materiales contables y cartas con números. Para finalizar el taller, se les entrega 'La página en blanco' y un rotulador negro con la consigna abierta: *"¿Quieres contarnos qué habéis hecho hoy?"*. Al terminar la representación, cada alumno pasaba con la investigadora y explicaba verbalmente su representación.

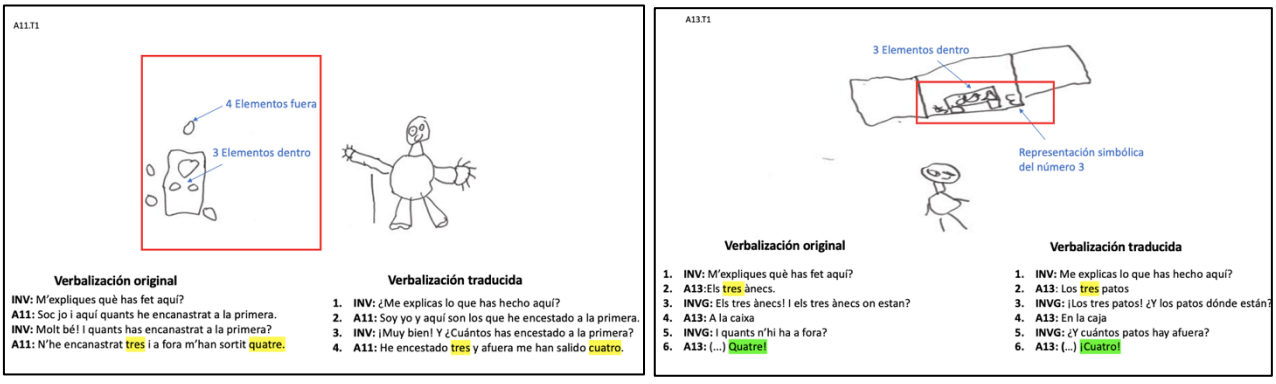
El investigador adoptó un rol de observador durante los talleres, sin intervenir en su diseño o aplicación. Se observó el comportamiento de los alumnos mientras participaban en las actividades y, posteriormente, se les entrevistó para complementar sus representaciones. Los datos utilizados para este estudio son 126 representaciones realizadas por los alumnos en 'La página en blanco', así como las transcripciones de las explicaciones orales que proporcionaron sobre sus representaciones. Los datos se recopilaron durante los cursos 2021-2022, 2022-2023 y 2023-2024. Los talleres los dirigió la misma maestra en los tres cursos.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Se analizó el contenido matemático presente en cada una de las Representaciones MP y sus verbalizaciones. Primero, se identifican el tipo de marcas: elementos pictográficos (dibujos), simbólicos escritos (palabras o frases) o simbólicos matemáticos (números o signos) de la Representación MP que muestran alguna descomposición o una parte y/o el todo de esta. Después se revisó la verbalización para comprender el significado de los elementos representados. Luego, se crearon 4 grandes categorías de Representaciones MP. Estas categorías parten de un análisis de literatura que se hizo sobre las ideas de la trayectoria de aprendizaje de Clements y Sarama (2015) entre otros, respecto al tema de composición de número. Posteriormente, se revisaron y afinaron estas categorías, creando así 9 subcategorías.

En la Figura 1 se presentan dos ejemplos del análisis de las Representaciones MP. En el primero se destaca en el recuadro en rojo los elementos que representan los patos que están dentro y fuera de la caja. Esta representación se ubica en la categoría: *Descomposiciones*, subcategoría *Representan una descomposición del número 7*. Al leer su verbalización se comprueba que el alumno indica que había encestado tres y afuera tenía cuatro, lo que confirma la descomposición identificada.

Figura 1. Ejemplo 1 y Ejemplo 2 de análisis de Representación MP



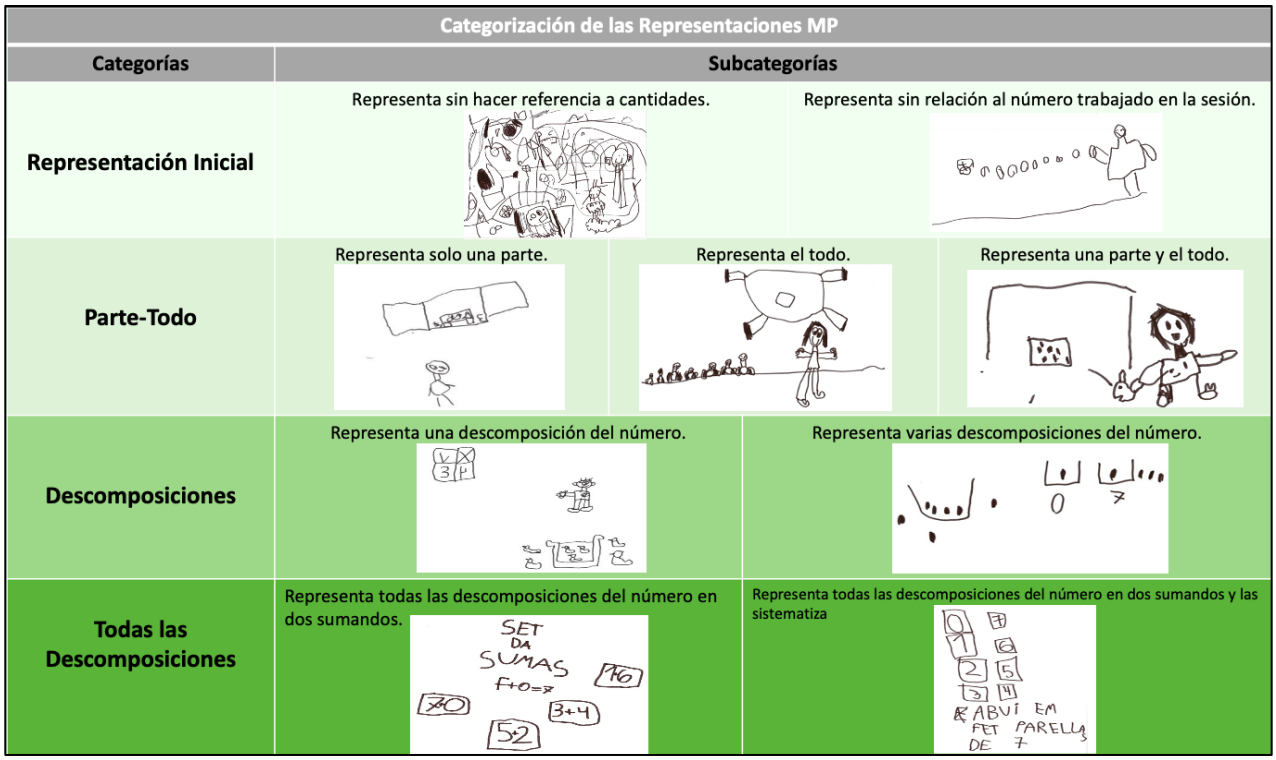
En el ejemplo 2 se muestra una representación que contiene el dibujo de tres patos y a su lado, la representación simbólica del número 3. Al dar la explicación el estudiante menciona que son los tres patos que están dentro de la caja. Cuando se le hace la pregunta de cuántos quedarían afuera, él responde que cuatro, pero al no estar representados en el papel, esta representación se ubica en la categoría: *Parte-Todo* y forma parte de la subcategoría: *Representa solo una parte*.

En cada una de las 126 Representaciones MP se realiza este procedimiento de análisis, tratando de identificar elementos relacionados con el contenido matemático de la descomposición del número. Después se definieron cada categoría y subcategoría y se establecieron sus indicadores, dando como resultado la siguiente categorización de las Representaciones MP.

Categorización de las Representaciones MP

En este apartado se presentan de forma sintética todas las categorías y subcategorías identificadas en las producciones analizadas. La figura 2 muestra un ejemplo representativo de cada una de ellas.

Figura 2. Categorías y ejemplos de las Representaciones MP



Categoría I: *Representación inicial:* Incluye las representaciones que no hacen referencia a la actividad realizada, o las que no aparece la cantidad trabajada en la sesión. Esta categoría se divide en dos subcategorías:

Representa sin hacer referencia a cantidades: Son las representaciones que no contienen marcas relacionadas con el contenido de la sesión, o bien, se relacionan con la sesión, pero no aparece ninguna cantidad.

Representa cantidades sin relación al contenido de la sesión: Son las representaciones que contienen cantidades, sin relación con el número de referencia.

Categoría II: *Parte-todo:* Incluye las representaciones en las que en relación con el contenido matemático se puede apreciar una parte y/o el todo que compone el número de referencia sin llegar a expresar ninguna descomposición completa. Esta categoría se divide en las siguientes subcategorías:

Representa solo una parte: Son las representaciones en las que contiene únicamente una de las partes del número de referencia.

Representa el todo: Son las representaciones en las que contiene únicamente la cantidad total del número de referencia.

Representa una parte y el todo: Son las representaciones que contienen una parte y el todo del número de referencia, sin llegar a expresar toda la descomposición.

Categoría III: *Descomposiciones:* Incluye las representaciones en las que se aparece alguna descomposición del número de referencia, pero no todas. Se dividen en las siguientes subcategorías:

Representa una descomposición: Son las representaciones que contienen una descomposición de cantidades o números que componen el número de referencia.

Representa varias descomposiciones: Son las representaciones que contienen dos o más descomposiciones del número de referencia, pero no todas.

Categoría IV: *Todas las descomposiciones:* Incluye las representaciones que tengan todas las descomposiciones en dos sumandos del número de referencia. Se dividen en las siguientes subcategorías:

Representa todas las descomposiciones: Son las representaciones que contienen las descomposiciones básicas sin evidencias de sistematización.

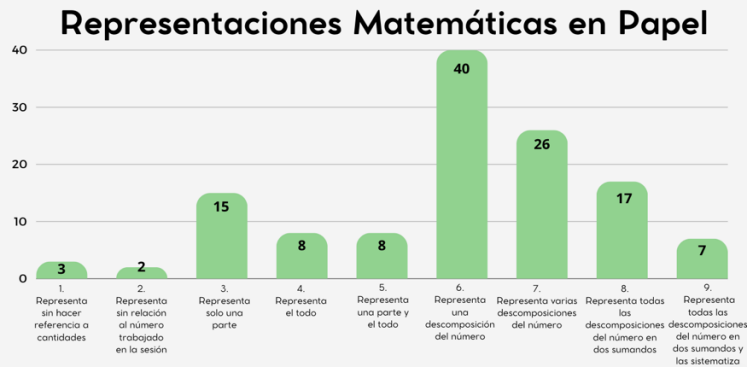
Representa todas las descomposiciones y las sistematiza: Son las representaciones que contienen las descomposiciones básicas en dos sumandos, se presentan de forma organizada y se argumenta porque están todas. Se puede apreciar que identifican el patrón de acomodar los sumandos de manera ascendente y descendente para encontrar todas las descomposiciones.

Resultados

A partir del análisis de los datos se han encontrado los siguientes resultados.

En la Figura 3 se presenta una clasificación de las 126 Representaciones MP según su contenido matemático. La categoría más frecuente (40) es Representaciones con una descomposición del número 7. En estas los estudiantes expresaron con el tipo de marcas de su elección una descomposición del número 7. A continuación, se encuentran las Representaciones que expresan varias descomposiciones (26). Seguidamente, están las Representaciones que contienen todas las descomposiciones del número 7 en dos sumandos (17). También hay 15 Representaciones en las que solo se encuentra una parte de la descomposición. En las subcategorías se Representa el todo y se Representa una parte y el todo se encontraron 8 representaciones en cada una de ellas. Hubo 7 representaciones en las que se encontraron Todas las descomposiciones y las sistematizaron. Solo 3 de las 126 representaciones No hacen referencia a cantidades. Del total de las representaciones, solo dos contienen cantidades que No tienen relación con el número trabajado en la sesión.

Figura 3. Resultados del análisis de las Representaciones MP



Los resultados muestran que más del 70% de las representaciones contienen una o más descomposiciones del 7 (objetivo didáctico), pero el gráfico nos muestra además la diversidad de ideas sobre este contenido matemático y eso brinda al docente una valiosa información que le permite conocer las ideas de cada alumno en un momento concreto (objetivo de esta investigación).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se destaca la relevancia de las Representaciones MP que los niños de educación infantil crean para expresar sus ideas en relación con un contenido matemático. Coincidimos con autores, como Carruthers y Worthington, 2006; van Oers, 2010, en que los niños y niñas eligen diferentes marcas para comunicarse, ya sean palabras, números o dibujos y si se les da la oportunidad de realizar representaciones con consignas abiertas, esto les permite usar sus conocimientos informales y acercarse al simbolismo abstracto de las matemáticas según su nivel de desarrollo.

Atendiendo a nuestro objetivo, encontramos que los estudiantes en sus representaciones al tratar el contenido de la descomposición del número 7, realizan Representaciones sin referencia a cantidades, Representan cantidades sin relación al contenido de la sesión, Representan solo una parte, Representa el todo, Representa la parte y el todo, Representa una descomposición, Representa varias descomposiciones, Representa todas las descomposiciones, Representa todas las descomposiciones y las sistematizan. Estas categorías muestran nuevos matices no detectados en investigaciones anteriores (García-Triana et al., 2024), especialmente en la parte-todo. Con estas nuevas aportaciones, podemos comprender mejor la evolución de sus ideas y las posibles dificultades al resolver una demanda con consigna abierta sobre este tema.

Estamos de acuerdo con Acosta y Alsina (2019) en relación a que cuanto más próximo y familiar es el entorno educativo, más precisas y libres son las representaciones creadas por los participantes. Concordamos con Muñoz-Catalán et al. (2023) que, para la enseñanza efectiva de la descomposición aditiva, en nuestro caso del número 7, es necesario que los docentes conozcan recursos adecuados, diseñen una secuencia didáctica coherente, comprendan los intereses de los estudiantes, conozcan diversas representaciones de la descomposición aditiva y sepan que la descomposición aditiva se basa en el esquema parte-todo y que las situaciones de combinación la refuerzan.

Coincidimos con autores como, Baroody, 1988; Carruthers y Worthingthon, 2006; Edo, 2005; Salgado y Salinas, 2012, en que iniciar el aprendizaje de la descomposición de los números mediante la parte formal no es el camino adecuado. Es necesario ofrecer un contexto significativo informal, por ejemplo, partiendo de un juego y guiarlos a analizar sus puntuaciones, así como brindarles la oportunidad de que puedan representar lo vivido para comunicar las ideas matemáticas que están construyendo. Permitir a los alumnos expresar su conocimiento y acompañarlos, paso a paso, a descubrir el uso de los registros más formales es una secuencia de aprendizaje respetuosa con los ritmos madurativos de cada alumno a la vez que eficaz (van Oers, 2010). En este estudio comprobamos que 'La página en blanco' es una herramienta que promueve la secuencia didáctica descrita; que facilita al docente la identificación de las ideas matemáticas expresadas por sus alumnos y que le permite identificar una progresión detallada del desarrollo del contenido matemático.

Es fundamental destacar la necesidad de llevar a cabo investigaciones adicionales para profundizar y comprender la tipología de representaciones que los estudiantes crean al abordar el contenido de la descomposición de números. Además, es crucial explorar si estas categorías pueden ser extrapoladas a la descomposición de otros números, especialmente aquellos inferiores a 10.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, À. (2019). La representación de patrones en Educación Infantil: una primera aproximación con alumnos de 4 años. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 153-162). Valladolid: SEIEM.

Alsina, À. y Coronata, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *3(*2), 21-34. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2014.23-36

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. MEC y Visor Libros.

Baroody, A. J. (2004). The developmental bases for early childhood number and operations standards. In D. H. Clements y J. Sarama (Eds.), *Engaging young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 173-220). Erlbaum.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Kindergartners' Use of Symbols in the Semiotic Representation of 3-Dimensional Changes. *IEJME Mathematics Education*, 12(4), 311-331.

Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Editorial CCS.

Bruner, J.S. (1966). *Toward a theory of instruction*. The Belknap Press – Harvard University Press, Cambridge.

Carruthers, E. y Worthington, M. (2006). *Children's mathematics: Making marks, making meaning (2º ed.)*. Paul Chapman Publishing. https://doi.org/10.4135/9781446213780

Castro, E., Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 1-11. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2013.1-11

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2013). La relación parte-todo. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 85-92). Comares. https://doi.org/10.36006/09094

Clements, H.D. y Sarama, J. (2015). El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad. Learning Tools LLC.

Duval, R. (1993). Semiosis et Noesis. En *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa*. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Edo, M. (2005). Educación matemática versus Instrucción matemática en Infantil. En P. Pequito, A. Pinheiro (Eds.) *Actas do I Congresso Internacional de Aprendizagem na Educação de Infância-CIANEI* (pp. 125-137). Gailivro.

Edo, M. y Marín, A. (2017). La hoja en blanco en la representación matemática en infantil. En J. Gairín e I. Vizcaíno. *Manual de Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (pp.1-17). Wolters Kluwer.

García-Triana, B., Edo Basté, M. y Sala-Sebastià, G. (2024). Representaciones matemáticas en papel de la descomposición del número 7 en educación infantil. *Educación Matemática*, *36*(1), 9–40. https://doi.org/10.24844/em3601.01

Goldin, G. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A.A. Cuoco y F.R. Curcio, (Eds.) *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook* (pp. 1-23). National Council of Teachers of Mathematics.

Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M., Joglar-Prieto, N. y Ramírez-García, M. (2023). Conocimiento especializado de una maestra de Educación Infantil: la descomposición aditiva del número 6. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 403–410). SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Salgado, M. y Salinas, M. (2012). El razonamiento inductivo como generador de la construcción del número en 5 años. En Arnau, D., Lupiáñez, J. L. y Maz, A. (Eds.). (2012). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012*. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de Universitat de Valencia y SEIEM.

van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics, 74*, 23-37. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9225-x

Vanegas, Y., Prat, M. y Edo, M. (2022). Representaciones matemáticas de niños y niñas de 5-6 años cuando resuelven un problema abierto. *Alteridad, Revista de Educación, 17*(2), 180-193. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.02

TENDENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: EXPLORANDO LA RELACIÓN ENTRE EL PERFIL DEL PROFESORADO Y LA PERCEPCIÓN DE LA FORMACIÓN EN ENSEÑANZA SECUNDARIA

Trends in Mathematics Education: exploring the relationship between teacher profiles and perceptions about teacher training in Secondary Education

Garrido-Rojas, J., Moreno, A. y Ruiz-Hidalgo, J.F.

Universidad de Granada

Resumen

Este estudio se centra en la relación entre el perfil del profesorado de Matemáticas de secundaria y su percepción de la formación como parte de la construcción de su identidad profesional. Se destaca la disminución en la cantidad de egresados en Matemáticas que optan por la docencia, lo que plantea preocupaciones sobre la calidad de la formación del profesorado. Se analizan datos de una encuesta respondida por 401 docentes de Matemáticas de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Los resultados revelan asociaciones estadísticamente significativas entre la titulación del profesorado y variables como la edad, la percepción de la formación inicial, experiencia profesional, situación administrativa y realización del Máster de Profesorado. Este estudio proporciona información relevante sobre la formación y el perfil del profesorado de Matemáticas en el contexto de la enseñanza secundaria.

Palabras clave: *didáctica matemática, formación continua, formación docente, formación inicial del profesorado, máster de secundaria.*

Abstract

This study focuses on the relationship between the profile of Secondary Mathematics teachers and their perception of teacher training as part of the construction of their professional identity. We highlight the decrease in the number of Mathematics graduates who choice teaching, which raises issues about the quality of teacher training. We analyze data taken from 401 teachers of Mathematics in Secondary Education. Results reveal statistically significant associations among teacher studies and variables such as age, perception of initial training, professional experience, administrative status and completion of Secondary Master's degree. This study provides relevant information on the training and profile of Mathematics teachers in the context of secondary education.

Keywords: *didactic of mathematics, continuing education, teacher training, preservice teacher training, Master's Degree in Secondary Education.*

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones ponen de manifiesto que la educación matemática es uno de los ejes fundamentales en los que se está basando el éxito educativo de un país y que este deriva, en gran medida, de la excelencia de sus docentes y planes de formación (Garrido, 2015). Por tanto, el conocimiento del perfil del profesorado de matemáticas de Enseñanza Secundaria es especialmente relevante, más aún cuando se están produciendo cambios significativos en los accesos a la función docente en los últimos años. Entre estos, destaca la disminución de los egresados del Grado de Matemáticas que se decantan por la docencia. Entre los años 1999 y 2003, el 34,38% de los

Garrido-Rojas, J., Moreno, A. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2024). Tendencias en Educación Matemática: explorando la relación entre el perfil del profesorado y la percepción de la formación en Enseñanza Secundaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 273-280). SEIEM.

matemáticos egresados de universidades andaluzas se dedicaban a la docencia no universitaria, estando la media nacional en 32,31%, según los datos consultados en el *Libro Blanco de la Titulación de Matemáticas del Programa de Convergencia Europea* de la RSME (ANECA, 2005). Dos décadas después, el porcentaje ha caído al 16,10% a nivel nacional.

Entre las conclusiones de Martín de Diego (2020) se subraya que el mejor conocimiento de la materia que cabría esperar del profesorado de matemáticas de secundaria frente a los de primaria se desdibuja cada vez más, llegando a la docencia titulados que no tienen por qué tener un dominio sólido del contenido que deben enseñar.

Estas carencias dan lugar a propuestas de mejora dirigidas a este profesorado, que se centran generalmente en actuaciones en el Grado en Matemáticas. Por citar un ejemplo, el documento elaborado por SEIEM (2022), sugiere cambios en dicho Grado (propuesta PR4) cuando aborda la necesidad de reformar la oferta de asignaturas de contenido relacionado con la didáctica de la matemática. Por tanto, tener información sobre los perfiles actuales de los docentes de matemáticas de secundaria y bachillerato, en particular en lo referido al desarrollo profesional, interesa especialmente a quienes se benefician principalmente del conocimiento producido en dicha investigación: el profesorado y quienes forman al profesorado (Cardeñoso et al., 2001).

No en vano, numerosos estudios señalan que el problema para el diseño de los planes de estudios del Máster de Profesorado de Enseñanza Secundaria (en adelante MAES) radica en la heterogeneidad de conocimientos matemáticos del alumnado que accede, derivada del sistema no homogéneo de selección a la especialidad (Font, 2013; Muñiz-Rodríguez et al., 2016). En opinión de algunos de estos autores, debería establecerse una prueba de acceso estandarizada con base a las competencias matemáticas para minimizar las diferencias que se dan entre las distintas universidades (Muñiz-Rodríguez et al., 2017). Tal disparidad de criterios en el acceso al MAES se pone de manifiesto en que, aunque hay consenso en la aceptación de titulaciones del área de Matemáticas, Estadística, Ciencias Físicas, Ingeniería, Industria y Construcción, se producen grandes variaciones en referencia a otras licenciaturas y grados tales como Informática, Ciencias Sociales, Comercio y Derecho llegando a admitirse, en algunos casos, licenciados y graduados en Humanidades y Artes, Ciencias de la Vida, Agricultura o Salud y Servicios Sociales (Muñiz-Rodríguez et al., 2016).

Los resultados que se presentan en los apartados siguientes forman parte de un estudio más amplio cuya finalidad es identificar la relación, si existe, entre el perfil del profesorado de Matemáticas de Secundaria y su valoración de la formación recibida como parte de la construcción de su identidad profesional. En el caso de esta comunicación, su objetivo es conocer la relación entre el perfil de los encuestados y su percepción de la idoneidad de la formación inicial recibida, tanto didáctica como matemática.

ANTECEDENTES

Numerosas investigaciones han puesto de manifiesto la complejidad de la formación inicial del profesorado de matemáticas y destacan la necesidad de profundizar en el diseño y desarrollo de sus planes de formación (Gómez, 2009). Por ello resulta interesante conocer la opinión de los receptores de la formación sobre la adecuación de esta a las necesidades del ejercicio profesional.

El profesorado puede tener fortalezas y debilidades en su instrucción (Halpin y Kieffer, 2015), reflejándose en la calidad de la enseñanza que imparten. Es de suponer que todo el profesorado combina variables de calidad docente respecto a sus creencias, mostrando diferentes perfiles profesionales (Holzberger et al., 2019). Sin embargo, de acuerdo con los mismos autores, investigaciones previas no aclaran la existencia de estos perfiles y su influencia en la calidad de la docencia. Por tanto, éste es un interesante campo de estudio por explorar.

En España, se han realizado algunos estudios sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas. En 2008, el estudio *Teacher Education and Developement Study in Mathematics*

(TEDS-M) fue el primero a nivel internacional que puso el foco en el profesorado de matemáticas, aunque se centró en los futuros maestros.

Ya hablando de secundaria, destacan las aportaciones de Buendía et al. (2011), Estebaranz (2015), Valdés et al. (2015), o el de Muñiz-Rodríguez et al. (2016). En el primero de ellos se concluye que no hay proporcionalidad entre la importancia de la competencia profesional y la formación que se recibe para adquirirla, por lo que Buendía et al. (2011) concluyen que es imprescindible un rediseño de la metodología empleada en la formación basándose en el aprendizaje por competencias.

El trabajo de Estebaranz (2015, p. 169), considera que el "sistema no puede quedar inamovible ante los problemas de ineficacia" de nuestro sistema educativo, entendiendo que la formación del profesorado debe ser responsabilidad de las facultades de educación. Hay que tener en cuenta que estos estudios se realizaron cuando aún era reciente la implantación del máster de profesorado. Valdés et al. (2015) reconoce esta debilidad en su estudio, aunque valora positivamente el esfuerzo del sistema español para implantarlo en aras de mejorar la calidad de la enseñanza del profesorado.

En líneas generales, como conclusión, los estudios consultados detectan carencias en el máster de profesorado, pero reconocen "el enorme potencial que esa modalidad de formación tiene para la mejora de la calidad de los profesores de la educación secundaria" (Valdés et al., 2015, p. 25).

Este estudio se limita a la formación reglada ya que los cursos que organizan las asociaciones de profesionales quedan fuera de nuestro alcance.

METODOLOGÍA

Se presentan los resultados de un estudio cuantitativo realizado con base en los datos recogidos a través de una encuesta que ha sido respondida por un total de 401 docentes de matemáticas. La elección de este método de recogida de datos, atendiendo a Cohen et al. (2018) es el más empleado en investigación educativa, pudiéndose utilizar para describir las condiciones existentes, en nuestro caso el perfil del profesorado de matemáticas de ESO y Bachillerato.

Para la elaboración de las categorías de estudio se han utilizado las de García-Longoria y Blanco (2005). Estas categorías se establecieron para el estudio del profesorado de matemáticas de secundaria de Extremadura estando vigentes la antigua licenciatura en matemáticas y el Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP). A partir de ellas, se han actualizado a los estudios vigentes y reordenado en cinco epígrafes, correspondientes a datos personales, formación de base, máster de profesorado, otra formación y desarrollo profesional. Suman un total de 28 preguntas que dan origen a 35 variables, ya que algunas de ellas incluyen varios apartados.

De acuerdo con Holzberger et al. (2019), este trabajo se encuadra en los llamados estudios centrados en la persona, realizando lo que estos autores denominan perfil latente, que permite identificar grupos naturales dentro de diferentes patrones de relación entre las variables incluidas.

Población y muestra

La población de referencia está formada por los profesores de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato de Andalucía, que desarrollan su profesión en centros públicos y privados (concertados y no concertados). Se distribuyó el cuestionario por correo electrónico a las direcciones corporativas de todos los centros andaluces, solicitando su reenvío a los miembros de los departamentos de matemáticas. En consecuencia, el tamaño de la muestra dependió de diferentes factores como la transmisión de la información dentro del propio centro y la disponibilidad y voluntad del profesorado, por lo que es una muestra puramente intencional. Técnicamente hablando, se trata de un muestreo de conveniencia o accidental, atendiendo a la clasificación de Cohen et al. (2018). Finalmente, el tamaño de la muestra fue de 401 cuestionarios recibidos.

Método de análisis

Las variables del cuestionario, de naturaleza nominal y ordinal, permiten realizar la prueba de hipótesis $\chi 2$ de Pearson. Dentro de este análisis, mediante la prueba de distribución, se comprueba si las frecuencias que se observan en la muestra difieren de las que cabría esperar. De este modo, se comparan las frecuencias observadas con las esperadas y se examinan sus desviaciones. Esto permite comprobar si las frecuencias de los valores característicos individuales de la muestra se corresponden con las de una distribución definida que, en la mayoría de los casos, es la población de estudio.

Por otro lado, la prueba de independencia determina si dos variables categóricas son independientes entre sí. Así, se puede analizar si los valores característicos de la primera variable están influenciados por los valores característicos de la segunda, y viceversa. Esta se centra en la prueba de independencia realizada sobre 3 de las variables analizadas: titulación, suficiencia de la formación y realización del máster de profesorado. Para cada una de ellas, se ha calculado el valor p al compararlas con las restantes variables. El valor p mide la evidencia contra la hipótesis nula, que dice que no existe asociación entre dos variables. Valores más bajos de p proporcionan evidencias más fuertes en contra de la hipótesis nula. En este estudio se ha utilizado un nivel de significancia de 0,05 esto es, en los casos en que el valor p sea igual o inferior a 0,05, se concluye que hay asociación estadísticamente significativa entre ambas variables.

Para el análisis de resultados se ha empleado la herramienta informática IBM SPSS Statistics 20.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para facilitar la presentación de los datos, en las tablas de los apartados siguientes se han sustituido las variables de la encuesta por su codificación, que responde al criterio que se muestra en la Tabla 1:

Tabla 1. Codificación de las preguntas del cuestionario

Código	Variable
1	Edad
2	Sexo
3	Indique su titulación universitaria
4	¿Cuál fue el motivo principal por el que eligió su carrera?
5	Con su experiencia, ¿volvería a elegir de nuevo esa carrera?
7	Explique si ha cursado otros estudios universitarios
8	¿Cree que su formación inicial es suficiente para su trabajo?
9	¿Cree que habría que ampliar la formación didáctica de los profesores de matemáticas?
10	¿Cuándo cree conveniente que se desarrolle la formación didáctica?
11	Desde su experiencia, ¿cuándo deberían realizarse las prácticas?
12	¿Ha realizado el Máster de Profesorado (MAES)?
13	Indique en qué modalidad
14	¿Considera suficiente el tiempo dedicado a las prácticas en el MAES?
15	Indique la presencia en el centro que le parece más adecuada para las prácticas
16	¿Cómo considera que deberían ser las prácticas?
29	Indique su experiencia profesional
30	¿En qué tipo de centro trabaja actualmente?
31	¿Cómo accedió a su primer trabajo como docente?
32	Indique su situación administrativa actual
33	Indique los problemas que con más frecuencia se ha encontrado en su profesión

Titulación

Las titulaciones de los encuestados (variable 3) se han clasificado en tres grandes grupos: En primer lugar, el grupo A, mayoritario, son licenciados y graduados en matemáticas. El grupo B lo forman

ingenieros y arquitectos, mientras que el grupo C está formado por el resto de titulados y graduados (ciencias físicas, químicas, biológicas, etc.)

El valor *p* resultante de comparar la variable 3 correspondiente a la titulación con el resto de variables se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. *p*-valor al comparar la titulación con el resto de variables

Variable	1	2	4	5	7	8	9	10	11	12
p-valor	0,000	0,241	0,000	0,000	0,267	0,465	0,521	0,000	0,000	0,000
Variable	13	14	15	16	29	30	31	32	33	
p-valor	0,071	0,144	0,525	0,250	0,000	0,000	0,000	0,000	0,079	

A la vista de estos resultados, se puede concluir que existe una relación estadísticamente significativa entre la titulación de los encuestados y las variables 1, 4, 5, 10, 11, 12, 29, 30, 31 y 32. Algunas de estas asociaciones se habían puesto ya de manifiesto en el análisis previo (Garrido-Rojas y Moreno, 2024). En efecto, la titulación y la edad están relacionadas, ya que los licenciados y graduados en matemáticas son mayoría solo cuando se superan los 40 años de edad, mientras que el resto de titulaciones, en especial ingenieros y arquitectos, lo son en edades inferiores a ese valor. Del mismo modo, las variables 4 y 5 arrojan un alto nivel de dependencia, ya que solo los matemáticos eligieron su carrera mayoritariamente porque querían ser profesores (mientras que el resto la eligió por las salidas profesionales, diferentes a la docencia) y, lógicamente, solo ellos volverían a repetir sus estudios, ya que para los grupos B y C no se cumplieron sus expectativas.

El grupo de variables 10, 11 y 12, que también presentan alto grado de dependencia, están relacionadas con cuándo consideran adecuado que se realice la formación didáctica, las prácticas en centros educativos, y si han realizado el MAES. Esto se debe a que solo los matemáticos contemplan la posibilidad de que la formación didáctica y las prácticas se realicen en los estudios de grado. Es lógico pensar, y así se refleja en el análisis estadístico, que el resto de titulaciones consideren que dicha formación debe realizarse en unos estudios de posgrado tipo MAES, ya que sus estudios de base no están enfocados a la docencia. Igualmente, al ser los matemáticos mayoría en la franja de edad a partir de los 40 años, son los que realizaron el Curso de Aptitud Pedagógica (CAP) en mayor porcentaje, mientras que el resto de titulaciones, dada su reciente incorporación, realizó el MAES, implantado en 2009 (un 80,41% en el grupo de ingenieros y arquitectos).

La siguiente sección de preguntas en las que se encuentra asociación estadísticamente significativa con la titulación de acceso son la 29, 30, 31 y 32. En el caso de la 29, la titulación está relacionada con la experiencia profesional debido a que los licenciados y graduados en matemáticas son los que cuentan con mayor antigüedad, dado que el resto de titulaciones son de más reciente penetración en la docencia. Dado que los matemáticos son también los que acceden a la profesión mayoritariamente de forma directa a través de oposiciones, su titulación se relaciona con la variable 30, referida al tipo de centro en el que trabajan los encuestados (en su caso centros públicos), y la pregunta 31, sobre la forma en que accedieron a la docencia. Los restantes grupos accedieron en su mayoría a través de bolsas de interinos o contratos privados. En consecuencia, en base a la variable 31, la mayoría de funcionarios son del grupo A (variable 32).

Por último, en la variable 33 referida a la problemática en el aula (sobre contenidos matemáticos, de disciplina, comprensión o falta de interés del alumnado), no se ha detectado relación estadísticamente significativa con la titulación de los encuestados, siendo este un resultado que no se había puesto de manifiesto en el análisis inicial de los datos (Garrido-Rojas y Moreno, 2024).

Suficiencia de la formación

Las respuestas a la pregunta 8, ¿Cree que su formación inicial es suficiente para el trabajo que desarrolla?, se ha comparado con las demás variables resultando los *p*-valores que se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. *p*-valor al comparar la suficiencia de la formación inicial con el resto de variables

Variable	1	2	3	4	5	7	9	10	11	12
p-valor	0,984	0,504	0,465	0,416	0,321	0,103	0,000	0,069	0,501	0,354
Variable	13	14	15	16	29	30	31	32	33	
p-valor	0,395	0,562	0,745	0,201	0,433	0,659	0,483	0,376	0,838	

En este caso, solamente hay relación estadísticamente significativa con la variable correspondiente a la pregunta 9 sobre necesidad de ampliar la formación didáctica del profesorado. Esto se debe a que los encuestados que respondieron que no consideraban suficiente su formación inicial para el trabajo que desarrollan lo hicieron principalmente porque perciben que, aunque su conocimiento del contenido a enseñar es adecuado, no ocurre lo mismo con el conocimiento didáctico del contenido.

Realización del Máster de Profesorado

Al realizar la prueba de independencia entre los resultados de la variable número 12 relativa a si los encuestados han realizado el MAES y las demás, se obtienen los resultados de *p*-valor que se muestran en la Tabla 4. Cabe recordar que, en ese caso, las variables 13 a 16 no tienen registros debido a que son específicas para quienes sí lo habían realizado.

Tabla 4. p-valor al comparar la realización o no del Máster de Profesorado con el resto de variables

Variable	1	2	3	4	5	7	8	9
p-valor	0,000	0,557	0,000	0,000	0,000	0,577	0,354	0,692
Variable	10	11	29	30	31	32	33	
p-valor	0,000	0,000	0,000	0,006	0,003	0,000	0,417	

La primera relación estadísticamente significativa, con la variable 1 (edad de los encuestados), se justifica al ser el Máster de Profesorado de reciente implantación (2009), por lo que los encuestados de mayor edad cursaron el CAP mayoritariamente y los más jóvenes el MAES.

El siguiente grupo de asociaciones, con las variables 3 (titulación), 4 (motivo de elección de la carrera) y 5 (sí repetiría sus estudios) viene dada porque la mayoría de matemáticos son profesores veteranos, de más de 40 años de edad y más de 10 años de experiencia en docencia. Este sector de la población cursó mayoritariamente el CAP, mientras que los de más reciente incorporación hicieron el MAES. Además, ellos eligieron sus estudios porque querían ser profesores, cosa que no ocurre en el resto de titulaciones que finalmente se decantaron por la docencia. En consecuencia, los que han respondido que volverían a cursar sus estudios son principalmente los matemáticos, ya que para el resto no se cumplieron sus expectativas laborales (que eran diferentes a la docencia).

La relación entre la realización del Máster de Profesorado y la pregunta 10 (en qué momento es conveniente que se desarrolle la formación didáctica) se debe a que los que lo cursaron, en su mayoría no matemáticos, consideran que esa formación debe realizarse en el propio máster, ya que no tendría sentido realizarla en sus titulaciones de origen (ingenierías o arquitecturas). En cambio, los matemáticos sí contemplan esta posibilidad, dividiéndose al 50% entre realizarla en los estudios de grado (50,40%) o en los de posgrado. Esta misma justificación es válida para la relación con la variable 11 (en qué momento deberían realizarse las prácticas).

En el caso de la variable 29 (experiencia profesional), la relación con haber realizado el Máster de profesorado se basa en que fue implantado en 2009, por lo que los docentes con menos años de experiencia lo han realizado, mientras que los veteranos realizaron en CAP. Asimismo, son mayoría los matemáticos que trabajan en centros públicos (relación con la variable 30: tipo de centro en que trabaja actualmente), mientras que en centros privados y concertados están más repartidos con el resto de titulaciones. Los que realizaron el MAES accedieron principalmente a la profesión docente mediante bolsas de interinos (variable 31) ya que son los matemáticos los que acceden directamente a través de la oposición en mayor porcentaje (y ellos cursaron, principalmente, el CAP). Directamente

relacionado con lo anterior está la situación administrativa de los encuestados (variable 32), ya que únicamente los matemáticos son, en su mayoría (72,40%), funcionarios de carrera.

CONCLUSIONES

Mediante este estudio se ha logrado el objetivo marcado consistente en conocer la relación entre el perfil de los encuestados y su percepción de la idoneidad de la formación inicial recibida, ya que se han encontrado relaciones estadísticamente significativas, identificando grupos naturales dentro de diferentes patrones de relación entre las variables, atendiendo al concepto de perfil latente establecido por Holzberger et al. (2019).

De acuerdo con Gómez (2009), se hace necesario profundizar en el diseño y desarrollo de los planes de formación conociendo la opinión de los receptores sobre la adecuación de esta a las necesidades del ejercicio profesional. Este estudio ayuda en este sentido, ya que se han realizado encuestas, se ha recibido y categorizado la información y se ha cuantificado y analizado. Dada la variedad de perfiles, se plantea la necesidad de revisar y mejorar los programas de formación docente en matemáticas para adaptarse a las diferentes necesidades y perspectivas del profesorado. Asimismo, se subraya la importancia de una formación inicial y continua adecuada, destacando la relevancia del Máster de Profesorado como parte esencial de su formación.

De acuerdo con Holzberger et al. (2019), el profesorado combina variables de calidad docente respecto a sus creencias, mostrando diferentes perfiles profesionales cuya existencia, sin embargo, no aclaran investigaciones previas. Esta comunicación profundiza en la creación de perfiles porque determina la relación entre diferentes variables para llegar a la determinación de un perfil. Asimismo, la información analizada ayuda a conocer las fortalezas y debilidades que sugieren Halpin y Kieffer (2015), ya que se han recogido datos sobre la suficiencia e idoneidad de la formación reglada que recibe el profesorado de matemáticas de enseñanza secundaria obligatoria.

En el estudio de Buendía et al. (2011) se indica que no hay proporcionalidad entre la importancia de la competencia profesional y la formación que se recibe para adquirirla, por lo que es imprescindible un rediseño de la metodología empleada basándose en el aprendizaje por competencias. A la vista de nuestros resultados, los que han realizado una formación por competencias (los que cursaron el MAES), la han valorado más positivamente que los que no.

El estudio de Valdés et al. (2015) que relacionaba las competencias profesionales para la docencia y la formación docente recibida se actualiza con nuestro estudio. En nuestro caso, la recogida de datos se ha realizado en 2022, por lo que ofrece una visión más madura de los efectos que ha tenido la implantación de dichos estudios.

A modo de síntesis, la disminución en el número de graduados en Matemáticas que optan por la docencia plantea interrogantes sobre la calidad de la formación del profesorado y su impacto en la educación matemática en España. Los licenciados y graduados en Matemáticas, mayoritarios en el grupo de encuestados, acceden principalmente a la profesión docente de forma directa a través de oposiciones. Este grupo realizó, en su mayoría, el Curso de Aptitud Pedagógica (CAP). En contraste, ingenieros y arquitectos tienden a acceder mediante bolsas de interinos y a haber cursado el Máster de Profesorado (MAES).

Estos hallazgos tienen implicaciones significativas para el desarrollo profesional y la calidad de la educación matemática en España, señalando la necesidad de abordar desafíos como la diversidad de perfiles docentes y la suficiencia de la formación didáctica.

Referencias

Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación [ANECA] (2005). *Libro Blanco. Título de Grado en Matemáticas.* https://bit.ly/3Q5tcWK

Buendía Eisman, L., Berrocal de Luna, E., Olmedo Moreno, E. M., Pegalajar Moral, M., Ruiz Rosillo, M. A. y Tomé Fernández, M. (2011). Valoración por parte del alumnado de las competencias que se pretenden conseguir con el Máster Universitario de profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas. *Bordón. Revista de Pedagogía, 63*(3), 57–74. https://bit.ly/3rFSAc0

Cardeñoso, J. M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 233–264). Editorial Universidad de Granada.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education.* Routledge.

Estebaranz García, A. (2015). Formación del profesorado de educación secundaria. *Tendencias Pedagógicas*, *19*, 149–174. https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/article/view/2006

Font, V. (2013). La formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria en España. *Revista Binacional Brasil Argentina, 2*(2), 49–62. https://bit.ly/3EZPCCf

García-Longoria, M. y Blanco, L. J. (2005). La formación inicial de profesores de Matemáticas: Una encuesta entre los profesores de secundaria. *Campo Abierto,* 28, 111–128. https://bit.ly/4dvb5Dm

Garrido, R. (2015). *La competencia matemática de los países de mejor rendimiento en PISA. Estudio comparado y prospectivas para España* [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid]. http://hdl.handle.net/10486/669586

Garrido-Rojas, J. y Moreno, A. (2024). *Perfil formativo, situación laboral y problemas detectados para el desempeño profesional y docente del profesorado de matemáticas de secundaria* [manuscrito en preparación]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(17), 471–498. https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1341

Halpin, P. F. y Kieffer, M. J. (2015). Describing profiles of instructional practice: a new approach to analyzing classroom observation data. *Educational Researcher, 44*(5), 263–277. https://doi.org/10.3102/0013189X15590804.

Holzberger, D., Praetorius, A. K., Seidel, T. y Kunter, M. (2019). Identifying effective teachers: The relation between teaching profiles and students' development in achievement and enjoyment. *European Journal of Psychology of Education, 34*(4), 801–823. https://doi.org/10.1007/s10212-018-00410-8

Martín de Diego, D. (Coord.) (2020). *Libro Blanco de las Matemáticas*. Real Sociedad Matemática Española. https://bit.ly/4bnvqZe

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2016). ¿Hay un vacío en la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria en España respecto a otros países? *Revista de Educación, 372*, 111–140. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2015-372-317

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2017). Percepciones sobre las competencias del futuro profesorado de matemáticas en Educación secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 357–366). SEIEM.

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática [SEIEM] (2022). *Debate sobre el documento: 24 propuestas de mejora de la profesión docente*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. https://bit.ly/3PHdTn0

Valdés Puentes, R., Bolivar Botia, A. y Moreno Verdejo, A. (2015). Una valoración de la formación inicial de profesores en España: El Máster en Educación Secundaria. *Educação em Revista, 31*(3), 251–278. https://doi.org/10.1590/0102-4698132995

REFLEXIONES SOBRE EL DISEÑO DIDÁCTICO DE UN CICLO FORMATIVO PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS

Reflections on the didactic design of a training cycle for the development of didactic-mathematic competencies

Giacomone, B.[a], Verón, M. A.[b] y Beltrán-Pellicer, P.[c]

[a]Università della Repubblica di San Marino, [b]Universidad Nacional de Misiones, cUniversidad de Zaragoza

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis reflexivo sobre el diseño e implementación de un ciclo de formación dirigido a futuro profesorado de Matemáticas de educación secundaria, evidenciando en qué medida se ha favorecido el aprendizaje de los participantes y qué aspectos necesitan explorarse más. El ciclo didáctico tiene como objetivo el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas que les permita identificar y discriminar prácticas, objetos, procesos matemáticos y posibles conflictos semióticos inherentes en la resolución de diversas situaciones-problemas. El análisis previo de las tareas y de las respuestas se apoya en el uso de herramientas teóricas y metodológicas del enfoque ontosemiótico. Se concluye que estas actividades formativas son necesarias y desafiantes para la formación del profesorado, como se evidencia a lo largo del ciclo de formación mediante las dificultades y los aprendizajes que enfrentan los futuros profesores.

Palabras clave: *diseño didáctico, competencias didácticas, formación de profesores, diferencial de una función.*

Abstract

This paper presents a reflective analysis of the design and implementation of a training cycle aimed at future secondary school mathematics teachers, showing to what extent participant learning has been facilitated and which aspects need further exploration. The didactic cycle aims to develop didactic-mathematical competencies enabling them to identify and discriminate mathematical practices, objects, processes, and possible semiotic conflicts inherent in solving various problem situations. The prior analysis of tasks and responses is supported by the use of theoretical and methodological tools from the onto-semiotic approach. It is concluded that these formative activities are necessary and challenging for teacher training, as evidenced throughout the training cycle by the difficulties and learning experiences faced by future teachers.

Keywords: *didactic design, didactic competencies, teacher education, differential of a function.*

INTRODUCCIÓN

Según la literatura, el análisis minucioso de tareas escolares y el reconocimiento de la complejidad de conocimientos implicados en la resolución de las posibles soluciones se considera un factor clave para explicar las dificultades de aprendizaje en matemáticas (Chapman y An, 2017; Kadunz, 2016). Esto incluye la comprensión de conceptos, procedimientos y su aplicación para la resolución de problemas, así como para tomar decisiones fundamentadas en la enseñanza. Por lo tanto, se considera una competencia didáctica específica del profesor de matemáticas (Godino et al., 2017). Esto implica que el futuro profesor de matemáticas tenga la oportunidad de abordar, desde su formación, acciones formativas que le permitan avanzar hacia el conocimiento y uso competente de herramientas

Giacomone, B., Verón, M.A. y Beltrán-Pellicer, P. (2024). Reflexiones sobre el diseño didáctico de un ciclo formativo para el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 281-288). SEIEM.

específicas, eficaces para: diseñar y comprender la complejidad matemática de las situaciones-problemas que proponen a sus estudiantes, comprender y gestionar los conflictos de aprendizaje, gestionar la institucionalización de los conocimientos y evaluar todo el proceso de enseñanza y aprendizaje impartido.

En este trabajo se presenta el tipo de análisis que estamos experimentando con futuros profesores de matemática centrado en el desarrollo de la competencia para identificar y describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos implicados en tareas matemáticas. Dada la complejidad de la enseñanza del diferencial (López-Gay et al., 2015), se propone, como contexto didáctico, tareas que implican el uso de este concepto. Por tales motivos, el objetivo de este trabajo es compartir una reflexión sobre el diseño e implementación de un ciclo formativo para desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico con futuros profesores de matemáticas.

MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2007) se ha desarrollado la noción de práctica matemática entendiéndola como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

En la realización de las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos de diversos tipos, de acuerdo con la función que desempeñan en dichas prácticas (elementos lingüísticos, situaciones-problemas o tareas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). Y también, intervienen y emergen procesos matemáticos (particularización, generalización, representación, …) (Godino et al., 2007). El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio (Godino et al., 2011).

Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del Profesor

El modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM) del profesor de matemáticas, desarrollado por Godino et al. (2017), articula los conocimientos y competencias necesarios para la enseñanza teniendo en cuenta seis facetas, y sus componentes, de los procesos de estudio matemático (ecológica, epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional).

En particular, la competencia general de diseño e intervención didáctica permite al profesor describir, explicar y juzgar lo que ha sucedido en el proceso de estudio y hacer propuestas de mejora. Dicha competencia contempla, entre otras, la identificación de las situaciones-problemas y las prácticas implicadas en su resolución, el reconocimiento de la configuración de objetos y procesos intervinientes y emergentes de las prácticas matemáticas, y la identificación de significados.

En este trabajo focalizamos la atención en la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, que implica la competencia del profesor para utilizar la noción de configuración ontosemiótica como una herramienta que facilita la identificación de objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas. Es decir, reconocer el conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido (la diferencial), teniendo en cuenta el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, los diferentes contextos de uso, y los sistemas de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado (Giacomone et al., 2018).

Las consignas del diseño formativo involucran análisis ontosemióticos de tipo epistémico—de las tareas matemáticas y de su resolución—y, además, de tipo cognitivo, ya que se les pedía a los futuros profesores analizar respuestas de alumnos. En este trabajo centramos nuestra atención en la reflexión sobre el tipo de análisis epistémico que realizan los futuros profesores de matemáticas (FPM) a una nueva situación-problema en la que interviene la diferencial de una función (análisis a priori).

El desarrollo de la competencia de análisis epistémico implica:

- Proponer diferentes estrategias de resoluciones para la situación-problema.
- Dividir las resoluciones en prácticas matemáticas y reconocer el uso e intencionalidad de cada una de las prácticas.
- Identificar los objetos: lenguajes (natural, icónico, diagramático, simbólico…), conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que intervienen en esas prácticas.
- Reconocer los procesos matemáticos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.
- Identificar conflictos epistémicos potenciales de las resoluciones.
- Relacionar las configuraciones de prácticas, objetos y procesos con los significados parciales del concepto diferencial.

En particular, abordamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos identifican los FPM en la resolución de una situación-problema?

Modelo Ontosemiótico de los Significados Parciales del Diferencial

En Verón y Giacomone (2021) se han descripto cuatro significados parciales del diferencial caracterizando los sistemas de prácticas, objetos y procesos que intervienen y emergen en cada significado. En síntesis, la diferencial de Leibniz se asocia con la consideración del diferencial como una cantidad infinitesimal o infinitamente pequeña, donde se considera que un incremento infinitesimal dx en x produce un incremento infinitesimal dy en y. En cambio, la diferencial de Cauchy se relaciona con el uso de la derivada para definir al diferencial por medio de la ecuación dy=y'dx, donde se plantea que los procedimientos de cálculos se realizan con el proceso de paso al límite dando lugar a la derivada de la función en el punto (x, y). Esta descripción se ha ampliado con la incorporación de los conocimientos didáctico-matemáticos que intervienen en los procesos de estudio del diferencial (Verón et al., 2024).

METODOLOGÍA

La investigación se encuadra en una metodología cualitativa que recolecta y analiza datos a lo largo de un ciclo formativo, de tipo descriptivo y exploratorio. Se aplicará el método de las investigaciones de diseño (Kelly et al., 2008) basado en las cuatro fases siguientes y fundamentadas por las herramientas del EOS: estudio preliminar, diseño de tareas, implementación, análisis retrospectivo. Además, se utilizará la técnica de análisis de contenido para la valoración de las producciones.

Contexto de la Investigación, Participantes y Recogida de Datos

El ciclo formativo se implementó durante el año 2022, durante cuatro sesiones de dos horas y media cada una, en el ámbito del curso Seminario de Didáctica de la Matemática. Participaron 12 estudiantes, futuros profesores de matemáticas, que estaban cursando el cuarto año de la carrera de Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de un Instituto Superior de Formación Docente de Argentina. La mayoría de los participantes han realizado lecturas sobre algunos conocimientos teóricos previos de las nociones básicas del EOS que caracterizan a una configuración ontosemiótica.

La implementación del ciclo formativo se desarrolló en seis fases.

En la Fase 1, se plantea la resolución y discusión de una primera tarea matemática que tiene la intención de realizar una exploración inicial de los significados personales de los FPM sobre la diferencial. En la Fase 2, se introduce el análisis epistémico para la identificación y reconocimiento de los distintos objetos matemáticos involucrados en las tareas y que emergen de los distintos tipos de resoluciones esperadas. Luego se propone, en la Fase 3, realizar un análisis ontosemiótico de tipo cognitivo, sobre una respuesta a un problema que da un estudiante hipotético.

En la Fase 4, se avanza hacia la consolidación en el uso de herramientas de análisis. Se propone la Tarea 4 sobre un problema de aceleración basado en el cálculo de la distancia total recorrida de un auto, adaptado de López-Gay (2001), y se plantea: 1) Resuelve la tarea matemática; 2) Identifica las distintas prácticas matemáticas que se deben realizar; 3) Identifica los conocimientos que se ponen en juego (objetos y procesos matemáticos referidos en las prácticas); 4) ¿Qué significado parcial del diferencial se pretende movilizar en la tarea?

Posteriormente, en la Fase 5, se propone realizar un análisis ontosemiótico de una lección de un libro de texto de cálculo. Y en la Fase 6, se crea un espacio didáctico específico para la evaluación de los avances que han logrado los estudiantes, para discutir sobre la importancia del conocimiento didácticos-matemáticos de los distintos significados del diferencial para el diseño de tareas, y reflexionar sobre la importancia de las tareas realizadas en la futura práctica profesional. Al final de toda la implementación, se realizó un análisis retrospectivo de todo el ciclo formativo con el objetivo de identificar puntos de mejora y tomar decisiones para futuras implementaciones.

Por limitaciones de espacio, presentamos el análisis a priori e implementación de la Tarea 4.

Figura 1. Consigna de la Tarea 4. Fuente: Adaptado de Giacomone et al. (2018)

Situación problema

Un auto pasa de 8.33 m/s a 33.33 m/s en 9 s con aceleración constante. Calcular el desplazamiento durante esos 9 s.

Consignas

1) Resolver la siguiente situación problema.
2) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.
3) Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	**Uso e intencionalidad de las prácticas**	**Objetos referidos en las prácticas (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos)**
P1	....	...
P2	....	...
P3	....	...

4) ¿Qué significado parcial del diferencial se puede relacionar con la tarea? Argumente su respuesta

ANÁLISIS A PRIORI DEL DISEÑO DIDÁCTICO

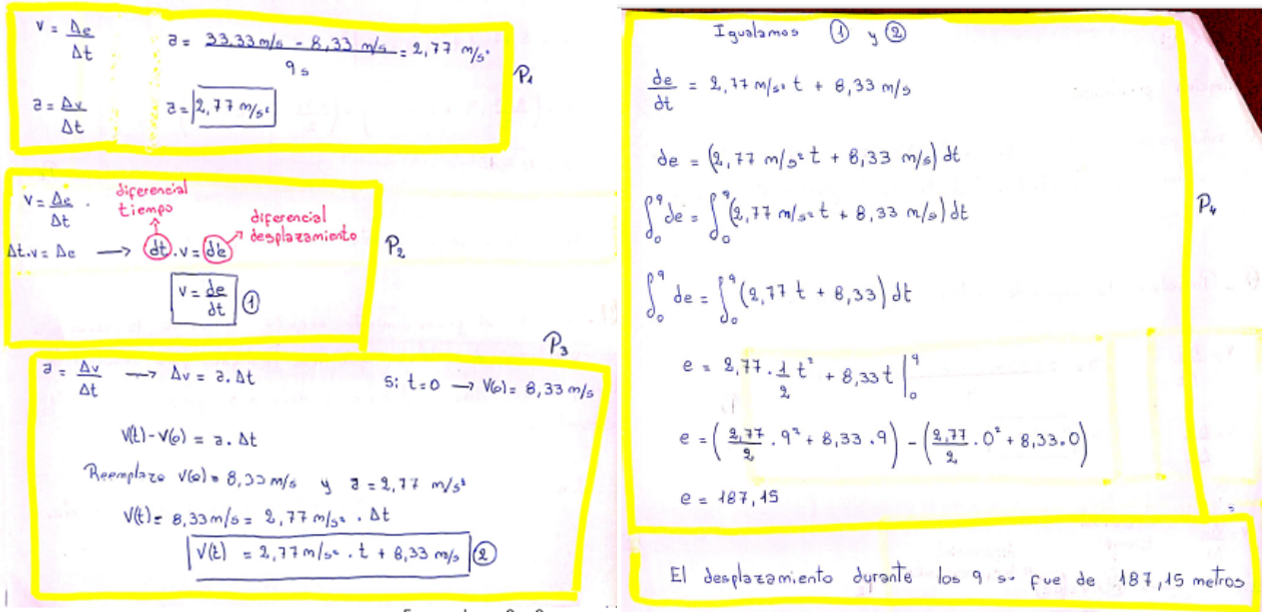
En el análisis del diseño didáctico de la Tarea 4, se consideraron diversos aspectos: los tipos de conocimientos didácticos-matemáticos implicados, la intencionalidad didáctica y las competencias profesionales de los FPM que participan en dicha tarea. En este contexto, se destaca que las cuatro consignas de la Tarea 4 abordan aspectos de la dimensión epistémica del conocimiento didáctico-matemático relacionado con la diferenciación (consultar Verón et al., 2024). En cuanto a la intencionalidad, las consignas 1, 2 y 3 se centran en identificar estrategias de resolución de problemas y describir prácticas, objetos y procesos matemáticos. Por otro lado, la consigna 4 busca que los FPM establezcan conexiones entre la configuración epistémica y los significados parciales del diferencial.

Las configuraciones elaboradas por los FPM se analizan según las acciones que permiten dar cuenta del desarrollo de la competencia de análisis epistémico (Burgos y Godino, 2022); es por ello que, en primer lugar, se valora si los FPM lograron resolver la situación-problema y dividir la resolución en una secuencia de prácticas matemáticas elementales; en segundo lugar, se valora si reconocen el uso e intencionalidad de cada una de las prácticas; en tercer lugar, se avanza sobre la identificación de los objetos matemáticos que intervienen en las practicas; y por último, se valora qué relaciones establecen entre las prácticas y objetos matemáticos con los significados parcial del diferencial.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se recupera a modo de ejemplo la resolución de un FPM (E12) para analizar sus acciones y decisiones en relación con la implementación de la Tarea 4. Una de las primeras acciones que se valora tiene que ver con la *resolución y reconocimiento de la secuencia de prácticas matemáticas elementales*. En la resolución E12 (ver Figura 2) se observa cómo identifica las prácticas matemáticas que componen la resolución y las divide según las acciones y decisiones tomadas para comprender la situación-problema. Tal vez, resulte necesario subdividir la práctica cuatro en prácticas más elementales ya que intervienen objetos matemáticos diferentes y complejos. Es decir, al principio se emplea la noción de diferenciales y se establece una ecuación diferencial, luego se plantea la integral definida como una suma de infinitos (*de*), y, por último, se utiliza la regla de Barrow. En este sentido, se podría descomponer la práctica cuatro en tres prácticas matemáticas elementales.

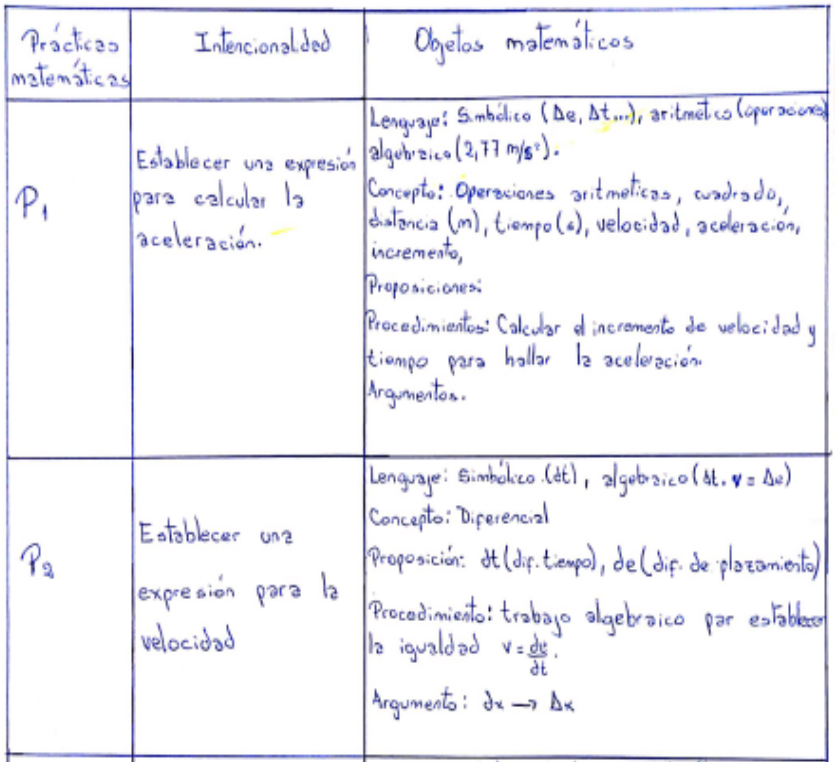
Figura 2. Parte de la resolución del E12 de la Tarea 4. Fuente: Elaborado por los autores



También, se observa que E12 logra reconocer la intencionalidad de cada una de las cuatro prácticas matemáticas que ha dividido su resolución, pero ésta resulta ser general, y, en consecuencia, pasa por alto objetos y procesos importantes (ver Figura 3). Por ejemplo, en la práctica dos se establece el diferencial tiempo (dt), el diferencial desplazamiento (de) y se los relaciona mediante la ecuación (dt.v=de) para obtener la expresión (v=de/dt). Además, subyace el proceso de consideración de los infinitesimales en el tiempo y en el desplazamiento lo que posibilita el paso de los incrementos a los diferenciales. Sin embargo, E12 plantea que la intencionalidad de la práctica es "Establecer una expresión para la velocidad" la cual es incompleta ya que no logra reconocer todos los procesos matemáticos que intervienen en esta práctica. Una posible dificultad podría estar asociada al hecho de que es posible dividir la práctica dos en prácticas más elementales que permitan mostrar con mayor detalle los procesos que se están realizando de manera implícita.

Otra acción que se valora es la identificación de los objetos matemáticos. Se observa que los FPM logran vincular los tipos de lenguajes con sus funciones en el contexto del problema. Por ejemplo, identifican el aritmético para el cálculo de la aceleración, el funcional para expresiones de velocidad en función del tiempo v(t), el coloquial para comunicar la solución de la tarea, y también, identifican al lenguaje simbólico y algebraico (Figura 3).

Figura 3. Parte de la resolución del E12 de la Tarea 4. Fuente: Elaborado por los autores



Prácticas matemáticas	Intencionalidad	Objetos matemáticos
P_1	Establecer una expresión para calcular la aceleración.	Lenguaje: Simbólico (Δe, Δt...), aritmético (operaciones) algebraico (2,77 m/s^2). Concepto: Operaciones aritméticas, cuadrado, distancia (m), tiempo (s), velocidad, aceleración, incremento, Proposiciones: Procedimientos: Calcular el incremento de velocidad y tiempo para hallar la aceleración. Argumentos.
P_2	Establecer una expresión para la velocidad	Lenguaje: Simbólico (dt), algebraico ($\delta t \cdot v = \Delta e$) Concepto: Diferencial Proposición: dt (dif. tiempo), de (dif. de plazamiento) Procedimiento: trabajo algebraico par establecer la igualdad $v = \frac{de}{dt}$. Argumento: $dx \rightarrow \Delta x$

En general, todos los FPM lograron resolver la situación-problema, algunos presentaron incluso dos soluciones. Respecto a la división de la resolución en prácticas matemáticas, la mayoría identificó las prácticas elementales (8 de los 12 participantes). Por lo tanto, se evidencia que los FPM consideran diversas acciones y decisiones para avanzar en la tarea al dividir las prácticas matemáticas. Además, se destaca la importancia de que el FPM sea competente en el *reconocimiento del uso e intencionalidad de las prácticas matemáticas*. No es suficiente con describir o narrar los pasos realizados, sino que se requiere identificar cuál es el uso de esa práctica en el contexto del problema. Cada práctica matemática tiene un propósito específico, como establecer un procedimiento, calcular un valor, relacionar conceptos/proposiciones, interpretar una representación o comunicar una idea matemática. Por lo tanto, es esencial que el profesor pueda identificar el uso e intencionalidad de cada práctica, ya que esto le permite valorar las relaciones e ideas matemáticas expresadas por los estudiantes, así como los procesos que intervienen y emergen como indicadores de aprendizaje. Identificar estos procesos también es crucial para discutirlos, institucionalizarlos o identificar posibles conflictos cognitivos en las resoluciones.

Se evidencia que las proposiciones son difíciles de identificar por los FPM ya que implica una cierta competencia en reconocer las relaciones entre los conceptos-definiciones, en preguntarse cómo se relacionan estos conceptos, qué ideas construyen estos conceptos que se están utilizando; resultados que se encuentran en línea con otros estudios, como Giacomone et al. (2016).

Para enriquecer el análisis epistémico y mejorar la comprensión del uso e intencionalidad de las prácticas matemáticas, así como el reconocimiento de proposiciones, algunos autores sugieren implementar un paso intermedio entre la resolución de la tarea y el análisis epistémico: "una narrativa temporal que explique, en términos matemáticos, las prácticas utilizadas para resolver la tarea. Esta narrativa puede ayudar a describir las configuraciones epistémicas involucradas" (Rodríguez-Nieto et al., 2022, p. 2381).

En relación con la pregunta 4, de las 12 resoluciones de los FPM, tres asocian al diferencial de Leibniz justificando su uso al referirse a "cantidades infinitesimales" (E10) o al considerar "tiempo y

velocidad como cantidades infinitesimales" (E7). En cambio, E11 asocia al diferencial de Cauchy identificando conceptos como: "razón de incrementos, diferenciales, cociente de diferenciales y función derivada". Es importante remarcar que en la justificación de E11 se menciona al concepto de "función derivada", el cual no es reconocido en la identificación de los objetos matemáticos en las prácticas. Este hecho nos permite advertir la necesidad de volver a discutir con los FPM este interrogante y proponer nuevas actividades que incluyan momentos de reflexión sobre las relaciones que se establecen entre las configuraciones de prácticas, objetos y procesos y los significados parciales del diferencial que están interviniendo y emergiendo en las resoluciones.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado la reflexión sobre el diseño e implementación de una tarea que forma parte de un ciclo formativo para desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico. Los resultados indican que los futuros profesores de matemáticas han logrado identificar y reconocer de manera competente las prácticas, objetos y procesos matemáticos cuando realizaron el análisis de tarea propuesta. Sin embargo, enfrentan un desafío significativo al identificar proposiciones y argumentos. Se sugiere que esta dificultad puede deberse a que, en la mayoría de los análisis ontosemióticos realizados por los FPM, las proposiciones y argumentos no están explícitamente formulados, lo que dificulta su reconocimiento. No obstante, dado que estos elementos desempeñan funciones importantes en la resolución de problemas, se considera que, con más tiempo y experiencia formativa, los FPM podrán superar estas dificultades.

En el diseño del ciclo formativo se abordaron los significados parciales del diferencial de Leibniz y de Cauchy, pero no se trabajaron otros significados; sin embargo, se presentaron para familiarizarse con su existencia, aunque se requiere más tiempo y nuevas experiencias formativas para estudiarlos. Además, es importante tener en cuenta que los significados del diferencial intervienen y emergen de diferentes contextos de aplicación, lo que implica diferentes niveles de complejidad ontosemiótica de los objetos matemáticos que intervienen. Por lo tanto, es pertinente cuestionarse si es posible abordar con el mismo grupo de estudiantes todos los significados del diferencial.

En la actualidad, en el campo de la didáctica del cálculo y la física, continúan surgiendo investigaciones que proponen nuevas categorizaciones sobre los usos del diferencial en problemas relacionados con la derivada y la integral (e.g. Bueno et al., 2022; Stevens y Jones, 2023, entre otros). Estos resultados nos obligan a seguir pensando en el diseño de acciones formativas en torno a los procesos instruccionales del diferencial de una función.

En conclusión, las herramientas que permiten organizar y sistematizar la reflexión sobre la práctica del profesor, como el análisis de las configuraciones epistémicas, "ayudan al profesor a establecer un escenario hipotético de aquello que se espera encontrar en el aula cuando se implementa una tarea" (Garcia-Mora y Díez-Palomar, 2023, p. 265). Ser competente en el uso de esta herramienta permitirá al docente poner en contraste el análisis epistémico, esperado, de la tarea con el análisis cognitivo, producto de lo que realmente sucede en el aula, orientando así al reconocimiento de competencias matemáticas de los estudiantes.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos PID2021-122326OBI00 (España) y 16Q1706-PI (FCEQyN – UNaM, Argentina) y el grupo S60_2–R - Investigación en Educación Matemática, del Gobierno de Aragón.

Referencias

Bueno, S., Burgos, M., D. Godino, J. y Pérez, O. (2022). Significados intuitivos y formales de la integral definida en la formación de ingenieros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 25(*2), 135–168. https://doi.org/10.12802/relime.22.2521

Burgos, M. y D. Godino, J. (2022). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Chapman, O. y An, S. (2017). A survey of university-based programs that support in- service and pre-service mathematics teachers' change. *ZDM Mathematics Education, 49*(2), 171–185. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0852-x

Garcia-Mora, E. y Díez-Palomar, J. (2023). Uso de la configuración epistémica para contrastar el estado hipotético e implementado de la instrucción matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 259–266). SEIEM.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. González, P. Hernández, A. Jiménez, J. A. Macías, F. Ruiz, M. T. Sánchez, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 257–265). SEIEM.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 24*(1), 35–52. https://doi.org/10.5209/RCED.54880

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(37), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*, 127–135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247–265.

Kadunz, G. (2016). Diagrams as means for learning. En A. Sáenz-Ludlow y G. Kadunz (Eds.), Semiotics as a tool for learning mathematics (pp. 111–126). SensePublishers.

https://doi.org/10.1007/978-94-6300-337-7_6

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.). (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.

López-Gay, R. L. V. (2001). *La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora* [Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Madrid]. http://hdl.handle.net/10486/671450

López-Gay, R., Sáez, J. M. y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education, 24*(5-6), 591–613. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9757-7

Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Borji, V. y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(9), 2364–2390, https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Stevens, B. N. y Jones, S. R. (2023). Learning integrals based on adding up pieces across a unit on integration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9*, 118–148.

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop, 3*, e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109

Verón, M., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. (2024). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la diferencial. *Uniciencia, 38*(1), 1–22. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.2

¿CÓMO ENFOCAN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS LOS FORMADORES DE PROFESORES? EL PAPEL DEL PERFIL Y DE LA FORMACIÓN CONTINUA

How do mathematics teacher educators approach mathematics learning? The role of profile and continuous training

Giadas, P.[a], Muñiz-Rodríguez, L.[a], Pascual, M. I.[b], Contreras, L. C.[c] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[a]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universidad de Sevilla, [c]Universidad de Huelva

Resumen

La figura de los formadores de profesores de matemáticas (MTE, por sus siglas en inglés) ha sido objeto de interés en los últimos años dentro de la investigación en educación matemática, debido a la ausencia de una caracterización única de los MTE, ya que coexisten diversos modelos que exploran su conocimiento. En este estudio se realiza un análisis cuantitativo acerca del perfil formativo de los MTE en el contexto español, del enfoque que ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado y de la formación continua recibida. Además, se estudian las relaciones que existen entre estas tres variables. Los resultados arrojan que el perfil influye en el enfoque utilizado por los MTE, mientras que la formación continua recibida no parece tener influencia.

Palabras clave: aprendizaje, formación continua, formadores, matemáticas, perfiles formativos.

Abstract

The figure of Mathematics Teacher Educators (MTE) has been subject of interest in recent years in mathematics education research, due to the lack of a unique characterization of MTE, as diverse models coexist exploring their knowledge. In this study we carry out a quantitative analysis of the training profile of the MTE in the Spanish context, the approach adopted towards the learning of mathematics by their students and the continuous training they receive. In addition, the relationships between these three variables are examined. The results show that the profile influences the approach used by MTE, while the received continuous training does not seem to have an impact.

Keywords: *learning, continuous training, teacher educators, mathematics, training profiles*

INTRODUCCIÓN

La investigación en educación matemática durante muchos años ha puesto su foco en el estudio de los profesores de matemáticas dada su influencia en el aprendizaje del alumnado (Wu et al., 2017). Sin embargo, no ha sido hasta estos últimos años cuando los investigadores en educación matemática a nivel nacional e internacional se han enfocado en estudiar a los MTE (Chapman, 2021; Escudero-Ávila et al., 2021; Martignone et al., 2022; Pérez-Montilla et al., 2023). Tal y como señala Chapman (2021), este interés reside en la relación existente entre el conocimiento de los MTE y el de los profesores de matemáticas. De esta manera, parece lógico que la investigación se plantee nuevos objetivos acerca de las competencias profesionales, el conocimiento especializado o las trayectorias formativas de los MTE (Giadas et al., 2023). Además, la inexistencia de una única forma de convertirse en MTE hace que sea necesario estudiar en profundidad esta figura.

Algunas investigaciones previas indican que los diferentes perfiles existentes en los MTE provocan que estos profesionales enfoquen el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado de distintas formas (Ozmantar y Agac, 2023), que incluso pueden variar en función de su perfil (Pérez-Montilla

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L., Pascual, M. I., Contreras, L. C. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). ¿Cómo enfocan el aprendizaje de las matemáticas los formadores de profesores? El papel del perfil y de la formación continua. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 289-296). SEIEM.

et al., 2023). Por ello, los objetivos que se plantean en esta comunicación son, por un lado, analizar el perfil formativo de los MTE del contexto español, entendido en el mismo sentido que Giadas et al. (enviado), el enfoque que ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado, así como su formación continua y, por otro lado, estudiar cómo se relacionan estas variables entre sí. En este trabajo, la formación continua recibida por los MTE se limita al estudio de las acciones formativas que han realizado.

MARCO TEÓRICO

La literatura existente acerca de los MTE muestra que no hay una única aproximación para estudiar a esta figura (Giadas et al., 2023). Investigaciones previas establecen diferentes modelos acerca del conocimiento que los MTE deben poseer (Ferretti et al., 2021; Pérez-Montilla et al., 2023). En particular, el modelo de conocimiento *Mathematics Teacher Educator Specialized Knowledge* [MTESK] propuesto por Martignone et al. (2022) es un modelo creado a partir del *Mathematics Teacher Specialized Knowledge* [MTSK] (Carrillo-Yáñez et al., 2018), que contempla el conocimiento de los MTE separado en dos categorías, la relativa al conocimiento matemático y la relativa al conocimiento pedagógico del contenido. Además, también incluye las concepciones y creencias que los MTE poseen acerca de las matemáticas y su aprendizaje y enseñanza.

Con anterioridad y desde una perspectiva similar, Goodwin et al. (2014) proponen un modelo de conocimiento de los MTE, adaptando el de Cochran-Smith y Lytle (1999) para el profesor de matemáticas, en el que se distinguen tres tipos de conocimiento esenciales: el conocimiento para la práctica, el conocimiento en la práctica y el conocimiento de la práctica. El conocimiento para la práctica se relaciona con aspectos como el conocimiento de la materia, las teorías de aprendizaje o el conocimiento de la profesión. Este conocimiento, según Goodwin et al. (2014), debe ser adquirido durante los estudios formales, incluyendo los de doctorado. El conocimiento en la práctica contempla el conocimiento desarrollado a partir de la reflexión de los MTE sobre sus prácticas, experiencias y narrativas. Por último, el conocimiento de la práctica deriva de la investigación sobre la formación docente en la que los MTE participan como personal universitario. Ozmantar y Agac (2023) afirman que estos tres tipos de conocimiento posibilitan al investigador examinar y explicar las prácticas profesionales de los MTE conectándolas así con su desarrollo profesional.

El estudio que aquí se presenta contempla estos tres tipos de conocimiento a partir de distintas dimensiones relativas a los MTE. Por un lado, para analizar el conocimiento para la práctica se considera el perfil formativo de los MTE (Giadas et al., enviado), determinado por su formación inicial y especialización posterior, es decir, sus estudios formales. Por otro lado, se interpreta la formación continua recibida como descriptor de su conocimiento en la práctica y de la práctica a través de acciones formativas de distinta naturaleza (reflexiva e investigativa), ligadas cada una de ellas o bien al conocimiento en la práctica o al conocimiento para la práctica. Por último, se contempla el enfoque que los MTE ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado como resultado de la combinación de estos tres tipos de conocimiento. En este sentido, Appova y Taylor (2019) reflejan que los MTE necesitan poseer conocimientos sobre cómo implicar a los futuros profesores en su propio desarrollo profesional, para lo cual es imprescindible entender cómo enfocan el aprendizaje los MTE.

MÉTODO

En esta comunicación se presentan los resultados de un estudio cuantitativo llevado a cabo con MTE del contexto español. Se invitó a participar en este estudio a un total de 405 MTE de los cuales aceptaron 157, constituyendo una tasa de respuesta del 39 %, aproximadamente. El instrumento utilizado en la investigación se corresponde con un cuestionario diseñado y validado por expertos dentro de la Red MTSK (https://redmtsk.net/). El cuestionario fue diseñado y aplicado de forma telemática a través de Microsoft Forms®, incluyéndose un total de 26 ítems, de opción múltiple y opción única, distribuidos en dos secciones: una sobre la formación y experiencia profesional de los

MTE, y otra acerca de sus concepciones sobre la formación y la percepción de su preparación como MTE (Rojas y Pascual, 2023). En este trabajo se pone el foco en analizar tres ítems de la primera sección del cuestionario: la formación académica que los MTE han recibido durante sus estudios de grado, máster y doctorado (o niveles equivalentes), el enfoque que los MTE ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado, y la formación continua recibida.

El ítem sobre la formación académica tomaba como posibles valores *Matemáticas* (o áreas científicas afines), *Educación* (profesor o maestro), *Educación Matemática* (didáctica de las matemáticas o matemática educativa), *Pedagogía* (u otras áreas afines) y *No aplica*. Con el objetivo de simplificar la redacción se consideran los valores: *Matemáticas*, *Educación*, *Educación Matemática*, *Pedagogía* y *No Aplica.* A partir de esta información, se construyó la variable perfil formativo, referida a la trayectoria formativa seguida por los MTE (en la misma línea que Giadas et al., enviado). La Tabla 1 presenta los posibles valores del segundo ítem analizado, el cual era de opción única, mientras que la Tabla 2 recoge los posibles valores del tercer ítem, de opción múltiple.

Tabla 1. Valores del ítem correspondiente al enfoque que los MTE ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado. Elaboración propia.

¿Dónde pone como MTE el Enfoque (E) en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado?
Que aprendan matemáticas no es relevante en mi programa (E1)
Que aprendan matemáticas al nivel del currículo escolar (E2)
Que aprendan temas matemáticos escolares de manera profunda (E3)
Que aprendan matemáticas más allá del currículo escolar (E4)

Tabla 2. Valores del ítem correspondiente a las acciones formativas realizadas por los MTE. Elaboración propia.

¿Cuáles de las siguientes Acciones Formativas (AF) ha realizado como MTE?
Autoformación a través de lecturas académicas (AF1)
Participación en eventos científicos nacionales y/o internacionales en educación matemática (AF2)
Colaboración con colegas de mi institución u otras instituciones (AF3)
Investigaciones y/o estudios académicos sobre la formación de profesores (AF4)
Innovaciones en el aula de formación inicial docente (AF5)
Análisis reflexivo de mi propia docencia (AF6)
Análisis y sistematización de las experiencias de aprendizaje de mis estudiantes (AF7)

Las respuestas de los MTE a estos ítems se recogieron para realizar un análisis descriptivo de las respuestas obtenidas en los tres ítems y, posteriormente, estudiar la relación existente entre las tres variables. El análisis estadístico se llevó a cabo a través del software libre RStudio, junto con el paquete ggplot2 para la obtención de las tablas y gráficas recogidas en los resultados de este trabajo, y el paquete rcompanion para el cálculo de la V de Cramér a un nivel de significación del 5 % en las diferencias encontradas durante el análisis.

RESULTADOS

En esta sección se presenta, en primer lugar, una descripción individual de las variables consideradas en este trabajo, y, en segundo lugar, las relaciones existentes entre ellas.

En la Tabla 3 se reflejan los perfiles formativos identificados junto con el número de MTE de la muestra que los conforman. Se observa un total de siete categorías: cinco hacen referencia a perfiles de interés para el estudio (por estar vinculados con una formación académica afín al ámbito de la investigación), mientras que las otras dos comprenden o bien MTE sin estudios de doctorado o casos aislados que no son representativos a la hora de explicar la muestra (frecuencia menor que 5). En consecuencia, los MTE pertenecientes a estas dos categorías se suprimieron de los sucesivos análisis. Así quedó la muestra reducida a un total de 90.

Tabla 3. Perfil de los MTE (N=157). Elaboración propia.

Perfil MTE [Grado o Licenciatura/Máster/Doctorado]	Frecuencia
Matemáticas/Matemáticas/Matemáticas	34
Matemáticas/Educación Matemática/Educación Matemática	26
Matemáticas/No Aplica/Educación Matemática	13
Matemáticas/Educación/Educación Matemática	9
Matemáticas/No Aplica/Matemáticas	8
Perfiles sin estudios de doctorado	36
Otros perfiles con frecuencia menor que 5	31

El enfoque que los MTE ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado se recoge en la Tabla 4. Se debe señalar que uno de los MTE no ha respondido. Se puede apreciar que, aproximadamente, la mitad (52 %) de los MTE participantes consideran fundamental que su alumnado aprenda temas matemáticos escolares de manera profunda. Tan solo cuatro MTE, aproximadamente un 4 % de los participantes, no priorizan en las asignaturas que imparten que los estudiantes aprendan matemáticas.

Tabla 4. ¿Dónde pone como MTE el enfoque en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado? (N = 89). Elaboración propia.

Enfoque aprendizaje matemático (*E*)	Frecuencia
Que aprendan matemáticas no es relevante en mi programa (*E1*)	4
Que aprendan matemáticas al nivel del currículo escolar (*E2*)	12
Que aprendan temas matemáticos escolares de manera profunda (*E3*)	46
Que aprendan matemáticas más allá del currículo escolar (*E4*)	27

En la Tabla 5 se muestran las acciones formativas realizadas por los MTE. El primer aspecto a tener en cuenta es que se trata de un ítem de opción múltiple por lo que un mismo MTE ha podido señalar varias acciones formativas a la vez. El segundo aspecto es que uno de los MTE no ha respondido. A la vista de la Tabla 5 se concluye que la acción formativa más realizada por los MTE es la AF3, seguida por AF2, AF6 y AF1. De esta forma se observa que la formación continua recibida por los MTE se basa en la colaboración con colegas, en la reflexión de su propia práctica docente, y en la investigación.

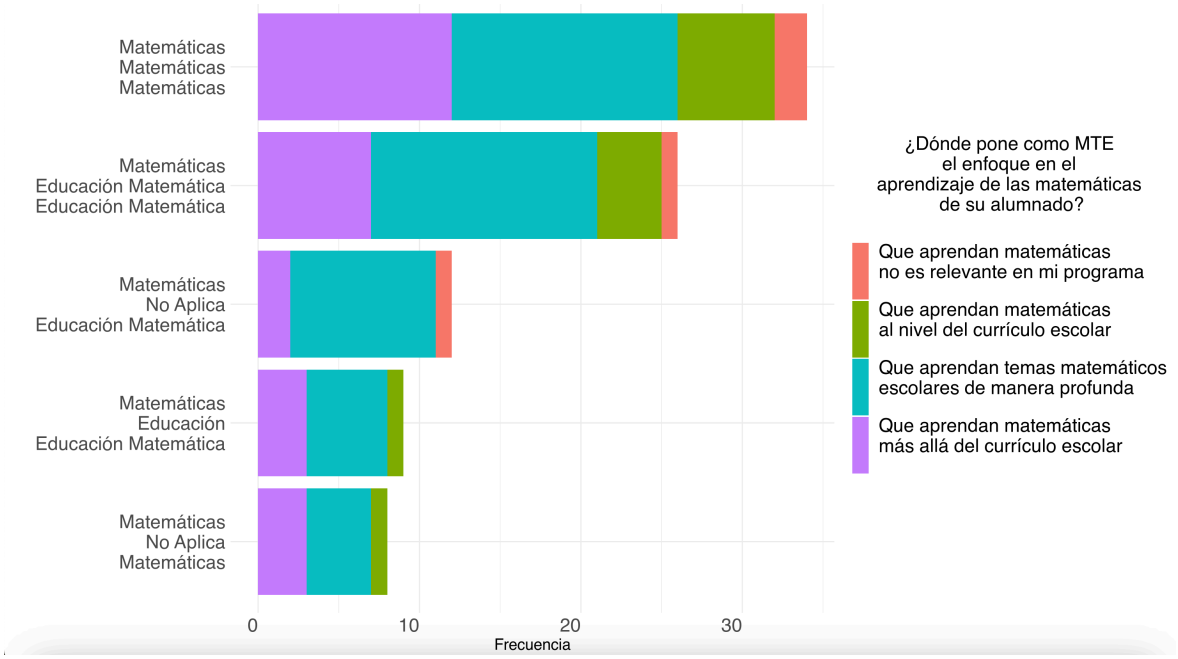
Tabla 5. Acciones formativas realizadas por los MTE. (N=89). Elaboración propia.

Acciones formativas (AF)	Frecuencia
Autoformación a través de lecturas académicas (AF1)	75
Participación en eventos científicos nacionales y/o internacionales en educación matemática (AF2)	78
Colaboración con colegas de mi institución u otras instituciones (AF3)	80
Investigaciones y/o estudios académicos sobre la formación de profesores (AF4)	64
Innovaciones en el aula de formación inicial docente (AF5)	70
Análisis reflexivo de mi propia docencia (AF6)	76
Análisis y sistematización de las experiencias de aprendizaje de mis estudiantes (AF7)	60

La Figura 1 muestra la relación existente entre el enfoque que los MTE ponen en el aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes y los perfiles de los MTE considerados para este estudio. Se refleja cómo se distribuyen los diferentes enfoques dentro de los perfiles de los MTE. A la vista de la Figura 1 se destaca que los MTE del perfil Matemáticas/No Aplica/Educación Matemática no consideran prioritario que su alumnado aprenda matemáticas al nivel del currículo. Por otro lado, los MTE de los perfiles Matemáticas/Educación/Educación Matemática y Matemáticas/No aplica/Matemáticas consideran menos relevante que su alumnado aprenda matemáticas durante su formación inicial

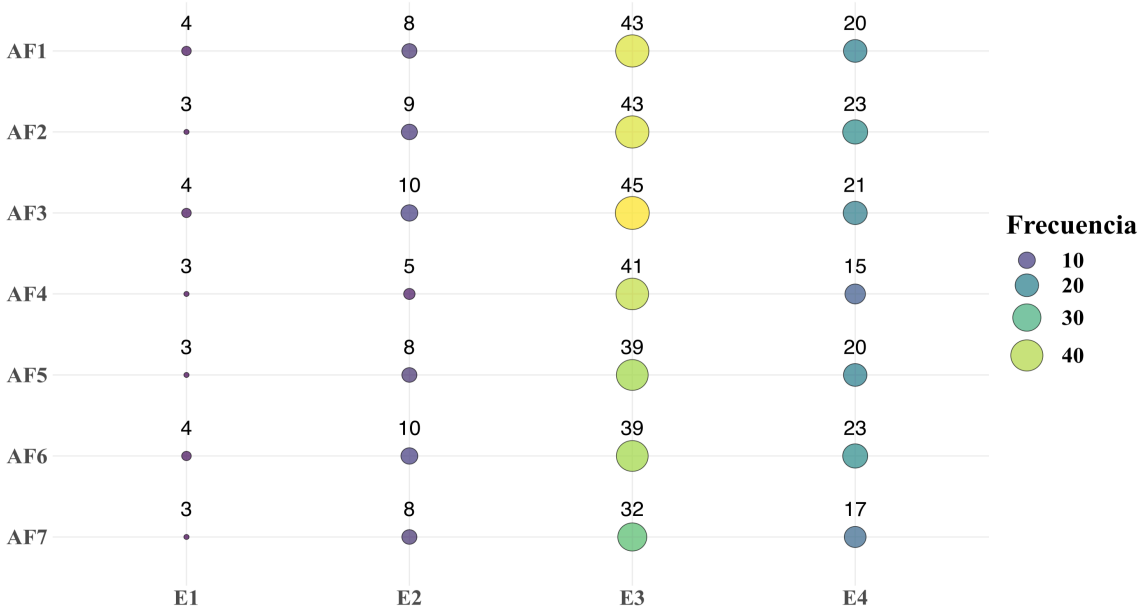
docente. A la vista de estas diferencias se comprueba si son estadísticamente significativas utilizando la V de Cramér obteniéndose un valor de 0.16, lo cual, según Betancourt y Caviedes (2018) se corresponde con un tamaño pequeño del efecto.

Figura 1. Relación enfoque aprendizaje y perfiles de los MTE. Elaboración propia.



La relación existente entre el enfoque que los MTE ponen en el aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes y las diferentes acciones formativas que realizan se recoge en la Figura 2. Se refleja cómo se distribuyen las diferentes acciones formativas dentro de los enfoques considerados. A la vista de la Figura 2, en proporción, no se observan diferencias en las acciones formativas realizadas por los MTE de cada uno de los cuatro enfoques considerados. Aun así, se comprueba si realmente existen diferencias estadísticamente significativas a partir de la V de Cramér, y se obtiene un valor de 0.05. Este hecho indica que no existe un efecto entre ambas variables (Betancourt y Caviedes, 2018).

Figura 2. Relación enfoque aprendizaje y acciones formativas de los MTE. Elaboración propia.



Por último, en la Tabla 6 se analiza la relación existente entre las acciones formativas realizadas y los diferentes perfiles de los MTE. No se aprecian diferencias entre los MTE de los diferentes perfiles, lo que también refleja la V de Cramér con un valor de 0.05, por lo que no se puede hablar de la existencia de un efecto entre ambas variables (Betancourt y Caviedes, 2018).

Tabla 6. Acciones formativas llevadas a cabo por los MTE de cada perfil. Elaboración propia.

Perfil MTE [Grado o licenciatura/Máster/Doctorado]	*N*	Acciones formativas MTE						
		AF1	*AF2*	*AF3*	*AF4*	*AF5*	*AF6*	*AF7*
Matemáticas/Matemáticas/Matemáticas	34	28	28	29	18	21	28	18
Matemáticas/Educación Matemática/Educación Matemática	26	24	24	26	22	24	23	22
Matemáticas/No Aplica/Educación Matemática	13	11	13	11	11	10	11	9
Matemáticas/Educación/Educación Matemática	9	7	8	7	8	7	9	6
Matemáticas/No Aplica/Matemáticas	8	6	6	7	6	8	6	5

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta investigación pone de relieve varios aspectos importantes acerca de los MTE, en particular, sobre la relación entre su perfil formativo, el enfoque que ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado y la formación continua recibida. En relación con el primer objetivo, se han identificado cinco perfiles formativos predominantes, todos ellos con una formación de grado en Matemáticas. Alrededor de la mitad de los MTE consideran prioritario que su alumnado aprenda temas matemáticos escolares de manera profunda, si bien la formación continua recibida presenta una naturaleza muy similar en el conjunto de los individuos analizados. En relación con el modelo de conocimiento propuesto por Goodwin et al. (2014) se detecta que el conocimiento para la práctica es más variado entre los MTE, mientras que el conocimiento en y de la práctica presenta un panorama más homogéneo. Este hecho está relacionado con la homogeneidad del desarrollo profesional de los MTE.

En relación con el segundo objetivo, se han descubierto, por un lado, diferencias estadísticamente significativas sobre el enfoque que los MTE de diferentes perfiles utilizan en el aprendizaje de las matemáticas. Esto respalda que la trayectoria académica de los MTE influye de manera directa no solo en su conocimiento – para la práctica, según Goodwin et al. (2014) – sino también en sus prácticas profesionales. Por otro lado, se refleja que la formación continua recibida por los MTE no afecta de forma significativa al enfoque que ponen los MTE en el aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes. Siguiendo las directrices de Goodwin et al. (2014), lo anterior nos informa sobre el conocimiento en la práctica (análisis reflexivo de mi propia docencia) y el conocimiento de la práctica (investigaciones y/o estudios académicos sobre la formación de profesores) de los MTE. La escasa influencia que la formación continua recibida parece estar teniendo sobre el modo en que los MTE forman al futuro profesorado es preocupante, pues investigaciones previas defienden que estos dos tipos de conocimiento (en la práctica y de la práctica) juegan un papel fundamental en cuanto a la preparación de los MTE para el desarrollo de su profesión (Cochram-Smith y Lytle, 1999; Ozmantar y Agac, 2023).

A la vista de los resultados obtenidos, se concluye que la ausencia de acciones formativas especializadas para los diferentes perfiles de los MTE provoca que su formación académica no tenga impacto en el enfoque utilizado en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado. No obstante, no ocurre igual si nos fijamos en el perfil de los MTE, el cual sí influye en el enfoque utilizado por los MTE. Este descubrimiento suscita dentro de la comunidad científica de educación matemática una reflexión sobre si es necesario diseñar acciones formativas específicas para cada perfil, o si, por el contrario, es necesario mantener las acciones formativas homogéneas. En definitiva, sobre la base de los resultados y en consonancia con Pérez-Montilla et al. (2023), se concluye que el enfoque que

los MTE ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado informa sobre sus creencias y su conocimiento profesional.

A pesar de las limitaciones encontradas, las cuales fueron la existencia en el cuestionario de preguntas de opción múltiple que no han permitido tener un control sobre el orden ni la prioridad de las respuestas obtenidas, y la existencia de múltiples categorías con una baja representación de los MTE, este estudio supone un avance en cuanto a la investigación sobre la figura de los MTE. Además, a través de los resultados encontrados se abre la puerta a realizar un estudio similar en otros contextos diferentes al español y comprobar si existe relación con los hallazgos de esta investigación. En particular, resulta de interés analizar estos resultados a la luz de otros modelos de conocimiento de los MTE, pues, algunos de los aspectos aquí señalados se relacionan con algunos de los subdominios considerados en estos modelos. Por ejemplo, desde la perspectiva del MTESK (Martignone et al., 2022) los perfiles formativos se relacionan con el conocimiento de los temas y con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, y el enfoque que los MTE ponen en el aprendizaje de las matemáticas de su alumnado informa acerca de sus creencias.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto PID2021-122180OB-100 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Los autores pertenecen a la RED MTSK (https://redmtsk.net/). Además, Pablo Giadas agradece al proyecto PAPI-22-PF-12 del Vicerrectorado de Investigación de la Universidad de Oviedo, a través del Plan de Apoyo y Promoción de la Investigación.

Referencias

Appova, A. y Taylor, C. E. (2019). Expert mathematics teacher educators' purposes and practices for providing prospective teachers with opportunities to develop pedagogical content knowledge in content courses. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*, 179–204. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9385-z

Betancourt, A. y Caviedes, I. (2018). Metodología de correlación estadística de un sistema integrado de gestión de la calidad en el sector salud. *SIGNOS, 10*(2), 119–139. https://doi.org/10.15332/s2145-1389.2018.0002.07

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chapman, O. (2021). Mathematics Teacher Educator Knowledge for Teaching Teachers. En M. Goos y K. Beswick (Eds.) *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges* (pp. 403–416). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_21

Cochran-Smith, M. y Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. En G. Griffin (Ed.), *Review of research in education* (Vol. 24, pp. 249-305). American Educational Research Association. https://doi.org/10.3102/0091732X024001249

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators* (pp. 23-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

Ferretti, F., Martignone, F. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Mathematics teachers educator specialized knowledge model. *Zetetike, 29*(00), e021001. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661966

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). ¿Qué características debe tener un formador de profesorado de matemáticas? En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 275–282). SEIEM.

Giadas, P., Pascual-Martín, M.I, Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Contreras, L. C. (enviado). Perfiles de los formadores de profesores de matemáticas en el contexto universitario español.

Goodwin, A. L., Smith, L., Souto-Manning, M., Cheruvu, R., Tan, M. Y., Reed, R. y Taveras, L. (2014). What should teacher educators know and be able to do? Perspectives from practicing teacher educators. *Journal of Teacher Education, 65*(4), 284–302.

Martignone, F., Ferretti, F. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). What aspects can characterize the specialised knowledge of a mathematics teacher educator? *Educación Matemática, 34*(3), 301–328. https://doi.org/10.24844/em3403.11

Ozmantar, M. F. y Agac, G. (2023). Mathematics teacher educators' knowledge sources in teacher education practices. *Mathematics Education Research Journal, 35*, 175–201. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00382-x

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes. M. A. (2023). Una aproximación al conocimiento del formador de docentes de matemáticas en la formación inicial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 275–282). SEIEM.

Rojas, F. y Pascual, M.I. (2023). Profiles and beliefs of mathematics teacher educators on preservice teacher education: Development of an instrument. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds), *Proceedings of 13th CERME* (pp. 4816-4818). Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME.

Wu, Y., Hwang, S. y Cai, J. (2017). Being a Mathematics Teacher Educator in China: Challenges and Strategies Responses. International *Journal of Science and Mathematics Education, 17*, 1365–1384. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9752-8

CÓMO MIRAN PROFESIONALMENTE LOS FUTUROS MAESTROS EL VOCABULARIO, LAS EXPLICACIONES Y LOS EJEMPLOS EN LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES

How do student teachers notice vocabulary, explanations and examples in the teaching of fractions

González-Forte, J. M.[a] y Planas, N.[b]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Presentamos el estudio de una intervención formativa basada en tareas con futuros maestros de un Grado de Educación Primaria. La intervención se diseñó e implementó con el objetivo de ayudar a desarrollar la mirada profesional de los futuros maestros en torno a prácticas matemáticas lingüísticas en la enseñanza de fracciones. Nos centramos en una de las tareas profesionales con un diálogo maestra-alumna, a modo de representación de la práctica, donde la alumna muestra una dificultad común en la comprensión de la comparación de fracciones. El análisis de las respuestas a esta tarea permitió caracterizar procesos de identificar, interpretar y decidir vocabulario, explicaciones y ejemplos matemáticamente relevantes en la enseñanza y el aprendizaje de fracciones. Los resultados indican que los procesos de la mirada profesional desarrollados en relación con vocabulario y ejemplos son menos complejos que los desarrollados en relación con explicaciones.

Palabras clave: *mirada profesional, enseñanza de fracciones, futuros maestros, Educación Primaria, prácticas matemáticas lingüísticas.*

Abstract

We present research work on a task-based training intervention with student teachers of an Education Primary Degree. The intervention was designed and implemented to help develop the student teachers' noticing of some mathematical-linguistic practices in the teaching of fractions. We focus on one of the professional tasks with a teacher-learner dialogue as an instance of practice, where the school learner experiments a common challenge in the understanding of fraction comparison. The analysis of responses to this task allowed us to characterize some of the processes of identifying, interpreting and deciding on vocabulary, explanations and examples which are mathematically relevant to teaching and learning fractions. Our results show that the noticing processes developed in regard to vocabulary and examples are less complex that those in regard to explanations.

Keywords: *noticing, fraction teaching, student teachers, primary school education, mathematical-linguistic practices.*

INTRODUCCIÓN

El nuevo currículo LOMLOE de matemáticas para la Educación Primaria es explícito acerca de la importancia de una enseñanza que contribuya a desarrollar en los alumnos los modos de comunicación matemática para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas. Un reto en la formación de los futuros maestros de Educación Primaria es enseñar que la comunicación matemática, que incluye prácticas matemáticas lingüísticas, es una parte fundamental de lo que el maestro debe enseñar en el aula con los alumnos. En particular, el maestro debe ser modelo y facilitador de esta comunicación mediante la utilización de vocabulario, explicaciones y ejemplos matemáticamente relevantes para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos curriculares específicos

González-Forte, J. M. y Planas, N. (2024). Cómo miran profesionalmente los futuros maestros el vocabulario, las explicaciones y los ejemplos en la enseñanza de fracciones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 297-304). SEIEM.

(Caro y Planas, 2021). De acuerdo con estas reflexiones, en 2022 iniciamos una investigación en colaboración para diseñar, implementar y analizar una intervención formativa con futuros maestros acerca de usos matemáticamente relevantes de vocabulario, explicaciones y ejemplos en la enseñanza del concepto de fracción. El diseño de la intervención y de los materiales con la tarea profesional se presentó y discutió en González-Forte et al. (2022). En este texto presentamos y discutimos aspectos de la implementación de la intervención y analizamos el impacto que tuvo en los participantes con base en la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo miran profesionalmente los futuros maestros la utilización de vocabulario, explicaciones y ejemplos en la enseñanza de las fracciones?

MARCO TEÓRICO

Mirar profesionalmente es una competencia docente a desarrollar en los programas de formación inicial. En Dindyal et al. (2021), se señalan diferentes focos de la mirada profesional, como el pensamiento matemático de los estudiantes, los materiales curriculares o las interacciones en el aula. Un foco menos habitual e igualmente importante son las prácticas matemáticas lingüísticas en la enseñanza de contenidos matemáticos (González-Forte et al., 2022). Las herramientas lingüísticas para comunicar significados matemáticos son muchas e interactúan entre ellas. Sin embargo, es posible examinar algunas de las funciones de estas herramientas por separado (Halliday, 1978). En nuestra intervención seleccionamos vocabulario, explicaciones y ejemplos, asociados a prácticas matemáticas lingüísticas de nombrar (en respuesta a '¿qué es esto?'), explicar (en respuesta a '¿por qué ocurre esto?') y ejemplificar (en respuesta a '¿de qué es esto un representante?') con potencial didáctico en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Así pues, nuestro foco de la mirada profesional, con futuros maestros, atiende a estas prácticas matemáticas lingüísticas en una enseñanza de las fracciones orientada a apoyar aprendizajes con comprensión en el aula de primaria.

Para la caracterización de la mirada profesional y la facilitación de su desarrollo, tomamos las tres destrezas introducidas por van Es y Sherin (2002) y adaptadas en González-Forte et al. (2022): (1) Identificar vocabulario, explicaciones y ejemplos matemáticamente relevantes en la enseñanza de las fracciones; (2) Interpretar el vocabulario, las explicaciones y los ejemplos identificados con respecto a dificultades en el aprendizaje de las fracciones comunes en los alumnos de Educación Primaria; (3) Tomar decisiones, fundamentadas en las interpretaciones realizadas, para la mejora de vocabulario, explicaciones y ejemplos en la enseñanza de las fracciones. Hay dificultades cognitivas comunes en el aprendizaje de las fracciones que han sido ampliamente documentadas (ej., Carpenter et al., 1993; González-Forte et al., 2023). La dificultad de comprender que una fracción es un número, y no dos números naturales separados por una barra, es un ejemplo que sugiere la relevancia de utilizar vocabulario como "términos", "numerador" y "denominador" en la enseñanza junto con explicaciones sobre cómo las fracciones amplían el conjunto de los números naturales o el de los enteros, o sobre cómo el significado de fracción como número se asocia al de relación parte-todo, ej., las fracciones 1/3 y 2/6 son el mismo número que puede a la vez representar una parte de un todo dividido en tres partes iguales o dos partes de un todo dividido en seis partes iguales.

Son frecuentes las intervenciones formativas de desarrollo de la mirada profesional que siguen el modelo de proporcionar a los futuros maestros un documento teórico, que actúa como lentes teóricas, para luego pedir que las apliquen como respuesta a una tarea profesional (Dindyal et al., 2021). Las tareas profesionales consisten en representaciones de la práctica (Buchbinder y Kuntze, 2018) acompañadas de unas preguntas guía. Para una intervención con profesores de secundaria, en Rave-Agudelo y Planas (2022) se diseñaron diálogos ficticios entre profesores y alumnos sobre los cuales se plantearon preguntas. Se esperaba que las preguntas promovieran el desarrollo de procesos de identificar, interpretar y decidir vocabulario, explicaciones y ejemplos matemáticamente relevantes en el doble contexto de la enseñanza del concepto de ángulo en Educación Secundaria y de las dificultades en el aprendizaje de este concepto ilustradas a partir de las intervenciones de los alumnos en su interacción con el profesor de cada diálogo. En este tipo de intervenciones, el desarrollo de la mirada profesional de los participantes se acostumbra a facilitar tanto en situaciones de discusión en

grupo como de comunicación escrita. El conjunto de momentos de desarrollo de la mirada profesional es una práctica compleja y la selección de evidencias, escritas o de discusión en grupo, condiciona el acceso que desde la investigación se tiene a esta práctica (Mason, 2021).

MÉTODOS

Nuestro estudio tiene un enfoque esencialmente cualitativo e interpretativo de datos escritos. No obstante, de manera complementaria se tuvieron en cuenta resultados cuantitativos de frecuencias para sustentar la presencia de determinados procesos en la mirada profesional de los participantes.

Participantes e instrumento

Los participantes fueron 79 estudiantes de 3er curso del Grado de Maestro en Educación Primaria, que cursaban la tercera de las tres asignaturas obligatorias de educación matemática, destinada a desarrollar la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria con el objetivo de llegar a ser competente en la planificación de la enseñanza de las matemáticas, la interpretación de los niveles de aprendizaje y la gestión de la comunicación matemática en el aula. Habían cursado dos asignaturas de contenidos numéricos y geométricos.

La intervención del estudio formó parte de un módulo de enseñanza que consistía en dos sesiones de dos horas cada una (González-Forte et al., 2022). En la primera sesión, el primer autor explicó un documento teórico en el que se proporcionaba conocimiento sobre vocabulario, explicaciones y ejemplos matemáticamente relevantes para la enseñanza de fracciones. Cada herramienta lingüística se ilustraba con situaciones breves de enseñanza. Para el caso del vocabulario, se ilustraban situaciones de enseñanza en las que se utilizaba vocabulario matemáticamente relevante, que se contrastaban con otras situaciones en las que no se utilizaba este vocabulario. Lo mismo ocurría con explicaciones y ejemplos. Cada situación se conectaba con dificultades de comprensión de las fracciones comunes en los alumnos de Educación Primaria, a fin de mostrar cómo nombrar, explicar y ejemplificar en la enseñanza puede contribuir a favorecer su comprensión. Por ejemplo, el uso del vocabulario "partes de igual tamaño" en lugar de "partes" en "Si comemos una parte de una pizza dividida en cuatro partes de igual tamaño, dejamos tres partes sin comer" se incluyó como matemáticamente relevante porque puede ayudar a los alumnos de Educación Primaria a comprender que la unidad debe dividirse en partes de igual tamaño, aunque la forma sea diferente en magnitudes continuas. En nuestro estudio, esto no significa que no pueda utilizarse "partes" en contextos donde el tamaño igual se haya comunicado de manera explícita, sino que deben crearse y promoverse contextos de comunicación explícita en la enseñanza sobre cómo son las "partes" en una fracción.

Al final del documento teórico, todavía durante la primera sesión, se explicaba a los futuros maestros la persistencia de tres razonamientos incorrectos de los alumnos de Educación Primaria al comparar fracciones: el sesgo del número natural, basado en considerar que una fracción es mayor que otra si el numerador y el denominador son mayores; el razonamiento en diferencias, centrado en considerar que una fracción es mayor que otra si la diferencia entre el numerador y el denominador es menor; y el razonamiento inverso, con foco en considerar que una fracción es mayor que otra si el denominador es menor. El primer autor también comentó esta parte del documento teórico.

La segunda sesión consistía en resolver una tarea profesional, en la que se proporcionaban tres diálogos maestro-alumno sobre una situación de comparación de fracciones (representaciones de la práctica). Tanto las características de las prácticas matemáticas lingüísticas del maestro como el razonamiento del alumno diferían de un diálogo a otro. En esta comunicación nos centramos en el Diálogo 1, donde la maestra Raquel usa vocabulario y dos ejemplos matemáticamente relevantes, pero no usa explicaciones que puedan ayudar a la alumna Lucía a superar el razonamiento inverso. Este es un fragmento (donde aparece vocabulario y uno de los dos ejemplos):

> Raquel: Veamos otro ejemplo, con otros números. Si mi hermana come 1/3 de la tarta de chocolate y yo 1/7 de la tarta de merengue, ¿quién de las dos come más?

Lucía: Tu hermana vuelve a comer más. Por la misma razón.

Raquel: En este caso, ¿en qué fracción las partes son más grandes?

Lucía: En 1/3. En 1/3 corta menos partes, pero son más grandes. En 1/7 corta más, pero son más pequeñas.

Raquel: ¿Y cuántas partes hemos comido cada una?

Lucía: Uno, pero la de tu hermana es más grande que la tuya. Por eso come más.

Con el objetivo de analizar cómo los futuros maestros miran profesionalmente (identifican, interpretan y deciden) prácticas matemáticas lingüísticas de la maestra, tras leer cada diálogo, los estudiantes para maestro (EPMs) debían discutir y responder por escrito las siguientes preguntas: C1. Identifica vocabulario, explicaciones y ejemplos matemáticamente relevantes en el discurso de Raquel. C2.1. Con el vocabulario identificado en C1, ¿qué dificultades de comprensión puede estar ayudando a superar la maestra en su alumna? C2.2. Con las explicaciones identificadas en C1, ¿qué dificultades de comprensión puede estar ayudando a superar la maestra en su alumna? C2.3. Con los ejemplos identificados en C1, ¿qué dificultades de comprensión puede estar ayudando a superar la maestra en su alumna? C3. Según tus respuestas a C1 y C2, ¿realizarías cambios en alguno de los tres aspectos del discurso de la maestra? En caso afirmativo, ¿qué intervención en el diálogo modificarías, y por qué así se podría ayudar a la alumna a superar sus dificultades?

Los 79 EPMs resolvieron la tarea profesional en grupos de 2-3 personas, formando un total de 32 grupos de estudiantes para maestro (GEPMs). Tenían el documento teórico a su disposición por si querían consultarlo durante la resolución. Dada la dinámica de trabajo, las respuestas escritas no son individuales. No se registraron las discusiones que llevaron a desarrollar estas respuestas o que las precedieron. Nos referiremos, por tanto, a datos y resultados de los 32 GEPMs.

Análisis

El análisis de los datos se realizó por separado con respecto a las herramientas lingüísticas (vocabulario, explicaciones y ejemplos) y en diferentes fases con respecto a los procesos de la mirada profesional (identificar, interpretar y decidir). En una primera fase, se volcaron todas las respuestas escritas de los 32 GEPMs en una hoja de cálculo que facilitara la organización del vocabulario, de las explicaciones y de los ejemplos identificados en el diálogo (respuestas a C1). Esto permitió distinguir entre la identificación de vocabulario, explicaciones y ejemplos relevantes y no relevantes en el contexto de la enseñanza de las fracciones en Educación Primaria y de las demandas en la enseñanza asociadas al razonamiento inverso de Lucía u otros sesgos habituales en el aprendizaje de las fracciones. Por ejemplo, "numerador", "fracción" y "partes de igual tamaño" es vocabulario relevante, pero "más" o "trozos" en este contexto no lo es. La relevancia de las prácticas matemáticas lingüísticas de nombrar, explicar y ejemplificar en la enseñanza de la maestra Raquel se discutió dentro del contexto dado por el diálogo con la alumna Lucía. Como en el diálogo la maestra no utiliza explicaciones, esperábamos que los GEPMs identificaran su ausencia. Tras un análisis inductivo de las respuestas a C1, se construyeron categorías. Para el vocabulario, las categorías fueron: i) Identifican vocabulario relevante ii) Identifican vocabulario relevante y "representar gráficamente" iii) Identifican vocabulario relevante e irrelevante. Para los ejemplos: i) Identifican dos ejemplos ii) Identifican dos ejemplos y no ejemplos iii) Identifican un ejemplo iv) Identifican no ejemplos. Para las explicaciones: i) Identifican explicaciones ii) Identifican ausencia de explicaciones.

En una segunda fase, el volcado de datos se amplió para examinar la interpretación (respuestas a C2.1., C2.2 y C2.3), es decir, la relación entre lo identificado en C1 en cuanto a vocabulario, explicaciones y ejemplos relevantes y las dificultades con el aprendizaje de las fracciones. Esto permitió diferenciar entre: i) Los GEPMs que identificaban vocabulario, explicaciones y ejemplos relevantes y lo relacionaban con una dificultad (o dificultades) de comprensión que se estaba ayudando a superar ii) Los GEPMs que lo identificaban, pero lo relacionaban con otras dificultades, específicas del aprendizaje de las fracciones, no relacionadas con lo identificado iii) Los GEPMs que

lo identificaban, pero no lo relacionaban con ninguna dificultad. En estos dos últimos casos, se entendió que no había interpretación. Por ejemplo, el uso de "fracción", "número" y "numerador" puede ayudar a los alumnos a comprender que la fracción es un número representado con dos términos, numerador y denominador, cuya relación es multiplicativa ($a/b = a$ veces $1/b$); sin embargo, este vocabulario no ayudaría a comprender que representar gráficamente dos fracciones para compararlas requiere que ambas tengan igual todo. Tras un análisis inductivo de las respuestas a estas tres preguntas, se construyeron categorías. Para el vocabulario, las categorías fueron: i) Interpretan el vocabulario identificado ii) Interpretan parte del vocabulario identificado iii) No interpretan. Para los ejemplos: i) Interpretan los ejemplos identificados ii) Interpretan un ejemplo identificado iii) No interpretan. Al no haber explicaciones en el discurso de la maestra, no hubo ninguna categoría relativa a la interpretación de explicaciones. La identificación de ausencia de explicaciones lleva consigo la interpretación de que las explicaciones podrían ayudar a superar dificultades y no lo hacen.

En una tercera fase, se completó el volcado de datos para examinar la toma de decisiones (respuestas a C3). Esto permitió identificar qué cambios se propusieron en las prácticas matemáticas lingüísticas de la maestra del diálogo. Como la maestra no realiza explicaciones, esperábamos que los GEPMs propusieran explicaciones que ayudaran a Lucía a superar sus dificultades de comprensión. También era posible que los GEPMs añadieran más ejemplos y vocabulario matemáticamente relevantes en su modificación del diálogo. Tras un análisis inductivo de las respuestas a C3, se construyeron tres categorías: i) Deciden explicaciones ii) Deciden sobre explicaciones iii) No deciden.

RESULTADOS

Esta sección presenta tres resultados sobre: identificación e interpretación de vocabulario matemáticamente relevante, identificación e interpretación de ejemplos matemáticamente relevantes, identificación, interpretación y toma de decisiones de explicaciones matemáticamente relevantes.

Identificación e interpretación de vocabulario matemáticamente relevante

La Tabla 1 muestra el número de GEPMs según la identificación e interpretación del vocabulario en el diálogo. Solo 13 GEPMs identificaron vocabulario matemáticamente relevante y, de estos, 12 interpretaron su función con respecto a dificultades de comprensión de las fracciones. Las dificultades que más interpretaron que se podrían estar superando debido al correcto uso del vocabulario fueron la de "comprender que la fracción es un número representado con dos términos, numerador y denominador, cuya relación es multiplicativa ($a/b = a$ veces $1/b$)", asociada generalmente a "fracción", "número" y "numerador" (observado 10 veces); y la de "comprender que la unidad debe dividirse o repartirse en partes de igual tamaño, aunque la forma sea diferente en magnitudes continuas", asociada generalmente a "tamaño de la parte" y "partes de igual tamaño" (observado 9 veces). La interpretación de la dificultad de comprender la fracción como un número es importante porque Lucía piensa que una fracción es mayor "si el denominador es menor". Es decir, compara los denominadores de ambas fracciones por separado, sin tener en cuenta el numerador.

14 GEPMs identificaron vocabulario matemáticamente relevante en el diálogo, pero consideraron que "representar gráficamente" es vocabulario que ayuda a superar dificultades en la comprensión de las fracciones. De estos, 9 relacionaron el vocabulario identificado con las dificultades en la comprensión de la fracción. De nuevo, las dificultades más interpretadas fueron la de "comprender que la fracción es un número representado con dos términos, numerador y denominador, cuya relación es multiplicativa ($a/b = a$ veces $1/b$)" (observado 9 veces); y la de "comprender que la unidad debe dividirse o repartirse en partes de igual tamaño, aunque la forma sea diferente en magnitudes continuas" (observado 7 veces). Por último, 5 GEPMs identificaron vocabulario matemáticamente relevante, junto con vocabulario irrelevante en el contexto del diálogo (ej., "trozos", "más", "representar gráficamente", "cantidad"). Vemos estas respuestas distintas a las de los GEPMs que solo añaden "representar gráficamente" porque se señala vocabulario relativo a fracciones, vocabulario general del registro matemático (ej., "más") y vocabulario cotidiano (ej., "trozos").

Tabla 1. Número de GEPMs según identificación e interpretación de vocabulario

Interpretan / **Identifican**	El vocabulario identificado	Parte del vocabulario identificado	No interpretan
Vocabulario relevante	12		1
Vocabulario relevante y "representar gráficamente"	9	5	
Vocabulario relevante e irrelevante	3	1	1

Identificación e interpretación de ejemplos matemáticamente relevantes

La Tabla 2 muestra el número de GEPMs según la identificación e interpretación de los ejemplos en el diálogo. 23 GEPMs identificaron los dos ejemplos del diálogo. Sin embargo, solo 6 de ellos los interpretaron, es decir, relacionaron correctamente el ejemplo con la dificultad que podría estar contribuyendo a superar. 12 GEPMs relacionaron solo uno de los ejemplos correctamente con la dificultad. La dificultad que más interpretaron que se podría estar contribuyendo a superar en el diálogo fue la de "comprender que, para saber qué fracción es mayor, se debe considerar la cantidad de partes de igual tamaño en las que se divide el todo y la cantidad de partes que se toman", asociada al ejemplo "Y si mi hermana se come 1/3 de su tarta y yo 5/7 de mi tarta, ¿quién de las dos come más?" (observado 15 veces). La identificación de este ejemplo y la interpretación con la dificultad de comprender que hay que considerar tanto numerador como denominador es importante porque la alumna del diálogo piensa que una fracción es mayor "si el denominador es menor". Es decir, el ejemplo le debe permitir comprender que, para saber qué fracción es mayor, se debe considerar la cantidad de partes de igual tamaño en las que se divide el todo y la cantidad de partes que se toman.

Tabla 2. Número de GEPMs según identificación e interpretación de ejemplos

Interpretan / **Identifican**	Los ejemplos identificados	Un ejemplo identificado	No interpretan
Dos ejemplos	6	12	5
Dos ejemplos y no ejemplos	2		1
Un ejemplo		4	1
No ejemplos			1

3 GEPMs identificaron los dos ejemplos del diálogo, pero lo hicieron junto con otros fragmentos del diálogo que no eran ejemplos (ej., "¿Podrías representar gráficamente ambos números?" o "El tamaño de las partes en 2/3 es más grande"); de ellos, 2 interpretaron los ejemplos. 5 GEPMs identificaron únicamente un ejemplo del diálogo, interpretándolo 4 de ellos. Por último, 1 GEPM identificó fragmentos del diálogo que no eran ejemplos. A pesar de la diversidad de casos en las respuestas sobre ejemplos, se aprecian GEPMs que identifican ejemplos que no lo son para una situación de comparación de fracciones que ayude a superar las dificultades de la alumna Lucía.

Identificación, interpretación y decisión de explicaciones matemáticamente relevantes

La Tabla 3 muestra el número de GEPMs según su identificación, interpretación y toma de decisiones de explicaciones matemáticamente relevantes en el diálogo. 19 GEPMs identificaron e interpretaron la ausencia de explicaciones matemáticamente relevantes en el discurso de la maestra. Sin embargo, solo 7 decidieron introducir explicaciones especificando qué se necesitaba explicar y cómo. Las explicaciones que propusieron tratan sobre la dificultad de comprender que la unidad se debe dividir en partes de igual tamaño (observada 2 veces), la dificultad de comprender que la fracción es un número representado con dos términos en relación multiplicativa (observada 2 veces), la dificultad de comprender que para representar dos fracciones gráficamente y compararlas se requiere que ambas tengan igual todo (observada 2 veces), y la dificultad de comprender que, para saber qué fracción es mayor, se debe considerar la cantidad de partes de igual tamaño en las que se divide el todo y la cantidad de partes que se toman (observada 2 veces). Especialmente relevantes son las explicaciones

de la fracción como número (GEPM26: "Añadiríamos una explicación en la línea 11 y sería: recuerda que una fracción es un número representado con dos términos, numerador y denominador") y la de tener en cuenta numerador y denominador para comparar fracciones (GEPM28: "Le debería explicar que en una fracción debe tener en cuenta tanto el numerador, que son las partes que se cogen, y el denominador, que son las partes en las que se divide el todo") para una alumna como Lucía, que piensa que una fracción es mayor "si el denominador es menor".

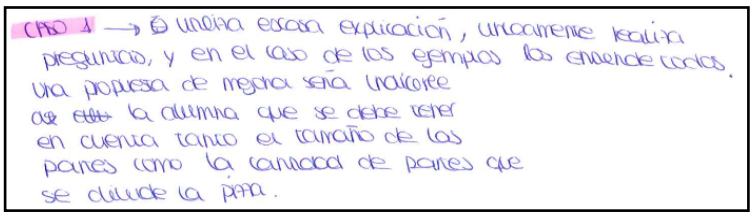
Tabla 3. Número de GEPMs según identificación, interpretación y toma de decisiones de explicaciones

Deciden / **Identifican-Interpretan**	Explicaciones	Sobre explicaciones	No deciden
Ausencia de explicaciones	7	8	4
Explicaciones	4	1	8

8 GEPMs decidieron explicaciones de manera general, especificando qué convenía explicar, pero no cómo hacerlo con enunciados concretos. Por ejemplo, GEPM18 respondió que "Se necesita realizar más explicaciones para poder entender la relación entre fracciones". Los otros 4 GEPMs no decidieron mejorar las explicaciones, a pesar de haber identificado su ausencia. De ellos, 1 GEPM decidió proponer un ejemplo ("Podríamos plantearle la siguiente actividad: Mi hermana ha comido 3/4 de pizza. Sin embargo, yo me he comido 5/10. ¿Quién ha comido más? Represéntalo gráficamente") que no era matemáticamente relevante en el contexto del diálogo, ya que no ayuda a Lucía a comprender que su razonamiento de comparación de fracciones es incorrecto.

Los 13 GEPMs restantes vieron explicaciones matemáticamente relevantes en el discurso de Raquel que carecía de ellas. De los 13, 10 GEPMs consideraron que "Te refieres a la relación entre el número de partes de igual tamaño y el tamaño de la parte" es una explicación, y 9 consideraron que "¿No deberíamos tener en cuenta también la cantidad de partes que cogemos? Es decir, el numerador" también lo es. Ante la pregunta de realizar cambios en el discurso, solo 5 de ellos decidieron mejorar las explicaciones. El resto consideró que las explicaciones de la maestra eran adecuadas y no era necesario mejorarlas ni añadir más. GEPM32 decidió incluir una explicación sobre la idea de que, para comparar fracciones, se deben considerar numerador y denominador (ver Figura 1).

Figura 1. Decisión de GEPM32



CONCLUSIONES

El actual estudio complementa el estudio de la intervención con los EPMs en Caro y Planas (2021), donde se trabajaron vocabulario y explicaciones matemáticamente relevantes en la enseñanza de la relación entre área y volumen. Ante nuestra pregunta, ¿Cómo miran profesionalmente los futuros maestros la utilización de vocabulario, explicaciones y ejemplos en la enseñanza de las fracciones?, las evidencias documentadas en las respuestas de los GEPMs indican que el documento teórico sirvió como lentes para que los futuros maestros, en el trabajo en grupo, miraran profesionalmente prácticas matemáticas lingüísticas de la maestra en el diálogo de la tarea (Dindyal et al., 2021).

El análisis de la implementación pone de relieve dos resultados. Por un lado, los futuros maestros, al mirar profesionalmente la utilización de vocabulario, explicaciones y ejemplos en la enseñanza de las fracciones, no siempre realizaron interpretaciones que mostraran su atención a dificultades comunes de comprensión de las fracciones en los alumnos de Educación Primaria, y a las dificultades de Lucía en particular. Por otro lado, hubo diferencias entre la comprensión de las tres herramientas lingüísticas

con respecto a su función didáctica en la enseñanza de las fracciones en el aula de Educación Primaria. Identificar vocabulario matemáticamente relevante no parece una tarea compleja para los GEPMs, a pesar de que en algunos casos identificaron la expresión "representar gráficamente". Interpretarlo tampoco parece complejo, pues la mayoría de GEPMs que identificó vocabulario relevante lo interpretó correctamente. Identificar ejemplos matemáticamente relevantes tampoco parece una tarea compleja para los GEPMs, a diferencia de interpretar los ejemplos, que sí parece una tarea más compleja ya que no siempre se asocian los dos ejemplos del diálogo con su potencial apoyo a superar dificultades en el aprendizaje de las fracciones. Finalmente, identificar explicaciones (o ausencia de explicaciones) no parece una tarea sencilla. Más de un tercio de los GEPMs consideraron la presencia de explicaciones cuando el discurso de la maestra se había diseñado sin que las hubiera. También fueron escasas las decisiones con explicaciones concretas para ser incluidas en el diálogo. Será interesante examinar qué ha ocurrido en las respuestas de los GEPMs a los otros diálogos y si la complejidad de mirar profesionalmente las explicaciones en la enseñanza se confirma.

Agradecimientos

PID2020-116514GB-I00 y PID2019-104964GB-I00, Gobierno de España; 2021SGR-159, Generalitat de Catalunya. Los comentarios de Ceneida Fernández a una primera versión del texto han sido de gran utilidad.

Referencias

Buchbinder, O. y Kuntze, S. (Eds.) (2018). *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving field* (ICME-13 Monographs). Springer

Caro, A. y Planas, N. (2021). Estudio exploratorio con futuras maestras sobre lenguas matemáticas para enseñar la relación entre área y volumen. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 19, 117–131. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i19.361

Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. A. (Eds.) (1993). *Rational numbers: An integration of research*. Routledge.

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education,* 53, 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2023). Incorrect ways of thinking about the size of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21, 2005–2025. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10338-7

González-Forte, J. M., Planas, N. y Fernández, C. (2022). Towards a newer notion: Noticing languages for mathematics content teaching. En C. Fernández et al. (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 315–322). PME.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning.* Edward Arnold.

Mason, J. (2021). Learning about noticing, by, and through, noticing. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 231–243. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01192-4

Rave-Agudelo, J. G. y Planas, N. (2022). Retos de alumnos de 11–15 años en el aprendizaje del concepto de ángulo: Una revisión de literatura para diseñar tareas profesionales. En T. F. Blanco et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 479–487). SEIEM.

van Es, E. A. y Sherin. M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571–596.

ESTRATEGIAS INFORMALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN POR ESTUDIANTES CON AUTISMO

Informal Strategies in Solving Permutation Problems without Repetition by Students with Autism

González-de Cos, L. [a], Goñi-Cervera, J. [b], Van Vaerenbergh, S. [a], Polo-Blanco, I.[a]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de Zaragoza

Resumen

En este trabajo se analizan las estrategias de resolución de problemas de combinatoria simple utilizadas por dos estudiantes con autismo escolarizados en educación secundaria. Se plantearon dos problemas de permutaciones sin repetición, contextualizados tanto en temáticas genéricas como en áreas de interés de los participantes. Ambos estudiantes utilizaron la estrategia de enumeración, predominando la de tipo sistemática, que llevó a la solución correcta. En el único caso en el que uno de los estudiantes utilizó la enumeración asistemática para resolver el problema, la respuesta obtenida fue incorrecta porque repitió varias de las combinaciones. Se observó una mayor motivación en la resolución de problemas contextualizados en temáticas de interés. Se busca aportar al cuerpo de investigación existente sobre problemas de combinatoria con alumnado TEA, con el fin de ayudar a los docentes a mejorar la enseñanza a alumnado con necesidades educativas especiales.

Palabras clave: *trastorno del espectro autista, educación secundaria, combinatoria, permutaciones, estrategias.*

Abstract

This work analyzes the problem-solving strategies of simple combinatorics problems used by two students with autism enrolled in secondary education. Two permutation problems without repetition were posed, contextualized in both generic themes and areas of interest to the participants. Both students used the enumeration strategy to solve the two problems, predominantly the systematic type, which led them to the correct solution. In the only case where one of the students used an a-systematic enumeration to solve the problem, the answer was incorrect because several combinations were repeated. Moreover, a higher motivation was observed in solving the problems in themes of interest. This study seeks to contribute to the existing body of research on combinatorics problems to students with ASD, with the aim of helping teachers improve their instruction for students with special needs.

Keywords: *autism spectrum disorder, secondary education, combinatorics, permutations, strategies.*

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de las matemáticas, la probabilidad desempeña un papel fundamental al interpretar y describir sucesos aleatorios que ocurren en la vida real (Batanero, 2005). Dentro del área de la didáctica de la matemática, existen numerosos estudios que analizan la comprensión y la aplicación de conceptos probabilísticos (Fischbein y Gazit, 1984; Green, 1982). La gran mayoría de ellos se centran en estudiantes de desarrollo típico, y son escasas las investigaciones que se centran en alumnado con necesidades educativas especiales, y en particular con trastorno del espectro autista (TEA). Esto resulta llamativo, especialmente considerando que en los últimos años se ha observado un incremento significativo de la presencia de estos estudiantes en las aulas ordinarias de todos los niveles educativos (Plaza Sanz, 2024).

González-de Cos, L., Goñi-Cervera, J., Van Vaerenbergh, S. y Polo-Blanco, I. (2024). Estrategias informales en la resolución de problemas de permutaciones sin repetición por estudiantes con autismo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 305-312). SEIEM.

La combinatoria, tradicionalmente, es una disciplina que se enseña dentro del ámbito del cálculo de probabilidades, enmarcándose en el sentido estocástico (Real Decreto 217/2022). Debido a su papel aparentemente periférico en el currículo, no obstante, su abordaje en las aulas a menudo enfrenta limitaciones de tiempo, lo que lleva a un enfoque didáctico centrado más en la memorización de definiciones y fórmulas que en el entendimiento profundo (Batanero et al., 1994; Navarro-Pelayo et al., 1996). Como consecuencia, la combinatoria presenta dificultades significativas a los estudiantes de diferentes niveles educativos, incluso a estudiantes universitarios (Roa, 2000).

El principal objetivo de este trabajo es analizar las estrategias utilizadas por dos alumnos con TEA escolarizados en un centro ordinario en 2.º Educación Secundaria Obligatoria (ESO) al resolver problemas de combinatoria simple, en concreto de permutaciones sin repetición. Además, se estudiará el desempeño en los distintos problemas distinguiendo si el contexto es o no de interés para los estudiantes, en base a los intereses personales de cada participante.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

La combinatoria es la parte de las matemáticas que estudia las diversas formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto. Existen distintas formas de realizar estas agrupaciones: variaciones, permutaciones y combinaciones, con o sin repetición. Las variaciones de n elementos tomados de r en r son las posibles muestras ordenadas de r elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos ($r \leq n$). Las permutaciones de n elementos son las posibles ordenaciones de un conjunto de n elementos distintos. Las combinaciones de n elementos tomados de r en r son las posibles muestras sin orden de r elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos ($r \leq n$).

Las estrategias informales que se pueden encontrar con más frecuencia en la resolución de los problemas de combinatoria simple cuando los estudiantes no reconocen la operación combinatoria son: la enumeración y el uso de estrategias aritméticas (Roa Guzmán et al., 2003). La enumeración consiste en el listado explícito de todas las combinaciones posibles a formar, de acuerdo con el enunciado del problema. La enumeración es una de las técnicas combinatorias básicas, aunque no se suele enseñar explícitamente, pues se supone una capacidad que se desarrolla espontáneamente (Batanero et al., 1997). Puede ser sistemática o asistemática, en función de si siguen un patrón un orden determinado para enumerar explícitamente las soluciones. La enumeración es el tipo de estrategia informal más utilizado cuando las dimensiones del problema son pequeñas y los estudiantes no tienen instrucción previa (Lamanna et al., 2022a).

Las estrategias aritméticas emplean las tres reglas combinatorias básicas de carácter aritmético, que son: las de suma, producto y cociente. La regla de la suma se usa cuando un conjunto de configuraciones combinatorias se determina como la unión de un número de subconjuntos mutuamente excluyentes. La regla del producto se utiliza cuando se realizan productos cartesianos de conjuntos de elementos un número dado de veces. La regla del cociente se emplea para relacionar entre sí combinaciones y variaciones o bien permutaciones ordinarias y permutaciones con repetición.

Existen numerosos estudios que ponen el foco en el desarrollo del pensamiento probabilístico en alumnado con desarrollo típico (Fischbein y Gazit, 1984; Green, 1982). Del mismo modo, podemos encontrar varios trabajos sobre el razonamiento combinatorio en distintas etapas educativas en España (Batanero et al.,1994; Navarro-Pelayo, 1994; Roa, 2000). Recientemente también se han realizado estudios en Italia con estudiantes de secundaria para estudiar las estrategias utilizadas en tareas de combinatoria con o sin instrucción previa para resolver problemas de permutaciones y combinaciones (Lamanna et al., 2020a y 2020b), donde se observó que la mayoría de las respuestas correctas provienen del uso de enumeraciones o fórmulas.

En el caso de alumnado con TEA, que suele presentar bajo rendimiento en la resolución de problemas matemáticos, debido a dificultades en funciones ejecutivas, en comprensión verbal y en percepción

social (Polo-Blanco et al., 2024), son pocas las investigaciones que abordan el aprendizaje de la combinatoria y/o probabilidad. En una de ellas, participaron 66 estudiantes escolarizados en Educación Especial, cuatro de ellos con TEA, que cursaban 1.º y 2.º de primaria (López-Mojica, 2013). En este estudio se pone de manifiesto, al igual que con estudiantes de desarrollo típico, que la enseñanza y el aprendizaje de los procesos probabilísticos son insuficientes en alumnado de necesidades especiales. Existen trabajos más recientes sobre probabilidad y alumnado con TEA que están relacionados con el diseño y la aplicación de un cuestionario de probabilidad adaptado a este estudiantado. A partir del cuestionario diseñado por Sabariego et al. (2021), otros estudios como el de González-Ruiz y García-Moya (2023) analizan las estrategias utilizadas por alumnado con TEA al resolver un problema de permutación sin repetición, siendo la enumeración sistemática la estrategia a la que recurrieron para resolverlo de forma correcta. Destacar también el trabajo de García-Moya et al. (2023) en el que los autores analizan los argumentos de cinco estudiantes de secundaria con TEA al comparar probabilidades simples, sacando en conclusión que los argumentos objetivistas determinan las elecciones de los cinco estudiantes.

Por otro lado, estudios previos han analizado la influencia de los intereses especiales del alumnado con TEA a la hora de resolver problemas de matemáticas (Goñi-Cervera et al., 2022; Polo-Blanco et al., 2021). Los focos de interés, que son frecuentes en personas con TEA, se caracterizan porque no son habituales en cuanto a su intensidad o temática. Los estudios anteriores concluyen que la motivación a la hora de resolver problemas matemáticos fue mayor cuando el contexto de estos estaba dentro de su interés especial, pero no se observó un mejor desempeño frente a los resultados obtenidos en contextos familiares.

En este trabajo se analizan las estrategias empleadas por dos estudiantes con TEA de 2.º de la ESO al resolver dos problemas de permutaciones sin repetición, uno en contexto de interés general, y el otro en contexto basado en el área de interés especial, tal y como se especifica en el apartado siguiente.

MÉTODO

Participantes

Los participantes fueron Álvaro y Bosco (seudónimos), dos estudiantes diagnosticados con TEA de 14 años escolarizados en diferentes centros ordinarios en 2.º de la ESO. Los dos estudiantes tenían un cociente intelectual de 93 y 104 respectivamente, medido por WISC-V. Se entrevistó a sus familiares para averiguar las áreas de interés de cada uno de los participantes. Álvaro se interesaba por los ordenadores y la informática, y Bosco tenía especial interés en los personajes de comic Mortadelo y Filemón. Los participantes no habían recibido instrucción formal previa sobre combinatoria antes de realizar el cuestionario.

Instrumento de recogida de datos

Para el presente estudio, se ha seleccionado uno de los ítems del cuestionario diseñado y validado por juicio de expertos de González-de Cos (2023), adaptado del ítem 1 del cuestionario original de Navarro-Pelayo (1994). El cuestionario de González-de Cos (2023) está diseñado para estudiar el desempeño en la resolución de problemas de combinatoria en estudiantado con TEA. En este estudio nos centramos en el primer ítem del cuestionario, de permutaciones sin repetición, por ser el único que consta de dos versiones: la primera en contexto general (que llamaremos Problema 1) resuelto por ambos participantes, y la segunda en contexto de interés especial de cada participante (Problemas 2-a y 2-b para Álvaro y Bosco respectivamente). Se detallan a continuación los tres problemas:

Problema 1: Contexto general (Álvaro y Bosco).

Tres alumnos son enviados a jefatura de estudios por alborotar en la clase. Tienen que esperar en fila delante de la puerta del despacho. Los alumnos se llaman Aitor, Bruno y Carlos. Podemos llamarlos A, B y C. Queremos escribir todas las formas posibles en las que pueden colocarse en fila delante de

la puerta. Por ejemplo, un orden posible es: Aitor, Bruno y Carlos. Siendo Aitor el que está más cerca de la puerta. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

Problema 2-a: Contexto basado en área de interés (Álvaro).

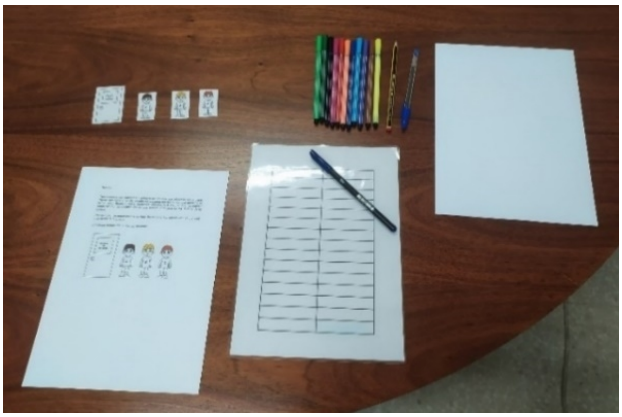
Tres ordenadores del aula de informática se han estropeado. Los nombres de los ordenadores son R (rojo), V (verde) y A (azul). Tenemos que elegir el orden en el que hay que arreglarlos. Queremos escribir todos los órdenes posibles en que pueden arreglarse los ordenadores. Por ejemplo, un orden posible es el ordenador R primero, V el segundo ordenador y A el tercero. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

Problema 2-b: Contexto basado en área de interés (Bosco).

A Aitor le regalan tres cómics de Mortadelo y Filemón. Los colores de las tapas de los cómics son R (rojo), V (verde) y A (azul). Tenemos que elegir el orden en que puede leerlos. Queremos escribir todos los órdenes posibles en que puede leer los cómics. Por ejemplo, un orden posible es leer el cómic R primero, V el segundo cómic y A el tercero. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

Para estos problemas, los estudiantes tenían a su disposición la hoja con el enunciado acompañado de un dibujo de una puerta y tres estudiantes (Problema 1), tres ordenadores de distintos colores (Problema 2-a) o tres cómics de distintos colores (Problema 2-b). Los estudiantes disponían de una tabla plastificada y un rotulador de pizarra, por si necesitaban realizar anotaciones. Se les proporcionaron las imágenes de los enunciados en forma de tarjetas plastificadas por si querían usarlo manipulativamente para colocar las distintas posiciones de los elementos e ir anotándolo en la tabla plastificada (ver Figura 1). También se les entregaron rotuladores de colores por si querían hacer anotaciones con distintos colores en la hoja del enunciado. La entrevistadora los animaba a leer solos los problemas y a resolverlo de la manera que consideraran oportuna utilizando el material disponible. Una vez resuelto cada problema, les pedía que explicaran el razonamiento que habían seguido.

Figura 1: Material proporcionado para realizar Problema 1



Categorías de análisis

Para analizar los resultados, se tendrán en cuenta las siguientes estrategias de resolución de problemas combinatorios (Roa, 2000): (1) Enumeración sistemática, si el estudiante lista todas las combinaciones posibles a formar siguiendo un patrón u orden determinado; (2) Enumeración asistemática, si el estudiante lista todas las combinaciones posibles a formar sin seguir un patrón u orden determinado y (3) Reglas combinatorias básicas, si el estudiante utiliza la regla de la suma, del producto o del cociente en la resolución de la tarea.

RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados según participante y contexto.

Tabla 1. Estrategias utilizadas y tipo de respuesta

	Estrategia		**Respuesta: Correcta (C)-Incorrecta (I)**	
	Álvaro	**Bosco**	**Álvaro**	**Bosco**
Problema 1 Contexto general	E-s	E-s	C	C
Problema 2-a y 2-b Contexto interés especial	E-a	E-s	I	C

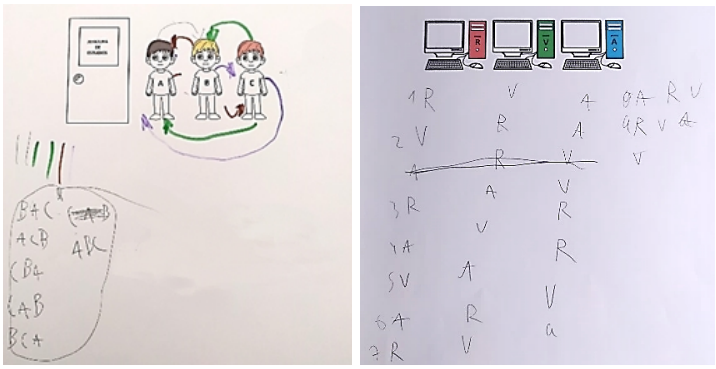
E-s: Enumeración sistemática; E-a: Enumeración asistemática

Álvaro

Problema 1: Contexto general

Para resolver este problema, Álvaro dibujó flechas con rotuladores de colores entre los tres alumnos que había dibujados en la hoja del enunciado. Además, hizo una raya por cada forma distinta de colocarlos en la puerta, cada una del color de una de las flechas dibujadas previamente (ver Figura 2). Realizó un conteo y expresó el número total de formas verbalmente. A continuación, la entrevistadora le animó a escribir las formas obtenidas como que se había detallado una a modo de ejemplo en el enunciado. Seguidamente, Álvaro procedió a escribir con letras iniciales de cada niño todas las formas que había hecho con las flechas de colores. De esta manera, se observa una estrategia de enumeración sistemática, que le llevó a la respuesta correcta, como se aprecia en la Figura 2 (izquierda).

Figura 2. Resolución de Álvaro al Problema 1 (izquierda) y al Problema 2-a (derecha)



Cuando la entrevistadora preguntó a Álvaro cómo había llegado a su respuesta, este respondió que había ido cambiando de sitio a los niños.

Problema 2-a: Contexto basado en área de interés

En este caso, Álvaro escribió directamente las formas posibles (ver Figura 2, derecha) en la hoja. Aunque expresó en voz alta que iba a mantener un orden para resolverlo, repitió algunas combinaciones, por lo que obtuvo una respuesta incorrecta. Se observa un uso de enumeración asistemática como estrategia de resolución que le llevó a una respuesta incorrecta, por no seguir un orden determinado a la hora de enumerar explícitamente las soluciones y repetir algunas combinaciones.

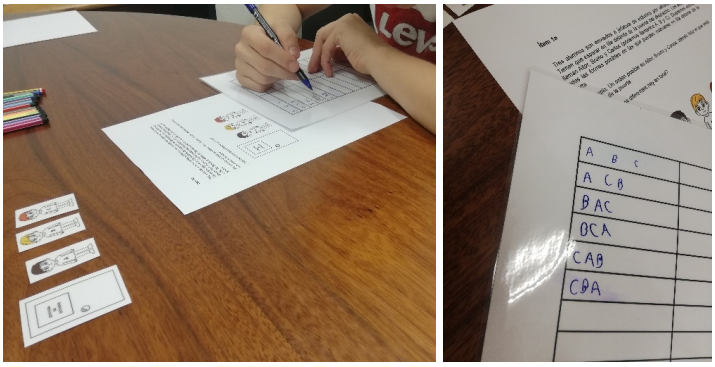
Bosco

Problema 1: Contexto general

Bosco mostró interés por utilizar la tabla plastificada para escribir las soluciones desde el principio. Escribió correctamente las seis posibles formas de colocar a los tres alumnos delante de la puerta de jefatura, intercambiando la posición de cada uno de los alumnos, siguiendo un orden determinado, como se aprecia en la Figura 3. Para ello empleó las letras iniciales de los nombres de los personajes

y fue escribiendo las distintas soluciones que obtenía poniendo en primer lugar la A, después todas las posibles combinaciones con la B en primer lugar, y por último todas las combinaciones con la C en primer lugar. Se aprecia por tanto un uso de la estrategia de resolución de enumeración sistemática.

Figura 3. Resolución de Bosco al Problema 1

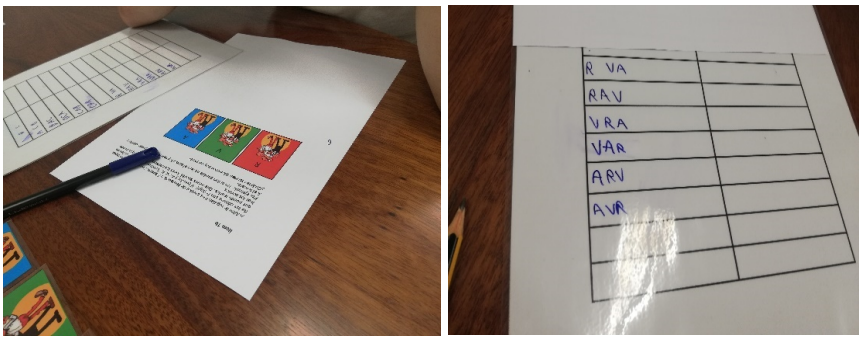


Tras preguntarle la entrevistadora cómo lo había resuelto, Bosco utilizó las tarjetas plastificadas para mostrarle su resolución, explicándole que la había resuelto cambiando de posición a los niños de izquierda a derecha.

Problema 2-b: Contexto basado en área de interés

Bosco reaccionó alegremente al ver en el enunciado a sus personajes favoritos Mortadelo y Filemón. Identificó que el problema era similar al anterior y contestó que serían seis formas. A continuación, escribió las seis formas empleando la misma estrategia que en el problema anterior, la enumeración sistemática, siguiendo el mismo orden para obtener las distintas soluciones, cambiando la posición de los comics, primero con R en primer lugar, después con V en primer lugar y por último con A en primer lugar, como se puede ver en la Figura 4.

Figura 4. Resolución de Bosco al Problema 2-b



A continuación, se presenta la conversación entre Bosco (B) y la entrevistadora (E) en la resolución del Problema 2-b:

B: Serían 6. Igual que estas (señalando en la tabla lo del problema anterior)

E: Y ¿las puedes escribir?

B: Lo hago aquí (señalando la tabla plastificada y escribiendo las formas) … así

E: Y, ¿qué es lo que has ido haciendo?

B: Lo mismo que en el anterior, cambiar las posiciones…

E: ¿Sigues algún orden para no repetirlas?

B: Mantengo uno y luego cambio el otro, y así sucesivamente… y así mismamente, pero con cada uno de ellos

E: Entonces ¿te salen…?

B: 6

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se han analizado las estrategias informales utilizadas por los dos estudiantes al resolver dos problemas de permutaciones sin repetición, en contexto general y en contexto de área de interés.

Se ha podido observar que la estrategia informal más utilizada por los dos estudiantes para resolver los problemas de permutaciones sin repetición fue la enumeración, en línea con estudios anteriores con estudiantes de desarrollo típico (Lamanna et al., 2022a). Los dos estudiantes recurrieron a la estrategia de enumeración sistemática en la resolución del Problema 1, contextualizado en temática general, Álvaro apoyándose en la representación gráfica del problema para obtener la lista de posibilidades y Bosco escribiendo en la tabla plastificada las distintas formas directamente. Posteriormente, Bosco utilizó las tarjetas de los niños para explicar a la entrevistadora cómo había intercambiado las posiciones de los mismos para encontrar las soluciones, pero no las utilizó para resolverlo como hicieron otros estudiantes con TEA en estudios con una tarea similar (González-Ruiz y García-Moya, 2023). En la resolución del Problema 2, contextualizado en temáticas de interés, Bosco mantuvo su estrategia sistemática que le llevó a la respuesta correcta, y Álvaro recurrió a una estrategia asistemática que le hizo cometer un error al repetir alguna de las combinaciones. Tal como se anticipaba, ninguno de los estudiantes recurrió a estrategias aritméticas basadas en reglas combinatorias, dadas las pequeñas dimensiones del problema (Lamanna et al., 2022a). Se observa un error de repetición en la obtención de las combinaciones, encontrado frecuentemente también en investigaciones con estudiantes de edades similares de educación secundaria de desarrollo típico (Lamanna et al., 2022a). En el estudio de González-Ruiz y García-Moya (2023), los participantes que resolvieron de forma correcta el problema recurrieron a la estrategia de enumeración sistemática.

En cuanto al desempeño según el contexto (de interés o general), se observó una mayor motivación a la hora de resolver los problemas contextualizados en temáticas de interés por parte de los dos estudiantes, aunque no dio lugar a mejores resultados, en línea con otros estudios previos con estudiantes con TEA (Goñi-Cervera et al., 2022; Polo-Blanco et al., 2021).

En este trabajo se han analizado las estrategias informales al resolver problemas de permutaciones en distintos contextos, lo cual aporta información sobre el significado que los participantes dan a situaciones de combinatoria y cómo se enfrentan a ellas para resolverlas. Aunque los resultados de este estudio de casos no se pueden generalizar al colectivo TEA, ciertos aspectos de las tareas, como el apoyo visual proporcionado, podrían haber facilitado la comprensión debido al buen procesamiento visual característico de personas con este trastorno. Otras adaptaciones similares podrían ser útiles en la enseñanza de la probabilidad a este grupo de alumnos. Además, la observación de errores similares en alumnos con desarrollo típico (Lamanna et al., 2022a) sugiere la posibilidad de tener como referencia estos estudios para profundizar también en las dificultades del alumnado con TEA y desarrollar pautas que ayuden a avanzar en sus estrategias de resolución.

Agradecimientos

Trabajo enmarcado en los proyectos PID2022-136246NB-I00, financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/FEDER, UE, y SUBVTC-2023-0014, financiado por el Gob. de Cantabria.

Referencias

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Síntesis.

Batanero, C. Navarro-Pelayo, V. y Godino, J.D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 181-199. https://doi.org/10.1023/A:1002954428327

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24. https://doi.org/10.1007/BF00380436

García-Moya, M., González, I. y Polo-Blanco, I., (2023). Argumentos del estudiantado con trastorno del espectro autista al comparar probabilidades simples: un estudio de casos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 37*(75), 91-109. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a05

González-de Cos, L. (2023). *Diseño de un cuestionario de problemas de combinatoria simple para alumnado de secundaria con TEA: un estudio de casos*. Trabajo Fin de Master. Universidad de Cantabria.

González-Ruiz, I. y García-Moya, M. (2023). Estrategias de estudiantes con autismo al resolver un problema de permutaciones sin repetición, *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM), 24*, 131-150. https://doi.org/10.35763/aiem24.4861

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I. y Bruno, A. (2022). El papel del lenguaje y del contexto en la resolución de problemas en alumnado con trastorno del espectro autista. *Formación del Profesorado en Educación Matemática, 14*, 71-85.

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years.* Tesis Doctoral. University of Loughborough.

Lamanna, L., Gea, M. M. y Batanero, C. (2022a). Secondary school students' strategies in solving combination problems. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME12), Febrero 2022, Bolzano, Italia.

Lamanna, L., Gea, M. M. y Batanero, C. (2022b). Do secondary school students' strategies in solving permutation and combination problems change with instruction? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*(3), 602-616. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00228-z

López-Mojica, J. M. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial*. Tesis de Doctorado inédita. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática, 8*(1), 26-39.

Plaza Sanz, M. (2024). *Informe descriptivo de los datos de alumnado no universitario con necesidades específicas de apoyo educativo asociado a discapacidad*. Confederación Autismo España.

Polo-Blanco, I., González, M. J. y Bruno, A. (2021). Influencia del contexto en problemas de multiplicación y división: estudio de caso de un alumno con autismo. *Siglo Cero*, *52*(1), 59-78. https://doi.org/10.14201/scero20215215978

Polo-Blanco, I., Suárez-Pinilla, P., Goñi-Cervera, J., Suárez-Pinilla, M. y Payá, B. (2024). Comparison of Mathematics Problem-Solving Abilities in Autistic and Non-autistic Children: the Influence of Cognitive Profile. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 54, 353-365. https://doi.org/10.1007/s10803-022-05802-w

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. (2022). Boletín Oficial del Estado, 76, 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Roa Guzmán, R., Batanero Bernabé, C. y Díaz Godino, J. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática, 15*(2), 5-25.

Sabariego, P., Polo-Blanco, I., García-Moya, M. y Goñi-Cervera, J. (2021) Diseño, construcción y validación de un cuestionario para evaluar el pensamiento probabilístico en alumnado con Trastorno del Espectro Autista. En: Vico, A., Vega, L. y Buzón, O. (Coord.). *Entornos virtuales para la educación en tiempos de pandemia: perspectivas metodológicas.* (pp.438-468) Dykinson S. L. España: Madrid.

PERSPECTIVA DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL SOBRE LA REALIZACIÓN DE ACTIVIDADES CONSTRUCTIVISTAS EN MATEMÁTICAS

Perspective of future Early Childhood Education teachers on the implementation of constructivist activities in mathematics

Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. y Saá-Rojo, M. D.

Universidad de Murcia

Resumen

En la actualidad, la investigación sobre la formación y las actitudes de futuros docentes en matemáticas está en auge. El objetivo del presente trabajo fue estudiar la percepción de los futuros maestros de Educación Infantil sobre su participación en la realización de una actividad práctica implementada a partir de un enfoque constructivista. Se empleó un diseño no experimental de corte cuantitativo descriptivo, en el que 273 estudiantes universitarios participaron en la realización de la actividad y en la cumplimentación de una encuesta tipo escala Likert. Los resultados mostraron que una gran mayoría de los intervinientes confirmó que este tipo de actividades ayuda a comprender que la construcción del conocimiento requiere tiempo y a reconocer que el papel del profesor es fundamental en la consecución de los objetivos de la tarea y en la adquisición de los contenidos matemáticos. También contribuye a mejorar la actitud de los futuros docentes hacia las matemáticas.

Palabras clave: *didáctica, matemáticas, constructivismo, futuros maestros, Educación Infantil.*

Abstract

Currently, research on the training and attitudes of prospective mathematics teachers is booming. The aim of this paper was to study the perception of future Early Childhood Education teachers about their participation in a practical activity implemented from a constructivist approach. A descriptive quantitative non-experimental design was used, in which 273 university students participated in the activity and in the completion of a Likert scale survey. The results showed that a large majority of the participants confirmed that this type of activity helps to understand that the construction of knowledge takes time and to recognise that the role of the teacher is fundamental in achieving the objectives of the task and in the acquisition of mathematical content. It also contributes to improving the attitude of future teachers towards mathematics.

Keywords: *didactics, mathematics, constructivism, future teachers, Early Years Education.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha puesto de manifiesto que las actitudes tienen un papel central en la construcción del conocimiento y en la respuesta del alumnado ante las matemáticas (Romero-García et al., 2024). Las metodologías basadas en el constructivismo favorecen la percepción de los estudiantes sobre las matemáticas y, adicionalmente, contribuyen a la mejora en la aplicación de conceptos y procedimientos matemáticos para la resolución de problemas (Friz et al., 2018). Esta investigación presenta la valoración de los estudiantes futuros maestros de Educación Infantil sobre la realización de actividades constructivistas en la asignatura de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

De forma general, y refiriéndonos a la formación de maestros en particular, la asignatura de matemáticas es percibida por los estudiantes como difícil, complicada y, en ocasiones, frustrante (García-Moya et al., 2020). Es por ello que diferentes investigaciones se centran en el estudio del

Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. y Saá-Rojo, M. D. (2023). Perspectiva de los futuros maestros de Educación Infantil sobre la realización de actividades constructivistas en matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 313-320). SEIEM.

dominio afectivo en educación matemática (Marbán et al., 2020). Las creencias, emociones y actitudes de los futuros docentes van a influir en su práctica docente (Bates et al., 2011), en su gusto y su percepción de utilidad de las matemáticas (Sánchez et al., 2022; Soneira et al., 2016) y en la importancia que otorgan al dominio de los conocimientos matemáticos para su futura labor docente (Gamboa y Moreira-Mora, 2017). Estas emociones de los futuros maestros también recalan sobre el aprendizaje de sus posteriores estudiantes (Cézar et al., 2018) y en los resultados de aprendizaje que estos últimos consiguen (Casis et al., 2017; Fernández-Cézar et al., 2018; Hunt y Sandhu, 2017).

Desde el punto de vista de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1998), la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que se basa en una pedagogía constructivista, orientada hacia la indagación en situaciones-problemas por parte del estudiantado y que asigna al profesor un papel de facilitador, de guía en el aprendizaje significativo, incide en la mejora de la adquisición de competencias y de la percepción que los discentes tienen de las matemáticas (Godino et al., 2015; Saá et al., 2023a, 2023b).

La participación activa de los futuros docentes en la construcción de ideas matemáticas y en el descubrimiento de conceptos no triviales, permite que evolucionen hacia el manejo de herramientas y metodologías docentes más eficientes desde su vivencia en primera persona en actividades constructivistas (Aragón et al., 2021; Friz et al., 2018). Estas actividades enseñan al futuro maestro a tener en cuenta que cada estudiante es diferente y a detectar sus necesidades reales, para contribuir en su formación plena y en el desarrollo del pensamiento lógico matemático.

Pero ¿qué opinan los futuros docentes sobre la realización de estas actividades? ¿Merecerá la pena el tiempo y el esfuerzo empleado en su realización si deciden aplicarlas cuando se dediquen a la docencia? ¿Contribuyen a mejorar su actitud hacia las matemáticas? Este trabajo trata de dar respuesta a todas estas preguntas de investigación.

METODOLOGÍA

Objetivo

El objetivo de este trabajo fue comprender y analizar la percepción de los estudiantes del Grado en Educación Infantil y de la Doble Titulación con Itinerario Específico de Grado en Educación Infantil y Grado en Educación Primaria sobre su participación en actividades constructivistas para el aprendizaje significativo del contenido de la asignatura de *Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil I*.

Diseño

Para dar respuesta a este objetivo de investigación, se llevó a cabo un enfoque descriptivo de corte cuantitativo, en el que se optó por un diseño de investigación longitudinal no experimental (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018), en el que se implementaron técnicas e instrumentos de recogida de información de carácter cuantitativo, más concretamente, se empleó la técnica del cuestionario y una encuesta tipo escala Likert como instrumento, durante dos cursos académicos.

Participantes

Los participantes en este estudio fueron los 273 estudiantes matriculados en la asignatura de *Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil I*, los dos grupos (mañana y tarde) de segundo curso del Grado en Educación Infantil y en el grupo único de la Doble Titulación con Itinerario Específico (DTIE), de una universidad pública estatal, durante los cursos académicos 2022/2023 y 2023/2024, tal y como muestra la Tabla 1. Concretamente, fueron 259 mujeres (94.87%) y 14 hombres (5.13%), con una edad media de 19 años y ocho meses (*DE* = 36 meses).

De entre el alumnado participante, 229 estudiantes (83.88%) accedieron a los estudios de grado mediante la realización y superación de la EBAU, mientras que el resto, 44 estudiantes (16.12%),

accedieron por otras vías (FP, acceso para mayores de 25 años, acceso para mayores de 40 años, etc.). Finalmente, solo 25 participantes afirmaron haber tenido alguna experiencia similar antes de comenzar sus estudios universitarios y en alguna otra asignatura del grado universitario (9.16%) frente a 248 participantes que indicaron no haberla tenido (90.84%).

Tabla 1. Participantes por curso académico y año

	Curso Académico	
	2022/2023	2023/2024
Grupo de mañana	71 (42.26%)	57 (54.29%)
Grupo de tarde	45 (26.79%)	27 (25.71%)
DTIE	52 (30.95%)	21 (20.00%)
Total	168 (100%)	105 (100%)

Instrumento

Para la recogida de información, se utilizó un cuestionario tipo escala Likert realizado ad hoc tras una revisión exhaustiva de la literatura y de estudios previos realizados en esta línea. El cuestionario constaba de 33 preguntas con cinco valores de respuesta (donde 1 significaba "Totalmente en desacuerdo", 2 "En desacuerdo", 3 "Indiferente", 4 "De acuerdo" y 5 significaba "Totalmente de acuerdo") clasificadas en tres dimensiones, relativas a la adquisición de competencias a través de la realización de la actividad constructivista (Saá et al., 2023a), sobre el desarrollo y la implementación de la actividad en sí y, por último, sobre la percepción general del alumnado de la actividad. En este trabajo se muestran solamente los resultados de las cuestiones pertenecientes a la tercera dimensión relativa a la percepción de los futuros docentes sobre las actividades-propuestas constructivistas para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

1. La experiencia, sin lugar a dudas, me servirá para adaptar actividades y aplicarlas en el aula de Educación Infantil
2. Me parece una actividad muy interesante
3. Creo que he aprendido mucho con la realización de esta actividad
4. No es necesaria su realización, ya que los conceptos se aprenden mejor de forma teórica
5. Es una actividad que ayuda al futuro profesor de la Educación Infantil a pensar y construir ideas
6. Este tipo de situaciones de aprendizaje ayudan a resolver problemas cotidianos
7. Participar ha mejorado mi actitud hacia las matemáticas
8. Me gustaría que se realizaran más actividades de este tipo a lo largo de este curso
9. Aunque en ocasiones me sentí perdida/o, finalmente creo que ha merecido la pena el esfuerzo
10. He comprendido que la construcción del conocimiento no es algo inmediato, requiere tiempo
11. Me doy cuenta de que, para lograr el nuevo conocimiento, el profesor ha planteado una sucesión de retos
12. Fui descubriendo diversos procedimientos para resolver el problema planteado siendo el último el nuevo conocimiento pretendido
13. El profesor me ayudó a descubrir el conocimiento adquirido y la forma de adquirirlo

Para contrastar la eficacia y potencia del instrumento, se calculó la fiabilidad y consistencia interna del cuestionario mediante el Alfa de Cronbach, obteniéndose un resultado de .951, considerado como excelente (George y Mallery, 2011). También se calculó el índice de Fiabilidad Compuesta y el índice de Varianza Media Extractada, resultando unos valores de .934 y .404 respectivamente, considerados

como excelentes-buenos (Hair et al., 2010). Por último, también se calculó la Omega de McDonald, obteniéndose un valor de .963, considerado excelente (Ventura-León y Caycho-Rodríguez, 2017).

También se realizó una validez de constructo del cuestionario sobre la variable latente "Percepción del alumnado sobre la realización de actividades constructivistas" a través de un Análisis Factorial Exploratorio (AFE), siguiendo el método de extracción de Componentes Principales y rotación Varimax, previo estudio de la no existencia de variables que no correlacionaran entre ellas o que pudieran causar multicolinealidad. Se obtuvo un valor significativo en el Test de Bartlett con $\chi 2$ (78) = 1872.963 y p-valor = .000, que rechazó la hipótesis nula consistente en que la matriz fuera similar a la matriz identidad. Se obtuvo un Índice de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) para la adecuación factorial de .921 considerado excelente (bueno a partir de .5), con un 47% de la varianza total explicada.

Procedimiento

Relativa a los contenidos de la asignatura Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil I y sobre los conocimientos lógicos y prenuméricos, se llevó a cabo una actividad con el alumnado con la finalidad de conseguir que los futuros docentes individualizaran gráficamente las propiedades del material lógico, de fomentar que se hiciera desde una situación constructivista a partir de una situación-problema y de ayudar al maestro en formación a darse cuenta de la forma de gestionar la situación por parte del profesor hasta que el alumnado consigue el nuevo conocimiento pretendido (Saá et al., 2023b). Finalizada la actividad, se administró el cuestionario al alumnado vía correo electrónico, siendo cumplimentado de forma individual y anónima a través de la aplicación web Encuestas de la Universidad de Murcia.

Análisis de la información

La información recogida con el cuestionario administrado fue tratada y analizada con el paquete estadístico de software libre R (R Core Team, 2023). Para la búsqueda de diferencias significativas en los ítems según variables sociodemográficas, se empleó la *U de Mann-Whitney* para variables independientes con dos niveles de respuesta y la *K de Kruskal-Wallis* para variables independientes con más de dos niveles (se tomó p-valor inferior a .05 y nivel de significación $\alpha = .05$). Aunque estos test no paramétricos actúan sobre la mediana de los datos, también se presentan en las tablas de estadísticos descriptivos la media y la desviación típica de los mismos.

RESULTADOS

La Tabla 2 y la Figura 1, muestran los estadísticos descriptivos de los datos obtenidos con las cuestiones de percepción de la actividad. Es muy llamativo que un 41.03% de los participantes manifestó estar totalmente de acuerdo con la cuestión 10, en la que se planteaba que la construcción del conocimiento no es inmediata, se necesita tiempo (90.11% estuvo de acuerdo o totalmente de acuerdo con esta afirmación). También una gran mayoría de estudiantes confirmó haber entendido que, para lograr el nuevo conocimiento, el profesor plantea una serie de retos (90.48% en cuestión 11) y ayuda al alumnado a descubrir el nuevo conocimiento y la forma de adquirirlo (66.7% en cuestión 13), afirmando que fueron descubriendo diversos procedimientos siendo el último el nuevo conocimiento pretendido (80.6% en cuestión 12). Un 77.3% indicó que, aunque en ocasiones se sintió perdido, el esfuerzo mereció la pena (cuestión 9).

El alumnado participante manifestó que las actividades planteadas son muy interesantes (74.4% en cuestión 2) y que había aprendido mucho (70% en cuestión 3). Un 59.7% estuvo totalmente en desacuerdo o en desacuerdo con la afirmación de la cuestión 4, en la que se preguntaba si los conceptos planteados en la actividad se aprenden mejor de forma teórica (solo un 21% de los participantes estuvo de acuerdo con esta afirmación).

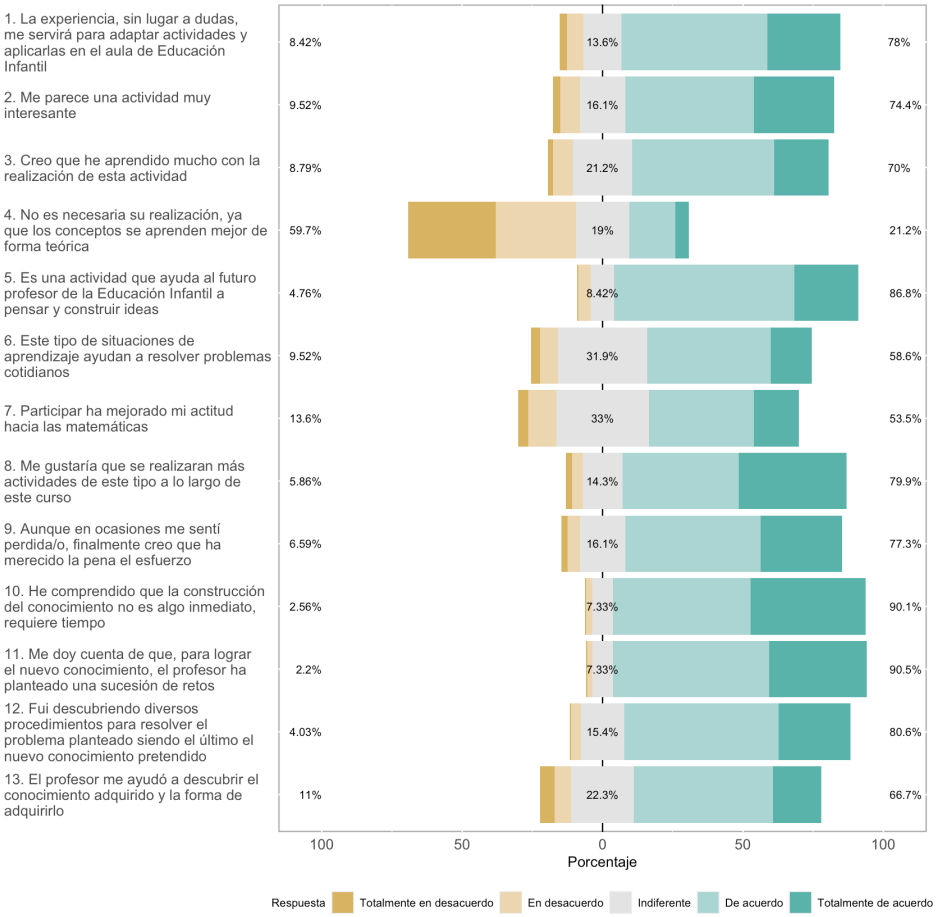
Por otro lado, un 86.8% de los informantes estuvo de acuerdo o totalmente de acuerdo con la afirmación de que la actividad ayuda al futuro profesor de Educación Infantil a pensar y construir

ideas (cuestión 5) y un 78% afirmó que estas experiencias le servirán para adaptarlas y aplicarlas en el aula de Educación Infantil (cuestión 1).

Tabla 2. Estadísticos descriptivos y porcentajes de respuesta en las cuestiones sobre percepción de la actividad

Cuestión	*N*	*Mín*	*Máx*	*Media*	*Mediana*	*Sd*	%1	%2	%3	%4	%5
P1	273	1	5	3.93	4	.93	2.56	5.86	13.55	52.01	26.01
P2	273	1	5	3.91	4	.98	2.56	6.96	16.12	45.79	28.57
P3	273	1	5	3.79	4	.90	1.83	6.96	21.25	50.55	19.41
P4	273	1	5	2.35	2	1.21	31.14	28.57	19.05	16.48	4.76
P5	273	1	5	4.04	4	.72	.37	4.40	8.42	64.10	22.71
P6	273	1	5	3.60	4	.93	3.30	6.23	31.87	43.96	14.65
P7	273	1	5	3.52	4	1.00	3.66	9.89	32.97	37.36	16.12
P8	273	1	5	4.10	4	.93	2.20	3.66	14.29	41.39	38.46
P9	273	1	5	3.97	4	.91	2.20	4.40	16.12	48.35	28.94
P10	273	1	5	4.28	4	.73	.37	2.20	7.33	49.08	41.03
P11	273	1	5	4.23	4	.69	.37	1.83	7.33	55.68	34.80
P12	273	1	5	4.02	4	.77	.37	3.66	15.38	54.95	25.64
P13	273	1	5	3.68	4	1.00	5.13	5.86	22.34	49.45	17.22

Figura 1. Descriptivo de las cuestiones sobre percepción de la actividad



Finalmente, las participantes indicaron que les gustaría que se realizaran más actividades de este tipo en su formación como futuros docentes (79.9% en cuestión 8), ya que ayudan a resolver problemas cotidianos (58.6% en cuestión 6) y mejoran su actitud hacia las matemáticas (53.3% en cuestión 7).

En cuanto a la existencia de diferencias estadísticamente significativas en estos ítems, no se detectaron según la variable sexo y según la modalidad de acceso al grado. Sí se detectaron diferencias

significativas según el curso académico en la pregunta 1 sobre la adaptación de estas actividades al aula de Infantil (W = 9974.5, *p-valor* = .047, d = .28; $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 4.03 y mediana = 4 en 2022/2023 frente a $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 3.77 y mediana = 4 en 2023/2024) y en la pregunta 13 sobre la ayuda del profesor a adquirir el conocimiento (W = 10474.0, *p-valor* = .005, d = .40; $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 3.83 y mediana = 4 en 2022/2023 frente a $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 3.44 y mediana = 4 en 2023/2024).

Respecto a la variable grupo, la tabla 3 muestra las diferencias significativas detectadas en varias cuestiones, revelando el post-hoc mayores puntuaciones para el grupo de DTIE y diferencias significativas de este grupo con los grupos del Grado en Educación Infantil.

Tabla 3. Diferencias significativas en las cuestiones respecto de la variable grupo.

Cuestión	*K*	*p-valor*	*eta*	Grupo mañanas		Grupo tardes		Grupo DTIE	
				Media	*Mediana*	*Media*	*Mediana*	*Media*	*Mediana*
P1	21.46	.000	.08	3.76	4	3.83	4	4.33	4
P2	34.44	.000	.13	3.66	4	3.79	4	4.45	5
P3	33.84	.000	.12	3.56	4	3.69	4	4.27	4
P4	6.00	.051	-	2.44	2	2.44	2	2.11	2
P5	20.83	.000	.08	3.96	4	3.89	4	4.34	4
P6	15.95	.000	.06	3.47	4	3.47	4	3.97	4
P7	5.07	.079	-	3.43	4	3.44	3.5	3.77	4
P8	15.91	.000	.06	4.00	4	3.94	4	4.44	5
P9	12.52	.002	.05	3.86	4	3.85	4	4.30	4
P10	21.31	.000	.08	4.16	4	4.17	4	4.60	5
P11	20.00	.000	.07	4.13	4	4.10	4	4.52	5
P12	21.12	.000	.08	3.86	4	3.96	4	4.36	4
P13	16.81	.000	.06	3.45	4	3.75	4	4.00	4

Respecto a la variable haber tenido alguna experiencia similar antes de acceder al grado, se detectaron diferencias significativas en la pregunta 2, sobre el interés (W = 4252.0, *p-valor* = .001, d = .66; $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 4.48 y mediana = 5 los que sí frente a $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 3.85 y mediana = 4 los que no) y en la cuestión 8 sobre la realización de más actividades (W = 4067.0, *p-valor* = .006, d = .55; $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 4.56 y mediana = 5 los que sí frente a $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 4.06 y mediana = 4 los que no).

Finalmente, respecto a la variable haber tenido alguna experiencia similar en las asignaturas del grado que están cursando, se obtuvieron diferencias significativas en la cuestión 1 sobre la adaptación de estas actividades al aula de Infantil (W = 3830.5, *p-valor* = .004, d = .6; $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 4.43 y mediana = 4 los que sí frente a $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 3.88 y mediana = 4 los que no) y en la cuestión 8 sobre la realización de más actividades (W = 3758.5, *p-valor* = .009, d = .50; $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 4.52 y mediana = 5 los que sí frente a $\overline{\boldsymbol{x}}$ = 4.06 y mediana = 4 los que no).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue analizar la percepción de los futuros docentes sobre su participación en la realización de actividades constructivistas para el aprendizaje significativo del contenido de la asignatura de matemáticas (Aragón et al., 2021). De forma general, se puede destacar que el alumnado valoró positivamente la realización de esta propuesta constructivista, afirmando que le había resultado muy interesante y que había aprendido los conceptos matemáticos, como después su rendimiento académico corroboró. Además, confirmó haber identificado el importante papel del profesor a la hora de ir planteando diferentes retos a los estudiantes y de guiarlos para descubrir el nuevo conocimiento y la forma de adquirirlo (Friz et al., 2018).

Los resultados muestran que el alumnado confirmó que este tipo de actividades ayudan a comprender que la construcción del conocimiento requiere tiempo y que surge después de haber comparado y manejado diversos procedimientos para resolver el problema planteado por el equipo docente. Los participantes indican que la implementación de estas actividades contribuye a una mejor comprensión

de los contenidos matemáticos en comparación con la clásica lección teórica (Aragón et al., 2021; García-Moya, 2020; Saá et al., 2023a). Además, también se comprobó que esta percepción sobre las bondades de estas actividades es aún mejor entre el alumnado perteneciente a la DTIE de Grado en Educación Infantil y Grado en Educación Primaria y entre aquellos estudiantes que afirmaron haber realizado actividades similares en otras asignaturas del grado universitario o durante su formación previa en primaria o secundaria.

Respecto a las limitaciones de este estudio, cabe destacar que se trata de una investigación puramente cuantitativa y que su complementación con un estudio cualitativo enriquecería los resultados obtenidos. En futuros estudios se podría plantear realizar grupos focales o entrevistas con los futuros docentes para consolidar su percepción en la participación en este tipo de actividades.

Como conclusión, esta investigación ha vuelto a poner de manifiesto que el diseño y puesta en práctica de actividades e iniciativas constructivistas ayuda a mejorar la actitud de los futuros maestros ante las matemáticas y la adquisición de contenidos matemáticos. Con estas metodologías, el papel principal recae sobre el estudiante, contribuyendo a fomentar el pensamiento, la deducción, el contraste y la búsqueda de soluciones, convirtiéndolo en generador de su propio aprendizaje; el profesor indirectamente es su gestor. Los resultados de este trabajo animan a continuar trabajando, no solo con estudiantes universitarios, sino también con estudiantes de cualquier etapa educativa.

Referencias

Aragón. L., Jiménez-Tenorio, N., Vicente-Martorell, J. J. y Eugenio, M. (2021). ¿Progresan las concepciones sobre la ciencia de futuros maestros/as tras la implementación de propuestas constructivistas para la alfabetización científica? *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, *16*(1), 78-95. https://doi.org/10.14483/23464712.15589

Bates, A. B., Latham, N. y Kim, J. (2011). Linking Preservice Teachers Mathematics Self-Efficacy and Mathematics Teaching Efficacy to Their Mathematical Performance. *School Science and Mathematics*, *111*(7), 325–333. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00095.x

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des Situations Didáctiques*. La Pensée Sauvage.

Casis, M., Rico, N. y Castro, E. (2017). Motivación, autoconfianza y ansiedad como descriptores de la actitud hacia las Matemáticas de los futuros profesores de educación básica de Chile. *PNA*, *11*(3), 181 203.

Cézar, R. F., Suárez, C. A. H., Núñez, R. P. y Leal, P. R. (2018). Dominio afectivo y prácticas pedagógicas de docentes de Matemáticas: Un estudio de revisión. *Revista Espacios*, *39*(23), 25. http://www.revistaespacios.com/a18v39n23/a18v39n23p25.pdf

Fernández-Cézar, R., Prada-Núñez, F., y Solano-Pinto, N., (2018). Beliefs towards Mathematics in Elementary Education Teachers: a comparative study. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, *1*(3), 329- 345. https://doi.org/10.31756/jrsmte.135

Friz Carrillo, M., Panes Chavarría, R., Salcedo Lagos, P. y Sanhueza Hernández, S. (2018). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile. *Revista electrónica de investigación educativa*, *20*(1), 59-68. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412018000100059&lng=es&tlng=es

Gamboa, R. y Moreira-Mora, T. E. (2017). Actitudes y creencias hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre estudiantes y profesores. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *17*(1), 1-45. https://dx.doi.org/10.15517/aie.v17i1.27473

García-Moya, M., Gómez-Escobar, A., Solano-Pinto, N. y Fernández-Cézar, R. (2020). Las creencias de los futuros maestros sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Espacios*, 41(9), 14. https://www.revistaespacios.com/a20v41n09/20410914.html

George, D. y Mallery, P. (2011). *SPSS for Windows Step by Step: A Simple Study Guide and Reference*. Pearson Education.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En, G. D‟Amore y M. I. Fandiño Pinilla (Comp.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249-269). Universidad de la Sabana.

Hair, J., Black, W., Babin, B. y Anderson, R. (2010). *Multivariate Data Analysis* (7th ed.). Pearson Prentice Hall.

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza Torres, C. P. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. Mc Graw Hill Education.

Hunt, T. E. y Sandhu, K. K. (2017). Endogenous and exogenous time pressure: Interactions with mathematics anxiety in explaining arithmetic performance. *International Journal of Educational Research*, *82*, 91-98. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.01.005

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del domino afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (18), 73-86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

R Core Team (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing.

Romero-García, C., Manzanal Martínez, A. I. y Palacios Ortega, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las Matemáticas. *AIEM-Avances de investigación en educación matemática*, *24*, 93-110. https://doi.org/10.35763/aiem24.4418

Saá-Rojo, M. D., Carrillo-Gallego, D., Dólera-Almaida, J., Ibáñez- López, F. J., Maurandi-López, A. y Sánchez-Jiménez, E. (2023a). Percepciones de futuros maestros sobre la adquisición de competencias lógico-matemáticas mediante actividades constructivistas. En C- Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 483-490). SEIEM.

Saá-Rojo, M. D., Carrillo-Gallego, D., Dólera-Almaida, J., Ibáñez- López, F. J., Maurandi-López, A. y Sánchez-Jiménez, E. (2023b). Estrategias en la formación matemático-didáctica de los estudiantes del Grado en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *114(julio)*, 23-42. https://sinewton.es/publicacion-numeros/articulo-2-114/

Sánchez Mendías, J., Segovia Alex, I. y Miñán Espigares, A. (2022). Ansiedad matemática, rendimiento y formación de acceso en futuros maestros. *PNA*, *16*(2), 115-140. https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.21703

Soneira, C., Naya-Riveiro, M. C., de la Torre, E. y Mato, D. (2016). Relaciones entre las dimensiones de las actitudes hacia las Matemáticas en futuros maestros. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 519-528). SEIEM.

Ventura-León, T., y Caycho-Rodríguez, J. L. (2017). El coeficiente omega: un método alternativo para la estimación de la confiabilidad. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales*, Niñez y Juventud, *15*(1), 625-627. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77349627039

TRANSICIÓN ENTRE SISTEMAS NUMÉRICOS PARA DESCRIBIR EL SENTIDO NUMÉRICO

Describing Number Sense by transitioning among number systems

Jiménez-Rubiano, L.[a,c], Piñeiro, J. L.[b], Ruiz-Hidalgo, J. F.[c]

[a]Universidad de Salamanca (España), [b]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile), [c]Universidad de Granada (España)

Resumen

Este trabajo intenta articular las componentes del sentido numérico y los significados de los diferentes sistemas numéricos. Para ello realizamos un análisis teórico tomando las componentes descritas por la literatura, los significados de los sistemas numéricos y las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del número en primaria denotadas en trabajos empíricos. Ello permite mostrar casos específicos del comportamiento de los sistemas numéricos en tres componentes, ratificando que existen dificultades en la transición de un sistema a otro e intentamos completar las habilidades observables que permiten detallar qué sucede con los diferentes sistemas relacionales numéricos en una componente. Se concluye que el sentido numérico no solo es un conjunto de habilidades dentro de un sistema relacional sino la capacidad de utilizar las propiedades de uno de ellos para interpretar, manipular y representar en otro.

Palabras clave: *habilidades numéricas, dificultades, aprendizaje del número, educación primaria*.

Abstract

This paper attempts to articulate the components of number sense and the meanings of different number systems. We carried out a theoretical analysis taking the components described by the literature, the meanings of the numerical systems, the difficulties that arise in the process of teaching and learning number in primary school denoted in empirical works. This allows us to show specific cases of the behavior of numerical systems in three components, ratifying that there are difficulties in the transition from one system to another and we try to complete the observable skills that allow us to detail what happens with the different numerical relational systems in a component. Finally, we claim that number sense is not only a set of abilities within a relational system but the capability to use the properties of one of them to interpret, manipulate and represent in another.

Keywords*: numeracy skills, difficulties, number learning, primary education.*

INTRODUCCIÓN

El sentido numérico es interpretado como la "comprensión general que va desarrollando una persona al interpretar, usar conceptos numéricos y operacionales, relacionarlos, emitir juicios, permitiéndole ser versátil en el diseño de estrategias de cálculo, facilitando desenvolverse en contextos variados y situaciones de su actividad cotidiana" (Jiménez-Rubiano et al., 2024). Desde sus apariciones en los 80, su definición ha generado controversia y no se ha consensuado una definición (Whitacre et al., 2020; Ghazali et al., 2021). Así mismo, su descripción está dada por un grupo de componentes que a nuestro modo de ver se hacen cuando se necesita abordar un contenido específico, otros intentan generalizar dicha descripción expresándolas en habilidades independientemente de los sistemas numéricos. Por ejemplo, Yang y Jan (2019) describen cinco componentes, una de ellas denominada reconocimiento del tamaño relativo de los números, que implica reconocer el tamaño de un número comparándolo con otro y expone el caso de determinar cuál de dos fracciones es mayor. Sin embargo, reconocer el tamaño relativo implica que el sujeto adquiera una serie de habilidades dependiendo del

Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2024). Transición entre sistemas numéricos para describir el sentido numérico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 329-336). SEIEM.

sistema numérico que use y del contexto en que esté inmerso. Otra componente hace referencia a las múltiples representaciones de un número y de las operaciones, implicando el uso de representaciones pictóricas o simbólicas. Sin embargo, es poco descriptiva al obviar qué sucede con las representaciones del número en cada sistema, si se presentan o no dificultades. Cuando se necesita identificar el sentido numérico para un contenido concreto o un sistema numérico particular (por ejemplo, cuando un docente quiere desarrollar el sentido numérico con fracciones), se debe recurrir a la especificidad de los significados de los contenidos en cada uno los sistemas relacionales numéricos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Puesto que el significado de los contenidos difiere para cada sistema numérico, consideramos que la noción y las componentes de sentido numérico (por detalladas que parezcan) no permiten detectar ni prever las habilidades específicas que debe desarrollar un sujeto, las rupturas ni las dificultades en el aprendizaje de sentido numérico. Vemos una desconexión entre estos dos aspectos (componentes vs sistemas numéricos) que consideramos deben articularse para completar al detalle las características del sentido numérico y comprender mejor cómo puede desarrollarse. Esto evidencia que deben tejerse relaciones entre las componentes y los diferentes sistemas relacionales que están inmersos en cada una. Esta misma idea de tejer algunos aspectos del sentido numérico la plantea Jordan et al. (2022) pero no con los mismos objetivos. Como consecuencia, nos preguntamos cómo podemos combinar las componentes del sentido numérico y los significados de los sistemas numéricos para explicitar habilidades observables que describan con detalle el sentido numérico en cada sistema numérico y cómo podemos facilitar la transición entre los sistemas numéricos en el proceso de aprendizaje. Para responder a esta pregunta, mostramos unos casos de cómo se comportan los diferentes sistemas numéricos en tres componentes del sentido numérico.

SISTEMA (RELACIONAL) NUMÉRICO

La noción de sistema numérico está extendida en la literatura. Skemp (1993) denomina sistema numérico a un conjunto de números en el que intervienen una o más operaciones como un sistema matemático. Se trata de una noción con interés escolar que no requiere la noción de estructura matemática, en la que se deben definir con precisión las relaciones entre los objetos y las operaciones por medio de propiedades. Este tipo de conjuntos se establecen por relaciones, por lo que Rico et al. (2020) manifiestan que una forma de organizar los contenidos matemáticos escolares requiere considerar, además del objeto y la operación, las relaciones (por ejemplo, en el caso de los números, el orden). Así, definen sistema relacional matemático o estructura relacional matemática como un conjunto de objetos matemáticos, donde estos se relacionan entre sí. Un ejemplo de sistema relacional numérico serían los números naturales (tal como se consideran escolarmente) junto con las relaciones de orden e igualdad, donde se pueden definir operaciones aritméticas con determinadas propiedades. Otros ejemplos escolares vendrían dados por los decimales, las fracciones, los números enteros… e incluso por subconjuntos de ellos donde se establezcan relaciones o se pueda operar.

Teniendo en cuenta la forma en que están organizados los sistemas relacionales, estos proporcionan una forma de trabajar y actuar matemáticamente que provee reglas de uso y relaciones de orden e igualdad (o equivalencia). Además, cada sistema relacional numérico escolar se dota de dos operaciones binarias (Skemp, 1993).

Los sistemas relacionales en la escuela

En la Educación Primaria en España (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022), los sistemas que se trabajan son:

- los naturales, priorizando su representación, los usos, descomposición y recomposición, la ejecución de las operaciones, estrategias de cálculo mental y la resolución de problemas en contextos de la vida cotidiana.

- las fracciones, se inicia con la comparación entre partes de una figura (idea de fraccionamiento) hasta establecer la fracción como unidad de medida. Priorizando su ubicación en la recta numérica y mecanización de algoritmos.
- los decimales, priorizando su lectura, representación hasta las milésimas junto con el uso de estrategias de cálculo mental.

MÉTODO

Para este estudio hicimos un análisis de contenido con categorías del sentido numérico a priori. Sabiendo que existen diversas definiciones de sentido numérico y su desglose en componentes y, aunque hay similitudes, no existe una caracterización universal (Whitacre et al., 2020; Ghazali et al., 2021). Las existentes son pequeñas pinceladas de descripciones de capacidades que se establecen en función del objetivo del estudio que las presenta. También, debido a su grado de generalidad suelen ser poco explícitas al no describir cómo se interpretan en diferentes sistemas relacionales numéricos y qué sucede en la transición de un sistema al otro.

Tomamos la caracterización de (Jiménez-Rubiano et al., 2024), quienes mediante un análisis de contenido consideran ocho componentes fundamentadas en aspectos epistemológicos y funcionales de la matemática escolar. Ellos las organizan en tres grandes grupos:

- Componentes relativas al número sin operación: (C1) Manipulación de las diferentes representaciones del número. (C2) Interpretación y uso del número en contexto, (C3) Conocimiento de las propiedades del sistema de numeración (numérico).
- Componentes relativas al número con operación (estructura aditiva y multiplicativa): (C4) Uso de las operaciones en contextos. (C5) Uso flexible de las propiedades de las operaciones. (C6) Relacionar las operaciones.
- Componentes relativas a aspectos procedimentales de números y operaciones: (C7) Crear procedimientos menos convencionales. (C8) Razonar sobre los hechos, procedimientos y resultados.

Para observar cómo se comportan los diferentes sistemas en una componente determinada tomamos las componentes relativas al número sin operación: C1, C2, C3 de (Jiménez-Rubiano et al., 2024). Posteriormente, siguiendo el modelo de Rico (2013) y Krippendorff y Wolfson (1990) realizamos un análisis de contenido del significado de los sistemas relacionales numéricos de las fracciones y decimales. Para los naturales tomamos el trabajo de Rico et al. (2008). Asimismo, buscamos investigaciones empíricas que tratasen como tema central las dificultades del aprendizaje de los sistemas relacionales numéricos, de tal manera que, pudiéramos triangular la información y describir el comportamiento de cada sistema numérico dada una componente.

COMPORTAMIENTO DE LOS SISTEMAS RELACIONALES NUMÉRICOS EN UNA COMPONENTE

C1. Manipulación de las representaciones del número. Los números pueden tomar varias formas, pueden pensarse y manipularse de muchas maneras, como símbolos y representaciones graficas (McIntosh et al., 1992; García y Adamuz, 2019). Las representaciones de cada sistema relacional hacen parte de su identidad, son como su huella digital. Por tanto, varían de un sistema a otro.

Cada sistema numérico, como complejo de entes, relaciones y operaciones, no puede expresarse ni entenderse en su totalidad mediante un único sistema de representación, por muy sofisticado que este sea; por ello, la enseñanza y aprendizaje de los sistemas numéricos hay que abordarla desde la coordinación de varios sistemas de representación complementarios. (Rico et al., 2000, p. 3)

En cada sistema se atribuye una precisión del lenguaje y manipulaciones que permite identificar la diferencia entre objetos, su nombre y las distintas representaciones de este (Centeno, 1998, p. 67).

Las representaciones suelen organizarse en simbólicas, orales/escritas y modelos (gráficos, concretos…). Cuando hablamos del sistema de representación simbólico, existe relativa homogeneidad. Para los naturales, conocemos los símbolos del sistema hindú-arábigo {1, 2, 3, …}. En el caso de los ordinales, los símbolos son los mismos, pero se les añade un superíndice o letra volada denominado indicador ordinal y se escribe con (°, ª). La manipulación simbólica es tan habitual que en muchas ocasiones identificamos el símbolo con el número. Para los números grandes, requerimos el sistema de numeración decimal y todas sus propiedades no triviales (aditivo, multiplicativo, posicional, uso del cero, …) que dificultan su aprendizaje. La lista de números es lo primero que se aprende y después lo que significan los dígitos dependiendo de su posición: el orden suele presentarse como un problema (Llinares, 2001).

Para el caso de los decimales, dado que gracias a que el sistema de numeración permite extender el natural al decimal, las adaptaciones simbólicas son mínimas, simplemente añadimos un símbolo para identificar las unidades y añadimos dígitos a la derecha de la unidad para indicar partes de la unidad siguiendo los principios del sistema de numeración decimal. Aun así, observamos confusiones por parte de los estudiantes en cuanto al orden (Centeno, 1998; González-Forte et al., 2022).

Caso aparte son las fracciones. La simbología requiere el uso de dos numerales y una barra horizontal separadora. En este sistema, no rigen los principios del sistema de numeración como en los otros, la relación de orden pasa a requerir transformaciones de los símbolos y la relación de igualdad es una relación de equivalencia más general. La simbología es manifiestamente diferente. Por ejemplo, cuando se pide a un escolar determinar la fracción mayor entre 2/3 y 7/8, tienden a establecer 7/8 como cantidad mayor, justificando que siete es mayor que dos, o que siete y ocho son mayores que dos y tres, ello se presenta debido a que se trae consigo el dominio de la estructura de los naturales (González-Forte et al., 2018).

Representación oral o escrita. La representación verbal también varía de un sistema a otro. Para hablar de los números naturales usamos su nombre cardinal o su nombre ordinal, dependiendo del escenario en el que los estemos utilizando. Así, el número tres porque representa la cantidad tres, o puede ser tercero si estamos considerando el orden. A diferencia del sistema de representación simbólico, no hay una única forma de nombrar números. Así, por ejemplo, 135 es ciento treinta y cinco, pero también es 1 centena, 3 decenas y 5 unidades o 13 decenas y 5 unidades (Llinares, 2001). Atención especial requieren los números "grandes" y las dificultades en nombrarlos. ¡Y qué decir de los ordinales!

En el caso de los decimales la nomenclatura tampoco es sencilla ni única: 0,5 es cero coma cinco en su modo más literal, pero también es 5 décimas. Al nombrar las fracciones no se hace referencia a una sola palabra sino a combinaciones, por ejemplo 2 de 4; 2/4; dos cuartos, …. Con palabras es imposible trabajar el orden o la equivalencia.

Modelos. Son los tipos de representaciones que permiten asociar las acciones con los objetos, aunque distanciándose de ellos. Los modelos prescinden de muchas características de un objeto quedándose con las más importantes para la situación modelizada por ello pueden llegar a ser más manejables que los propios objetos. Son una forma de manipular, no específica ni concreta. Pueden ser de muy diversos tipos, cada uno con sus características (Flores P, Berenguer L, Macías C, Miras J y Alba J, comunicación personal, 2012). Se modeliza a través de esquemas (dibujo, puntos, símbolos) y con material manipulativo que permiten representar la situación. Podemos realizar una clasificación inicial de los modelos como discretos y continuos como lo son los modelos cardinales, de contador, lineales. Para los naturales, el modelo cardinal, mediante el cual cada unidad es representada por un objeto, es uno de los más usuales. Sin embargo, los decimales son difícilmente representables en un modelo cardinal lo que dificulta su generalización desde los naturales. Con las fracciones el modelo cardinal es utilizable, pero más allá de la identificación del uso parte-todo, es poco útil (¿cómo determinar la equivalencia o el orden de dos fracciones representadas con un modelo cardinal?).

Representaciones mediante dibujos, esquemas, gráficos, rectas numéricas. En el caso de los naturales tenemos representaciones de objetos concretos y la recta numérica. En las fracciones y en los decimales tomamos como punto de partida un objeto para representar sus divisiones o fraccionamientos, y el uso de modelos gráficos se incrementa, sobre todo el uso de modelos continuos como el lineal (recta) y el de área. Las representaciones facilitan la movilidad de ideas que propician entender un concepto. Cuando se pasa de un sistema a otro y no se tienen claras las diferencias entre las representaciones de los sistemas, estos pueden obstaculizar el procesamiento de la información para su correcta comprensión.

C2. Interpretación del número en contexto en términos de decisiones dadas las diversas situaciones. (p.e. Almeida y Bruno, 2014). El significado del número varía según el uso y así mismo su representación. Al igual que las fracciones, los decimales son densos sobre la recta. Esto quiere decir que entre dos fracciones o decimales a y b siempre podemos ubicar otros muchos, lo que los hace especialmente aptos para expresar cantidades de medida de magnitudes. En contextos continuos donde se requiere un reparto equitativo se hace uso de la fracción y aquí es interpretada como cociente tras hacer dicho reparto. Sin embargo, en los naturales los repartos se hacen con cantidades discretas y aquí el uso de los naturales no está dado como cociente.

Los diferentes sistemas relacionales (naturales, fracciones, decimales) tienen usos específicos que hacen que la interpretación varíe y que no se encuentre una secuencialidad o un hilo conductor entre un sistema y otro, lo que puede generar ruptura en el aprendizaje. Pues, para los estudiantes, son como saltos cognitivos entre las interpretaciones de los conceptos.

C3. Conocimiento de las estructuras numéricas de cada sistema relacional[4]: Implica el conocimiento de las propiedades, del cómo funciona el sistema (p.e. NCTM, 2003). Al hablar del sistema relacional de los naturales necesariamente tendremos que hacer referencia a la base de numeración con la que este sistema se agrupa (diez), conocida también como sistema de "numeración decimal", el valor de posición, valor de las potencias y sus propiedades o relaciones.

Cuando hablamos de una extensión de los naturales pasamos de los naturales a los decimales, con la ventaja de trabajar con la misma base diez. Cuando se trabajan con medidas de magnitudes continuas, existe un momento en el que los naturales son insuficientes (González-Forte et al., 2022) y se hace necesario usar las fracciones, pero las propiedades de los naturales no son las mismas para las fracciones, lo que hace que carezcan de valor en este sistema, por lo que este nuevo sistema tiene sus propias ideas y reglas.

En esta componente se resalta que: 1) aunque los sistemas relacionales de los naturales, las fracciones, los decimales sean una extensión de los naturales, la forma en la que están construidos los nuevos números y cómo se representan, hace que cambie su estructura y sus reglas. 2) Los naturales, quizá por ser el primer sistema numérico que abordan los sujetos, tiende a quedar muy arraigado en los escolares y, a medida que se abordan los otros sistemas numéricos genera obstáculos de aprendizaje, lo que comúnmente es llamado "sesgo del número natural" (González-Forte et al., 2018; González-Forte et al., 2022).

REFLEXIONES FINALES

Al hacer el ejercicio de examinar cómo se comportan los diferentes sistemas numéricos dentro de las componentes C1, C2 y C3, relacionadas con el número, representación y uso, consideramos que una de las habilidades generales que pueden describirlas o completar aún más estas componentes es

[4] Jiménez-Rubiano et al. (2024) lo denominan "conocimiento de las propiedades del sistema de numeración decimal" sin embargo, cuando hacemos referencial a los diferentes sistemas relacionales numéricos no solo se tienen en cuenta las propiedades del sistema de numeración decimal sobre el cual están construidos los naturales sino de la estructura y las propiedades de cada sistema relacional numérico, por ello, consideramos que puede renombrarse como una componente que trata del conocimiento de la estructura de los diferentes sistemas numéricos para hacerla generalizable

reconocer y diferenciar el valor de un número según lo que este represente, la posición y ubicación para nombrarlo y escribirlo simbólicamente, teniendo en cuenta que los sistemas tienen usos determinados que dada una situación llevan a diferentes interpretaciones. Específicamente para los naturales algunas de las habilidades que describen el sentido numérico son:

- Representaciones: manipular e interpretar representaciones diferentes (numerales y verbales) y los modelos cardinal y lineal.
- Usos: Identificar que los usos y representaciones del número dependen del contexto (conteo, cuantificación o uso cardinal, ordenar, medición discreta, nombrar o etiquetar).
- Relaciones: ordenar naturales.

Para el caso de los decimales, los ejemplos de habilidades específicas son:

- Representaciones: escribir números decimales, utilizar representaciones continuas (como la lineal), … (Nótese que la continuidad es una de las cualidades representacionales que se identifica con la densidad).
- Relaciones: ordenar decimales, identificar cuándo dos decimales son iguales, escribir un decimal entre dos dados, … (aquí aparecen dificultades y características añadidas a las relaciones en los naturales producto de las características del sistema decimal de numeración y el uso de dígitos que representan partes menores que la unidad).
- Usos: Identificar y comprender los usos y representaciones del número en contextos continuos. A diferencia de los naturales, el conteo y la cuantificación no son usos de los decimales que, si generalizan la medida discreta a cualquier tipo de medida, pero que no se utilizan para ordenar ni para etiquetar habitualmente.

En el caso de las fracciones:

- Representaciones: manipulación de modelos continuos donde se permitan identificar la densidad. Aunque las representaciones discretas se pueden hacer, es habitual el uso de las continuas, no solo lineales, sino también de área.
- Relaciones: ordenar fracciones (sabemos que hay dificultades añadidas a las de los naturales y decimales, relacionadas con la forma de representar la fracción) y determinación de equivalencia (que es una relación más compleja que la de igualdad de los naturales y decimales ya que hay fracciones con diferente expresión e interpretación que son equivalentes).
- Usos: Comprender lo que la representación de la fracción tiene implícito y que la fracción tiene varios usos dependiendo del contexto donde se use (cociente, razón, operador…)

Realizar un análisis detallado de las componentes en cada uno de los sistemas relacionales numéricos permite completar y detallar dichas componentes, de tal manera que sean más ricas al ser más explícitas. Permite ver las habilidades observables, las dificultades, obstáculos o rupturas y conexiones que son evidentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los diferentes sistemas relacionales numéricos y que describen la transición del sentido numérico de un sistema a otro. Estas dificultades o rupturas pueden ser tan evidentes que se obvian y, es ahí donde, a la fecha, no se ha articulado componentes con los sistemas numéricos y se continúa enseñando sin tener en cuenta los procesos por los que pasa el estudiante cuando muda de un sistema a otro. Esta conclusión coincide con los planteamientos de Herrera y Zapatera (2019) quienes consideran que el sistema educativo y muchos docentes no reconocen que "durante el aprendizaje de los números naturales en la Educación Primaria, el estudiante adquiere la concepción de número como cantidad de magnitud con soporte en

el mundo físico y concreto. Posteriormente, la generalización de esta concepción a otros campos numéricos supone un obstáculo epistemológico que dificulta su aprendizaje" (p. 197).

Conscientes de las diversas definiciones existentes de sentido numérico y sus caracterizaciones dadas como habilidades que debe tener un sujeto, consideramos que dichas habilidades, también llamadas componentes son poco descriptivas e incluso se pueden considerar incompletas, haciéndolas poco fiables y certeras para hablar de los entes que intervienen en el sentido numérico. Debido que al hacer referencia al sentido numérico y su transición entre sistemas numéricos en la primaria no solo hacemos referencia a un sistema numérico, sino a todos los sistemas que el sujeto encuentra a lo largo de esta etapa. Ello implica conocer cómo funciona cada sistema, detallarlo, ver sus características implícitas y hacerlas explícitas. Así, no podemos hablar de sentido numérico como un conjunto de habilidades de un solo sistema relacional, sino que debemos incluir en su descripción la capacidad de adaptación de estas habilidades para utilizar las propiedades de uno de ellos al interpretar, manipular y representar en otro. Es decir, es parte del sentido numérico la(s) habilidad(es) para trasladarse entre sistemas numéricos y conocer sus semejanzas y diferencias, que serán más extremas según avancemos en la edad escolar.

En síntesis, desde la aparición de la noción de sentido numérico la evolución de sus descripciones ha sido poca, el foco de investigación ha estado puesto en gran parte en determinar si el sujeto tiene o no sentido numérico (p.e Yang y Jan, 2019; Almeida y Bruno, 2014), pero, por otro lado, se han detallado los obstáculos de aprendizaje en cada sistema numérico (p. e. Herrera y Zapatera, 2019; González-Forte et al., 2022) y sin embargo, no encontramos en la literatura un vínculo entre estos dos factores, por tanto, consideramos importante entrar a combinar estos dos aspectos pues no son factores distintos o inconexos y hacen parte del todo que envuelve o entrelaza al sentido numérico y que permite desarrollarlo y describirlo progresivamente. En parte esta postura es acorde con Jordan et al. (2022) quienes plantean que el sentido numérico es una trenza que se va tejiendo con tres hilos (el número, las relaciones numéricas y el conocimiento de las operaciones numéricas) y se complementan entre sí durante el desarrollo de este, aunque estos parezcan estar aislados. Luego la relación que nosotros encontramos es que los sistemas numéricos también tejen esa red en cada componente. Articular las componentes del sentido numérico con los significados de los sistemas relacionales numéricos favorece la comprensión de qué es y qué busca el sentido numérico, también podría contribuir a consensuar la definición del sentido numérico, más allá de sus diferentes posturas. También el listado de habilidades facilita las planeaciones de los docentes y el desarrollo del sentido numérico en el aula.

Referencias

Almeida, R. y Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127–136). SEIEM.

Centeno, J. (1998). *Números decimales ¿por qué? ¿para qué?* Síntesis.

García, M. T. y Adamuz, N. (2019). *Del número al sentido numérico y de las cuentas al cálculo táctico: Fundamentos, recursos y actividades para iniciar el aprendizaje*. Octaedro.

Ghazali, M., Mohamed, R. y Mustafa, Z. (2021). A systematic review on the definition of children's number sense in the primary school years. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 17*(6). https://doi.org/10.29333/ejmste/10871

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022). Profiles in understanding the density of rational numbers among primary and secondary school students. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, *22*, 47–70. https://doi.org/10.35763/aiem22.4034

Herrera, J. L. y Zapatera, A. (2019). El número como cantidad física y concreta, un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros. *PNA, 13*(4), 197–220. https://doi.org/10.30827/pna.v13i4.8226

Jiménez-Rubiano, L. D., Piñeiro J. L., y Ruiz-Hidalgo J. F (2024). Sentido numérico: relación de sus componentes desde el significado del número natural. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 31,* 19–34. https://doi.org/10.30827/reugra.v31.30760.

Jordan, N. C., Devlin, B. L. y Botello, M. (2022). Core foundations of early mathematics: Refining the number sense framework. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, *46*, 101181. https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2022.101181

Krippendorff, K. y Wolfson, L. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Paidós Comunicación.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 151–175). Síntesis.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, 24386-24502.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8. https://www.jstor.org/stable/pdf/40248053

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM THALES.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En J. Beltrán, V. Fernández, L. Pérez, M. Prieto, D. Vence y R. González (Eds.), *Intervención psicopedagógica y currículum escolar* (pp. 153–182). Pirámide.

Rico, L., Marín. A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 58*, 7–23.

Rico, L. y Fernández-Cano. (2013). Análisis didáctico y metodología de la investigación. En Rico, L, Lupiañez. J, Molina. M (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp. 1–22). Comares.

Skemp, R. R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (2a ed.). Morata.

Yang, D. C. y Jan, H. J. (2019). The study of primary school teachers' performance on number sense. *International Journal of Information and Education Technology, 9,* 342–349. https://doi.org/10.18178/ijiet.2019.9.5.1224

Whitacre, I., Henning, B. y Atabaş, Ş. (2020). Disentangling the research literature on number sense: Three constructs, one name. *Review of Educational Research*, *90*(1), 95–134. https://doi.org/10.3102/0034654319899706

TRANSFERENCIAS ENTRE DIMENSIONES ABSTRACTA, RECTA Y CONTEXTUAL DE SITUACIONES ADITIVAS CON NÚMEROS ENTEROS

Transfers between abstract, line and contextual dimensions of additive situations with integers

Lijó Sánchez, R.[a] Zapatera Llinares, A.[b] y Quevedo Gutiérrez, E.[c]

[a]Universidad de La Laguna, [b]Universidad Cardenal Herrera CEU, [c]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Esta comunicación estudia los efectos de la introducción de los números enteros en contextos aritméticos a través de modelos concretos. Para ello se analizan las transferencias de situaciones aditivas entre las dimensiones abstracta, recta y contextual que realizan 266 estudiantes de 6º de Educación Primaria y 1º de Educación Secundaria Obligatoria. La transferencia con más éxito ha sido la contextual-abstracta y la transferencia con menos éxito la contextual-recta, relacionadas respectivamente, con la resolución abstracta y gráfica de problemas. De los resultados se infieren la persistencia del obstáculo epistemológico del número como cantidad de magnitud y las dificultades para diferenciar los significados unario y binario del signo menos. En las conclusiones se cuestiona la enseñanza de números enteros en contextos aritméticos y se recuerda que estudios epistemológicos señalan que la razón de ser de los números negativos proviene del ámbito algebraico.

Palabras clave: *números enteros, contextos aritméticos, modelos concretos, transferencias entre dimensiones, ámbito algebraico*.

Abstract

This article studies the effects of the introduction of integers in arithmetic contexts through concrete models. To do this, the transfers of additive situations between the abstract, line and contextual dimensions carried out by 266 students from the 6th grade of Primary Education and the 1st grade of Secondary Education are analyzed. The most successful transfer has been the contextual-abstract and the less successful transfer has been the contextual-line, related respectively to abstract and graphic problem solving. From the results, we infer the persistence of the epistemological obstacle of number as a quantity of magnitude and the difficulties in differentiating the unary and binary meanings of the minus sign. In the conclusions, the teaching of integers in arithmetic contexts is questioned and it is recalled that epistemological studies indicate that the reason for negative numbers comes from the algebraic field.

Keywords: *integers, arithmetic contexts, concrete models, transfers between dimensions, algebraic scope.*

INTRODUCCIÓN

El campo numérico se construye inicialmente con los números naturales y, posteriormente, con los racionales positivos, considerados como cantidades de magnitud y definiendo las operaciones con acciones de agrupar, quitar, repetir o repartir. Es decir, la enseñanza del campo numérico se inicia modelizando situaciones concretas.

Pero el número negativo no surge por la necesidad de modelizar situaciones del mundo real, sino por la necesidad de desarrollar técnicas de resolución de ecuaciones algebraicas. Por lo tanto, es en el

Lijó, R., Zapatera, A. y Quevedo, E. (2024). Transferencias entre dimensiones abstracta, recta y contextual de situaciones aditivas con números enteros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 329-336). SEIEM.

ámbito algebraico donde aparecen los números enteros (Chevallard, 1988; Cid y Bolea, 2010; Cid et al., 2020) y en el que se dan las condiciones para su estudio.

No obstante, los números enteros se introducen en la enseñanza, habitualmente, en contextos aritméticos, alegando la necesidad de representar magnitudes con dos sentidos; sin embargo, esta necesidad es ficticia porque ambos sentidos pueden diferenciarse, sin necesidad de utilizar signos, con números naturales debidamente contextualizados (Cid, 2015). Desde esta perspectiva, la aritmética elemental, centrada en los modelos concretos, ni necesita ni justifica los números enteros.

En esta comunicación se analiza cómo estudiantes, que han iniciado el estudio de los números enteros en contextos aritméticos, resuelven determinadas situaciones aditivas con números enteros.

MARCO TEÓRICO

El estudio de los números enteros en el sistema español se realiza en los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), aunque algunas comunidades y líneas editoriales lo introducen en los últimos cursos de la Educación Primaria.

Actualmente, esta introducción se realiza, casi exclusivamente, en el ámbito aritmético a través de los modelos concretos basados en la presentación de magnitudes opuestas y relativas (Gascón et al., 2017) en situaciones cercanas a los estudiantes. Se justifica esta introducción por la creencia de que los estudiantes, a partir de su experiencia con modelos que les resultan familiares y conocidos, pueden "conjeturar o, al menos, justificar y dar sentido a sus reglas de funcionamiento y, posteriormente, por analogía, extenderlas al conjunto de los números enteros" (Cid, 2003, p. 3).

Cid (2003) clasificó los modelos concretos en modelos de neutralización, como los de tener y deber, ganar y perder y fichas de dos colores que se neutralizan y modelos de desplazamiento, como los del termómetro, el ascensor y los ejes cronológicos. En los modelos de neutralización los números son cantidades de magnitud con sentidos opuestos que se neutralizan entre sí y en los modelos de desplazamiento los números indican posiciones o desplazamientos en un sentido u otro, a partir de un origen.

Los dos sentidos de las magnitudes se representan con los signos más y menos. De esta manera, la incorporación en la enseñanza de los números enteros implica nuevos significados de estos signos. Si con los naturales y racionales positivos estos signos solo tenían un significado binario, u operativo, es decir, sumar y restar, con los números enteros tienen también un significado unario, o predicativo, es decir, positivo o negativo, que indica el sentido de la magnitud.

Según Cid (2015, p. 65), los modelos concretos "justifican satisfactoriamente la suma de enteros, (pero) no ocurre lo mismo con el producto". Por esta razón, investigadores en la enseñanza de los números enteros proponen la utilización de modelos concretos para introducir los números enteros, pero señalan que puede ser un obstáculo para la enseñanza de la estructura multiplicativa y para la comprensión y formalización de los números enteros (Brousseau, 1983; Cid, 2015, Glaeser, 1981; Schubring, 1986).

De esta manera, la enseñanza de los números enteros desde el plano concreto, mediante los modelos concretos, puede acotar su comprensión y dificultar su aprendizaje, pero reducirla exclusivamente al plano formal puede conducir a un "formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones" (Iriarte et al., 1991, p. 1). Desde esta perspectiva, se infiere el interés por incorporar el aprendizaje de los números enteros desde los dos planos, el concreto y el formal.

Ambos planos se unen al utilizar las dimensiones abstracta, recta y contextual y realizar las transferencias entre ellas. En la dimensión abstracta, los números y operaciones se representan mediante símbolos abstractos; en la dimensión recta los números se representan con puntos y las operaciones con vectores en la recta numérica; y en la dimensión contextual, números y vectores representan situaciones de la vida cotidiana (Bruno y Martinón, 1994; Bruno, 1997). En esta

propuesta, las dimensiones contextual y recta se asocian con modelos concretos, que se sitúan en el plano concreto y la dimensión abstracta se asocia con conocimientos, que se sitúan en el plano formal.

Vergnaud (1982) diferencia entre las situaciones que expresan una acción en el tiempo y las que no, denominándolas, respectivamente, operador y estado. En este trabajo, las situaciones se diferencian en situaciones estado, si expresan la medida de una cantidad, y situaciones aditivas, si se asocian a problemas aditivos de una etapa.

Las situaciones estado se representan, en la dimensión abstracta con el significado unario del signo (positivo o negativo), en la dimensión recta con un punto y, en la dimensión contextual expresan una cantidad de magnitud. Y las situaciones aditivas se representan, en la dimensión abstracta con el significado binario del signo (sumar o restar), en la dimensión recta con desplazamientos orientados y, en la dimensión contextual expresan una acción. En esta comunicación, por problemas de espacio, nos hemos centrado solo en las situaciones aditivas.

El objetivo de esta comunicación es estudiar los efectos de la introducción de los números enteros en contextos aritméticos, a través de modelos concretos, analizando las transferencias de situaciones aditivas entre las dimensiones abstracta, recta y contextual que realizan estudiantes de 6º de Primaria y 1º de ESO. Este objetivo se concreta en dos preguntas de investigación: (1) ¿qué éxito tienen los estudiantes en cada una de las transferencias? y (2) ¿qué dificultades muestran los estudiantes al transferir situaciones aditivas?

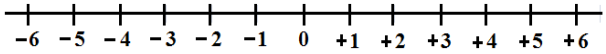
METODOLOGÍA

En esta investigación han participado 266 estudiantes de un mismo centro, 127 de las cinco clases de 6º de Primaria y 139 de las cinco clases de 1º de ESO.

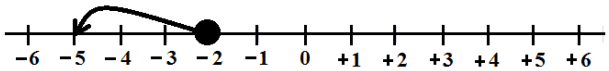
Los participantes contestaron, individualmente y sin limitación de tiempo, tres cuestiones dobles, adaptadas del cuestionario de Bruno y Martinón (1994), en las que debían transferir una situación aditiva desde una dimensión a la otras dos (Figura 1),

Figura 1. Cuestionario

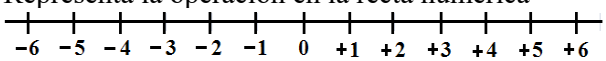
Sea el problema "La temperatura durante un día de invierno en Segovia fue 2º C y por la noche bajó 5º C. ¿Qué temperatura hizo por la noche?"
Escribe la operación que resuelve el problema y halla el resultado
Representa la solución del problema en la recta numérica



En la recta numérica se ha representado la solución de un problema



Escribe la operación representada en la recta numérica y el resultado
Escribe el enunciado de un problema que se resuelva con esa representación
La operación 2 - 3 = -1 es la solución de un problema
Representa la operación en la recta numérica



Escribe el enunciado de un problema que se resuelva con esa operación

En la investigación participaron todos los alumnos matriculados en ambos cursos, que habían estudiado, con sus profesores de matemáticas, los números enteros en contextos aritméticos con modelos concretos, siguiendo las indicaciones curriculares del sistema educativo español y los libros de texto usados.

Los investigadores, acompañados por los profesores respectivos, presentaron el cuestionario, dieron las instrucciones previas y resolvieron las dudas previas de los participantes.

El análisis de resultados consta de cuatro apartados: (1) transferencias a la dimensión abstracta (cuestiones 1a y 2a), (2) transferencias a la dimensión recta (cuestiones 1b y 3a), (3) transferencias a la dimensión recta (cuestiones (2b y 3b) y (4) comparación de resultados entre transferencias.

Se considera que una respuesta es correcta en la transferencia a la dimensión abstracta, si plantea y resuelve bien la operación; en la transferencia a la recta, si representa bien la situación con un vector, o con varios saltos; y en la transferencia a la dimensión contextual, si describe un problema que se ajusta a la situación.

RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados de las respuestas a las tres cuestiones de los 266 participantes expresados en porcentajes. Las columnas C e I corresponden, respectivamente a las respuestas correctas e incorrectas.

Cuestiones 1a y 2a. Transferencias a la dimensión abstracta

El 75% del alumnado ha realizado correctamente la transferencia desde la dimensión contextual a la dimensión abstracta y el 51% desde la dimensión recta a la dimensión abstracta (Tabla 1).

Tabla 1. Resultados de las transferencias a la dimensión abstracta (cuestiones 1a y 2a)

Respuestas	1a: C→A		2a: R→A	
	C	I	C	I
Plantean bien la operación	75	9	51	7
Plantean mal la operación		9		34
Escriben directamente la solución		3		3
Responden sin sentido		1		2
No contestan		3		3
Total	75	25	51	49

En la transferencia desde la dimensión contextual (cuestión 1a), el 84 % ha planteado bien la operación 2 – 5 (el 75% la resuelve bien y el 9% la resuelve mal o no la resuelve); el 9% plantea mal la operación (el 3% la resuelve bien y el 6% la resuelve mal o no la resuelve); un 3% no plantea ninguna operación y escriben directamente la solución (el 2% escribe bien la solución y el 1% la escribe mal); el 1% escribe respuestas sin sentido; y el 3% no contesta.

En la transferencia desde la dimensión recta (cuestión 2a), el 58% de los alumnos plantea bien la operación -2 – 3 (el 51% la resuelve bien y el 7% la resuelve mal o no la resuelve); el 34% plantea mal la operación (el 10% la resuelve bien y el 24% la resuelve mal o no la resuelve); el 3% no plantea ninguna operación y escriben directamente la solución (el 1% escribe bien la solución y el 2% la escribe mal); el 2% escribe respuestas sin sentido; y el 3% no contesta.

Los errores más frecuentes al plantear la operación han sido cambiar el orden para que el minuendo sea mayor que el sustraendo (5 – 2 en lugar de 2 – 5), reiterar los significados unario y binario del signo menos (-2 – -3 en lugar de -2 – 3) y restar el estado final (-2 – 5 en lugar de -2 – 3). Y los errores más frecuentes al resolver las operaciones han sido aplicar la regla de los signos de la multiplicación (5 – 2 = -3), omitir el signo cuando el resultado es negativo (2 – 5 = 3) y escribir el estado final, sin fijarse en la operación (-2 – -3 = -5).

Cuestiones 1b y 3a. Transferencias a la dimensión recta

El 37% del alumnado ha realizado correctamente la transferencia desde la dimensión contextual a la dimensión recta y el 64% desde la dimensión abstracta a la dimensión recta (Tabla 2).

En la transferencia desde la dimensión contextual (cuestión 1b), el 37% ha unido correctamente el punto 2 y el punto -3, la mayoría con un vector, y el 5% ha unido otros puntos; el 57% ha señalado

uno o dos puntos (el 54% el punto -3, el 2% otros puntos distintos y el 1% los puntos 2 y -5); el 1% restante ha dejado la respuesta en blanco.

Tabla 2. Resultados de las transferencias a la dimensión recta (cuestiones 1b y 3a)

Respuestas	1b: C→R		3a: A→R	
	C	I	C	I
Dibujan un vector, un salto o varios saltos	37	5	64	27
Señalan uno o varios puntos		57		7
Responden sin sentido				1
No contestan		1		1
Total	37	63	64	36

En la transferencia desde la dimensión abstracta (cuestión 3a) el 64% ha unido correctamente el punto 2 y el punto -1, la mayoría con un vector, y el 27% ha unido otros puntos; el 7% ha señalado uno o dos puntos (el 5% el punto -1, el 1% otros puntos distintos y otro 1% varios puntos); el 1% ha escrito respuestas sin sentido; y el otro 1% restante ha dejado la respuesta en blanco.

En la transferencia desde la dimensión contextual, la mayoría, el 54%, especialmente de 1º de ESO, ha señalado el punto resultante, como si se tratara de un estado y no de una situación aditiva (en la puesta en común después de la realización del cuestionario algunos alumnos explicaron que interpretaron que solo había que escribir la respuesta), mientras que, en la transferencia desde la dimensión abstracta, la mayoría ha dibujado un vector, un salto o varios saltos.

Cuestiones 2b y 3b. Transferencias a la dimensión contextual

El 67% del alumnado ha realizado correctamente la transferencia desde la dimensión recta a la dimensión contextual y el 60% desde la dimensión abstracta a la dimensión contextual (Tabla 3).

Tabla 3. Resultados de las transferencias a la dimensión contextual (cuestiones 2b y 3b)

Respuestas	2b: R→C		3b: A→C	
	C	I	C	I
Escriben un problema completo (dos datos y una pregunta)	50	15	45	16
Escriben un problema incompleto (dos datos)	17	12	15	7
No escriben un problema	0	2	0	3
No contestan	0	4	0	14
Total	67	33	60	40

En la transferencia desde la dimensión recta (cuestión 2b), el 67% ha enunciado correctamente problemas que se ajustan al vector y el 27% ha descrito problemas que no se ajustan al vector; el 2% no ha descrito problemas aditivos y el 4% ha dejado la respuesta en blanco. El alumnado ha utilizado en sus enunciados más modelos de desplazamiento que de neutralización (64% frente a 29%) y ha descrito más problemas de cambio, que de combinación, comparación y dos cambios (59% frente a 20%, 11%, 3%).

En la transferencia desde la dimensión abstracta (cuestión 3b), el 60% ha enunciado correctamente problemas que se ajustan al vector y el 23% ha descrito problemas que no se ajustan al vector; el 3% no ha descrito problemas aditivos y el 14% ha dejado la respuesta en blanco. El alumnado ha utilizado en sus enunciados más modelos de desplazamiento que de neutralización (48% frente a 35%) y ha descrito más problemas de cambio, que de combinación, comparación y dos cambios (52% frente a 16%, 10%, 3%).

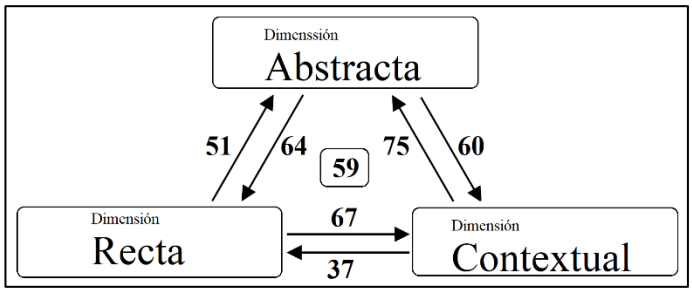
Los modelos concretos utilizados son similares en ambas transferencias: temperatura y plantas de un edificio en los de desplazamiento, y tener-deber y ganar-perder en los de neutralización.

Algunos estudiantes que han descrito situaciones que, aunque se ajustan a la situación dada, resultan irreales, como “Tenía 2 años y me quitaron 3”. Otros alumnos han utilizado un lenguaje artificial al escribir expresiones redundantes como “debo –5€” o “la temperatura bajó -3ºC”, que equivaldrían a “tengo 5€” y “sube 2ºC”.

Resultados globales de las transferencias

En la Figura 2 se muestran los porcentajes globales de éxito de las seis transferencias.

Figura 2. Resultados de las transferencias entre las tres dimensiones



Los participantes, sin haber recibido instrucción específica sobre las transferencias, han realizado correctamente el 59% de todas las transferencias.

Las transferencias con mayor y menor éxito parten desde la dimensión contextual: la de mayor éxito va hacia la abstracta, con un 75%, y la de menor éxito a la recta, con 37%. A los alumnos les resulta más fácil asociar un vector con una situación contextual que con una operación: el 67% frente al 51%. Las dos transferencias desde la dimensión abstracta tienen niveles de éxito parecidos: el 64% a la dimensión recta y el 60% a la abstracta. Las dos transferencias con menos éxito tienen en común la dimensión recta: la transferencia contextual-recta, con un 37% de éxito, y la transferencia recta-abstracta, con un 51%.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta comunicación es estudiar los efectos de la introducción de los números enteros en contextos aritméticos, a través de modelos concretos, en estudiantes de 6º de Primaria y 1º de ESO. Para ello se analizan las transferencias de situaciones aditivas que realizan entre las dimensiones abstracta, recta y contextual.

La transferencia con mayor éxito es la contextual-abstracta. Los estudiantes están habituados a esta transferencia, ya que gran parte de la enseñanza de la estructura aditiva de los números enteros se centra en la resolución de problemas (Bruno, 1997)

Las transferencias con menor éxito son la contextual-recta y la recta-abstracta; es decir, la resolución gráfica de problemas y la expresión abstracta de un vector en la recta Algunos estudiantes no comprenden el significado del vector en la recta (Bruno y Cabrera, 2005; Cid, 2003) y representan situaciones aditivas con un punto y no con un vector (Bruno y Martinón, 1994). Sin embargo, un enfoque de enseñanza de los números enteros basado en situaciones contextualizadas debe ir unido a representaciones en la recta numérica (Bruno, 1997; Bruno y Cabrera, 2005), por lo que su utilización debidamente contextualizada puede ser útil en la incorporación de los números enteros (Bruno y Martinón, 1994)

En las transferencias a la dimensión abstracta, algunos estudiantes prescinden de los signos negativos o los ignoran y los tratan como positivos (Peled et al., 1989), otros consideran que el minuendo siempre es mayor que el sustraendo (Peled et al., 1989) o que la respuesta siempre debe ser positiva (Herrera y Zapatera, 2019). Es decir, persisten en el obstáculo epistemológico de considerar el número como expresión de cantidad de magnitud (Brousseau, 1989; Bishop et al., 2014; Herrera y Zapatera, 2019; Iriarte et al., 1991).

En. las transferencias a la dimensión contextual, casi todos los estudiantes utilizan los mismos modelos concretos y formulan los mismos tipos de problemas aditivos (Quevedo et al., 2024). Es decir, al inventar problemas, tienden a reproducir los problemas trabajados en clase (Irvine, 2017), de lo que se infiere la necesidad de estimular la imaginación y la creatividad en ellos. Algunos estudiantes describen situaciones irreales o imposibles, mostrando así, una separación entre el conocimiento matemático y la realidad y otros superponen los significados binario y unario del signo menos, utilizando así un lenguaje artificial.

En las transferencias a la dimensión recta, algunos estudiantes representan las situaciones aditivas con un punto, como si se tratase de situaciones estado (Bruno y Martinón, 1994; Zapatera et al., 2024). Es decir, tienen dificultades para diferenciar los significados unario y binario del signo menos (Bruno y Martinón, 1994; Liebeeck, 1990),

Los obstáculos, dificultades y errores observados en las transferencias cuestionan la utilización de contextos aritméticos en la enseñanza de los números enteros. Además, estudios epistemológicos señalan que la razón de ser de los números negativos proviene del ámbito algebraico (Chevallard, 1988; Cid y Bolea, 2010; Cid et al., 2020) y que, históricamente, la aritmética ha supuesto un obstáculo para su aceptación y comprensión (Brousseau, 1983; Cid, 2015; Glaeser, 1981; Schubring, 1986).

Referencias

Bishop, J. P., Lamb, L. L, Philipp, R. A,, Whitacre, I., Schappelle, B, P. y Lewis, M. L. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: An analysis of children's thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 19-61. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0019

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs obstacles et Conflits* (pp. 41-63). *CIRADE* Les éditions Agence d'Arc inc.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números, 29*, 5-18.

Bruno, A. y Cabrera, N. (2005). Una experiencia sobre la representación en la recta de números negativos. *Quadrante, 14*(2), 25–41. https://doi.org/10.48489/quadrante.22797

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma 18*, 39-48.

Chevallard, Y. (1988). La dialectique entre études locales et théorisation: le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré. En G. Vergnaud et al. (Eds), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 305-323). La Penseé Sauvage.

Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. *Pre-publicaciones del seminario matemático García de Galeano, 25*, 1-40. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 575-594). IUFM de l'académie de Montpellier

Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M., y Ruiz-Munzón, N. (2020). La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *22*(4), 646–660.

Gascón, J., Bosch, M. y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). SEIEM.

Glaeser, G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

Herrera, J. L. y Zapatera, A. (2019). El número como cantidad física y concreta, un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 13*(4), 197-220. https://doi.org/10.30827/pna.v13i4.8226

Iriarte, D., Jimeno, M. y Vargas, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, *7*, 13-18.

Irvine, J. (2017). Problem Posing in Consumer Mathematics Classes: Not Just for Future Mathematicians, *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1), Article 22. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1404

Liebeck, P. (1990). Scores and Forfeits - An Intuitive Model for Integer Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 221-239.

Peled, I. Mukhopadahyay, S. y Resnick, L.B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 106–110). PME.

Quevedo, E., Zapatera, A. y Lijó, R. (2023). Invención de situaciones aditivas con números enteros. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 459–466). SEIEM.

Schubring, G. (2007). Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio de permanência. *Boletim de Educação Matemática, 20*(28), 1-20.

Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operation of Thought Involved in Additions and Subtraction Problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective* (pp. 39-59). Lawrence Erlbaum.

Zapatera, A., Quevedo, E., González, S., Santana A. y Álamo, J. (2024). Obstáculos y dificultades de los alumnos en la incorporación de los números enteros. *AIEM – Avances de investigación en educación matemática* (Aceptado pendiente de publicación)

RECURSIVIDAD Y REVERSIBILIDAD EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DE LOS MOLDES DE BIZCOCHO

Recursivity and reversibility in mathematical modelling: the case of the biscuit's molds

Marí, M., Barquero, B. y Bosch, M.

Dep. d'Educació Lingüística, Científica i Matemàtica. Universitat de Barcelona

Resumen

Presentamos un análisis epistemológico de un recorrido de estudio e investigación relacionado con la modelización algebraica y la covariación, que parte del problema de determinar las dimensiones de un molde para bizcochos. Se presenta la segunda etapa de la metodología de ingeniería didáctica, el análisis a priori, con el objetivo de ilustrar las características de recursividad y reversibilidad que aparecen en el proceso de modelización. Se concluye sobre la importancia de tomar en consideración estas características en la implementación de situaciones de aprendizaje que persigan integrar la modelización matemática como contenido fundamental.

Palabras clave: *modelización matemática, recorridos de estudio e investigación, papiroflexia, ingeniería didáctica, teoría antropológica de lo didáctico.*

Abstract

We present an epistemological analysis of a study and research path related to algebraic modelling and covariation based on the problem of determining the dimensions of a biscuit mould. The second stage of the didactic engineering methodology, the a priori analysis, is presented to illustrate the characteristics of recursivity and reversibility that appear in the modelling process. We conclude on the importance of taking these characteristics into consideration when implementing learning situations aiming to integrate mathematical modelling as a fundamental content.

Keywords: *mathematical modelling, study and research paths, origami, didactic engineering, anthropological theory of the didactic*.

INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación surge de la intención de desarrollar y hacer converger tres líneas de investigación dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 2019). La primera refiere a las investigaciones sobre el álgebra y la covariación en Educación Secundaria, tomando como punto de partida los modelos epistemológicos de referencia sobre la modelización algebraica y funcional elaborados en las tesis doctorales de Bolea (2003) y Ruíz-Munzón (2010). La segunda línea es la iniciada por García (2005) sobre la enseñanza de la modelización matemática, articulando la propuesta de la TAD con otros enfoques (Barquero y Jessen, 2020) como el ciclo de modelización (Greefrath, 2020) y el "models and modelling perspective" (Ärlebäck y Doerr, 2020). La tercera línea corresponde a los estudios sobre las condiciones que facilitan la transición de los sistemas educativos actuales hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013), con los *recorridos de estudio e investigación* (REI) como propuesta de enseñanza (Barquero et al., 2021), en particular, para la enseñanza de la modelización.

En esta comunicación, presentamos el análisis *a priori* de la dimensión epistemológica de un REI que vincula las tres líneas de investigación mencionadas. Veremos en qué sentido la propuesta integra

Marí, M., Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Recursividad y reversibilidad en la modelización matemática: el caso de los moldes de la pastelera. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 337-344). SEIEM.

características esenciales de la modelización matemática—como la recursividad y reversibilidad de la relación sistema-modelo—para estudiar aspectos relacionados con la covariación de magnitudes.

MARCO TEÓRICO, PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

La modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Partimos de los trabajos iniciados por Y. Chevallard a finales de los 80 sobre la enseñanza de la modelización matemática y su relación con el álgebra escolar (Chevallard, 1989). Los desarrollos posteriores de estos trabajos por investigadores españoles conducen a concebir la modelización como un instrumento principal de la actividad matemática que, además, permite articular la matemática escolar (Bosch et al., 2006; García, 2005). En este marco, las nociones principales son las de modelo, sistema y proceso de modelización estructurado en cuatro estadios (Gascón, 1994), sin necesariamente una sucesión temporal lineal entre ellos y alternándose unos con otros de forma constante durante el proceso: 1) la definición y limitación del sistema o ámbito de la realidad a estudiar (extramatemática o intramatemática) con una situación problemática que permite plantear cuestiones a resolver y posibles conjeturas muchas veces imprecisas, 2) el análisis y profundización en las relaciones entre las componentes del sistema que permite precisar y dar mayor comprensión a los problemas iniciales planteados, 3) el trabajo técnico y su interpretación dentro del sistema que permite consolidar y evolucionar el modelo valorando en todo momento si es el adecuado para poder responder las preguntas planteadas, y 4) enunciar nuevos problemas que se pueden formular gracias a la elaboración y el trabajo en el modelo.

En este proceso de modelización, los modelos construidos se transforman en nuevos sistemas a considerar, de forma que los estadios de modelización van sucediéndose, generando nuevos modelos (recursividad de la modelización) y pudiendo también actuar los sistemas como modelos de los propios modelos (reversibilidad). Por ejemplo, para ilustrar la recursividad, podemos considerar un sistema compuesto por una clase de 13 chicas y 15 chicos y un modelo de este sistema a partir de las fracciones 13/28 y 15/28, modelo que, a su vez, se puede modelizar con las expresiones algebraicas $a/(a + b)$ y $b/(a + b)$ y, posteriormente, con las funciones hiperbólicas $f(x) = k/(k + x)$ y $g(x) = 1 – f(x)$. La reversibilidad aparece cuando, al preguntarse si 13/28 es mayor o menor que 14/29, utilizamos el sistema de la clase anterior para decir que, si llega una chica nueva a la clase, la proporción de chicas aumenta y, por lo tanto, es evidente que $13/28 < 14/29$. El sistema de la clase funciona como modelo para producir conocimientos sobre las fracciones, que es aquí el modelo-sistema cuestionado.

Cabe señalar que, siguiendo a Barquero (2023), las características de recursividad y reversibilidad de la modelización han sido poco investigadas hasta la fecha y poco conceptualizadas en los diversos enfoques en educación matemática sobre modelización. El propósito de este trabajo es profundizar en el estudio de la aparición y comportamiento de estas características esenciales.

Los recorridos de estudio e investigación

En la TAD, los REI aparecen como el instrumento de investigación fundamental para analizar procesos de enseñanza y aprendizaje basados en la indagación. Son, a su vez, propuestas didácticas y herramientas de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje. Los REI surgen de la consideración de una cuestión problemática abierta, llamada cuestión generatriz Q0. Al abordarla, se genera un proceso de indagación en el que surgen nuevas cuestiones derivadas que la comunidad de estudio (estudiantes y docentes) deben abordar y cuyas respuestas contribuyen a la elaboración conjunta de una respuesta a Q0. En este proceso, se combina el estudio de nuevos saberes y técnicas con la búsqueda de información, el tratamiento de datos empíricos y la construcción de nuevos conocimientos (Chevallard, 2019). Los REI introducen en la enseñanza una modificación fuerte del contrato didáctico dominante, al transmitir el profesor a los alumnos muchas responsabilidades como la búsqueda de nuevas informaciones y saberes, la validación de las respuestas producidos o el planteamiento de nuevas cuestiones. Otro cambio relevante es la importancia que se otorga a la

producción de una respuesta a la cuestión generatriz, considerada como un fin con valor por sí misma y no como un medio para la generación de nuevos aprendizajes.

Barquero (2023) presenta los REI como dispositivo didáctico vinculado directamente con la enseñanza de la modelización matemática, al aparecer esta como un medio privilegiado para la elaboración de respuestas a las cuestiones planteadas. Distintas investigaciones relacionan los REI con la modelización matemática en secundaria, ya sea en el caso del álgebra elemental (Ruiz-Munzón, 2010), de la interdisciplinariedad (Jessen, 2014) o de la combinatoria (Vásquez et al., 2021). Este último estudio ilustra además las dos características de recursividad y reversibilidad.

Pregunta de investigación y metodología

Las investigaciones sobre modelización han puesto de manifiesto importantes restricciones relativas a la matemática escolar que dificultan que la modelización pueda vivir como una actividad normalizada en la educación secundaria y permita superar fenómenos relativos a la atomización y aislamiento de los saberes enseñados (Gascón, 1994; Rojas y Sierra, 2021). Estos fenómenos no se pueden separar de una visión dominante de la modelización en la enseñanza secundaria que queda muy limitada a la simple construcción (o, incluso, aplicación) de modelos concretos a situaciones preestablecidas, sin considerar las características de recursividad y reversibilidad mencionadas anteriormente. Nuestra hipótesis es que, para poder elaborar respuestas a las cuestiones generatrices consideradas, los REI hacen emerger procesos de modelización suficientemente desarrollados para que las características de recursividad y reversibilidad aparezcan como herramientas clave para responder a las cuestiones abordadas. Las preguntas de investigación que formulamos son:

¿Cómo se manifiestan la recursividad y reversibilidad en los procesos de modelización generados por los REI? ¿Cómo tomar dichas características en cuenta en el diseño e implementación de los REI?

Nuestro objetivo en este trabajo es abordar la primera cuestión, considerando como estudio de caso un REI concreto diseñado para 3º de la ESO. Abordamos el estudio a partir de la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2020; García et al., 2019). Dicha metodología contiene cuatro fases: el análisis preliminar de los fenómenos didácticos en juego; el análisis a priori de la propuesta educativa que se prevé implementar para abordar dichos fenómenos; el análisis in vivo durante la implementación y el análisis a posteriori al finalizar esta. Presentamos aquí el análisis epistemológico a priori de la propuesta para poner en evidencia las dos características de recursividad y reversibilidad de la modelización matemática involucrada. Consideramos que este análisis es un punto de partida determinante para la futura implementación del REI en el aula de secundaria, si queremos que la enseñanza de las matemáticas incorpore la modelización como un ingrediente esencial y poderle atribuir un estatus matemático oficial.

El caso de estudio

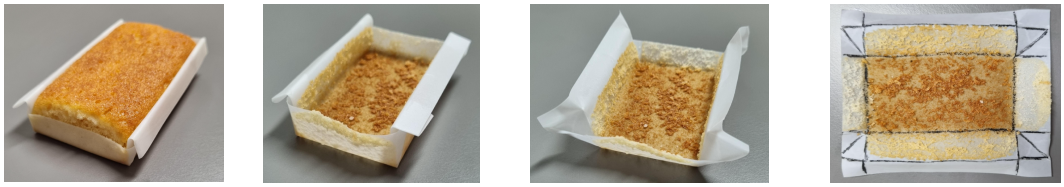
El REI que tomamos como caso de estudio parte de una cuestión generatriz adaptada de la propuesta de "la caja de la pastelera" de Chappaz y Michon (2003) que ha dado lugar a diversas investigaciones en el ámbito de la enseñanza de la modelización matemática en primaria y en formación de profesorado (Barquero et al., 2022; Ruiz-Higueras, 2008; Wozniak, 2023). En estos trabajos, se parte de la construcción de una caja de papel utilizando papiroflexia y se estudian las posibilidades que ofrece en cuanto a las dimensiones de la caja y de la hoja de papel. Una limitación clara de esta situación es la dificultad de presentar el problema de la pastelera como un caso real y relevante, teniendo en cuenta la cantidad de cajas de cartón de diferentes tamaños y formas que existen en el mercado y que resolverían el problema real de forma directa, resultando en lo Bosch et al. (2022) han tildado de "falsas indagaciones".

Para adaptar la situación a la ESO, proponemos una variación considerando el molde de los sobaos pasiegos, unos bizcochos tradicionales de Cantabria. Se utiliza un molde de papel de fácil construcción con una pestaña para desprender rápidamente el bizcocho del molde (ver Figura 1). La

masa del bizcocho se hornea directamente dentro del molde de papel. Se puede comprobar en los supermercados las múltiples y diferentes dimensiones que tienen los moldes utilizados para elaborar este tipo de bizcocho según las distintas marcas comerciales que los fabrican. También existe información en Internet sobre el método de elaboración de este tipo de bizcochos, incluyendo la construcción de estos moldes característicos, a mano o con máquinas destinadas concretamente a ello.

La pregunta generatriz del REI aborda el tamaño de los moldes y, en consecuencia, de los propios sobaos. La formulamos inicialmente en los términos siguientes Q0: ¿Cómo construir el mejor molde para los sobaos pasiegos?

Figura 1. Sobao pasiego en su molde de papel y patrón para la construcción del molde



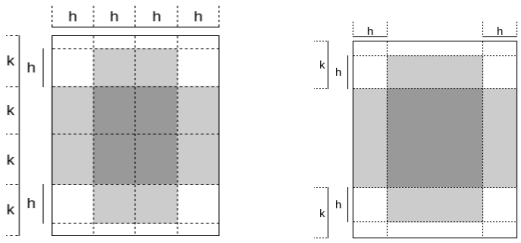
RESULTADOS DERIVADOS DEL ANÁLISIS *A PRIORI* DEL REI

El análisis epistemológico a priori que presentamos se apoya en los resultados obtenidos en experimentaciones previas sobre "La caja de la pastelera" que aportan un fundamento experimental al estudio. Lo sintetizamos describiendo las principales cuestiones que se derivan de Q0 así como los diferentes sistemas y modelos que pueden emerger para elaborar las respuestas.

Delimitación del sistema inicial

El sistema inicial que se considera es el molde del sobao y la técnica de papiroflexia que permite construirlo y que responde a la pregunta Q1: ¿Cómo se construye el molde?

Figura 2. Construcción del molde con restricción (izquierda) y sin ella (derecha)

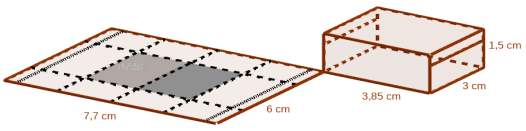


La construcción y sucesión de dobleces que conforman el molde conllevan las primeras decisiones que muestran las restricciones y libertades permitidas respecto a las longitudes de las hojas a utilizar, las selecciones de las longitudes de las dobleces y la metodología y características de cada doblez, así como la familiarización con la técnica del doblado. En particular, aparecen dos parámetros libres que son la altura del molde y la amplitud de la pestaña (Figura 1). Para simplificar esta complejidad y por motivos de espacio, proponemos restringirnos inicialmente a una construcción que dobla la hoja por mitades y determina ambos parámetros (Figura 2).

Modelos de medida y geométricos

Los primeros modelos que permiten estudiar el sistema se pueden agrupar en dos grandes tipos: modelos en forma de tablas con diferentes medidas de hojas y de los moldes resultantes, y modelos geométricos de los moldes, similares a los de la Figura 3, con medidas numéricas para cada dimensión. Ambos tipos de modelos pueden convivir y permiten formular y aportar respuestas parciales a preguntas como: ¿Qué relaciones hay entre las dimensiones del molde y de la hoja? (Q2); Dada una hoja determinada, ¿cuántos moldes pueden construirse? (Q3); Dado un molde determinado, ¿qué hojas lo crean? (Q4); ¿Qué se necesita para tener un molde con un volumen determinado? (Q5).

Figura 3. Ejemplo de modelo de medidas y geométrico



HOJA			CAJA			
LADO MAYOR (cm)	LADO MENOR (cm)	ÁREA (cm²)	LADO MAYOR DE LA BASE (cm)	LADO MENOR DE LA BASE (cm)	ALTURA (cm)	VOLUMEN (cm³)
7,7	6	46,20	3,85	3	1,5	17,33
8,3	5,4	44,82	4,15	2,7	1,35	15,13
10,2	7	71,40	5,1	3,5	1,75	31,24
13,1	6,1	79,91	*No es posible porque la pestaña sobrepasa la altura de la caja*			
7,2	7,2	51,84	*No es posible porque no hay pestaña*			

Modelos algebraicos

En el avance de dar respuesta a la pregunta Q0 aparece ahora la oportunidad (ya se conoce como desarrollarlas) y la necesidad (aún no está respondida la pregunta) de elegir qué moldes son aquellas que se proponen acordes a ciertas características concretas (la altura ha de ser la mitad que uno de los lados de la base). En este momento podemos aventurarnos en el análisis de nuestras primeras propuestas en cuanto a buscar moldes "con menor coste de hoja" o "con mayor volumen" pero encontraremos dificultades que requieren hacer progresar o ampliar los modelos de medida y geométricos previamente considerados. Es decir, el trabajo con los modelos de medida y geométrico requiere de cálculos numéricos individuales para cada caso y, ante esto, aparecen dificultades para encontrar y generalizar relaciones entre las dimensiones de la hoja y el molde. Aparece entonces la necesidad de representar estas dimensiones y expresar sus relaciones mediante expresiones algebraicas, asignando una letra a cada dimensión:

N = lado de la hoja de longitud ME**N**OR M = lado de la hoja de longitud **M**AYOR

h = altura del molde

n = lado de la base del molde de longitud me**n**or m = lado de la base del molde de longitud **m**ayor

Se pueden así obtener respuestas genéricas a las cuestiones anteriores:

Q2: ¿Qué relaciones hay entre las dimensiones del molde y de la hoja?

De hoja a molde: $h = \frac{1}{4} N$ $m = \frac{1}{2} M$ $n = \frac{1}{2} N$ (es decir, $h = n/2$)

De molde a hoja: $M = 2m$ $N = 2n$

Q3: Dada una hoja determinada, ¿qué moldes pueden construirse?

Para poder construir un molde la hoja ha de cumplir $N < M < 2N$ (no puede ser una hoja cuadrada $M = N$ para que exista pestaña y $M < 2N$ para que la pestaña no sobrepase la altura). Se obtiene: $h = \frac{1}{4}N$, $m = \frac{1}{2} M$, $n = \frac{1}{2} N$.

Q4: Dado un molde determinado, ¿con qué hojas puede construirse?

Suponiendo $m > n$, el molde debe tener una altura $h = \frac{1}{2}n$ y, para que la pestaña sobrepase la altura, $M < 2N$ (o $m < 2n$). Entonces, si $m < 2n$ y $h = \frac{1}{2}n$, una hoja con dimensiones $N = 2n$ y $M = 2m$ genera el molde.

Q5: ¿Qué se necesita para tener un molde con un volumen determinado?

El volumen es $V = mnh = (\frac{1}{4} N)(\frac{1}{2} M)(\frac{1}{2} N) = (1/16) N^2M$. Dado un volumen V0 se puede utilizar cualquier hoja con dimensiones N, M que cumplan $N < M < 2N$ y $M = 16\ V0 / N^2$.

Modelos funcionales

El modelo algebraico ha abierto nuevas posibilidades de estudio al generar una evolución en las cuestiones anteriormente planteadas y plantear nuevas preguntas relevantes: ¿Cómo afectan al volumen, altura y área pequeñas variaciones en las dimensiones de la hoja? (Q6); ¿Con cuál de las hojas, con un área determinada, se construye un molde con un volumen máximo? (Q7); ¿Cuáles de los moldes con un volumen determinado tienen una menor área de hoja? (Q8). En el modelo algebraico estas preguntas tienen difícil solución y corresponde indagar en la evolución a otro modelo que les dé respuesta. En la base de este modelo se encuentran las funciones que relacionan las

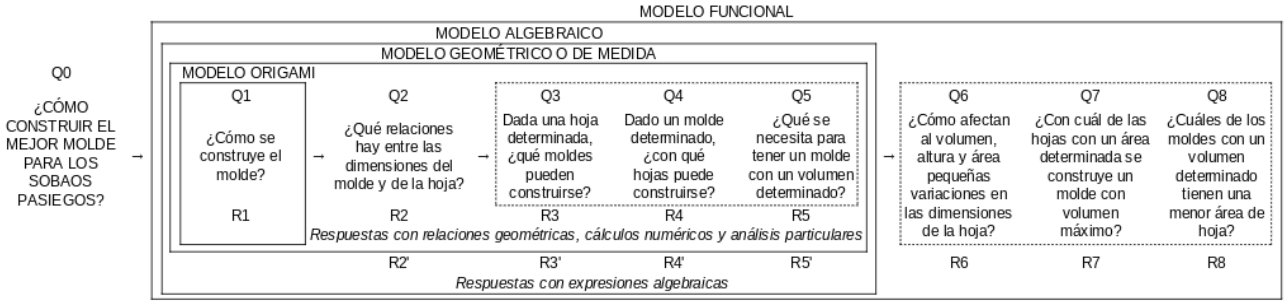
dimensiones de la hoja y las del molde y aquellas que muestran cómo influyen las distintas variables del sistema en el volumen del molde. Este desarrollo es el que relaciona la modelización algebraica con la funcional y la covariación. Por motivos de espacio, no lo desarrollaremos aquí.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este trabajo se ha propuesto estudiar el fenómeno didáctico que hemos formulado como la invisibilidad de los procesos de recursividad y reversibilidad en los procesos de modelización matemática escolar, así como su potencial para generar nuevos cuestionamientos y procesos de modelización. Nos hemos centrado en presentar las dos primeras etapas de la metodología de ingeniería didáctica, tal como la adaptamos en las investigaciones sobre los REI, en un caso de estudio: el del REI sobre los moldes para bizcochos. El análisis a priori de dicho REI ha permitido profundizar sobre cómo se desarrollan las propiedades de recursividad y reversibilidad como procesos centrales en la actividad de modelización matemática, emergidas ante esta situación.

La naturaleza recursiva del proceso de modelización queda claramente ilustrada en este caso de estudio, mostrándose cómo, en parte debido a la constante ampliación del sistema estudiado, los modelos matemáticos se transforman y completan en cada paso, evolucionando hacia estructuras más completas y complejas, pasando de los modelos de medida y geométricos (M1), a aquellos algebraicos (M2) y a los modelos funcionales (M3). Además, los sistemas también evolucionan y, en cada paso, engloban todo el trabajo de modelización realizado hasta el momento. Es decir, el sistema inicial (S0), con las instrucciones de construcción del molde y la técnica de papiroflexia que permite construirlo, se amplía considerablemente con el trabajo con los modelos de medida y geométricos (M1). Estos permiten simular y estudiar distintos casos de moldes, seleccionar las variables más relevantes, organizarlas e iniciar su análisis tanto numérico como geométrico. A su vez, con el objetivo de profundizar en las relaciones entre las dimensiones de la hoja y del molde y generalizarlas, los modelos numéricos (de medida) y geométricos previamente considerados deben evolucionar y ser modelizados, a su vez, por los modelos algebraicos (M2). Este proceso recursivo puede seguir, por ejemplo, al considerar cuestiones sobre cómo determinar el molde con cierto volumen determinado o cuál de ellos usa superficie mínima de papel, extendiendo los sistemas y modelos previos para considerar ahora modelos funcionales (M3) en los cuales se puedan abordar, con cierta facilidad, cuestiones sobre variación, covariación y optimización. La Figura 4 resume esta evolución y dialéctica entre los sistemas y los modelos, sirviendo de ejemplo ilustrativo del proceso de modelización según la TAD, e incorporando las cuestiones que facilitan la consideración de los distintos modelos.

Figura 4. Esquema del proceso de modelización



En cuanto a la reversibilidad del proceso de modelización, esta aparece en casi cada construcción de modelos nuevos cuando los modelos anteriores, y los sistemas ampliados, pasan a utilizarse como fuente de validación de las nuevas propuestas. Así, por ejemplo, si se quiere estudiar la variación del volumen o área con pequeñas variaciones de la hoja (Q6) o estudiar qué molde tiene un volumen máximo (Q7), si bien son preguntas que pueden surgir cuando uno considera los modelos algebraicos-funcionales (M3) y estudiar su variación y optimización (nuevo sistema a estudiar), se puede recurrir

a los modelos geométricos-de medida (M1) para la simulación y exploración de casos mediante la representación geométrica o numérica de la variación de las magnitudes que intervienen.

Consideramos que el análisis a priori, al margen de mostrar en acción las características de recursividad y reversibilidad, pone de manifiesto cuáles son los elementos esenciales del propio proceso de modelización (cuestiones, sistemas, modelos, herramientas de validación de modelos, etc.) que deben tener un estatus claro y propio durante el desarrollo del REI. Esto conlleva fijar una terminología concreta para poderse referir a ellos que, al ser de naturaleza muy variada, raramente existe en la cultura escolar. Por ejemplo, el análisis a priori muestra la necesidad de referirse a las variables principales a considerar: dimensiones de las hojas, del molde, parámetros libres o fijados en las hojas o en los moldes, etc. Muestra también la necesidad de nuevos términos para nombrar e institucionalizar los modelos intermedios generados por los procesos de modelización: "modelo de la papiroflexia", "modelos geométricos y de medida", "modelo algebraico" o "modelo funcional". En este sentido, el análisis a priori permite anticipar qué terminología es necesario crear con el profesorado, y estos con los estudiantes en el aula, para ayudar a dar un estatus oficial a elementos tan esenciales en el proceso de modelización. Confirma así las observaciones de Wozniak (2012) sobre el "mutismo" de las actividades de modelización en el aula.

Como hemos comentado al inicio del trabajo, queda abierto el problema de la transferencia al aula del REI diseñado, incluyendo la toma en consideración de dichas propiedades de la modelización. En particular, se pone en evidencia que, además de una infraestructura didáctica apropiada (para que los alumnos manipulen, planteen cuestiones, elaboren respuestas, etc.), también son necesarias nuevas herramientas epistemológicas para sostener el proceso de modelización y que este permita producir las respuestas esperadas. Actualmente, está previsto que este REI se experimente durante el 3r trimestre del curso 2023/24 con estudiantes de 3º de la ESO y docentes no investigadores. Es aquí donde vamos a poder ampliar nuestra investigación y abordar el problema de las condiciones para la transferibilidad de estas herramientas. Un punto más abierto de futuro desarrollo es, a partir del análisis a priori aquí presentado, analizar en profundidad el proceso modelización algebraica y funcional (en el sentido de Ruiz-Munzón, 2010), así como el de la noción de covariación en la progresiva evolución de los modelos considerados. Cabe destacar cómo, en cada uno de los modelos, aparece de forma implícita el concepto de covariación entre magnitudes, concepto que va evolucionando en su tratamiento según el modelo lo permite. El caso invita a profundizar en el análisis a posteriori de la próxima experimentación para seguir estudiando los fenómenos didácticos relativos a la invisibilidad de propiedades tan centrales de la modelización matemática.

Referencias

Ärlebäck, J. B. y Doerr, H. M. (2020). Más allá de modelos descriptivos: Cuestiones de investigación sobre diseño e implementación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17*, 5–20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.307

Artigue, M. (2020). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*, 202-206. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Barquero, B. (2023). Mathematical modelling as a research field: Transposition challenges and future directions. En P. Drijvers, H. Palmer y C. Csapodi (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13) (No. 1). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME.

Barquero, B. y Jessen, B. E. (2020). Impacto del enfoque teórico en el diseño de tareas de modelización matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17*, 98–113. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.317

Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., y Ruiz-Munzón, N. (2022). Study and research paths in the frontier between paradigms. *Int Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(5), 1213–1229. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1988166

Barquero, B., Bosch, M. y Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 21*, 87–106. https://doi.org/10.35763/aiem21.4232

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. *Monografía del seminario matemático García de Galdeano, 29*. Universidad de Zaragoza.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J. y Ruiz-Higueras, L. (2006) La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37–74.

Bosch, M., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzón, N. (2022). Real or Fake Inquiries? Study and Research Paths in Statistics and Engineering Education. En R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen y C. Winsløw (Eds.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 393–409). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_19

Chappaz, J. y Michon, F. (2003). Il était une fois…. La boite du pâtissier. *Grand N, 72*, 19–32.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43–72.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*, 161–182.

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 12*, 71–114.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 75–94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x, 37*, 43–63.

Greefrath, G. (2020). Competencia en modelización matemática. Selección de desarrollos actuales de investigación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17*, 38–51. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.303

Jessen, B. E. (2014). How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting? *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, *19*, 199–224.

Rojas, C. y Sierra, T. Á. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 41–63. https://doi.org/10.35763/aiem20.4031

Ruiz-Higueras, L. (2008). Modelización Matemática en la Escuela Primaria. La reconquista escolar de dominios de realidad. En *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87–119). Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (2021). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM.

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modelisation: une question d'équipement praxeologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 32*(1), 7–55.

Wozniak, F. (2023). Modelizar para fabricar un libro o fabricar un libro para modelizar. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 99*, 39-43.

EL ROL DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA CONTINUIDAD EN SEGUNDO DE BACHILLERATO

The proof's role in the teaching of continuity in second year of high school

Milanesio, B. y Burgos, M.

Universidad de Granada

Resumen

Cómo enseñar la demostración continúa siendo un reto tanto para los investigadores en Educación Matemática como para los propios profesores. En este trabajo exploramos el rol que desempeña la demostración en el estudio de la continuidad de funciones, analizando, mediante un enfoque cualitativo, cuatro libros de texto de matemáticas de segundo curso de bachillerato de distintas editoriales. Los resultados muestran que existe cierta coherencia entre el tipo de argumentación empleado en las prácticas desarrolladas por los autores, con respecto al que se solicita en las tareas. Aun así, identificamos algunos conflictos derivados principalmente del uso no diferenciado de múltiples términos asociados a la demostración, que puede provocar confusión a la hora de abordar las tareas, o de comprender qué es suficiente y qué no lo es en una demostración matemática.

Palabras clave: *demostración matemática, libros de texto, continuidad de funciones, conflictos potenciales.*

Abstract

Teaching mathematical proof remains a challenge for both researchers in Mathematics Education and teachers themselves. In this paper, we explore the role that proof plays in the study of the continuity of functions, analyzing, through a qualitative approach, four different mathematics textbooks for second-year high school from various publishers. The results show that there is a certain coherence between the type of argumentation used in the practices developed by the authors, with respect to that requested in the tasks. However, we identified some conflicts mainly stemming from the undifferentiated use of multiple terms associated with proof, which can lead to confusion when addressing tasks or understanding what is sufficient and what is not in a mathematical proof.

Keywords: *mathematical proof, textbooks, continuity of functions, potential conflicts.*

INTRODUCCIÓN

La demostración matemática desempeña un papel fundamental en los procesos de enseñanza de las matemáticas, incluso desde la escuela primaria (Stylianides et al., 2017). El interés de profesores e investigadores se debe tanto a lo que aporta la práctica de la demostración para la comprensión y el dominio de las matemáticas como a su presencia en diferentes contenidos y áreas de la disciplina (Weber et al., 2020). Este interés motiva la necesidad de comprender cómo se aborda la demostración en diferentes recursos instruccionales, especialmente en los libros de texto, pues constituyen un material de gran importancia para los docentes que influyen de manera significativa en la selección e implementación de tareas en el aula (Stylianides et al., 2017).

Aunque numerosas investigaciones han considerado los libros de texto como objeto de estudio, solo unas pocas (Conejo y Ortega, 2014; Conejo et al., 2015; McCrory y Stylianides, 2014) han analizado el tratamiento de la demostración en los libros de texto y su potencialidad para orientar su enseñanza (Stylianides, 2014). En particular, Conejo y Ortega (2014) y Conejo et al. (2015) estudian cómo se aborda la demostración de teoremas relativos a la continuidad de funciones, y a la derivabilidad

Milanesio, B. y Burgos, M. (2024). El rol de la demostración en la enseñanza de la continuidad en segundo de bachillerato. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 345-352). SEIEM.

respectivamente, en libros de texto de Bachillerato de distintas editoriales. Los autores muestran que estos libros de texto dejan la enseñanza de la demostración en un segundo plano, priorizando la justificación intuitiva frente al razonamiento matemático. Recomiendan incluir pruebas preformales (Conejo y Ortega, 2014), que evidencien la esencia del razonamiento de una demostración sin la abstracción que dificulta su comprensión, unificar enunciados, así como indicar donde empieza y acaba una demostración, su necesidad e implicaciones (Conejo et al., 2015).

En este trabajo nos interesa estudiar el papel de la demostración en lecciones de libros de texto de segundo curso de Bachillerato, que abordan la continuidad de funciones. Pretendemos ampliar los estudios de Conejo y Ortega (2014) y Conejo et al. (2015) analizando, además del tratamiento experto que realizan los autores sobre la demostración, cómo se relaciona con las tareas propuestas a los estudiantes que requieren demostrar. Así, nuestro objetivo es responder a la cuestión: ¿Qué relaciones existen entre la forma de abordar la demostración por el autor y las tareas que implican demostración? Con esta intención, caracterizamos el tratamiento que recibe la demostración en las prácticas institucionales (enunciación y argumentación de propiedades, ejemplificación) y el esperado en las tareas, para valorar si existe coherencia entre los tipos de demostraciones expertas y las que se solicita a los estudiantes, y si se evidencian disparidades entre las prácticas expertas y esperadas.

DEMOSTRACIÓN, ARGUMENTACIÓN Y EL MODELO DE TOULMIN

La mayoría de los educadores matemáticos acuerdan que la definición de demostración a usar debe considerar tanto el contexto en el cual se utiliza como las estructuras de la propia disciplina (Staples y Conner, 2022). En este sentido, autores como Staples y Conner (2022) consideran adecuada la definición de demostración de Weber (2014) como proceso en el que el sujeto que realiza las prácticas genera un producto que tiene todas o un subconjunto significativo de las siguientes características:

> (1) un argumento convincente que convence a un matemático experto de que una afirmación es cierta; (2) un argumento deductivo que no admite posibles refutaciones; (3) un argumento transparente en el que un matemático puede rellenar todos los huecos (con tiempo y motivación suficientes), quizás hasta el nivel de una derivación formal; (4) un argumento claro que permite al lector comprender por qué un teorema es cierto; (5) un argumento dentro de un sistema de representación que satisface las normas comunitarias; (6) un argumento que ha sido aprobado por la comunidad matemática (p. 357).

Un argumento, como enunciado que permite validar una proposición o respaldar un procedimiento, es el resultado de un proceso de argumentación o secuencia de acciones que da lugar a un discurso oral o escrito que "de acuerdo con reglas compartidas, apunta a una conclusión mutuamente aceptable acerca de la veracidad o falsedad de una aserción" (Molina et al., 2019, p. 95).

Examinar estructuras de argumentación se considera una práctica relevante en el contexto educativo (Soler-Álvarez y Manrique, 2014) pues permite comprender mejor las formas en que los profesores enseñan la demostración y cómo los estudiantes llegan a comprenderla. En este sentido, Toulmin (2003) propuso un modelo que permite distinguir los diferentes tipos de argumentos empleados en un proceso de demostración. Para Toulmin (2003) un argumento es un discurso oral o escrito producto de un proceso de argumentación compuesto por tres elementos básicos: *conclusión* (se manifiesta una afirmación u opinión cuyo valor se está tratando de establecer), *datos* (permiten apoyar la afirmación realizada, la conclusión) y *garantía* (posibilita que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo, mediante una justificación a partir de inferencias basadas en reglas generales, principios, etc.).

Según el modelo de Toulmin, en una *argumentación inductiva* se parte de una regla general o conjetura y se verifica en uno o varios casos particulares si dicha regla o conjetura es verdadera (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). Los datos corresponden a la proposición (regla o conjetura) formulada, la garantía está respaldada por la verificación de dicha proposición mediante casos concretos, de la que se deriva su aceptación como verdadera, aunque es insuficiente para inferir la validez de la conclusión (Arce y Conejo, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014). En una *argumentación deductiva* se aplica una proposición general conocida (garantía) a unos datos dados para obtener la conclusión

(Molina et al., 2019). A su vez, la garantía está respaldada por una teoría matemática que hace que la misma sea válida (Arce y Conejo, 2019). Las argumentaciones deductivas se producen en los procesos de demostración de conjeturas, siendo las únicas que permiten validar el conocimiento matemático, el cual es irrefutable a excepción de que existan cambios en el sistema axiomático de partida (Arce y Conejo, 2019). Autores como Soler-Álvarez y Manrique (2014) consideran el uso de contraejemplos como un tipo de argumentación deductiva (*deductiva por contraejemplo*) donde se toma como dato al caso no válido, como garantía la regla general y como conclusión, el no cumplimiento de dicha regla general.

En el contexto educativo, demostración, argumento y argumentación coexisten con otros términos como prueba, justificación o explicación. Los libros de texto así como los profesores piden a los estudiantes justificar o explicar su respuesta, sus resultados, su método, justificar por qué algo es cierto, etc. Se entiende justificar como "proporcionar razón suficiente para", supone respaldar afirmaciones y acciones matemáticas al resolver problemas o explicar por qué una afirmación o respuesta tiene sentido (Staples y Conner, 2022).

METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en una investigación descriptiva de enfoque cualitativo, pues persigue describir e interpretar tanto el tratamiento experto sobre la demostración como los tipos de tareas que ofrecen oportunidades para que los estudiantes participen en prácticas de demostración. Empleamos el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) para examinar las lecciones de libros de texto de Matemáticas II de cuatro editoriales con mayor presencia en los centros de Educación Secundaria y Bachillerato: SM, Santillana, Edebé y Anaya adaptadas al nuevo currículo LOMLOE (MEFP, 2022). El tema, continuidad de funciones, se escogió en base a la importancia dentro del currículo y por ser uno en los que más presencia tenía la demostración en las distintas editoriales, tanto desde el punto de vista de las ejemplificaciones del autor, como de la demanda a los estudiantes. Cada lección se dividió en configuraciones didácticas, es decir, segmentos de actividad de enseñanza y aprendizaje que se distribuye entre el inicio y fin de la actividad matemática diseñada por el autor para abordar la resolución de un problema o la introducción de un concepto o procedimiento. En cada configuración didáctica identificamos las prácticas que implicaban demostración, los conocimientos involucrados y las tareas propuestas, examinando las instrucciones dadas (demuestra, justifica, prueba, etc.).

RESULTADOS

En los libros de texto de las cuatro editoriales se sigue un orden similar en la presentación de los contenidos. En primer lugar, se describen los conceptos y propiedades referidos a la continuidad de funciones (continuidad en un punto o intervalo, continuidad lateral, discontinuidad, propiedades de las funciones continuas) y, a continuación, los teoremas vinculados y algunas aplicaciones (teorema de la conservación del signo, teorema de Bolzano, teorema de los valores intermedios, teorema de Weierstrass, funciones acotadas). Sin embargo, se observan ciertas diferencias: la continuidad lateral solo se aborda en SM y Edebé, las propiedades de las funciones continuas no se estudian en Anaya, el teorema de la conservación del signo solo se trata en Edebé y las funciones acotadas solo en SM.

En la Tabla 1 se muestran los tipos de argumentaciones expertas, es decir, propuestas por el autor, según el contenido especificado previamente y la editorial. El teorema de Bolzano es el único contenido donde se desarrollan argumentaciones tanto inductivas como deductivas y deductivas por contraejemplo (ver Figuras 1 y 3). En el teorema de los valores intermedios se observan argumentaciones inductivas y deductivas (Figura 2), en la continuidad y discontinuidad sólo argumentaciones deductivas, y en el teorema de Weierstrass únicamente argumentaciones inductivas.

En general, en las prácticas expertas de los cuatro libros de texto se observa un predominio de argumentaciones deductivas. Estas argumentaciones se proponen, fundamentalmente, en tareas resueltas donde se aplican los contenidos abordados previamente a algún caso concreto. En menor

medida, se observan argumentaciones deductivas en la demostración de algún teorema, como el de Bolzano en SM, o en la demostración de propiedades, como las propiedades de continuidad en Edebé.

Tabla 1: Tipos de argumentaciones expertas según contenido y editorial

Argumentaciones expertas	Contenidos	Editorial			
		SM	Santillana	Edebé	Anaya
Inductiva de un caso	Teorema de Bolzano				x
	Teorema de los valores intermedios		x	x	x
	Teorema de Weierstrass			x	x
Inductiva de varios casos	Teorema de conservación del signo			x	
	Teorema de Bolzano		x	x	
	Teorema de Weierstrass		x		
Deductiva	Continuidad en un punto o intervalo	x	x	x	x
	Continuidad lateral			x	
	Propiedades de continuidad			x	
	Discontinuidad	x	x	x	x
	Teorema de Bolzano	x	x	x	x
	Teorema de los valores intermedios	x	x	x	x
Deductiva por contraejemplo	Teorema de Bolzano			x	

Fuente: Elaboración propia de la investigación

En la Figura 1 se muestra un ejemplo de argumentación deductiva en una práctica experta del libro de la editorial Anaya (Colera et al., 2023). Se considera una ecuación concreta $x^3-3x+40=0$, a partir de la cual se define la función $f(x)=x^3-3x+40$ para la que se hallan dos valores donde la función tenga distinto signo. Como esta función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en un intervalo concreto (datos), por dicho teorema (garantía) se puede asegurar la existencia de un valor en el intervalo tal que la función se anula (conclusión).

Figura 1. Argumentación deductiva. Editorial Anaya

Probar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ *tiene alguna raíz real. Aproximar su valor hasta las décimas.*

Consideremos la función $f(x) = x^3 - 3x + 40$, continua por ser polinómica. Calculamos el valor de f en distintos puntos para encontrar dos con distintos signos. Así encontramos que $f(-4) = -12$, $f(-3) = 22$.

Es decir, f es continua en $[-4, -3]$ y signo de $f(-4) \neq$ signo de $f(-3)$.

Por tanto (teorema de Bolzano), existe un $c \in (-4, -3)$ tal que $f(c) = 0$.

c es una raíz de la ecuación.

Tanteando con valores decimales, obtenemos: $f(-3{,}8) = -3{,}472$; $f(-3{,}7) = 0{,}447$. Por tanto, podemos asegurar que hay una raíz de la ecuación en el intervalo $[-3{,}8; -3{,}7]$ y que el número $-3{,}7$ se aproxima en menos de una décima a una raíz de la ecuación dada.

Fuente: Colera et al. (2023, p.234)

Las argumentaciones inductivas se emplean fundamentalmente para ejemplificar los teoremas de Bolzano, valores intermedios y Weierstrass. En la Figura 2 se muestra la presentación del teorema de valores intermedios en el texto de Santillana (Alejo et al.,2023). Se toma como garantía la verificación del teorema en una función concreta representada gráficamente, de la cual se deriva su aceptación como verdadero. Al no aclararse que esto es insuficiente para concluir la validez general del teorema, se podrían generar conflictos al abordar tareas que impliquen demostrar una proposición general.

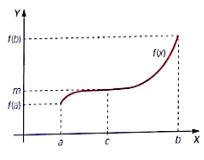
Figura 2. Argumentación inductiva de un caso. Editorial Santillana

Teorema de los valores intermedios (Darboux)

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces en el intervalo (a, b) $f(x)$ toma todos los valores m comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Es decir:

Si $f(a) < m < f(b)$, existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = m$.

Por ser $f(x)$ continua en el intervalo describirá una curva que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así, para cualquier valor intermedio m, comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existirá un valor $c \in (a, b)$ tal que la curva pase por el punto (c, m).

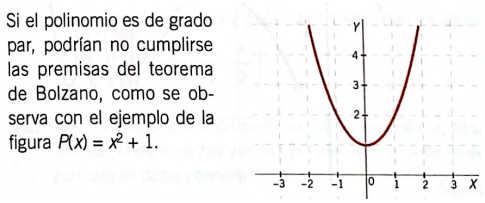


Fuente: Alejo et al. (2023, p.177)

Solamente el texto de la editorial Edebé propone una tarea resuelta donde utiliza una argumentación deductiva por contraejemplo. Como muestra la Figura 3, se presenta la solución de la tarea:

"Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real. ¿Se puede afirmar lo mismo si el polinomio tiene grado par?" (Ruiz et al., 2023, p.249). Se propone un polinomio de grado par que no tiene una raíz real (dato). Este caso permite refutar la regla general (garantía), es decir, que todo polinomio de grado par tiene al menos una raíz real (conclusión).

Figura 3. Argumentación deductiva por contraejemplo. Editorial Edebé



Fuente: Ruiz et al. (2023 p.249)

Es de destacar que en las prácticas expertas de los textos de las cuatro editoriales se emplean diversos términos asociados a la demostración. Fundamentalmente, se observa el uso indistinto de los términos "probar" y "demostrar" en los contenidos de los teoremas de Bolzano y de los valores intermedios, y de los términos "comprobar" y "estudiar" en la continuidad y discontinuidad.

En la Tabla 2 se muestran los tipos de tareas que requieren demostración según el contenido y la editorial, identificando además el tipo de argumentación esperado en cada caso. El teorema de Bolzano es el contenido donde se observa una mayor frecuencia de tareas que ofrecen a los estudiantes la oportunidad de demostrar. Predominan aquellas que solicitan "comprobar", "probar" o "demostrar" que una ecuación particular tiene una solución en un intervalo dado, y en menor medida, que dos funciones particulares se cortan en un punto de un intervalo. Con menor frecuencia, se proponen tareas relativas al teorema de los valores intermedios, predominando aquellas que requieren "demostrar" o "comprobar" que, dada una función, existe un valor tal que la función es igual a un número dado. Finalmente, se observa una escasa presencia en relación con el estudio de la continuidad en un punto o intervalo, discontinuidad y el teorema de Weierstrass.

Las tareas recogidas en la Tabla 2 motivan, fundamentalmente, la propuesta de argumentaciones deductivas en la mayoría de los contenidos y por parte de las cuatro editoriales (a excepción de SM, Santillana y Anaya en el estudio de la discontinuidad y de SM en el teorema de Weierstrass). Mayormente se presentan tareas que involucran un único elemento (o dos) de un conjunto en su enunciado, por ejemplo "demuestra que f(x)=2cos(x)+1 tiene al menos una raíz real en [0, π]" (Alejo et al., 2023, p. 181) o "dadas las funciones f(x)=x3+3x2-1 y g(x)=6x, justifica que existe algún punto en el intervalo [1,10] en el que ambas funciones toman el mismo valor" (Colera et al., 2023, p. 244). En estas tareas se observa un uso indistinto de diversos términos asociados a la demostración tales como "comprobar", "probar", "demostrar", "justificar" o "razonar", siendo los tres primeros los más frecuentes. En menor medida, se presentan tareas que involucran infinitos elementos de un conjunto, por ejemplo "demuestra que todo número real positivo tiene al menos una raíz cuadrada" (Ruiz et al., 2023, p. 249). En este último tipo de tareas, prevalece el uso del término "demostrar".

Son escasas las tareas que motivan la propuesta de argumentaciones deductivas por contraejemplo. Únicamente los textos de las editoriales Edebé y Anaya proponen tareas para determinar "justificar" (Anaya) o "razonar" (Edebé) la verdad o falsedad de una afirmación. Por ejemplo, justificar la verdad o falsedad de "la ecuación x5+x+1 no tiene ninguna raíz real" (Colera et al., 2023, p. 244).

Tabla 2: Tipos de tareas que implican demostración según contenido y editorial

Contenido	Tipos de tareas que implican demostración	Argumentación esperada	Editorial			
			SM	Santillana	Edebé	Anaya
Continuidad	Comprobar si una función particular es continua en un punto o intervalo dado	Deductiva	x		x	

Discontinuidad	Comprobar que una función particular es discontinua en un punto dado	Deductiva			x	
	Demostrar una propiedad general				x	
Teorema de Bolzano	Comprobar que una función particular corta al eje *x* en al menos un punto	Deductiva	x			
	Comprobar que una ecuación particular tiene una solución en un intervalo dado		x	x	x	
	Comprobar que dos funciones particulares se cortan en un punto de un intervalo					x
	Comprobar si una función particular cumple el teorema de Bolzano				x	
	Justificar que existe un punto en el que dos funciones dadas toman el mismo valor					x
	Probar que dos funciones particulares se cortan en un punto de un intervalo dado				x	x
	Probar que una ecuación particular tiene una solución real		x	x		
	Demostrar que existe un punto para el que una función particular toma un valor dado			x		
	Demostrar que dos funciones particulares se cortan en algún punto de un intervalo		x			x
	Demostrar que una ecuación/función tiene una solución en un intervalo dado		x	x		
	Demostrar una propiedad general		x		x	
	¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta	Deductiva-Deductiva por contraejemplo				x
	¿Verdadero o falso? Razona la respuesta				x	
Teorema de los valores intermedios	Comprobar que una función toma un valor indicado en un intervalo dado	Deductiva	x			
	Comprobar que dos funciones particulares se cortan en un punto de un intervalo			x		
	Demostrar que, dada una función, existe un valor tal que es igual a un valor dado			x	x	x
	Probar una propiedad general					x
Teorema de Weierstrass	Justificar qué funciones tienen máximo y mínimo absoluto en un intervalo dado	Deductiva				x
	Comprobar si se puede aplicar el teorema a funciones en un intervalo dado				x	
	Demostrar que una función alcanza un máximo y mínimo en un intervalo dado			x		

Fuente: Elaboración propia de la investigación

Por último, la diversidad de términos asociados a la demostración que se observa tanto en las ejemplificaciones como en los enunciados de las tareas nos llevó a estudiar posibles disparidades en los libros de texto según el contenido. Si bien se observa coherencia de uso al tratar la continuidad de funciones, pues prevalecen los términos "comprobar" y "estudiar" tanto en las prácticas expertas

como en las tareas, esto no sucede en los teoremas relativos a la continuidad, fundamentalmente en el teorema de Bolzano. Esto se evidencia cuando el autor usa ciertos términos para ejemplificar, pero cuando plantea la tarea análoga la enuncia empleando otros, por ejemplo, en el libro de SM "demuestra" que una ecuación tiene una solución, mientras que en las tareas análogas se solicita "probar" o "comprobar" (Alcaide et al., 2023). Además, se observan disparidades, por ejemplo, en Anaya, cuando para demostrar una situación-tipo se emplean procedimientos distintos según si el enunciado indica "probar" o "demostrar" (Colera et al., 2023). También, es frecuente en los cuatro libros el uso de ciertos términos en las tareas que no exigen la propuesta de argumentaciones, por ejemplo, "estudiar", más allá de que esto sea lo esperado según se deja ver en las prácticas expertas.

Considerando el análisis efectuado, podemos afirmar que existe cierta coherencia en los cuatro libros entre el tipo de argumentación empleado en las prácticas expertas, con respecto al que se solicita a los estudiantes en las tareas, tanto de aplicación de conceptos como de teoremas en casos concretos (Figura 1), en las que se prioriza el uso de argumentaciones deductivas. En los textos de las editoriales Santillana y Anaya predominan ejemplificaciones que involucran argumentaciones deductivas en los teoremas de Bolzano y valores intermedios, así como, tareas en estos contenidos que requieren el uso de este tipo de argumentación. En el texto de la editorial SM se observan principalmente prácticas expertas que incluyen argumentaciones deductivas, así como una mayoría de tareas que demandan su uso en los contenidos de continuidad en un punto o intervalo y en los teoremas de Bolzano y valores intermedios. Finalmente, el texto de la editorial Edebé muestra múltiples ejemplos que involucran argumentaciones deductivas en el estudio de la continuidad en un punto o intervalo, discontinuidad y los teoremas de Bolzano y valores intermedios, así como en las tareas propuestas.

Sin embargo, el análisis también nos permitió identificar algunos desajustes entre prácticas expertas y prácticas esperadas de los estudiantes, que el profesor que use el libro como recurso instruccional debería tener en cuenta. En particular, el uso de argumentaciones inductivas en la presentación de los teoremas relativos a la continuidad en los textos de Santillana y Edebé (Figura 2), sin explicitar ni advertir a los estudiantes de que no son suficientes para garantizar su validez general. Además, en los textos de Santillana, Edebé y Anaya no se presentan prácticas expertas que involucren el teorema de Weierstrass, aunque si se solicitan tareas que motivan el uso de argumentaciones deductivas en este contenido. Finalmente, la pluralidad de términos asociados a la demostración, tanto en la ejemplificación como en los enunciados de las tareas, puede ser fuente de conflictos para un estudiante a la hora de interpretar qué se espera ante la resolución de una tarea.

CONCLUSIONES

En este trabajo analizamos cómo se trata la demostración en lecciones que abordan la continuidad de funciones en libros de texto de Matemáticas II de cuatro editoriales de prestigio a nivel nacional. El modelo de Toulmin (2003) nos permitió distinguir distintos tipos de argumentaciones empleados por los autores en sus ejemplificaciones y los esperados ante las tareas propuestas.

Los resultados muestran que mayormente se promueve el uso de argumentaciones deductivas (mediante las que se rigen las demostraciones) en la aplicación de conceptos o teoremas a casos concretos, tanto en las prácticas expertas como en las esperadas en los cuatro libros de texto. Aunque existe cierta correspondencia entre el tipo de argumentación que se plantea y el que se solicita a los estudiantes, identificamos algunos conflictos derivados, por un lado, de la pluralidad de términos asociados a la demostración, y por otro, de lo que se considera que es suficiente en una demostración. En relación con los primeros, sería conveniente unificar dichos términos para evitar confusión al momento de abordar las tareas. En relación con los segundos, sería oportuno explicitar los límites de las argumentaciones inductivas para garantizar la validez de una propiedad general.

Así, este trabajo constituye una nueva mirada respecto a los trabajos previos (Conejo y Ortega, 2014; Conejo et al., 2015) al centrar la atención en las relaciones entre las prácticas de demostración expertas (las propuestas por el autor) con las esperadas en un contenido específico de segundo curso

de Bachillerato. Esperamos que el profesor que emplee el libro como recurso, considere los posibles conflictos que expusimos y pueda anticipar decisiones instruccionales ante ello. Finalmente, el carácter limitado de nuestro estudio marca la necesidad de ampliar la muestra en trabajos futuros, tanto de los libros de texto como de los contenidos, ya que, restringirnos a un contenido puede llevarnos a interpretaciones limitadas sobre el tratamiento de la demostración (Conejo et al., 2015).

Referencias

Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Riviere, V. y Sanz, L. (2023). *Matemáticas II*. SM.

Alejo, S., Álvaro, M., Gámez, J., Marín, S., Lavado, C., Martín, A., Pérez, C. y Sánchez, D. (2023). *Matemáticas II*. Santillana.

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Colera, J., Oliveira, J., Colera, R., García, R. y Aicardo A. (2023). *Matemáticas II*. Anaya.

Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *AIEM, 8*, 51-71.

Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *Números, 87*, 5-23.

McCrory, R. y Stylianides, A. J. (2014). Reasoning-and-proving in mathematics textbooks for prospective elementary teachers. *International Journal of Educational Research, 64*, 119-131. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.003

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado.

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Ruiz, R., Sánchez, E., Nus, E., Blanco, A., Borja, S., Llorca, A., Dubarbie, L., Molina, J., Rueda, E., Collados, M., Íbeas, A., Martos, F. y Valldaura, L. (2023). *Matemáticas 2*. Edebé.

Soler-Álvarez, M. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026

Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. Conner, K. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research, 64*(0), 63–70. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.01.002

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments* (Actualización de 1 ed.). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Weber, K. (2014). Proof as a cluster concept. En C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl y D. Allan (Eds.), *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36* (pp. 353-360). PME.

Weber, K., Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for students' mathematical justifications. *Cognition and Instruction, 38*(1), 27-56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796

MIRADA PROFESIONAL DE LOS ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE EDUCACION SECUNDARIA SOBRE SITUACIONES DE ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS

Prospective secondary teachers' noticing of mathematics teaching situations

Moreno, M., Santonja, P. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es caracterizar cómo estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria (EPMS) dotan de significado a las situaciones de enseñanza de matemáticas durante su período de prácticas en centros educativos. Para ello, se consideran las destrezas vinculadas a la competencia docente mirar profesionalmente (atender, interpretar y decidir) y los aspectos a los que miran en las situaciones (las tareas, las respuestas de los estudiantes para inferir cómo están comprendiendo y la gestión del profesor). Siete EPMS escribieron narrativas correspondientes al periodo de observación en el aula (n1=7) y al de enseñanza (n2=13). Los resultados muestran que: (i)existen diferencias en cómo razonan los EPMS sobre las situaciones de enseñanza según correspondan a momentos observados o de su enseñanza y, (ii) estas diferencias se vinculan a los aspectos que atienden (focos) e interpretan para decidir cómo continuar la enseñanza.

Palabras clave: *estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria, mirada profesional, narrativa, aprendizaje del estudiante para profesor.*

Abstract

The aim of this study is to characterise how prospective secondary mathematics teacher (PSMT) notice to mathematics teaching situations during their teaching practice in secondary schools. To do so, we consider the skills linked to the professional noticing (attending, interpreting and deciding) and the aspects they attend to in the situations (the tasks, the students' responses to infer how they are understanding and the teacher's management). Seven PSMT wrote narratives corresponding to the classroom observation period (n_1=7) and the teaching period (n_2=13). The results show that: (i) there are differences in how PSMT reason about teaching situations according to whether they correspond to observed or taught moments and, (ii) these differences are linked to the aspects they attend to (foci) and interpret in order to decide how to continue teaching.

Keywords*: prospective secondary mathematics teacher, (professional) noticing, narratives, prospective secondary mathematics teacher' learning.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha enfatizado la relevancia de la competencia reflexiva de los futuros docentes vinculada a la generación de información sobre situaciones de enseñanza (Sol et al., 2022), y en particular sobre la que le permite al docente fundamentar las decisiones de acción (Köning et al., 2022; Mason, 2002; Weyers et al., 2023). Esta competencia se suele denominar "Mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza" (Professional Noticing). Investigaciones previas indican que el desarrollo de esta competencia docente puede apoyarse desde los programas de formación inicial (Fernández et al., 2016; 2018; Sánchez-Matamoros et al., 2015; 2019). Por otra parte, investigaciones previas indican que escribir narrativas sobre diferentes aspectos de las situaciones de enseñanza observadas les puede ayudar a aprender a razonar sobre la enseñanza (Ponte,

Moreno, M., Santonja, P. y Llinares, S. (2024). Mirada profesional de los estudiantes para profesor de educación secundaria sobre situaciones de enseñanza de matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 353-360). SEIEM.

2001; Fernández et al., 2023) y son una manera de construir progresivamente el conocimiento profesional. Ponte (2021) indica que las narrativas escritas por los profesores son una forma de representar y dar sentido a su propia experiencia y subraya que las narrativas constituyen "una manera de llegar a conocer" vinculadas a la acción. Además, el uso interpretativo del conocimiento que se puede dar al escribir las narrativas desempeña un papel importante en el desarrollo de la toma de decisiones profesionales en los contextos de enseñanza (Eraut, 1994). En nuestra investigación profundizamos cómo, a través de la escritura de narrativas, los EPMS razonan sobre situaciones de enseñanza de las matemáticas, significativas para ellos, tanto observadas como en las que intervienen como docentes durante sus prácticas de enseñanza en centros educativos (Practicum) y con qué aspectos empiezan a estructurar su mirada profesional.

Por tanto, el objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria razonan sobre las situaciones de enseñanza de matemáticas, durante el periodo de prácticas en centros educativos, considerando las relaciones entre las destrezas de la competencia docente (percibir, interpretar y tomar decisiones) y los focos de atención (tareas, pensamiento de los estudiantes y gestión del profesor).

MARCO TEÓRICO

Mason (2002, 2021) subraya que un profesor de matemáticas desarrolla una mirada profesional (como un aspecto de su competencia docente) cuando cambia la forma en que percibe los detalles relacionados con su práctica docente, pasando de dar cuenta de algo (*account of*) a darse cuenta del por qué y para qué (*account for*). Para caracterizar este cambio, entre percibir detalles y generar razones de por qué sucede y poder explicar para qué se hacen determinadas cosas, van Es y Sherin (2008, p.245) indican que mirar profesionalmente implica "(i) identificar eventos matemáticamente importantes en una situación de enseñanza y aprendizaje, (ii) utilizar el propio conocimiento sobre el contexto para razonar sobre dichos eventos y (iii) conectar los eventos específicos con principios más amplios de la enseñanza y el aprendizaje". En el contexto de esta investigación, consideramos que los EPMS pueden tener oportunidades de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" no solo cuando escriben sobre eventos que consideran matemáticamente relevantes en una situación de enseñanza y razonan sobre ellos (dotándolos de significado a través de procesos interpretativos) para justificar decisiones de acción en la instrucción, sino también cuando los EPMS adoptan una actitud de indagación sobre la situación de enseñanza observada (*stance of inquiry*) que les permita averiguar, por ejemplo, qué quieren decir los estudiantes o por qué el profesor toma una determinada decisión, etc., y generar información sobre lo observado en relación al contexto específico (van Es y Sherin, 2021).

De esta manera, escribir narrativas sobre las situaciones de enseñanza con el objetivo de dotarlas de sentido puede ayudar a los EPMS a entender eventos pasados, planificar acciones futuras y generar la perspectiva de investigación sobre la enseñanza (Wells, 1999). Así, las narrativas podrían convertirse en una herramienta clave para el desarrollo de esta postura de indagación en los EPMS que les haga darse cuenta de cómo se genera conocimiento a partir de las descripciones de sucesos y sus interpretaciones en las que fundamentan su toma de decisiones sobre cómo continuar la enseñanza. Es decir, cuando se apoya el desarrollo de esta perspectiva indagadora en el proceso de identificar aspectos que proporcionarían información adicional sobre la situación descrita, se refinan las interpretaciones de los EPMS sobre los hechos específicos (van Es y Sherin, 2021, denominan a este proceso "*shaping")*. Para caracterizar este desarrollo nos centramos en la articulación entre las destrezas (describir, interpretar y decidir) que configuran la competencia docente y los aspectos (focos) a los que se atienden los EPMS en las situaciones elegidas (las tareas, las respuestas de los estudiantes para inferir cómo están comprendiendo/pensamiento matemático de los estudiantes y la gestión del profesor). La manera como se articulan las destrezas (descriptiva, interpretativa y justificando la acción) y los focos a los que se atienden pueden proporcionar indicadores del

desarrollo de la mirada profesional en un momento específico, combinando adecuadamente la cognición (destrezas) y los elementos del contexto.

MÉTODO

Participantes e instrumento

Los participantes fueron 7 EPMS del Máster de Formación de Profesores de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas) de la Universidad Alicante. Participaron voluntariamente y firmaron un consentimiento informado. El máster incluye formación pedagógica, psicosocial y sobre aspectos normativos y de organización de centros. En la especialidad de matemáticas, se incluyen contenidos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas organizados alrededor de la competencia docente "Mirar Profesionalmente", proporcionando en las diferentes asignaturas instrumentos conceptuales para que los EPMS razonen sobre las situaciones de enseñanza (Smith, 2014). Algunos de estos instrumentos conceptuales son sobre: (i) los principios de la enseñanza exploratoria (Artigue y Blomhøj, 2013), (ii) características de las tareas y su demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998), (iii) el pensamiento matemático de los estudiantes a través de trayectorias hipotéticas de aprendizaje de conceptos matemáticos específicos (Wilson et al., 2013) y, (iv) la gestión de las discusiones matemáticas en el aula (Stein et al., 2008).

Durante las prácticas de enseñanza en los centros educativos, los EPMS tienen un tutor (profesor de matemáticas) y un tutor de la Universidad que supervisa el desarrollo de las prácticas. Los EPMS aprenden sobre la organización y funcionamiento del centro. Dentro de las aulas, inicialmente observan la gestión del profesor, las lecciones, etc., y posteriormente, actúan como docentes, planificando e implementando una propuesta de enseñanza. Al finalizar las prácticas, los EPMS entregan una memoria que contiene tres narrativas correspondientes a momentos de situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas relevantes para ellos, una correspondiente a la fase de observación y dos a la de su enseñanza de una propuesta planificada. Para la escritura de la narrativa, se les proporcionó una guía que conllevaba: 1) describir una situación de enseñanza de las matemáticas, incluyendo la tarea usada para el aprendizaje, evidencias de resoluciones de los estudiantes, y las características de la enseñanza; 2) interpretar la situación usando conocimientos matemáticos o de didáctica de las matemáticas; y, 3) hacer una propuesta de enseñanza para continuar la instrucción (tomar decisiones) que apoyara el aprendizaje de los estudiantes. Finalmente, se solicitaba una autorreflexión sobre la utilidad de las narrativas en su aprendizaje para docentes.

Análisis

Los datos de este estudio fueron 20 narrativas (n_1=7 de observación y n_2=13 de enseñanza) escritas por los EPMS. Uno de los EPMS entregó, únicamente, una narrativa de observación y una de implementación. El análisis siguió 2 fases. En la primera fase, cada narrativa fue segmentada en unidades de análisis (fragmentos que expresan una idea), codificadas atendiendo a la forma (descripciones, interpretaciones, decisiones o introspecciones) (Tabla 1) y al foco de atención (tareas, gestión del profesor y respuestas/dificultades de estudiantes) sobre el que escribían los EPMS. Codificamos como descripciones: los enunciados de tareas y los objetivos de aprendizaje, las reproducciones de diálogos entre profesor y alumnos, las indicaciones de las acciones del profesor/EPMS en el aula o los recursos utilizados en sus explicaciones. La forma de la narrativa considerada como interpretación, evidenciaba cómo los EPMS generaban información sobre la situación bien usando los contenidos del programa formativo; bien considerando las asociaciones que los EPMS hacían al combinar ideas, o las inferencias cuando generaban una idea a partir de la información del contexto y las validaciones de algo en función de la información disponible. Codificamos como interpretaciones, entre otras: las explicaciones sobre cómo los estudiantes podían estar comprendiendo un concepto matemático como relación entre conceptos; las explicaciones de la gestión del profesor usando elementos teóricos proporcionados en el programa de formación, por ejemplo, indicando que lo que hacía el profesor podía ser evidencia de características de una

enseñanza exploratoria (Artigue y Blomhøj, 2013) o identificando fases de una discusión matemática (Stein et al., 2008). Codificamos como tomas de decisión: las propuestas de tareas para continuar la instrucción o las descripciones de decisiones específicas, tomadas en el momento de la enseñanza, con base en lo observado. Por último, codificamos como introspecciones: las reflexiones sobre la práctica docente, sus inquietudes como futuros docentes o sus percepciones del periodo de prácticas (Tabla 1). La forma de cada narrativa se identifica a partir de la forma de sus unidades de análisis pudiendo ser descriptiva o interpretativa. Estas diferentes formas de las narrativas mostraban indicadores del desarrollo de la perspectiva interpretativa de los EPMS (*stance of inquiry)*, al generar información sobre lo descrito y poder refinar las interpretaciones considerando información desde diferentes fuentes (s*haping)* (van Es y Sherin, 2021).

Tabla 1. Formas de la escritura en las narrativas vinculadas a las destrezas de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza

Forma	Descripción	Ejemplo
Descripción	Acto de decir qué es o cómo es algo o alguien	"El profesor resolvió la ecuación (33 = 27) y preguntó si había alguna duda al respecto ya que los estudiantes estaban resolviendo esta tarea en sus cuadernos de manera simultánea." (ST7O)
Interpretación	Acción de explicar el significado intencionado de algo, justificando con la teoría	Conectar los eventos específicos con principios más amplios de la enseñanza y el aprendizaje Por la propia finalidad de la actividad planteada esta es de nivel 1 [se refiere a la demanda cognitiva de la tarea según Smith et al, 1998]: se reproducen las reglas o definiciones dadas para el cálculo de probabilidades, no necesariamente poniéndose en evidencia el significado tras los conceptos trabajados. (ST1IA)
	Proceso por el que varias ideas se combinan en una idea total	Asociar el ambiente de clase con favorecer el aprendizaje [...]crear un ambiente de aula dinámico en el que los alumnos se sientan cómodos para participar y aprender de sus "errores" (ST5IA)
	Acto de confirmar algo como cierto/correcto	Validación He de decir que a mí en su tiempo me lo explicaron directamente con la definición y tenía que buscarme la vida para ver una relación lógica, mientras que, con esta técnica, se ve más clara dicha relación. (ST3O)
	Formarse una opinión o intuir que algo es cierto con base en la información disponible	Inferencia De esta forma los alumnos deberían ser capaces de organizar bien sus ideas y en caso de cometer errores, al tener el cuaderno organizado, les facilitará la identificación y corrección del mismo. (ST2O)
Toma de decisiones	Modificar variables en una situación dada desde lo observado	[...]se podría haber planteado una actividad conjunta, en la que tanto la representación gráfica como la analítica se trabajan a la par; por ejemplo, relacionar la gráfica con su expresión analítica utilizando únicamente la información del dominio y/o el recorrido. (ST4IA)
Introspección	Examinar y prestar atención a tus propias ideas, pensamientos, sentimientos	[...]Resulta realmente difícil planificar y utilizar diversas estrategias de enseñanza para adaptarse a las necesidades y estilos de aprendizaje de los estudiantes... (ST6IB)

En la segunda fase, comparamos las veinte narrativas para buscar patrones e identificar semejanzas y diferencias considerando cómo los EPMS generaban conocimiento al articular las tres destrezas de la mirada profesional (describir, interpretar y decidir) con los focos de atención (tareas, gestión del profesor y pensamiento de los estudiantes) lo que nos permitió establecer grupos en las narrativas Tipo II en función de la estructuración de la mirada profesional con los focos a los que se atendía.

RESULTADOS

Identificamos dos tipos de narrativas: Tipo I descriptivas y Tipo II interpretativas. Entre las narrativas interpretativas (Tipo II), identificamos tres grupos (Tabla 2) considerando cómo los EPMS articulaban (estructuración) las destrezas de la mirada profesional con los focos a los que atendían. Finalmente, en la tercera fase de análisis, comparamos las narrativas de observación e implementación realizadas por cada uno de los EPMS.

Tabla 2. Características de las narrativas durante el periodo de prácticas de enseñanza

Características	O	I
Tipo I: Narrativas descriptivas		
G1- Contienen descripciones de tareas y gestión del profesor. No muestran interpretaciones ni tomas de decisiones	ST3O	ST3IA ST3IB ST6IA ST6IB
Tipo II: Narrativas interpretativas		
G2- Contienen descripciones de tareas y/o gestión del profesor. Muestran interpretaciones únicamente de uno de los focos (tareas o gestión). Pueden contener decisiones considerando lo interpretado	ST4O	ST2IA, ST2IB ST4IA, ST4IB ST5IA, ST7IA
G3- Contienen descripciones de todos los focos. Muestran interpretaciones de dos de ellos y en las tomas de decisiones se considera lo interpretado	ST2O ST5O ST7O	ST1IA, ST1IB, ST7IB
G4- Contienen descripciones, interpretaciones y tomas de decisiones de todos los focos considerando lo interpretado	ST1O ST6O	
	7	13

Los cambios entre la observación y la implementación indican que dos EPMS (ST3 y ST4) no cambiaron y se mantuvieron en el mismo nivel tanto en la narrativa de observación como en las de implementación. ST3 se mantuvo en el nivel descriptivo (G1) y ST4 en el interpretativo (G2), describiendo uno o dos focos, pero interpretando solo uno de ellos. Por otra parte, los datos muestran una disminución en la manera en la que se articulan las destrezas en relación con los tres focos. Estos cambios no fueron uniformes, se observa una disminución importante en la articulación de las destrezas de la competencia docente con los focos de atención considerados (ST6), pasando del nivel interpretativo (G4) al descriptivo (G1); y una disminución de la articulación de las destrezas con los focos, solo en una de las narrativas (ST7), al pasar de un nivel interpretativo (G3) a uno (G2).

En relación a los cambios identificados, tres de los EPMS (ST2, ST5 y ST7) mientras que, en la narrativa de observación realizaban descripciones de todos los focos (tareas, gestión del profesor y pensamiento matemático de los estudiantes) interpretando únicamente dos de ellos y tomando decisiones relativas a los aspectos interpretados (G3); en las narrativas de implementación, disminuía *la articulación* entre las destrezas y los focos, interpretando solo uno de los focos de atención (G2). En este cambio, el estudiante ST7, en una de las narrativas de implementación (ST7IB), fue capaz mantenerse en el mismo nivel que en el de observación al ser capaz de describir todos los focos, interpretando solo dos de los ellos (G3). Finalmente, otros dos EPMS que mostraron una buena articulación entre las destrezas y los focos en las narrativas de observación (ST1 y ST6) (G4), en las narrativas de implementación, uno de ellos (ST6), solo realizó descripciones (G1); mientras que el otro (ST1), pasó a realizar interpretaciones únicamente de dos de los focos de los tres que había descrito, tomando decisiones considerando dichas interpretaciones (G3).

Ejemplificamos la naturaleza de estos cambios en la manera que se evidencia la articulación entre las tres destrezas y los focos considerados con el EPMS ST2. En la narrativa de observación de ST2 (ST2O, 1º ESO dedicada a la resolución de problemas con números decimales) se describían las tareas de la lección, la gestión de la profesora y algunas respuestas de los estudiantes. Además, interpretaba la demanda cognitiva de algunas de las tareas observadas indicando, previamente, la información proporcionada en el master (Smith y Stein, 1998), tal como se evidencia en el siguiente fragmento:

> Problema 9. Compramos 129 litros de aceite por 190 euros en total, y lo envasamos en botellas de 1,5 litros. Si queremos venderlas y obtener un beneficio de 87,25 euros, calcula el precio de venta de cada botella […]
> **Nivel 4 − Tareas matemáticas que requieren "hacer matemáticas"**
> ○ Requieren que los estudiantes analicen la tarea y la examinen atentamente.
> ○ Requieren que los estudiantes exploren y comprendan los conceptos, procesos o relaciones matemática [….]
> **[el problema]** Se encuentra en este nivel el problema *9,* puesto que deben analizar la tarea con tal de comprender qué deben hacer y plantear la estrategia correcta. Deben comprender el concepto de beneficio y las relaciones entre cada uno de los datos. Además, el problema no se puede resolver de manera directa y procedimental sin antes comprender el enunciado y plantear una estrategia conveniente

En este fragmento, la EPMS interpreta uno de los problemas indicando las ideas que toma como referencia y reseñando la necesidad de que los estudiantes analicen el contexto del problema para establecer las relaciones entre las cantidades indicadas, antes de realizar cualquier procedimiento.

Por otra parte, en la narrativa sobre su implementación (ST2IA, 1º bachillerato, números complejos, introducción de la unidad imaginaria), contiene descripciones de la actividad realizada con los estudiantes y algunas respuestas de estos (interacción estudiantes-profesora), pero solo interpreta la tarea desde el punto de vista de lo que le exige a los alumnos y de los contenidos matemáticos que deben ser movilizados, sin presentar interpretaciones del pensamiento matemático de los estudiantes (más allá de indicar que la tarea fue fácil para los estudiantes), o no indica aspectos de su gestión. Por ejemplo, ST2, tras presentar la actividad realizada con sus estudiantes, escribe:

> Con esta actividad se pretendía que los alumnos descubrieran varias cosas:
> **1.** Que las raíces cuadradas de números negativos no se encuentran sobre la recta real
> **2.** Que existe un número al que llamamos unidad imaginaria, y representamos con la $i^2 = -1$
> **3.** La existencia de un nuevo conjunto, el de los números complejos.
> **4.** Que los números complejos se encuentran sobre un plano, el plano complejo.
> **5.** Que la recta real está contenida en el plano complejo, pero no al revés. […]
> Para la resolución de esta tarea se requiere simplemente que los alumnos y alumnas conozcan el conjunto de los números reales y sepan realizar operaciones básicas dentro de este cuerpo. Deben también comprender el concepto de recta real y del plano.
>
> Puesto que la actividad es sencilla de entender y es muy visual, permite alcanzar los objetivos de aprendizaje pretendidos. Con el desarrollo de esta actividad los alumnos y alumnas han podido comprender que existe un número real al que llamamos unidad imaginaria que no se encuentra en el conjunto de los números reales, sino que está situada sobre un plano complejo.

Además, comprenden que $i2 = -1$ de una manera lógica, pues ven la necesidad de haber inventado este nuevo número. Incluso algunos de ellos podrían llegar a considerar que para llegar del 1 al -1, hay que realizar una rotación de 180º respecto del origen, y conectaría así con el concepto de argumento. Puesto que se trata de una actividad en la que simplemente deben realizar cálculos sencillos y comprender qué está ocurriendo en cada momento, la demanda cognitiva es realmente baja, lo cual, unido al ambiente del juego favorece que todos y cada uno de los alumnos del grupo puedan seguir la actividad con interés.

En este extracto de narrativa, ST2 indica los elementos matemáticos que configuran la actividad propuesta para introducir la unidad imaginaria en el conjunto de los números complejos, justificándola a través de las relaciones con otros conceptos y asumiendo su posible demanda cognitiva para los alumnos. En esta narrativa, ST2 articulaba parcialmente las tres destrezas de la

competencia docente y atendía a dos de los focos de atención, sobre la tarea y sobre la gestión en el aula, tomando decisiones basadas en lo interpretado.

El cambio de ST2, de la narrativa de observación a las de implementación, muestra diferencias en el desarrollo de la articulación entre las destrezas y los aspectos de la situación que podrían ser considerados para generar información, de manera que le permitan tomar decisiones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo estudiantes para profesor de educación secundaria razonan sobre situaciones de enseñanza de matemáticas, durante el periodo de prácticas, considerando las relaciones entre las destrezas de la competencia docente (percibir, interpretar y tomar decisiones) y los focos de atención (tareas, pensamiento de los estudiantes y gestión).

Los resultados muestran diferentes maneras en las que los estudiantes para profesor de educación secundaria articulaban las destrezas con los focos para generar información sobre las situaciones de enseñanza, con una disminución en esta articulación desde las descripciones sobre lo observado a las de su enseñanza lo que puede deberse a la dificultad de atender simultáneamente a varios aspectos cuando uno mismo es el protagonista de la situación descrita, aunque son necesarias más investigaciones para profundizar en este resultado. Además, los resultados indican que los estudiantes para profesor de educación secundaria atienden, primero a las tareas y a la gestión del profesor y, tienen más dificultades en interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes para fundamentar la toma de decisiones. Las tareas matemáticas parecen un aspecto relevante de las situaciones de aula, y apoyan la articulación interpretaciones-tomas de decisión considerando las tareas descritas. Por otra parte, aunque muchas narrativas contienen descripciones de las dificultades de los estudiantes, sólo tres narrativas articulan interpretaciones-tomas de decisión considerando el pensamiento matemático de los estudiantes. Estos resultados complementan los hallazgos de van Es y Sherin (2008) quienes identificaron que los estudiantes para profesor, en un primer nivel, atendían al entorno de la clase, al comportamiento de los alumnos y a los aspectos pedagógicos; a continuación, atendían al pensamiento matemático de algunos estudiantes de manera específica y, finalmente, atendían a la conexión entre el pensamiento de los estudiantes y las estrategias del profesor. Además, el hecho de que los estudiantes para profesores de educación secundaria atiendan a los elementos matemáticos de las tareas como un aspecto relevante desde los primeros momentos, permite asumir que la articulación con la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes es el punto de apoyo para la propuesta de actividades instruccionales, coherentes con la información generada sobre la situación (Sánchez-Matamoros et al., 2019). Estos resultados, nos ayudan a comprender mejor la manera en la que se produce la articulación de las destrezas de la mirada profesional con aspectos de la situación de enseñanza seleccionados por los estudiantes para profesores de matemáticas de educación secundaria durante las prácticas de enseñanza y aportan información para generar indicadores del desarrollo de esta competencia docente.

Reconocimiento

Este trabajo forma parte del proyecto Referencia: PID2020-116514GB-I00, y el contrato predoctoral PRE2021-097154. Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ZDM *Mathematics Education, 45*(6), 797–810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Amador, J. M. (2017). Preservice teachers' video simulations and subsequent noticing: a practice-based method to prepare mathematics teachers. *Research in Mathematics Education, 19*(3), 217–235.

Eraut, M. (1994). *Developing Professional Knowledge and Competence.* The Falmer Press.

Estapa, A. T., Amador, J., Kosko, K. W., Weston, T., de Araujo, Z. y Aming-Attai, R. (2018). Preservice teachers' articulated noticing through pedagogies of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*, 387–415. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9367-1

Fernández, C., Ivars, P. y Llinares, S. (2023). El desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes durante los períodos de práctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 98*(37.2), 127–146. https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99296

Fernández, C., Sánchez–Matamoros, G., Callejo, M.L. y Moreno, M. (2016). Aprendizaje de estudiantes para profesor sobre la comprensión del límite de una función en estudiantes de bachillerato. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J Ruiz, T. Fernández y A. Berciano, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 277–236). SEIEM.

Fernández, C., Sánchez–Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M.L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 36*, 143–162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A. K., Yang, X. y Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review*, *36*, 100453. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100453

Mason, J. (2021). Learning about noticing, by, and through, noticing. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(1), 231–243. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01192-4

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The Discipline of Noticing* (first ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203471876

Ponte, J. (2001). Professional narratives in Mathematics Teacher Education. *Proceedings of the 2001 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 61–65). University of Alberta.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics, 100*, 83–99. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*, 1305–1329. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y

Smith, M. (2014). Tools as a Catalyst for Practitioners' Thinking. *Mathematics Teacher Educator, 3*(1), 3–7.

Smith, M.S. y Stein, M.K. (1998) Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5)*,* 344–350.

Sol, T., Sánchez, A., Breda, A., Font, V. y Hummes, V. (2022). Análisis de la reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre los errores que cometen en su práctica docente. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 549–557). SEIEM.

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., y Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: five Practices for Helping Teachers Move beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10(*4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education*, *53*, 17–27. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01211-4

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and teacher education*, *24*(2), 244–276.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry. Toward a Sociocultural Practice and Theory of Education*. Cambridge University Press.

Wilson, P., Mojica, G., y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 103–121.

Weyers, J., Köning, J., Scheiner, T., Santagata, R., y Kaiser, G. (2023). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM Mathematics Education*, 1–16.

IDENTIFICANDO CONOCIMIENTOS PARA ENSEÑAR LOS PRIMEROS NÚMEROS Y OPERACIONES EN LA ESCUELA INFANTIL (0-3 AÑOS)

Identifying knowledge to teach the first numbers and operations in kindergarten (0-3 years)

Olmos-Martínez, G.[a], Alsina, Á.[b]

[a]Escoles Bressol Municipals de Vic, [b]Universidad de Girona

Resumen

Las orientaciones contemporáneas sobre educación matemática infantil señalan la importancia de promover el desarrollo de las habilidades matemáticas en la primera infancia (0-3 años). Estas habilidades matemáticas emergentes, también conocidas como intuitivas e informales, abarcan distintos aspectos como los primeros números y operaciones. A través de un estudio cuasi-experimental (Pre-Post), se han evaluado los conocimientos de 28 profesionales de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Vic (Cataluña, España) para enseñar estos conocimientos, antes y después de participar en una actividad de formación. Los resultados muestran grandes carencias y la necesidad de actualizar los programas de formación inicial y continua para los profesionales de la Escuela Infantil.

Palabras clave: *matemáticas emergentes, números y operaciones, conocimientos para enseñar matemáticas, formación del profesorado, Escuela Infantil.*

Abstract

Contemporary guidelines on early childhood mathematics education point to the importance of promoting the development of mathematical skills in early childhood (0-3 years). These emergent mathematical skills, also known as intuitive and informal, cover different aspects such as continuous and discrete quantities. Through a quasi-experimental study (Pre-Post), the knowledge of 28 professionals belonging to the Network of Municipal Nursery Schools of Vic (Catalonia, Spain) in the promotion of this type of thinking, before and after participating in a training activity, has been evaluated. The results show major shortcomings in the preparation of professionals and the need to update initial and continuing training programs for nursery school professionals.

Keywords*: emergent mathematics, continuous and discrete quantities, knowledge to teach mathematics, continuing education, Early Childhood School.*

INTRODUCCIÓN

Diferentes expertos y organizaciones resaltan la urgencia y relevancia de fomentar el desarrollo de las habilidades matemáticas emergentes desde temprana edad (0-3 años), especialmente durante momentos de juego, exploración y manipulación (Baroody, 1987). Estas habilidades son fundamentales para el desarrollo del pensamiento matemático a lo largo de toda la escolarización (NCTM, 2003). Las matemáticas emergentes en la primera infancia se refieren, por un lado, a los conocimientos intuitivos que los niños desarrollan de manera evidente y natural, basados en su propia certeza intrínseca, de forma global y no analítica (Fischbein, 1987). Por otro lado, también incluyen los conocimientos matemáticos que se adquieren a través de las interacciones con el entorno físico y social, de manera espontánea y orgánica (Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014).

Lago et al. (2012) plantean que uno de los principales focos sobre el desarrollo del pensamiento matemático es cómo los niños y niñas construyen el concepto de número. Las autoras señalan que las

Olmos-Martínez, G., y Alsina, Á. (2024). Identificando conocimientos para enseñar los primeros números y operaciones en la escuela infantil (0-3 años). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 361-368). SEIEM.

investigaciones sobre las capacidades numéricas de los infantes han mostrado algunas discrepancias, lo que convierte este campo en un área llena de matices y posibilidades.

Autores y organismos como Brannon (2006), Bryant y Nunes (2011), Castro (2006), Clements y Sarama (2015), Izard et al. (2009), Lago et al. (2012), NCTM (2003) y Salgado y Salinas (2011) han contribuido significativamente a mejorar la comprensión de estos procesos y a refinar los datos. En conjunto, indican que deben aprender la lógica subyacente a la conservación del número antes de que el conteo adquiera verdadero significado. Esta habilidad requiere combinar dos tipos de conocimientos: la clasificación jerárquica, que implica comprender que cada número incluye a todos los anteriores, y la seriación, que implica comprender que cada número, al contarse progresivamente, es uno más que el anterior.

Además, la acción de contar conlleva ciertos requisitos o principios que deben ser comprendidos y respetados, como el orden estable de la secuencia convencional, la reciprocidad, la recitación correcta de la secuencia, la independencia del orden al señalar objetos, la cardinalidad y la abstracción (Castro, 2006).

Algunas teorías, como la de Piaget y sus colaboradores, inicialmente sugieren que los niños y niñas no desarrollan la comprensión numérica en los primeros años de vida. Esto ha llevado a que se desestimen propuestas educativas que ofrecen oportunidades de enseñar conocimientos numéricos fundamentales en la escuela infantil. Clements y Sarama (2015) argumentan que, si bien es cierto que los infantes deben desarrollar profundamente las habilidades de clasificar y seriar para entender los números, esto no significa que no aprendan sobre conteo y números antes de dominar estas capacidades. De hecho, practicar el conteo puede ayudar significativamente a desarrollar estas habilidades.

A pesar de estas divergencias, diversas investigaciones como las descritas sostienen que las habilidades numéricas de los infantes son fundamentales para sus futuros aprendizajes matemáticos, facilitando su comprensión, por lo que destacan la importancia de vincular los aprendizajes numéricos informales con los formales. Además, se subraya que diseñar estrategias educativas efectivas para promover las habilidades numéricas tempranas no solo implica evaluar cuánto saben los niños pequeños, sino también comprender cómo adquieren ese conocimiento. De ello se desprende que es esencial comenzar a construir conocimientos numéricos en la Escuela Infantil.

En esta investigación, pues, se asume que es imprescindible contar con profesionales debidamente capacitados y conscientes de la necesidad de proporcionar entornos educativos que estimulen el desarrollo de habilidades numéricas en la primera infancia. Varios autores, como Geist (2014), Clements y Sarama (2015), y Björklund y Barendregt (2016), han destacado la conexión entre las competencias y habilidades de los profesionales de la educación infantil y el progreso de los niños. Se tiene evidencia de que los conocimientos de los profesionales influyen en el diseño de actividades y apoyos que ofrecen a los niños, afectando así las acciones que pueden realizar, las habilidades que pueden desarrollar y las competencias que pueden adquirir.

Desde esta perspectiva, el objetivo de este estudio es valorar el impacto de una actividad de formación en torno a los conocimientos de los profesionales para enseñar los primeros números y operaciones en la Escuela Infantil (0-3 años).

CONOCIMIENTOS SOBRE LOS PRIMEROS NÚMEROS Y OPERACIONES EN LA ESCUELA INFANTIL

Alsina y Delgado (2021), basándose en diversos marcos teóricos como el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) de Ball et al. (2008), el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino et al. (2017), y el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) de Carrillo et al. (2018), junto con una revisión exhaustiva de la literatura sobre la enseñanza de las matemáticas en la educación infantil, han identificado un conjunto

específico de conocimientos necesarios para los docentes de esta etapa: los Conocimientos Matemáticos en Educación Infantil (CM-EI) y los Conocimientos Didácticos de las Matemáticas para la Educación Infantil (CDM-EI).

Dentro del subtipo referido al CM-EI, como se ha señalado en la introducción, esta investigación se centra en el Conocimiento sobre las Matemáticas Emergentes (CME-EI) -de naturaleza intuitiva (Fischbein, 1987) e informal (Baroody, 1987)- que desarrollan los infantes en situaciones informales de exploración, manipulación y juego; y, más concretamente, en los primeros números y operaciones (Tabla 1).

Tabla 1. Conocimientos sobre los primeros números y operaciones (Alsina, 2015).

Identificar (reconocer)	Relacionar (Comparar)	Operar (Transformar)
Comprensión de los principales cuantificadores (muchos, pocos y algunos) y de algunas cantidades elementales (uno, dos…) Inicio del conteo de los elementos de una colección. Distinción entre los números escritos y otros tipos de representaciones externas (dibujos, letras…)	Correspondencias cuantitativas. Seriaciones.	Cambios cuantitativos a partir de juntar, añadir, unir, reunir, agrupar, sumar… o quitar, separar, restar…

La comprensión de los primeros conocimientos numéricos en la Educación Infantil se desarrolla en un contexto cotidiano y de juego, donde los niños interactúan con las cantidades de manera intuitiva. Alsina (2015) propone que las prácticas docentes del primer ciclo (0-3 años) se centren en significados reales y contextualizados, donde los niños y las niñas observen las cantidades y progresivamente vayan reconociendo la cantidad de objetos en una colección. Salinas y Salgado (2011) añaden que, progresivamente, es necesario desarrollar una serie de habilidades como: clasificar, ordenar, la organización espacial, saber coordinar (mano, nombre del número y trayectoria), conocer la inclusión y saber que los números están representados por signos convencionales.

Clements y Sarama (2015) destacan la subitización como una habilidad fundamental, que permite reconocer rápidamente la cantidad de un grupo pequeño de objetos. Esta habilidad se desarrolla intuitivamente desde los seis meses de edad y es crucial para el desarrollo del pensamiento matemático.

La subitización se divide en perceptiva y conceptual, donde la primera implica reconocer conjuntos de forma intuitiva y simultánea, mientras que la segunda implica ver las partes de dos conjuntos y sumarlas instantáneamente. Esta habilidad introduce conceptos básicos de cardinalidad y aritmética inicial (Clements y Sarama, 2015).

El conteo, por otro lado, es esencial para la comprensión del número. Los infantes comienzan a contar verbalmente y a comprender la mecánica del conteo, incluyendo la correspondencia uno a uno y la cardinalidad de conjuntos a medida que van ejercitando el conteo (Alsina, 2015; Clements y Sarama, 2015).

En cuanto a la representación gráfica de los números, es importante desarrollar habilidades motrices finas y la direccionalidad antes de enseñar a escribir los números. El objetivo en el contexto de la

Escuela Infantil es hacer visibles los números de manera contextualizada y natural para que los niños y las niñas comiencen a distinguir este tipo de representaciones (Alsina, 2015).

Las correspondencias cuantitativas y las seriaciones son habilidades que los infantes desarrollan a partir de situaciones cotidianas y de juego. Estas habilidades les permiten establecer relaciones entre cantidades y construir series a partir de un modelo inicial (Alsina, 2015). Comparar las cantidades, clasificar y seriar, son procesos indispensables para ir incorporando la noción de cantidad e ir ejerciendo la acción de contar de forma espontánea y natural, como parte de su juego (Clements y Sarama, 2015)

En relación con las operaciones, los niños comienzan a comprender la adición y la sustracción a través de actividades de juego y de contar objetos concretos. A partir de los 4 años, los niños pueden resolver problemas de suma con precisión en tanto, previamente, han incorporado estos conocimientos previos que han adquirido observando los cambios y las transformaciones en las cantidades mientras juegan y exploran con los materiales, identifican las cantidades y las compran y relacionan. (Clements y Sarama, 2015).

Salgado y Salinas (2011) muestran en su estudio que, antes de los 3 años, los niños poseen un amplio conocimiento social sobre los números, aunque no saben para que son, ni como son, ni cómo aplicarlos a los diferentes contextos y situaciones. Por ejemplo, explican que, a los 3 años, la mayoría son capaces de identificar la grafía de números pequeños y recitar números intuitivamente sin establecer relaciones entre ellos. En resumen, la comprensión de estos conocimientos se desarrolla a través de prácticas contextualizadas, juegos y actividades que permiten a los niños explorar y comprender los conceptos matemáticos desde una edad temprana. Y como apuntan Salgado y Salinas (2011), las situaciones cotidianas que viven los niños antes de los 3 años, en la sociedad y el entorno, influyen en los conocimientos previos, hecho que debe ser un referente para los docentes de la Escuela Infantil a la hora de diseñar sus propuestas educativas.

METODOLOGIA

Se ha llevado a cabo un estudio cuasi-experimental (Creswell, 2009), para identificar los conocimientos de 28 profesionales de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Vic-EBMV para enseñar los primeros números y operaciones. Este análisis se realizó antes y después de una actividad de formación y forma parte de una investigación de mayor envergadura

La actividad formativa se llamaba "Observación, documentación e interpretación de acciones matemáticas en la Escuela Infantil" y fue realizada por el segundo autor del estudio. Presentaba los siguientes objetivos y contenidos:

- Aprender a observar, documentar e interpretar acciones matemáticas de infantes de 0 a 3 años.
- Profundizar en el significado actual de la educación matemática y en alguna línea de innovación en este sentido
- Obtener un conocimiento del diseño curricular de Matemáticas de Educación Infantil y, al mismo tiempo, un dominio de los contenidos que lo integran.

La formación comprendía 15 horas de formación, 9 presenciales y 6 no presenciales. De forma presencial, se llevaron a cabo tres sesiones de tres horas cada una. Las dos primeras sesiones eran eminentemente de fundamentación práctico-teórica. En ellas se presentaban los contenidos propios de la formación, pero al mismo tiempo, se analizaban las prácticas educativas de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Girona, como ejemplo para la identificación de los contenidos del curso. La tercera sesión consistía en la presentación de los nuevos diseños y análisis de las prácticas educativas enriquecidas con contenidos matemáticos desarrolladas por los profesionales que integraban el curso.

La muestra del estudio, compuesta por 16 maestras, 1 maestro y 11 técnicas de Educación Infantil, con edades comprendidas entre los 23 y 60 años, fue seleccionada por conveniencia, sin aplicar un método aleatorio. Para la obtención de datos, se administró el Cuestionario previamente validado "Conocimientos Didáctico-Matemáticos en la Escuela Infantil" (CDM 0-3). Este cuestionario, de naturaleza personalizada y semiestructurada, fue administrado en presencia de un encuestador y consta de dos tipos de preguntas: cerradas, destinadas a controlar variables específicas mediante un enfoque cuantitativo, y abiertas, diseñadas para explorar los conocimientos matemáticos de manera más detallada.

Para este estudio particular, se analizaron los datos de dos preguntas abiertas. En la primera se preguntó a los participantes qué contenidos y capacidades matemáticas identificaban en las imágenes que se les facilitaban. Estas imágenes correspondían a los espacios y materiales de las mismas Escuelas Infantiles. Los profesionales, a través de la observación de tres imágenes de diferentes espacios tenían que listar y describir los contenidos y capacidades matemáticas que detectaban. La otra pregunta recababa información sobre la planificación de la enseñanza, centrándose en los contenidos matemáticos que proyectaban enseñar. Para ello, concretamente, se les solicitó que escribieran como mínimo dos objetivos matemáticos presentes en sus programaciones sobre el diseño de los espacios y materiales.

Previamente al análisis, se definieron categorías para clasificar los conocimientos asociados con la capacidad de identificar, relacionar u operar cantidades descritos en la Tabla 1. Las respuestas fueron cuantificadas y sometidas a análisis estadístico. Las categorías se describieron en función del número y porcentaje de respuestas en cada una. Asimismo, se emplearon estadísticos de tendencia central, como la mediana y la desviación estándar, para describir las variables continuas.

RESULTADOS

Los datos obtenidos en el cuestionario muestran que no hay diferencias estadísticamente significativas antes y después de la actividad de formación. Sin embargo, la tasa de crecimiento es de un 31.71% (de 41 contenidos detectados antes de la formación se pasa a 54). Algunos contenidos aumentaron de manera moderada o notable: específicamente, los aspectos relacionados con las correspondencias cuantitativas aumentaron de 7 (25.2%) a 11 (39.6%), y los vinculados a las acciones de juntar, sumar, añadir, restar, sacar y separar pasaron de 3 (10.8%) a 11 (39.6%). Por el contrario, otros contenidos como el conteo evidenciaron un crecimiento poco significativo.

En las programaciones sobre el diseño de los espacios y materiales, tampoco existe un aumento significativo de la presencia de objetivos programados Antes de la formación los participantes diseñaron cinco objetivos vinculados a las acciones de conteo (5) y uno a las correspondencias cuantitativas (1) y a la acción de juntar, añadir (1). Después de la formación, cuatro objetivos fueron vinculados a las acciones de identificar los principales cuantificadores (4) y siete a las correspondencias cuantitativas (7).

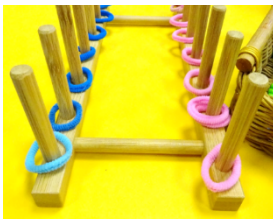
Mediante el análisis de la documentación, se evidencia que antes de la formación, los profesionales no desarrollaban contenidos de números y operaciones en sus planificaciones, ni habían elaborado ningún plan o programa que incorporara estos contenidos en el diseño de sus propuestas educativas. Después de la formación, los profesionales incorporaron estos contenidos en el diseño de los espacios y materiales. En total, planificaron 43 actividades, diferentes según el nivel educativo:

- En Infantil 0 únicamente planificaron dos: una vinculada a las acciones de identificación de los principales cuantificadores y otra a las correspondencias.
- En Infantil 1 plantearon ocho actividades: cuatro vinculadas a las acciones de identificar los principales cuantificadores, dos de correspondencias cuantitativas y dos en torno acciones de juntar, reunir, sacar, etc.

- Finalmente, en Infantil 2 plantearon 33 actividades, apareciendo contenidos de todas las capacidades descritas, con diferentes frecuencias de aparición: con mayor frecuencia se encuentran acciones vinculadas a identificar los principales cuantificadores (10), conteo (7), las acciones de juntar, añadir, separar, sacar, etc. (6) y correspondencias cuantitativas (5) y, con menor frecuencia, la distinción de números escritos (2) y las seriaciones (3). Ciertamente, a medida que avanzan los cursos de la Escuela Infantil, aumentan las propuestas diseñadas por los profesionales en este ámbito.

A continuación, se presenta un ejemplo de la planificación de una de las nuevas propuestas de juego diseñadas por los profesionales después de la formación (Figura 1), en la que se aprecia claramente que considera diversos conocimientos numéricos como el uso de los principales cuantificadores, el inicio del conteo o acciones vinculadas a cambios de cantidades (añadir, quitar, etc.).

Figura 1. Ejemplo de planificación

<table>
<tr><td>NOMBRE DEL MATERIAL:
Gomas de colores</td><td>NIVEL: 2-3 años
ESPACIO: Mesa de motricidad fina</td></tr>
<tr><td>CAPACIDADES MATEMÁTICAS:
Identificar las cualidades sensoriales
Identificar cantidades y principales cuantificadores
Observar cambios cuantitativos.</td><td>CONTENIDOS MATEMÁTICOS:
Reconocer las calidades sensoriales: el color
Agrupar elementos según el color
Inicio del conteo
Identificar los principales cuantificadores
Añadir, agrupar, separar, quitar...</td></tr>
<tr><td colspan="2">MATERIAL:
    </td></tr>
<tr><td colspan="2">POSIBILIDAD DE DIÁLOGO Y PREGUNTAS
¿Qué colores has escogido? ¿Todos los palitos están ocupados? ¿Qué pasa si ponemos esa goma aquí? (poniendo otra de color diferente) ¿Cuántas gomas hay? ¿Hay muchas? ¿pocas? ¿La contamos? 1, 2, 3... ¿Ponemos aquí todas las gomas? ¿cómo está el cesto?
MÁS POSIBILIDADES
Poner todas las gomas de solo dos colores para potenciar las seriaciones cuantitativas. Iniciar un patrón. Poner una imagen modelo. Poner en el cesto alguna goma muy diferente y formular preguntas “trampa”.</td></tr>
</table>

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio, que forma parte de una investigación más amplia, se ha indagado en torno al impacto de una actividad de formación continua en el CME-EI sobre números y operaciones de 28 profesionales de la Escuela Infantil (0 a 3 años).

Los datos han evidenciado una sensible variación entre los conocimientos anteriores y posteriores a la formación, con un aumento del 31.71% en la identificación de contenidos y con el diseño de nuevas propuestas de actividades para los diferentes niveles educativos, aunque con mayor presencia en Infantil 2. Ello indica que el impacto de la formación ha repercutido favorablemente en la adquisición de algunos conocimientos, aunque de manera parcial. Algunos conocimientos para enseñar se han podido consolidar e implementar con el diseño de actividades versus otros que presentan una dificultad para implementarse y siguen siendo poco frecuentes o inexistentes.

Por un lado, esta aparente dificultad puede estar relacionada con un CME-EI que asume que: ciertos contenidos son más apropiados para edades más avanzadas (Castro y Castro, 2016) como el conteo;

la representación del número no está presente en los primeros meses de vida y se desarrolla a lo largo de los primeros años (Clearfield, 2004; Wakeley, et al., 2000); o que la construcción del concepto de número y del conteo va por etapas y, antes de integrar la noción de conservación del número, el niño debe integrar en un solo sistema la capacidad de clasificar y de seriar (Piaget y Inhelder, 1971).

Clements y Sarama (2015) argumentan que la teoría de Piaget ha llevado a la idea errónea de que los números no son relevantes en los primeros años de vida, aunque la práctica del conteo puede contribuir significativamente al desarrollo de habilidades matemáticas. Asimismo, (Alsina, 2015), destaca que la noción de número se integra con la adquisición de habilidades como la clasificación jerárquica y la seriación. De este modo, tal y como se desprende de los diseños de actividades específicas para este ciclo educativo, los niños y las niñas de 0 a 3 años pueden y deben llevar a cabo actividades de exploración, manipulación y juego donde aparezcan de manera natural y espontanea contenidos vinculados a las acciones de identificar cantidades e incluso de contar, clasificar o seriar cuantitativamente.

Por otro lado, acorde con la literatura, cabe destacar que la distinción entre números escritos y otras formas de representación no muestra cambios antes ni después de la formación ya que es propio de niveles posteriores. Aun así, es importante considerarlo y que esté presente en el contexto de la Educación Infantil como parte de la integración natural y cotidiana, del mismo modo que las letras aparecen en los cuentos y no se pretende que los niños y las niñas lean de forma temprana (Alsina, 2015).En conclusión, el CME-EI de los profesionales para enseñar los primeros números y operaciones antes de la formación era deficitario y, aunque después de la actividad de formación sigue presentando algunas lagunas, se observa un avance que se materializa en un enriquecimiento de las programaciones. En este sentido, de modo general, los profesionales de las Escuelas Infantiles siguen necesitando incorporar y consolidar qué matemáticas desarrollan los niños y las niñas en las primeras edades y como se pueden favorecer e indiscutiblemente, necesitan una formación más extensa. Por ello, para futuras investigaciones, sería necesario indagar en los diseños y contenidos de los programas de formación inicial analizando qué contenidos didáctico-matemáticos y matemáticos se están introduciendo en los diferentes planes de estudio valorando si facilitan los conocimientos y estrategias necesarias para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en estas primeras edades (0-3).

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2015). Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. *Elementos para empezar bien*. Narcea, S.A. de Ediciones.

Alsina, Á. y Delgado, R. (2021). Identificando los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil: un primer paso para el desarrollo profesional. ReviSeM: *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, 6*, 1-23 https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16003

Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baroody, A. (1987). Children's Mathematical Thinking. *A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.

Björklund, C. y Barendregt, W. (2016). Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(3), 359-377. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066426

Brannon, E. (2005). Quantitative thinking: From monkey to human and human infant to adults. En S. Dehaene, J. Duhamel, M.D. Hauser y G. Rizzolatti (Eds.), *From monkey brain to human brain* (pp. 97-116). MIT Press.

Bryant, P. y Nunes, T. (2011). Children´s Understanding of Mathematics. En U. Goswami (Ed.) *The Wiley-Blackwell handbook of childhood cognitive development* (second edition) (pp. 549-573). John Wiley & Sons.

Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Pensamiento Educativo, Revista de Investigación Latinoamericana (PEL), 39*(2), 119-135.

Castro, E. y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Pirámide.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán; Mª.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*, 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clements, H.D. y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas: El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.

Clearfield, M. (2004). Infants´ enumeration of dynamic displays. *Cognitive Development*, *19,* 309-324. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2004.03.003

Creswell, J.W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed approaches*. Sage.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Reidel.

Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Izard, V. Sann, C. Spelke, E. y Steri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *PNAS, 25*, 10382-10385. https://doi.org/10.1073/pnas.0812142106

Lago, M.O., Rodríguez, P., Escudero, A. y Dopico, C. (2012). ¿Hay algo más que contar sobre las habilidades numéricas de los bebés y los niños? Edma 0-6: *Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 38-53. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2012.38-53

National for Council Teachers of Mathmatics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Piaget, J. y Inhelder, B. (2015). *Psicología del niño*. (18ª ed). Morata.

Salgado, M. y Salinas, M.J. (2011). Competencias numéricas de los niños/as al comenzar la Educación Infantil. En M.M. Moreno y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación de la SEIEM. XIV Simposio de la SEIEM (pp. 439-451). SEIEM. https://rb.gy/oelvg7

Wakeley, A. Rivera, S. y Langer, J. (2000). Can young infants add and subtract? *Child Development*, *71*, 1525-1533. https://doi.org/10.1111/1467-8624.00244

INFLUENCIA DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE ESTIMACIÓN GEOMÉTRICAS

Influence of mathematical background when solving geometric estimation tasks

Orcos, L.[a], Magreñán, A.[a], Montejo-Gámez, J.[b]

[a]Universidad de La Rioja, [b]Universidad de Granada

Resumen

Se presenta un estudio comparativo entre los modelos desarrollados por 25 futuros profesores de primaria y 25 de secundaria para resolver tareas de estimación en los que las propiedades geométricas tridimensionales de los objetos resultan relevantes. El análisis de las producciones escritas desarrolladas por estos estudiantes a dos tareas de estas características revela que los futuros profesores de secundaria utilizan menos contenidos escolares para desarrollar sus estimaciones. No obstante, su mayor conocimiento se refleja en que utilizan respuestas más cercanas al contexto, y muestran tendencia al uso de múltiples estrategias, lo que se manifiesta en las propiedades de los modelos creados, que se discuten en relación con investigaciones previas.

Palabras clave*: problemas de Fermi, modelización, geometría 3D, formación de profesorado.*

Abstract

A comparative study is presented between the models developed by 25 primary school and 25 secondary school prospective teachers to solve estimation tasks in which 3D geometry is relevant. The analysis of the written productions developed by these students for two of these tasks reveals that prospective secondary school teachers use less school content in their estimations. However, their greater knowledge comes out when they use answers that are closer to the task context. They also show a tendency to use multiple strategies. This is shown in properties of the models created, which are discussed in relation to previous research.

Keywords*: Fermi problems, mathematical modelling, 3D geometry, teacher education.*

INTRODUCCIÓN Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

El actual contexto educativo demanda prácticas de enseñanza de las matemáticas que estimulen el desarrollo de competencias en todas las etapas preuniversitarias (López et al., 2020). Diferentes autores recomiendan las tareas de estimación para promover la reflexión sobre la pertinencia de dar soluciones exactas o aproximadas a problemas reales, o sobre el orden de magnitud de las unidades de medida y de los números (De Castro et al, 2004). Estas reflexiones son valiosas en la formación del alumnado de las enseñanzas obligatorias, pero sobre todo para el profesorado en formación, ya que amplía su visión sobre las matemáticas y su aprendizaje (Segovia y Castro, 2009).

Existen múltiples trabajos en educación matemática que ponen en valor el potencial de ciertas tareas de estimación para desarrollar competencias de modelización matemática (Ärlebäck y Bergsten, 2013). Es el caso de los denominados *problemas de Fermi*, que ilustran la pertinencia de investigar las tareas de estimación desde el punto de vista teórico de la modelización matemática. Este enfoque, materializado en estudios como los de Albarracín y Gorgorió (2014) o Segura (2022), aporta valor a la investigación sobre estimación. Por una parte, visibiliza su relevancia en el desarrollo de las competencias matemáticas del alumnado, como se ha comentado anteriormente. Por otra parte, la literatura en modelización proporciona herramientas de análisis de modelos escolares que resultan relevantes para estudiar procedimientos de estimación complejos. Ejemplos de ello son el instrumento

Orcos, L., Magreñán, A. y Montejo-Gámez, J. (2024). Influencia de la formación matemática en la resolución de tareas de estimación geométricas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 369-376). SEIEM.

desarrollado por Ferrando et al. (2017), que permite indagar en las estrategias seguidas, o el de Montejo-Gámez et al. (2021), que pone el foco en los objetos y relaciones (tanto reales como matemáticos) que articulan una estimación.

Herramientas como las descritas permiten valorar el nivel de conocimiento matemático aplicado para resolver una tarea de estimación. Es esperable que resolutores con mayor conocimiento matemático generen modelos de mayor riqueza conceptual lo que implica, en el contexto de la formación del profesorado de matemáticas, que los estudiantes del máster profesionalizante para los niveles de secundaria y bachillerato sustenten sus modelos con mayor nivel de contenido que los estudiantes del grado en educación primaria. Estas diferencias entre el contenido matemático aplicado pueden ser más acusadas cuando las estimaciones involucran formas geométricas, dado que los futuros maestros de primaria muestran menor nivel cognitivo en geometría respecto de otros contenidos. Las situaciones que implican el uso de geometría tridimensional (3D) pueden dar lugar a diferencias mayores (Vargas et al., 2023). Este estudio persigue conocer el alcance de las mismas, lo que da lugar a la siguiente pregunta: ¿Influye la formación matemática de los futuros profesores en los modelos que desarrollan para abordar tareas de estimación de geometría 3D?

MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS

La estimación, entendida como un "juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (Segovia et al., 1989, p. 18), es una actividad matemática vinculada a la modelización matemática. Tal y como indican Pizarro et al., (2016), una estimación puede ser resultado de un proceso de modelización que simplifica una situación real a partir del establecimiento de hipótesis, la estimación directa de cantidades relevantes y los cálculos adecuados.

Los problemas de Fermi constituyen tareas de estimación de esta naturaleza. Su resolución no involucra necesariamente la aplicación de contenido matemático, lo que las hace especialmente pertinentes en el nivel de educación primaria (Peter-Koop, 2004) y en formación inicial de maestros (Segura, 2022). Existen familias de tareas de Fermi que, debido a sus características, han sido discutidas con mayor profundidad en la literatura. Este es el caso de los *problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada*, que fueron estudiadas por Segura (2022) en el contexto de formación inicial de maestros. Esta investigación analizó diferentes secuencias de estos problemas a partir del instrumento de Ferrando et al. (2017) y organizó los planes de resolución de los futuros maestros en cuatro categorías: (i) Recuento exhaustivo, que contiene los planes que intentan cuantificar directamente la cantidad de objetos a estimar; (ii) Linealización, que recoge los planes que plantean a un problema unidimensional cuya solución permite dar la estimación pedida, incluyendo aquellos que distribuyen idealmente los objetos en retícula sobre la superficie para dar la estimación; (iii) Unidad base, que engloba los planes que dividen el área de la superficie sobre la que se estima entre el área del objeto a estimar; y (iv) Densidad, que engloba los planes que seleccionan una región de la superficie inicial sobre la que se busca la estimación (puede ser el metro cuadrado), estiman la cantidad de objetos que caben en esa región y la multiplican por el número de veces que cabe esa región en la superficie inicial.

Las categorías descritas por Segura (2022) sintetizan los resultados de múltiples estudios sobre estos problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada. La aparición de dichas categorías puede atribuirse a dos propiedades de este tipo de problemas de estimación, que de algún modo los caracteriza. La primera es su carácter esencialmente bidimensional, es decir, son tareas en las que se puede obviar la naturaleza tridimensional de los objetos a estimar y de la región sin que ello induzca errores graves en la estimación. La segunda característica destacable es que se ocupan de la estimación de un gran número de elementos, lo que implica que el área del objeto a estimar es mucho menor que el área de la superficie sobre la que se estima. Esto implica, en particular, que las características de la frontera de la superficie ni la forma concreta de los objetos a estimar

afectan significativamente en la precisión de las estimaciones. A partir de estas dos características, Montejo-Gámez et al. (2024) plantean la pertinencia de analizar *tareas de estimación de geometría tridimensional (3D)*, es decir, problemas de estimación en los que las propiedades geométricas tridimensionales de los objetos del sistema real involucrados o la frontera de la región sobre la que se estima resultan relevantes para obtener una respuesta.

No se ha documentado aún un número alto de investigaciones estudiando las tareas de estimación de geometría tridimensional, pero existen trabajos orientados a comprender cómo son los modelos generados por futuros profesores ante este tipo de problemas. Uno de ellos fue conducido por Sevinc y Ferrando (2022), que exploraron las estrategias empleadas por futuros maestros de primaria para estimar el número de rollos de papel que caben en un armario, encontrando modelos que involucran propiedades geométricas relevantes como la orientación de los rollos dentro del armario, o su disposición. Otra investigación en este sentido fue desarrollada por Montejo-Gámez et al. (2024) que estudiaron los modelos generados por futuros maestros de primaria para estimar el número de racimos de uva que caben en una caja ortoédrica, e identificaron categorías de modelos con características compartidas: (i) Modelos de capas, que basan su respuesta en la multiplicación del número de racimos que caben en la base de la caja, una capa, por el número de capas que caben en la caja; (ii) Modelos de razón entre volúmenes, análogos a los de Unidad base de Segura (2022), en los que la estimación se obtenía dividiendo el volumen de la caja y el de un racimo y (iii) Modelos de razones entre longitudes, que fundamentan su estimación en el producto de tres razones: la existente entre los anchos de caja y racimo, entre sus largos y entre sus alturas. Estas categorías dan pistas sobre los modelos esperables ante otras tareas de estimación de geometría 3D.

Objetivos específicos

Para conocer la influencia de la formación matemática de los futuros profesores en sus modelos para resolver tareas de estimación de geometría 3D se plantean los siguientes objetivos específicos:

O1. Evaluar de forma comparativa la relevancia que conceden al contenido matemático los futuros profesores de matemáticas de primaria y de secundaria y bachillerato a la hora de abordar tareas de estimación de geometría 3D.

O2. Identificar propiedades de los modelos desarrollados por cada grupo de profesorado en formación inicial para caracterizar las diferencias y similitudes encontradas.

MÉTODO

El estudio forma parte de una investigación más amplia orientada a evaluar los modelos que desarrollan futuros profesores de matemáticas para abordar diferentes tareas de estimación de geometría 3D, así como la dependencia de los modelos respecto de la posibilidad de manipular los objetos reales involucrados en la estimación. El análisis de datos desarrollado para esta comunicación combina análisis cuantitativos y cualitativos, según se explica a continuación.

Participantes y recogida de datos

Han participado en el estudio 50 futuros profesores de matemáticas, sin formación específica en modelización, que están desarrollando su periodo de formación inicial en una universidad española: por una parte, 25 estudiantes del grado en educación primaria, cuya formación matemática previa incluye mayoritariamente las matemáticas propias del bachillerato de ciencias sociales. Además, estos participantes cursaron el año pasado la asignatura de matemáticas básicas para maestros incluida en su plan de estudios de grado. Por otra parte, 25 estudiantes del máster de profesorado en secundaria y bachillerato, que ya poseen un grado universitario en matemáticas o ingeniería. En ambos casos, el mismo docente fue quien dirigió la experiencia y dio las mismas instrucciones y el mismo tiempo de resolución. Estas instrucciones fueron que se leyera el enunciado y trataran de resolver los problemas

con el mayor número de estrategias diferentes. A lo largo de la sesión el docente respondió dudas, pero en ningún momento valoró estrategias ni resultados.

Como estímulo para el proceso de modelización se diseñaron cuatro tareas de estimación de geometría 3D dependientes de las formas de la región sobre la que se estima y de los objetos a estimar, el carácter deformable/rígido de ambos y la magnitud relativa entre región y objetos. Para este estudio se seleccionaron dos de características diferenciadas: en la Tarea A, la región de estimación (una caja) y los objetos a estimar (bolígrafos) son rígidos y tienen una geometría similar a formas escolares. En B, todos los elementos son deformables y la matematización de los objetos a estimar (las gomas) no está claramente determinada:

Tarea A: ¿Cuántos bolígrafos caben en la caja? *Tarea B:* ¿Cuántas gomas caben en la bolsa?

Los participantes del estudio dispusieron de bolígrafos, cajas, gomas y bolsas, así como de otros objetos involucrados en las demás estimaciones, para resolver individualmente todas las tareas en 60 minutos. Para evitar bloqueos en los procesos de estimación se permitió trabajar formando los equipos habituales para el alumnado: en la sesión con los estudiantes del grado en educación primaria hubo un equipo de 2 componentes, otro de 3 y cinco de 4 componentes, mientras que en la sesión con los estudiantes de máster se crearon cinco equipos de 5 componentes. Estas dos sesiones permitieron recoger un conjunto de producciones escritas con los modelos desarrollados por los futuros profesores. En este estudio se analizan las producciones para las tareas A y B, por lo que la fuente de datos analizada en la presente comunicación está conformada por 100 registros.

Análisis de datos

El diseño de la investigación es de tipo mixto anidado concurrente, siendo el análisis cuantitativo el predominante. El análisis de los registros escritos partió de la selección de unidades de análisis similares a las definidas por Montejo-Gámez et al. (2024) para tareas de estimación de geometría 3D, que recogen la idea de modelo utilizada en esta investigación: (i) Fórmulas, que se refiere a todas las expresiones algebraicas escolares de cálculo de medidas que estaban explícitas o fueron aplicadas de forma evidente en las producciones, y (ii) Formas, que se refiere a figuras y formas geométricas escolares representadas en las producciones. De esta manera, para evaluar comparativamente la relevancia del contenido matemático en los modelos desarrollados por los futuros profesores de secundaria y de primaria (objetivo O1), se asumió que la introducción de fórmulas o formas son evidencias de uso de contenido matemático. Para cada tarea y grupo de futuros profesores se obtuvieron dos fracciones indicando las producciones que incluían alguna fórmula (resp., forma) respecto del total de producciones efectivas (con una respuesta identificable) para esa tarea. Después se contrastaron las diferencias entre las fracciones asociadas a los estudiantes del grado de primaria y los del máster de secundaria para cada tarea utilizando la prueba exacta de Fisher (Robles, 2008). Concretamente, se adoptó la hipótesis nula de independencia del uso de fórmulas (resp., formas) con relación al grupo de futuros profesores. Por otra parte, bajo un enfoque cualitativo, para identificar las características de los modelos e ilustrar las diferencias y similitudes encontradas entre los grupos de futuros profesores (O2) se revisaron las producciones escritas de cada grupo e identificaron elementos específicos para las tareas analizadas en este estudio con relación a las categorías obtenidas por las investigaciones encontradas en la literatura.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Relevancia del contenido matemático en los modelos producidos

La Tabla 1 muestra las fracciones de las producciones efectivas que incluyeron contenido matemático para desarrollar sus estimaciones en cada tarea. En la Tarea A, 19/25 de los estudiantes del grado de primaria emplearon fórmulas escolares de cálculo de medidas, 12 usaron la del área del círculo, 5 las del rectángulo/cuadrado y 2 la del hexágono (con el fin de calcular volúmenes de prismas). A su vez,

13/25 de estos estudiantes representaron formas geométricas como cilindros (en 9 casos), o prismas (en 4 casos). Estas cifras contrastan con las obtenidas en los estudiantes del máster de secundaria, ya que éstos recurrieron a fórmulas en 2 ocasiones y tan solo 3 de ellos usaron una representación pictórica de formas geométricas. Los resultados de la prueba exacta apoyan el carácter significativo de estos resultados, con unos valores del estadístico p menores de 0,01 tanto para las fórmulas como para las formas.

Tabla 1. Fracciones de los participantes que utilizaron fórmulas y formas para resolver las tareas, y resultados de la prueba de independencia respecto del grupo de futuros profesores (Elaboración propia)

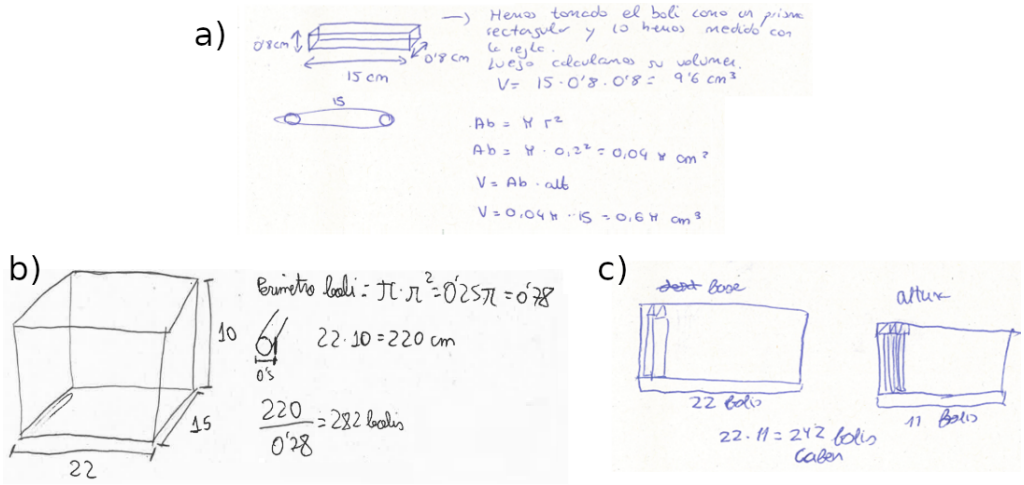
	Tarea A		Tarea B	
	Fórmulas	*Formas*	*Fórmulas*	*Formas*
Primaria	19/25 (76%)	13/25 (52%)	14/22 (63,6%)	17/22 (77,3%)
Secundaria	2/25 (8%)	3/25 (12%)	6/25 (24%)	6/25 (24%)
p (prueba exacta)	0,000002	0,005436	0,008545	0,000400

En la Tarea B, se observaron resultados similares: aproximadamente 2/3 de los estudiantes del grado de primaria introdujeron fórmulas en su estimación para calcular el área de una corona circular (en 11 casos) o de único círculo (en 3 casos). Este grupo de futuros profesores introdujo formas geométricas en sus producciones, que incluyen la diferencia de cilindros (que se registraron 12 veces) y cilindros (5 veces). Estos datos son diferentes a los estudiantes de máster, que utilizaron fórmulas y representaciones de formas geométricas en una cuarta parte de los casos. Las diferencias encontradas también son significativas, siendo el estadístico p de la prueba de Fisher menor de 0,01.

Modelos diseñados para la Tarea A

En el caso de los futuros maestros de primaria, han predominado aproximaciones basadas en la división entre el volumen de la caja y de un bolígrafo (Figura 1, a), que se asemejan a los modelos de razón entre volúmenes (Montejo-Gámez et al., 2024). Otros modelos aprovecharon que la longitud del bolígrafo coincide con una dimensión de la caja para reducir la estimación a problemas de menor dimensión. En particular, se han encontrado registros que dividen al área de una cara de la caja entre el área de la base del bolígrafo (Figura 1, b), estrategia similar a la de Unidad Base (Segura, 2022), y otros que recubren con bolígrafos caras de la caja (estrategia de linealización observada por Segura, 2022 en Figura 1, c) y multiplican los recuentos obtenidos para obtener la estimación en toda la caja (modelos de capas obtenidos por Montejo-Gámez et al., 2024).

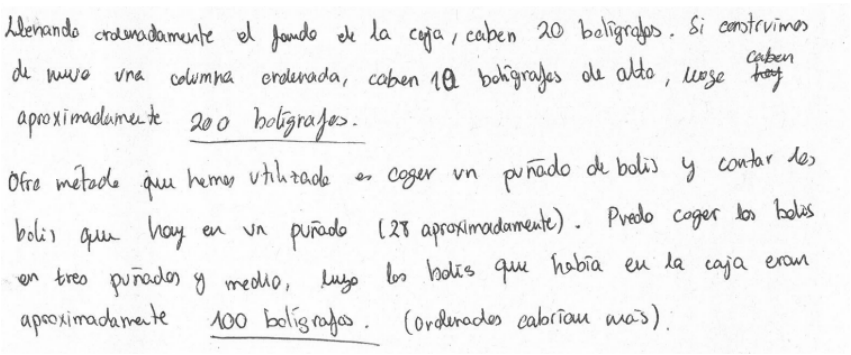
Figura 1. Producciones de futuros maestros de primaria para resolver la Tarea A (Elaboración propia)



En el caso de los futuros profesores de secundaria, las producciones fueron más de tipo verbal. En la mayoría de los casos recurrieron a estrategias de Densidad (Segura, 2022): recurrieron a cantidades

intermedias más sencillas de estimar, como los bolígrafos que cubren la base de la caja (Figura 2, izquierda), o caben en un puñado (derecha) que después multiplicaron por la cantidad de veces que se necesita esa cantidad para llenar la caja. Tal y como se puede observar, los futuros maestros de primaria introdujeron más formas geométricas en sus producciones y usaron más fórmulas con datos obtenidos de medidas directas con regla, quizá por inseguridad o por estar habituados a su uso en las etapas previas a la universitaria. Sin embargo, los futuros profesores de secundaria mostraron mayor cercanía al contexto de la tarea y menor preocupación por la exactitud de las medidas, usando en varios casos múltiples estrategias y más creativas, lo que indica una mayor capacidad para dar una estimación lo más realista posible.

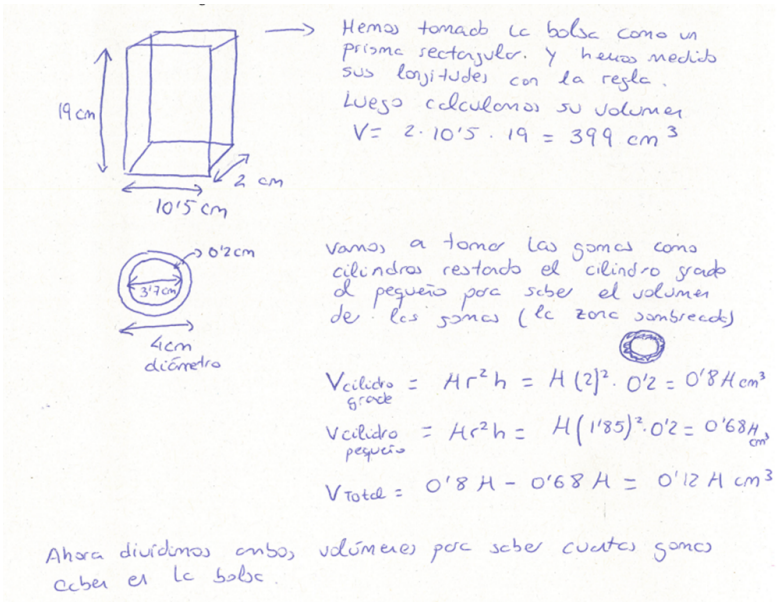
Figura 2. Producciones de futuros profesores de secundaria para resolver la Tarea A (Elaboración propia)



Modelos diseñados para la Tarea B

En esta tarea ambos grupos de profesorado mantuvieron las mismas tendencias que en la anterior. Los futuros maestros de primaria siguieron optando por el uso de fórmulas de volúmenes con datos tomados a partir de la medida directa, recurriendo a cilindros (Figura 3), prismas o coronas circulares para matematizar la goma. En este sentido, volvieron a predominar las ideas basadas en una razón entre volúmenes y unidad base reportadas por Segura (2022).

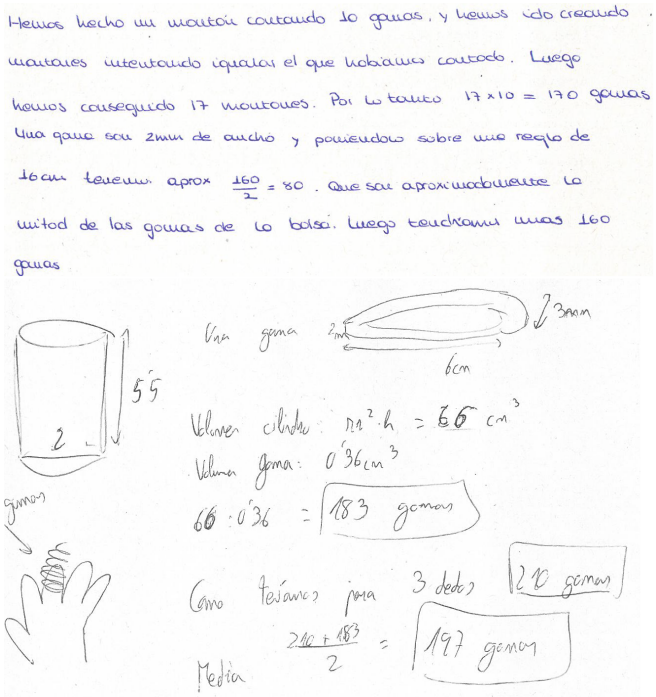
Figura 3. Producción de un futuro maestro de primaria para resolver la Tarea B (Elaboración propia)



Por su parte, los futuros profesores de secundaria mostraron mayor predisposición a matematizar las gomas, como se ha señalado previamente. En cualquier caso, estos participantes siguieron buscando diferentes estrategias creativas basadas en cantidades intermedias (Figura 4, arriba), llegando algunos

de ellos a calcular promedios entre diferentes aproximaciones para dar una respuesta (Figura 4, debajo).

Figura 4. Producciones de futuros profesores de secundaria para resolver la Tarea B (Elaboración propia)



CONCLUSIÓN

Esta investigación analiza las diferencias entre el contenido matemático que aplican futuros profesores de matemáticas de primaria y de secundaria para abordar tareas de estimación de geometría 3D. En respuesta a la pregunta de investigación, se ha visto que la formación matemática influye en los modelos desarrollados por el profesorado en formación inicial, de manera que los participantes con formación matemática más avanzada utilizan menos contenidos escolares para desarrollar sus estimaciones, pero manifiestan mayor capacidad para dar estimaciones más precisas.

En relación al objetivo O1, se ha observado que los futuros maestros de educación primaria prestaron más atención a las a las fórmulas de cálculo, la forma geométrica de los objetos a estimar (que en ocasiones no eran relevantes) y la precisión en la medición de datos que los de secundaria. Este alumnado, ya en relación a O2, propuso más modelos de densidad (Segura, 2022) basados en estimaciones de grupos de objetos (puñados, montones) sobre los que se puede tener mayor intuición, evidenciando así más cercanía al contexto de las tareas planteadas que los del grado de primaria, que tendieron al cálculo de razones entre medidas (Montejo-Gámez et al., 2024). Así, el mayor nivel de competencia se reflejó en la predisposición a dar diferentes aproximaciones para resolver el mismo problema, así como en acciones como promediar varias respuestas.

Este trabajo presenta algunas debilidades que deben ponerse de manifiesto. La primera está relacionada con la muestra analizada, no solo por su tamaño sino porque es cuestionable si en otros contextos de formación de maestros podría encontrarse la misma predisposición al uso de contenido matemático que la observada en este trabajo. La segunda debilidad detectada está relacionada con la heterogeneidad en los tamaños de los equipos de trabajo, ya que es posible que los grupos más numerosos produjeran modelos más ricos. Finalmente, debe señalarse la elección de las tareas específicas, que han podido condicionar los modelos observados. En la Tarea A, por ejemplo, la longitud del bolígrafo coincidía con el largo de la caja, lo que ha propiciado el uso de modelos bidimensionales, que no serían esperables si la caja tuviera otras medidas. Finalmente, como línea de trabajo futuro surge el interés de analizar con mayor detalle diferentes tareas de estimación de

geometría 3D con el fin de comprender mejor los modelos que generan los futuros profesores ante este tipo de estimaciones, así como sus conexiones con las categorías estudiadas en la literatura. Además, los resultados de este estudio indican que un conocimiento matemático más avanzado sin formación específica en modelización conlleva mayor desarrollo competencial, lo que invita a analizar la pertinencia de estimular la competencia matemática trabajando solo tareas en contexto.

Referencias

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79–96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Ärlebäck, J. B. y Bergsten, C. (2013). On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 597–610). Springer.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp. 183–194). Universidad da Coruña.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L.M. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de fermi. *Bolema, 31*(57), 220–242. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11

López, M., Albarracín, L., Ferrando, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E. y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. En D. Martín de Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1–94). Centro de Estudios Ramón Areces.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2021). A Tool for the Characterization of School Mathematical Models, *Mathematics, 9*(13), 1569. https://doi.org/10.3390/ma-th9131569

Montejo-Gámez, J., López-Centella, E. y Fernández-Ahumada, E. (2024). Solving Estimation Tasks: Novel Features of the Emerging Models When 3D Geometry Becomes Relevant. H-S. Siller, V. Geiger, G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling education in disruptive/challenging times* (pp. 607–617). Springer.

Peter-Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' Interactive modelling processes. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)*, 27 (pp. 454–461). MERGA.

Pizarro, N., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 91*, 91–103.

Robles, J. R. (2008). Prueba exacta para tablas de doble entrada con muestras pequeñas y proporciones extremas. *Analogías del comportamiento, 10*, 7–23.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(7), 499–536.

Segura, C. (2022). *Flexibilidad y rendimiento en la resolución de problemas de estimación en contexto real. Un estudio con futuros maestros* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia].

Sevinc, S. y Ferrando, I. (2022). The Role of Representational Images in Fermi Problems: A Study on Prospective Teachers' Mathematical Modeling [Comunicación corta]. *20th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA20)*, Wurzburgo, Alemania.

Vargas, J. P., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2023). Diseño de tareas geométricas en la formación de futuros profesores de primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 531–538). SEIEM.

CONEXIONES ENTRE LA MEDICIÓN, CAMBIOS DE DIMENSIÓN, Y TOMA DE PERSPECTIVAS: UN ESTUDIO DEL RAZONAMIENTO EN MICRO-, MESO-, Y MACROESPACIOS[5]

Connections between measurement, dimension shifting, and perspective-taking: a study of spatial reasoning in micro-, meso-, and macroespaces

Ortiz-Rocha, Y.A.[a], Sandoval, I. [a, b] y Sacristán, A.I. [a]

[a]Cinvestav, México, [b]Universidad Pedagógica Nacional, unidad Ajusco, México

Resumen

El desarrollo de habilidades de razonamiento espacial requiere atención en las matemáticas escolares. Resultados de investigaciones muestran dificultades enfrentadas por estudiantes para interpretar representaciones en 2D, así como para establecer relaciones entre estas y sus correspondientes objetos y espacios físicos en 3D. En este reporte presentamos resultados de un experimento de enseñanza cuyo objetivo fue promover el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial a través actividades STEM, en niños de 8 años. Dichas actividades involucran medición, cambios de dimensión y toma de perspectiva en diferentes tamaños del espacio. Mostramos el proceso seguido por estudiantes para representar meso- y macroespacios y su relación con acciones como trasformar escalas, ubicar y descomponer, que ilustran maneras de implementar este tipo de actividades en el aula.

Palabras clave: *razonamiento espacial, medición, cambios de dimensión 2D-3D, toma de perspectiva, estudiantes de primaria.*

Abstract

The development of spatial reasoning skills requires attention in school mathematics. Research results point to difficulties faced by students in interpreting 2D representations, as well as in establishing relationships between these and their corresponding 3D objects and physical spaces. In this report, we present results of a teaching experiment aimed at promoting the development of spatial reasoning skills through STEM activities in 8-year-old children. These activities involve measurement, dimensional shifting, and perspective-taking in different sizes of space. We show the processes followed by students to represent meso- and macrospaces and their relationship with actions such as scaling, locating, and decomposing, that illustrate ways for implementing these types of activities in schools.

Keywords*: spatial reasoning, measurement, dimension shifting 2D-3D, perspective-taking, primary-school students.*

INTRODUCCIÓN

El razonamiento espacial forma parte del desarrollo cognitivo desde edades tempranas y, como señalan Uttal et al. (2013), es maleable. Sin embargo, aún falta darle mayor atención en los currículos escolares de matemáticas (Fernández, 2013; Davis et al., 2015) y en los salones de clase, pues tiende a considerarse que su desarrollo es innato, o que es complementario a otras tareas o temas escolares de geometría. Investigaciones relacionadas con este tipo de razonamiento (e.g., Gálvez Pérez, 1985; Gates, 2018) se centran, principalmente, en el desarrollo de una o dos habilidades, como son la visualización y la orientación espacial. Gates (2018) destaca la importancia de la visualización y

[5] Los datos de esta investigación se enmarcan en el programa de vinculación 'Aprendizaje de las matemáticas en contextos diversos' entre la Escuela Primaria Alfredo V. Bonfil y la Universidad Pedagógica Nacional, Ajusco, México

Ortiz-Rocha, Y.A., Sandoval, I., y Sacristán, A.I. (2024). Conexiones entre la medición, cambios de dimensión, y toma de perspectivas: Un estudio del razonamiento en micro-, meso-, y macroespacios. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 377-384). SEIEM.

construcción de representaciones mentales como procesos cognitivos propios del desarrollo del infante. Pero este autor identifica en libros de matemáticas falta de instrucción de estas habilidades en el aula. Otros autores, como Davis et al. (2015), señalan la necesidad de estudiar, simultáneamente, acciones corpóreas y cognitivas. En particular recomiendan analizar cómo los estudiantes desarrollan habilidades de interpretación cuando se involucran en actividades que requieren el traslado de objetos o de su propio cuerpo en un espacio determinado para modificar su posición y su orientación.

Varios estudios han reportado que la falta de desarrollo de este tipo de razonamiento se relaciona con dificultades para interpretar figuras no prototípicas, relacionar representaciones 2D y objetos 3D; así como para interpretar y visualizar representaciones 2D y 3D, movimiento de objetos, comprensión de fórmulas de área y volumen, construcción de figuras en 2D y 3D, conexión entre representaciones 2D y 3D, y lectura de mapas (Ortiz et al, 2022). Estas dificultades pueden originarse en la falta de experiencia en la lectura de imágenes, rotación y movimiento de cuerpos (Duval, 1999). Otros expertos (Battista y Clements, 1996; Gálvez Pérez, 1985) sugieren actividades para desarrollar habilidades del razonamiento espacial en contextos escolares como, por ejemplo, a través de situaciones que involucran construir mapas o planos, interpretar representaciones 2D y construir formas 2D y 3D.

Como resultado de la revisión de literatura, identificamos como camino fecundo para propiciar el desarrollo del razonamiento espacial, actividades en áreas STEM (Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas). Por ejemplo, Francis y Whiteley (2015) señalaron que el involucramiento de los estudiantes en actividades de lectura y cambios de representación, visualización de objetos y reconocimiento de ubicaciones y posiciones de objetos, les permite desenvolverse en áreas como la química, la biología, la arquitectura, entre otras. Khine (2017), por su parte, menciona que tener habilidades espaciales influye en el éxito en actividades relacionadas con STEM.

Tras reconocer la importancia del razonamiento espacial para áreas STEM, nos cuestionamos sobre ¿cómo diseñar actividades y contextos de aprendizaje en la escuela primaria que posibiliten a los estudiantes desarrollar y/o usar habilidades de razonamiento espacial? Para ello diseñamos una trayectoria de aprendizaje dirigida a estudiantes de tercer grado de primaria (ocho años). Esta se enmarca en actividades STEM, en particular, en el estudio de los sismos. El objetivo en esta comunicación es presentar algunas de las actividades que incluyen la medición, cambios de dimensión y toma de perspectiva en diferentes tamaños del espacio. Mostramos el proceso seguido por estudiantes para representar meso- y macroespacios y su relación con acciones como trasformar escalas, ubicar y descomponer.

MARCO CONCEPTUAL

Dos elementos que integran nuestro marco conceptual son, por un lado, tamaños del espacio (micro-, meso- y macro espacio) y, por otro, el razonamiento espacial (acciones del sujeto tanto cognitivas como físicas). Respecto a lo primero, como lo señalamos en Ortiz et al. (2022),

> Gálvez Pérez (1985) distingue tres tipos de tamaños de espacio. En el microespacio (por ejemplo, una construcción con multicubos, un objeto en el salón de clases como la mesa de trabajo), los objetos pueden percibirse y manipularse directamente. En el mesoespacio (por ejemplo, una casa; un salón de clases), los objetos están fijos, no son manipulables y son vistos desde diferentes puntos de referencia; es decir, el sujeto puede tener una visión global del lugar/objeto a partir de percepciones sucesivas y puede recorrerlo por el interior y el exterior. En el macroespacio (una ciudad, una zona rural, etc.), no se tiene acceso global simultáneo, sino que la percepción de este es a través de visiones locales sucesivas. (p. 443)

Respecto al razonamiento espacial, retomamos lo propuesto por Davis et al. (2015), quienes lo consideran un sistema que integra comprensiones "mentales" y transformaciones "físicas" y lo interpretamos como acciones tanto cognitivas como corporizadas. Nuestra trayectoria de aprendizaje busca involucrar a los niños en actividades que requieren moverse en el espacio, medir longitudes en micro- y mesoespacios para estimar longitudes en el meso- y macroespacio, e interpretar y construir

representaciones. Este tipo de actividades les implica percibir, imaginar, tocar, visualizar y tomar perspectiva (Davis et al., 2015 y Del Grande, 1990). Por ejemplo, estimar e iterar medidas (acciones cognitivas) pueden fomentarse a través de experiencias físicas, en el micro- y mesoespacio, relacionadas con la medición. Por otro lado, la toma de perspectiva implica reconocer la posición y ubicación de objetos para comprender las partes en relación con el todo; este proceso requiere una estructuración espacial que implica identificar componentes, combinarlos y relacionarlos entre sí (Battista y Clements, 1996).

METODOLOGÍA

Este reporte forma parte de un estudio más amplio cuyo objetivo fue diseñar una trayectoria de aprendizaje para promover el desarrollo de las habilidades de razonamiento espacial en niños de 8 años, a través de actividades STEM. Como se mencionó en Ortiz et al. (2022), el estudio fue de tipo cualitativo enmarcado en el enfoque de investigación basado en el diseño (IBD). Dicho estudio involucró un experimento de enseñanza entendido como aquel que involucra ciclos de diseño y análisis de actividades en una trayectoria de aprendizaje (Cobb y Gravemeijer, 2008). Este consistió en dos ciclos de diseño e implementación con niños de 3er grado de una escuela primaria pública, ubicada en una zona de alta vulnerabilidad de la Ciudad de México. El primer ciclo (2020-2021) se implementó en modalidad remota a través de la plataforma Google Meet (debido a COVID-19), con un grupo de hasta 16 niños. El segundo ciclo (2022) se realizó en modalidad presencial con un grupo de 24 niños (quienes habían cursado 1er y 2do grado en modalidad remota); constó de 22 sesiones, cada una con duración de 1 a 2 horas. Todas las sesiones fueron videograbadas.

La primera autora actuó como maestra-investigadora participante (en adelante, maestra) guiando las sesiones; y las otras coautoras fueron observadoras tomando notas de campo. Después de cada sesión, se discutieron las observaciones y acciones (análisis continuo) para decidir ajustes necesarios tanto para las subsecuentes sesiones como para el análisis retrospectivo del experimento. Los datos reportados (usando seudónimos) provienen del segundo ciclo de la IBD, y de las actividades relacionadas con medición, cambios de dimensión y toma de perspectiva en diferentes tamaños de espacio. En la tabla 1 se describen las actividades que se analizan en esta comunicación.

Tabla 1. Actividades de la trayectoria de aprendizaje sobre medición, cambios de dimensión y perspectiva.

Actividad	Descripción
Medición sobre un plano horizontal	Microespacio: estimar y medir el largo de la mesa de trabajo. Mesoespacio: usar el proceso de medición del microespacio para estimar la longitud del largo del salón de clases y, medirlo usando tiras de papel de un metro. Macroespacio: medir el perímetro de la escuela a través de Google Earth.
Medición sobre un plano vertical (alturas)	Microespacio: medir sus alturas con reglas y tiras de papel. Mesoespacio: iterar las mediciones de alturas en el microespacio para estimar la altura del salón de clase, de la escuela y, lograr interpretar información de una representación (15 metros de profundidad). Macroespacio: iterar las mediciones de alturas en el mesoespacio para estimar profundidad de capas de la tierra dadas en kilómetros.
Construcción de representaciones de la vista superior	Microespacio: representar la vista superior de una construcción con cubos. Meso- y macroespacio: representar la vista superior del salón de clases y de la escuela para proponer una ruta de evacuación en caso de sismo.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Dado que en el mesoespacio no se tiene acceso directo a la vista superior de los objetos, es necesario que los niños se la *imaginen*[6] para *visualizarla*. Para promover el desarrollo de este tipo de habilidades de razonamiento espacial, la trayectoria de aprendizaje incluye actividades para reconocer la vista superior, y usar recursos manipulativos y digitales accesibles en dicho contexto escolar. Describimos

[6] Usamos el formato de cursivas para señalar acciones relacionadas con habilidades de razonamiento espacial.

resultados que ilustran conexiones entre medida, cambios de dimensión y toma de perspectiva, durante la producción de planos de evacuación en caso de un sismo.

Estimación, medición e iteración: Tránsitos entre el micro, el meso y el macroespacio

Las actividades en el microespacio tenían como objetivo generar en los niños experiencias de percibir (ver, tocar) y reconocer objetos, distancias y longitudes pequeñas, y analizarlos en diferentes vistas (toma de perspectiva). Se inició explorando objetos con recursos manipulativos (módulos multicubo) y con sus mesas de trabajo; en ese espacio, los objetos se pueden percibir, manipular y medir directamente. Después, hicieron estimaciones y mediciones en mesoespacios (salón de clase) y transitaron hacia un macroespacio (el barrio de la escuela), midiendo su perímetro (digitalmente). Finalmente, representaron planos de los distintos espacios, y establecieron relaciones espaciales entre los objetos allí contenidos. Ahora, describimos dichos procesos.

Medición en lo horizontal y superficies planas.

Las actividades iniciaron con experiencias corporizadas –el uso de medidas antropométricas "pequeñas" como sus manos– para medir el ancho de una mesa. Luego, se estimaron las medidas de las manos y del ancho de la mesa, expresadas numéricamente en centímetros: es decir, se usaron estimaciones sensoriales y unidades figurales (Chamorro, 2000). Utilizando instrumentos de medición establecidos por la maestra (reglas de distintas longitudes) avanzaron hacia una iteración más consciente, es decir, a una conceptualización de una unidad estandarizada (Chamorro, 2000). Esto implicó comparar la unidad de medida con la longitud a medir, iterar la unidad hasta completar la longitud y componer medidas. De esta manera se construye una unidad de medida desligada del objeto a medir.

Figura 1. Tensiones y oportunidades al medir alturas en diferentes espacios y superficies planas-no planas



En el mesoespacio –el salón de clase–, los niños estimaron y midieron sus dimensiones, transfiriendo el proceso realizado en el microespacio (Figura 1a y 1b) y utilizando una estrategia propuesta por un niño (Mario), que consistía en usar el lado de una baldosa cuadrada (aproximadamente 30 cm) como unidad de medida y multiplicarlo por el número de baldosas (26) a lo largo del salón. Algunos confundieron la cantidad de baldosas con la longitud final, pero la maestra aclaró la diferencia y acordaron utilizar la estrategia de Mario, reconociendo equivalencias entre los centímetros marcados en la regla (30 cm) y la longitud del lado de una baldosa. Para este proceso de medición, ellos también utilizaron una tira de papel de un metro: la maestra les dio las instrucciones y les ilustró que 100 cm equivalen a 1 m con el uso de reglas de 30 cm (a través de la *composición*) para recortar la tira de papel. Conformaron 3 equipos y midieron el largo y ancho del salón (Figura 1b) con ésta, iterándola. Fue necesario repetir 3 veces las mediciones, hasta que todos los resultados casi coincidieron.

Medición en lo vertical y tensiones al medir alturas entre superficies planas y no planas.

Luego, en el microespacio, los niños midieron la altura de un compañero. Surgió un conflicto relacionado con cómo medirla. Primero, utilizaron una regla y la iteraron (Figura 1c) sobre el contorno del cuerpo de su compañero, enfrentándose a la dificultad de usarla en una superficie no

plana. Además, no siempre registraron la cantidad de iteraciones. Por tanto, los resultados fueron contradictorios a sus conocimientos previos llevándolos a una discusión:

Maestra: Acá, dice que Carlos mide 71. ¿Ustedes creen que él mide 71?

Luis: No, [Carlos] ha de medir uno treinta y tantos.

Maestra: ¿Por qué?

Luis: Porque un bebé mide setenta y tantos.

Maestra: Entonces 71 es muy pequeño. Tú me dices uno treinta y tantos, ¿de dónde ese uno?

Luis: Porque ha de ser como de mi estatura.

Maestra: Ok, y ¿ese uno qué es?

Luis: Es un metro.

Después, se ubicaron espalda contra espalda, frente a frente, o lado a lado, para compararse directamente. Reconocieron que las mediciones no eran correctas. Observaron que donde "perceptualmente" tenían el mismo tamaño sus alturas diferían en varios centímetros; o cuando las mediciones coincidían "visualmente", las medidas diferían. Por tanto, confrontaron aspectos cualitativos (percepción) y cuantitativos (valor numérico resultado de la medición). Enseguida, se organizaron triadas y colocaron tiras de papel de un metro y reglas sobre una superficie plana vertical (un muro del salón), para medir de abajo hacia arriba al compañero y marcar su altura (Figura 1d). Este proceso, mediante el cual se dieron medidas más precisas, desarrolló aprendizajes en el uso de instrumentos, composición y equivalencia de medidas.

En suma, las experiencias anteriores permitieron a los niños: 1) reconocer la forma adecuada de medir alturas transitando de "medir directamente el contorno del cuerpo" a *imaginar* la altura como "la recta perpendicular al plano horizontal (el piso)". Las acciones fueron: *Ubicar* quien mide y a quien se mide, para establecer relaciones espaciales; y medir una altura colocando el instrumento de medición perpendicular al piso, paralelo a la persona a medir, y marcando la altura en la intersección de los planos horizontal y vertical en la parte superior de la cabeza. 2) Reconocer la necesidad de validar los resultados de la medición a través de *comparar* directa o indirectamente. 3) *Componer* medidas y establecer equivalencia entre ellas (por ejemplo, cm y m).

Estimación y medición en el macroespacio.

En esta actividad se usó la unidad de medida "metro (m)". La maestra inició mostrando a los niños una fotografía del Valle de Rift (lugar no familiar) que tiene una grieta de 15 m de profundidad, y les pidió estimar qué sería esa medida en relación a las dimensiones del salón de clase o de la escuela. Ante la pregunta de "si 15 metros hacia lo profundo sería mucho o poco", Luis responde que él se imagina que sería una distancia "desde los salones [del piso 4] hacia abajo [piso 1]" (Figura 1e). El grupo contrastó la propuesta de Luis con referentes conocidos como la altura de la maestra (1 m 60 cm) para visualizar esa profundidad. Discutieron y estimaron la altura del salón (3 m) usando de referencia la altura de maestra (ella medía casi la mitad de esa altura). Y como el edificio en el que estaba ubicado su salón era de 4 pisos, estimaron que medía 12 m, aproximadamente. Finalmente, relacionaron esta medida con la profundidad de la abertura de la grieta y concluyeron que tendría la altura de la escuela más un piso. En esta estimación en el macroespacio, identificamos las siguientes acciones en los niños: a) usar como referente una altura conocida; b) comparar y visualizar una altura conocida con la altura a medir; c) estimar el número de veces a iterar una altura conocida para medir una desconocida; y d) usar la medida de una longitud conocida para aproximar la medida de una longitud desconocida.

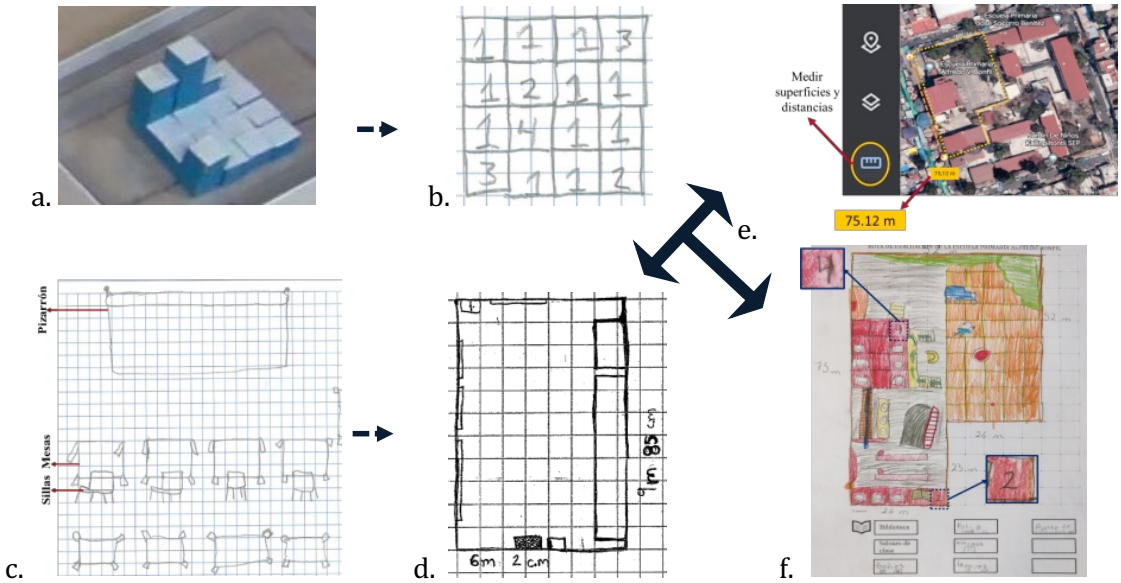
Desarrollo de una representación de una vista superior: tránsito entre tamaños de espacio

El producto final esperado de la trayectoria de aprendizaje era dibujar una ruta de evacuación de la escuela (un plano) en caso de un sismo, por lo que reconocer vistas superiores era esencial. Dado que

la vista superior de la escuela no era directamente perceptible para los niños, se realizaron actividades para transitar del micro- al meso-, y al macroespacio.

En el microespacio, los niños usaron construcciones con módulos multicubo para representar edificios a escala (Figura 2a). Algunos tuvieron dificultades para reconocer la vista superior (*tomar perspectiva*), por lo que la maestra colocó papel blanco sobre cada una de las caras superiores de los cubos, y les pidió subirse a las sillas para reconocerlas y dibujarlas. En las representaciones gráficas resultantes (lo que implica *cambiar de dimensión 3D a 2D*), se observa que algunos niños reconocen la forma, pero no las partes, mientras que otros identifican la forma de la vista superior pero no la cantidad de elementos en cada parte (Figura 2b). Estas experiencias (corporales y cognitivas) de *tomar perspectiva, cambiar de dimensión*, observar, dibujar y compartir resultados les permitió desarrollar estrategias para comprender la relación entre objetos 3D (construcciones con módulos multicubos) y sus representaciones en el plano (vista superior).

Figura 2. Representaciones de vistas superiores en el micro-, meso-, y macroespacio



Para elaborar un plano de evacuación (vista superior) del salón de clases (de un mesoespacio) exploraron y recorrieron el interior del salón, midiendo sus dimensiones, e identificando objetos estáticos. La maestra les indicó *imaginar* la vista superior del aula y dibujarla (lo que implica *cambio de dimensión* y *toma de perspectiva*). En sus primeras versiones, las representaciones reflejan el reconocimiento de objetos o lugares desde una vista lateral o frontal (Figura 2c); lo que da cuenta de la ubicación del observador (sin acceso a la vista superior) con relación a los objetos representados (*toma de perspectiva*). Para ayudar a los niños a *imaginar* una vista superior del salón, la maestra les dio una plantilla de planos de evacuación, con líneas representando ventanas y puertas, rectángulos para muebles, y arcos indicando puertas móviles; y ejemplificó con planos de evacuación de museos. Con esta plantilla, los niños crearon nuevas versiones de sus planos (Figura 2d), y espontáneamente incluyeron medidas. En este proceso identificamos acciones de razonamiento espacial como: *relacionar* el espacio físico con elementos de la representación de dicho espacio; *imaginar* y *visualizar* la vista superior del salón de clases; *representar* las vistas frontal, lateral y/o superior de objetos del salón de clases (parte/todo); y *representar* la vista superior del salón de clases conservando relaciones proporcionales entre las medidas correspondientes (largo y ancho del salón).

Para la transición del meso- al macroespacio se tuvo que *ubicar* la escuela en su barrio para construir el plano de evacuación. Para elaborar las primeras versiones de sus planos, exploraron el espacio de la escuela tanto físicamente, como con los recursos digitales Google Maps y Google Earth (Figura 2e). La mayoría tuvo dificultades para ubicar correctamente objetos y espacios dentro de la escuela y pocos representaron las vistas lateral y superior. Utilizando Google Earth, exploraron y midieron el perímetro escolar (área delineada con líneas punteadas con amarillo en Figura 2e). Las distancias

generadas por Google Earth fueron redondeadas: por ejemplo, una distancia de 75.12 m se aproximó a 75 m. La decisión de no considerar los decimales se tomó debido a que en sus planos de evacuación (usando la plantilla), la representación de los decimales resultaba prácticamente imperceptible. Con la exploración e información obtenida, los niños realizaron las segundas versiones de sus planos (Figura 2f). Algunos enfrentaron dificultades con la escala debido a medidas de las dimensiones de la escuela no eran múltiplos de 5 (cada lado de un cuadro de la plantilla representaba 5 m). A pesar de ello, destacamos que se hicieron conexiones entre elementos vistos en el microespacio hacia el macroespacio, pues en el plano de evacuación los niños colocaron un número para indicar la cantidad de pisos de cada edificación (Figura 2f).

DISCUSIÓN Y REFLEXIONES FINALES

Nuestra trayectoria de aprendizaje involucra medición, cambios de dimensión y toma de perspectiva en diferentes tamaños del espacio. En esta comunicación mostramos el proceso seguido por los niños para representar espacios mediante acciones como *transformar escalas, ubicar* y *descomponer*. En particular, las actividades en el micro- y mesoespacio les permitió poner en juego acciones de razonamiento espacial como *iterar* (*trasladar)* una unidad de medida (e.g., antropométrica, cm, m), *estimar (percibir)* su longitud, *compararlas* y *relacionarlas* con la longitud a medir, y *componerlas* para hallar la longitud o distancia. Respecto a las actividades en el micro- y el mesoespacio para medir alturas, otras acciones de razonamiento espacial fueron: *visualizar* la magnitud de una altura que no puede ser medida directamente (e.g., altura del edificio de la escuela), sino a partir de la *iteración* de una conocida; *tomar perspectiva* y *localizar*, esto es, reconocer dónde y cómo *ubicarse* y *ubicar* los instrumentos de medición para calcular la longitud de la altura requerida. En el proceso de estimación, se involucraron acciones mentales simultáneas como *comparar* y *ordenar*, derivadas de experiencias físicas de medición. Estas actividades, de acuerdo con Glenn (1980), no solo dan la oportunidad de explorar y entender el entorno, sino que contribuyen a la construcción de representaciones de dicho entorno. Este autor también destaca la importancia de no iniciar la enseñanza de la medición de manera cuantitativa. En su lugar, subraya que la operación fundamental que sustenta todo concepto de medida es la coordinación de experiencias visuales y cinestésicas. Esto implica crear vínculos cognitivos con lo que percibimos y sentimos corporalmente. Respecto a la interpretación y construcción de representaciones, los estudiantes emplearon acciones como *representar, transformar a escala, ubicar* y *descomponer*. En el microespacio, relacionaron objetos tangibles con representaciones en vista superior –*cambios de dimensión (*$2D \leftrightarrow 3D$*)*. En el mesoespacio (salón de clases), *imaginaron* la forma de objetos/espacios en vista superior y *visualizaron* su forma al progresar entre distintas versiones de sus planos. Mientras que *seccionaron* la escuela –compuesta por varios mesoespacios–, en partes para representarla como un todo.

Una de nuestras hipótesis era que para que las representaciones digitales, producidas por Google Maps y Google Earth, tengan sentido para los niños, es necesario vincularlas con el espacio físico por el que transitan diariamente. Esto implica reconocer que una distancia medible mostrada con un recurso digital (Figura 2e) corresponde a la distancia que ellos recorren, pero difícilmente podrían medirla directamente. En la elaboración de los planos de evacuación de la escuela tuvieron que: a) *ubicar* objetos y espacios en las representaciones digitales de Google Maps y Google Earth; b) *relacionar* los espacios físicos con sus representaciones digitales; c) *relacionar* la ubicación y orientación de los objetos y lugares físicos de la escuela, entre las representaciones digitales con las de sus planos; d) *seccionar* espacios de la escuela (partes) y representarlos en sus planos; e) *componer* todos los espacios seccionados de la escuela y representarlos desde la vista superior; y f) *visualizar* la vista superior de espacios que no son vistos a través de Google Maps y Google Earth y representarlos. Mediante estas acciones los niños establecieron relaciones, reconociendo escalas de sus representaciones respecto al espacio real. Esto implicaría un acercamiento a relaciones de proporcionalidad y una mejor comprensión del mundo físico que los rodea. Consideramos que el análisis presentado, es un aporte a la investigación, respecto al desarrollo de las habilidades de

razonamiento espacial en edades tempranas pues relaciona la medición, cambios de dimensión, y toma de perspectivas.

Referencias

Battista, M. T. y Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 258-292. https://doi.org/10.2307/749365

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.) *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Chamorro, M. D. C. y Belmonte-Gómez, J. M. (2000). *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis.

Davis, B., Okamoto, Y. y Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. En B. Davis y the Spatial Reasoning Study Group (Eds.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations,* (pp. 139-150). Taylor & Francis. https://doi.org/10.4324/9781315762371

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20. https://www.jstor.org/stable/41193837

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-25). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/17/Actas17SEIEM.pdf

Francis, K. y Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions. En B. Davis y the Spatial Reasoning Study Group (Eds.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations,* (pp. 121-136). Taylor & Francis. https://doi.org/10.4324/9781315762371

Gálvez Pérez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* [Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav].

Gates, P. (2018). The importance of diagrams, graphics and other visual representations in STEM teaching. En R. Jorgensen K. Larkin (Ed.), *STEM Education in the Junior Secondary* (pp. 169-196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5448-8_9

Glenn, J. A. (1980). *Children learn to measure: Foundation activities in the classroom. A handbook for teachers.* Harper & Row.

Khine, M. S. (2017). Spatial Cognition: Key to STEM Success. En M. S. Khine (Ed.), *Visual-spatial Ability in STEM Education: Transforming Research into Practice* (pp. 3-8). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44385-0_1

Ortiz-Rocha, Y. A., Sandoval-Cáceres, I. y Sacristán-Rock, A. I. (2022). Construcción de sistemas de referencia espaciales en edades tempranas: reconocimiento de macroespacios. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 441-449). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/25/Comunicaciones/441.pdf

Uttal, D. H. y Cohen, C. A. (2012). Spatial thinking and STEM education: When, why and how. *Psychology of Learning and Motivation, 57* (2), 147–181. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-394293-7.00004-2

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES EN 5.º DE PRIMARIA: ESTRATEGIAS Y SIGNIFICADOS

5º Grade Students solving inequations: strategies and meanings

Pacheco, E[a]., Ayala-Altamirano, C[b]., Molina, M[c]. y Pinto, E[d].

[a]Universidad de Granada (España), [b]Universidad de Málaga (España), [c]Universidad de Salamanca (España), [d]Universidad de O'Higgins (Chile)

Resumen

Este estudio tiene por objetivo identificar y describir las estrategias y significados que evidencian estudiantes de 5.º de primaria (10-11 años) en tareas de inecuaciones. Realizamos un estudio cualitativo exploratorio y descriptivo a partir de una sesión de trabajo con tareas diseñadas para favorecer el uso del pensamiento relacional y la explicitación de la comprensión de las relaciones de desigualdad. Los resultados ponen de manifiesto los dos significados de la inecuación: restrictivo y comparativo; y el uso de estrategias tanto operacionales como estructurales. Se concluye necesario proponer tareas sobre la inecuación con estructuras variadas que permitan el uso de diversas estrategias, así fomentar los distintos significados de la inecuación.

Palabras clave: *early-algebra, estrategias de resolución, inecuación, significados.*

Abstract

The aim of this study is to identify and describe the strategies and meanings shown by 5th grade students (10-11 years old) in inequality tasks. We conducted an exploratory and descriptive qualitative study based on a work session with tasks designed to encourage the use of relational thinking and the explicit understanding of inequality relations. The results highlight the two meanings of the inequality: restrictive and comparative; and the use of both operational and structural strategies. It is concluded that it is necessary to propose tasks on the inequality with varied structures that allow the use of different strategies, thus encouraging the different meanings of the inequality.

Keywords: *early-algebra, inequality, meanings, primary education, solving strategies.*

INTRODUCCIÓN

En el contexto del pensamiento algebraico, un enfoque de estudio es el que se centra en razonar con expresiones y, plantear y resolver inecuaciones (Blanton et al., 2018). A nivel curricular el estudio de las inecuaciones se realiza desde primaria, por ejemplo, en la reciente actualización del currículo español y de otros países (ej., Australia, Chile, Estados Unidos). El Ministerio de Educación y Formación Profesional español (2022) señala que, al desarrollar el sentido algebraico, los estudiantes de tercer ciclo realizarán actividades que incluyan relaciones de igualdad y desigualdad e identificarán datos desconocidos en expresiones simples. En Chile, país que actúa de contexto en esta investigación, desde el año 2012 se introduce en 4.º y 5.º curso el estudio de las inecuaciones (Ministerio de Educación, 2012).

A nivel investigativo hay pocos trabajos que se centren en el concepto de inecuación en educación primaria, lo que se traduce en un desafío a abordar desde la investigación. En una publicación reciente, Pino-Fan et al. (2024) analizan textos escolares chilenos y con relación a las inecuaciones destacan el uso de la metáfora de la balanza como única estrategia de resolución propuesta en los textos. Consideran que esto puede producir una comprensión deficiente de las relaciones

Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Pinto, E. (2024). Resolución de inecuaciones en 5° de primaria: estrategias y significados. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 385-392). SEIEM.

modelizables mediante inecuaciones y limitarse únicamente a la utilización de algoritmos, sin tener en cuenta las propiedades que explican el procedimiento.

Con respecto a educación secundaria, se evidencia una baja comprensión del concepto de inecuación por parte del estudiantado, producto del uso operacional de los signos (Tsamir y Almog, 2001). Por otro lado, Blanco y Garrote (2007) observan que los signos "mayor que" y "menor que" son malinterpretados como relación de desigualdad y carecen de significado. Entre los errores recurrentes al resolver inecuaciones identifican el uso erróneo de dichos signos como conectores entre expresiones sin un significado inherente, llegando a sustituirlos incorrectamente por el signo de igualdad.

Ellis y Özgür (2024) resumen los avances asociados con el estudio del pensamiento algebraico. Si bien no mencionan explícitamente las inecuaciones, algunos de los tópicos relacionados con las ecuaciones son transferibles a nuestra investigación. Abordan la equivalencia y el signo igual, distinguiendo entre una comprensión operacional (evidencia de un cálculo) y relacional (equivalencia entre las expresiones). Además, atienden al estudio de las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones identificando estrategias de resolución con empleo del pensamiento analítico y estructural, las cuales mejoran la comprensión de las ecuaciones. En el contexto de la inecuación dichos conceptos y estrategias de resolución pueden ser abordados, permitiendo una conexión entre la ecuación e inecuación.

En virtud de lo expuesto contemplamos para este estudio indagar en estrategias de resolución y los significados que se le otorga a la inecuación, con el fin último de obtener orientaciones que guíen la práctica educativa en las aulas. Nuestro objetivo es identificar y describir las estrategias de resolución de inecuación y los significados evidenciados por estudiantes de 5.º de primaria (10-11 años).

PENSAMIENTO ALGEBRAICO, INECUACIÓN Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

El pensamiento algebraico es un tipo de pensamiento en donde se razona sobre la generalidad y se distingue una estructura algebraica, a través del análisis de las relaciones entre las operaciones y se identifican los cambios que ocurren entre diferentes cantidades (Kieran, 2004). A través del pensamiento relacional, se atiende a las expresiones desde un enfoque estructural (Molina, 2009), mientras que el pensamiento analítico permite el manejo de cantidades desconocidas como si fueran conocidas, para realizar transformaciones y establecer relaciones de equivalencia (Kieran, 2022).

La inecuación es una relación de desigualdad entre dos expresiones algebraicas, que involucran una cantidad desconocida o incógnita (Lloyd et al., 2011). Su resolución consiste en identificar todos los valores posibles de la incógnita que cumplen con la inecuación (Martínez et al., 2013). En la literatura se distinguen dos significados de las inecuaciones (Paoletti et al., 2021). Tendrá un significado comparativo si expresa una comparación entre expresiones aritméticas a partir de conocer sus valores numéricos. Será restrictivo si se razona sobre un intervalo de soluciones. Por ejemplo, en $x+3>10$, interpretamos que $x+3$ y 10 son dos expresiones distintas que se comparan y su solución es cualquier valor que haga verdadera la relación de desigualdad. El significado restrictivo se observa en $x+3>10$ cuando se razona sobre la solución como el conjunto de todos los valores posibles para x.

Para describir las estrategias de resolución de inecuaciones realizamos una adaptación basada en las estrategias para resolver ecuaciones discutidas en los trabajos de Ellis y Özgür (2024), Kieran (2022) y Kieran y Martínez-Hernández (2022). Hemos identificado cuatro estrategias: a) estructurales, evidencian pensamiento relacional al reconocer relaciones entre expresiones basándose en su estructura, empleando propiedades o la descomposición de números; b) analíticas, sustentadas en operar con cantidades indeterminadas como si fueran conocidas y realizar transformaciones de las expresiones basadas en las propiedades de la igualdad o desigualdad; c) operacionales, refieren a resolver las ecuaciones o inecuaciones a través de una o variadas operaciones aritméticas; y d) ensayo

y error, en la cual se reemplaza la incógnita por algún valor y se verifica la veracidad de la igualdad o desigualdad.

MÉTODO

Este estudio es cualitativo, exploratorio y descriptivo. La recogida de datos se realizó en un colegio concertado de Chile, en una clase formada por 29 estudiantes de 10 y 11 años. La muestra fue intencional por disponibilidad para participar. Estos estudiantes no habían trabajado previamente tareas de ecuación ni inecuación según la información facilitada por la docente del grupo. Ella estuvo presente en la recogida de datos, pero no participó. Dicha sesión fue diseñada colaborativamente e implementada por seis futuros docentes de primaria y un investigador en Didáctica de la Matemática.

Diseño de la sesión

Se implementó solo una sesión, de 90 minutos, que estuvo dirigida por el investigador y se estructuró en dos momentos: trabajo grupal y puesta en común. El alumnado se organizó en seis grupos de 4 a 6 integrantes y trabajaron supervisados por los futuros docentes antes mencionados. En la Tabla 1 se muestran las cuatro tareas propuestas. Las tareas son adaptaciones de trabajos sobre pensamiento relacional y analítico (Molina, 2009; Radford, 2022), en específico de la tarea 1 a 3 van dirigidas a promover el pensamiento estructural y la tarea 4 el pensamiento analítico, en el caso que el estudiantado los empleara. Cada estudiante, individualmente, escribió en su hoja de trabajo las respuestas acordadas por el grupo para cada tarea. Luego, realizaron una puesta en común de dichas respuestas. Se esperaba que las soluciones contemplaran principalmente los números naturales, aunque habían estudiado previamente los números racionales positivos.

Tabla 1. Caracterización de las tareas

Instrucción de la tarea	Tareas
Tarea 1. Observa las siguientes igualdades. Luego, encierra a 👍 si es correcta o a 👎 si es falsa.	a. $500 + 25 = 520 + 15$ 👍 👎 b. $(1000 \cdot 2) \cdot 5 = 2 \cdot (1000 \cdot 5)$ 👍 👎 c. $17 \cdot 5 + 17 \cdot 3 = 17 \cdot (5 + 3)$ 👍 👎 d. $35 \cdot (3 + 2) = 35 \cdot 3 + 3 \cdot 2$ 👍 👎
Tarea 2. Completa los □ para que se mantenga la desigualdad.	a. $33 + □ < 33 + 14$ b. $□ + 102 < 102 + 6$ c. $510 + 2 + 3 > □ + 512$ d. $600 + 600 + 400 > 1.000 + □$
Tarea 3. Completa los □ sin hacer cálculos escrito.	a. $□ > 347 \cdot 25 \cdot 4$ b. $398 \cdot 746 : 746 < □$ c. $378 + 794 > 778 + □$ d. $8790 \cdot 596 < 879 \cdot □$
Tarea 4. Lee la situación. Luego, responde.	Silvia y Carlos tienen algunas láminas. Carlos tiene 3 láminas y Silvia tiene 2 láminas. Además, su madre prepara tres sobres con el mismo número de láminas en cada uno. Le da 1 sobre a Carlos y 2 a Silvia. Silvia siempre tiene más láminas que Carlos. a) ¿Cuántas láminas podría tener Silvia? Escríbelo. b) ¿Cuántas láminas podría tener Carlos? Escríbelo. c) ¿Cómo podrías expresar la relación entre las láminas que tiene Silvia y Carlos?

La puesta en común estuvo dirigida por el investigador quien favoreció el intercambio de respuestas a las tareas y propuso oralmente cuestiones para la verbalización de las estrategias seguidas, así como para identificar los significados otorgados a las inecuaciones. Por ejemplo, en la primera tarea las preguntas planteadas por el investigador fueron: ¿en qué se fijaron?, ¿cómo modificarían sentencias numéricas que son falsas para que sean verdaderas?, ¿qué otra cosa se podría modificar?, ¿cómo comprobar que los cambios son correctos?, ¿qué sucede si en las falsas cambian el signo igual?, y ¿por qué cambian el signo? Con estas cuestiones se motivó el razonamiento basado en las estructuras de las expresiones, atendiendo a los elementos que las conforman, trabajando en el lado derecho y/o

izquierdo, descomponiendo y componiendo números, explicando relaciones de desigualdad, así como empleando símbolos y propiedades (conmutativa, asociativa y distributiva).

Análisis

Analizamos y codificamos las respuestas escritas de los 29 estudiantes a las cuatro tareas y la video-grabación de la puesta en común. El anonimato del estudiantado se aseguró designando una letra Ei, donde i= 1, 2, 3, … 29. Específicamente, realizamos un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes atendiendo a las estrategias de resolución empleadas y los significados de las inecuaciones que ponen de manifiesto. Este procedimiento fue de carácter deductivo, aplicando categorías provenientes de la literatura y de las tareas presentadas. Clasificamos las estrategias de resolución de inecuaciones adaptando las estrategias documentadas para las ecuaciones, contemplando cuatro: estructurales, analíticas, operacionales y, ensayo y error (Ellis y Özgür, 2024; Kieran, 2022; Kieran y Martínez-Hernández, 2022). A continuación ejemplificamos cada una con $12+m<18$: a) estructurales, se resuelve a partir de descomponer 18 como 12+6 y relacionar cada término de dicha expresión con 12+m; b) analíticas, aplicando la propiedad de la desigualdad se plantea una expresión equivalente restando 12 a ambos lados de la desigualdad; c) operacionales, se aplicarían estrategias aritméticas, como la operación inversa, 18-12=6; d) ensayo y error, se cuestionaría ¿12 más qué número es menos que 18? y probaría con distintos números 12+10=22, 12+5=17, 12+6=18.

Para el análisis de los significados de inecuación nos basamos en la propuesta de Paoletti et al. (2021) Sin embargo, distinguimos tres categorías en relación con los significados: comparativo si expresan un valor posible para la cantidad desconocida, restrictivo parcial si identifican más de uno de dichos valores, y restrictivo exhaustivo si reconocen la totalidad de valores posibles. En este análisis consideramos como conjunto numérico de referencia los números naturales. En algunos casos no se evidencia ningún significado o no aplica.

RESULTADOS

Estructuramos los resultados en dos partes según la naturaleza de los datos considerados en cada caso: trabajo escrito del alumnado en las hojas de trabajo y puesta en común.

Hojas de trabajo: estrategias de resolución y significados

En las respuestas escritas de los estudiantes identificamos el uso de dos tipos de estrategias: estructurales y operacionales. Sin embargo, en la mayoría de las respuestas no fue posible identificar la estrategia empleada porque el alumnado solo propone uno o varios valores fijos, o no responden (Tabla 2). Las estrategias analíticas y ensayo y error no son observadas.

Tabla 2. Estrategias evidenciadas en cada tarea

Estrategias	Tarea 1				Tarea 2				Tarea 3				Tarea 4		
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c
Estructurales	11	0	2	5	1	1	0	0	0	0	1	0	2	1	3
Operacionales	3	2	3	3	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3
No evidencia	15	27	23	20	26	27	26	24	21	26	26	24	25	23	12
No responde	0	0	1	1	2	0	2	4	7	2	2	5	2	5	11

Entre las estrategias en la tarea 1 se observa el empleo de una mayor cantidad de estrategias estructurales respecto al resto de tareas. Dichas estrategias son evidenciadas a partir de relaciones entre términos, las cuales denotan un pensamiento relacional (Figura 1). Otros estudiantes emplean la estrategia operacional, sumando, restando, multiplicando y/o dividiendo (Figura 2).

Figura 1. Ejemplo de respuesta con estrategia estructural

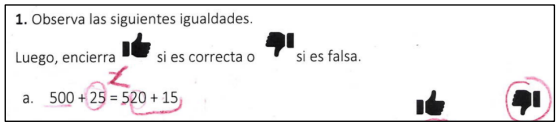
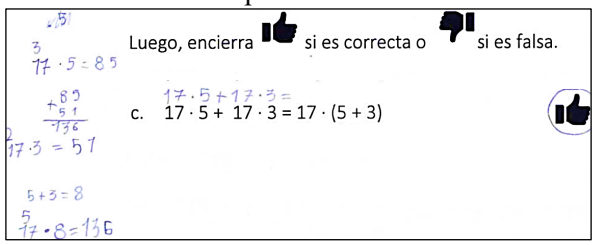


Figura 2. Ejemplo de respuesta con estrategia operacional



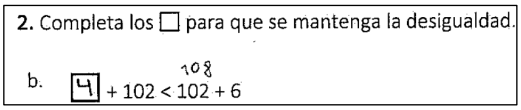
Respecto a los significados asociados a la inecuación, la Tabla 3 recoge la cantidad de tareas en cuyas respuestas identificamos los significados comparativo y restrictivo.

Tabla 3. Significados evidenciados en cada tarea

Significado	Tarea 1				Tarea 2				Tarea 3				Tarea 4		
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c
Comparativo	0	0	0	0	24	26	25	24	14	27	27	24	12	9	6
Restrictivo parcial	0	0	0	0	1	0	2	1	0	0	0	0	4	1	0
Restrictivo exhaustivo	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	2	0
No aplica/No evidencia	29	29	28	28	0	0	0	0	8	0	0	0	11	12	12
No responde	0	0	1	1	2	0	2	4	7	2	2	5	2	5	11

La tarea 1 tenía como objetivo motivar que los estudiantes dirijan la atención a las estructuras de las expresiones y relaciones para que luego las apliquen a las otras tareas, por ello no aparece la simbología *mayor que* y *menor que*. En consecuencia, no es viable atender al significado de la inecuación en esta tarea. En las respuestas a las tareas 2, 3 y 4 en mayor cantidad se muestra el comparativo sobre el restrictivo (Figura 3) producto de dar un valor fijo. Sin embargo, algunos estudiantes evidencian significado restrictivo de tipo parcial y exhaustivo como se ejemplifica en la Figura 4 (indica varios valores posibles) y 5 (indica todos los valores).

Figura 3. Ejemplo de respuesta que sugiere significado comparativo



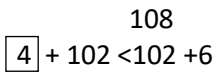
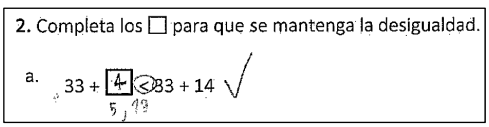


Figura 4. Ejemplo de respuesta que sugiere significado restrictivo parcial



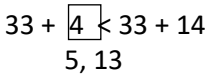
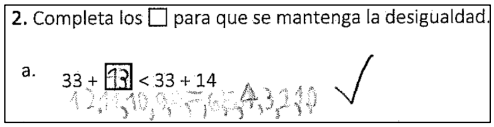
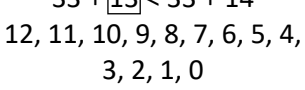


Figura 5. Ejemplo de respuesta que sugiere significado restrictivo exhaustivo





En la tarea 4 las respuestas sugieren un significado restrictivo parcial y exhaustivo, por ejemplo: "tiene que ser mayor que 4 pero como 10, 20, 150, 300, 1000" y "Carlos podría tener de 5 arriba y pueden ser números pares e impares".

Puesta en común: estrategias de resolución y significados

En el contexto de la puesta en común observamos tres estrategias: estructurales, operacionales y ensayo y error, así como significados comparativo y restrictivo de tipo parcial y exhaustivo.

En la tarea 1 utilizan estrategias estructurales y operacionales. Ocho estudiantes intervienen de modo voluntario y el investigador promueve la participación de otros estudiantes. En concreto, en la sentencia numérica 500+25=520+15, E_{26} y E_1 intervienen argumentando con una estrategia operacional (sumando). Luego, el investigador plantea la pregunta ¿cómo corregir la sentencia numérica para que sea verdadera?, donde predominan estrategias estructurales. Por ejemplo, E_{19} propone "500+25=510+5" cambiando los sumandos del lado derecho: el 520 por 510 y 15 por un 5, luego en otra oportunidad cambia el signo = por < expresando "500+25<520+15". E_{27} cambia en el lado derecho 520 por 510 obteniendo "500+25=510+15". Por su parte, E_2 muestra "500+25=520+15-10" quien añade resta y valor 10. En los siguientes apartados los estudiantes expresan estrategias operacionales y estructurales para argumentar la veracidad de las sentencias.

En la resolución de la tarea 2, en las dos primeras expresiones el investigador centra la atención de la puesta en común a observar elementos en común a ambos lados. Esto provoca que los estudiantes verbalicen estrategias estructurales. Por ejemplo, en □+102<102+6, E_{24} propone "olvidar el 102" para luego comparar el 6 y hallar que valores son menores a 6. En 600+600+400>1.000+□, E_1 señala "nos olvidamos de los 600 y el 400", E_6 complementa hay que olvidarse del 600+400 y el 1.000 y varios estudiantes están de acuerdo con "cualquier número menor que 600".

En la tarea 3 seis estudiantes intervienen. Por ejemplo, en □>347·25·4 el investigador plantea preguntas como "sólo mirando los números ¿qué podría escribir al lado izquierdo?, ¿cuánto es 25·4?", E_1 expresa "oh 100". El investigador ahora pregunta "si 25 lo sumo 4 veces, 25+25+25+25", E_9 "son trescientos cuarenta y … ah 34.700", nuevamente interviene E_1 respondiendo "mayor que 34.700". ambos empleando una estrategia operacional. El investigador continúa preguntando "¿podría escribir en este espacio en blanco 347·25·4·2>347·25·4?", la clase está de acuerdo con el investigador E_1 señala "siempre de 1 para arriba" (dicha restricción expresada por E_1 para los valores del factor 2 en el lado izquierdo de la desigualdad) comprendiendo la relación entre las expresiones, lo cual evidencia el reconocimiento de la estrategia estructural.

En la tarea 4, en una primera instancia el investigador plantea cuestiones para comprender el enunciado de la situación. Los estudiantes de modo voluntario responden: "que no sabemos cuántas láminas traen los sobres" (E_{19}), "que la mamá prepara láminas y adentro no sabemos que tiene, o sea tiene las láminas, pero no sabemos el valor" (E_{25}), "que siempre Carlos adentro tiene que tener números impares o pares y Silvia solo números pares" (E_6). Posterior el investigador sugiere la estrategia de ensayo y error, y así resuelven la cantidad de láminas que puede tener cada sobre: inician el conteo con una lámina, donde señalan que no es posible ya que ambos tendrían cuatro láminas, luego prueban con dos y tres láminas, refiriendo finalmente a que debe haber más de una lámina en los sobres.

En lo que respecta a los significados de la inecuación, las respuestas sugieren comparativo y restrictivo. Emplean en primera instancia el comparativo, respondiendo con un valor y luego, el restrictivo parcial y exhaustivo. Por ejemplo, en el primer apartado de la tarea 2a, el primero (E_{13}) de los cuatro estudiantes que intervienen evidencia un significado comparativo al dar como valor el 4. Luego el investigador pregunta "¿sólo el 4?", a lo que otros dos estudiantes (E_2 y E_{27}) dicen que no, mencionando "el 12", "el 10", ejemplificando con dos valores distintos, lo cual sugiere un significado restrictivo parcial. En la última intervención E_1 señala "del 13 para bajo 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1" manifestando todos los valores, esto sugiere un significado restrictivo exhaustivo.

En la tarea 2b, en la expresión □+102<102+6, luego de mencionar E_{24} la idea de "olvidar el 102", el investigador realiza preguntas para guiar la discusión hacia un significado restrictivo. El investigador refiere a "algo menor que 6" y E_9, E_{29}, E_{13} y E_{19} señalan valores distintos (significado comparativo). Seguidamente el investigador pregunta "¿podría ir cualquier número menor que?", a lo que responden sugiriendo un significado restrictivo exhaustivo: "el 6 y los números negativos", "el 6 no, serían iguales". En el siguiente apartado de esta tarea continúan el diálogo: inician dando valores para el

dato faltante y luego comentan la restricción a partir de la pregunta del investigador ¿podría ir cualquier número menor que …? lo cual incita a la explicitación del significado restrictivo.

En la tarea 3, en la expresión □>347·25·4 guiados por el investigador a partir de preguntas como "¿qué número debe ir al lado izquierdo?" y "¿cualquier número mayor que?", E_1 expresa "mayor que 34.700", permitiendo inferir significado restrictivo exhaustivo a partir de dicha expresión.

Por último, en la tarea 4 al responder ¿cuántas láminas podría tener Silvia?, E_{13} explica "tiene que ser mayor que 4 porque si multiplicamos el 2·2 da 4 y tiene dos sobres, en cambio en el sobre de Carlos no tiene lo mismo que Silvia, pero si el paquete tiene 1, le daría lo mismo de láminas que Silvia", evidenciando significado restrictivo parcial a partir de la expresión mayor que 4.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta comunicación identificamos y describimos las estrategias de resolución de inecuación y los significados otorgados por estudiantes de 5.º de primaria. Los resultados permiten mostrar cierta transición desde el uso de estrategias operacionales, al resolver con una o variadas operaciones aritméticas, al empleo de estrategias estructurales, en esta última se evidencia el pensamiento relacional reconociendo las conexiones entre expresiones (a través de su estructura, propiedades y descomposición de números). Ambas son conducentes a respuestas correctas. La observación de un menor uso de procesos algorítmicos durante la puesta en común sugiere que el diseño de las tareas y las cuestiones planteadas influyen en la forma en que los estudiantes abordan y comprenden la inecuación. El aporte de este este estudio es mostrar la importancia de proponer tareas y preguntas que fomenten el razonamiento sobre la estructura a través del empleo de relaciones de las expresiones, propiedades aritméticas y propiedades de la desigualdad.

En este sentido, Pacheco et al. (2023) sugieren enriquecer el diseño de tareas de inecuación considerando entre los elementos presentes la diversidad de estructuras que promuevan el razonamiento. Razonar sobre diversas estructuras es destacado en la literatura como un componente clave para desarrollar el pensamiento algebraico en primaria (Blanton et al., 2018).

Uno de los aportes de esta comunicación es la transferencia de estrategias de resolución de ecuación a inecuación. Ellis y Özgür (2024), dejan una línea abierta a distintos temas de álgebra, por consiguiente, el tratamiento de la ecuación, en específico de las estrategias de resolución con carácter algebraico son transferibles a la inecuación. Al comparar este estudio con otros previos, enfatizamos la importancia de ampliar las estrategias de resolución (Pino-Fan et al., 2024) para evitar que los estudiantes no crean erróneamente que la inecuación solo se resuelve de un modo.

En este trabajo se presentan las soluciones evidenciadas por estudiantes de primaria a tareas de inecuación con uno o unos valores, así como las restricciones. En congruencia con Paoletti et al. (2021), quienes recomiendan fomentar significados tanto comparativos como restrictivos para una profundización en la adquisición del aprendizaje de la inecuación. Distinguimos el abordar las tareas de inecuación a partir de los significados encontrados en la literatura, e incorporar la distinción entre el restrictivo de tipo parcial y exhaustivo, otorgando especificidad al significado de la inecuación.

Por último, como limitaciones de este trabajo que dan pie a la continuación del mismo, señalamos la necesidad de complementar la recogida de datos con entrevistas que permitan indagar en los procesos de resolución de los estudiantes. Es importante destacar que la adquisición de diferentes estrategias de resolución, y en particular, la habilidad de expresar por escrito dichas estrategias, requiere más tiempo, por ello contrastamos las respuestas de las hojas de trabajo con los diálogos de la puesta en común. Sugerimos continuar investigando las estrategias de resolución y significados en la inecuación, explorando enfoques que promuevan una comprensión profunda y variada de este concepto con estudiantes de primaria.

Agradecimientos

Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/ 501100011033 y Beca ANID 72220116, Gobierno de Chile. Agradecemos a la docente M. Coahila y los futuros docentes F. Aninao, M. Guzmán, V. Daza, A. Muñoz y F. Herrera.

Referencias

Blanco, L. J. y Garrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 3*(3), 221-229. https://doi.org/10.12973/ejmste/75401

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Ellis, A. B. y Özgür, Z. (2024). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM Mathematics Education* https://doi.org/10.1007/s11858-023-01545-9

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education, 54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858- 022-01435-6

Kieran, C. y Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10- to 12-year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM Mathematics Education, 54*(6), 1215-1227. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01355-5

Lloyd, G., Herberl-Eisenmann, B. y Star, J. (2011). Developing essential understanding of expressions, equations, and functions for teaching mathematics in grades 6-8. NCTM.

Martínez, S., Varas, L., López, R., Ortiz, A. y Solar, H. (2013). *Álgebra para para futuros profesores de educación básica*. SM. https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2020/07/REFIP-Algebra_01.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Bases Curriculares de la Enseñanza de Educación Matemática*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 157/2022, de 02 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *56*, 24386-24504.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2023). Caracterización de tareas de inecuaciones propuestas en textos escolares de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 427-434). SEIEM.

Paoletti, T., Stevens, I. y Vishnubhotla, M. (2021). Comparative and restrictive inequalities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *63*, 100895. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100895

Pino-Fan, L. R., Lugo-Armenta, J. G., Cardelas, G. R. A., García, J., Peña, C. y Uicab-Campos, Y. (2024). Conflictos potenciales identificados en los libros de texto de matemáticas de educación básica de Chile para el estudio del álgebra. *Journal of Research in Mathematics Education*, *13*(1), 59-86. https://doi.org/10.17583/redimat.14137

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM Mathematics Education* 54, 1151-1167. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x

Tsamir, P. y Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 513-524. https://doi.org/10.1080/00207390110038277

ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD COGNITIVA DE UNA LECCIÓN SOBRE TABLAS ESTADÍSTICAS EN UN LIBRO DE TEXTO POR MAESTROS DE PRIMARIA

Analysis of the cognitive suitability of lesson about statistical tables in a textbook by elementary school teachers

Pallauta, J.D.[a] Vera, O.[b] y Batanero, C.[c]

[a]Universidad de Los Lagos (Chile), [b]Universidad de Cádiz, [c]Universidad de Granada

Resumen

El libro de texto es un importante recurso didáctico, por lo que es necesario que el profesor cuente con la competencia que le permita seleccionar de manera crítica el más idóneo. En este trabajo se describen los resultados de una intervención formativa con maestros de primaria, dirigida a desarrollar la competencia de análisis de la idoneidad cognitiva de una lección de libro de texto sobre tablas estadísticas. Mediante análisis de contenido de las respuestas de 20 profesores de primaria de Costa Rica, se observó que la mayoría asigna altas valoraciones a cada uno de los indicadores propuestos y fueron capaces de identificar críticamente las carencias de la lección.

Palabras clave*: idoneidad cognitiva, libros de texto, formación de profesores, tablas estadísticas.*

Abstract

The textbook is a main didactic resource and therefore it is necessary for the teacher to have the competence to critically select the most suitable textbook. This paper describes the results of a training intervention with primary school teachers aimed at developing the competence of analysing the cognitive suitability of a textbook lesson on statistical tables. Through a content analysis of the responses of 20 Costa Rican primary school teachers, it was observed that most of them assigned high ratings to each of the proposed descriptors. Also, teachers were able to critically identify the deficiencies of the lesson.

Keywords*: didactic suitability, textbooks, teacher education, statistical tables.*

INTRODUCCIÓN

El libro de texto es un puente entre el currículo pretendido y el implementado en el aula (Rezat et al., 2021), siendo una herramienta polivalente para estudiantes y profesores (Rodríguez-Muñiz y Díaz, 2018). Por ello es necesario que los profesores cuenten con la competencia que les permitan analizar de forma crítica los libros, considerando su pertinencia, idoneidad y adecuación al currículo (Castillo et al., 2022). Sin embargo, algunos profesores en formación y ejercicio presentan dificultades para adoptar un enfoque analítico al analizar libros de texto, utilizando criterios intuitivos (Braga y Belver, 2015). En consecuencia, es necesario implementar acciones formativas que doten a los profesores de herramientas teóricas que les faciliten la identificación de potencialidades y carencias de los materiales curriculares, y la realización de adecuaciones oportunas. La idoneidad didáctica, propuesta por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino et al., 2019), se conforma en una guía para los profesores en el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente. Diferentes investigaciones centradas en la formación de profesores han utilizado dicha herramienta para organizar la reflexión y desarrollar la competencia de valoración de los procesos de instrucción (Castillo et al., 2022).

Pallauta, J.D., Vera, O. y Batanero, C. (2024). Análisis de la idoneidad cognitiva de una lección de libro de texto sobre tablas estadísticas por maestros de primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 393-400). SEIEM.

Se elige el tema de tablas estadísticas por ser uno de los tipos más comunes de representaciones visuales de datos, y por su amplia presencia en el contexto escolar y medios de comunicación (Friel et al., 2001). Además, su interpretación forma parte de las competencias básicas de alfabetización para desenvolverse con éxito en la sociedad actual (National Center for Education Statistics, 2017), y variadas investigaciones alertan de las dificultades que los estudiantes de diferentes edades presentan en la lectura y el trabajo con las mismas (Pallauta et al., 2022).

El objetivo de este trabajo es desarrollar la competencia de análisis de la idoneidad didáctica, específicamente la idoneidad cognitiva, para el análisis de una lección de un libro de texto sobre tablas estadísticas con maestros de Educación Primaria. Con ello se proporciona información sobre una temática no investigada anteriormente. A continuación, se presenta el marco teórico adoptado y método de investigación. Posteriormente se expone el análisis de las valoraciones de idoneidad cognitiva y de los juicios elaborados por los participantes y finalmente, se presentan las conclusiones.

MARCO TEÓRICO

Desde el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) desarrollado en el marco del EOS (Godino et al., 2017), se destaca la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción diseñados y/o implementados, enmarcada en la competencia de la reflexión global sobre la práctica docente propia o de otros, su valoración y progresiva mejora.

La idoneidad didáctica (Godino et al., 2023) se entiende como el grado en que un proceso de instrucción es considerado óptimo, para integrar los significados personales de los estudiantes y los significados institucionales previstos o implementados, considerando el contexto y los recursos disponibles. Esta herramienta es útil para que los profesores puedan valorar, tanto el diseño de enseñanza, como la efectividad del proceso de instrucción implementado en el aula. Implica la integración coherente y sistemática de seis facetas: Epistémica, Ecológica, Mediacional, Instruccional, Cognitiva y Afectiva que se detallan a continuación:

Idoneidad epistémica: corresponde al sistema de significados institucionales parciales, relacionado con el contenido y las configuraciones de objetos y procesos implicados en el proceso de instrucción. Requiere coherencia, representación del significado global y consideración del contexto y las circunstancias personales de los estudiantes.

Idoneidad ecológica: supone que el proceso de enseñanza debe alinearse con la visión educativa del centro y la sociedad, teniendo en cuenta las limitaciones del entorno y las sugerencias innovadoras respaldadas por la investigación.

Idoneidad mediacional: incluye diversos recursos que influyen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además de los recursos manipulativos y tecnológicos, se consideran los recursos educativos, el número de estudiantes asignados al profesor, el horario de clases, las condiciones del aula y el tiempo junto a su distribución.

Idoneidad interaccional: los patrones de interacción deben servir para identificar potenciales conflictos semióticos, implementar remediales oportunas para superarlos, estimular gradualmente la autonomía en el proceso de aprendizaje y fomentar el desarrollo de habilidades comunicativas de los estudiantes.

Idoneidad cognitiva: supone que los objetivos de aprendizaje presenten un desafío cognitivo accesible para los estudiantes. Asimismo, es necesario promover variados niveles de dificultad de las situaciones que se planteen, utilizando diferentes estrategias de resolución, considerando posibles dificultades y errores.

Idoneidad afectiva: se debe considerar la participación, actitud, motivación y autoestima de los estudiantes, aspectos vinculados con elementos de la faceta cognitiva. Se asocia a factores que dependen de la institución y del estudiante.

En cada una de estas facetas se establece un sistema de componentes e indicadores, constituyen una guía para el análisis sistemático y mejora continua de los procesos de instrucción (Godino et al., 2023). Puesto que el libro de texto es un instrumento regulador del diseño y desarrollo del currículum escolar (Braga y Belver, 2015), es posible llevar a cabo un análisis sistémico de las lecciones incluidas en el mismo para valorar su idoneidad didáctica. Por ello es conveniente que los profesores desarrollen la competencia en el uso de la idoneidad didáctica y puedan realizar un análisis crítico de diferentes materiales curriculares, como el libro de texto. En este trabajo, se describe el diseño, implementación y resultados de una acción formativa con maestros de primaria dirigida a desarrollar la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto sobre tablas estadísticas. Específicamente, se centra la atención en la faceta cognitiva cuyos componentes e indicadores se recogen de Godino (2013), presentados en la Figura 1, y Godino et al. (2023).

Figura 1. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva (Godino, 2013, p. 121)

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	▪ Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) ▪ Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	▪ Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo ▪ Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)	▪ Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): ▪ Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva ▪ La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia ▪ Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

METODOLOGÍA

Participantes y acción formativa

En la acción formativa participaron 20 maestros de educación primaria, 16 mujeres y 4 hombres, quienes se desempeñaban en un contexto rural. La mayoría de los maestros poseía una amplia experiencia docente (media 11,5 años), y contaban con suficientes conocimientos sobre tablas estadísticas. La implementación de la acción formativa (dos horas y media de duración) fue realizada en el marco de un taller profesional de actualización de enseñanza de la matemática, dirigido a maestros en Costa Rica, para lo cual se les proporcionó una lección sobre gráficos y tablas estadísticas planteada en un libro de texto (Alvarado et al., 2022) de 5º curso de Educación Primaria (10 a 11 años) y comprendió los siguientes momentos:

1. Se expusieron los diferentes tipos de tablas estadísticas junto a su estructura y finalidad. Seguidamente, se presentaron y discutieron la noción de idoneidad didáctica, y de la guía de idoneidad cognitiva sobre tablas estadísticas.
2. Trabajando de manera individual se les solicitó a los participantes realizar las siguientes actividades, enfocando el análisis en el objeto tabla estadística:

   2.1. Identificar en la lección dada los componentes e indicadores de idoneidad cognitiva, considerando como base una la guía de análisis (primera columna de la Tabla 1).

   2.2. Valorar en qué grado se cumplía cada indicador de idoneidad cognitiva.

2.3. Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad cognitiva global de la lección sobre tablas estadísticas, a partir de los indicadores propuestos para cada componente.

Instrumento de recogida de datos

Como instrumento de recogida de los datos se utilizó una guía de análisis que incluía una serie de componentes e indicadores de idoneidad cognitiva específicamente desarrollados para el tema de tablas estadísticas (Pallauta y Batanero, 2024). Los componentes e indicadores recogidos en la guía amplían los propuestos por Godino (2013) (Figura 1), y tienen en cuenta algunas recomendaciones de directrices curriculares (ej. Bargagliotti et al., 2020), y diferentes trabajos centrados en el análisis de tablas estadísticas en libros de texto (ej., Pallauta et al., 2021; 2022).

Dicha guía aparece en la primera columna en la Tabla 1 y en una segunda columna, para cada indicador, los maestros debían asignar un valor 0, 1, 2, 3 para expresar el grado de cumplimiento en el texto analizado de acuerdo al siguiente criterio: 0: incumplimiento del indicador; 1: se aprecia parcialmente (de algunos aspectos) el cumplimiento del indicador, de manera explícita o implícita; 2: se aprecia de manera frecuente el cumplimiento parcial (algunos aspectos) del indicador, o de manera ocasional el cumplimiento total de este; 3: se aprecian indicios del cumplimiento total del indicador, es decir aparece con detalle y en forma explícita.

En dicha guía (Tabla 1, primera columna) se incluyen, para la componente *conocimientos previos*, conceptos-definición, como variable, valor, muestra, frecuencias y procesos de construcción de los variados tipos de tablas estadísticas, junto a su interpretación. Para el componente de *diferencias invididuales*, se incluye el refuerzo de procedimientos de cálculo de los diferentes tipos de frecuencias, y la interpretación de las tablas con diferentes niveles de dificultad. Respecto al *aprendizaje*, se considera importante que la lección promueva un lenguaje variado con una incorporación gradual de símbolos que representen las frecuencias y los resúmenes estadísticos, así como la generalización de los procedimientos de cálculo. También se debe considerar la explicitación de los elementos propios de la estructura de la tabla y sus diferentes tipos (tablas de datos, distribución de una variable, tabla de doble entrada). También se sugiere incorporar situaciones en variados contextos. En cuanto a las *relaciones*, la tabla estadística, en Educación Primaria, se conecta con temas como los resúmenes estadísticos y la probabilidad. Respecto a la *evaluación*, se debe promover el uso de diferentes instrumentos que faciliten la comprensión conceptual e identifiquen el grado en que los estudiantes adquieren los conocimientos y competencias pretendidas. Por ello, deben considerar situaciones de interpretación con diferentes niveles de dificultad, la construcción de varios tipos de tablas estadísticas, y el desarrollo de proyectos que abarquen algunas etapas del ciclo investigativo estadístico, con temás de interés para los estudiantes.

Análisis a priori

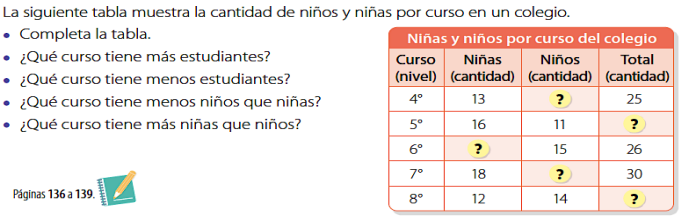
Para tener un referente al interpretar las respuestas de los maestros, se realizó un análisis a priori de la faceta cognitiva de la lección del libro de texto dado (Alvarado et al., 2022). Mediante varias revisiones, se consensuó una valoración común por los autores, que, en la Tabla 1 se resalta en negrita en la columna correspondiente, para cada uno de los indicadores, referidos con el código I.

Respecto a los *conocimientos previos*, en el texto se presentan los conceptos de valor de la variable y, de manera implícita, frecuencia absoluta (I1). Se expone el proceso de construcción de tablas de distribución de una variable con frecuencias absolutas, denominadas “cantidad”, y de completar tablas de doble entrada (I2) (Figura 2). Se proponen ejemplos de situaciones que requieren la interpretación de los datos presentados en tablas de distribución de una variable y de doble entrada (I3) (Figura 2).

En cuanto a las *diferencias individuales*, las actividades de ampliación se centran en determinar solamente frecuencias absolutas (I4). No aparecen situaciones que promuevan una interpretación de los datos expuestos en la tabla estadística asociados a niveles sofisticados de lectura (Friel et al.,

2001), como la predicción o la lectura crítica de la información (I5). Por otro lado, se presenta una variedad de tareas en torno a la tabla estadística con una dificultad manejable (I6).

Figura 2. Ejemplo de situación completar e interpretar tabla de doble entrada (Alvarado et al., 2022, p. 172)


La siguiente tabla muestra la cantidad de niños y niñas por curso en un colegio.

- Completa la tabla.
- ¿Qué curso tiene más estudiantes?
- ¿Qué curso tiene menos estudiantes?
- ¿Qué curso tiene menos niños que niñas?
- ¿Qué curso tiene más niñas que niños?

Páginas 136 a 139.

Niñas y niños por curso del colegio

Curso (nivel)	Niñas (cantidad)	Niños (cantidad)	Total (cantidad)
4°	13	?	25
5°	16	11	?
6°	?	15	26
7°	18	?	30
8°	12	14	?

En relación con el aprendizaje para la comprensión, el lenguaje utilizado en torno a la tabla es verbal o numérico, pero no se utilizan símbolos para representar la frecuencia absoluta o la media aritmética (I7). Sobre la estructura de la tabla se presenta de manera explícita cada uno de sus elementos (I8), asimismo se incorporan diferentes tipos de tablas como las tablas de datos, tablas de distribución de una variable con frecuencias absolutas, y tablas de doble entrada (I9). Los contextos en que se plantean las situaciones sobre tablas son variados y cercanos para el estudiante (I10). Para la competencia, no se promueve la toma de decisiones a partir de la información presentada en la tabla (I11). Siendo también escasa la promoción de conclusiones o conjeturas a partir de la tabla (I12). El texto se centra en el lenguaje numérico, no favoreciendo el cálculo analítico de las frecuencias en las tablas de distribución de una variable o en tablas de doble entrada (I13).

Las relaciones, se centran en torno a la tabla y gráficos estadísticos (pictograma, barras y líneas), así como en el estudio de la media aritmética, y la relación entre los objetos matemáticos de la tabla (I14).

Aunque en la evaluación se incluyen situaciones sobre tablas estadísticas (I15), estas solo consideran niveles más sencillos de lectura, como extraer información explícita o realizar cálculos con los datos (I16). Asimismo, para la construcción solo se considera la tabla de distribución de una variable con frecuencias absolutas (I17). Por otra parte, en el texto no se incluyen situaciones que promuevan el desarrollo del razonamiento estadístico, por medio de la realización de proyectos que involucren algunas de las etapas del ciclo investigativo estadístico con temas que sean de interés para los estudiantes (I18), desatendiendo las recomendaciones de directrices curriculares (Bargagliotti et al., 2020).

RESULTADOS

Mediante un análisis de contenido (Drisko y Maschi, 2016) se estudiaron las valoraciones de los participantes, cuyos resultados pasamos a describir. En la Tabla 1 se presentan las frecuencias de las valoraciones de los maestros en cada uno de los indicadores. Para verificar el grado de corrección, se resalta en negrita la valoración de los investigadores en la columna correspondiente. Se observa que la mayoría de los maestros asigna la mayor valoración a cada uno de los indicadores de idoneidad cognitiva propuestos.

Tomando como base el análisis a priori, consensuado por el equipo investigador, la mitad de las valoraciones realizadas por los maestros fueron adecuadas, con lo que nuestros resultados difieren de los de Castillo et al. (2022) puesto que en su trabajo la mayor parte de valoraciones fueron adecuadas. Sin embargo, en su caso, los participantes trabajaron en equipos, mientras los nuestros realizan la valoración en forma individual. Las fuertes discrepancias de valoraciones, entre las asignadas por los autores y la mayor parte de los maestros, se centran en los indicadores: I1, I5, I7, I11, I12, I13, I16, I17, I18, las cuales trataremos de explicar. Al valorar I1, la mayor parte de los maestros podría no haber considerado la ausencia del concepto de variable, o la explicitación del concepto de frecuencia absoluta, el cual se presentó como la "cantidad de veces que se repite el valor de la variable". Respecto a I5 probablemente los participantes no contemplaron los niveles más sofisticados de lectura, como

la predicción o la lectura crítica, dado que frecuentemente las tareas en los libros de texto se centran en la lectura explícita o la realización de cálculos sencillos. La mayoría de los maestros asignaron la valoración máxima a I7; posiblemente obviaron que dicho criterio consideraba, además del lenguaje verbal, la inclusión de símbolos para referirse a las frecuencias y/o estadísticos.

Tabla 1. Frecuencia de maestros que dan cada puntuación al cumplimiento de indicadores de la faceta cognitiva en la lección analizada (Elaborada por los autores)*

Componentes e indicadores	Valoración			
	0	1	2	3
CONOCIMIENTOS PREVIOS				
I1. Se contemplan conceptos-definición (ej. población y muestra, variable, valores y escala de medida), y los tipos de frecuencias de acuerdo a cada tipo de tabla.	2	**5**	4	9
I2. Se explicita el proceso de construcción de la tabla estadística, considerando la clasificación y cálculo de frecuencias de acuerdo a la variable, o el volumen de datos.	5	1	5	**9**
I3. Se proponen situaciones para la identificación de la información expuesta en la tabla.	3	1	3	**13**
DIFERENCIAS INDIVIDUALES				
I4. Se incorporan actividades para el refuerzo de los algoritmos para calcular los diferentes tipos de frecuencias.	0	3	6	**10**
I5. Se proponen actividades de ampliación que requieren niveles más sofisticados de lectura de tablas estadísticas.	0	**2**	8	9
I6. Se consideran diferentes niveles en el trabajo con las tablas estadística, para atender las diferencias individuales.	3	2	5	**10**
APRENDIZAJE				
Comprensión				
I7. Utiliza un lenguaje variado, por ejemplo, un lenguaje verbal o icónico para facilitar la comprensión de conceptos-definición. Se incorporan progresivamente símbolos para representar frecuencias o estadísticos.	0	**1**	5	14
I8. Se explícita cada uno de los elementos de la tabla estadística (títulos, etiquetas, cuerpo de la tabla, celdas).	0	1	2	**16**
I9. Se incluyen diferentes tipos de tablas de manera progresiva, considerando su complejidad y usos.	0	0	4	**16**
I10. Las tareas son planteadas utilizando una variedad de contextos.	0	1	4	**15**
Competencia				
I11. Las situaciones presentadas promueven la toma de decisiones a partir de la información presentada en la tabla de manera argumentada.	**0**	1	8	11
I12. Se plantean situaciones que promuevan el uso de tablas estadísticas para comunicar conjeturas o conclusiones.	0	**2**	5	13
I13. Las situaciones permitan generalizar el procedimiento de cálculo los diferentes tipos de frecuencias.	**0**	1	6	13
RELACIONES				
I14. Se promueve el establecer relaciones entre los objetos matemáticos de la propia tabla (valores de la variable y frecuencias, entre frecuencias), entre la tabla y otros tipos de lenguaje (gráfico, verbal), o con diferentes estadísticos o la probabilidad.	1	0	6	**13**
EVALUACIÓN				
I15. Se incluyen situaciones que permiten la evaluación y autoevaluación sobre las tablas estadísticas.	0	2	8	**10**
I16. La evaluación considera situaciones que requieran variados niveles de dificultad para la lectura e interpretación de los datos.	0	**1**	7	12
I17. Se consideran situaciones que impliquen procesos de construcción de diferentes tipos de tablas estadísticas.	2	**2**	6	10
I18. Se incorporan actividades que promueven las fases de un estudio estadístico.	**0**	3	9	8

*Se resalta en negrita la puntuación dada por los autores en el análisis a priori de la lección

En relación a I11 posiblemente los participantes confundan el uso de la información expuesta en la tabla con decidir a partir de dicha información. Algo similar puede ocurrir con el indicador I12 que aborda la comunicación de conclusiones. En I13 puede ocurrir que los maestros consideren la generalización como la reiteración del procedimiento para determinar las frecuencias, en lugar de su representación mediante el cálculo analítico.

Por otra parte, en I16 posiblemente gran parte de los participantes confundan la variedad de actividades en torno a la interpretación con el nivel de dificultad. Puede ocurrir algo similar en I17, pues el texto solo plantea la construcción de tablas de distribución de una variable con frecuencias absolutas. Finalmente, en I18, la mayor parte de los maestros pueden suponer que las actividades propuestas promueven algunas fases de un estudio estadístico, dado que implican la interpretación y construcción de tablas estadísticas.

Adicionalmente, a partir de la aplicación de la guía de análisis de la faceta cognitiva sobre el tema de tablas estadísticas, los maestros debían elaborar un juicio razonado de la lección planteada en el libro de texto. El análisis de contenido de las respuestas permitió identificar las carencias detectadas por los participantes y que podrían ser consideradas en la mejora de la lección, las cuales se resumen en la Tabla 2. Se puede observar que son pocas las carencias detectadas. La más frecuente, aunque por menos de la mitad de participantes, es que no se presentan actividades de construcción de tablas a partir de la información recolectada por los propios estudiantes, seguida de que los contextos no son cercanos para sus estudiantes.

Tabla 2. Frecuencia de carencias identificadas por los maestros en la lección según componentes de la idoneidad cognitiva (elaborada por los autores)

Componente	Comentario	Frecuencia
Conocimientos previos	No se presentan explícitamente conocimientos previos	2
Diferencias individuales	No se consideran actividades de ampliación.	2
	No se incluyen situaciones de construcción de tablas con datos recogidos por los propios estudiantes.	8
Aprendizaje	Los contextos no son cercanos a los estudiantes.	7
	Solo se explica de manera breve la construcción de tablas con frecuencias absolutas.	2
Evaluación	El número de actividades de evaluación no son suficientes	2
	No se incluyen diferentes tipos de evaluación	4
	No se consideran situaciones que promuevan su propio estudio o investigación	2

CONCLUSIONES

En este trabajo, que complementa la investigación de Castillo et al. (2022) sobre proporcionalidad con profesores de matemáticas de secundaria, se ha descrito la implementación de una acción formativa orientada a promover la competencia de análisis de la idoneidad cognitiva en maestros de primaria quienes se desempeñan en sectores rurales. Para ello, se utilizó una lección sobre gráficos y tablas estadísticas planteada en un libro de texto, y como herramienta metodológica la guía de análisis de idoneidad de libros de texto sobre tablas estadísticas propuesta por Pallauta y Batanero (2024).

Los resultados muestran, en general, que la mayor parte de los maestros asignaron altas valoraciones a cada uno de los indicadores propuestos. Aunque se aprecian algunas discordancias en la valoración cuantitativa respecto a las otorgadas por el equipo investigador, el análisis de contenido de los juicios emitidos por los maestros sobre la idoneidad cognitiva evidencia variadas carencias de la lección en los diferentes componentes. Por ejemplo, la ausencia de situaciones que promuevan la construcción de tablas a partir de datos recogidos por los propios estudiantes, o que los contextos en que se plantean las situaciones no son cercanos a sus estudiantes, quienes pertenecen a un entorno rural.

Se considera que la intervención implementada proporcionó a los maestros herramientas teóricas que facilitan el análisis sistemático de una lección propuesta en un libro de texto junto al desarrollo de la capacidad de identificar las limitaciones de dicha propuesta. De este modo, es posible implementar mejoras oportunas para su utilización en el proceso de instrucción.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MCIU/AEI/ 10.13039/501100011033 y FEDER, UE.

Referencias

Alvarado, L., Carrero, M. y Caroca, M. (2022). *Texto del estudiante Matemática 5º Básico*. Santillana.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II) A framework for statistics and data science education*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.

Braga, G. y Belver, J. L. (2015). El análisis de libros de texto: Una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, *27*(1), 199-218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Educación Matemática*, *34*(2), 39-71. https://doi.org/10.24844/EM3402.02

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124. https://doi.org/10.2307/749671

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(6), em2270. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Drisko, J. W. y Maschi, T. (2016). *Content analysis*. Oxford University Press.

National Center for Education Statistics. (2017). *Adult literacy and lifeskills survey.* Recuperado de https://nces.ed.gov/surveys/all/index.asp

Pallauta, J., Arteaga, P., Gea, M. y Begué, N. (2022). Understanding statistical tables: A survey of research. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 38*(2), 108-129.

Pallauta, J. y Batanero, C. (2024). Guía para el análisis de la idoneidad epistémica y cognitiva de lecciones sobre tablas estadísticas en libros de texto. *Bolema, 38,* e230088. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230088

Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2021). Complejidad semiótica de tablas estadísticas y su distribución en textos chilenos de educación básica. En P. Diago, D. Yáñez, M.T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 481-488). SEIEM.

Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM Mathematics Education, 53*, 1189–1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Rodríguez Muñiz, L. J. y Díaz, P. (2018). Las investigaciones sobre la estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. ¿Qué se ha hecho y qué se puede hacer? *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14,* 65–81. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.218

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL FORMADOR DE MAESTROS PARA LA ENSEÑANZA DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL ESTADÍSTICO

Teacher educator's mathematical knowledge for the teaching of statistical inferential reasoning

Pascual, M.I.[a], Rifo, L.[b], Castilla, L.[c] y Climent, N.[c]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidade Estadual de Campinas (Brasil), [c]Universidad de Huelva

Resumen

El razonamiento inferencial estadístico y la evaluación de la incertidumbre sobre distintos fenómenos se han revelado claves para la alfabetización matemática de los ciudadanos. Nuestra mirada se dirige a qué conocimiento matemático sobre razonamiento inferencial estadístico muestra un formador durante la implementación de una tarea formativa. A través de la videograbación de la clase y una entrevista, analizamos el conocimiento del formador sobre el tema obteniendo evidencias de su conocimiento de registros de representación de la información, el proceso de inferencia y cómo el registro y la calidad de la muestra inciden en el proceso de inferencia. El formador identifica, al realizar la tarea, tres modelos emergentes que relaciona con las formas de registro de la información, que pueden facilitar la comprensión del razonamiento inferencial.

Palabras clave*: conocimiento matemático, estudio de caso, formador de profesorado de matemáticas, formación inicial de maestros, razonamiento estadístico informal.*

Abstract

Inferential statistical reasoning and the evaluation of uncertainty regarding different phenomena have proven to be key elements in the mathematical literacy of citizens. We direct our gaze towards which mathematical knowledge of statistical inferential reasoning a teacher educator displays during the implementation of a training task. Through a videotape of the class and an interview, we obtain evidence of the teacher educator's knowledge of representation registers, the inference process, and how the register and the quality of the sample affect the inference process. The teacher educator identifies, while implementing the task, three emerging models related by him to the types of recording information, which can shed light on the understanding of inferential reasoning.

Keywords*: informal statistical reasoning, initial teacher training, teacher educators' mathematical knowledge, case study.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de la estadística y la probabilidad forma parte de los currículos de Educación Primaria desde hace más de dos décadas. En particular, en relación con el razonamiento inferencial estadístico, la investigación ha mostrado que una perspectiva informal, en la que se aborden conceptos como centralidad y variación, muestras y muestreo (de Vetten et al., 2019), es accesible a los estudiantes de Primaria (Makar y Rubin, 2018).

La complejidad del razonamiento inferencial ha llevado a preguntarse por la formación de futuros profesores, profesores y formadores (de Vetten et al., 2019; Giaconi et al., 2022; Groth, 2017). En este trabajo nos centraremos en el conocimiento del formador de profesores. En particular, dadas las dificultades de los futuros maestros con el conocimiento probabilístico (Castilla et al., 2022) y el variado perfil de los formadores de maestros (Giadas et al., 2022) (lo que hace que su formación sobre

Pascual, I., Rifo, L., Castilla, L. y Climent, N. (2024). Conocimiento matemático del formador para la enseñanza del razonamiento inferencial estadístico en formación inicial de maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 401-408). SEIEM.

inferencia estadística sea diversa), nos preguntamos sobre su conocimiento matemático. La investigación ha mostrado el carácter integrado de este conocimiento matemático y su estrecha relación con su conocimiento didáctico del contenido (Escudero-Ávila et al., 2021). Si bien hay algunas investigaciones previas sobre conocimiento de formadores, no hemos encontrado ninguna específica acerca del conocimiento de formadores sobre inferencia estadística.

El objetivo de este estudio es describir el conocimiento matemático sobre razonamiento inferencial que muestra un formador en la implementación del experimento de Bayes.

MARCO CONCEPTUAL

La inferencia estadística permite modelizar como aprendemos de la experiencia. En este contexto, la probabilidad se presenta con dos sentidos: el grado de certidumbre respecto a la ocurrencia de un suceso (probabilidad del suceso) y el grado de seguridad en una afirmación sobre la probabilidad del suceso (Bayes, 1763). Aun conociendo la probabilidad de un suceso, cabe incertidumbre sobre su ocurrencia cuando realizamos un experimento, reflejada en las fluctuaciones esperadas entre los posibles resultados y sus frecuencias observadas. Con el segundo sentido, Bayes (1763) responde al problema inverso: sin conocerla a priori, qué afirmaciones podemos hacer sobre la probabilidad de un suceso a partir de una muestra obtenida al realizar un experimento, y con qué grado de certidumbre.

La enseñanza del razonamiento inferencial pasa por entender y operar los conceptos de modelo probabilístico, muestreo, fluctuaciones y representaciones de una muestra, e incertidumbre sobre una probabilidad desconocida (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2024; de Vetten et al., 2019; Makar y Rubin, 2018). Böcherer-Linder et al. (2017) estudian como la visualización del modelo probabilístico puede ser un facilitador para entender el razonamiento bayesiano.

Hay algunos estudios sobre el conocimiento del contenido matemático de profesores o futuros profesores en relación con la inferencia (e.g. Vetten et al., 2019), así como su conocimiento didáctico del contenido (e.g. López-Martín et al., 2019). Sin embargo, hemos encontrado escasos estudios que aborden el conocimiento sobre inferencia del formador de profesores. Una excepción es el de Giaconi et al. (2022), quienes analizan la práctica de una formadora cuando enseña inferencia estadística. En este estudio, a pesar de no centrarse en su conocimiento, la formadora identificaba su necesidad de conocer en más profundidad algunos contenidos para poder usarlos mejor en la formación docente.

Diversas aproximaciones al estudio del conocimiento del formador parten de modelos de conocimiento del profesor (Castro-Superfine et al., 2020; Zaslavsky y Leikin, 2004). No obstante, el conocimiento del formador se caracteriza por su fundamentación epistemológica, su fluidez y las conexiones entre contenidos (Escudero-Ávila et al., 2021; Zopf, 2010).

En este trabajo nos centraremos en analizar el conocimiento matemático del formador en una sesión sobre razonamiento inferencial estadístico informal. Para abordar dicho conocimiento nos serviremos de la estructuración del modelo Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK, Carrillo et al., 2018). Estudios anteriores han contribuido a validar el uso del modelo MTSK como detonante de un modelo de conocimiento del formador (Pascual, 2021; Pascual et al., 2019; Martignone et al., 2022). En particular, en relación con el conocimiento matemático, estos modelos se han servido de la categorización del MTSK para modelizar dicho conocimiento (Giadas et al., 2023). En el dominio del conocimiento matemático del modelo MTSK se diferencian tres subdominios: conocimiento de los temas matemáticos (KoT), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM), o conocimiento de conexiones entre distintos temas matemáticos, y el conocimiento de la práctica matemática (KPM), o conocimiento sintáctico sobre cómo hacer matemáticas. Dado que en el análisis de esta sesión solo hemos encontrado evidencias de KoT, describimos las categorías de este subdominio. En el conocimiento de los temas (KoT) en el modelo MTSK se diferencia conocimiento sobre: definiciones, propiedades y sus fundamentos, referido al conocimiento sobre conceptos y fundamentación conceptual; registros de representación, como distintos modos de expresión de ideas

sobre un tema matemático; fenomenología y aplicaciones, o conocimiento sobre situaciones que permiten ser modelizadas con el tema y en las que puede aplicarse; y procedimientos propios del tema, tanto convencionales como alternativos, incluyendo cómo se hace, cuándo, por qué y cómo son los resultados del proceso. Situándonos en el conocimiento del formador, partimos de que estos conocimientos pueden presentarse de una forma compartida o no con el de un profesor de matemáticas y que será el análisis cualitativo, en términos de profundidad y alcance, el que nos permitirá caracterizar el conocimiento del formador del estudio.

MARCO METODOLÓGICO

Para dar respuesta al objetivo de investigación analizamos, bajo la perspectiva de un estudio de caso instrumental (Stake, 1995), el conocimiento de un formador de maestros cuando implementa una tarea formativa sobre razonamiento inferencial estadístico informal.

Esta tarea ha sido diseñada por los investigadores, para la formación inicial de maestros de Primaria, y pretende que los futuros profesores construyan conocimiento matemático: representación y análisis de una muestra, descripción del proceso de razonamiento o argumentación inferencial y grado de incertidumbre de dicha inferencia (de Vetten et al., 2019). Al mismo tiempo, persigue que amplíen su conocimiento sobre situaciones ligadas a la probabilidad, incluyendo situaciones de predicción.

La tarea se basa en el experimento ideado por Bayes: una persona, de espaldas a una mesa, lanza sobre ella una bola roja y debe, sin mirar la mesa, decir en qué lugar de la mesa cree que cayó. Para ello, lanza una cierta cantidad de bolas negras, obteniendo información sobre sus posiciones en la mesa con referencia a la primera bola (a su izquierda o a su derecha, arriba o abajo de ella). Con base a la información obtenida de la situación de las bolas negras respecto a la roja (muestra), la persona debe inferir en qué lugar de la mesa cayó la primera bola.

En la primera actividad de la tarea de nuestro estudio, los futuros maestros asumen roles de tirador y observador, y replican en grupos el experimento de Bayes, con pequeños sacos en lugar de bolas (Climent et al., 2023). Se han usado sacos, cuadrados de 3cm de lado llenos de arena, para que no se asocie el experimento con uno típico de urnas y bolas.

El tirador, de espaldas a una mesa, lanza un primer saco del que tiene que predecir su situación en ella. Posteriormente, sin mirar dónde cayó el primero, lanza otros cinco sacos y el observador le da la información de dónde han caído respecto del primero (arriba/abajo y derecha/izquierda). Finalmente, el lanzador tiene que realizar la predicción de la situación del primer saco a partir de la información recibida de la situación de los cinco siguientes. (Por ejemplo, si los cinco sacos han caído a la derecha del primero podría significar que este estaba muy a la izquierda de la mesa)

Una vez realizado el experimento, los grupos de futuros maestros deben reflexionar sobre su registro de la información durante el experimento, la calidad de sus predicciones, las matemáticas que han puesto en juego en la actividad y si han usado probabilidad. Además, deben discutir la posibilidad de aplicar esta actividad en Educación Primaria.

En la segunda actividad de la tarea, se proporciona a todos los grupos de futuros maestros unos resultados hipotéticos de la realización del experimento (Figura 1) y se les pide una predicción en base a ellos. A partir de esto, se pretende institucionalizar el contenido de la sesión.

Esta tarea fue implementada en un grupo de 65 estudiantes para maestro (EPM) en el transcurso de una materia que aborda enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad, entre otros contenidos, pertenecientes al tercer curso del Grado en Educación Primaria

Figura 1. Actividad 2 de la tarea. "Consensuamos una predicción"

Supongamos que, al realizar los cinco lanzamientos para obtener información, los sacos quedaron dos veces a la izquierda/arriba respecto del primero, dos veces a la izquierda/abajo del primero y una, a la derecha/debajo de donde estaba el saco inicial, lo que podemos representar como en la tabla, a continuación. Discutid en pequeño grupo cuál sería vuestra predicción sobre la posición del saco inicial.

izquierda/arriba	izquierda/abajo	derecha/arriba	derecha/abajo
2	2	0	1

El formador (al que llamaremos José), cuyo conocimiento evidenciado en la implementación de la tarea hemos analizado (al que llamaremos José), tiene 8 años de experiencia en la formación inicial de maestros de Primaria y experiencia también en formación continua. José es graduado en Educación Primaria, tiene formación de máster y es doctor, ambas cosas en Didáctica de la Matemática. Formó parte, junto con los autores, de dos proyectos de innovación sobre enseñanza de la probabilidad subjetiva. Ha impartido esta materia durante 5 años, si bien este es el primer año que implementa esta tarea.

Previo a su implementación, el formador dispuso de una guía detallada de la actividad, elaborada por los investigadores, que reflejaba sus objetivos, algunas sugerencias para su implementación y las fichas para el alumnado. La implementación de la sesión fue video-grabada con una cámara en el fondo del aula, previo consentimiento de los futuros maestros. Además, tras un primer análisis de los datos, se realizó una entrevista semi-estructurada para aclarar y profundizar en algunas cuestiones. Junto con la transcripción de la observación de la implementación de la tarea y de la entrevista posterior, contamos con un diario libre que José completó tras su implementación de la tarea.

Utilizamos el análisis temático (Braun y Clarke, 2006) para identificar el conocimiento del formador sobre razonamiento inferencial estadístico. Se trata de un análisis de tipo inductivo, que genera las categorías de análisis a partir de los datos. El análisis se realiza en tres fases: 1) un primer análisis en el que partimos de las categorías de los subdominios KoT, KPM y KSM del modelo MTSK, con la sensibilidad teórica (Glaser, 1978) de nuestras lecturas sobre razonamiento inferencial y el conocimiento de profesores sobre éste; este análisis produce unidades de información donde hay evidencias de conocimiento matemático y términos que describen el conocimiento evidenciado en estas unidades (por ejemplo, "noción de probabilidad geométrica", "modelo probabilístico", o "modelo de urna"); 2) Revisamos los términos identificados y buscamos relaciones entre ellos, generando indicadores del conocimiento del profesor atendiendo a las categorías del MTSK (Tabla 1) (por ejemplo, los términos referidos en el paso 1 se aglutinan en el tercer indicador de la Tabla 1); 3) Analizamos de nuevo los datos con los indicadores de la Tabla 1, obteniendo cómo se observan estos indicadores en este formador, que da lugar a los resultados que presentaremos en la sección siguiente.

Tabla 1. Indicadores del conocimiento de los temas (KoT) sobre razonamiento inferencial estadístico

Categorías del KoT	Indicadores referidos a razonamiento inferencial estadístico
Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Aportaciones de algunas características de la muestra, como la calidad de la información, al proceso de inferencia.
Registros de representación	Diferentes modos de registro de los resultados de la realización de un experimento y potencialidad para la inferencia.
Fenomenología y aplicaciones	Modelos probabilísticos relacionando la información desconocida (en el experimento, la posición del primer saco) y valores hipotéticos con posibles muestras (considerando fluctuaciones esperadas).
Procedimientos	Proceso de inferencia a partir de una muestra.

Todos los análisis fueron desarrollados de forma individual por cada autor en un primer momento y después consensuados por los cuatro, en un proceso de triangulación de expertos y de instrumentos (la grabación de la implementación, su diario y la entrevista).

RESULTADOS

Tras el análisis de las transcripciones, hemos encontrado evidencias de conocimiento del formador sobre la representación gráfica de la información recibida para la inferencia (indicador de la Tabla 1 relativo a la categoría *Registros de representación*). Durante la puesta en común de los resultados, el formador reflexiona sobre el uso por parte de los futuros profesores de una división de cuadrantes que emula el plano cartesiano, para traducir la información verbal que recibe el tirador y sobre cómo esa traducción le sirve para matematizar la información recibida (Unidad 1).

Formador: Este grupo ha utilizado, no solamente un registro escrito de la información, sino que ha hecho o ha dividido la mesa en cuadrantes. […] Y teniendo en cuenta esto, voy registrando la información utilizando una representación, que me puede dar más o menos información sobre dónde está mi bola [saco inicial[7]], ¿vale? Parece que esta representación aporta, como dice María, algo más. Algo más de precisión a la hora de decir dónde está la bola […] Con lo cual es una manera de registrar la información distinta a hacerla escrita. (Unidad 1)

En otro momento, el formador acepta la aportación de un estudiante para maestro de cómo registrar la muestra para mejorar su calidad (Unidad 2), mostrando conocimiento sobre registros y sus efectos en el proceso de inferencia.

Formador: Si ponéis una mesa cuadriculada, la calidad de la información es mucho mejor, porque tenéis mucha más precisión, tenéis más puntos de referencia que os pueden servir para determinar dónde está la bola [saco inicial]. (Unidad 2)

En la entrevista posterior, hemos podido corroborar que el conocimiento que tiene José sobre cómo afecta la representación de la información en la calidad de la predicción, se justifica y se conecta con el uso de distintos modelos probabilísticos. Su aportación en este momento se ha revelado útil en la fundamentación de los modelos probabilísticos que los EPM desarrollaban durante la sesión.

Se ha evidenciado conocimiento del formador sobre modelizaciones del experimento inferencial (indicador de la Tabla 1 relativo a la categoría *Fenomenología*). En la Unidad 3 el formador conduce la discusión para llegar a la noción de probabilidad geométrica, haciendo uso del ejemplo de un posible caso: "si la primera bola hubiera caído aquí, ¿qué se espera de la ubicación de los demás lanzamientos?". Este tipo de razonamiento está en la base de la inferencia estadística: relacionar inicialmente estados posibles de una característica desconocida con resultados de un muestreo, para después, inversamente, con los resultados de un muestreo, hacer inferencias sobre el estado real de dicha característica. Esta unidad muestra, además, su conocimiento del proceso de inferencia (indicador de la Tabla 1 relativo a la categoría *Procedimientos*).

Formador: La mayoría han estado en ese cuadrante. ¿Por qué sucede eso? O sea, ¿por qué la mayoría de lanzamientos de bolas negras han estado en este cuadrante? (Unidad 3)

En su conjunto el formador identifica tres modelos: de área (Unidades 3 y 4), de proporción y de probabilidad (ambos en la Unidad 5). Este conocimiento evidencia cómo se puede usar la información para realizar la predicción. El formador relaciona estos modelos con distintos bloques de contenidos.

Formador: Si tu bola [saco inicial] ha caído aquí, en términos de área es más probable que caiga donde no ha caído esta. Entonces, seguramente, la información que te dé el observador esté más relacionada con "está a la derecha" y, si ahora subdividimos otra vez el espacio, podemos pensar que es más probable que caiga por este

7 Aunque el experimento se realiza con sacos, el formador durante la discusión hace alusión a bolas (una roja, la inicial, y negras, las cinco restantes)

lado y en tu caso ha sucedido eso […] que en la esquina superior derecha han estado la mayoría de las bolas negras [sacos posteriores]. (Unidad 4)

Formador: Ese, digamos, razonamiento se basa quizá en el conteo que se hace de las tiradas y en cómo la frecuencia de abajo-arriba, etcétera, sitúa mi primera bola [saco], ¿vale?, que es con respecto a la que tengo que dar la información, porque, por ejemplo, si... Si hay un momento donde yo digo… que aquí hay cero, a la izquierda y a la derecha hay 5, ¿dónde situaríais la bola [saco]?

EPM: A la izquierda.

Formador: A la izquierda, ¿no?, o sea, porque todas las bolas negras [cinco sacos posteriores] han caído por aquí, con lo cual, parece que lo más probable es que la roja [saco inicial] esté por aquí, ¿vale? […] La tabla te lo dice. Pero la interpretación que uno tiene que hacer de la información, puede ir por ahí, ¿vale? Y fijaos que estamos haciendo dos interpretaciones diferentes […] y ahí es donde viene quizás la tercera aproximación que tendrá una aproximación de probabilidad. Y es que yo haga una especie de urna ficticia, ¿vale? donde vaya metiendo bolas. Bolas en función a qué es lo más probable que salga. (Unidad 5)

En la Unidad 5 observamos asimismo como el formador propone un caso extremo (que no haya ningún saco a la izquierda) con una intención didáctica, eliminando los distractores que equilibran las probabilidades en la predicción, de forma que los EPM puedan ganar seguridad en la predicción. El formador realiza la inferencia suponiendo esta muestra, lo que evidencia conocimiento en relación con dicho proceso (indicador de la Tabla 1 relativo a la categoría *Procedimientos*).

José introduce cuestiones relacionadas con el análisis de la calidad de la información recibida y su influencia en el proceso de inferencia:

Formador: Entonces. ¿Cómo os ha dado la información el observador? ¿Habéis sentido que la calidad de la información ha sido buena? ¿Ha sido mala? [*La estudiante para maestro alude a que le aportaban información en palmos*]. Exactamente, esa información también está en lo que te está diciendo el observador, o sea, no solamente que la bola negra [sacos posteriores] con respecto a la roja [saco inicial] está a un palmo, sino que mínimo, con respecto al límite de la mesa, también está a un palmo. A eso me refiero con la calidad de la información total del observador, porque eso también puede ser útil. (Unidad 6)

De este modo, José introduce la reflexión sobre la valoración del muestreo en el razonamiento inferencial. El formador, plantea cómo la muestra aporta una información diferente a "izquierda o derecha" y cómo el peso de las informaciones recibidas puede ser diferente en el procedimiento de inferencia. Esta evidencia de conocimiento se refuerza con otras intervenciones (Unidad 7):

Formador: Y ¿todos los lanzamientos os han aportado la misma información o ha habido lanzamientos que no os han aportado nada? (Unidad7)

Esta pregunta del formador obliga a los EPM a ser críticos con la información recogida y su utilidad, mostrando conocer que el peso de las informaciones disponibles puede ser diferente. Hemos asociado este conocimiento al indicador relativo a la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos*, en su intento de fundamentar el proceso de matematización de los resultados en la inferencia.

CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos, podemos extraer conclusiones sobre el conocimiento del formador referido a su conocimiento del tema (KoT), en relación con los indicadores descritos en la Tabla 1.

Su conocimiento de registros de representación, permite al formador comparar y validar las representaciones que usan los EPM y condiciona el punto de partida para matematizar la inferencia. En lo relativo al conocimiento del formador sobre modelos probabilísticos (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2024), hemos encontrado que, a pesar de las tensiones referidas en Giaconi *et al.* (2022), el formador relaciona cada modelo y su repercusión en la comprensión del razonamiento inferencial, lo que supone conocimiento matemático útil en sesiones en las que se construye dicho razonamiento. Finalmente, destacamos el proceso de evaluación de la información que aporta la muestra, como parte del conocimiento necesario para la construcción de la inferencia (de Vetten et al., 2019) presente en

la sesión. De este modo, el formador muestra en sus intervenciones conocimiento sobre algunos elementos clave para la enseñanza del razonamiento inferencial (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2024; de Vetten et al., 2019; Makar y Rubin, 2018). En particular, destacamos su conocimiento de diferentes modelos probabilísticos que permiten interpretar el experimento, lo que puede ser la base para facilitar la comprensión del razonamiento bayesiano (Böcherer-Linder et al., 2017). En particular, el modelo de área destaca la visualización de la información como ayuda en el razonamiento inferencial (Böcherer-Linder et al., 2017), el de urnas puede permitir relacionar este experimento con otros más conocidos por los estudiantes para profesor relacionados con probabilidad (Castilla et al., 2022). Cabe plantearse si cómo conecta el formador estos modelos puede ser un elemento diferenciador del conocimiento del formador, como apuntan estudios previos (e.g. Zopf, 2010).

De esta síntesis se desprende la utilidad del modelo MTSK y su adaptación para estructurar el conocimiento del formador de maestros, como herramienta de análisis. En este caso nos hemos fijado en elementos de su conocimiento del tema. La restricción de evidencias de conocimiento matemático del formador a este subdominio podría explicarse por la complejidad epistemológica de este contenido y la escasa atención que recibe en la formación de maestros. Esta es una cuestión sobre la que sería interesante seguir indagando en otros formadores, con igual y diferente perfil. También sería de interés estudiar en qué sentido, como se señala en otras investigaciones (Escudero-Ávila et al., 2021; Zopf, 2010), el conocimiento matemático que evidencia el formador puede diferenciarse del de un profesor implementando esta actividad adaptada al nivel correspondiente.

Los elementos de conocimiento del formador evidenciados podrían ser el punto de partida de la reflexión para propuestas de desarrollo profesional de formadores, en complementariedad con Giaconi et al. (2022), en la enseñanza del razonamiento inferencial estadístico.

El estudio del conocimiento matemático del formador, como agente de cambio en la educación matemática, requiere reflexión y profundización y debe complementarse con el análisis de su conocimiento didáctico del contenido para comprender el proceso de formación de maestros.

Agradecimientos

Esta publicación es parte de los proyectos I+D+i PID2021-122180OB-100, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y ProyExcel_00297 de la Junta de Andalucía, y ha sido apoyada por el grupo DESYM y el centro COIDESO, de la Universidad de Huelva. Laura Rifo agradece el apoyo del Programa CAPES/PrInt, Proyecto nº 88881.311131/2018-00.

Referencias

Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2024) Teaching and learning of probability. *ZDM – Mathematics Education*, *56*, 5–17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Bayes, T. (1763). LII. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. By the late Rev. Mr. Bayes, FRS communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, AMFRS. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, *53*, 370–418.

Böcherer-Linder, K., Eischler, A. y Vogel, M. (2017). The impact of visualization on flexible Bayesian reasoning. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 25–46. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.169

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castilla, L., Climent, N., Hubeňáková, V., Rifo, L. y Semanišinová, I. (2022). Preservice teachers' knowledge for teaching uncertainty: cases from Slovakia and Spain. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), (2022). *Proceedings of the 12th CERME* (pp. 3511–3518). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Castro-Superfine, A., Prasad, P., Welder, R., Olanoff, D. y Eubanks-Turner, C. (2020). Exploring Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: Supporting Prospective Elementary Teachers' Relearning of Mathematics. *The Mathematics Enthusiast*, *17*, 367–402.

Climent, N., Rifo, L., Castilla Mora, L. y Pascual, M. I. (2023). Construcción de razonamiento probabilístico a través de la predicción. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, *100*, 37–45.

de Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R. y van Oers, B. (2019). Pre-service primary school teachers' knowledge of informal statistical inference. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*, 639–661. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9403-9

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L.C. (2021) What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators* (pp. 23–40). Springer.

Giaconi, V., Montenegro, H., Rojas, F., Catalán, M. y Guíñez, F. (2022). Tensiones al enseñar inferencia estadística en la formación inicial docente. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(3), 71–86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5595

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz. L. J. (2023). ¿Qué características debe tener un formador de profesorado de matemáticas? La perspectiva de maestros de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 275–282). SEIEM

Glaser, B. G. (1978). *Theoretical Sensitivity: Advances in the methodology of grounded theory*. Sociology Press.

Groth, R.E. (2017). Developing statistical knowledge for teaching during design-based research. *Statistics Education Research Journal, 16*(2), 376-396.

López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*, 672-693. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a11

Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. In D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261–294). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8

Martignone, F., Ferretti, F. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). What aspects can characterize the specialized knowledge of a mathematics teacher educator? *Educación Matemática*, *34*(3), 301–328. https://doi.org/10.24844/EM3403.11

Pascual, M. I. (2021). *El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso* (Tesis de doctorado). Universidad de Huelva. https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/20208

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473–482). SEIEM.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.

Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education 7*, 5–32.

Zopf, D. A. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education* (Tesis de doctorado no publicada). University of Michigan.

PERSPECTIVAS DE DOS FORMADORES SOBRE LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Perspectives on the initial training of Primary Education teachers

Pascual, Mª. I.[a], Codes, M.[b], Martín-Díaz, J. P.[b] y Contreras, L. C.[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Huelva

Resumen

La formación inicial de maestros de Educación Primaria se reconoce heterogénea en su contenido como consecuencia de los distintos contextos donde se desarrolla y también como consecuencia de la influencia de los distintos perfiles profesionales involucrados. Nuestro objetivo en este trabajo es comprender cómo la coexistencia de distintos perfiles de formador, considerando su propia formación inicial y su experiencia profesional, puede relacionarse con visiones diferentes sobre la formación inicial de maestros. Para ello, hemos entrevistado a dos formadores de maestros que pertenecen a un mismo grupo de investigación y que desarrollan tareas de formación en distintos grupos. Los resultados arrojan luz sobre matices en sus perspectivas sobre el contenido de la formación inicial, la transferencia de resultados de investigación y el conocimiento del formador.

Palabras clave: *formador de maestros, contenido de la formación, perfil profesional, perspectivas.*

Abstract

The initial training of Primary Education teachers is recognized as heterogeneous in its contents as a consequence of the different contexts where it is developed and also as a consequence of the influence of the different professional profiles involved. Our aim in this work is to understand how the coexistence of different profiles of mathematics teacher educators, considering their own initial training and professional experience, can be related to different views on initial teacher training. To do this, we have interviewed two mathematics teacher educators who belong to the same research group and who carry out training tasks in parallel groups. The results shed light on nuances in their perspectives on the content of initial training, the transfer of research results and the knowledge of trainers.

Keywords*: mathematics teacher educators, initial training content, professional profile, perspectives.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, y sobre la base de la abundante investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, se ha comenzado a prestar atención a las personas responsables de la formación de profesores (Beswick y Goos, 2018; Goos y Beswick, 2021). Desde la investigación en educación matemática preocupa caracterizar el perfil de los profesionales que, desde los centros de formación inicial de profesores, se ocupan de la formación didáctico-matemática de los futuros profesores (Masingila y Olanoff, 2022).

Nuestra investigación en este ámbito ha abordado el conocimiento de estos profesionales (Escudero-Ávila et al., 2021; Pascual et al., 2019), sus creencias acerca del contenido de la formación (Montes y Contreras, 2019), el propio contenido de la formación (Pascual et al., 2021) o las perspectivas con las que se aborda esa formación (Reyes-Bravo et al., 2023). En el marco del proyecto de investigación que estamos desarrollando, pretendemos avanzar en la caracterización de los perfiles de estos

Pascual, M. I., Codes, M., Martín-Díaz, J. P. y Contreras, L. C. (2024). Perspectivas de dos formadores sobre la formación inicial de maestros de Educación Primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 409-416). SEIEM.

formadores y su influencia en el desarrollo de la formación (Rojas y Pascual, 2023). En la determinación de estos perfiles, hemos estado considerando la formación inicial, la formación en posgrado y doctorado y la experiencia profesional en los distintos niveles educativos, como elementos clave de los mismos y, cuando hemos explorado posibles relaciones entre estos perfiles y las prácticas profesionales, hemos encontrado que el análisis de la "doble mirada" es una vía para comprender y caracterizar el conocimiento de los formadores (Reyes-Bravo et al., 2023). Esta idea de "doble mirada" se apoya en la diferenciación que establecen Zaslavsky y Leikin (2004) entre la labor de enseñar matemáticas o didáctica de la matemática y la de enseñar a enseñar matemáticas, entendiendo que la primera toma al futuro profesor como un agente que requiere una formación matemática avanzada junto con conocimientos de la didáctica de la matemática y la segunda como un agente que requiere una visión de la gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. En esta comunicación exploramos la relación entre la visión de dos formadores relativa a la formación que imparten y su perfil profesional.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Se ha utilizado una variedad de términos para denominar a los formadores de profesores que enseñarán matemáticas, siendo el más frecuentemente utilizado el de "formador de profesores de matemáticas" (MTE, por sus siglas en inglés), acuñado por Jaworski (2008). Este concepto abarca a aquellos profesionales responsables de la formación en educación matemática, tanto en el nivel de grado como en el posgrado (Lanier y Little, 1986), de futuros profesores y de aquellos que se encuentran en servicio activo. En adelante, nos referiremos al formador de profesores como MTE utilizando estas siglas.

Ante la variedad de perfiles de formación y de tareas profesionales que se asocian a los MTE en el contexto internacional, se ha comenzado a discutir acerca de su conocimiento. Del mismo modo que las matemáticas forman parte indispensable del elenco de conocimientos del profesor de matemáticas, uno de los elementos básicos del conocimiento del MTE ha de ser el conocimiento que pretende construir en el profesor. Por ello, algunos trabajos que han tratado de profundizar en el conocimiento del MTE han tomado como punto de partida algunos de los modelos de conocimiento del profesor, desde una perspectiva de metaconocimiento (Beswick y Chapman, 2012; Zopf, 2010).

Los avances para la determinación de este conocimiento han sido tanto teóricos (Even et al., 2020; Escudero-Ávila et al., 2021) como empíricos, aportando características de ese conocimiento, a veces sobre la base del propio contenido de la formación (Pascual et al., 2021), sobre el uso que los formadores hacen de la investigación en educación matemática (Ferretti et al., 2021) o sobre características de los procesos formativos (Masingila y Olanoff, 2022). También se ha tratado de caracterizar este conocimiento a través de su diferenciación con el conocimiento del profesor.

Una aportación orientada a esta diferenciación es el trabajo de Zaslavsky y Leikin (2004) que centra la atención en las distintas formas que un mismo conocimiento puede adoptar en el pensamiento del profesor y del MTE, más centrada en el contenido en el primer caso y más centrada en el aprendiz en el segundo; a ese foco se le ha denominado "la mirada" (Reyes-Bravo et al., 2023). Mientras la mirada del profesor se centra en el estudiante, la del MTE puede centrarse en el estudiante o en el futuro profesor. Por ello, cuando se habla de "doble mirada" se piensa en el sujeto al que va dirigido el proceso de enseñanza y en el contenido que desarrolla (escolar o de formación de profesorado). Estos episodios de doble mirada se han mostrado útiles para explorar el conocimiento especializado del MTE (Reyes-Bravo et al., 2023).

Con respecto al uso que los formadores hacen de los resultados de investigación en Educación Matemática, Ferretti et al. (2021), señalan que los roles como investigador y como formadores en los MTE se relacionan de forma que los avances de investigación constituyen una herramienta de formación. Reconocer esta relación permite establecer no sólo el origen de un conocimiento distintivo del MTE, sino que, además, posibilita que los futuros profesores puedan llevar a la práctica de aula

su propia interpretación de diferentes teorías de Educación Matemática (Jaworski, 2001). Consideraremos las perspectivas de los formadores sobre cómo se intersecan la teoría en Educación Matemática y la práctica de aula entendiendo que su posicionamiento al respecto distingue diferentes aproximaciones a la formación inicial.

Finalmente, otro de los grandes ejes en torno a los que gira nuestro análisis es la visión de los formadores sobre cómo se estructura el contenido de la formación. Más allá de heterogeneidad de la estructuración curricular de los distintos Grados en Educación Primaria (Sánchez y García, 2008), consideramos que los distintos posicionamientos de los MTE sobre qué es importante que aprendan los estudiantes para maestro (EPM) supone un elemento más de diferenciación entre perfiles. Nuestro análisis de los distintos elementos que estructuran la formación inicial docente se sustenta en la propuesta de Ponte (2012), y que han sido desarrollados desde el punto de vista de conocimiento del formador en Pascual et al. (2019), que incluye: conocimiento profesional, habilidades profesionales e identidad profesional. Tomaremos estos tres pilares para comprender cuál es la importancia que cada formador otorga a cada uno, en sentido de priorización o relevancia sobre los otros.

En este estudio exploramos dos perfiles de MTE analizando sus miradas, su visión del contenido de la formación, el papel que otorgan a la investigación en educación matemática como parte de ese contenido y la gestión del proceso formativo. Todo ello nos permitirá responder a la siguiente preguntade investigación: ¿cómo se caracterizan las perspectivas de formación de dos formadores con distinto perfil profesional? Para responder a esta pregunta, nuestro objetivo es explorar las perspectivas de dos formadores en relación con su propia autopercepción, sobre el contenido de la formación inicial, sobre su conocimiento como formadores y sobre el uso que hacen de los resultados de la investigación.

METODOLOGÍA

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, hemos diseñado un estudio exploratorio de corte interpretativo en el que nos hemos servido de la entrevista semiestructurada (Flick, 2007) para acceder a los distintos posicionamientos de dos formadores de maestro de diferente perfil.

La entrevista se diseñó incluyendo preguntas relacionadas con la percepción de los formadores a partir de la participación en un proyecto de investigación sobre diseño de tareas para la formación inicial de maestros de Primaria. En relación con esta cuestión principal, se formularon preguntas acerca de su perspectiva como formadores sobre su conocimiento, su aprendizaje, su valoración sobre la tarea que diseñaron e implementaron, sobre el contenido de la formación inicial y sobre el papel que juega la investigación en educación matemática en su práctica profesional.

Los datos que analizamos son las transcripciones de dichas entrevistas y el análisis de la información se alinea con los fundamentos de análisis temático (Braun y Clarke, 2006) donde extraemos el significado de sus aportaciones, que son abiertas en cada caso, agrupándolas por temáticas que permitan relacionar las perspectivas de los formadores. Estas aportaciones se categorizaron como indicio o de evidencia (Escudero-Ávila et al., 2015), y, mediante la validación entre expertos (Bryman, 2001) concluimos sobre su posicionamiento ante las preguntas realizadas.

Los formadores que participaron en esta investigación tienen perfiles diferenciados por su formación de base y su experiencia como formadores. Marta es Licenciada en Matemáticas y Doctora en Didáctica de las Matemáticas, con foco en el aprendizaje de estudiantes de secundaria y universidad. En su experiencia profesional, de 27 años, se distinguen dos etapas, una mayoritaria como formadora disciplinar en titulaciones ligadas a la rama de Ingeniería y otra, más reciente, como formadora de maestros, tanto de Educación Primaria como de Educación Infantil y de profesorado de Educación Secundaria. José, con 8 años de experiencia profesional, es Graduado en Educación Primaria, tiene un Máster en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y es Doctor en Didáctica de las Matemáticas, con foco en el conocimiento y el desarrollo profesional del profesor. Ambos han

trabajado en equipos de investigación colaborativa con profesores en activo de diferentes niveles educativos y en formación inicial de maestros de Educación Primaria.

Ambos formadores pertenecen al mismo grupo de investigación y han participado en el proyecto diseñando e implementando tareas de formación inicial construidas de forma colaborativa.

En esta investigación, la tarea detonante de la entrevista es una tarea de formación inicial sobre el uso de viñetas para la construcción de la definición de polígono. En ella, las viñetas reproducen cómo un maestro aborda la construcción del concepto de polígono en 5º de Primaria, al hilo de las cuales se formulan preguntas a los futuros maestros. Esta tarea se ha discutido y reformulado en varios ciclos de implementación en los últimos cuatro cursos académicos y ambos formadores han participado en este proceso.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Organizaremos los resultados considerando la perspectiva de ambos formadores respecto al contenido de la formación inicial, respecto al conocimiento didáctico del contenido de la formación inicial del formador, respecto al uso de los resultados de investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas y respecto a la autopercepción como formadores de ambos participantes.

Sobre el contenido de la formación inicial

Los formadores, preguntados sobre el contenido de la tarea, manifiestan perspectivas diferentes en relación con qué debe aprender un EPM en formación inicial. En el caso de José, predomina un objetivo profesionalizante en la formación inicial. Sus respuestas evidencian la intención de formar maestros que tengan habilidades de enseñanza y, a la vez, que robustezcan su conocimiento matemático elemental:

> José: Yo creo que el incluir ese apartado didáctico, el tener en cuenta que tenemos que formar maestros para que ellos enseñen… eso creo que es lo que tenemos que hacer. Yo pienso que es el camino.
>
> […]
>
> Yo creo que se profundiza con sentido. Quizás incidir en aspectos que sean relevantes para después trabajar con niños, en eso tiene sentido profundizar […] estamos atendiendo quizás a los conceptos que son útiles conocer en Educación Primaria, para implementar en Educación Primaria y sobre eso sí que hay que profundizar.

Desde la perspectiva de Marta, parece que la profesionalización de los EPM tiene una mayor dependencia de la profundización en el conocimiento matemático, que no liga con el conocimiento didáctico de las matemáticas, con afirmaciones como:

> Marta: Digamos que, solamente saber que las imágenes prototípicas son un factor para que ocurran errores… Así, de manera aislada, a mí no me dice nada. Con el conocimiento matemático, tú completas el por qué eso es así.

> Marta: Porque yo creo que eso [*centrar la formación en el desarrollo de conocimiento didáctico de las matemáticas*] promueve o incentiva, que los futuros maestros que están saliendo de nuestras aulas sigan sin saber matemáticas. Y si siguen sin saber matemáticas, por mucha didáctica que hayan aprendido, no van a saber enseñar matemáticas.

Si bien en el análisis de las dos entrevistas se mencionan distintos elementos de conocimiento relacionados con el contenido de la formación inicial, encontramos que ambos formadores enfatizan en distintos momentos sobre ideas que aportan matices a qué entienden que debe trabajarse en dicha formación.

Sobre el conocimiento del formador

Cuando la reflexión se dirige hacia su propio conocimiento como formadores, Marta y José relatan su percepción sobre el conocimiento del formador de forma distinta. De un lado, los dos manifiestan

sentirse cómodos con respecto a su conocimiento matemático para gestionar la sesión que dio lugar a la entrevista. No obstante, en relación con el conocimiento didáctico del contenido, encontramos elementos diferenciadores.

Marta se muestra segura sobre cómo su sólido conocimiento matemático le sirve para anticipar las respuestas de sus EPM o para entender cómo se construye un contenido matemático. Esta idea, refuerza lo que manifestaba en relación con el conocimiento del profesor, una forma de supeditar el conocimiento didáctico de las matemáticas al conocimiento matemático. Asimismo, manifiesta sentirse confiada por su experiencia como formadora:

> Marta: Yo ahí me apoyo, tengo confianza en que yo conozco las matemáticas que dan respuestas o que respaldan, que argumentan cualquier cosa […] Claro, entonces yo, digamos, que esa parte didáctica, yo ya la traía de casa, porque eso ha sido una preocupación siempre para mí.

> Marta: Cuando yo llego a un aula de magisterio, yo tengo el respaldo de mi experiencia docente, de tener tablas para saber cómo abordar una pregunta de un alumno y las tablas de que yo las matemáticas me las sé

Estas aportaciones esclarecen las relaciones entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido desde la perspectiva de Marta y matizan el carácter experiencial de su conocimiento didáctico.

De otro lado, José reconoce haber desarrollado su conocimiento didáctico del contenido de la formación mediante su participación en el proyecto de diseño de tareas:

> José: A mí me ha aportado… el cómo puedo diseñar una sesión de formación de maestros, en qué aspectos claves me tengo que fijar para que esa sesión esté bien diseñada o desde el punto de vista de la gestión pues bueno diferentes formas de gestionar, diferentes formas de presentar actividades…

La reflexión de José está, en cierta forma, reforzada por un mayor sentimiento de pertenencia al grupo que diseñó la tarea y su identificación con la misma. Su rol como formador es más afín al diseño final que el rol de Marta, para quien la tarea tiene un carácter cerrado que la hace sentirse incómoda. La familiaridad de José con el modelo MTSK, que se usó como organizador de la tarea, también se ha revelado distintivo en sus aportaciones frente a las de Marta:

> José: A ver, yo creo que el modelo es… en ese sentido, es clave […] O sea, en ese sentido estructura un poco la manera en la que a mí como formador me funciona la cabeza

> Marta: Yo creo que yo no estoy pensando continuamente en MTSK. Cuando luego reflexiono sobre qué he hecho con los alumnos… digo "ah, pues mira, al hacer esto… estoy contribuyendo o estoy promoviendo que construyan este tipo de conocimiento"

SOBRE EL USO DE LOS RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN EN EL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Al hilo de las aportaciones de ambos formadores sobre la aplicabilidad de MTSK en formación inicial, ambos reconocieron compartir el modelo con sus estudiantes para maestro, de forma más explícita o implícita. Durante la entrevista, fueron cuestionados por el papel de los resultados de investigación en el aula de formación inicial de maestros. Marta señaló que, para ella, la investigación es una herramienta de formación continua:

> Marta: Argumentos que yo utilizo en clase vienen de las lecturas que yo hago como investigadora, no como profesora. Entonces, en ese sentido, sí, yo creo que enriquece la formación, lo que yo leo y lo que yo aprendo como investigadora.

En el caso de José, parece que su rol como investigador impacta de lleno en su docencia ya que considera que el aula de formación inicial y la investigación tienen una relación de retroalimentación similar a la de teoría-práctica:

José: Además, el ver que lo que está en el modelo tiene sentido, que eso muchas veces es una preocupación desde el punto de vista de investigación […] Cuando tú lo vives y ves que en tu clase aparece eso como que, además de que el modelo es útil, es útil para mí.

Sobre su autopercepción profesional

Durante la entrevista, los formadores debían reflexionar sobre su perfil profesional y cómo valoraban que éste había influido en su proceso de aprendizaje durante su participación en el proyecto y en la implementación de la tarea. De sus respuestas, es destacable el peso que dan a su formación inicial como caracterizadora de su perfil:

José: Mi perfil en ese sentido quizás sea un poco más didáctico, como mi formación no ha sido matemática […] Es verdad que, en cuanto a potencialidad matemática, obviamente yo creo que yo no me puedo comparar con una persona que ha estudiado matemáticas porque no tenemos la misma formación.

Marta: En la valoración que yo hago de la formación inicial, mi perfil, creo que sí influye. Creo que otros perfiles… [*no valoran tanto*]... el peso del conocimiento matemático.

En ambos casos, con respecto a su conocimiento matemático, los formadores reconocen que su formación de base les hace mirar la formación inicial de manera diferente cuando se comparan con formadores de otro perfil. No obstante, las aportaciones de los dos formadores en relación con el perfil del "buen" formador se acercan en la búsqueda del equilibrio entre conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático, lo que pueden entenderse como una valoración positiva a la convivencia de perfiles de formador:

José: Yo creo que al final, los dos extremos, si se pueden llamar extremos, están destinados a juntarse y esa conexión hace, pues… entiendo que al buen formador.

Finalmente, hemos encontrado una oportunidad para seguir investigando sobre cómo el uso de los resultados de investigación en formación inicial contribuye al desarrollo del perfil profesional del MTE. Al hilo de la aportación de Marta sobre el uso de estos resultados, en el subepígrafe anterior, parece observarse que otorga distinto peso a las tareas que realiza como MTE, reconociendo que se siente más docente que investigadora:

Marta: En ese sentido, también es cierto que yo considero que yo tengo más perfil docente que investigador.

Identificamos con ello la oportunidad de analizar de qué manera se relacionan esos roles en los distintos perfiles profesionales y cómo influyen en la enseñanza en formación inicial.

CONCLUSIONES

Podemos señalar que, en ambos casos, hemos encontrado evidencias, en su reflexión sobre la tarea implementada, de distintas actividades para la formación inicial de maestros que involucran distintos tipos de conocimientos profesionales.

Como respuesta a nuestro objetivo de investigación, hemos encontrado distintos niveles en los que se articulan las perspectivas sobre la formación inicial de dos formadores de maestros y la relación con su perfil profesional. La caracterización de sus perspectivas ha arrojado diferencias significativas que pueden explicarse por la consideración de la doble mirada (Reyes-Bravo et al., 2023) como característica de su conocimiento y gestión de tareas.

En el caso de Marta, en la formación inicial de maestros se debe otorgar más protagonismo al contenido matemático, de entre los diferentes contenidos propuestos por Ponte (2012). En sus afirmaciones encontramos dificultad para reconocer que en la base de la investigación sobre didáctica de la matemática subyace un análisis del conocimiento matemático. En este sentido, parece que existen ciertas reticencias a considerar el conocimiento derivado de la investigación en Educación Matemática, señalado por Ferretti et al. (2021), como elemento de conocimiento del formador, sin

que se acompañe de la profundización de un sólido conocimiento disciplinar. Es este sólido conocimiento el que determina casi unívocamente su práctica.

En el caso de José, la formación inicial de maestros tiene un fuerte carácter profesionalizante y un objetivo final situado en el aula de Primaria. Manifiesta su perspectiva en este sentido cuando usa el aula de Primaria como detonante del contenido de la formación de maestros, a nivel matemático y a nivel didáctico, y cuando reflexiona sobre el desarrollo de habilidades docentes (Ponte, 2012) como ese conocimiento en acción que debe desarrollarse en formación inicial. De esta manera, podemos concluir la presencia de la doble mirada (Reyes-Bravo et al., 2023) en su discurso. Es también significativa la importancia que da a los resultados de investigación, principalmente a los relacionados con el conocimiento y el desarrollo profesional del profesor como organizadores del contenido de la formación (Ferretti et al., 2021).

En este trabajo hemos resaltado aquellos conocimientos profesionales que tienen que ver con el conocimiento matemático del formador. Como continuación del mismo cabría., explorar cómo se interrelacionan estos conocimientos, en la gestión de aula de ambos formadores, con su conocimiento didáctico del contenido de la formación.

Con esta investigación, avanzamos en la caracterización de perspectivas de formación de formadores con distinto perfil profesional remarcando la importancia que tiene en la línea de investigación sobre formación de profesores, aunque dejamos abierta su profundización, abogando por la complementariedad de visiones y el enriquecimiento entre perfiles en grupos colaborativos.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i *PID2021-122180OB-100*, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Beswick, K. y Chapman, O. (2012). Discussion group 12: Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. Conducted at the 12th ICMI held in Seoul, South Korea.

Beswick, K. y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*, 417–427. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press.

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N. y Aguilar, A. (2015). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60–68). SGSE.

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators* (pp. 23–40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

Even, R., Krainer, K. y Huang, R. (2020). Education of Mathematics Teacher Educators. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 258–262). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_55

Ferretti, F., Martignone, F. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Mathematics teacher's educator Specialized knowledge model. *Zetetiké*, *29*, 1–12. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661966

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Goos, M. y Beswick, K. (2021). Introduction: The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators. En M. Goos, y K. Beswick (Eds), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators. Research in Mathematics Education* (pp. 1–20). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_1

Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teachers, teacher-educators and researchers as co-learners. En F-L. Lin y T. J. Clooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education*. Kluwer Academic Publishers.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. En B. Jaworski, y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (p. 335–361; Volume 4). Sense Publishers. https://dspace.lboro.ac.uk/2134/8812

Lanier, J. E. y Little, J. W. (1986). Research on teacher education. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching (3rd Ed.)* (pp. 527–569). MacMillan.

Masingila, J. O. y Olanoff, D. (2022). Who teaches mathematics content courses for prospective elementary teachers in the USA? Results of a second national survey. *Journal of Mathematics Teacher Education, 25*, 385–401. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09496-2

Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Las creencias de los formadores de profesores que enseñarán Matemáticas sobre el contenido y la estructura de la formación inicial de los profesores de secundaria. En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Codes (Eds.), *Actas del IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.14–23). Universidad de Huelva Publicaciones.

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473–482). SEIEM.

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). The Pedagogical Knowledge Deployed by a Primary Mathematics Teacher Educator in Teaching Symmetry. *Mathematics, 9*(11), 1241. http://dx.doi.org/10.3390/math9111241

Ponte, J. P. (2012). Mathematics teacher education programs: practice and research. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(5), 343–346. http://doi.org/10.1007/s10857-012-9226-z

Reyes-Bravo, M., Pascual, M. I., Estrella, S., Tarisfeño, S. y Contreras, L. C. (2023). La "doble mirada" del formador de profesores de matemáticas como característica identificativa de su conocimiento. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.182–189). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Rojas, F. y Pascual, M. I. (2023). Profiles and beliefs of mathematics teacher educators on preservice teacher education: Development of an instrument. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds). *Proceedings of 13th CERME* (pp. 4816–4818). ERME.

Sánchez, V. y García, M. (2008). What to teach and how to teach it: dilemmas in primary mathematics teacher education. En B. Jaworski, y T. Woods (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 281–298). Sense Publishers.

Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education 7*, 5–32. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000009971.13834.e1

Zopf, D. A. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education*. [Tesis doctoral. University of Michigan]. Repositorio de la Universidad de Michigan. https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/77702

JUSTIFICACIONES DE ALUMNOS DE QUINTO DE PRIMARIA EN TAREAS CON DIFERENTES CONTEXTOS

Fifth grade students' justifications in tasks with different contexts

Pérez-Martos, M. C.[a], Moreno, A.[a], Cañadas, M. C.[a] y Torres, M. D.[b]

[a] Universidad de Granada, [b] Universidad de Córdoba

Resumen

Este trabajo se enmarca en un proyecto que incluye el pensamiento funcional de estudiantes de primaria entre sus intereses. Nuestro objetivo es identificar las justificaciones basadas en gráficos de seis estudiantes de quinto de primaria en tareas que involucran diferentes contextos. Recogimos información a través de cuatro sesiones grupales y entrevistas posteriores realizadas a seis estudiantes. Analizamos las transcripciones de los entrevistados y diferenciamos entre justificaciones contextualizadas y no contextualizadas. Los resultados evidencian la prevalencia de justificaciones contextualizadas frente a las no contextualizadas. Además, algunas de las contextualizadas se dieron en el contexto científico, que es el más abstracto.

Palabras clave: *contextos de tareas matemáticas, educación primaria, justificación, pensamiento funcional, representación gráfica*.

Abstract

This work is part of a broader research project which include functional thinking of primary school students among its interests. Our objective is to identify the graph-based justifications of six fifth grade students in tasks involving different contexts. We collected information from four group sessions and subsequent interviews conducted with six students. We analyzed the transcripts of the interviewees and differentiated between contextualized and non-contextualized justifications. The results show the prevalence of contextualized versus non-contextualized justifications. Moreover, some of the contextualized ones were given in the scientific context, which is the most abstract.

Keywords: *elementary education, functional thinking, graphic representation, justification mathematical task contexts*.

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La investigación sobre pensamiento algebraico es de interés actual, tanto a nivel nacional como internacional (Narváez et al., 2023). Blanton et al. (2018) proponen cuatro prácticas esenciales para abordar el pensamiento algebraico: generalizar, representar, justificar y razonar con estructuras y relaciones matemáticas. Este estudio pone el foco en la justificación y la representación. Concretamente, centramos el uso de estas prácticas en tareas que involucran el pensamiento funcional.

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico en el que "el concepto de función, las relaciones entre las cantidades involucradas, y la variación conjunta entre cantidades son contenidos clave que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos" (Cañadas y Molina, 2016, p. 210).

El pensamiento funcional refuerza su importancia con la inclusión del sentido algebraico en el currículo de primaria actualmente en vigor en España (Real Decreto, 2022). Comunicar y representar es uno de los ejes en torno a los que giran las competencias específicas de matemáticas. Justificar permite el desarrollo de la comunicación y la representación. Moreno y Cruz (2023a) ponen de

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2024). Justificaciones de alumnos de quinto de primaria en tareas con diferentes contextos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 417-424). SEIEM.

manifiesto la relación entre la capacidad de comunicar o justificar resultados y las representaciones empleadas. De entre las diferentes representaciones, nos centramos en los gráficos cartesianos. Hay autores que definen cuáles son las componentes estructurales de un gráfico (Friel et al. 2001; Martí et al. 2010). Pérez-Martos et al. (2023) abordaron los usos y la comprensión de estos gráficos para trabajar las funciones con alumnado de quinto de primaria, llegando estos a mirar a través de los gráficos.

Diversos autores han señalado la importancia del contexto en la resolución de una tarea (Chamoso y Cáceres, 2018; Moreno y Cruz, 2023b; Moreno y Ramírez, 2016). Moreno y Cruz (2023b) sugieren que el alumnado emplea procedimientos diferentes cuando se enfrenta a cálculos "abstractos" y "en contexto" ante tareas con la misma exigencia matemática. Para el desarrollo de la competencia comunicar y representar, se alude a la importancia del contexto para "la interpretación de situaciones de la vida cotidiana y la comprensión de situaciones problematizadas" (Real Decreto, 2022, p. 24487).

El objetivo de este trabajo es identificar y clasificar las justificaciones basadas en gráficos de seis estudiantes de quinto de primaria en tareas que involucran diferentes contextos.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Para Staples y Conner (2022) los términos prueba, argumentación, justificación y razonamiento pueden tener usos similares. Balacheff (2000) distingue entre explicación, prueba, demostración y razonamiento y procesos de validación. Según Chua (2017), la justificación es un medio para determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación. Los tipos de argumentos de los estudiantes dependen de sus habilidades y de la naturaleza de las tareas. Los estudiantes desarrollan argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta cuando justifican (Blanton et al., 2018). Estos mismos autores afirman que la mayoría de las justificaciones dadas por estudiantes de primaria son justificaciones ingenuas, basadas en su mayoría en razonamientos con casos particulares. Por otro lado, afirman que ciertos alumnos pueden hacer justificaciones algo más sofisticadas, como son las basadas en representaciones. Nos centramos en las justificaciones basadas en los gráficos cartesianos. Sobre el grado de sofisticación de las justificaciones, Ayala-Altamirano y Molina (2021) concluyeron que las discusiones orales llevaron a estudiantes de cuarto de primaria a justificaciones en términos más sofisticados que las justificaciones escritas.

Dos representaciones utilizadas en el pensamiento funcional son las tablas y los gráficos cartesianos. Sobre el uso y la comprensión de estas representaciones, Brizuela et al. (2021) concluyeron que los niños de educación infantil podían mirar a través de la representación cuando hacían inferencias y generalizaciones a partir de la visualización de la tabla. Torres et al. (2022) concluyeron de forma similar, con alumnado de segundo de primaria. Pérez-Martos et al. (2023) extendieron esta idea a la representación gráfica e identificaron que un alumno de quinto de primaria también era capaz de mirar a través de los gráficos elaborados en tareas que implican relaciones funcionales, obteniendo a partir de ellos inferencias y generalizaciones. Las componentes estructurales que conforman un gráfico son: (a) el marco, que informa sobre qué medida se utiliza y qué es lo que se mide; (b) los especificadores, a través de los que visualizamos las relaciones, como son las tendencias o comparaciones entre valores; (c) las etiquetas, como son el nombre de las variables, el título o las frecuencias, y (d) el fondo, que son los colores, imágenes o tipo de cuadrícula utilizados (Friel et al., 2001; Martí et al., 2010).

Moreno y Ramírez (2016) indican que las variables a considerar al plantear una tarea matemática son el contenido matemático, la situación o contexto y la dificultad. En PISA (2004) se distinguen cuatro tipos de contextos: (a) personal, asociado a las actividades diarias de los alumnos y que les afectan directamente; (b) educativo, propio de un centro escolar o puesto de trabajo; (c) público, propio a la comunidad del alumno y (d) científico, asociado a problemas científicos.

En este trabajo tomaremos como justificación toda aquella explicación de los estudiantes que ofrezca un cómo o un por qué a sus respuestas sobre la representación gráfica. Consideramos que una justificación está en contexto cuando involucra alguna de las variables que intervienen en cada tarea.

METODOLOGÍA

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación que colabora con un colegio público del sur de España. El colegio se seleccionó de forma intencional, por su buena predisposición y contar con el permiso del comité de ética de la Universidad. Realizamos esta recogida de información en quinto de primaria, a través cuatro sesiones grupo-clase con 25 alumnos, y seis entrevistas individuales semi-estructuradas con seis de estos estudiantes después de las sesiones. Un investigador-docente (el segundo autor de este trabajo) se encargó de implementar las sesiones y las entrevistas. Otros dos miembros del equipo de investigación lo apoyaron (uno fue la primera autora de este trabajo). El diseño de las tareas y de las sesiones se realizaron en el marco del proyecto. En el análisis de la información participaron los cuatro autores de este trabajo.

En las sesiones grupo-clase, los estudiantes trabajaron tareas de generalización que involucraban las funciones 2n+5, 3n, y 2n+2, a través de diferentes representaciones: verbal, simbólica, tabular y gráfica. Los estudiantes respondieron preguntas que involucraban la lectura e interpretación de diferentes representaciones.

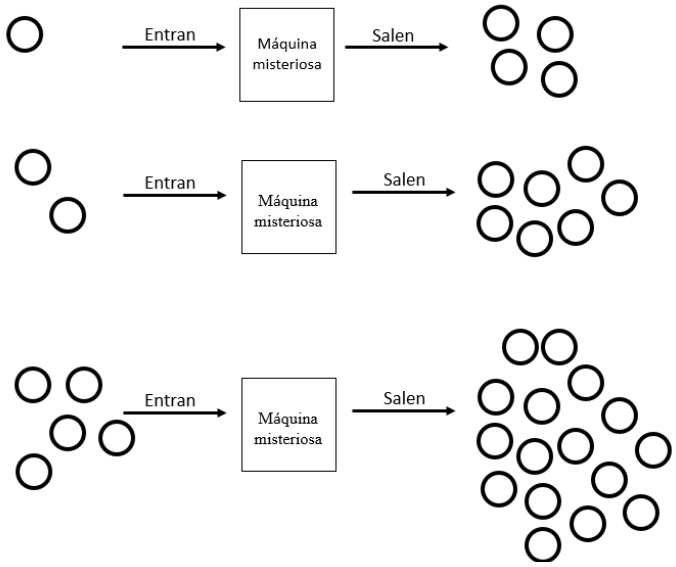
Seleccionamos a seis estudiantes para las entrevistas con base en el trabajo previo durante estas sesiones: A1 y A2 generalizaron desde el principio, B1 y B2 generalizaron al final, y C1 y C2 no generalizaron en ningún momento de las sesiones. Estos alumnos habían tenido contacto previo con los gráficos y la generalización en contextos funcionales en las sesiones del grupo-clase, al igual que con la justificación de sus respuestas.

En este trabajo analizamos las seis entrevistas (videograbación y fichas de trabajo). Por tanto, esto es un estudio de casos (Stake, 1999). Los seis estudiantes son casos representativos (Stake, 1999) en torno a la generalización y a la justificación dadas en las sesiones. En las entrevistas, involucramos la función f(n)=3n+1 y la comparación de f(n)=2n+5, f(n)=3n. Algunas de estas funciones aparecieron en las sesiones de grupo-clase.

Cada entrevista duró unos 23 minutos y planteamos tres tareas en tres contextos diferentes: científico, personal y público, respectivamente. Situamos la tarea 1 en el contexto de una máquina misteriosa en la que metes un número de bolas, y sale otro número de bolas. Deben averiguar qué hace la máquina. Les dimos la representación pictórica de tres casos particulares (ver Figura 1). Las preguntas planteadas en esta tarea fueron del tipo: Si entran cuatro bolas, ¿cuántas saldrían? (y varias sobre otros casos particulares); para cualquier número de bolas que entraran, ¿cuántas bolas saldrían?; ¿Cómo me explicarías el funcionamiento de la máquina?; ¿Serías capaz de representar en una tabla esta situación?; ¿Serías capaz de representar en un gráfico esta situación?

La tarea 2 la contextualizamos en un parque de atracciones, en el cual deben pagar 1 euro por hacerse socios y, una vez dentro, cada viaje cuesta 3 euros. Igual función a la de la tarea 1, pero aquí el contexto diferencia el término independiente. Presentamos la situación y planteamos las siguientes preguntas: si hago tres viajes, ¿cómo sabría cuánto tengo que pagar? (y así para varios casos particulares). Si hago un número de viajes cualquiera, ¿cómo sabría cuánto tengo que pagar?; ¿Es posible que pagase yo 33 euros en viajes?; ¿Podrías representar esta situación en una tabla?, ¿y en un gráfico?

Figura 1. Ejemplo de representación pictórica dada en la tarea 1.

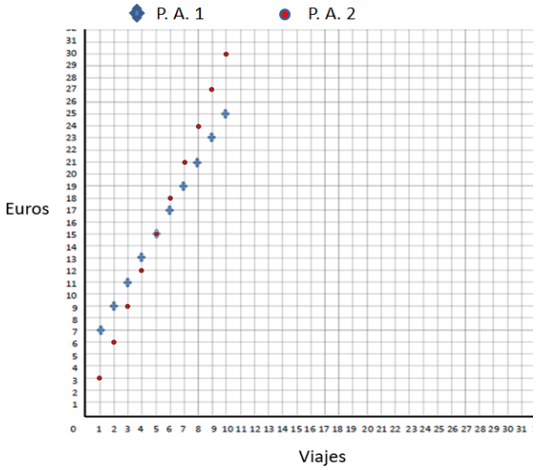


En la tarea 3 continuamos en parques de atracciones. Mostramos un gráfico representando la comparación de dos parques diferentes (ver figura 2), haciendo énfasis en que se trataban de parques diferentes al de la tarea anterior. Las preguntas que hicimos fueron: ¿Cómo puedo saber cuánto tengo que pagar en cada parque?; ¿Cuál de los dos parques crees que es más caro?; ¿A qué parque me interesaría ir?; ¿Cómo observas eso en el gráfico? En la Tabla 1 resumimos los contextos y las variables que están asociados a cada tarea.

Tabla 1. Resumen de contextos y variables de tareas.

Tarea	Contexto	Relaciones involucradas	Variables que intervienen
1	Máquina de bolas	f(n)=3n+1	Bolas que entran Bolas que salen
2	Parque de atracciones	f(n)=3n+1	Número de viajes Dinero que pago (euros)
3	Comparación de parques	f(n)=2n+5; f(n)=3n	Número de viajes Dinero que pago (euros)

Figura 2. Tarea 3: comparación de parque de atracciones 1 (P. A. 1) y parque de atracciones 2 (P. A. 2).



Realizamos el análisis de las transcripciones de los seis estudiantes, atendiendo a las componentes estructurales del gráfico (Friel et al. 2001; Martí et al. 2010) evidenciadas en las justificaciones de los estudiantes. Nuestra unidad de análisis es, por tanto, las justificaciones basadas en gráficos cartesianos del conjunto de los estudiantes, en cada una de las tres tareas trabajadas. La codificación la hemos llevado a cabo mediante triangulación de expertos. Diferenciamos entre justificaciones contextualizadas y justificaciones no contextualizadas. Cada alumno puede justificar más de una vez. Definimos las justificaciones contextualizadas como aquellas en las que hacen referencia a alguna de las etiquetas del gráfico. Cuando no hay mención a las etiquetas, decimos que la justificación es no contextualizada.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado mostramos los resultados. En la Tabla 2 presentamos un resumen de los resultados.

Tabla 2. Recuento de Justificaciones por tareas.

Tareas	Justificaciones contextualizadas	Justificaciones no contextualizadas	Total
1	12	14	26
2	9	1	10
3	18	2	20
Total	39	17	56

Partimos de un total de 56 justificaciones apoyadas en la representación gráfica (ver Tabla 2). Compartimos, por tanto, la idea de Blanton et al. (2018) de que hay alumnos capaces de ofrecer justificaciones basadas en representaciones, que los autores consideran más sofisticadas.

Entre estas 56 justificaciones, identificamos 39 contextualizadas en las situaciones de las tareas propuestas, frente a 17 fuera de contexto. Estas 17 justificaciones eran matemáticas, no mencionaban las variables que intervenían en las situaciones y, por consiguiente, no presentaron evidencia de las "etiquetas" de los gráficos (Friel et al., 2001; Martí et al. 2010).

Justificaciones en la tarea 1 (contexto científico)

En la tarea 1 observamos 26 justificaciones basadas en el gráfico (ver Tabla 2), a pesar de tratarse de un contexto científico y ser más abstracto (Moreno y Ramírez, 2016; PISA, 2004). Resultaron 12 justificaciones contextualizadas en esta tarea, observándose en cinco de los seis alumnos (A1, A2, B2, C1 y C2). Entre ellos, A2 es quien dio más justificaciones contextualizadas durante el trabajo con esta tarea. En el siguiente fragmento de la entrevista, A2 hace referencia a las etiquetas del gráfico, en concreto a las variables involucradas:

I: Vale, venga, representa la situación en un gráfico.

A2: Aquí (refiriéndose al primer ejemplo de la máquina dado) entra una (hace una cruz en el primer cuadrado correspondiente al eje X del papel cuadriculado) y salen cuatro (cuenta cuadrados hacia arriba y coloca una cruz en el cuarto cuadrado del eje Y). Eh… Luego, entran dos (hace marca en el segundo cuadrado del eje X) y salen… siete (marca el séptimo cuadro del eje Y, pero no en la segunda columna de cuadrados que es donde ha colocado la marca del dos, sino que lo marca en la primera columna…).

En esta tarea predominan las justificaciones no contextualizadas, siendo 14 (ver Tabla 2), en las que no hicieron mención a las etiquetas del gráfico y, por tanto, tampoco al contexto de la tarea. Todos los estudiantes usaron al menos una justificación de este tipo. B2 evidenció un mayor número de justificaciones no contextualizadas. El siguiente fragmento de la entrevista de B2 ejemplifica esta justificación al preguntarle el entrevistador: "Porque si de siete llega hasta veintidós, pues no podría llegar a menos que 22. El del diez va a tener que ser más (dice leyendo y señalando en el gráfico)". Observamos cómo B2 llega a mirar a través del gráfico (Brizuela et al., 2021; Pérez-Martos et al.,

2023), mostrando cómo identifica una tendencia. Pero, a nivel de justificación no llega a contextualizar en la situación de la tarea, no menciona ninguna de las variables involucradas.

Justificaciones en la tarea 2 (contexto personal)

En la tarea 2 los estudiantes evidencian un menor número de justificaciones basadas en el gráfico (10) que en las otras dos tareas. Aun siendo los contextos personales los más cercanos a los estudiantes, hay una evidencia de justificación no contextualizada (B2). Esto puede deberse a que en esta tarea no les mostramos representación pictórica de casos particulares iniciales, si no que partieron únicamente de la información verbal. B2 describió cómo construyó el gráfico, pero no hizo mención a las etiquetas. El siguiente fragmento evidencia esto:

B2: (Rellena los tres primeros puntos del eje X y comienza a colocar puntos) tres… da diez. La siguiente era cuatro… trece. (Completa con más números en el eje X por necesidad). Seis… diecinueve… (Se apoya en la información de la tabla previa y representa los mismos puntos que en ella había indicados.). Ya.

El resto de evidencias de justificaciones en esta tarea fueron contextualizadas, en total 9 (de A2, B1 y C1) (ver Tabla 2). Cuatro de ellas fueron de A2. A continuación mostramos un ejemplo:

A2: Pero… más el carnet pues cuatro (borra y coloca el punto (1,4) correcto). Luego, si entro a dos atracciones el total sería siete euros (dice mientras coloca el punto (1, 7)), si entro a tres atracciones son nueve euros (dice, erróneamente, colando el punto (1, 9)).

A2 cometió errores al situar los puntos en la representación gráfica, pero mencionó las etiquetas al dar su justificación sobre cómo construía el gráfico.

Justificaciones en la tarea 3 (contexto público)

En la tarea 3 se comparan los costes de dos parques de atracciones. Se trata de un contexto público y cercano al alumnado. Observamos el mayor número de justificaciones contextualizadas, 18 son de este tipo de entre las 20 justificaciones totales (ver Tabla 2). Todos los estudiantes ofrecieron justificaciones de este tipo. Mostramos un ejemplo en un fragmento de la transcripción de B1, donde mencionó las dos variables involucradas en la tarea y, por tanto, las etiquetas del gráfico.

I: Vale, a ver, ¿cuál es más caro?

B1: Más caro es el primero (señalando los puntos correspondientes a uno y dos viajes), lo que pasa es que cuantos más viajes da, el segundo es más caro (señalando los correspondientes a un número grande de viajes) Porque en el segundo un viaje cuesta tres euros, pero en el primero un viaje cuesta siete euros (dice mirando correctamente el gráfico).

A1 y B2 no justificaron contextualizando en la situación de esta tarea, ofreciéndoles el gráfico ya representado donde ya venían las etiquetas dadas. Por ejemplo, B2 justificó sin hacer alusión a las variables de la tarea al decir "Porque empieza siendo más, pero acaba siendo menos". No hay evidencia de a qué se refiere con "más y menos".

CONCLUSIONES

Destacamos que hay mayor número de justificaciones contextualizadas que no contextualizadas. Concluimos que los estudiantes se apoyaron en los contextos de las tareas para justificar con base en los gráficos. Esto nos lleva a coincidir con los diferentes autores citados en la importancia que tienen los contextos de las tareas matemáticas puesto que aportan a los estudiantes una herramienta valiosa para construir los argumentos, que dan lugar a sus justificaciones. De los tres contextos que intervienen, observamos un mayor número de justificaciones contextualizadas en el contexto público, después el científico y, por último, el personal.

Observamos que hay estudiantes que ofrecen justificaciones contextualizadas al trabajar con un contexto científico, aun siendo el más abstracto. Además, cabe destacar que no es el contexto en el

que se evidencia un menor número de justificaciones de este tipo. En el trabajo con el contexto personal (tarea 2), observamos que hay un caso en que no se hace alusión al contexto para dar las justificaciones, aunque se considera el más cercano a los estudiantes. Por tanto, concluimos que hay que trabajar con los alumnos la forma de expresar las situaciones matemáticas correctamente y en su contexto. Y, por último, destacamos que el contexto público es el que ha generado mayor número de justificaciones contextualizadas. Esto puede deberse a una limitación de nuestro estudio, ya que en la tarea 3 se muestra a los estudiantes una representación gráfica y, por tanto, están observando etiquetas de la situación. Cabe destacar que en el trabajo con este contexto también surgen justificaciones que no tienen en cuenta las etiquetas.

Por último, todas las justificaciones analizadas en este trabajo son basadas en la representación gráfica, concretamente en gráficos cartesianos, por lo que reafirmamos la idea de que entre los estudiantes de estas edades pueden surgir justificaciones con cierto nivel de sofisticación (Blanton et al., 2018).

Este trabajo seguiría por comparar las justificaciones basadas en la representación gráfica dadas por estos estudiantes con las de otro curso.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies of Mathematics, 107*, 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Eds.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 Monographs*, (pp. 27-49). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Brizuela, B. M., Blanton, M. L. y Kim, Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R.E.d.S.R. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults*, (pp. 171-190). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares. http://funes.uniandes.edu.co/8379/

Chamoso, J. y Cáceres, M. J. (2018). Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. En A. Ruíz (Ed.), *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* (pp. 83-94). Universidad de Costa Rica. http://funes.uniandes.edu.co/14932/

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (pp. 115-122). DCU Institute of Education y ERME.

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G.W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158. https://doi.org/10.2307/749671

Martí, E., Gabucio, F., Enfedaque, J. y Gilabert, S. (2010). Cuando los alumnos interpretan un gráfico de frecuencias. Niveles de comprensión y obstáculos cognitivos. *Irice, 21*, 65-80. https://doi.org/10.35305/revistairice.v21i21.508

Moreno, A. y Cruz, M. F. (2023a). La conexión entre las competencias representar y comunicar: El caso de un estudiante de 6º de educación primaria. En P. Scott, Y. Morales y A. Ruíz (Eds.), *Educación matemática en las Américas 2023. Currículo, competencias y evaluación* (pp. 76-82). https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen6-Tema-5.pdf

Moreno, A. y Cruz, M. F. (2023b). Acercamiento a la idea de situación de aprendizaje matemático en el currículo de matemáticas. *Epsilon*, *115*, 7-19. https://thales.cica.es/epsilon_d9/node/5012

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-258). Pirámide. http://funes.uniandes.edu.co/23174/

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2023). Análisis de la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en SCOPUS. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXVI (pp. 411-418). SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/3f2662/

PISA (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas/ OCDE*. Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2023). Una mirada a través de gráficos funcionales del alumnado de quinto de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 435-442). SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/32623/

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, (52), de 2 de marzo de 2022, 24386-24504. https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/02/pdfs/BOE-A-2022-3296.pdf

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morales S. L.

Staples, M. y Conner, A. M. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. M. Conner, K. W. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 1-12). Springer

Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics*, *10* (56). https://doi.org/10.3390/math10010056

NIVELES DE COMPRENSIÓN DE TABLAS Y GRÁFICOS ENTRE ESTUDIANTES DE QUINTO Y SEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Fifth and sixth elementary school grade students' levels of understanding of tables and graphs

Pérez-Martos, M. C.[a], López, M. A.[b], Brizuela, B. M.[b] y Moreno, A.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Tufts

Resumen

Este estudio es parte de una investigación más amplia que indaga sobre el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria en España. El objetivo de este trabajo es describir diferentes niveles de comprensión de tablas y gráficos. Analizamos las entrevistas realizadas tras cuatro sesiones de clase con un estudiante de quinto y otro estudiante de sexto de Educación Primaria. Mostramos ejemplos de cada uno de sus niveles de comprensión a través de su trabajo con tareas de generalización con funciones lineales y diferentes representaciones, específicamente tablas y gráficos. El marco proceso-objeto de Sfard (1991) nos permitió explicar los niveles de comprensión para la representación tabular y gráfica.

Palabras clave: *educación primaria, generalización, pensamiento funcional, representación gráfica, representación tabular*.

Abstract

This study is part of a broader research project that explores functional thinking among primary school students in Spain. The aim of this paper is to describe the different levels of understanding of tables and graphs. We analyzed two students' interviews, one fifth grader and one sixth grader, conducted after four classroom sessions. We share examples of each of their levels of understanding through their work with generalization tasks with linear functions and different representations, specifically tables and graphs. Sfard's (1991) process-object theoretical framework allowed us to explain students' levels of understanding of the table and graphical representation.

Keywords: *elementary education, functional thinking, generalization, graphic representation, table representation*.

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Centramos este estudio en la comprensión de las representaciones tabulares y gráficas dentro del pensamiento algebraico, concretamente en el pensamiento funcional. Según Cañadas y Molina (2016) el pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico centrado en el trabajo con funciones y los elementos que las constituyen. Autores como Cañadas et al. (2019) evidencian el interés que, hoy en día, existe por este tipo de pensamiento dentro de la investigación en Educación Matemática.

Otra justificación sobre la importancia de este estudio es la inclusión del sentido algebraico en el currículo de Educación Primaria, en vigor en España desde hace tan solo dos años (Real Decreto, 2022). Además, entre las competencias específicas de matemáticas que definen este currículum se encuentran comunicar y representar, por lo que la comprensión de tablas y gráficos que exploramos en este estudio es crucial.

Investigaciones recientes han explorado cómo distintas representaciones algebraicas como las tablas (Brizuela et al., 2021; Torres et al., 2022) apoyan el desarrollo del pensamiento funcional. Existen también investigaciones que exploran cómo los estudiantes trabajan la representación gráfica en

Pérez-Martos, M. C., López, M. A., Brizuela, B. M. y Moreno, A. (2024). Niveles de comprensión de tablas y gráficos entre estudiantes de quinto y sexto de Educación Primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 425-432). SEIEM.

diferentes contextos como la interpretación del gráfico de barras (Martí et al., 2010) o la comprensión de gráficos de manera más general (Friel et al., 2001). Sin embargo, aún son escasos los estudios que abordan cómo estudiantes de educación primaria trabajan con gráficos para representar funciones (Pérez-Martos et al., 2023). Utilizando trabajos anteriores como el de Gabucio et al. (2010) que establecieron diferentes niveles de comprensión de la representación tabular y el de Martí et al. (2010) que definieron diferentes niveles de comprensión para los gráficos, Strachota et al. (2024) desarrollaron dos progresiones que incluyen distintos niveles de comprensión: una sobre gráficos y otra sobre tablas.

En este estudio utilizamos los datos de dos estudiantes para identificar los diferentes niveles de las progresiones desarrolladas por Strachota et al. (2024) en el contexto de Estados Unidos. Atendiendo a todo lo anterior surge nuestra pregunta de investigación: basado en las progresiones de Strachota et al. (2024), ¿cuáles son los niveles de comprensión de gráficos y tablas entre estudiantes de quinto y sexto de primaria en España al trabajar con tareas de generalización con funciones lineales? El objetivo de esta investigación es identificar y describir diferentes niveles de comprensión de tablas y gráficos de estudiantes de quinto y sexto de educación primaria. Aquí presentamos una primera aproximación a través de un estudio exploratorio con dos estudiantes.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

En torno a la representación tabular, destacamos a Brizuela et al. (2021), quienes observaron cómo Max, un niño de 5 años, fue capaz de hacer inferencias y generalizaciones sobre relaciones funcionales a partir de la visualización de la tabla. Concluyeron que este alumno podía mirar *a través de* la representación tabular (Kaput et al., 2008) ya que comenzó a usarla como herramienta para pensar y razonar sobre la información subyacente. Por otra parte, la forma en que estudiantes de segundo de primaria organizaron los datos en tablas al trabajar tareas sobre funciones permitió a Torres et al. (2022) identificar más fácilmente las estructuras que evidenció el alumnado. Finalmente, en Pérez-Martos et al. (2023) se extendió a los gráficos de funciones la idea de mirar *a través de* una representación. Estos autores observaron cómo un estudiante de quinto de primaria fue capaz de mirar *a través de* la representación gráfica, haciendo inferencias, predicciones y generalizaciones evidenciadas a través de conceptos relacionados con esta representación.

Utilizamos las progresiones de Strachota et al. (2024) para explorar cómo dos estudiantes españoles comprenden tablas y gráficos en contextos de pensamiento funcional. Estas progresiones utilizaron el marco teórico de proceso-objeto de Sfard (1991) para explicar las comprensiones de los estudiantes. El marco establece tres etapas, *interiorización, condensación* y *reificación,* que permiten describir el proceso por el cual el estudiante consolida un objeto matemático. En la etapa de *interiorización* los estudiantes pueden considerar, analizar y comparar un proceso sin necesidad de realizarlo (Sfard, 1991). Por ejemplo, la autora describe cómo los estudiantes que están desarrollando una comprensión de la cardinalidad de los números interiorizan el proceso de contar. Durante la etapa de *condensación* los estudiantes manipulan entidades de mayor tamaño. Siguiendo el ejemplo anterior, esta etapa describiría cómo los alumnos pueden contar de cinco en cinco, o que el número cincuenta está compuesto por cinco decenas. Finalmente, la autora señala que la *reificación* sucede cuando el proceso se convierte en un objeto matemático. En el ejemplo que seguimos, para la autora se presenta la reificación cuando el número 50 es considerado un objeto matemático por el alumno, él ya no precisa contar hasta 50, es decir, el número se ha convertido en un objeto en sí, y podrá ser utilizado por el alumno en otros contextos. Estas tres etapas subyacen a las progresiones de Strachota et al. (2024) que usamos en este estudio.

METODOLOGÍA

Esta investigación cualitativa es un estudio de casos que se llevó a cabo en un colegio público del sur de España seleccionado de forma intencional.

Participantes

Centramos nuestra atención en el tercer ciclo de educación primaria (quinto y sexto). Los participantes (un total de 52, 26 en quinto y 26 en sexto) habían tenido cierto contacto con la representación tabular como herramienta para organizar datos en las diferentes asignaturas. Por el contrario, el único contacto mantenido con la representación gráfica y la generalización en contextos funcionales fue en las cuatro sesiones de clase que llevamos a cabo en cada uno de los cursos. Estas sesiones giraron en torno a tareas de generalización con funciones lineales y diversas representaciones: verbal, simbólica, tabular y gráfica. Durante la clase los estudiantes respondieron preguntas que involucraban la lectura e interpretación de algunas de estas representaciones, principalmente la tabular y la gráfica.

Entrevistas individuales y selección de participantes

Realizamos entrevistas individuales semi-estructuradas con seis estudiantes de cada curso al finalizar las cuatro sesiones. La selección de los seis estudiantes para entrevistar se realizó en base a su trabajo con la generalización en las sesiones previas de grupo-clase. La intención era entrevistar a dos estudiantes que generalizaron desde el principio en las sesiones, otros dos que no generalizaron al principio, pero sí al final y otros dos que no generalizaron en ningún momento del presente estudio. Las entrevistas las realizó el mismo investigador-docente que dirigió las sesiones de clase, siguiendo un protocolo diseñado por los miembros del equipo de investigación. Cada entrevista tuvo una duración en torno a 23 minutos y planteamos tres tareas que resumimos en la Tabla 1. De los seis niños entrevistados, en este trabajo informamos sobre dos de ellos: Q1 de quinto y S1 de sexto, seleccionados porque fueron los que ofrecieron más información sobre las representaciones.

Tabla 1. Breve descripción de la entrevista

Nota. Tabla modificada de Pérez-Martos et al. (2023).

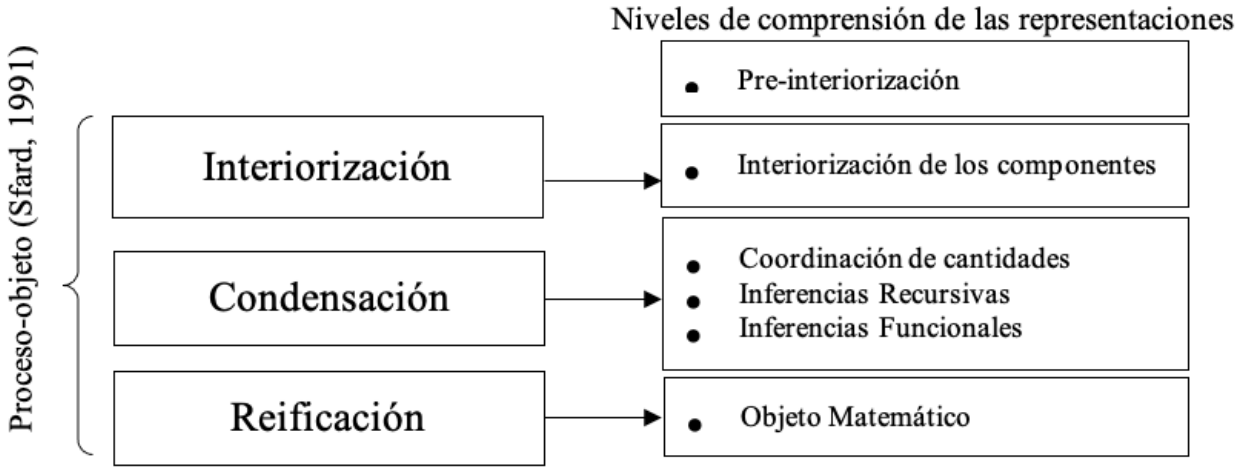
Tarea	Relaciones asociadas	Preguntas planteadas	Representaciones
1	y=3x+1	Si entran 4 bolas, ¿cuántas saldrían? (y así para varios casos particulares) Para cualquier número de bolas que entre, ¿cuántas bolas saldrían? ¿Cómo me explicarías el funcionamiento de la máquina? ¿Serías capaz de hacer una tabla para esta situación? ¿Serías capaz de representar en un gráfico esta situación?	Pictórica, tabular y gráfica.
2	y=3x+1	Si entro al parque y hago 4 viajes, ¿cuánto pago? (y así para varios casos particulares) Si hago un número de viajes cualquiera, ¿cómo sabría cuánto tengo que pagar? ¿Es posible que pagase 33 euros en viajes? ¿Podrías organizar esta situación en una tabla? El gráfico de esta situación, ¿lo podrías representar?	Tabular y gráfica.
3	y=2x+5 y=3x	A partir del gráfico de la comparación de dos parques de atracciones, les hicimos preguntas como las siguientes: ¿Cómo puedo saber cuánto tengo que pagar en cada parque? ¿Cuál de los dos parques crees que es más caro? ¿A qué parque me interesaría ir? ¿Cómo observas eso en el gráfico?	Gráfica.

Análisis de datos

Nuestra unidad de análisis fue cada una de las verbalizaciones realizadas por los dos estudiantes en su entrevista. Cada verbalización abarcó de principio a fin cada enunciado realizado por un estudiante. Justo antes y justo después de cada verbalización ocurrían cada una de las verbalizaciones del

entrevistador. Para identificar y describir los niveles de comprensión de gráficos y tablas de los alumnos utilizamos la codificación temática (Gibbs, 2007). Utilizando el marco proceso-objeto de Sfard (1991), Strachota et al. (2024) desarrollaron dos progresiones que expanden las tres etapas: 1) interiorización, 2) condensación y 3) reificación, como se detalla en la Figura 1.

Figura 1. Niveles de comprensión de las representaciones gráfica y tabular



El primer nivel, *pre-interiorización,* ocurre cuando el estudiante no puede identificar o comprender la representación. En este nivel el estudiante es capaz de trabajar con la representación, pero no de manera específica. Es decir, no puede diferenciar la representación con la que está trabajando de otras. En el siguiente nivel, *interiorización de los componentes*, el estudiante comienza a interiorizar los componentes de la representación. Por ejemplo, las columnas, filas y etiquetas en las tablas y los ejes y puntos en los gráficos. Al interiorizar las partes de cada representación el estudiante es capaz de entender de qué trata la representación pudiendo indicar la información que se está registrando. *Coordinación de cantidades* ocurre cuando el estudiante ha desarrollado una conceptualización de la representación como la coordinación de componentes de la representación. En el nivel *inferencias recursivas* el estudiante es capaz de relacionar dos o más pares de valores en la representación describiendo un patrón recursivo. Cuando un estudiante puede relacionar los valores mediante una relación funcional comprendida en la representación el alumno realiza *inferencias funcionales*. Una diferencia entre los niveles *inferencias recursivas* y *funcionales* es que en el primero los estudiantes refieren a valores de la representación consecutivos (filas o puntos), mientras que en el segundo los estudiantes articulan la relación para todos los valores. En el último nivel, *representación como objeto matemático*, los estudiantes son capaces de extender la comprensión más allá de la representación; esto es, pueden utilizarla para dar lugar a una nueva relación funcional, manipulando o transformando la representación original sin tener que construirla nuevamente.

La primera autora codificó las verbalizaciones de cada alumno. El segundo autor confirmó la codificación de cada verbalización. En casos de desacuerdo se discutieron con la tercera autora hasta llegar a un común acuerdo y consenso. Una vez codificadas las entrevistas, seleccionamos las verbalizaciones que consideramos más significativas para describir cada nivel y así contestar nuestra pregunta de investigación.

RESULTADOS

Niveles de comprensión de tablas

En el nivel de *pre-interiorización* se observó que los estudiantes no eran capaces de identificar la representación tabular ni sus elementos, es decir, no sabían que estaban trabajando con una tabla ni tampoco lograron identificar sus componentes. El siguiente fragmento de la transcripción de S1,

cuando le preguntamos si se acordaba de la tabla para representar los datos, es un ejemplo claro de este nivel:

S1: ¿De multiplicar? Sí.

I: No, de multiplicar no. Unas tablas para representar datos (dice mientras traza la T de la tabla con su dedo sobre la mesa) ¿Te acuerdas?

S1: Pero, a ver, depende de cómo es...

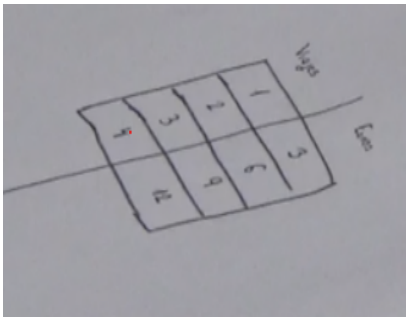
I: Dame (dice cogiendo el folio y el lápiz), si yo te digo... (dibuja la T de la tabla en el folio) ¿Te suena?

S1: Sí... (aunque no parece muy convencido).

El segundo nivel, *interiorización*, se evidenció cuando los estudiantes fueron capaces de identificar los elementos de la tabla, pero aún no encontraban relaciones entre ellos. Una evidencia de este nivel la obtuvimos de Q1, cuando identificó las etiquetas que debía poner en la tabla: "aquí (dice señalando el lugar donde va la etiqueta de la columna de la izquierda) es atracciones. Aquí (señalando lo mismo) es el número de atracciones que haces y aquí el total (se refiere al total de euros. Señala el lugar donde va la etiqueta de la columna de la derecha)".

Se observó el tercer nivel, *coordinación de cantidades*, cuando los estudiantes consiguieron coordinar los valores de columnas y filas. Aunque la relación que obtuvo no es correcta, S1 es un ejemplo de este nivel ya que logró leer los valores de la tabla y entendió el significado de los pares de valores: "(S1 comienza a rellenar la columna viajes, colocando los números 1, 2, 3 y 4, y comienza a rellenar la columna euros) Tres (dice colocando el 3 en la primera casilla de la columna euros), dos por tres, seis (dice mientras coloca un 6 en la casilla siguiente), tres por tres da nueve (coloca un 9 en la siguiente) y cuatro por tres da doce (coloca el 12 y resulta lo que se puede observar en la Figura 2)".

Figura 2. Ejemplo de coordinación de cantidades de S1



Los niveles *inferencias recursivas* y *funcionales* fueron los más sencillos de identificar. S1 ofreció la siguiente inferencia recursiva al explicar cómo había construido la tabla: "Pues, por ejemplo, en una salen cuatro y con dos salen siete, entonces con tres saldrían diez porque cada vez diez porque cada vez que vayas aumentando una moneda salen tres más".

Se trata de una *inferencia recursiva* puesto que para hallar un caso particular necesitó el caso anterior, como muestra al decir "al aumentar una salen tres más". En este nivel, el alumno prestó atención a la relación entre los valores de la columna. Observamos la *inferencia funcional* cuando le preguntamos a Q1 qué pasaba si entraba cualquier número de bolas y respondió: "Podría hacer así, ¿sabes? Directamente (escribe correctamente la relación funcional 3x+1 en la columna "salen" de la tabla)".

A diferencia del nivel anterior, esta inferencia funcional le permitió a este alumno obtener un valor arbitrario de una columna a partir de la otra. En otras palabras, pudo articular una relación sin la necesidad de recurrir a valores consecutivos. El nivel *tabla como objeto matemático* se caracteriza por una comprensión que se extiende más allá de lo que está presente. Q1 identificó la igualdad de la

tabla que realizó con la tabla de la tarea anterior, es decir, fue capaz de trabajar la situación actual con la tabla anterior sin necesidad de realizar una nueva:

I: Bueno, suficiente. ¿Cómo lo haces?

Q1: Es la misma que esta (señala la tabla del contexto anterior).

I: ¿Es la misma? Entonces, ¿cómo lo haces?

Q1: Pues primero me fijo en estos, los que tenga hechos (refiriéndose a copiar los datos de la tabla de la otra situación) y luego pues se puede conseguir con lo mismo que esto (refiriéndose a la tabla de antes), atracciones por tres, más uno.

Niveles de comprensión de gráficos

Si bien sugerimos que en el nivel *pre-interiorización* los estudiantes no son capaces de reconocer los componentes de un gráfico, no observamos evidencia de este nivel en los dos estudiantes entrevistados. La *interiorización* en el contexto de las representaciones gráficas sucedió cuando los estudiantes identificaron los ejes del gráfico y la variable a la que cada uno refiere; esto es, podían comprender de qué trataba el gráfico, pero aún no podían interpretar puntos. Para que esto suceda el alumno debe coordinar cantidades. Por ejemplo, Q1 mostró evidencia de este nivel:

I: Bueno, y ahora yo te digo: esta información, ¿eres capaz de convertirla en un gráfico?

Q1: (Comienza a hacerlo y rápidamente pregunta) ¿Aquí tengo que poner las que salen (señalando el eje *x*) y aquí las que entran (señalando eje *y*)?

I: En el orden que tú creas. ¿Tú cómo crees que deben ir? ¿A ti cómo te resulta más fácil entender el gráfico?

Q1: Espérate que lo voy a hacer. (Comienza a poner números en el eje *x*.) ¿Hasta cuánto?

I: Ya está.

Q1: Y aquí (refiriéndose al eje *y*)… me falta el cero…

I: ¿Te falta el cero? Bueno, pues dale la vuelta (dice dándole la vuelta al folio cuadriculado), ahí está. Lo vas a repetir porque tú dices que te falta el cero.

Aquí se puede observar cómo el alumno supo qué información se estaba registrando en el gráfico, pero aún no llegó a interpretar puntos.

El nivel de *coordinación de cantidades* en los gráficos se caracterizó por una comprensión de la representación gráfica como una coordinación entre los ejes (filas y columnas uniformes según Battista et al., 1998). En las entrevistas se pudo observar cómo esta coordinación estructurada permitió a los estudiantes interpretar puntos del gráfico, como fue el caso de S1 en la tarea 3, que fue capaz de coordinar las cantidades de los ejes y así leer los puntos del gráfico: “Si doy nueve viajes (dice algo inaudible) en el parque 1 pagas veintitrés ¿y en el parque 2 veintisiete?”

Cuando un alumno es capaz de relacionar dos o más puntos del gráfico describiendo un patrón recursivo realiza *inferencias recursivas*. Aquí pudimos observar cómo los estudiantes pudieron identificar nuevos puntos a partir del anterior, logrando articular una regla que les permitía construir nuevos puntos. Sin embargo, en este nivel el alumno no logró identificar la relación funcional. Como ejemplo de *inferencia recursiva* en el gráfico tenemos el siguiente:

I: Bueno, pero te pregunto entonces, ahora viendo el gráfico, ¿eres capaz de decirme una expresión más general? Una especie de fórmula, algo, para que sepamos cómo funciona la máquina.

S1: Que con una salen cuatro y a partir de ahí van saliendo tres, ya está. Con una más que eches salen tres más (dice mirando y señalando los saltos de las coordenadas en el gráfico).

S1 hizo referencia al patrón recursivo cuando indicó “tres más” mientras señalaba el eje de las coordenadas. Esto muestra que en este nivel aún es necesario recurrir a puntos anteriores para articular

una regla general. El nivel de *inferencias funcionales* se observó cuando los estudiantes generalizaron la relación para todos los puntos utilizando el gráfico. Q1 nos dejó una clara evidencia de ello al mostrar la siguiente relación general entre las variables:

I: Vale. Este punto tres, dos que me estás diciendo, ¿tiene sentido o no?

Q1: No.

I: ¿Por qué?

Q1: Porque el que sale no puede ser mayor que el que entra.

El último nivel se caracterizó por el logro de condensar el gráfico y tratarlo como *objeto matemático*. En este caso describieron el comportamiento y forma de otro gráfico a partir del primero sin necesidad de hacer uno nuevo. Q1 evidenció este nivel cuando al preguntarle por el gráfico de la tarea 2 nos dijo que ya estaba hecho, identificando la igualdad entre las relaciones funcionales involucradas en las tareas 1 y 2:

I: Ah bueno, el gráfico de esta situación ¿cómo lo harías?

Q1: Pues lo mismo, mira, ya está hecho (dice señalando el gráfico trabajado en la tarea 1).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las progresiones de Strachota et al. (2024) nos permiten explicar cómo dos alumnos reificaron un gráfico según el marco proceso-objeto de Sfard (1991). Dentro del marco de Sfard, la etapa de interiorización ocurre cuando un estudiante puede considerar un proceso sin necesidad de realizarlo. Según los niveles que presentamos, esta etapa ocurre en el nivel de pre-interiorización e interiorización que describimos anteriormente ya que tanto en la tabla como en el gráfico los alumnos comenzaron a organizar los diferentes valores dando lugar a los diferentes elementos de las representaciones (e.g., columnas en las tablas y los ejes en los gráficos). Esto quiere decir que los alumnos comenzaron a trabajar con estos elementos de mayor orden, en vez de trabajar con cada valor de manera independiente. La etapa de condensación (Sfard, 1991) ocurre cuando el alumno puede concebir los pares de coordenadas como una unidad, esto se pudo ver cuando los alumnos comenzaron a coordinar las cantidades. Los niveles de inferencias recursivas y funcionales permiten también observar esta fase porque requiere que los estudiantes condensen pares de valores. Cuando condensaron pares de valores consecutivos los alumnos fueron capaces de articular una regla recursiva y cuando la condensación fue total pudieron describir una regla funcional. Finalmente, el proceso de reificación (Sfard, 1991) se observó cuando los alumnos fueron capaces de considerar la tabla y el gráfico como objetos matemáticos. La representación se convirtió en una herramienta que les permitió trabajar en diferentes contextos sin la necesidad de realizar el proceso nuevamente; es decir, sin necesidad de construir un nuevo gráfico o tabla. Volviendo al objetivo de investigación, pudimos identificar los seis niveles para la representación tabular, y cinco niveles para la representación gráfica en dos alumnos españoles. Las evidencias de estos niveles nos permitieron describir con mayor atención cada nivel de las progresiones realizadas por Strachota et al. (2024) en el contexto de Estados Unidos, y así establecer relaciones con el marco proceso-objeto de Sfard (1991). Hemos podido evidenciar con este trabajo que la relación entre las progresiones de Strachota et al. (2024) y el marco de Sfard (1991) es válida tanto para la representación gráfica como para la tabular en distintos contextos y escolares. Vimos cómo los alumnos comienzan a *interiorizar* elementos de la representación, luego fueron capaces de *condensar* pares de valores para finalmente *reificar* las representaciones.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y el Proyecto National Science Foundation DRK-12 #1154355.

Referencias

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. y Borrow, C. V. A. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(5), 503-532. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.29.5.0503

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares. http://funes.uniandes.edu.co/8379/1/2016_Can%CC%83adasMolina.pdf

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124-158. https://doi.org/10.2307/749671

Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S. y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación*, *22*(2), 183-197. https://doi.org/10.1174/113564010791304528

Gibbs, G. R. (2007). Thematic coding and categorizing. *Analyzing qualitative data, 703* (38-56).

Kaput, J., Blanton, M. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–56). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Martí, E., Gabucio, F., Enfedaque, J. y Gilabert, S. (2010). Cuando los alumnos interpretan un gráfico de frecuencias. Niveles de comprensión y obstáculos cognitivos. *Irice, 21*, 65-80. https://doi.org/10.35305/revistairice.v21i21.508

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2023). Una mirada a través de gráficos funcionales del alumnado de quinto de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en educación matemática XXVI* (pp. 435-442). SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/32623/

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (*BOE, num 52,* de 2 de marzo de 2022). https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/02/pdfs/BOE-A-2022-3296.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Strachota, S., López, M. A., Brizuela, B. M., Pérez-Martos, M. C., Gardiner, A. y Blanton, M. (2024). Young students' understandings of function graphs. Paper to be presented at the *18th International Conference of the Learning Sciences*. Buffalo, NY.

Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics, 10*(1) 56. https://doi.org/10.3390/math10010056

CARACTERIZANDO EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DEL FORMADOR DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Characterizing the Mathematics Teachers Educator's Pedagogical Content Knowledge

Pérez-Montilla, A.[a], Cardeñoso, J. M.[a] y Montes, M. Á.[b]

[a]Universidad de Cádiz, [b]Universidad de Huelva

Resumen

Este estudio tiene como objetivo ofrecer evidencias del conocimiento didáctico del contenido de un formador de profesores de matemáticas, identificando elementos que pudieran considerarse como parte de su conocimiento especializado. Reflexionando sobre su papel en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, esbozamos una organización inicial del saber profesional del formador para, a través de un estudio de caso instrumental con un formador de profesores de matemáticas de Secundaria, ilustrar algunos elementos de su conocimiento didáctico del contenido apuntando algunas características que podrían ser indicadores de su saber especializado, como el uso de tareas matemáticas para aclarar o ejemplificar o el modelado de la práctica profesional.

Palabras clave: *formador de docentes de matemáticas, conocimiento didáctico del contenido, educación del docente, docente de matemáticas*.

Abstract

This study aims to provide evidence of the pedagogical content knowledge (PCK) of an MTE (Mathematics Teacher Educator), identifying elements that could be considered part of their specialized knowledge. Reflecting on their role in the professional development of mathematics teachers, we outline an initial organization of the MTE's professional knowledge in order to illustrate, through an instrumental case study with a Secondary school MTE, some elements of their PCK, highlighting some features that could be indicators of their specialized knowledge, such as the use of mathematical tasks to clarify or exemplify, or the modeling of professional practice.

Keywords: *mathematics teacher educator, pedagogical content knowledge, teacher education, teacher of mathematics.*

INTRODUCCIÓN

Existe un consenso cada vez más amplio sobre el papel que desempeñan los formadores de docentes de matemáticas (en adelante FDM) en los procesos de desarrollo profesional del profesorado. Sin embargo, y a pesar de constituir una línea de investigación emergente, todavía son muchos los desafíos existentes. Un aspecto de especial interés para la comunidad investigadora tiene que ver con la identidad profesional del formador, en tanto que son diversos los perfiles y trayectorias (matemáticos, investigadores en Educación Matemática, docentes en activos…) así como contextos (formación inicial y continua) donde acontecen tales procesos de formación.

La literatura de investigación muestra un especial interés por comprender la naturaleza, organización y desarrollo del conocimiento profesional de los FDM. Ejemplo de ello es el trabajo de Giadas et al. (2023) el cual explora los conocimientos, habilidades y características que debería tener un buen FDM a través de un estudio exploratorio con maestros de primaria en activo. Por su parte, Martignone

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes, M. Á. (2024). Caracterizando el conocimiento didáctico del formador de docentes de matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 433-440). SEIEM.

et al., (2022) tratan de aproximarse a la noción de *conocimiento especializado* del FDM y Ferreira et al. (2023) trata de caracterizar la práctica profesional del formador.

A pesar de las diversas aproximaciones teóricas al conocimiento del FDM (Pérez-Montilla y Cardeñoso, 2023), hay una tendencia a utilizar marcos teóricos sobre el conocimiento del docente, a través de los cuales, poder realizar extensiones, ampliaciones e inferencias que permitan caracterizar el conocimiento del formador (Martignone et al., 2022) mientras que otros trabajos (Pascual, 2021; Reyes-Bravo et al., 2023) evidencian que formadores y profesores presentan conocimientos compartidos pero también distintos y que el formador conoce lo que conoce desde otra perspectiva.

En este trabajo aportamos evidencias empíricas del conocimiento didáctico del contenido de la formación que moviliza un formador cuando enseña a futuros profesores de matemáticas de Secundaria. Así, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿qué elementos emergentes en el estudio constituyen conocimiento didáctico del contenido de la formación? ¿cuáles podrían ser especializados? Más concretamente, nos centramos en el subdominio del *conocimiento de la enseñanza del contenido de la formación* descrito en Escudero-Ávila et al. (2021).

CONTEXTUALIZACIÓN TEÓRICA

Naturaleza del Conocimiento del Formador de Docentes de Matemáticas

El contenido de la formación de profesores de matemáticas viene determinado por el modelo de formación, algunas veces implícito y las trayectorias académica y profesional de los formadores (Carrillo et al., 2019). Así, la manera de concebir el conocimiento profesional que requiere un formador para el ejercicio de su profesión está estrechamente vinculada con una visión particular sobre la educación del profesorado y sobre qué papel asume el formador en dicho proceso, lo que ha dado pie a aproximaciones teóricas diversas (Leikin et al., 2018; Pascual, 2021) que reflejan la heterogeneidad de perfiles y de las diversas formas de ser y sentirse FDM.

Por otro lado, llegar a ser docente de matemáticas significa llegar a comprender la enseñanza de las matemáticas como una práctica social en la que hay que aprender a realizar unas tareas y usar y justificar los instrumentos que la articulan en un contexto institucional (Llinares, 2002). Por consiguiente, la formación del profesorado puede entenderse como un proceso en el que los sujetos son introducidos en una comunidad profesional en la cual van participando de forma gradual y progresiva. Asumiendo estos posicionamientos, el FDM trataría de ofrecer oportunidades (Masingila et al., 2018) para que sus estudiantes construyan una identidad profesional propia y sean autónomos profesionalmente, desarrollando un conocimiento profesional que les capacite para hacer frente a los problemas que emerjan de la práctica (Pérez-Montilla et al., 2023), siendo el conocimiento especializado del profesor (Carrillo et al., 2018) una dimensión de su saber relevante para afrontar aquellos problemas relacionados con enseñar matemáticas. Así pues, enseñar matemáticas sería una actividad específica de todo docente de matemáticas, mientras que enseñar a enseñar matemáticas sería una práctica idiosincrática del formador y, por tanto, en el análisis de esta práctica es posible hallar evidencias de su conocimiento especializado (Reyes-Bravo et al., 2023).

Algunos Elementos del Conocimiento del Formador de Docentes de Matemáticas

Escudero-Ávila et al. (2021) estructuraron el conocimiento del contenido de la formación (MTECK en inglés) en: conocimiento, prácticas e identidad profesional. Respecto al conocimiento, estos autores consideran que el formador requiere de un amplio, profundo y complejo conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático, caracterizado por ricas conexiones entre los subdominios que lo integran, las cuales le permitirían desempaquetar la enseñanza de las matemáticas y ayudar a los docentes a tomar conciencia de sus decisiones. Por otro lado, y asumiendo el carácter práctico del saber del profesor, un FDM debería conocer qué actividades hace un profesor y qué competencias, capacidades y habilidades necesita desarrollar.

Finalmente, también necesitaría un conocimiento profundo sobre las diversas formas de ser y sentirse docente de matemáticas y de los factores que influyen en su construcción, de manera que su rol no se reduzca a prescribir prácticas pedagógicas, sino en ayudar a que los posicionamientos de los estudiantes evolucionen desde posturas más acríticas, hacia otras de carácter investigativo y abierto.

Respecto al conocimiento didáctico del contenido (MTEPCK en inglés), Carrillo et al. (2019), parafraseando a Shulman, lo definen como el saber que permite al formador transformar el contenido de la formación en formas más accesibles. Este conocimiento, guiaría al formador cuando selecciona tareas profesionales, recursos o ejemplos con los que potenciar las experiencias de aprendizaje de los estudiantes, anticipa cómo interactuarán con el contenido, interpreta y da sentido a las interacciones que acontecen dentro del aula y evalúa el grado de desarrollo profesional en un aspecto determinado.

Respecto a la organización del MTEPCK, Escudero-Ávila et al. (2021) identificaron tres subdominios: conocimiento de la enseñanza del contenido de la formación, conocimiento de las características del desarrollo profesional y conocimiento de los estándares del contenido de la formación. En referencia al primero, informa sobre potenciales tareas, estrategias, recursos y ejemplos con los que amplificar las oportunidades de aprendizaje a través de la interacción entre los estudiantes y el contenido a aprender (Pérez-Montilla y Arnal-Palacián, 2023). Además, incluye conocimiento sobre diversas teorías de enseñanza que guiarían al FDM acerca de cómo organizar la formación inicial o continua. Por su parte, el conocimiento de las características del desarrollo profesional informa sobre cuestiones vinculadas a los procesos de desarrollo profesional tales como la manera en que construyen conocimiento profesional, la evolución de la identidad profesional, o los distintos grados de desarrollo en las competencias docentes. Finalmente, el conocimiento de los estándares del contenido de la formación citando a Carrillo et al. (2019) “debe conllevar la capacidad de establecer, justificar, evaluar metas de aprendizaje de los futuros profesores” (p. 333).

METODOLOGÍA

Este trabajo trata de recoger evidencias que caractericen el subdominio del conocimiento de la enseñanza del contenido de la formación a través de un estudio de caso instrumental (Bassey, 2003) y adoptando un enfoque cualitativo-interpretativo. Nuestro informante, Víctor, es licenciado en matemáticas y docente de Secundaria con más de 27 años de experiencia, además de tener 5 años como FDM en el Máster de Secundaria de la Universidad de Cádiz. Su elección deriva de criterios de disponibilidad y de su doble perfil, el cual puede proporcionar evidencias útiles para este estudio.

Debido a los recursos disponibles, sólo se grabaron en audio y vídeo 6 sesiones, todas dentro del módulo análisis curricular y del aprendizaje de las matemáticas, el primero de la asignatura Aprendizaje y Enseñanza en la Especialidad de Matemáticas. Esta materia consta de 18 sesiones en total y se articula en torno al módulo antes mencionado y otro denominado programación didáctica y situaciones de aprendizaje en matemáticas habiéndose transcrito y analizado, por ahora, las sesiones 1, 2, 5 y 6. En referencia al proceso de análisis, se seleccionaron unidades de información que incidieran en el fenómeno de estudio y se adoptó un análisis top-down, bottom-up (Grbich, 2003). La parte top-down se realizó a partir de una revisión bibliográfica (Chick y Beswick, 2018; Pascual, 2021; Pérez-Montilla y Arnal-Palacián, 2023) que nos facilitase elementos del conocimiento didáctico del contenido de la formación de un FDM a priori. Con dicha información teórica, se estableció una codificación apriorística y se analizaron los datos en bruto comenzando la parte bottom-up. En esta etapa, se refinaron las descripciones iniciales de dichos elementos del conocimiento en función de la información contenida en los segmentos, incluyendo aquellos matices emergentes que fueron apareciendo hasta alcanzar un importante grado de saturación teórica. La validación se consiguió tras sucesivas etapas de análisis y discusión, donde se llegó a un consenso entre miembros para la codificación y descripción de posibles elementos del subdominio conocimiento de la enseñanza del contenido de la formación quedando ya sintetizados y refinados en la tabla 1.

Tabla 1. Elementos del Conocimiento del Formador tras el análisis. Elaboración Propia

	Elementos de Conocimiento	Evidencias
Conocimiento de la Enseñanza del Contenido de la Formación (CE)	Instrumentos Técnicos para enseñar a Docentes	Diapositivas Infografías
	Ejemplos para enseñar el contenido	Tareas Matemáticas
	Estrategias y técnicas para enseñar a docentes	Uso de preguntas Modelado de la Enseñanza Comentarios

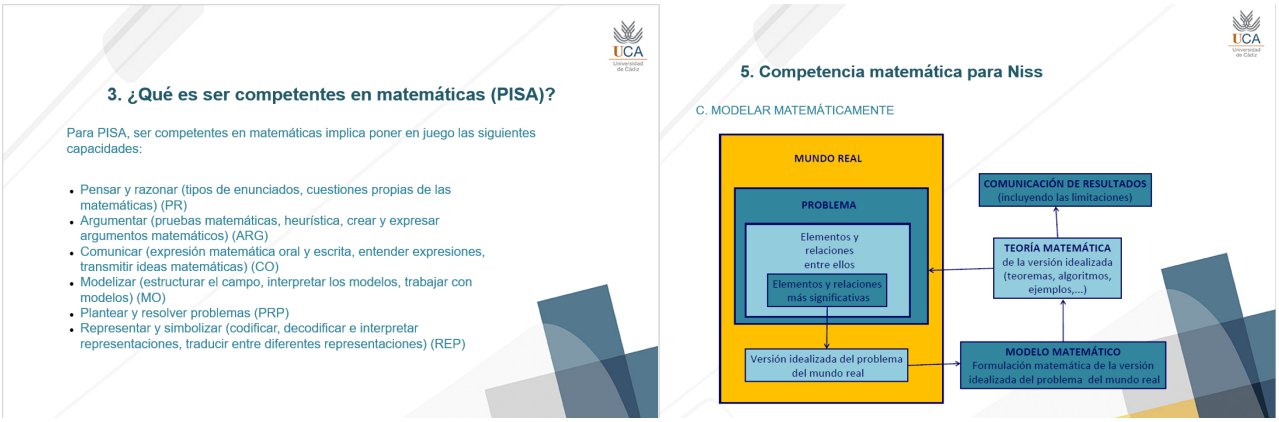
Por cuestiones de espacio, se han tomado solamente segmentos procedentes de las sesiones 5 y 6 las cuales se enmarcan en el submódulo Currículum de la ESO y el Bachillerato dentro del módulo primero. En la sesión 5 los estudiantes para profesor de Secundaria de Matemáticas (en adelante EPP) abordaron la noción de competencia matemática desde la perspectiva de PISA (Rico, 2007) y Niss (Niss y Højgaard, 2019) y diseñaron una herramienta para poder analizar si una tarea matemática desarrollaba competencias de Niss. En la sesión 6 compartieron y debatieron en gran grupo estos instrumentos y diseñaron también en pequeños grupos una tarea matemática que desarrollase hasta un máximo de 3 competencias. La codificación de los diálogos para el caso del formador será F-X-N donde X indica la sesión y N el número de la intervención mientras que para los EPP se utilizará EPP-X-N con X un identificador del estudiante y N el número de la intervención.

RESULTADOS

Conocimiento del Formador sobre Instrumentos para Enseñar a Docentes de Matemáticas

En la sesión 5, durante una exposición magistral, Víctor compartió con los estudiantes un PPT titulado Estudio crítico y comparación entre Niss-LOMCE y la visión desde Pisa (ver figura 1) en el que incluía una síntesis sobre las competencias matemáticas de PISA y Niss. Además, evidenció conocimiento sobre cómo diseñarlos ya que las diapositivas incluyeron preguntas, infografías o mostraban enunciados de tareas matemáticas a modo de ejemplo.

Figura 1. El PPT y la infografía como recursos técnicos del formador



Además, Víctor empleó una infografía (figura 1 a la derecha) con el fin de ayudar a los EPP a comprender qué significa modelar matemáticamente, así como los elementos, relaciones y etapas del proceso. Estos recursos tenían como objetivo ayudar a Víctor a promover la construcción de conocimiento sobre los estándares del aprendizaje de las matemáticas y conocimiento sobre la práctica matemática[8] en los futuros profesores.

8 Estos elementos del conocimiento del docente de matemáticas se incluyen en el modelo MTSK de Carrillo et al. (2018).

Otros recursos empeleados fueron documentos científicos de didáctica de las matemáticas que acompañaban a la tarea profesional de la sesión 5. Víctor mostró cómo podría utilizarse dicha información teórica para ayudarles a desarrollar la competencia mirar profesionalmente[9] las tareas (Llinares et al. 2019):

F-5: Ellos [los autores] dicen, mira, pensar y razonar, pensar y razonar matemáticamente ¿no? entonces ellos se plantean unos objetivos ¿no? y se preguntan ¿esa actividad está planteada a partir de preguntas con el objetivo de buscar una respuesta? Y establecen tres opciones que quieren mirar. Dicen, por ejemplo, mira, ¿se responde de forma única? No es lo mismo una pregunta que se responda de forma única que una pregunta que tenga posibilidad de varias respuestas […]

Conocimiento del Formador sobre Ejemplos para Enseñar el Contenido de la Formación

Mientras explicaba el marco de Niss y la competencia modelizar matemáticamente, les mostró el enunciado de una tarea matemática, enriqueciendo el conocimiento de los EPP sobre dicha práctica matemática y sobre tipos de tareas. También les anticipó cómo sus futuros alumnos podrían interactuar con la tarea y les dio indicaciones sobre en qué cursos o bloques del currículum podrían proponerse[10]:

F-5: Por entenderlo con un gráfico [modelizar matemáticamente] aquí vemos el típico problema de cálculo de volúmenes o áreas, que esto se puede hacer perfectamente en 3º o 4 ESO ¿no? Cuando vemos que tenemos que calcular algo relacionado con una casa [hay un dibujo de una choza] y automáticamente el alumno está pensando [hay un niño pensando en una pirámide y un cilindro] la convierto en un cubo, un cono y así soy capaz de trabajar.

Otras veces las tareas matemáticas mostradas por el formador constituyeron una buena elección para ofrecer ejemplos donde determinadas características de la tarea o aspectos de la teoría podían identificarse fácilmente, lo que resultaba útil para superar dificultades, errores u obstáculos:

F-5: Un problema de tipo cerrado sería, el típico, un cateto de un triángulo mide 5 cm, la hipotenusa mide 7. Halla la medida del otro cateto. Un problema abierto sería, oye pues mira, queremos plantar un huerto de margaritas en el patio. ¿Cómo puedo organizar el huerto para que le dé el mayor número de horas posibles de sol? Es un problema abierto, no hay una respuesta correcta, múltiples soluciones, múltiples vías de acceso al problema [...] Los problemas abiertos son más difíciles, no tienen una respuesta, digamos, estandarizada, pero lo interesante es más que nada lo que hace el alumno resolviendo ese problema.

Conocimiento del Formador sobre Estrategias y Técnicas para Enseñar a Docentes

Víctor empleó preguntas o invitaciones para iniciar debates colectivos: "quisiera preguntarle a la clase qué os parece el problema 56" (F-5) y en las interacciones con los EPP, con el fin de comprender mejor sus razonamientos y ayudarles. En el diálogo siguiente, parece intuir una debilidad en el diseño de la tarea que estaba diseñando un grupo de estudiantes y vinculada al uso de un recurso tecnológico, así que les pide aclaraciones sobre qué papel desempeñaban las competencias de Niss en los objetivos pretendidos con la tarea:

F-6-1: A ver si yo os entiendo, vosotros lo que estáis intentando es… (una EPP lo interrumpe).

EPP-6-1: No. Es, por ejemplo, que si hacen un ejercicio que puedan comprobárselo [el sistema de ecuaciones] de alguna manera.

[9] La mirada profesional o noticing es una competencia profesional del profesor de matemáticas la cual incluye tres capacidades interrelacionadas: identificar aspectos relevantes de una situación, interpretarlos y decidir cómo actuar.

10 Estos elementos del conocimiento del docente de matemáticas pertenecen al modelo MTSK de Carrillo et al. (2018): conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y estándares de la enseñanza (KSLM).

F-6-2: Lo que pasa que lo que te va a poder comprobar [la app] es el resultado nada más... Vale, pero no olvidemos que lo que queremos es que los alumnos sean de algún modo competentes. No sé qué competencias [de Niss] estáis buscando desarrollar.

En otras ocasiones utilizó representaciones de la práctica como estrategia para facilitar el desarrollo de habilidades, capacidades y competencias vinculadas a la enseñanza como la capacidad de anticipar respuestas de los alumnos, necesaria para planificar la enseñanza y diseñar tareas:

F-6: A lo mejor, un alumno de 1ºESO lo puede hacer [la tarea] y simplemente se va a plantear el tema de distancias e intentar que el vehículo más rápido sea el que utilicen para la mayor distancia. Por ejemplo, ¿no?, y simplemente son comparaciones u ordenar numéricamente magnitudes y para 1º ESO estaría bien. Y, a lo mejor, para un alumno de 4ªESO lo va a orientar de otra manera, ya sabes, más de física, puede utilizar fórmulas… Se puede prestar para mucho.

Además, estas representaciones solían ir acompañadas de comentarios aclarativos o de ampliación sobre distintos aspectos en los que percibiese dificultad. En el siguiente fragmento, el informante trata de ayudar a un grupo de EPP a utilizar la información teórica facilitada para mirar profesionalmente una tarea, mostrándoles una serie de criterios o aspectos relevantes a identificar:

F-6: Aquí, por ejemplo, ¿no? Fijaos. Aunque aquí [los autores] están pensando en la evaluación yo creo que os puede servir de pista. Fijaos, hablan de qué tipo de contexto se está utilizando, si las tareas requieren comprensión o reflexión, si requieren creatividad… Podéis hacer un instrumento en el que utilicéis esta tabla para decir, pues mira, mi actividad es creativa o dirigida; está contextualizada o no está contextualizada; es familiar o no es familiar [cercana a los alumnos]… De manera que marcando qué ítems entendéis que se están cumpliendo [en la tarea] sabéis si se desarrolla la competencia o no desarrolla la competencia.

Finalmente, Víctor utilizó los comentarios para enriquecer las aportaciones de los EPP además de sugerirles formas de actuación en el aula que, en algunos casos, daban pie a debate: “claro, que utilicen programas, que luego, por ejemplo, los hagan con gráficas, que preparen una presentación, un canvas, lo que consideren…” (F-6). Otras veces incluía comentarios aclarativos en sus exposiciones magistrales anticipándose a posibles dificultades de los EPP:

F-5: Ser capaz de seguir una cadena de argumentos, pero que ojo, no la he hecho yo sino otra persona. Y ahí podéis entender que esto es importante para [los alumnos] leer un libro de texto en matemáticas ¿no?, donde, aparecen cadenas de argumentos que ha hecho otra persona, con otra notación que a lo mejor me es ajena y que tengo que ser capaz de seguir.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los primeros resultados obtenidos apuntan a algunos elementos del conocimiento didáctico del formador que no parecen constituir conocimiento especializado como el uso de infografías, diapositivas o la mayéutica. En este sentido, cualquier enseñante puede utilizar tales recursos para organizar y sintetizar información, acompañándolas de infografías y/o preguntas. Igualmente, las preguntas para iniciar un debate o para indagar en el pensamiento de los EPP, no son exclusivas de los FDM por lo que para confirmar su posible carácter especializado quizás sería necesario evidenciar una comprensión profunda del contenido de la formación -currículum y competencias de Niss- ligada a su enseñanza/aprendizaje que justifique el uso de estos recursos, en analogía con la definición de conocimiento especializado del MTSK de los docentes.

No obstante, los resultados sí que nos permitieron identificar algunos conocimientos que podrían considerarse como especializados del formador. En primer lugar, la forma en que se utilizan diversas fuentes teóricas provenientes de la didáctica de las matemáticas (Pérez-Montilla y Arnal-Palacián, 2023) constituiría una evidencia ya que podría pensarse que estos recursos no serían adecuados para ser usados por alumnos de las etapas de Primaria o Infantil, pero sí para los EPP o docentes en activo. Por otro lado, aunque el conocimiento sobre tareas para enseñar matemáticas sea compartido por docentes y formadores, los primeros las utilizan para promover y potenciar el aprendizaje matemático

de los alumnos mientras que el formador las usaría para fabricar ejemplos con los que potenciar la construcción de diversas dimensiones del conocimiento especializado en los EPP, evidenciando una comprensión profunda del contenido así como ricas conexiones entre subdominios, característica muy elocuente del conocimiento del FDM.

Finalmente, cuando Víctor modela diversos aspectos de la enseñanza de las matemáticas muestra una comprensión profunda de la práctica al ser capaz de reconstruir y deconstruir situaciones en contextos escolares, centrándose en aquellos aspectos que considera relevantes según las necesidades de los EPP e incorporando en su discurso y de forma gradual distintos elementos, a fin de complejizarlas y aumentar la autenticidad de éstas. Estas decisiones son claramente intencionales y necesarias en un contexto de formación del profesorado de matemáticas que apuntarían a esa doble mirada del formador (Reyes-Bravo et al., 2023) y por tanto, a la especialización de su saber.

Como limitación del estudio, quisiéramos resaltar el hecho de no haber hecho mención al conocimiento sobre tareas profesionales para la formación, debido a la extensión, aunque esperamos que este trabajo haya servido a los investigadores para caracterizar distintos elementos del saber del formador así como para promover un debate dentro de la comunidad investigadora en torno a indicadores que nos permitan ir conformando una idea sobre qué se entiende por conocimiento especializado de un formador de docentes de matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con la ayuda del grupo HUM-462 Desarrollo Profesional del Docente, de la Red MTSK, así como el proyecto PID 2021-122180OB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE, y del Grupo DESYM HUM-168, así como por el Proyecto ProyExcel_00297 de la Junta de Andalucía.

Referencias

Bassey, M. (2003). *Case Study Research in Educationl Settings* (P. Sikes (ed.)). Open University Press.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M., Codes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2019). El conocimiento didáctico del contenido del formador de profesores de matemáticas: su construccion a partir de análisis del conocimiento especializado pretendido en el futuro profesor. En F. Imbernón, A. Shigunov y I. Forrtunato (Eds.), *Formação permanente de professores: experiências iberoamericanas. São* (pp. 324–341). Edições Hipótese.

Chick, H. y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), 475–499. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9362-y

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). What Do Mathematics Teacher Educators Need to Know? Reflections Emerging from the Content of Mathematics Teacher Education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges* (pp. 23–40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

Ferreira, M. C. N., Ponte, J. P. y Ribeiro, A. J. (2023). Professional learning opportunities for teachers of the Early Years in algebra teaching: a study on the practice of a teacher educator. *Acta Scientiae*, *25*(2), 1–32. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7367

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). ¿Qué características debe tener un formador? La perspectiva de maestros de Educación Primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 275–282). SEIEM.

Grbich, C. (2003). *New approaches in social research*. SAGE

Leikin, R., Zazkis, R. y Meller, M. (2018). Researcgruh mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), 451–473. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9

Llinares, S. (2002). La práctica de enseñar y aprender a enseñar matemáticas. La generación y uso de instrumentos de la práctica. *Revista de Enseñanza Universitaria*, 19(19), 115–124. http://institucional.us.es/revistas/universitaria/19/Salvador Llinares.pdf

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À. y Groenwald, C. (2019). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. In E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 177–192). Ediciones de la Universidad de Salamanca.

Martignone, F., Ferretti, F. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). What aspects can characterize the specialised knowledge of a mathematics teacher educator? *Educacion Matematica*, *34*(3), 301–328. https://doi.org/10.24844/EM3403.11

Masingila, J. O., Olanoff, D. y Kimani, P. M. (2018). Mathematical knowledge for teaching teachers: knowledge used and developed by mathematics teacher educators in learning to teach via problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), 429–450. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9389-8

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Pascual, M. I. (2021). *El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso* [Tesis Doctoral Universidad de Huelva]. http://hdl.handle.net/10272/20208

Pérez-Montilla, A. y Arnal-Palacián, M. (2023). An approach to the teacher educator's pedagogical content knowledge for the development of professional noticing in Pre-Service teacher education. *Education Sciences*, *13*(6), 544. https://doi.org/10.3390/educsci13060544

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes, M. A. (2023). Una aproximación al conocimiento del formador de docentes de matemáticas en la formación inicial. En Clara Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 443–450). SEIEM.

Reyes-Bravo, M., Pascual, M. I., Estrella, S., Tarisfeño, S. y Contreras, L. C. (2023). La "doble mirada" del formador de profesores de matemáticas como característica identificativa de su conocimiento. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 182–189). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Rico, L. (2007). La Competencia Matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47–66. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6215

COMPETENCIA DIAGNÓSTICA DE FUTUROS MAESTROS: IDENTIFICANDO ERRORES A PARTIR DE UNA SITUACIÓN DE ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

Diagnostic competence of pre-service teachers: identifying errors from an algebra teaching situation

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y.

Universitat de Girona

Resumen

Se analiza la competencia diagnóstica de 76 futuros maestros de educación primaria a partir de la identificación y gestión de errores cometidos por escolares en una situación de enseñanza del álgebra sobre el significado del signo igual como expresión de equivalencia. A partir de la técnica de análisis de contenido, se analizan tres categorías de la competencia diagnóstica: a) detección del error; b) sugerencias de causas; y c) gestión del error. Los resultados revelan que los futuros maestros identifican errores matemáticos sobre el signo igual de manera adecuada; sin embargo, presentan ciertas imprecisiones para detectar las posibles causas del error y proponer estrategias adecuadas que permitan gestionar tales errores. Se concluye que es necesario brindar experiencias de formación a los futuros maestros que entreguen herramientas para abordar los errores relacionados con el significado del signo igual y avanzar hacia el desarrollo de la competencia diagnóstica.

Palabras clave: *competencia diagnóstica, detección de errores, álgebra, futuros maestros, educación primaria.*

Abstract

The diagnostic competence of 76 preservice primary school teachers is analyzed on the basis of the identification and management of errors made by schoolchildren in an algebra teaching situation on the meaning of the equal sign as an expression of equivalence. Using the content analysis technique, three categories of diagnostic competence are analyzed: a) error detection; b) suggestions of causes; and c) error management. The results reveal that the preservice teachers identify mathematical errors about the equal sign adequately; however, they present certain inaccuracies in detecting the possible causes of the error and proposing appropriate strategies to manage such errors. It is concluded that it is necessary to provide preservice teachers with training experiences that provide tools to deal with errors related to the meaning of the equal sign and to advance towards the development of diagnostic competence.

Keywords: *diagnostic competence, detection of errors, algebra, pre-service teachers, elementary education.*

INTRODUCCIÓN

El error es considerado un factor importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, puesto que conforma un dato empírico que deja en evidencia un desconocimiento o conocimiento inadecuado que posee un estudiante o un grupo de estudiantes sobre un determinado contenido matemático (Lupiáñez y Rico, 2015). De ello, se desprende que el profesorado de matemáticas debe tener habilidades para diagnosticar y abordar los errores cometidos por los estudiantes al aprender matemáticas ya que, para apoyar su aprendizaje, el profesorado requiere desarrollar una adecuada competencia diagnóstica.

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. (2024). Competencia diagnóstica de futuros maestros: identificando errores a partir de una situación de enseñanza del álgebra. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 441-448). SEIEM.

Según Vogt y Rogalla (2009), la competencia diagnóstica del profesorado es necesaria, puesto que "los docentes tienen el desafío de satisfacer diversas necesidades de aprendizaje y adaptar su enseñanza a habilidades académicas heterogéneas, así como a múltiples intereses y motivaciones" (p. 1051). Desde una concepción amplia, la competencia diagnóstica se define como "todas las habilidades necesarias para cumplir tareas diagnósticas" (Schrader, 2011, p. 683). En consecuencia, la capacidad de identificar las concepciones erróneas de los estudiantes forma parte de esta competencia (Heinrichs y Kaiser, 2018).

Este estudio se focaliza en los errores escolares de álgebra y, más concretamente, en los errores vinculados al concepto de igualdad y el significado del signo igual como expresión de equivalencia (Molina et al., 2009). Los motivos son básicamente dos: primero, porque el sentido algebraico se ha incorporado recientemente de forma explícita en el currículo español de educación primaria (MEFP, 2022); y segundo, porque aún son escasos los estudios que analizan la manera en que el profesorado aborda los errores escolares en tareas matemáticas de naturaleza algebraica en los primeros niveles de escolaridad.

Así pues, considerando la importancia que tiene la competencia diagnóstica del profesorado como el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra en las primeras edades, incluyendo el error y su gestión como una herramienta que ayuda a la comprensión de este proceso. Por tanto, asumimos que es necesario profundizar en situaciones de error escolar en torno a saberes básicos del sentido algebraico como un escenario clave que permite al profesorado transitar hacia el desarrollo de dicha competencia. Desde esta perspectiva, nos preguntamos: ¿cómo abordan los errores de los escolares en una tarea algebraica los futuros maestros de educación primaria?

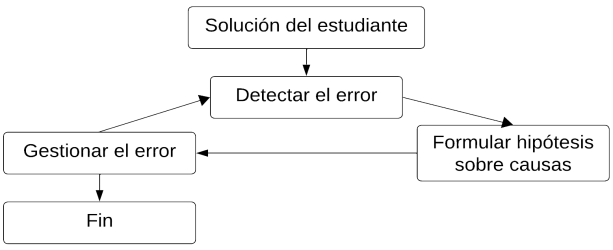
Para dar respuesta a esta pregunta de investigación, se asume el modelo de competencia diagnóstica en situaciones de error propuesta por Heinrichs y Kaiser (2018). Con base en este marco, el objetivo de nuestro estudio consiste en describir cómo los futuros maestros de educación primaria identifican y gestionan los errores cometidos por escolares al desarrollar una tarea algebraica sobre el significado del signo igual como expresión de equivalencia.

COMPETENCIA DIAGNÓSTICA EN SITUACIONES DE ERROR

Como se ha señalado en la introducción, la competencia diagnóstica juega un papel importante en la educación matemática, puesto que es una de las competencias que requiere el profesorado para alcanzar el desarrollo de una enseñanza exitosa de las matemáticas (e.g., Heinrichs y Kaiser, 2018; Lupiáñez y Rico, 2015; Vogt y Rogalla. 2009).

Heinrichs y Kaiser (2018) definen la competencia diagnóstica como "la competencia necesaria para llegar a juicios implícitos basados en la evaluación formativa en situaciones de enseñanza mediante el uso de métodos informales y semi-formales" (p. 81). Los autores concretan la competencia diagnóstica del profesorado para abordar los errores que pueden tener los escolares al enfrentarse a una determinada tarea matemática, a través de un modelo centrado en el proceso de diagnóstico de situaciones de error (Figura 1).

Figura 1. Modelo del proceso de diagnóstico en situaciones de error (Heinrichs y Kaiser, 2018, p.84)



El modelo propuesto por Heinrichs y Kaiser (2018) orienta la detección de errores matemáticos desde un punto de vista no estático, es decir, no se centra en la precisión del juicio, sino más bien se enfoca en el proceso de diagnóstico, fomentando las decisiones que debe tomar el profesorado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Así pues, el modelo plantea tres fases que debe considerar el profesorado para llevar a cabo el proceso de diagnóstico, primero es necesario percibir o identificar el error, posteriormente el profesorado requiere formular una hipótesis sobre las posibles razones del error, seguidamente sobre la base de esta hipótesis, se requiere encontrar una estrategia para gestionar el error, de manera que los estudiantes superen la idea errónea.

Cabe destacar que, la primera fase de detección del error es crucial para gestionarlo posteriormente, dado que una reacción solo es posible cuando se percibe un error. Sin embargo, la segunda fase del proceso de diagnóstico en situaciones de error puede considerarse la más compleja y la parte central del modelo, ya que es un punto en común que comparte con otros modelos de competencia diagnóstica (e.g., Cooper, 2009; Klug et al., 2013). Es importante que el profesorado determine las fuentes de errores, ya que "enseñar implica más que identificar las respuestas correctas. Una enseñanza hábil requiere ser capaz de evaluar la fuente de un error matemático" (Ball et al, 2008, p. 397). Por último, la tercera fase, resulta fundamental para fomentar la comprensión de los estudiantes, no obstante, son escasos los estudios empíricos sobre las formas apropiadas o eficaces de abordar los errores en matemáticas. En el caso de la competencia diagnóstica, que es el foco de nuestro estudio, se ha identificado la investigación de Fernández-Plaza et al. (2019) que, desde dicho enfoque, analizan cómo los futuros maestros detectan errores cometidos por escolares en el contexto de una tarea de representación de fracciones. Los resultados revelan que, a nivel general, los futuros maestros realizan la detección del error de forma adecuada, sin embargo, les resulta más complejo el identificar el error.

En el marco específico de las investigaciones sobre errores algebraicos y la formación de profesores, los estudios se han centrado fundamentalmente en identificar los errores que cometen los futuros profesores, por ejemplo, en la creación y extensión se secuencias (e.g., Kurz y Lee, 2023) o en el planteamiento de problemas sobre ecuaciones de primer grado (e.g., Isik y Kar, 2012). Con el propósito de ampliar el campo, nuestro estudio se ha centrado en una situación de error escolar vinculada con el signo igual, puesto que es considerado un elemento fundamental del pensamiento algebraico temprano (Blanton et al., 2015). Dicha situación, como se ha indicado, hace mención a la comprensión relacional del signo igual mediante uno de sus significados, como es la expresión de una equivalencia. Este significado se refiere al uso del signo igual para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático (Molina et al., 2009). Más concretamente, se utiliza en el contexto de una equivalencia numérica, al relacionar dos expresiones con un mismo valor numérico.

METODOLOGÍA

De acuerdo con el propósito de la investigación, se ha adoptado un enfoque metodológico cualitativo de carácter descriptivo (Cohen et al., 2017) en el que han participado 76 futuros maestros del Grado en Maestro en Educación Primaria, pertenecientes a una universidad de España.

Los participantes son estudiantes de la asignatura de Matemáticas 2, donde se profundiza en los saberes y estrategias de enseñanza del sentido algebraico, sentido de la medida y sentido espacial. La asignatura tiene un enfoque didáctico-disciplinar y la investigación se ha llevado a cabo al finalizar el bloque de álgebra, luego de ahondar en el tratamiento de contenidos, recursos y estrategias de enseñanza para abordar el álgebra de 6 a 12 años, así como en las limitaciones de su aprendizaje, más concretamente la identificación de posibles errores algebraicos y la búsqueda de estrategias para su gestión.

En el contexto de una sesión de clases regular del proceso de formación (80 minutos), se ha propuesto a los futuros docentes responder una situación de enseñanza algebraica en educación primaria mediante un cuestionario, en la que se han añadido respuestas erróneas de escolares. La situación de enseñanza (Figura 2) ha sido tomada y adaptada del estudio de Souza et al. (2020) para profundizar en el conocimiento de los futuros docentes en diversos escenarios del proceso de enseñanza del álgebra en edades tempranas. En dicha situación, se explora el significado del signo igual como expresión de equivalencia, a través de una equivalencia numérica, donde se relacionan dos expresiones aritméticas que arrojan un mismo valor numérico.

Para dar respuesta a la situación de enseñanza, se requiere que: a) los participantes identifiquen las respuestas correctas y erróneas de los escolares justificando su decisión; b) evidencien las dificultades y errores que presentan los escolares para resolver el problema; y c) planteen una propuesta para ayudar a los escolares que han respondido de manera errónea. Las respuestas otorgadas por los futuros docentes constituyen las unidades de análisis del estudio.

Figura 2. Situación de enseñanza planteada a los futuros maestros

Una maestra estaba analizando las respuestas de los alumnos de su clase de 4º grado, luego de plantear el siguiente problema:

Los hermanos Arturo y Cecilia recibieron de su tía la misma cantidad de dinero. Arturo decidió guardar 20 euros en su hucha y guardar una cantidad de dinero para llevar a la escuela. Cecilia guardó en su hucha 16 euros y cogió lo restante para comprar algunos adhesivos.
Como ambos niños recibieron la misma cantidad de dinero, podemos establecer la igualdad:
20 + ___ = 16 + ___
Determine el valor que cada niño cogió para sus gastos. Explique cómo llegó al resultado.

Carlos, Joaquín y Cristina:
"Arturo llevó a la escuela 10 euros y Cecilia separó 14 para comprar sus adhesivos.
Nosotros pensamos que, si recibieron la misma cantidad, entonces Cecilia se gastó 4 euros más que su hermano y creemos que se llevó 10 euros, porque en la escuela sólo se puede llevar un máximo de 10 euros. Así que tenemos 20 + 10 = 30 y 16 + 14 = 30"

Santiago, Raquel y Carolina:
"Arturo llevó a la escuela 36 euros y Cecilia gastó los mismos 36 euros en adhesivos, porque tenían la misma cantidad.
Llegamos a esta respuesta, juntando los valores que aparecen en la cuenta: 20+16"

Paula, Mateo y Mauricio:
"Arturo llevó a la escuela 5 euros y su hermana gastó 9 euros en adhesivos. Nosotros pensamos que, si ambos recibían la misma cantidad y él guardaba 4 euros más en su hucha, entonces Cecilia tenía 5 euros más 4 euros para gastar en adhesivos. Obtenemos esta respuesta haciendo 20 + 5 = 16 + 9, porque Arturo ahorró 4 euros más que su hermana"

Preguntas:
a) ¿Qué respuesta(s) debería aceptar la maestra como correcta(s)? ¿Por qué?
b) ¿Qué dificultades evidencian los alumnos del curso para resolver el problema?
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea?

Categorías y procedimiento de análisis

Las unidades de análisis se han examinado con base en las categorías de la competencia diagnóstica propuestas por Heinrichs y Kaiser (2018): a) detección del error; b) sugerencias de causas; y c) gestión del error. La descripción de cada categoría ha permitido guiar el análisis durante el proceso de codificación, como se aprecia en la Tabla 1.

Tabla 1. Categorías de análisis utilizadas en el proceso de codificación

Categoría	Descripción
Detección del error	Se registran las respuestas de Santiago, Raquel y Carolina como incorrectas, puesto que no establecen una relación entre las expresiones aritméticas en ambos lados de la igualdad.
Sugerencias de causas	Se formulan conjeturas sobre las posibles dificultades de los escolares que responden de manera errónea, en este caso, la relación de dos representaciones de un mismo valor numérico.
Gestión del error	Se proponen estrategias de enseñanza para remediar el error centradas en el uso correcto del signo igual como expresión de equivalencia.

La codificación de los datos ha considerado, en primer lugar, una lectura exhaustiva y registro de las respuestas otorgadas por los futuros maestros en una hoja de cálculo de MS Excel®. Posteriormente, se ha realizado un análisis de contenido de los argumentos señalados en cada pregunta planteada. Para ello, se ha procedido a agrupar las respuestas y categorizarlas por medio de un proceso cíclico e inductivo, característico del análisis cualitativo de los datos (Bisquerra, 2004).

Para garantizar la confiabilidad del proceso de codificación, los autores han efectuado sesiones de codificación conjunta y discusión de desacuerdos, estableciendo un consenso.

RESULTADOS

Considerando nuestro objetivo de estudio, se describen los datos obtenidos en una situación de enseñanza algebraica a partir de las categorías de la competencia diagnóstica en situaciones de error propuestas por Heinrichs y Kaiser (2018).

Detección del error

A partir de las 76 respuestas otorgadas por los futuros maestros, se han analizado las producciones de los escolares que deben aceptarse como correctas e incorrectas (Tabla 2).

Tabla 2. Frecuencias de detección del error

Respuestas de escolares	Correcto *f* (%)	Incorrecto *f* (%)
Carlos, Joaquín y Cristina	76 (100%)	0 (0%)
Santiago, Raquel y Carolina	5 (6.6%)	71 (93.4%)
Paula, Mateo y Mauricio	75 (98.7%)	1 (1.3%)

Se observa que la totalidad de los futuros maestros ha indicado que la producción de Carlos, Joaquín y Cristina es correcta. Por ejemplo, el futuro maestro 11 señala: “La respuesta de Carlos, Joaquín y Cristina es correcta porque la igualdad se mantiene y los niños muestran un caso particular de su realidad más cercana con los valores numéricos que utilizan”.

Por otra parte, 71 futuros maestros (93.4%) logran detectar el error, señalando la producción de Santiago, Raquel y Carolina como incorrectas. Algunos ejemplos de respuesta indican: “el segundo grupo de estudiantes no plantea la igualdad entre lo ahorrado y lo gastado por cada hermano, simplemente suman las cantidades, no debería aceptarse como correcta” (futuro maestro 8); “La respuesta de Santiago, Raquel y Carolina es incorrecta porque muestra una falta de comprensión lectora, ya que Cecilia no gasta todo el dinero en adhesivos, en su respuesta no se observa una equivalencia numérica” (futuro maestro 39).

En relación con la producción de Paula, Mateo y Mauricio, un futuro maestro la señala como incorrecta a pesar de que la respuesta es correcta; sin embargo, no justifica el por qué. El 98.7% de los futuros maestros asume esta producción como correcta señalando, por ejemplo: “Debería aceptar la respuesta de Paula, Mateo y Mauricio como correcta porque la igualdad que presentan está bien planteada” (futuro maestro 49).

Sugerencias de posibles causas del error

La Tabla 3 muestra las justificaciones entregadas por los 71 futuros maestros que han identificado el error, sobre las posibles dificultades que presentan los escolares durante el desarrollo del trabajo con una expresión de equivalencia.

Tabla 3. Justificaciones sobre las posibles causas del error otorgadas por los futuros maestros (*n*=71)

Dificultades que presentan los escolares	*f* (%)
Interpretar la igualdad como una expresión de equivalencia	4 (5.6%)
Comprender que el problema tiene varias posibles soluciones para mantener la equivalencia de la expresión numérica	17 (23.9%)
Comprender el aspecto relacional del signo de igualdad	8 (11.3%)

Comprender el enunciado del problema	21 (29.6%)
Otras respuestas y argumentaciones	6 (8.5%)
No responden	15 (21.1%)

A nivel general, se observa que alrededor del 40% de los futuros maestros identifican posibles causas del error vinculadas a la comprensión del significado del signo igual, lo que constituye el eje central de la situación de enseñanza: más concretamente, ocho futuros maestros (11.3%) otorgan una justificación general que hace referencia a la comprensión del signo igual; 17 (23.9%) mencionan que comprender que el problema tiene varias soluciones posibles es una posible dificultad argumentando, por ejemplo: "los estudiantes no comprenden que disponen de dos incógnitas para resolver el problema" (futuro maestro 16); en cambio, sólo cuatro estudiantes (5.6%) hacen referencia a la interpretación del signo igual como expresión de equivalencia.

Adicionalmente, cabe destacar que más de una cuarta parte de los futuros maestros (29.6%) entrega una justificación general sobre las posibles causas del error, como es la comprensión del enunciado del problema, que podría aplicarse a cualquier situación de enseñanza matemática.

Por último, seis futuros maestros (8.5%) entregan otro tipo de respuestas o argumentaciones sobre las posibles causas del error, como por ejemplo: "la dificultad que tienen es que no tienen suficientes datos para resolver el problema" (futuro maestro 53) o "no saben la cantidad exacta que les dio la tía" (futuro maestros 19). Otro dato relevante es que el 21.1% de los participantes no responde sobre esta cuestión.

Gestión del error

Se analizan las respuestas de los 71 futuros maestros que han identificado el error. Las estrategias de enseñanza que proponen los futuros maestros para gestionar el error se observan en la Tabla 4.

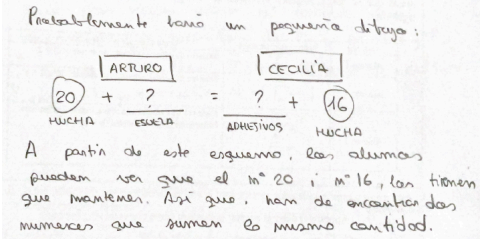
Tabla 4. Estrategias para abordar el error propuestas por los futuros maestros (n=71)

Estrategias de enseñanza	f (%)
Uso de material manipulativo con explicación	30 (42.3%)
Uso de material manipulativo sin explicación	15 (21.1%)
Uso de diagramas	7 (9.9%)
Uso de tabla de valores	3 (4.2%)
Estrategias no concluyentes	16 (22.5%)

La mayoría de los futuros maestros (63.4%) mencionan como principal estrategia el uso de material manipulativo para gestionar el error; no obstante, sólo el 42.3% otorga una explicación, por ejemplo: "utilizaría dinero manipulable para que ellos lo pudieran tocar y manejar, así podrían representar las cantidades buscando la igualdad entre los dos hermanos" (futuro maestro 43). Mientras que el 21.1% solo menciona esta estrategia, pero no detalla el tipo de material al que hace referencia o bien concreta el nombre del material pero no explica su elección.

Otras estrategias mencionadas hacen referencia al uso de diagramas (9.9%), tales como esquemas o dibujos que detallen una mejor manera de comprender el problema planteado, como es el caso de la propuesta del futuro maestro 48 (Figura 3).

Figura 3. Respuesta otorgada por un futuro maestro



Asimismo, el uso de una tabla de valores ha sido mencionada por tres futuros maestros (4.2%) como una estrategia de enseñanza para registrar los posibles resultados numéricos que pueden intervenir en la expresión de equivalencia.

Cabe destacar que el 22.5% de los futuros maestros mencionan estrategias de enseñanza no concluyentes para remediar el error, tales como, tener más paciencia con los estudiantes o leer la tarea en voz alta.

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se ha analizado cómo los futuros maestros de educación primaria identifican y gestionan los errores de los escolares durante el desarrollo de una situación de enseñanza del álgebra, concretamente sobre el significado del signo igual como expresión de equivalencia. Dicho análisis se ha realizado a partir del modelo de competencia diagnóstica en situaciones de error (Heinrichs y Kaiser, 2018).

El análisis de las respuestas de los futuros maestros ha permitido evidenciar que, a nivel general, la detección del error en una tarea que explora el significado del signo igual como expresión de equivalencia se realiza de forma adecuada. Esto sugiere que los participantes conocen los elementos involucrados en una equivalencia numérica, donde se requiere relacionar dos expresiones aritméticas que comprendan un mismo valor numérico (Molina et al., 2009). No obstante, al conjeturar sobre posibles causas del error y determinar estrategias de enseñanza que permitan gestionarlo, los futuros maestros presentan ciertas imprecisiones, pues sus justificaciones no son del todo claras y concluyentes. Estos datos reportan una tendencia similar que los resultados del Fernández-Plaza et al. (2019), que muestran una detección correcta del error por parte de los futuros maestros, sin embargo, presentan dificultades para identificarlo en una situación de enseñanza. En este sentido, Heinrichs y Kaiser (2018) advierten que, en el proceso de diagnóstico, estas últimas fases son las más complejas de desarrollar.

Desde este marco, por un lado, asumimos que los resultados obtenidos están sujetos a la formación previa que reciben los futuros maestros y, por otro lado, que la investigación realizada contribuye al desarrollo de la competencia diagnóstica de los futuros maestros; sin embargo, es necesario reconducir dicha formación para fomentar la capacidad de formular hipótesis sobre las posibles causas del error y la gestión del mismo.

Puesto que el error se reconoce como un elemento significativo en la enseñanza de las matemáticas (Lupiáñez y Rico, 2015), es el profesorado quien debe encargarse de detectar y proporcionar estrategias a los estudiantes para superar las ideas erróneas, de manera que pueda adaptar la enseñanza a las distintas necesidades educativas de los estudiantes (Vogt y Rogalla, 2009). Por tanto, consideramos que es necesario desarrollar intervenciones en la formación docente para fomentar la competencia diagnóstica, mediante experiencias de formación que permitan al profesorado ahondar en los errores que emergen de la actividad algebraica temprana en general y de los significados del signo igual en particular.

Por último, es importante destacar que el estudio se ha centrado en abordar el error considerando sólo uno de los significados del signo igual, como es la expresión de una equivalencia, fomentando la comprensión relacional, lo que se considera una limitación. En futuras investigaciones será necesario indagar en los errores escolares vinculados a otras situaciones de enseñanza del álgebra temprana, como por ejemplo el pensamiento funcional.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N°72200447 y el Ministerio de

Educación, Cultura y Deporte de España en el marco de la beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856).

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barboza, L.C.D.S., Ribeiro, A.J. y Pazuch, V. (2020). Primary school teacher's professional learning: exploring different meanings of the equals signal. *Acta Scientiae (Canoas), 22*(4), 71-97. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5418 c

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. y Kim, J.-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39-87.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, L. (2017). *Research methods in education (8ª edition)*. Routledge.

Cooper, S. (2009). Preservice teachers' analysis of children's work to make instructional decisions. School *Science and Mathematics, 109*(6), 355-362. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb18105.x

Heinrichs, H. y Kaiser, G. (2018). Diagnostic competence for dealing with students' errors: Fostering diagnostic competence in error situations. En T. Leuders, K. Phillipp y J. Leuders (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (pp. 79-94). Springer.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 293-302). SEIEM.

Isik, C. y Kar, T. (2012). The Analysis of the Problems Posed by the Pre-Service Teachers About Equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9). https://doi.org/10.14221/ajte.2012v37n9.1

Klug, J., Bruder, S., Kelava, A., Spiel, C. y Schmitz, B. (2013). Diagnostic competence of teachers: a process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. *Teaching and Teacher Education, 30*, 38-46. https://doi.org/10.1016/j.tate.2012.10.004

Kurz, T. L. y Lee, M. Y. (2023). Preservice teachers' errors in the creation and extension of sequences using color tiles: An exploratory study. *School Science and Mathematics*, 1-15.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Pirámide.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP, 2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/02/pdfs/BOE-A-2022-3296.pdf

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. Electronic *Journal of Research in Educational Psychology, 17,* 7(1), 341-368. https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1345

Schrader, F.W. (2011). Lehrer als diagnostiker. En E. Terhart (Ed.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (pp. 683-698). Waxmann.

Vogt, F. y Rogalla, M. (2009). Developing adaptive teaching competency through coaching. *Teaching and Teacher Education, 25*(8), 1051-1060. https://doi.org/10.1016/j.tate.2009.04.002

ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS EN TORNO A LOS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS EN EDUCACIÓN INFANTIL

Analysis of didactic activities concerning geometric knowledge in Early Childhood Education

Rada-Cimorra, M., Hidalgo-Herrero, M. y Sierra, T. Á.

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

Con este trabajo se pretende abordar el fenómeno didáctico de la pérdida de una razón de ser funcional de los conocimientos geométricos presentados en las aulas de Educación Infantil. Primero se analizan algunas de las actividades que se proponen en las guías didácticas del docente y textos escolares que se utilizan para la enseñanza-aprendizaje de los conocimientos geométricos. En segundo lugar, se plantea el análisis de dos actividades experimentadas con alumnos de Educación Infantil que pretenden ser una muestra de una propuesta didáctica alternativa para la enseñanza de dichos conocimientos, donde los conocimientos geométricos van a surgir como respuesta a un problema espacial. Y se termina con un análisis comparativo y algunas conclusiones.

Palabras clave: *problemas espaciales, conocimientos geométricos, educación infantil, teoría antropológica de lo didáctico.*

Abstract

The aim of this paper is to address the didactic phenomenon of the loss of a functional raison d'être of geometric knowledge presented in early childhood education classrooms. First, we analyse some of the activities proposed in the teacher's guides and textbooks used for the teaching-learning of geometric knowledge. Secondly, two experimented activities are analysed with infant school pupils which are intended to be a sample of an alternative didactic proposal for the teaching of geometric knowledge, where it will emerge as a response to spatial problems. It ends with a comparative analysis and some conclusions.

Keywords: *spatial problems, geometric knowledge, early childhood education, anthropological theory of the didactic*.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La Geometría es una ciencia de carácter empírico y un instrumento para el conocimiento y control del espacio circundante (Gálvez, 1985). Se trata una disciplina matemática que se enfoca en analizar las características y propiedades de las figuras geométricas, la relación espacial entre ellas y las propiedades del espacio que las rodea.

El espacio sensible se refiere al espacio que contiene objetos y es accesible a través de los sentidos, mientras que el espacio geométrico es el resultado de un estudio teórico llamado "Geometría", que proporciona una explicación racional de lo que percibimos a través de los sentidos (Chevallard y Jullien, 1990).

Tradicionalmente lo que se entiende por enseñanza de la Geometría en la Educación Infantil (EI) está formado por dos tipos de conocimiento: a) el que está ligado a lo que habitualmente llamamos Geometría donde están las figuras planas y tridimensionales; y b) el que hace referencia a lo que necesita el alumno para controlar sus relaciones con el espacio sensible (Salin, 2004).

Rada-Cimorra, M., Hidalgo-Herrero, M. y Sierra, T. Á. (2024). Análisis de actividades didácticas en torno a los conocimientos geométricos en Educación Infantil. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 449-456). SEIEM.

Los conocimientos espaciales han sido definidos por Berthelot y Salin (1999) como los conocimientos que permiten a un individuo controlar adecuadamente sus relaciones con el espacio sensible.

En el nuevo currículo de EI lo que se propone enseñar sobre Geometría viene determinado dentro del *Área 2. Descubrimiento y exploración del entorno*, donde para el segundo ciclo se propone dentro de los saberes básicos:

> Cualidades o atributos de objetos y materiales. […] Nociones espaciales básicas en relación con el propio cuerpo, los objetos y las acciones, tanto en reposo como en movimiento. (MEFP, 2022, p. 25).

La concreción de dicho currículo realizada por la Comunidad de Madrid plantea dentro de la misma área para el segundo ciclo de EI lo siguiente:

> Cualidades o atributos de los objetos y materiales. Color, forma (figuras planas y cuerpos geométricos), tamaño, textura, olor, grosor, temperatura… y su comportamiento físico (caer, rodar, resbalar, botar, etcétera). […] Nociones espaciales básicas en relación con el propio cuerpo, los objetos y las acciones, tanto en reposo como en movimiento: dentro-fuera, encima-debajo, cerca-lejos, juntos-separados, de frente-de lado-de espaldas, izquierda-derecha… (BOCM, 2022, p. 37).

En el currículo, se observa que los saberes geométricos se presentan de forma limitada y sin conexión entre ellos. No hay referencia a los conocimientos espaciales y solo se muestran las nociones espaciales de manera aislada y presentadas como absolutas. Se trata, más bien, de vocabulario espacial. Asimismo, se manifiesta una ausencia de cuestiones a las que responden los conocimientos geométricos. Sin embargo, Alsina (2016) postula que el uso de contextos en EI cuando se estudian los conocimientos geométricos posibilita un aprendizaje funcional y con sentido de la Geometría.

Ruiz-Higueras et al. (2013) señalan que en EI se pueden plantear problemas relacionados con el espacio sensible, problemas espaciales, fuertemente relacionados con los conocimientos geométricos. Por ello, surge la necesidad de elaborar actividades en EI en las que los conocimientos geométricos surjan como respuesta a problemas espaciales, de manera que se expliciten las cuestiones a las que responden dichos conocimientos.

Este trabajo tiene como objetivo general lo que Ruiz-Higueras et al. (2013) consideran un problema de la profesión docente que consiste en la carencia de recursos y materiales adecuados para proponer a sus alumnos actividades que les permitan construir los conocimientos geométricos en torno a las figuras planas dándoles sentido, es decir, como respuesta a un problema.

MARCO TEÓRICO

Berthelot y Salin (1992) definen los conocimientos espaciales como la capacidad de una persona para prever los efectos de sus acciones en el espacio, controlarlo y comunicar informaciones. Es decir, lo relativo al entorno en el que cada individuo debe desenvolverse de manera pertinente, aprovechando y anticipando las interacciones con este. El espacio es el medio que nos envuelve, en el que se encuentran todos los objetos y tienen lugar las actividades diarias de cada individuo.

Los problemas espaciales son los que han dado lugar al nacimiento de la Geometría. Si el individuo dispone de conocimientos geométricos, tendrá un control más eficaz de sus relaciones con el espacio sensible. Así, los conocimientos geométricos se convierten en buenas herramientas para la resolución de problemas espaciales que se caracterizan como aquellos que:

> Su finalidad concierne al espacio sensible [y] pueden tratar sobre la realización de: acciones [como] fabricar, desplazarse, desplazar, dibujar, etc., [y sobre] comunicaciones a propósito de acciones o de constataciones [...] [Además, porque] el éxito o el fracaso viene determinado para el individuo por la comparación entre el resultado esperado y el resultado obtenido. (Salin, 2004, p. 39)

Así, son problemas espaciales los de un carpintero que debe construir una pieza de madera para la reconstrucción de un retablo o los de un costurero que debe cortar los patrones de tela para hacer un

vestido. Ambos realizarán su labor de una manera más eficiente si tienen en cuenta conocimientos geométricos como propiedades de las figuras, ángulos, etc. en el ejercicio de su profesión.

Berthelot y Salin (1992) sostienen la viabilidad de crear situaciones en el ámbito escolar, incluso desde la etapa de EI, donde los alumnos se enfrenten a problemas espaciales. Inicialmente, intentarán resolver estos problemas utilizando técnicas personales no generalizables, pero luego los conocimientos geométricos surgirán como herramientas más efectivas para controlar, anticipar y modelizar estos problemas espaciales.

De este modo los conocimientos geométricos se introducen como herramientas para la resolución de problemas espaciales, es decir, dentro de una problemática de modelización espacio-geométrica. Perrin-Glorian et al (2013) sugieren que para lograr una enseñanza funcional de la geometría en la enseñanza elemental se debe acudir a la problemática espacio-geométrica.

Para analizar tanto las actividades propuestas en los manuales escolares como las que se propondrán para paliar los fenómenos que describimos en el problema de investigación utilizamos el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). La TAD modeliza la actividad matemática considerando un bloque práctico o "saber hacer", que comprende los tipos de tareas T y las técnicas τ, y un bloque tecnológico-teórico. Esta forma de modelizar el conocimiento matemático indica que, para realizar un tipo de tareas T, es necesario emplear una técnica τ y un bloque tecnológico-teórico que pretende describir, explicar y justificar el bloque práctico.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El problema de investigación que planteamos surge de la constatación de los tres fenómenos didácticos siguientes:

a) El fenómeno de la invisibilidad de los conocimientos espaciales, pues son un "punto ciego" en el currículo de EI, ya que a pesar de ser conocimientos útiles para la vida son excluidos casi sistemáticamente de la enseñanza de la Geometría (Ruiz-Higueras et al., 2013).

b) Cuando la maestra explica un saber que pretende que los alumnos adquieran y, posteriormente, plantea una actividad en la que el alumno debe emplear dicho saber, se produce el fenómeno de la enseñanza por ostensión (Salin, 2004) que tiene algún rasgo similar con el fenómeno del aplicacionismo, es decir, la "aplicación" del conocimiento matemático previamente transmitido, donde las aplicaciones siempre van después de la formación matemática básica (Barquero et al., 2014). Por ejemplo, para trabajar una figura plana, primero la maestra presenta de modo ostensivo dicha figura y, posteriormente, propone un ejercicio donde los alumnos deben colorear y señalar la figura correspondiente entre otras.

c) Lo anterior implica un tercer fenómeno que los engloba, la pérdida de una razón de ser funcional de los conocimientos geométricos, es decir, en las guías didácticas y textos escolares de EI analizados, las cuestiones a las que responden los conocimientos geométricos son, desde la perspectiva del marco teórico utilizado, cuestiones triviales, como colorear o señalar figuras planas que la maestra ha mostrado previamente. Salin (2004) muestra que existe una fuerte interrelación entre los problemas espaciales y los conocimientos geométricos, lo que permite indagar si dichos problemas espaciales pueden convertirse en una razón de ser funcional de los conocimientos geométricos.

En este trabajo de investigación nos planteamos las siguientes hipótesis:

H1: En las actividades propuestas en el aula de EI los conocimientos geométricos se presentan de forma ostensiva y aislada para utilizarlos en una tarea preparada para su aplicación explícita, estando prácticamente ausentes los problemas espaciales que podrían darles sentido.

H2: Existen problemas espaciales que pueden constituirse en una posible razón de ser alternativa, coherente con el marco teórico utilizado de algunos de los conocimientos geométricos escolares que contempla el currículo de EI

En relación con estas hipótesis, se formula la siguiente pregunta de investigación:

Q: ¿Qué tipo actividades pueden plantearse en EI de modo que los alumnos puedan encontrar en ellas una posible razón de ser alternativa de los conocimientos geométricos?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación, se plantean los siguientes objetivos específicos:

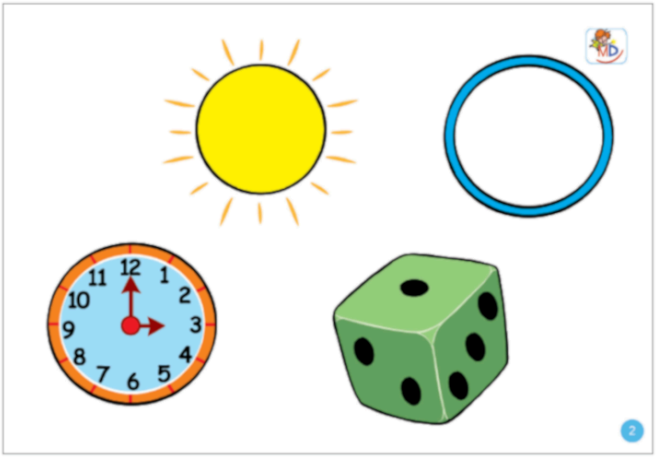
- Analizar las cuestiones a las que responden algunas de las actividades más habituales que aparecen en los textos escolares para la enseñanza de los conocimientos geométricos en EI.
- Experimentar y analizar dos actividades alternativas a las habituales en EI donde los conocimientos surgen como respuesta a un problema espacial.

PRÁCTICAS HABITUALES EN LAS AULAS

En las aulas de EI, lo usual es que la maestra explique en la asamblea, los conocimientos geométricos que los alumnos deben adquirir, y luego les proponga una ficha, a realizar en su mesa, indicándoles lo que deben hacer y cómo hacerlo. El alumno realiza la ficha, normalmente de solución única, y es la maestra la que valida el resultado. Por tanto, las fichas propuestas promueven la aplicación de un saber geométrico sin que aparezca una razón de ser funcional.

El objetivo para los alumnos de la ficha de la Figura 1 (izq.) es el reconocimiento del círculo. Deben pegar un gomet en los objetos que tengan dicha forma, es decir, el tipo de tareas que se propone es T_1 = *dada una colección de figuras en una ficha identificar las que tienen una cualidad determinada* y la tarea de este tipo, en este caso, es t_{11} = *dada una colección de cuatro figuras identificar aquellas que tienen forma de círculo.* La técnica que puede utilizar el alumno para resolver dicha tarea sería τ_1 = *pasar por cada una de las figuras que aparecen en la ficha y si su forma coincide con el círculo mostrado por la maestra pegarle un gomet*. Asimismo, se proponen algunas tareas complementarias para que el docente realice con los alumnos (Figura 1, dcha.). En la pauta de observación, se indica lo que se debe esperar de los alumnos, que es el resultado de la actividad. Aquí el alumno solo puede utilizar la técnica τ_1, mostrada previamente por el docente, quien después valida la solución obtenida.

Figura 1. Ficha para trabajar el círculo (izq.) e indicaciones para la maestra (dcha.) (Ruiz, 2021, p. 2).



Matemáticas Divertidas: Taller de sugerencias

1. Coger un círculo de la caja de bloques lógicos y, con el dedo repasar el borde de la figura.
2. Introducir bloques lógicos circulares dentro de un aro amarillo.
3. Formar gusanos con los círculos de los bloques lógicos.
4. Hacer torres con los círculos amarillos y rojos de los bloques lógicos.
5. Hacer con plastilina círculos.

Pauta de observación

- Cada niño y cada niña reconoce el círculo.

Objetivos

- Reconocer el círculo.

Actividad de la ficha

- Pegar un gomet amarillo en los objetos que tienen forma de círculo.

Las fichas de la Figura 2 se proponen para trabajar la geometría con alumnos de 3-4 años. Como preparación en las guías del maestro se plantea que el docente muestre primero la figura geométrica objeto de estudio, dibujándola en la pizarra o con una imagen. Después, se propone que los alumnos busquen objetos de la clase con esa forma. Por último, realizan una de las fichas de la Figura 2 como aplicación de reconocimiento de la figura mostrada.

La actividad que se plantea a los alumnos en la ficha de la izquierda de la Figura 2 consiste en colorear el cuadrado y, en la de la derecha, reconocer los triángulos y colorearlos según el color que indica su borde. Aquí el tipo de tareas que se propone es T_2 = *dada una imagen con un tipo de figura plana determinado colorear su interior*. La tarea de este tipo, en la ficha de la izquierda, es t_{21} = *identificar la figura que tiene forma de cuadrado para colorearla*, y en la ficha de la derecha es t_{22} = *identificar la figura que tiene forma de triángulo para colorearla*. La técnica para resolver ambas tareas es τ_2 = *una vez identificada la figura con la misma forma que la mostrada por la maestra, colorearla.* Como podemos observar en ambas fichas, las únicas figuras geométricas que no aparecen coloreadas son las que debe colorear el alumno.

Figura 2. Fichas para trabajar cuadrado (izq.) (Martín et al., 2005, p.33) y triángulo (dcha.) (Ruiz, 2021, p.3)



PROPUESTA Y EXPERIMENTACIÓN DE ACTIVIDADES ALTERNATIVAS

Como alternativa al trabajo mediante fichas con los alumnos de EI y con el objetivo de hacer frente a los fenómenos detectados anteriormente en las prácticas habituales en las aulas, vamos a desarrollar dos actividades llevadas a cabo en un aula de 20 alumnos de 4-5 años en un colegio de Madrid.

Actividad 1: Reproducción de un cuadro abstracto

Presentación: Se presenta a los alumnos un cuadro realizado con figuras geométricas. La actividad se realiza en grupos de 7-8 alumnos, cada grupo trabaja una sesión de 30 minutos por semana durante un mes.

Consigna: "Tenemos que reproducir el cuadro del modelo. Para ello tendremos que seleccionar las piezas de la caja que sean necesarias".

Materiales: el cuadro a reproducir, 33 figuras geométricas de diferentes tamaños y formas en cartulina (3 triángulos isósceles, 3 triángulos equiláteros, 3 triángulos escalenos, 3 círculos, 3 óvalos, 3 cuadrados, 3 rectángulos, 3 rombos, 3 pentágonos, 3 heptágonos y 3 octógonos).

Análisis de la actividad experimentada: El tipo de tareas propuesto es T_3 = *reproducir un cuadro con figuras geométricas*. La tarea de este tipo planteada es: t_{31} = *dado un conjunto de figuras geométricas seleccionar las necesarias y ubicarlas para reproducir el modelo.*

Antes del inicio de cada sesión, en la asamblea, la maestra hace un recordatorio de la actividad. El papel de la maestra consiste en aclarar las dudas evitando siempre decir cómo resolver la situación. En los diálogos designamos por Ei al estudiante i y por M a la maestra.

E1: Profe, mi compañero dice que aquí va esta figura pero yo creo que esto no es un círculo (*señalando un óvalo*), yo creo que es este (*señalando un círculo*).

M: ¿Y por qué no vais juntos a mirarlo y lo comparáis con el modelo?

En cada sesión al terminar su cuadro, hayan conseguido reproducirlo con éxito o no, se mantiene un momento de asamblea en el que los alumnos conversan acerca de cómo han realizado la actividad, el porqué de su éxito o fracaso y pequeñas discusiones entre ellos por los atributos de las figuras.

Estrategias de los alumnos: en las primeras sesiones se observa que los alumnos utilizan la técnica τ_{311} = *coger figuras geométricas al azar, colocarlas en el suelo e intentar ubicarlas comparándolas*

con el modelo. Con el paso de las sesiones, los alumnos se van dando instrucciones mientras van identificando los atributos de las figuras que necesitan para reproducir el cuadro:

E2: Esta no vale, tienes que traer un cuadrado y no una casita (refiriéndose a un pentágono).

E3: Sí vale, tiene (cuenta sus lados) 1, 2, 3, 4, 5 ¡Es verdad! Esta no sirve, voy a por un cuadrado.

En la tercera sesión, los alumnos empiezan a emplear la técnica τ_{312} = *seleccionar las figuras del cuadro atendiendo a sus atributos*.

Posteriormente, los alumnos comienzan a ubicar las figuras geométricas seleccionadas, Figura 3 izq., utilizando la técnica τ_{313} = *colocar las figuras geométricas del cuadro en su ubicación*.

E4: El cuadrado tiene una esquinita por encima del círculo.

E5: Sí, y el triángulo lo hemos puesto al revés, esa esquina va hacia arriba.

E6: Pero este triángulo es más fino (el isósceles), es el otro más gordito (el equilátero).

E7: Es verdad, ¡cámbialo!

Los propios alumnos son los que validan su éxito o fracaso comparando la producción que han realizado con el modelo proporcionado.

Figura 3. Alumnos realizando las actividades 1 (izq.) y 2 (dcha.)



Actividad 2: Fabricación de un cristal

Presentación: Se presenta un edificio con ventanas con una de ellas sin cristal. La actividad se realiza en grupos de 4 alumnos, cada grupo trabaja una sesión de 30 minutos por semana durante un mes.

Consigna: "En este edificio se ha roto un cristal de una de las ventanas. Somos cristaleros que debemos fabricar uno nuevo. Para ganar el juego, este cristal debe encajar bien en el hueco, no puede quedar pequeño ni grande porque, si no, no valdrá".

Materiales: un edificio de cartón cuyas ventanas tienen formas diferentes (una de ellas sin cristal), folios, tijeras, lápices, gomas de borrar.

Análisis de la actividad experimentada: El tipo de tareas que se propone es T_4 = *construir un "cristal" que coincida con el hueco de una ventana.* La tarea de este tipo es t_{41} = *contruir un "cristal" que encaje perfectamente en un hueco con forma de cuadrado.*

La maestra presenta la actividad en la asamblea, recordando la consigna y el objetivo. El papel de la maestra consiste en resolver las dudas evitando siempre decir cómo se resuelve la situación.

Estrategias de los alumnos: en las primeras sesiones de la actividad se observa cómo los alumnos utilizan la técnica τ_{411} = *dibujar una figura cualquiera en el papel, recortarla y ponerla en el hueco.* Al intentar colocar la figura recortada en el hueco de la ventana, se dan cuenta de que no encaja y, entre ellos, se corrigen:

E8: Así no es, ¿no ves que la ventana rota es un cuadrado? Tienes que dibujar cuatro lados.

Luego, aplican τ_{412} = *dibujar un cuadrado sin tener en cuenta la longitud de los lados.* Hacen cuadrados muy grandes o muy pequeños que no encajan en el hueco de la ventana (Figura 3 dcha.).

Finalmente, los alumnos utilizan τ_{413} = *medir los lados del cuadrado de la ventana con diferentes objetos, piezas de construcción, lápices, incluso con sus dedos y dibujar el cuadrado.*

E9: Los lados son como mi dedo de largo, ayúdame a dibujarlo, dime cuántos lados tengo que dibujar.

Durante el desarrollo de la actividad y gracias a la necesidad de comunicación, se observa cómo los alumnos amplían su vocabulario geométrico: la forma de la figura de la ventana, su número de lados, sus dimensiones, que utilizan para ganar el juego. Además, verbalizan las propiedades del cuadrado, número y longitud de sus lados, aunque no explicitan la igualdad de ángulos.

Los propios alumnos comprueban el éxito de la actividad probando su cristal en el hueco. Al terminar cada sesión, hayan conseguido fabricar el cristal con éxito o no, se realiza un momento de asamblea en el que los alumnos explican cómo han efectuado la actividad.

Esta actividad se puede llevar a cabo con ventanas de diferentes formas, de manera que el alumno tenga que emplear diferentes conocimientos geométricos.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En T_1 y T_2 no se plantea ningún problema espacial a los alumnos, ya que solo hay un tipo de figura que colorear, constatándose el fenómeno de la invisibilidad de los conocimientos espaciales. El alumno solo aplica un conocimiento de manera aislada en tareas preparadas explícitamente para aplicar lo que la maestra ha mostrado de modo ostensivo previamente.

En los tipos de tareas T_3 y T_4 el papel de la maestra consiste en que el alumno se apropie del problema espacial, que en T_3 es elaborar un cuadro como el del modelo y en T_4, dibujar y fabricar un cristal. En ambos tipos de tareas el alumno puede observar las diferentes figuras en diferentes posiciones y comprobar el éxito o fracaso comparando el resultado esperado con el resultado obtenido. Estos tipos de tareas permiten hacer frente al fenómeno de la invisibilidad de los conocimientos espaciales.

El alumno puede resolver T_1 y T_2 sin necesidad de poner de manifiesto las propiedades de las figuras. Mientras que en T_3 y T_4, al trabajar en grupo, necesitan explicitarlas para poder comunicarse y resolver el problema espacial.

Tras la interpretación de los resultados de las dos actividades experimentadas, podemos determinar que en EI es posible presentar los problemas espaciales como una razón de ser funcional alternativa de los saberes geométricos, ya que pueden aparecer como instrumentos eficaces de resolución de dichos problemas, sin necesidad de una presentación ostensiva.

CONCLUSIONES

En referencia a H_1, y tras el análisis realizado, parcial por la falta de espacio, de guías didácticas y textos escolares, se puede afirmar que en EI los conocimientos geométricos se presentan aislados y de modo ostensivo estando los problemas espaciales ausentes. Como alternativa a este modelo, se pueden proponer actividades como las experimentadas: con varias técnicas de resolución, en las que el saber matemático a construir esté oculto y que el alumno sea capaz de validar su respuesta.

Respecto a H_2, se puede determinar que, efectivamente, en la resolución de los problemas espaciales que aparecen en los tipos de tareas experimentados, emergen varios de los conocimientos geométricos que propone el currículo de EI, figuras planas como cuadrados, triángulos, pentágonos, etc.

Si se utiliza la variable didáctica del tipo de comunicación en T_3 y T_4, se puede provocar que los alumnos designen las figuras planas ante la necesidad de identificarlas.

En relación con la pregunta de investigación, las actividades experimentadas han mostrado que los problemas espaciales que plantean se convierten en una razón de ser de los conocimientos geométricos surgidos como respuesta a dichos problemas.

El desarrollo de las actividades experimentadas permite que el alumno realice tareas que en las actividades propuestas en los textos escolares se asignan a la maestra, como por ejemplo que construyan, describan, expliquen y justifiquen las técnicas empleadas y validen su respuesta.

Además, es importante que el docente plantee tipos de tareas donde las estrategias conocidas por los alumnos fracasen, lo que les conducirá a modificarlas y a desarrollar nuevas técnicas para su resolución. Por ejemplo, cuando en T_4 utilizan las técnicas τ_{411} y τ_{412} pero necesitan evolucionar a τ_{413} para resolver el problema.

Por tanto, podemos afirmar que dichas actividades favorecen un aprendizaje funcional donde los conocimientos geométricos surgen siempre como respuesta a un problema espacial planteado.

Agradecimientos

Trabajo realizado dentro del proyecto PID2021-126717NB-C32, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias

Alsina, A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. *Edma 0-6: 5*(1), 1-20.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 32* (1), pp. 83-100

Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Tesis doctoral. Université de Bordeaux I. Bordeaux. Francia.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N, 65,* 37-59.

BOCM (2022). *Decreto 36/2022, de 8 de junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid, la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil.*

Chevallard, Y. y Jullien, M. (1990). Autour de l´enseignement de la géométrie au collège. Première partie. *Petit x, 27*, 41-76.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* (Tesis doctoral). Centro de Investigaciones del IPN.

Martín, C., de la Cruz, A., Gordón, P. y Rodríguez, A. (2005). *Primeros pasos. Matemáticas.* Ed. Luis Vives.

MEFP (2020). *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil.* España: Boletín Oficial de Estado.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.-C. y Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM, 90*, 5-41.

Ruiz, B. (2021). *Los talleres de Clara.* Ed. ESC.

Ruiz Higueras, L., García García, F. J. y Lendínez Muñoz, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *EDMA 0-6, 2 (1),* 95-118.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Madrid: MEC.

LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA A TRAVÉS DEL DÍA INTERNACIONAL DE LA MUJER

Statistical Education through International Women's Day

Raya-Fernández, Á., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T.

Universidad de Málaga

Resumen

La educación matemática debe abandonar el enfoque puramente instrumental y cumplimentar este con un enfoque funcional que permita conectar los conceptos matemáticos abstractos con elementos reales y hacer un análisis crítico de estos, incluyendo así un enfoque formativo que mejore la actitud hacia la materia. Enmarcados en esta triple perspectiva, en este trabajo se presenta el análisis de propuestas didácticas elaboradas por el alumnado del Grado en Educación Primaria enfocadas para trabajar la estadística en un aula relacionando esta con la celebración del día de la Mujer el 8 de marzo. De esta forma, nuestro análisis recae en la forma en la que se introducen y en el modo en el que se trabajan las nociones estadísticas y en las estrategias utilizadas para mejorar las actitudes hacia la matemática.

Palabras clave: *didáctica de la estadística, carácter formativo, feminismo, sentido socioafectivo.*

Abstract

Mathematics education must move away from a purely instrumental approach and complement it with a functional approach that allows connecting abstract mathematical concepts with real elements and critically analysing them, thus including a formative approach that improves the attitude towards the subject. Within this triple perspective, this paper presents the analysis of didactic proposals elaborated by students of the Degree in Primary Education focused on working on statistics in a classroom, relating this to the celebration of International Women's Day on March 8. In this way, our analysis lies in the way in which statistical concepts are introduced and in the way in which statistical notions are worked on and in the strategies used to improve attitudes towards mathematics.

Keywords*: statistical education, formative approach, feminism, socioemotional education.*

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia, la educación matemática ha estado enfocada al aprendizaje de conceptos puramente instrumentales, hecho que hace que la materia quede desconectada de las necesidades formativas del alumnado, así como de la funcionalidad de los contenidos que se aprenden (González-Marí, 2020).

La nueva legislación amparada por la Ley Orgánica 3/2020, promueve grandes retos a la comunidad educativa y particularmente a los docentes del área de matemáticas. En concreto, toma como referente principal de la materia una serie de competencias específicas que persiguen el objetivo de desarrollar en el alumnado no únicamente destrezas funcionales (como resolución de problemas, razonamiento, pruebas, etc.) sino también destrezas socioafectivas (formadas por creencias, emociones y actitudes hacia la materia y la capacidad de tomar decisiones responsables de cara a la vida en sociedad, Hidalgo et al. 2015).

Bajo esta nueva visión del área de matemáticas, queda justificado el nuevo reto del profesorado con respecto al diseño y puesta en práctica de situaciones de aprendizaje en las que se traten competencias específicas relacionadas con el desarrollo de destrezas socioafectivas desde la propia matemática. En

Raya-Fernández, A., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T. (2024). Educación Estadística a través del Día Internacional de la Mujer. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 457-464). SEIEM.

nuestro caso, nos centramos en la Estadística, disciplina que nos aportará las herramientas necesarias para cuantificar la realidad y analizarla críticamente.

En base a todo lo anterior, con este trabajo se pretende analizar propuestas didácticas elaboradas por alumnado del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Málaga desde una doble perspectiva. Por un lado, la perspectiva estocástica, en la que se analizará la aparición y el tratamiento de lo que llamaremos las ideas estadísticas fundamentales (aquellas nociones que consideramos necesarias incluir en cualquier tarea estadística para que esta sea considerada completa) junto con los errores y dificultades que aparecen en las propuestas. Y, por otro lado, haremos un análisis socioafectivo lo que nos permitirá estudiar la forma en la que se combina el trabajo de ambos sentidos.

MARCO TEÓRICO

El diseño de propuestas didácticas basadas en el currículo son aspectos fundamentales en la labor docente y constituyen el ámbito principal donde se producen la mayoría de los fenómenos relacionados con la educación matemática. Debido al cambio de paradigma en el área de matemáticas propuesto por la nueva legislación, el profesorado se enfrenta a nuevos desafíos como el diseño de situaciones de aprendizaje donde las destrezas socioafectivas quedan integradas en la matemática.

Dentro de las destrezas socioafectivas cabe distinguir las actitudes matemáticas (como la apertura mental, el espíritu crítico o el pensamiento reflexivo, es decir, actitudes relacionadas con lo cognitivo) y las actitudes hacia las matemáticas, que se refieren a la valoración, el aprecio y el gusto por esta disciplina y por su aprendizaje, reflejando más el componente afectivo que el cognitivo (Giles et al., 2016, Van der Beek, 2017).

Este estudio del dominio afectivo matemático, de acuerdo con los citados autores, tiene especial relevancia en la formación de maestros y maestras, puesto que intervenciones didácticas que refuercen los afectos hacia las matemáticas pueden modificar actitudes, creencias y emociones. Para tal fin, es esencial incluir en dichas intervenciones un tercer aspecto actitudinal orientado a ofrecer un desarrollo fructífero personal que conlleve al respeto de la diversidad existente en nuestra sociedad, a la eliminación de ideas preconcebidas con el género, al cuidado del medio ambiente, etc.

Esto nos lleva a tener una amplia gama de temáticas sociales de interés para trabajar de forma funcional y formativa desde el área de matemáticas. En esta comunicación nos centramos en la lucha de las mujeres a lo largo de la historia por conseguir una igualdad real y efectiva y la conmemoración que se hace sobre ello el 8 de marzo, día Internacional de la Mujer.

El motivo de nuestra elección se debe a que, aunque a lo largo del siglo XXI los derechos de las mujeres se han ido consolidando en el mundo occidental (por ejemplo, a través de diferentes normas para legislar al respecto, como en nuestro país la Ley 12/2007, de 26 de noviembre, para la promoción de la igualdad de género en Andalucía, que reconoce la importancia de hacer visible a la mujer en la historia y en la ciencia así como de eliminar cualquier estereotipo sexista de los materiales curriculares), aún existen claras evidencias que demuestran que todavía no se ha conseguido esa utópica sociedad igualitaria que se ansía.

La educación supone una herramienta indispensable para este fin, pues la igualdad se alcanzará con la ayuda del establecimiento y el desarrollo de sistemas educativos más democráticos, que consigan ser capaces de suprimir los estereotipos que acrecientan la desigualdad y propicien conductas educativas que hagan una sociedad más justa y respetuosa (López-Melero et al., 2016).

Para trabajar este aspecto formativo, desde el área de Matemáticas, se ha utilizado el sentido estocástico. En la legislación actual, según recoge el Real Decreto 157/2022, se orienta el sentido estocástico hacia el razonamiento e interpretación de datos, así como la toma de decisiones a partir de la información que aportan estos. Es decir, el sentido estocástico se centra en un razonamiento específico, el razonamiento estadístico, que va a permitir al alumnado tomar decisiones adecuadas o

efectuar predicciones a partir de datos y en presencia de incertidumbre. No obstante, para llegar a ese nivel de razonamiento estadístico requerido, en un primer lugar es necesario un conocimiento del lenguaje estadístico y de las ideas estadísticas fundamentales, entendiendo estas ideas como aquellas que aparecen en la mayoría de las situaciones en las que hay que aplicar la estadística y que, por tanto, su conocimiento es necesario para poder enfrentar con éxito cualquier tarea estadística.

Desde esta perspectiva es lógico que sea esencial determinar cuáles son esas ideas estadísticas fundamentales. Para ello, tomando como principal referente los estudios de Burrill y Biehler (2011), basados en el análisis de numerosos currículos de estadística de diversos países, agrupamos nuestras ideas estadísticas fundamentales en cuatro categorías: datos, gráficos, variables y parámetros estadísticos.

Cualquier tarea estadística que se proponga se considerará completa si se trabaja con datos, extraídos de contextos reales en la medida de lo posible, dado que el alumnado suele estar acostumbrado a trabajar en contextos imaginarios. Por otro lado, los datos deben organizarse en tablas y gráficos, siendo estos últimos un instrumento esencial de transnumeración, el modo de razonamiento estadístico que permite al alumnado obtener nueva información de un conjunto de datos al cambiar el sistema de representación (Wild y Pfannkuch, 1999). Finalmente, los datos con los que se trabaja deben proceder de una variable previamente definida construyendo así un modelo al que se ajustan y resumiendo la información que aportan a través de parámetros estadísticos Es importante no basarse únicamente en el cálculo de dichos parámetros siendo imprescindible tanto su interpretación como el estudio de la bondad de estos en función de la variabilidad de los mismos (Engel y Sedlmeier, 2011).

Para trabajar el sentido estocástico desde una perspectiva socioafectiva, no podemos centrarnos únicamente en la presentación instrumental de las ideas estadísticas fundamentales. Se hace necesaria la implementación de estrategias metodológicas dirigidas al desarrollo de una afectividad positiva hacia las matemáticas como pueden ser el aprendizaje activo, la resolución de problemas contextualizados o la conexión con otras áreas de conocimiento. Esto hace que una forma apropiada para trabajar el sentido estocástico en el aula sea el trabajo por proyectos, pues este puede permitir presentar tareas que engloben a las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida de datos, análisis de datos y obtención de conclusiones (Arteaga Cezón et al., 2014, Batanero et al., 2013, Romero-García et al., 2023).

El trabajo del sentido estocástico en contextos muy cercanos a la realidad puede tener algunas consecuencias negativas, pues hace que el alumnado esté familiarizado con muchos de los conceptos que este engloba lo que puede llevar a que sean tratados sin ningún tipo de rigor científico, apareciendo así numerosos errores y dificultades a la hora de aplicarlos (Batanero et al., 2013).

Para tratar de evaluar y analizar los errores y dificultades en torno a las ideas estadísticas fundamentales, se debe tener en cuenta que cualquier objeto matemático (en nuestro caso, las ideas) está constituido por cinco tipos de elementos, a partir de los cuales aparecen los posibles errores y dificultades que puede mostrar el alumnado en el trabajo con dicho objeto (Batanero, 2000). De forma más concreta, se definen:

- Elementos intensivos, que están relacionados con las definiciones y propiedades del objeto matemático. A partir de aquí surgen errores como situar la media en el centro de la distribución (únicamente válido en las distribuciones simétricas), no tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media, confundir una variable cuantitativa con una cualitativa, etc.
- Elementos extensivos, que se basan en la importancia de reconocer los problemas donde debe emplearse el concepto que se estudia. En este caso, podemos encontrar errores relacionados con el cálculo de parámetros como media, mediana o varianza en variables cualitativas o el cálculo de la media sobre la frecuencia relativa o porcentual.

- Elementos actuativos, relacionados con la habilidad operatoria en los diferentes algoritmos y procedimientos relacionados con el concepto. Algunos de los errores relacionados con este elemento descritos por Carvalho (1998) son tomar la mayor frecuencia absoluta para calcular la moda, no ordenar los datos para calcular la mediana, no tener en cuenta la frecuencia absoluta para el cálculo de la media, etc.
- Elementos validativos, relacionados con la capacidad de argumentar y justificar propiedades, relaciones y soluciones de un problema. Los errores que emergen de aquí, algunos descritos por Cobo y Batanero (2004), están principalmente relacionados con la utilización de la media como único parámetro sin estudiar la bondad de esta con un análisis de la variabilidad del modelo, aplicación del algoritmo sin la comprensión del significado, desconocimiento del uso de la media para la comparación de más de un conjunto de datos, etc.
- Elementos ostensivos, centrados en las nociones y palabras con las que denotamos un concepto. Los errores que afloran a partir de estos elementos están relacionados con que no siempre coincide el término matemático con el término asignado en el lenguaje coloquial o bien porque son términos muy usuales en la vida diaria y se confunden entre ellos (Rusell y Mokros, 1991).

En conclusión, la nueva legislación educativa en el área de matemáticas propone integrar destrezas socioafectivas en el diseño de las situaciones de aprendizaje de la materia. Esto hace que se abra un gran abanico de temáticas sociales posibles para trabajar a la misma vez que intenta modificar actitudes, creencias y emociones hacia la materia. Este reto propicia el análisis de situaciones de aprendizaje que trabajen el sentido estocástico junto con el socioafectivo.

DISEÑO DE LA EXPERIENCIA. METODOLOGÍA

El área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga a través de algunas de sus asignaturas impartidas en el Grado de Educación Primaria trabaja en el intento de invertir la tendencia de abordar la matemática de forma puramente instrumental, para dedicar más atención a la funcionalidad de los saberes básicos de la materia y a las necesidades formativas de las personas.

En esta línea, el equipo docente-investigador de la asignatura de Didáctica de la Medida del cuarto curso del Grado, propuso una tarea durante los cursos 2021/2022 y 2022/2023 centrada en el día Internacional de la Mujer. En esta, el alumnado debía diseñar una propuesta didáctica, entendiendo esta como una intervención puntual en un aula de Educación Primaria, para trabajar contenidos estadísticos contextualizados en la citada efeméride.

El trabajo del equipo docente investigador consistió, con un enfoque cualitativo, en un análisis documental de estos trabajos. Cabe destacar que dicho análisis está dentro de un proceso de investigación-acción y aquí se muestran los resultados del primer ciclo del proceso.

Participantes

La experiencia se realizó con 218 alumnos y alumnas en el curso 2021/2022 (divididos en los grupos-clase A, B y C) y con 189 alumnos y alumnas en el curso 2022/2023 (divididos en los grupos-clase B, D y F). Un total de 407 alumnos y alumnas, que trabajaron en pequeños grupos de máximo cuatro estudiantes.

Técnica de recogida de datos

Para recoger datos, se pidió a cada grupo de trabajo que entregara un informe con su propuesta a través de la plataforma virtual, obteniendo un total de 97 trabajos para analizar.

El análisis tiene una doble perspectiva. Por un lado, se interpreta el sentido estocástico (viendo la forma en la que aparecen las ideas estadísticas fundamentales en los trabajos y los errores cometidos en su uso) y por otro el sentido socioafectivo. Dentro de este último, de acuerdo a los estudios de

Giles et al. (2016) y Van der Beek (2017) y dado que se está trabajando con maestros y maestras en formación, podemos analizar tanto sus actitudes matemáticas y hacia las matemáticas como las intervenciones didácticas que proponen en las que se intentan reforzar dichas actitudes en su futuro alumnado además de ofrecerles un desarrollo fructífero personal que conlleve, en este caso particular, a la igualdad entre mujeres y hombres. En este primer ciclo de investigación, ponemos el foco en este último aspecto, viendo la temática concreta elegida y la metodología utilizada en los trabajos.

Para analizar los resultados de las propuestas se han definido una serie de categorías (véase Tabla 1 con el desarrollo). Dicha categorización se ha realizado por el equipo docente-investigador de forma inductiva, como estrategia de apertura a posibles significados no previstos inicialmente, destacando los temas y dimensiones que parecen más relevantes. Una vez diseñadas las categorías, estas han sido utilizadas de forma deductiva para categorizar los comentarios que se han recogido en los trabajos del alumnado (Ruiz-Olabuénaga, 2003).

Tabla 1. Categorías de análisis

Categoría principal	Subcategorías					
Temática	Muestra de referentes	Violencia de género	Profesiones	Películas y series	Brecha salarial	Niñas escolarizadas
Metodología	Aprendizaje cooperativo	Aprendizaje basado en problemas	Aprendizaje basado en juegos	Aprendizaje Servicios	Trabajo individual	No menciona
Ideas estadísticas fundamentales	Variables	Datos	Gráficos	Parámetros centralización	Parámetros dispersión	No utiliza
Errores	Cuantitativa vs cualitativa	Media sobre frecuencias	Media variable cuantitativa	Datos vs variable	Población vs muestra	Diagrama de barras vs sectores

RESULTADOS

Una vez revisados los 97 trabajos, se muestran a continuación los resultados organizados en diferentes tablas por categorías.

Tabla 2. Temática de los trabajos propuestos. Frecuencia absoluta y relativa porcentual

Temática	N_i	%
Muestra de referentes	25	25,77%
Violencia de género	14	14,43%
Profesiones	47	48,45%
Brecha salarial	12	12,37%
Películas, series y libros	5	5,15%
Niñas escolarizadas	3	3,09%
Otro	4	4,12%

Como se observa en la Tabla 2, el 25,77% de los trabajos toma como temática la visibilidad de mujeres en diferentes contextos académicos y profesionales y casi la mitad de los trabajos se dedica a analizar las profesiones de las mujeres a lo largo de la historia y en los contextos familiares del alumnado. Por tanto, la mayor parte de los trabajos intenta concienciar acerca de la falta de referentes femeninos en diferentes disciplinas, destacando principalmente la científica y la matemática. Para invertir esa tendencia y fomentar la presencia de mujeres en este tipo de carreras universitarias, el aprendizaje de las materias del área científico-tecnológica se debe plantear desde un enfoque interdisciplinar e integrador situando la perspectiva de género en el epicentro (Moore y Smith, 2014 y Shernoff et al., 2017).

Tabla 3. Metodología empleada en las propuestas. Frecuencia absoluta y relativa porcentual

Temática	Ni	%
Aprendizaje Cooperativo	54	55,67%
Aprendizaje Basado en Problemas	3	3,09%
Aprendizaje Basado en Juegos	1	1,03%
Aprendizaje Servicios	1	1,03%
Trabajo Individual	5	5,15%
No menciona	33	34,02%

Centrándonos en la metodología empleada que se refleja en la Tabla 3, es significativo cómo el 34,02% de los trabajos no menciona ninguna metodología a trabajar en el aula. Es decir, realizan una propuesta didáctica sin pararse a reflexionar cómo será la organización del alumnado o qué tipo de tareas se van a trabajar y, por ende, tampoco se reflexiona sobre las actitudes hacia la matemática que va a generar este trabajo en el futuro alumnado. En un punto contrapuesto, aunque no aparece explícitamente el Aprendizaje por Proyectos que proponían Batanero et al. (2013) como modelo idóneo para el trabajo en estadística, en más de la mitad de las propuestas aparece el aprendizaje cooperativo y en 4 de ellas este es combinado con un Aprendizaje Servicios o Basado en Problemas, incluyendo así estrategias metodológicas dirigidas al desarrollo en el alumnado de una afectividad positiva hacia las matemáticas, propiciando un aprendizaje activo y resolviendo problemas matemáticos contextualizados (Arteaga Cezón et al., 2014 y Romero-García et al., 2023).

Tabla 4. Ideas estadísticas fundamentales. Frecuencia absoluta y relativa porcentual

Temática	Ni	%
Definición de variables	73	75,25%
Presencia de datos	32	32,98%
Uso de gráficos	54	55,67%
Uso y cálculo de parámetros de centralización	33	34,02%
Uso y cálculo de parámetros de dispersión	5	5,15%
No utiliza	11	11,34%

Respecto al estudio de las ideas estadísticas fundamentales, cuyos resultados aparecen resumidos en la Tabla 4, destacamos los 11 trabajos que pretenden realizar una propuesta estadística sin hablar de datos, gráficos o parámetros, claramente es un error relacionado con los elementos extensivos de las ideas estadísticas fundamentales, pues conocemos el concepto y el método de cálculo pero no podemos aplicarlo a ningún contexto, y con los elementos ostensivos, dado que en ellos se utilizan términos estadísticos de manera coloquial sin ningún tipo de rigor científico.

La mayoría de los trabajos usa únicamente en su propuesta el estudio de variables cualitativas eso hace que, por un lado, como puede verse en la Tabla 5, el 15,56% de las propuestas intenten calcular parámetros de centralización como la media o la mediana sobre este tipo de variables. De estos, hay 3 trabajos que los calculan a partir de las frecuencias relativas, confundiendo estas con los datos de la variable de estudio, y el resto no son conscientes de este error puesto que únicamente indican que habría que calcularlos.

Tan solo un 5,15% de los trabajos utilizan parámetros de dispersión para estudiar la variabilidad de sus datos y la bondad de sus parámetros de dispersión. Aunque es cierto que este dato podría estar relacionado con la poca frecuencia de variables cuantitativas propuestas, cuando estas aparecen, en su mayoría se toma la media como parámetro fiable sin argumentar y justificar sus propiedades (error relacionado con los elementos validativos).

Por último, aunque el 75,25% de los trabajos define variables estadísticas, es reseñable el porcentaje que no lo hace. Como ya se ha comentado, la estadística se utiliza en numerosos contextos reales y el alumnado los aprende en entornos cotidianos por lo que cuando tiene que aplicarlos con rigor en contextos académicos usa los conocimientos previos de los que dispone (Batanero et al., 2013). Esto

se enlaza con algunos de los errores recogidos en la Tabla 5 que, aunque son puntuales, merece la pena resaltarlos: confundir dato aislado y variable dado que esta no se ha definido o confundir población y muestra (errores relacionados con los elementos intensivos).

Tabla 5. Errores. Frecuencia absoluta y relativa porcentual

Temática	Ni	%
Confusión entre variable cuantitativa y cualitativa	4	4,12%
Cálculo de la media sobre frecuencia porcentual	3	3,09%
Cálculo de parámetros sobre variables cualitativas	18	15,56%
Confusión entre dato aislado y variable	2	2,06%
Confusión entre población y muestra	1	1,03%
Confusión entre diagrama de barras y de sectores	1	1,03%

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta el marco legislativo actual, nos planteamos como una propuesta de mejora para el siguiente ciclo de investigación-acción sugerir la elaboración de una situación de aprendizaje, desarrollada en varias sesiones, en lugar de reducir el trabajo a la elaboración de una propuesta didáctica puntual y abierta referida a la celebración concreta de una efeméride poniendo el foco en la producción de actividades de enseñanza-aprendizaje. Con esta modificación y teniendo en cuenta todos los elementos que estructuran una situación de aprendizaje, será necesario, entre otras cosas, proponer orientaciones metodológicas que nos permitirán analizar la forma en la que se plantean estudios estadísticos y las actitudes hacia las matemáticas que se pueden generar a través de ellas.

Esta apertura de la tarea hizo también que el alumnado no se parara a reflexionar sobre las limitaciones que puede tener que en sus trabajos solo aparezcan variables cualitativas, por lo que otra propuesta de mejora para el siguiente ciclo es imponer la condición del uso tanto de una variable cuantitativa como una cualitativa, hecho que nos permite, además, profundizar en el análisis de la interpretación de los parámetros de dispersión, pues ahora únicamente se ha podido analizar su presencia. Además, se ve necesario especificar la necesidad del uso de todas las ideas estadísticas fundamentales y el cálculo de todos los parámetros posibles en torno a una variable, puesto que nos permite analizar también la forma en la que se usan y no solo su aparición, a la vez que el análisis de errores relacionados con los algoritmos de cálculo.

Por último, otro cambio para el siguiente ciclo de investigación-acción es promover nuevos aspectos formativos centrales a tratar. Añadimos a la celebración de la efeméride del 8-M, la celebración del Día Internacional contra la Homofobia, la Transfobia y la Bifobia, el 17 de mayo, con el objetivo de abrir la mirada a cualquier problemática social relevante en la actualidad y ser conscientes de la posibilidad de estudiarla a través de la matemática.

Referencias

Arteaga Cezón, P., Contreras García, J. M. y Cañadas de la Fuente, G. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. *Avances De Investigación En Educación Matemática, 6*, 63–84.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 25*, 41–58.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estocástico y su desarrollo. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83,* 7–18.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57–69). Springer.

Carvalho. C. (1998). Tarefas estatísticas e estratégias de resposta. *Actas do VI Encontro de Educação Matemática* (pp. 127-134). SPCE-SEM.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 22*(1), 5–18.

Engel, J. y Sedlmeier (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- challenges for teaching and teacher education*. A joint ICMI/IASE study (pp. 247–258). Springer.

Giles R. M., Byrd, K.O. y Bendolph, A. (2016). An investigation of elementary preservice teachers' self-efficacy for teaching mathematics. *Cogent Education, 3*, 1–11.

González-Marí, J. L. (2020). Claves para una educación matemática humanista. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 88*, 49–59.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación Matemática, 27*(1), 65–90.

Moore, T. y Smith, K. (2014). Advancing the state of the art of STEM integration. *Journal of STEM Education, 15*(1), 5–9.

Romero-García, C., Manzanal Martínez, A. I. y Palacios Ortega, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las Matemáticas. *Avances De Investigación En Educación Matemática, 24*, 93–110.

Ruiz-Olabuénaga, J. I. (2003). *Metodología de la investigación cualitativa (3ª ed)*. Universidad de Deuston.

Russell, S. J. y Mokros, J. R. (1991). What's typical?: Children's ideas about average. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 307–313). International Statistical Institute.

Sánchez-Compaña, M. T., García-Ruíz, C. R. y Sánchez-Cruzado, C. (2019). La integración de pensamiento matemático y social. Una práctica en formación inicial del profesorado de educación secundaria. En A. Codina y M. F. Moreno (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico* (pp. 179–195). Universidad de Almería.

Sánchez-Cruzado, C y Sánchez-Compaña, MT. (2020). El modelo flipped classroom, una forma de promover la autorregulación y la metacognición en el desarrollo de la educación estadística. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 95,* 121–142

Shernoff, D. J., Sinha, S., Bressler, D. M. y Ginsburg, L. (2017). Assessing teacher education and professional development needs for the implementation of integrated approaches to STEM education. International *Journal of STEM Education, 13*(4), 1–16.

Van der Beek, J.P., Van der Ven, S., Kroesbergen, E. y Leseman, P. (2017). Self-concept mediates the relation between achievement and emotions in mathematics. *British Journal of Educational Psychology, 87*, 478–495.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 221–248.

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL FORMADOR DE MAESTROS EN UNA SESIÓN DE INTRODUCCIÓN A GEOGEBRA

Teacher educator's specialized knowledge in an introductory session to *GeoGebra*

Rodríguez-Segarra, S., Contreras, L.C. y Climent, N.

Universidad de Huelva

Resumen

El conocimiento del formador de maestros en matemáticas está aún poco explorado, aunque en los modelos de ese conocimiento aparecen reflejos de los desarrollados sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, dado que los formadores son profesores en cuya docencia las matemáticas forman una parte relevante. Una de las diferencias principales entre los conocimientos de ambos es la mayor profundidad del conocimiento de la matemática que presenta el formador. En este estudio exploratorio se profundiza en el tipo de conexiones que evidencia un formador en el contexto de una clase centrada en el uso y análisis de GeoGebra como recurso. Se evidencia una recurrencia al uso de conexiones de complejización que difieren del conocimiento de la estructura matemática que suele ser común en los docentes, así como un conocimiento más profundo de la práctica matemática.

Palabras clave: *conocimiento del formador, formación inicial, estructura de la matemática, conocimiento del profesor de matemáticas, primaria*.

Abstract

Mathematics Teacher Educator's knowledge is still little explored, although in the models of that knowledge there appear reflections of those developed about mathematics teacher knowledge, since educators are teachers in whose teaching mathematics are a relevant part. One of the main differences between the knowledge of both is the greater depth of knowledge of mathematics that educator presents. This exploratory research looks into the type of connections that an educator shows in the context of a class focused on the use and analysis of GeoGebra as a resource. There is evidence of a recurrence of the use of complexification connections that differ from the knowledge of mathematical structure that is usually common among teachers, as well as a deeper knowledge of mathematical practice.

Keywords*: teacher educator's knowledge, teacher's training, mathematical structure, mathematics teacher's knowledge, primary school.*

INTRODUCCIÓN

La formación de maestros de primaria en la Universidad de Huelva contempla, en su último curso, la asignatura Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria: las formas, las figuras y sus propiedades, centrada en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría escolar, en cuya organización, las tareas propuestas parten de una reflexión sobre la práctica que se apoya de forma muy evidente en el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), desarrollado por Carrillo et al. (2018). El conocimiento del modelo y los subdominios que lo componen condiciona las secuencias didácticas de los formadores, por lo que podemos afirmar que el conocimiento especializado que los futuros maestros deben construir en su formación inicial formaría parte también del conocimiento del formador.

Rodríguez-Segarra, S, Contreras, L.C. y Climent, N. (2024). El conocimiento especializado del formador de maestros en una sesión de introducción a GeoGebra. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 465-472). SEIEM.

Las incipientes aproximaciones al conocimiento del formador de profesorado de matemáticas (en adelante MTE, de sus siglas en inglés) se apoyan notablemente en los modelos de conocimiento del profesor de matemáticas (Chapman, 2021). Sin embargo, y a pesar del reconocimiento de un marco común que estructure y organice ese conocimiento, Pascual et al. (2021) apuntan a un conocimiento específico tanto del profesor como del formador.

Este trabajo parte de la observación de la práctica de un formador de la mencionada materia inspirado por el trabajo de Pascual (2021) y desarrollada en el contexto de una clase de geometría básica centrada en la introducción a *GeoGebra,* en la que se buscaban evidencias de conocimiento especializado del formador a la luz del conocimiento que se pretende construir en los futuros maestros en relación con la geometría básica. Su aportación apuntaba a un conocimiento de mayor profundidad y extensión en el formador que en un profesor. Esta comunicación pretende describir la profundidad y extensión del conocimiento del formador y las relaciones entre sus elementos. Al final de la siguiente sección dispondremos de los elementos teóricos para concretar los objetivos.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

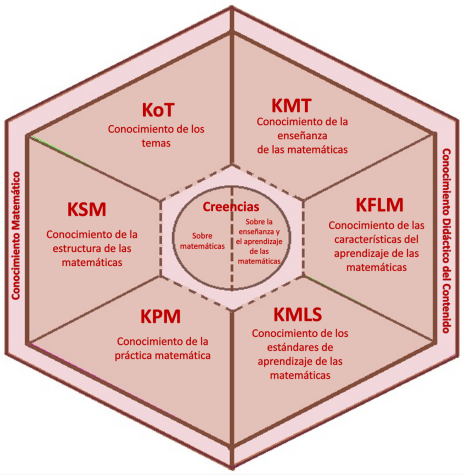
La investigación reciente ha puesto de manifiesto la necesidad de profundizar en los conocimientos, competencias y trayectorias profesionales que presentan distintos perfiles de formadores (Giadas et al., 2023). Distintas aproximaciones hacen referencia a diferencias cualitativas y cuantitativas entre el conocimiento del formador y el del profesor (Escudero-Ávila et al., 2021) y se plantean cómo diferenciarlos. Chapman (2021) establece como bases del conocimiento del MTE al menos dos campos ya más explorados: el conocimiento del profesor de matemáticas y el conocimiento de la didáctica de la matemática. Zaslavsky y Leikin (2004) apuntan que el conocimiento del MTE podría ser una extensión del conocimiento del profesor. Otros autores sostienen que, a pesar de que exista intersección entre ambos conocimientos, ambos agentes cuentan con conocimiento específico no compartido (Chick y Beswick, 2018; Pascual, 2021). Pascual et al. (2021) identifican conocimiento específico tanto del profesor como del formador, señalando que entre las principales diferencias se encuentra el contenido que imparten. Contreras (2021) alude al carácter generalista de la formación inicial de maestros en España para explicar las diferencias entre el conocimiento del maestro y del formador, destacando la necesidad de una mayor amplitud y profundidad en el conocimiento del contenido, la estructura y la práctica de la matemática en el formador.

En cualquier caso, los esbozos de modelos para el conocimiento del formador se inspiran habitualmente en los desarrollados de conocimiento del profesor. En este sentido, el modelo MTSK se ha considerado un referente en la comprensión del conocimiento del formador, como ya se ha señalado en otros trabajos como Contreras (2021), Pascual (2021) o Ferretti et al. (2021).

El modelo MTSK se apoya en los subdominios de conocimiento de la materia (SMK) y el conocimiento didáctico de la misma (PCK) de los trabajos seminales de Shulman (1986), así como en el modelo desarrollado por Ball et al. (2008), el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). Sin embargo, MTSK se muestra especialmente útil en los subdominios del conocimiento matemático, por mostrar éstos unos límites menos difusos y por tanto menos susceptibles de subjetividad (Montes et al., 2013). El modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) subdivide los dominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido en tres subdominios cada uno, como se observa en la Figura 1. El modelo dispone de un conjunto de categorías dentro de cada subdominio. De estas categorías, utilizaremos las relativas al conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM), del dominio del conocimiento matemático, y al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), del dominio del conocimiento didáctico del contenido, para indagar en el conocimiento del MTE. Los distintos subdominios se dividen a su vez en categorías. Dentro del KSM se distinguen conexiones de complejización, de simplificación, transversales y auxiliares. Profundizaremos en los tipos de conexión que puedan identificarse durante

la sesión. Del mismo modo, y en relación al KMT, nos centraremos en la categoría del uso de recursos, bien por mostrar su potencialidad, bien por mostrar sus limitaciones. Las razones de elegir estas se derivan de lo sugerido en Contreras (2021) en relación con la mayor profundidad del KSM y el KPM en el formador y, en nuestro caso, por el potencial de relaciones que cabe esperar en el desarrollo de una actividad centrada en la iniciación a un recurso como es GeoGebra, donde KMT y KFLM pueden emerger de forma natural.

Figura 1. Traducido de Carrillo et al. (2018)



En este sentido, los objetivos de esta investigación son: 1) describir la profundidad y extensión del conocimiento de la estructura y de la práctica matemática de un formador en una sesión introductoria a GeoGebra, y 2) mostrar cómo lo anterior sustenta posibles relaciones entre estos dos tipos de conocimiento, su conocimiento de la enseñanza y de las características del aprendizaje de las matemáticas.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Nuestro propósito es mostrar una visualización gráfica de la puesta en práctica de los conocimientos del formador, es decir, un análisis gráfico a modo de radiografía que nos permita temporalizar y tomar consciencia de la frecuencia y del uso de los conocimientos. Para ello, utilizaremos una herramienta inspirada en Badillo et al. (2013), usada en su caso para comparar cómo se activan los focos de estudio en lecciones de tres maestras, en nuestro caso, se usa para localizar y situar en el transcurso de una clase la presencia de conocimiento de los subdominios descritos y las relaciones entre ellos. El informante es un formador del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva con más de 40 años de experiencia impartiendo las asignaturas del área en el Grado de Educación Primaria. Su formación de base es la licenciatura en Matemáticas con un posterior doctorado en Psicopedagogía. No cuenta con experiencia en niveles de enseñanza no universitaria, pero desarrolla una labor como investigador del área en la línea de conocimiento y desarrollo profesional del profesor, con intereses relacionados con las creencias, la resolución de problemas y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Esta combinación favorece un perfil de formador con un grado importante de reflexión sobre la propia práctica.

La recogida de datos se hace a partir de la observación y la posterior transcripción de una sesión de clase presencial grabada en contexto natural. Se corresponde con una sesión de introducción a GeoGebra, en la que el formador trata de describir las herramientas básicas del programa, y aprovecha para dar sentido a algunos conceptos geométricos. En el proceso de análisis se buscan en la transcripción las unidades de significado relacionadas con todas las categorías descritas en la Tabla 1. A continuación, se temporalizaron los fragmentos seleccionados y se ubicaron en el eje temporal para su posterior análisis. Entendemos las unidades de significado como una o varias intervenciones

referidas a un objeto matemático en las que el formador ponga de manifiesto explícitamente un conocimiento matemático o se pueda justificar un indicio que sea relevante.

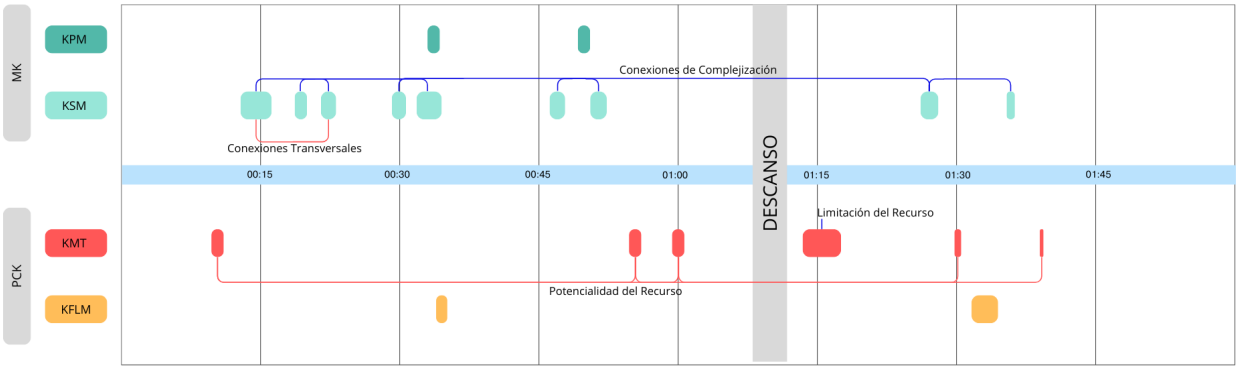
La decisión de utilizar el instrumento que Badillo et al. (2013) utilizan, viene dada por varias razones. En primer lugar, se escoge por su potencial para mostrar en poco espacio un considerable volumen de información. Por otra parte, se adapta a los subdominios del MTSK debido a nuestros objetivos y por la estrecha relación de este estudio con el de Pascual (2021).

RESULTADOS

Algunos aspectos del conocimiento del formador que se pone en práctica en esta sesión y que es común con otros trabajos (Escudero-Ávila et al., 2021; Zopf, 2010) ya fueron analizados por Pascual (2021). Nosotros tratamos de indagar un poco más en otros subdominios del conocimiento del formador, y sus relaciones, y determinar qué conexiones aparecen cuando se activa el KSM y en qué momentos de la sesión.

La Figura 2 muestra la temporalidad del conocimiento evidenciado y permite comparar y cuantificar la activación de los distintos conocimientos:

Figura 2. Visualización gráfica de las evidencias de conocimiento detectadas. Elaboración propia



Los resultados muestran más evidencias del conocimiento matemático en el primer tercio de la clase. En este caso, como se puede observar en la visualización gráfica, el KSM es el subdominio más frecuente de los analizados, mostrándose en un total de 9 unidades de información durante la sesión, y aparece inmediatamente antes o después de enunciar una definición o propiedad de un objeto matemático, independientemente del grado de rigor que ésta pueda contener. La siguiente transcripción, situada entre los minutos 12´ y 15', es un ejemplo de ello:

Formador: (…) ¿Qué es un punto? ¿Alguien me puede definir un punto?

Estudiante para maestro (EPM): Una referencia en un plano

Formador: Una referencia en un plano, buen comienzo. Una referencia en un plano… Referencia, ¿en qué sentido? Piensa en un plano, ¿Qué es una referencia? ¿Qué elementos te tienen que dar para tener una referencia?

EPM: Unas coordenadas.

Formador: Unas coordenadas. Perfecto. Aquí no funciona como coordenadas norte, sur, este y oeste, funcionan como coordenadas cartesianas. De ahí el eje. (…) Nosotros vemos una porción de plano, pero fijaos que el plano es mucho más grande que esto, (…) el plano es infinito. Esta versión de GeoGebra es para trabajar con geometría plana. Las coordenadas vienen dadas por los puntos del eje, (…) que me lo marca (*GeoGebra*) con números enteros, pero como sabéis, entre cada dos números enteros hay infinitos números racionales e irracionales… ¿verdad que sí lo sabemos?

En primer lugar, el formador, a partir de la definición de punto de un EPM, realiza preguntas, evocadas por un conocimiento de la estructura matemática, que buscan una respuesta más rica (3). Nos referimos a una conexión de complejización, que busca matizar el concepto de referencia y también de plano aportando el sistema de referencia cartesiano. De esta forma, se relacionan dos objetos matemáticos (el punto y el plano) y se aportan datos que podrían enriquecer la definición: el formador aporta una propiedad del plano (el carácter infinito de éste) (5) realizando de nuevo una conexión de complejización. Esa aportación del formador se refleja en posteriores intervenciones en las que introduce la potencialidad de ser infinito como propiedad atribuible a diferentes objetos matemáticos (conexión transversal). Esto aparece en el minuto 19′:

Formador: (…) ¿Qué diferencia hay entre una recta y un segmento?

EPM: Que la recta es más grande

Formador: Que la recta, entre comillas (…) porque es una idea intuitiva, no tiene principio ni fin, es infinita. ¿Y el segmento?

EPM: Está delimitado.

Formador: (…) Porque, fijaos, un niño puede preguntaros: Maestro, entonces, en un segmento, entonces, ¿no hay infinitos puntos? ¿Qué le diríais?

EPM: Que sí…

Además de aportar el carácter imaginario de la recta al referirla como idea intuitiva (conexión de complejización), se aprecian dos acepciones de la característica de ser infinito, como refería Pascual (2021): la relativa a la ausencia de límites, y la relativa a la densidad numérica de la recta real. Sin embargo, una vez explicadas las acepciones de infinito que forman parte del contenido curricular de la formación inicial de maestros, el formador vuelve a recurrir a las conexiones de complejización para sugerir más acepciones aún (19′):

Formador: (…) A lo mejor algún día (…) hablamos un poquito del infinito actual y del infinito potencial y los conflictos que podéis generar en los niños de primaria. (…)

En el uso del KSM durante la sesión, hay frecuentes evidencias de conexiones de complejización. En el ejemplo anterior se observa que esta recurrencia a la conexión de complejización a modo de proceso de andamiaje, permite que las aportaciones de los EPM en materia de definición y de identificación de propiedades queden abiertas para su posterior enriquecimiento.

En este sentido, se podría recurrir a las conexiones de complejización para evidenciar la posibilidad de dotar de flexibilidad a las definiciones y analizar su adecuación en relación con el tipo de geometría que se utilice, con lo que se activaría un KPM particular del formador:

Formador: Vamos a ir con paralelas, ¿qué modelo de la vida diaria os parecería útil para ejemplificar dos rectas paralelas? (…)

EPM: Las vías del tren

Formador: (…) Si la vía está en una recta y nos fijamos en los raíles, ¿qué vemos cuando se van alejando?

EPM: Que se van acercando

Formador: Que se cortan, ¡caray! Entonces, fijaos, definimos rectas paralelas como aquellas que se prolongan pero que no se cortan y sin embargo (…) ¿os habéis fijado en los cuadros? ¿Qué ocurre con la solería cuando se representa? (…) El punto de fuga de un cuadro es ese infinito donde convergen las líneas paralelas; de hecho, en geometría, no en geometría euclidiana que es la que trabajaremos aquí, pero en geometría afín, en geometría proyectiva, el concepto de paralela no es correcto desde ese punto de vista. (…) La idea de paralela que debemos trabajar en primaria yo no la trabajaría desde esa perspectiva de que no se cortan nunca, (…) hay una cosa mucho más potente, y es que la distancia en un punto y su equivalente en la otra recta siempre es la misma.

La definición de paralela que se ofrece como alternativa se califica como una definición más adecuada, en relación con otras geometrías, lo que evidencia un KFLM, de un obstáculo didáctico, provocado por dar una definición que es válida en el dominio de la geometría euclidiana pero no en la proyectiva. Además, lo anterior evidencia conocimiento de que una definición es válida en un dominio (KPM) y relaciona el paralelismo en la geometría euclídea y en la proyectiva (conexión de complejización, KSM). Además, aunque es cierto que las herramientas básicas de GeoGebra invitan a utilizar de forma implícita los postulados de Euclides, es relevante la aportación del formador al poner en duda el quinto cuando plantea su validez en otras geometrías. Esto es una muestra de una conexión de complejización en su conocimiento.

Como ya señaló en su estudio Pascual (2021), el KSM vuelve a aparecer de un modo similar al trabajar el concepto de perpendicularidad, donde el formador, tras una definición de los EPM que podría ser válida en un contexto de primaria, añade el matiz de la coplanariedad para hacerla generalizable (minuto 30´) y tras esta información se muestran, usando folios para ejemplificar, las distintas posiciones de los planos. Situando los planos de forma perpendicular con la ayuda de una EPM, retoma:

Formador: (…) Cualquier recta de mi plano y del plano de Ana, ¿serían ahora perpendiculares?

EPM: No tiene por qué…

Formador: Perpendiculares, ¿en qué sentido?

Una vez más se utiliza un KSM, conexión de complejización, de manera que las definiciones que construyen los EPM se van quedando, de alguna forma, abiertas. Cuando se da una definición, se ahonda en las conexiones de complejización para aportar un nuevo elemento de reflexión, aunque esto provoca una cierta resistencia de algunos EPM a no recibir del formador una definición cerrada, como puede verse entre los minutos 24´y 26´ cuando se aborda la definición de línea poligonal y se cuestiona la validez de segmentos concatenados en línea recta como ejemplo:

EPM: ¿Y qué nombre se le da a eso? (…)

EPM: ¿Pero, se le considera poligonal? (…)

EPM: Pero entonces, ¿la otra sí se refiere a poligonal, aunque no cambie? (…)

Como se ha visto, la práctica del formador analizada muestra conocimiento de distinta naturaleza, más allá del que cabría esperar en una sesión de iniciación a un recurso. Incluso, en algunas unidades, se identifica la activación de más de un subdominio, evidenciándose así las relaciones que se establecen entre ellos.

CONCLUSIONES

Tras este análisis de los resultados, aportaremos elementos que nos permitan responder a las cuestiones iniciales acerca de las conexiones que se manifiestan durante la práctica del formador y el conocimiento en principio no esperado que surge.

A pesar de que lo esperable en una clase que integra la comprensión de un recurso sea la aparición de KMT, las evidencias nos llevan a visualizar sobre todo KSM. Parece sea representativo, además, el repetido uso de un KSM que recurre a las conexiones de complejización. Las intervenciones de los EPM son escuetas y muy ceñidas a la matemática escolar. Así, el formador, al recurrir a un contenido que podría darse por conocido durante la aplicación del recurso, ya habría identificado ciertas dificultades en la capacidad de definir de los EPM, lo que pone de relieve una característica del conocimiento de este. Otras evidencias encontradas de KFLM, relativas a dificultades en el aprendizaje de objetos geométricos, ponen de manifiesto cómo el conocimiento del formador sobre estas dificultades hace que el formador ofrezca oportunidades de aprendizaje a los EPM sustentadas en su KSM, fundamentalmente en conexiones de complejización.

Por otra parte, existe una relación importante entre las definiciones de los objetos matemáticos y las propiedades y fundamentos que éstos poseen. Aquí entra en juego la riqueza de una definición flexible y a su vez precisa, que considere el dominio donde es válida dicha definición; Linchevsky et al. (1992) afirman que las definiciones más minimalistas ofrecen más oportunidades para construir un pensamiento matemático más amplio, especialmente en el área de la geometría. La práctica de definir en matemáticas es sin duda una tarea compleja, ya que no solo se especifican acepciones, sino matices dentro de una misma acepción. En el contexto educativo es fundamental adaptar las definiciones a las necesidades del aula, pero para adaptar, hay que conocer, y, en este punto, se pone de manifiesto la necesidad de, además de KPM sobre la práctica de definir, una cierta habilidad para establecer conexiones de complejización en el formador.

También se han detectado elementos emergentes interesantes y que, además, refuerzan nuestro argumento. Se detecta, en el discurso del formador, un posible apoyo no explícito en los postulados euclidianos. El programa GeoGebra es útil en la formación de maestros porque permite construir objetos matemáticos con mucha más precisión e inmediatez de la que nos permite el dibujo técnico. Además, la organización de sus herramientas influye en el discurso del formador, y de alguna forma fuerza a remitirse a los postulados por la forma en que se enuncian sus herramientas. Sin embargo, la ya mencionada discusión sobre las paralelas que tiene lugar en el aula pudiera recordar acaso al conflicto que genera el quinto postulado de Euclides en otras geometrías. Aunque, como hemos mencionado, el propio programa incita a ello, sí es decisión del formador escoger una determinada definición de paralela que, sin necesidad de rebasar los límites de la geometría euclidiana, abre la puerta a la existencia de otras geometrías menos evidentes y menos tratadas en los currículos de la enseñanza de la matemática del Sistema Educativo español y se presenta menos conflictiva cuando existe un conocimiento de las conexiones de complejización de la estructura matemática.

El hecho de que un conocimiento más avanzado de la estructura matemática favorezca la flexibilidad y la conexión de los conceptos, como en el ejemplo del infinito, nos lleva a preguntarnos si un estudio más amplio evidenciaría el mismo tipo de conexiones en formadores con distintos perfiles, desde el punto de vista del objetivo general de avanzar en el modelo de conocimiento para el formador de profesores de matemáticas. Por otro lado, en los estudios sobre conocimiento de profesorado de distintos niveles el KSM ha resultado ser un subdominio difícil de evidenciar en la práctica de aula. Su presencia en el caso del formador estudiado refuerza la hipótesis de mayor fundamentación epistemológica del formador y de un conocimiento más conectado, en relación con el conocimiento del profesor (Escudero-Ávila, 2021). Además, los resultados en cuanto a conexiones empleadas por el formador, donde hay una notable mayoría de conexiones de complejización, nos llevarían a pensar si son estas mismas conexiones las que ponen en práctica otros formadores, por un lado y con intención de generalizar resultados, y el profesorado de matemáticas, por otro lado y con intención de diferenciar ambos conocimientos.

AGRADECIMIENTOS

Esta publicación es parte de: Proyecto PID2021-122180OB-100, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE; Projecto ProyExcel_00297 (Andalusian Government); Centro de Investigación COIDESO (University of Huelva); Grupo DESYM (HUM-168); Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(3), 207-225. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.986

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 28*(3), 236-253. https://10.1080/14794802.2018.1479981

Chapman, O. (2021). Mathematics Teacher Educators Knowledge for teaching teachers. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and development of mathematics teacher educators. International perspectives and challenges* (pp. 403-416). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_21

Chick, H. y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Educator*, *21*, 475-499. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9362-y

Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), e202101. https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L.C. (2021). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of Mathematics Teacher Education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and development of mathematics teacher educators. International perspectives and challenges*. (pp. 23-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

Ferretti, F., Martignone, F. y Rodríguez Muñiz, L. J. (2021). Mathematics Teachers Educator Specialized Knowledge model. *Zetetiké*, *29*, 1-12. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661966

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). ¿Qué características debe tener un formador de profesorado de matemáticas? La perspectiva de maestros de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 275-282). SEIEM.

Linchevsky, L., Vinner, S. y Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference*, *2*, 48-55. PME.

Montes, M., Contreras, L.C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas. Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). SEIEM

Pascual, I. (2021). *El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Arias Montano, Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva.

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). The Pedagogical Knowledge Deployed by a Primary Mathematics Teacher Educator in Teaching Symmetry. *Mathematics, 9*(11), 1241. http://dx.doi.org/10.3390/math9111241

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*, 5-32. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000009971.13834.e1

Zopf, D. A. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education*. [Tesis doctoral, University of Michigan].

GAMIFICACIÓN EN MATEMÁTICAS: ESTUDIO DE PROPUESTAS DE AULA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Gamification in Mathematics: Study of class proposals for Secondary School

Rodríguez-Barreto, C., García-Alonso, I

Universidad de La Laguna

Resumen

La gamificación es una estrategia basada en la integración de elementos del juego en contextos no lúdicos. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que muchos estudiantes poseen, junto con la estrecha relación entre el proceso de aprendizaje y el dominio socio-afectivo, hacen de la gamificación una herramienta con gran potencial para modificar actitudes, aumentar la motivación y promover la participación en la materia. En este trabajo se analizan cinco situaciones de aprendizaje de matemáticas de 3.º ESO (15 años) con el objetivo de identificar los elementos de las categorías básicas de una gamificación y el conocimiento matemático que pretende promover. Se ha observado que todas las situaciones de aprendizaje poseen elementos comunes como los logros, las misiones, los desafíos y el avance por niveles dentro de distintas narrativas. Pero, la gamificación no abarca siempre toda la propuesta de aula y la matemática es exclusivamente procedimental.

***Palabras clave**: gamificación, educación matemática, situación de aprendizaje.*

Abstract

Gamification is a strategy based on the integration of game elements into non-game context. The difficulties that many students face in learning mathematics, together with the close relationship between this process and the socio-affective domain, make gamification a tool with great potential to modify attitudes, increase motivation and promote participation in this subject. In this work, five mathematics learning situations of 3rd Secondary School (15 years old) are analyzed with the aim of identifying the elements of the basic categories of a gamification and the mathematical knowledge that it intends to promote. Among the results obtained, it has been observed that these learning situations have common elements such as achievements, missions, challenges and progress by levels through different narratives. But they are not always present throughout the classroom proposal and the mathematics they develop is exclusively procedural.

***Keywords**: gamification, mathematical education, learning situation.*

INTRODUCCIÓN

El interés por los juegos con finalidad educativa ha aumentado desde principios de la década de los años 2000 y, paralelamente, existe una extensa investigación acerca del potencial formativo que ofrecen los juegos en el contexto educativo, entendiendo el juego como "un sistema en el que los jugadores se involucran en un desafío abstracto definido por reglas, interacción y retroalimentación, que da lugar a un resultado cuantificable que a menudo provoca una reacción emocional" (Koster, 2005, p. 34). Si bien el valor educativo de los juegos es bien conocido desde hace mucho tiempo, en los últimos años los enfoques constructivistas han puesto el foco en la articulación entre juego, aprendizaje y motivación, lo que ha ido consolidando el juego con finalidad educativa como un campo de investigación necesario. El aprendizaje activo entendido como "cambiar el enfoque del aprendizaje de recibir información de forma pasiva a participar con interés en las actividades de aprendizaje" (Frey, 2018), promueve estrategias que fomentan y desarrollan habilidades como el pensamiento crítico, la creatividad, la comunicación y la colaboración, promoviendo la interacción social y

Rodríguez-Barreto, C. y García-Alonso, I. (2024). Gamificación en Matemáticas: estudio de propuestas de aula para Educación Secundaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 473-480). SEIEM.

permitiendo a los estudiantes trabajar de forma colaborativa entre sí y con sus profesores (Frey, 2018). En este sentido, a partir de la década de 2010 irrumpe la *gamificación* como una estrategia de aprendizaje activo que "utiliza elementos del juego en contextos no lúdicos" (Deterding et al., 2011, p. 10). Es decir, una estrategia con la que se pretende llevar elementos del juego y experiencias lúdicas al proceso de aprendizaje con el objetivo de dirigir las actitudes, actividades y comportamiento de los estudiantes (Caponetto et al., 2014), y aumentar la motivación hacia el aprendizaje (Rodríguez, 2018). Todo ello estimulando la participación de los estudiantes, como elemento esencial en el logro de los objetivos de aprendizaje (Rengifo et al., 2017).

Las investigaciones acerca del aprendizaje de las matemáticas a través de la gamificación muestran que aumenta la motivación de los estudiantes, la implicación por el aprendizaje de las matemáticas y los logros académicos en los diferentes niveles en los que se aplica (Pan et al., 2022; Vankúš, 2021; Yan y Matore, 2023). Además, se sabe por los resultados recientes de la evaluación internacional PISA (MEFPD, 2023), que es necesario atender aspectos socioemocionales como la ansiedad hacia las matemáticas. En este sentido, una de las novedades que presenta el actual currículo de matemáticas (RD 217/2022) es la inclusión del sentido socioemocional, como conocimiento a enseñar y como competencia a desarrollar en los estudiantes a través de las matemáticas. Por tanto, la gamificación es una estrategia que se debe investigar en mayor profundidad, por su implicación con el sentido socioafectivo. Por esta razón, la mayoría de las investigaciones sobre gamificación en matemáticas se centran en el estudiante, pero se han encontrado muy pocas centradas en el docente (Russo et al., 2024, p. 16) y cómo construyen estos las gamificaciones. Este estudio se analiza varias propuestas matemáticas gamificadas por docentes para identificar los elementos de la gamificación integrados y cómo caracterizar el conocimiento matemático que promueven. Esto permitirá profundizar en un campo poco desarrollado en la literatura actual: cómo planificar la gamificación en matemáticas (Yan y Matore, 2023).

MARCO CONCEPTUAL

El diseño de la gamificación requiere la combinación adecuada de los elementos de un juego para que estos provoquen un aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos integrados (Groh, 2011). Así, Werbach y Hunter (2015) proponen un modelo que integra tres categorías que necesariamente debe incluir toda gamificación:

- *Componentes:* responde a con qué se desarrolla la gamificación lo conforman aquellos aspectos superficiales de un juego.
- *Mecánica:* responde a cómo se combinan los componentes de la gamificación, constituyendo los procesos básicos que impulsan la acción y generan la participación del jugador, y
- *Dinámica:* a respuesta de qué forma consigue enganchar a los estudiantes la gamificación y hace referencia a las motivaciones internas que ponen de manifiesto de las personas que juegan.

Estos autores señalan que estas categorías siguen un orden creciente en abstracción y sus elementos se irán combinando entre sí cuando se elabora una gamificación (Tabla 1).

El currículo (RD 217/2022) señala que la planificación de aula se establece a través de situaciones de aprendizaje (SA) que serán "situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas" (p. 41574). Por su parte, el conocimiento matemático observable que moviliza la SA puede ser de dos tipos (Castro et al., 2016): conceptual, caracterizado "como un conocimiento rico y complejo, asociado a un conocimiento significativo de la matemática"; o procedimental, caracterizado como un conocimiento operacionalizado y secuenciado, generalmente asociado a un aprendizaje memorístico. Pero, si además se busca que la SA ofrezca un aprendizaje a través de la gamificación, la planificación debe incorporar "los elementos

principales del juego que fomentan actitudes conductuales se organizan en una secuencia lógica para garantizar la calidad del proceso de aprendizaje" (Pereira-Oliveira et al., 2021, p. 14). El análisis de la SA, por tanto, será una herramienta fundamental para el estudio de la gamificación en el aula y su conexión con el pretendido aprendizaje de las matemáticas.

Tabla 1. Dinámica, mecánica y componentes. Fuente: Adaptación de Werbach y Hunter (2015)

Categorías	Elementos	
Componentes	Logros: objetivos a alcanzar. Avatares: representación visual del jugador. Insignias: representación visual de logros. Combates contra jefes: desafío final de nivel. Coleccionables: objetos acumulables. Combates: batallas cortas Desbloqueo de contenido: alcanzable cuando logra objetivo Regalos: posibilidad de compartir recursos. Rankings: tablas de clasificación.	Niveles: pasos a seguir para progresar. Puntos: representación numérica de la progresión. Misiones: desafío definido con objetivos y recompensas Gráfico social: representación de relaciones sociales en el juego Equipos: grupos de jugadores con objetivo común. Ganancias virtuales: valor ficticio o monetario recibido
Mecánica	Desafíos: acertijos o tareas que requieren de esfuerzo para resolverse. Casualidad o azar: aleatoriedad dentro de la actividad (probabilidad) Competición: unos ganan y otros pierden. Cooperación: trabajo grupal para lograr un objetivo. Retroalimentación: información sobre el desempeño del jugador. Adquisición de recursos: obtención de elementos en el sistema. Recompensas: beneficio o logro que se recibe por alguna acción Transacciones: intercambio entre jugadores o intermediarios. Turnos: participación secuencial por alternancia de cada jugador. Ganancia de estados: objetivo que convierte al jugador en ganador.	
Dinámica	Restricciones: limitaciones artificiales que limitan el avance. Emociones: curiosidad, competitividad, frustración, felicidad, … Narrativa: historia coherente que envuelve la actividad. Progresión: crecimiento y desarrollo del jugador. Relaciones sociales: interacción social que genera lazos	

OBJETIVOS

En vista de lo anterior, proponemos el análisis de SA gamificadas de una programación didáctica anual (PDA) de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (12-16 años) de Canarias (España). El análisis pretende observar dos aspectos principales en las SA gamificadas:

- Conocer qué categorías y elementos poseen las SA gamificadas de matemáticas.
- Analizar qué tipo de conocimientos matemáticos y cómo se presentan en las SA gamificadas.

Con ello se pretende estudiar las características que poseen las situaciones de aprendizaje y cómo se interrelacionan los elementos de la gamificación y el contenido matemático que se pretende enseñar.

METODOLOGÍA

Hemos realizado un estudio de tipo empírico y cualitativo (Cohen et al., 2018) en el que se emplea como técnica el análisis del contenido (Krippendorff, 2013). Se pretende estudiar las oportunidades de aprendizaje que ofrecen las SA con metodología basada en la gamificación para el aprendizaje de los conceptos matemáticos que incorporan en las PDA del proyecto Brújula 20 de la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias para la ESO. Se trata de un conjunto de PDA para toda la ESO que se ofrece a todos los docentes de la enseñanza pública y concertada del Gobierno de Canarias, y es de acceso restringido para estos docentes.

MUESTRA Y UNIDADES DE ANÁLISIS

Se realizó una muestra intencional, en la que se ha seleccionado la PDA del citado proyecto que contiene más SA gamificadas. Asi, se eligió la PDA de 3.º ESO (15 años), con cinco SA gamificadas (Tabla 2), configurando estas las unidades de análisis.

Tabla 2. Unidades de análisis seleccionadas y sentido matemático. Fuente: Elaboración propia

SA	Denominación	Sentidos matemáticos
2	¡Q-uzzle!	Sentido numérico
6	Álgebra Royale	Sentido algebraico
7	Asesinato en el museo	Sentido medida y espacial
9	Los insólitos viajes de Gulliver	Sentido numérico y medida
10	Escapando del sistema	Sentido algebraico

Categorías de análisis

Para el análisis de las SA se proponen las siguientes categorías.

a. Conocimiento matemático. conceptual (centrado en el significado y características de las relaciones entre entidades matemáticas), o procedimental (centrado en las acciones sistemáticas y ordenadas con los que resolver un problema matemático).

b. Nivel de articulación. Con el que identificar ´como se muestra la gamificación en la SA, para lo que se analizan todas las actividades propuestas en cada SA, señalando si las actividades gamificadas tienen o no relación entre sí y en qué momento se presentan. Esto permite establecer dos niveles de articulación:

- Nivel 1. La gamificación es una actividad aislada, sin conexión entre sí.
- Nivel 2. La gamificación vertebra toda la SA, con diversas actividades conectadas entre sí.

c. Componentes, Mecánica y Dinámica. Identificación de los presencia o ausencia de los elementos fundamentales asociados a cada categoría de la gamificación.

Procedimiento de análisis

En primer lugar, se seleccionaron las unidades en las que se llevó a cabo el análisis del contenido, lo que permitió identificar de manera sistemática y objetiva las distintas categorías. Posteriormente, los investigadores codificaron las unidades de análisis de acuerdo con las categorías antes descritas. La fiabilidad de la codificación se mantuvo mediante sesiones de codificación conjunta y discusión de los desacuerdos hasta lograr el acuerdo.

RESULTADOS

Tal y como señalamos anteriormente, la PDA cuenta con 13 SA de las que 5 señalan en su metodología que incorporan una estrategia basada en la gamificación o bien alguna actividad gamificada. Los resultados obtenidos de muestran en la Tabla 3 desglosados según las categorías de análisis y las SA que siguen una gamificación.

Tabla 3. Categorías de análisis. Fuente: Elaboración propia

		Situaciones de aprendizaje				
		2	*6*	*7*	*9*	*10*
Contenido matemático	Conceptual					
	Procedimental	X	X	X	X	X
Nivel de articulación	1	X				X
	2		X	X	X	
Componentes	Logros	X	X	X	X	X

	Insignias		X		X	
	Combates contra jefes		X		X	
	Desbloqueo de contenido	X	X	X	X	
	Niveles		X	X	X	
	Puntos	X			X	
	Misiones	X	X	X	X	X
	Equipos		X	X	X	X
Mecánica	Desafíos	X	X	X	X	X
	Competición		X			X
	Cooperación			X	X	X
	Retroalimentación	X	X	X		
	Transacciones				X	
	Avance de niveles	X	X	X	X	X
	Ganancia de estados					X
Dinámica	Restricciones	X	X	X	X	
	Emociones	X	X	X	X	X
	Narrativa	X	X	X	X	X
	Progresión	X	X	X	X	
	Relaciones sociales		X	X		

A. Contenido matemático

Las SA analizadas desarrollan conocimientos matemáticos de diferentes tópicos matemáticos: numérico, algebraico, medida y geometría. El único que no está presente es el sentido estocástico.

Todas las SA analizadas abordan el conocimiento procedimental de las matemáticas, con el que se promueve el desarrollo de habilidades de cálculo numérico o algebraico o la medición de alturas mediante el uso del teorema de tales o de Pitágoras, tal y como se puede observar en el ejemplo de la SA6 (Figura 1). Además, se identifica sólo la SA 9 y SA10 con contenidos matemáticos contextualizados con la temática en la que se contextualiza la gamificación. En el primer caso se trabaja con cantidades grandes o pequeñas en un viaje por el cuerpo humano (Figura 2), y en el segundo caso son problemas contextualizados en la situación de un viaje.

Figura 1. Ejemplos de actividades de la SA6. Fuente: Elaboración propia

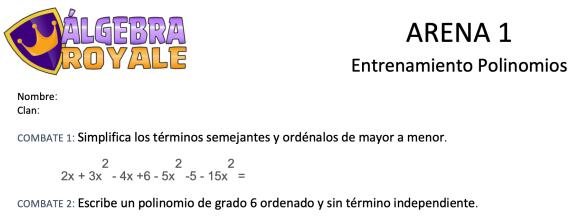
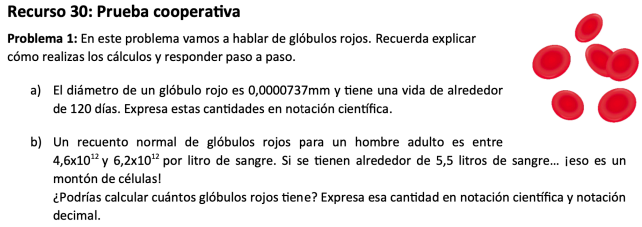


Figura 2. Ejemplos de actividades de SA9. Fuente: Elaboración propia



B. Nivel de articulación

Las SA2 realiza una actividad gamificada situada dentro de la Actividad 2 prevista en la SA. Por su parte, la SA10 (Figura 3) ofrece una actividad final gamificada que servirá de refuerzo de lo aprendido sobre sistemas de ecuaciones. Por tratarse de actividades aisladas se consideran en el Nivel 1 de articulación. Las SA6, SA7 y SA9, en cambio, son gamificaciones que se desarrollan a lo largo de toda la propuesta y son una justificación para el avance en el conocimiento matemático pretendido.

Figura 3. Ejemplos de programación de la SA10. Fuente: Elaboración propia

Actividad 3. Escapar del sistema.

Sesión 7.

Con el objetivo de aumentar la motivación en nuestro alumnado, introduciremos en el aula una actividad gamificada para reforzar y consolidar el planteamiento y la resolución de problemas contextualizados, como aplicación de los contenidos ya adquiridos en esta situación de aprendizaje.

Esta gamificación consistirá en un e*scape room* educativo y digital **(Recurso 5)** basado en la resolución de problemas, aplicando para ello sistemas de ecuaciones lineales. El alumnado, por grupos, comenzará el juego con una pista que le indicará el lugar donde tiene que buscar la primera prueba. Esa pista

C. Elementos de la gamificación

Componentes

Todas las SA analizadas contienen *logros* y *misiones* en su propuesta (Figura 4). Además, salvo la SA10, el resto también presenta *desbloqueo de contenido* cuando conseguían un determinado nivel. Y la SA2 es la única que se desarrolla de forma individual. Tres SA poseen *niveles* (SA6, SA7, SA9) y sólo en dos SA se muestran *insignias*, *combates* o *puntos*.

Figura 4. Ejemplos misiones y puntos de SA2 y SA9, respectivamente. Fuente: Elaboración propia

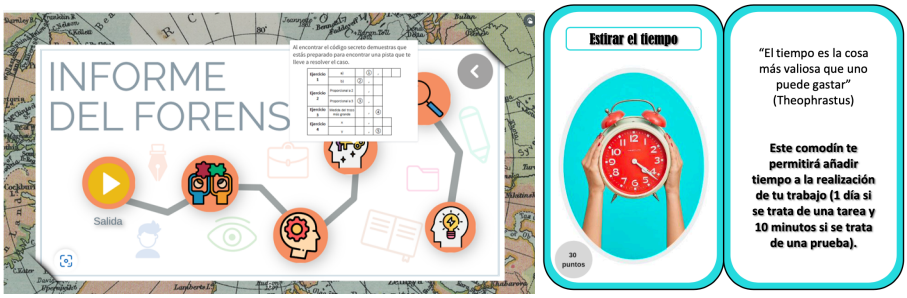


Mecánicas

Todas las SA analizadas presentan *desafíos* que están organizados para realizar un *avance por niveles* (Figura 5). Así, en la SA6, por ejemplo, se proponen niveles por los que deben transitar los estudiantes y, para superarlos, cada estudiante dispondrá de la ayuda de su clan (equipo), salvo en el momento final, donde deberá demostrar de forma individual que ha adquirido los conocimientos adecuados para avanzar a la siguiente arena o nivel.

Tres SA incorporan *retroalimentación* (SA2, SA6 y SA7), mediante la adquisición de las claves o datos ocultos que les permiten avanzar. Otras tres se desarrollan mediante *cooperación* (SA7, SA9 y SA10), requiriendo el trabajo del equipo. Mientras que dos SA siguen una mecánica de *competición* (SA6 y SA10), en la que existen enfrentamientos individuales y colectivos. Finalmente, una SA incorpora *transacciones* (SA9) en la que se intercambian puntos por ventajas (tiempo extra, eliminación de preguntas, ayuda del docente o de compañeros, etc.), y otra SA *ganancia de estados* (SA10) en la que tras la acumulación de logros se obtiene la victoria en el juego.

Figura 5. Ejemplo de avance por niveles (SA7) y transacciones (SA9). Fuente: Elaboración propia

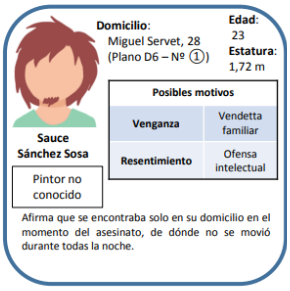


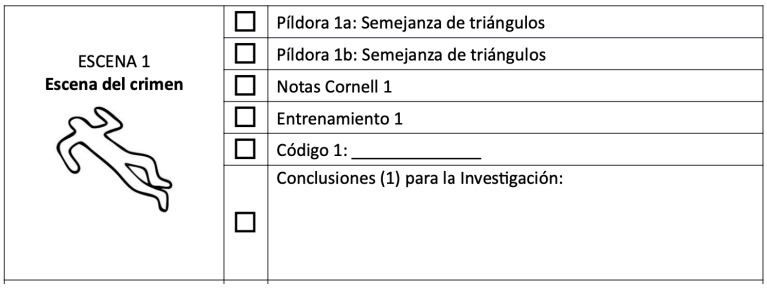
Dinámicas

Respecto a las dinámicas, se utiliza una narrativa diferente en cada SA. Así, la SA2 es está ambientada en una aventura, la SA6 es una adaptación del juego Clash Royale, la SA7 se ambienta en la

investigación de un asesinato, la SA9 se ambienta en el cuerpo humano, el espacio y una isla mágica de potencias y la SA10 es un escape room orientado. Los tipos de gamificación utilizados son juego de pistas (SA2 y SA7) (Figura 6), juego de desafíos (SA6), escape room (SA10), o un juego adaptado (SA6). Todos pretenden una respuesta emocional en los estudiantes, destacando la curiosidad y la competitividad. Salvo el escape room, todos poseen restricciones que deben superar para progresar.

Figura 6. Ejemplos de información facilitada por la SA7. Fuente: Elaboración propia





CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado cinco SA de una PDA de matemáticas de 3.º ESO que incluyen la metodología de gamificación en una o varias actividades que se proponen, con objeto de profundizar en los elementos que definen la gamificación y cómo se relaciona con el contenido matemático que promueven. Para esto se han estudiado las categorías y elementos que identifican la gamificación.

Con respecto a las componentes de la gamificación observamos que las SA analizadas poseen elementos comunes como son los logros, las misiones y el trabajo en equipo o el desbloqueo de contenidos una vez se alcanza un nivel. Pero otros componentes no están presentes como pueden ser avatares, los coleccionables o el establecimiento de rankings. En cuanto a cómo se relacionan estas componentes y dan lugar a la mecánica de la gamificación, se observa que es común en todas las SA la superación de desafíos que permitan el avance por los diferentes niveles. También es importante la retroalimentación y la cooperación entre los diferentes equipos que compiten. Pero es destacable que no se establezcan turnos, ni la adquisición de recompensas que permitan incentivar la motivación en el juego. Finalmente, las dinámicas se fundamentan en la narrativa o contexto en el que se construye la gamificación y, aunque hay otros elementos, como la emoción del juego, quedará a expensas de los retos y la progresión de la actividad. Este resultado lo ha señalado Moreira Parrales et al. (2024), para quienes los principales componentes son los puntos (clasificación de logros), las principales mecánicas son la competencia/cooperación y los desafíos y la principal dinámica es la narrativa. Todos ellos se encuentran en la SA analizadas, lo que nos permite señalar como elementos a incorporar en el diseño de SA gamificadas. Hay que destacar la SA10 por tratarse de un escape room, que, a diferencia de otros, es dirigido, pues posee una ruta de desarrollo. Además, se trata de una gamificación con finalidad de comprobación de conocimiento y, por tanto, de cierre de la SA, a diferencia del resto de gamificaciones, que se desarrollan a la vez que el proceso de aprendizaje.

Con respecto a la matemática que promueven estas SA abarcan diferentes conocimientos matemáticos, en el mismo sentido que lo indicado por Yan y Matore (2023), siendo más frecuente el uso del conocimiento procedimental que el conceptual, pues la contextualización está pensada para la aplicación del conocimiento matemático y, si fuera necesario, se proponen nuevas actividades para adiestrarse en dicho procedimiento. También se ha observado que tres de las cinco SA se articulan a lo largo de toda la SA, lo que conlleva gamificaciones con categorías más completas.

En definitiva, el análisis realizado permite identificar las características del conocimiento matemático que promueve la gamificación, establecer sus categorías y evidenciar elementos poco desarrollados de cara a nuevas gamificaciones. Además, se ha observado la necesidad de promover gamificaciones que aborden el conocimiento conceptual de la matemática.

Referencias

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education (8th edition)*. Routledge.

Caponetto, I., Earp, J. y Ott, M. (2014). Gamification and education: A literature review. En *European conference on game-based learning, 1*, pp. 50-57.

Castro A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación, 374*, 43-68.

Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R. y Nacke, I. (2011). Gamification: Toward a definition. *Proceedings CHI 2011*, pp. 1-4, Vancouver.

Frey, B. B. (2018). The SAGE Encyclopedia of Educational Research, Measurement and Evaluation. Sage publications.

Groh, F. (2011). Gamification: State of the art definition and utilization. En N. Asaj, B. Könings, M. Poguntke, F. Schaub, B. Wiedersheim y M. Weber (Eds.). *Proceedings of the 4th seminar on Research Trends in Media Informatics* (pp. 39-45).

Koster, R. (2005). *A theory of fun for game design.* Paraglyph Press.

Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Paidos.

Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes (MEFPD) (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe Español.* Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE).

Moreira Parrales, M. L., Mejía Carrillo, M. de J., Suárez Ibujes, M. O. y Torres Peñafiel, J. S. Gamification for learning matehmatics in secondary school: Most effective gamified stratgies to motivate students and improve their performance in mathematics. *Salud, Ciencia y Tecnología, 4* (1016). https://doi.org/10.56294/saludcyt20241016.

Pan, Y., Ke, F. y Xu, X (2022). A systematic review of the role of learning games in fostering mathematics education in K-12 settings. *Educational Research Review, 36*, 100448. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100448

Pereira-Oliveira, R., Gomes de Souza, C., da Cunha Reis, A. y Medeiros de Souza, W. (2021). Gamification in E-Learning and Sustainability: A Theoretical Framework. *Sustainability, 13*(21), 11945. https://doi.org/10.3390/su132111945

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educaicón Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, 41571-41789.

Rengifo, P., Smith, Y., Vargas, E. O., y Muñoz, J. I. (2017). Experiencias motivacionales gamificadas: una revisión sistemática de literatura. *Innovación educativa*, 17(75), 6380.

Rodríguez, C. (2018). Gamificación en educación superior: experiencia innovadora para motivar estudiantes y dinamizar contenidos en el aula. *Edutec, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 63, 29-41. https://doi.org/10.21556/edutec.2018.63.927

Russo, J., Kalogeropoulos, P., Bragg, L. A. y Heyeres, M. (2024). Non-Digital games that promote mathematical learning in Primary Years students: A systematic review. *Education Sciences, 14,* 200. https://doi.org/10.3390/educsci14020200.

Vankúš, P. (2021). Influence of game-based learning in mathematics education on students' affective domain: A systematic review. *Mathematics, 9*, 986.

Werbach, K. y Hunter, D. (2015). The gamification toolkit: dynamics, mechanics, and components for the win. University of Pennsylvania Press.

Yan, L.L.L. y Matore, M. E. (2023). Gamification trend in Students' Mathematics Learning through systematic literature review. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development, 12*(1), 433-461.

RELACIONES ENTRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE LAS CARACTERISTICAS DEL APRENDIZAJE Y DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A PARTIR DEL USO DE EJEMPLOS TRANSPARENTES EN LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Relationships between specialized knowledge of the characteristics of learning and teaching of mathematics from the use of transparent examples in the quadratic equation

Sánchez-Acevedo, N.[a], Segura, C.[b], Contreras, L. C.[c] y Sosa, L.[d]

[a,b]Universidad Central de Chile/Universitat de València, [c]Universidad de Huelva, [d]Benemérita Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen

Los ejemplos en matemáticas son reconocidos por su papel en el contexto del aprendizaje de diferentes contenidos, siendo el conocimiento que moviliza el profesor un aspecto preponderante en el aula de clases. En este reporte profundizamos en las relaciones del conocimiento didáctico especializado entre las características del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas de una profesora de secundaria en la selección y uso de ejemplos transparentes en la enseñanza de la ecuación cuadrática. Las relaciones se indagan a través de un caso instrumental desde un paradigma interpretativo con información obtenida de observaciones de aula y entrevistas semiestructuradas. Los resultados permiten establecer relaciones entre los tipos de ejemplos transparentes, el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y de las características del aprendizaje, y cómo estas sustentan las decisiones en el aula en la enseñanza de la ecuación cuadrática.

Palabras clave: *ejemplos transparentes, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, ecuación cuadrática, cualitativo.*

Abstract

Examples in mathematics are recognized for their role in the context of learning different contents, with the knowledge mobilized by the teacher being a predominant aspect in the classroom. In this report we delve into the relationships of specialized didactic knowledge between the characteristics of learning and teaching mathematics of a secondary school teacher in the selection and use of transparent examples in teaching the quadratic equation. The relationships are investigated through an instrumental case from an interpretive paradigm with information obtained from classroom observations and semi-structured interviews. The results allow establishing relationships between the types of transparent examples, knowledge about mathematics teaching and learning characteristics, and how these support classroom decisions in teaching the quadratic equation.

Keywords: *transparent examples, specialized knowledge mathematics teachers, quadratic equation, qualitative.*

Sánchez-Acevedo, N., Segura, C., Contreras, L. C. y Sosa, L. (2024). Relaciones entre conocimiento especializado de las características del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas a partir del uso de ejemplos transparentes en la ecuación cuadrática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 481-488). SEIEM.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento del profesor de Matemáticas es un tema de amplia investigación, pero aún hay algunos focos que necesitan mayor exploración. Por ejemplo, la naturaleza de la ejemplificación[11], como parte de la selección y uso de ejemplos y su relación con el conocimiento necesario que se requiere para centrar la atención en características específicas de estos ejemplos. Esta atención, sin duda, podría abrir espacios sobre buenas oportunidades en el aprendizaje de los estudiantes (Hill et al., 2005). En su trabajo sobre enseñanza y aprendizaje con ejemplos, Chick (2007) inicia con una situación sobre dos ejemplos de ecuaciones cuadráticas para dar cuenta del uso que se les puede dar y la intencionalidad de enseñanza. La situación planteada es (en términos generales) la siguiente: *Cuando un profesor de matemáticas pide a una clase que encuentre las soluciones de* $x^2 - 5x + 6 = 0$*, es posible que un estudiante visualice el objetivo que se quiere conseguir a partir de la ecuación y otros no. ¿Qué pasa si otro ejemplo dado es encontrar las soluciones de* $x^2 - 2x + 5 = 0$*? ¿qué nos dice esto? Los dos problemas no parecen muy diferentes estructuralmente, entonces ¿por qué asignar ambos?*

En este sentido, tanto los propósitos del ejemplo que se busquen conseguir, la intencionalidad de enseñanza y el conocimiento que se moviliza en la selección y uso es lo que implica la ejemplificación (Pascual y Contreras, 2018). Es decir, ejemplificar no es solo seleccionar y usar, sino que plantea la necesidad de movilizar otros aspectos que son relativos a esta acción (variación, espacios de ejemplos, secuencias de ejemplos y transparencia). Una de las características de la ejemplificación es la de ejemplos transparentes (Lesh et al., 1987; Zaskis, 2005) (que ilustramos con la situación anterior). En este sentido, y sobre la base de un trabajo anterior (Sánchez-Acevedo et al., 2023), pretendemos seguir profundizando en esta línea, específicamente en el conocimiento especializado (MTSK) movilizado a partir de la selección y uso de ejemplos transparentes. Seguir en esta línea se debe a limitada investigación centrada en la selección y uso de ejemplos transparentes para la enseñanza y su relación con el conocimiento del profesor (Adler & Pournara, 2020; Cayo et al., 2022; Zaskis, 2005); y, en cuanto al conocimiento especializado, porque el modelo MTSK se centra en la especificidad de la enseñanza de las matemáticas y tiene un carácter analítico que releva aspectos particulares y relaciones entre estos conocimientos (Zakaryan et al., 2018).

De acuerdo con lo descrito y la relevancia que tiene explorar el conocimiento del profesor en relación con la selección y uso de ejemplos, específicamente los ejemplos transparentes, nos proponemos como objetivo determinar y describir las relaciones de conocimiento especializado entre *la enseñanza de las matemáticas* y *las características del aprendizaje de las matemáticas* -como parte del conocimiento didáctico del contenido- a partir de la selección y uso de ejemplos transparentes en la enseñanza de la ecuación cuadrática.

MARCO DE REFERENCIA

Con el fin de explorar en las relaciones del conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas y sobre la enseñanza de las matemáticas a partir del uso de ejemplos transparentes (Lesh et al., 1989), nos apoyamos en el modelo MTSK. Este modelo aporta un carácter holístico e integral, con fines analíticos y comprensivos, tanto dominios y subdominios de conocimiento interactúan y se integran conjuntamente de manera especializada (Carrillo, et al., 2018).

11 Para mantener la idea inicial del trabajo de Sánchez et al., (2023) usamos la noción de ejemplificación y no de práctica de ejemplificar. Por una parte, para no colisionar con la noción de práctica del subdominio del conocimiento de la práctica matemática del MTSK, y por otra, la noción de ejemplificación [defendemos] debe ser consciente y movilizar elementos de variación, transparencia y secuencias de ejemplos.

El MTSK comprende tres dominios de conocimiento: (1) el matemático (MK); (2) el didáctico del contenido (PCK); y (3) el de creencias de la matemática y su enseñanza. Tanto el dominio del conocimiento matemático (MK), como el didáctico del contenido (PCK) se componen de tres subdominios y categorías. En el caso del dominio de las creencias del profesor, éste permea tanto el conocimiento de la matemática per se, como el conocimiento didáctico del contenido. En este modelo se resalta el conocimiento que es propio del profesor de matemáticas en relación con el contenido, más no el que puede ser transversal a otras disciplinas.

De este modo, el conocimiento matemático (MK) se compone de los subdominios del conocimiento de los temas (KoT), el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM) y, el conocimiento de la práctica matemática (KPM); el conocimiento didáctico del contenido (PCK) se compone de los subdominios del conocimiento de los estándares del aprendizaje de las matemáticas (KMLS), el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). En lo que sigue, y dado que el objetivo de este trabajo es analizar las relaciones entre los subdominios KFLM y KMT, nos centraremos en describir solo estos.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Este subdominio establece la relación entre el conocimiento matemático como objeto de aprendizaje y la interacción con el estudiante y formas de aprendizaje, poniendo la atención en el conocimiento sobre los aspectos matemáticos que fundamentan el aprendizaje de los estudiantes, como los errores asociados a los procedimientos. También saber cuáles son las dificultades asociadas a diferentes tipos de errores, y la interacción de los estudiantes con el contenido matemático. Por ejemplo, el conocimiento que puede tener el profesor que cuando plantea la $x^2 - 2x = 5$, puede inducir a que el estudiante considere que el coeficiente $c = 5$. Se incluyen en este subdominio las categorías de conocimiento: (i) teorías de aprendizaje; (ii) fortalezas y dificultades; (iii) formas de interacción con un contenido matemático; e (iv) intereses y expectativas.

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KTM)

Este subdominio incluye aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor para seleccionar ejemplos transparentes a la técnica de factorización $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0$ para α y β enteros o saber del uso de la teoría de las situaciones didácticas para la organización de una clase. Se incluyen en este subdominio las siguientes categorías: (i) teorías de enseñanza; (ii) recursos materiales y virtuales; y (iii) estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

Tanto las categorías de conocimiento que componen el KFLM como el KMT son la base para el posterior análisis en la identificación de MTSK y relaciones entre estos subdominios movilizados en el uso de ejemplos transparentes relacionados con la ecuación cuadrática.

Ejemplos y noción de transparencia/opacidad

La palabra ejemplo es usada en diferentes contextos y con diferentes fines a lo largo de la historia de la enseñanza de las matemáticas (Bills y Watson, 2008). Dada la ambigüedad que puede presentar el concepto de ejemplo en matemáticas en relación con lo que se quiere mostrar, algunos autores han planteado algunas conceptualizaciones al respecto (Zodik y Zaslavsky, 2008). Aquí seguimos la idea planteada por Figueiredo (2010) de ejemplo como "un elemento de una colección de objetos (entes) que es utilizado en una determinada situación de enseñanza/aprendizaje porque evidencia determinada, o determinadas, características" (p. 36).

Para ello, el uso de determinados ejemplos que ejemplifiquen lo que se pretende mostrar (objetivo del ejemplo) está influenciado por el conocimiento matemático y didáctico del profesor (Zodik y Zaslavsky, 2008), permitiendo dar apoyo a los estudiantes, dar sentido y conectar significativamente con el aprendizaje (Muir, 2007). Por lo tanto, no basta con seleccionar y usar ejemplos, también el

conocimiento del profesor debe brindar la posibilidad de comunicar lo que se quiere comunicar a través de los ejemplos en relación con el objetivo de este.

Lesh et al. (1987) proponen la idea de representaciones[12] opacas y transparentes. Para estos autores, una representación transparente no tiene ni más ni menos significado que la idea o estructura que se quiere representar, es decir, se refiere a la claridad con que los ejemplos muestran lo que realmente pretenden; y una representación opaca enfatiza algunos aspectos de las idea o estructura y resta importancia a otros.

METODOLOGÍA

Para explorar las relaciones entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KMT) movilizado por una profesora de matemáticas a partir del uso de ejemplos transparentes en la enseñanza de la ecuación cuadrática, consideramos un caso instrumental, desde un paradigma interpretativo (Bassey, 1999).

La profesora participante, al momento de recoger la información realizaba clases en secundaria (estudiantes entre 15 a 18 años) en una escuela particular subvencionada y contaba con unos cinco años de experiencia docente. La profesora participante (de seudónimo Jenny) fue la mejor graduada de su generación (licenciada en ciencias), formaba parte de un programa de formación pedagógica. Además, Jenny contaba con la motivación de perfeccionarse en la enseñanza de la matemática.

Para la recolección de datos se utilizó la video grabación de clases (siete clases), por medio de la observación no participante (Cohen y Manion, 2002), y entrevistas semiestructuradas aplicadas posterior al análisis de las clases. Las clases en las que se presentaron ejemplos transparentes (Lesh et al., 1987) fueron transcritas, específicamente considerando aquellos episodios significativos donde hubo presencia de categorías de conocimiento, tanto en el KMT, como en el KFLM.

En el análisis de datos seguimos los siguientes pasos: (i) identificamos cada uno de los episodios de análisis (ejemplos transparentes seleccionados y usados por la profesora); (ii) los ejemplos (episodios) fueron divididos en unidades de información más específicas que nos permitieran identificar evidencias o indicios de conocimiento especializado sobre KFLM y/o KMT, como en sus relaciones; y (iii) en caso de no tener certeza de la evidencia de conocimiento movilizado por la profesora, usamos la entrevista semiestructurada (también transcrita) para profundizar en la naturaleza particular de conocimiento y la selección de los ejemplos. Para llevar a cabo los pasos (i), (ii) y (iii) nos apoyamos del análisis de contenido (López-Noguero, 2002) y la validación se logró por medio de la triangulación de consenso entre expertos (Flick, 2007).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este apartado mostramos las relaciones de conocimiento especializado entre el KMT y el KFLM a partir de la selección y uso de ejemplos transparentes, específicamente aquellas evidenciadas en la clase 3 de la enseñanza de la ecuación cuadrática.

Contexto de la clase: En el inicio de la clase 3, Jenny escribe en la pizarra los siguientes ejemplos: (a) $2x^2 + 2x - 15 = 0$; (b) $12x^2 - 5x - 2 = 0$; (c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; (d) $x^2 + 8x + 16 = 0$ y (e) $3\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 1 = 0$. A partir de estos ejemplos plantea que el objetivo de la clase será usar la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas (sean completas o incompletas) presentada en forma estándar, considerando que ya habían trabajado (en clases anteriores) los tipos de ecuaciones cuadráticas y algunos métodos de factorización. De acuerdo con esto, mostramos las relaciones entre el KFLM y KMT.

[12] En este caso, consideramos ejemplos transparentes y opacos (Figueiredo y Contreras, 2015).

Relaciones entre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT), formas de interacción con el contenido matemático (KFLM) y fortalezas y dificultades (KFLM)

A partir de los ejemplos que selecciona y propone Jenny, en la entrevista elaboramos la pregunta sobre los ejemplos seleccionados para resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula. Al respecto Jenny menciona:

> P: los ejemplos tienen relación más con la organización de la estructura y el uso de la fórmula. En estos casos tratamos de pasar por todos los tipos de ejemplos, es decir, ecuaciones cuadráticas completas e incompletas, con el coeficiente "a" negativo, para ver también algunas estrategias de resolución pensando en que habitualmente los estudiantes puedan tener una imagen estática de alguna ecuación y cuando uno cambia cierto parámetro, los estudiantes presentan dificultades.

Los ejemplos usados por Jenny son transparentes a la intencionalidad de enseñanza, es decir, mostrar la técnica de la fórmula con ecuaciones cuadráticas expresadas en forma estándar. En cualquier otro ejemplo de ecuación cuadrática, por ejemplo $2x^2 + 2x = 15$, la intencionalidad de enseñanza sería opaca, obscureciendo la intencionalidad de enseñanza en relación con el objetivo de Jenny.

La respuesta de la profesora da evidencia de KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), pues conoce tipos de ejemplos (transparentes a la intencionalidad de enseñanza) que son coherentes con el objetivo que se propone en la clase. Además, para la selección de estos ejemplos, Jenny considera la forma en que los estudiantes interaccionan con el contenido matemático (KFLM). En este caso, evaluar en la fórmula de la ecuación cuadrática por los estudiantes es un proceso espontaneo, dado que la identificación de los coeficientes a, b y c del trinomio es un tema que la profesora trabajó en clases previas. A partir de la identificación de los coeficientes, incluye en los ejemplos (transparentes) algunas ecuaciones con diferentes signos en a, b o c (cambio de cierto parámetro) (KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), para que los estudiantes no tengan una imagen estática de éstas y al momento de resolver otro tipo de ecuaciones no presenten dificultades (KFLM-fortalezas y dificultades) en la resolución.

A partir de la respuesta de Jenny, en su selección de los ejemplos evidenciamos relaciones entre KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y KFLM (interaccionan con el contenido matemático), siendo el KFLM de la profesora el que moviliza el KMT en la selección de determinados ejemplos transparentes de ecuaciones cuadráticas estándares. Este tipo de ecuaciones permite que los estudiantes centren la atención en identificar los coeficientes para usar la fórmula. Del mismo modo, el conocimiento de la profesora sobre las dificultades de los estudiantes, cuando se usan ejemplos diferentes (KFLM), activa su conocimiento sobre KMT, al momento de considerar en los ejemplos de ecuaciones cuadráticas completas, aquellas con signos negativos y positivos como una estrategia de enseñanza, ejemplos que, si bien no son explícitos en la secuencia mostrada, son relevados por Jenny como parte de su proceso de enseñanza.

Relaciones entre formas de interacción con el contenido matemático (KFLM) y recursos materiales y virtuales (KMT)

De esta misma secuencia, preguntamos a Jenny sobre la fuente de selección de estos ejemplos (como parte de la ejemplificación), y al respecto nos respondió:

> P: los ejemplos usados están extraídos de los libros de textos o están extraídos de facsímiles, los cuales son documentos o pruebas o exámenes, o prototipos de exámenes que están abiertos para que los profesores tengan acceso y son para profundizar también en temas procedimentales que los estudiantes deben saber.

Lo que menciona Jenny evidencia conocimiento sobre KMT (recursos materiales y virtuales), pues conoce fuentes de selección de ejemplos, en este caso, el libro de texto y facsímiles de acceso a la universidad. Se observa también que la docente considera que una parte de la enseñanza debe estar

centrada en que los estudiantes desarrollen estrategias procedimentales estandarizadas. Las estrategias que menciona Jenny que deben conocer los estudiantes, a partir de las fuentes de donde selecciona los ejemplos, se relacionan con su conocimiento de las formas de interacción con el contenido matemático (KFLM), pues sabe qué y cómo deben aprender los estudiantes. En este caso, el KFLM es el que activa el KMT de Jenny a partir de los cinco ejemplos transparentes (a), (b), (c), (d) y (e) seleccionados y utilizados en clase.

Relaciones entre fortalezas y dificultades (KFLM), estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT) y *teorías de enseñanza (KMT)*

A partir de la resolución de los ejemplos de ecuaciones cuadráticas (conocimiento de los temas, KoT), Jenny muestra de manera explícita la identificación de los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas, en este caso

P: $2x^2 + 2x - 15 = 0$] Primero identificar las variables ¿Cuál es a?

E: Todos aquí ¿Cuál es la a?, a estos nos dedicaremos

P Dos ¡Muy bien! dos ¿Cuál es b?

E: Uno.

P Uno, guds ¿Cuál es c?

E: Menos quince.

P: ¿Menos?

E: Quince.

P: [La profesora anota en la pizarra $2x^2 + 2x - 15 = 0$ y los coeficientes]

A partir del diálogo que Jenny sostiene con los estudiantes en la identificación de los coeficientes de la ecuación, observamos que remarca la pregunta sobre el valor que toma el coeficiente c, evidenciándose su conocimiento sobre fortalezas y dificultades (KFLM), dado que sabe que los estudiantes cometen errores cuando identifican coeficientes sin considerar el signo. Esto se ve confirmado en la respuesta que nos entrega Jenny, a partir de la entrevista, sobre el énfasis en relación con los signos:

P: entonces todas las ecuaciones que están acá son ecuaciones cuadráticas simples y estándares, pero estaban pensadas justamente teniendo la idea de que los estudiantes no desviaran el foco, porque, obviamente, si el objetivo era identificar la idea era atender a eso, es decir, ejemplos claros para centrar la atención de los estudiantes. Luego con esto claro, puedo ver otro tipo de ecuaciones con otros procedimientos.

La respuesta de Jenny muestra evidencia de conocimiento sobre tipos de ejemplos claros (transparentes) (KMT), pues de acuerdo con el objetivo de la clase selecciona determinados ejemplos (transparentes) con la intención que los estudiantes centren la atención en los dos aspectos definidos por ella, la identificación de coeficientes de ecuaciones cuadráticas estándares y el uso de la fórmula para el cálculo de soluciones. Del mismo modo, se puede evidenciar que usa como estrategia la selección de ejemplos transparentes de ecuaciones cuadráticas estándares para afianzar el uso de la fórmula en los estudiantes y no desviar la atención, y luego pasar al uso de ecuaciones cuadráticas no estándares que impliquen otro tipo de procedimientos (KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

A partir de los análisis realizados se desprende lo siguiente: (i) En relación con el KMT se evidencia que la selección y uso de ejemplo transparentes, por parte de la profesora, se basa en su conocimiento pedagógico del contenido (PCK) sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y recursos materiales y virtuales, los que parecerían estar apoyados en el conocimiento sobre teorías de aprendizaje. En este sentido, el KMT movilizado por la profesora le permite, de acuerdo con la intencionalidad de enseñanza, seleccionar ejemplos de ecuaciones cuadráticas estándares para la enseñanza de la fórmula

como técnica para resolver este tipo de ecuaciones. Como parte del análisis, emerge como relevante el hecho que la profesora selecciona tipos de ecuaciones cuadráticas específicas (transparentes al propósito de enseñanza), haciendo énfasis en no desviar la atención de los estudiantes. (ii) Sobre el KFLM, se logra evidenciar que la selección y uso de ejemplos transparentes, permite a la profesora movilizar conocimientos sobre fortalezas y dificultades y formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático. Este conocimiento se refleja en que tanto la selección de los ejemplos (en el libro de texto) y su utilización en el aula se sustentan en que sabe cómo los estudiantes llevan a cabo sus procedimientos, particularmente aritméticos, y algunos de los errores y dificultades a los que se ven enfrentados.

CONCLUSIONES

La selección y uso de ejemplos transparentes (Lesh et al., 1987) ha dejado en evidencia la movilización de relaciones de conocimiento especializado de los dos subdominios del MTSK (Zakaryan et al., 2018); sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT) y las características del aprendizaje de los estudiantes (KFLM). A partir de los ejemplos transparentes usados por la profesora en la clase descrita de la enseñanza de la ecuación cuadrática se ponen en juego diversos conocimientos sobre las decisiones de enseñanza, considerando la forma en que los estudiantes aprenden, en este caso específico, sobre la ecuación cuadrática.

Los elementos de conocimiento que moviliza la profesora y las relaciones de estos dos subdominios, pertenecientes al Conocimiento Didáctico del Contenido, emergen y se conectan a partir de la selección y uso de ejemplos transparentes en la enseñanza de este contenido. En particular, se logra evidenciar que es el conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes (KFLM, en las categorías descritas) es el subdominio que activa y el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT). En particular, las decisiones que toma la profesora en relación con las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y el uso de los recursos materiales en la selección de ejemplos transparentes, está sustentado en el conocimiento de como los estudiantes proceden en matemáticas y sus fortalezas y dificultades, lo que permite ayudarles a los estudiantes, de manera consciente a comprender y operar en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Los resultados mostrados en este trabajo se han reportado en investigaciones previas (Chick, 2007; Muir, 2007; Zaskis, 2005; Zodik y Zaslavsky, 2008), pero motivadas desde la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de diversos contenidos matemáticos y el conocimiento del profesor. Pocos de estos trabajos han abordado la ejemplificación en la enseñanza (Adler & Pournara, 2020; Sánchez-Acevedo et al., 2024). Con los resultados de este trabajo (parte de una investigación de mayor envergadura) esperamos seguir avanzando en las relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas y la ejemplificación, específicamente en la enseñanza de la ecuación y función cuadrática. Con estos resultados vamos contribuyendo en esta línea, partiendo con aspectos particulares, como lo es el caso de los ejemplos transparentes y las relaciones en el PCK, específicamente en el KMT y el KFLM, los cuales dan cuenta de la dualidad de la enseñanza y el aprendizaje.

Agradecimientos

Este trabajo es parte del proyecto de I+D+i PID2021-122180OB-100, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE y ha sido vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Adler, J. y Pournara, C. (2020). Exemplifying with variation and its development in mathematics teacher education. En D. Potari & O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: volume 1. Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development* (pp. 329–353). Sense.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20* (3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cayo, H., Contreras, L. C. y Codes, M. (2022). Análisis de la selección y uso de ejemplos como vía de acceso al conocimiento especializado del profesor. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 199-207). SEIEM.

Chick, H. L. (2007). Teaching and learning by example. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 3–21). MERGA.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla

Figueiredo, C. (2010). *Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional*[Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura, España].

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Hill, H.C., Rowan, B. y Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Lesh, R., Behr, M. y Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. En Claude Janvier (Ed), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 41–58). Lawrence Erlbaum.

López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI, Revista de Educación*, *4*, 167–179.

Muir, T. (2007). Setting a good example: Teachers' choice of examples and their contribution to effective teaching of numeracy. En J. Watson, y K. Beswick (Eds.). *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematical Education Research Group of Australasia*, *2*, 513–522. MERGA.

Pascual, M. I. y Contreras, L. C. (2018). Un instrumento para el análisis de los ejemplos matemáticos para la enseñanza. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 650). SEIEM.

Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L. y Contreras, L. C. (2023). Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 256–263). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105-123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2–3), 207–217. https://doi.org/10.1080/00207390412331316951

Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 165–182. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO/A EN UNA TAREA SOBRE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

Prospective teachers' specialised knowledge in a task on computational thinking

Santaengracia, J. J.[a], Aguilar-González, Á.[a], Palop, B.[b] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[a]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

Los objetivos de este trabajo son explorar el conocimiento especializado de estudiantes para maestro (EPM) en una tarea de pensamiento computacional (PC) e indagar sobre el encaje del PC dentro del modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Para ello, los EPM escogieron una tarea Bebras y, mediante un cuestionario ad hoc, debieron explicitar su resolución, las componentes del PC, los saberes básicos y las competencias específicas matemáticas que encontraron, así como el motivo de su elección. Las producciones de los EPM evidencian, mayoritariamente, los subdominios KoT y KMLS, apareciendo KFLM y creencias y concepciones cuando se explican los motivos de la elección. Estos resultados son parcialmente similares a los encontrados al resolver tareas matemáticas, lo que lleva a preguntarse cuál es el encaje del PC dentro de un modelo de conocimiento especializado de matemáticas como el MTSK.

Palabras clave: *conocimiento del profesor, estudiantes para maestro, pensamiento computacional, MTSK.*

Abstract

The aims of this study are to explore the specialized knowledge of pre-service mathematics teachers (PMTs) in computational thinking (CT) tasks and to examine the integration of CT within the framework of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). To this end, PMTs selected a Bebras task and, using a bespoke questionnaire, were tasked with elucidating their approach, delineating the components of CT, identifying basic knowledges, specific mathematical competencies encountered, and elucidating their rationale for selection. The responses of PMTs predominantly manifest within the subdomains of KoT and KMLS with KFLM and beliefs and conceptions emerging when elucidating the rationale for their choices. These findings parallel, in part, those observed in mathematical task contexts, prompting inquiry into the alignment of CT within a framework of specialized mathematical knowledge, such as MTSK.

Keywords: *teacher knowledge, pre-service students, computational thinking, MTSK.*

INTRODUCCIÓN

Debido a su importancia, el conocimiento especializado del docente de matemáticas ha sido un tema muy estudiado en los últimos años, y con la aparición de modelos como el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018) es posible modelarlo a través de categorías e indicadores concretos con el fin de saber los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen docentes y estudiantes para maestro (EPM). Por otro lado, el pensamiento computacional (PC) también ha ganado importancia en los últimos años, apareciendo en la nueva ley educativa dentro del área de Matemáticas (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022). La inclusión del PC dentro del área de Matemáticas hace surgir como problema de investigación su encaje dentro de los modelos de conocimiento especializado didáctico-matemático.

Santaengracia, J. J., Aguilar-González, A., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). Conocimiento especializado de estudiantes para maestro/a en una tarea sobre pensamiento computacional. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 489-496). SEIEM.

Con el propósito de abordar esta cuestión, en este trabajo se plantea qué evidencias (en el sentido de Flores et al., 2013) de conocimiento especializado tanto del PC como de matemáticas se muestran cuando los EPM se enfrentan a una tarea sobre PC. Los objetivos del trabajo, por tanto, son: (1) explorar el conocimiento especializado y de PC que los EPM demuestran al resolver y analizar una tarea de PC y (2) indagar la pertinencia del encaje del PC en un modelo de conocimiento especializado.

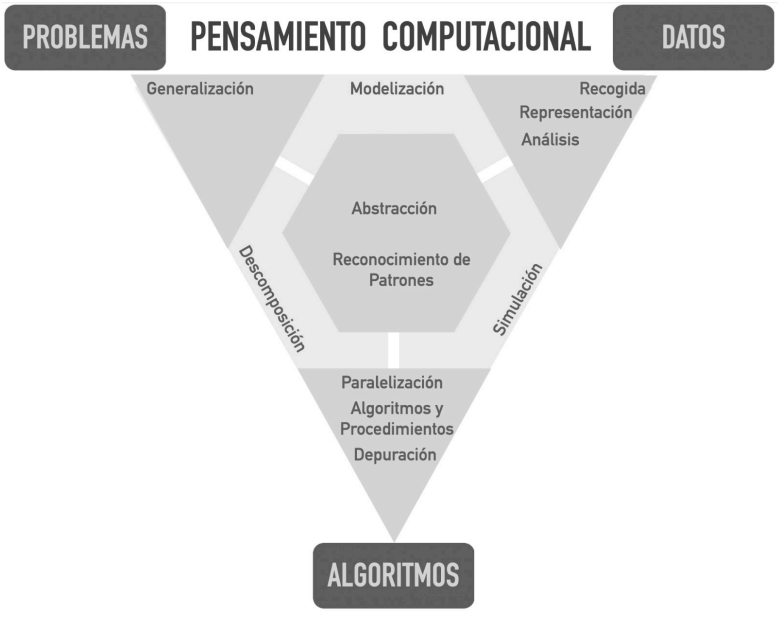
MARCO TEÓRICO

Pensamiento computacional

La idea del PC tuvo su origen en el trabajo seminal de Papert (1980), pero el término apareció por primer primera vez en el trabajo de Wing (2006), quien propuso que el PC: "implica resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano mediante la utilización de los conceptos fundamentales de la informática" (Wing, 2006, p. 33 [traducción propia]). Aún sin haber llegado a un consenso sobre la definición de PC dentro de la comunidad científica (Tang et al., 2020), se han propuesto diferentes conceptualizaciones. Grover et al. (2020) y Palts y Pedaste (2020) proponen la resolución de problemas como eje central del PC; Barr y Stephenson (2011) dan una definición centrada en la resolución de problemas a través del ordenador y Brennan y Resnick (2012) conceptualizan el PC con la algoritmia como principal componente y lo dividen en conceptos, prácticas y perspectivas computacionales. Otra de las propuestas más populares por su aplicación directa en el aula es la iniciativa Bebras (Dagiene y Dolgopolovas, 2022), que consiste en un concurso anual para niños y adolescentes en el que se resuelven problemas de PC (publicados y de distribución gratuita tras el concurso) clasificados en las dimensiones de pensamiento algorítmico, descomposición, abstracción, evaluación y generalización (Dagiene y Sentance, 2016).

En este trabajo se utilizará la definición propuesta por Palop et al. (2024): "El pensamiento computacional es la manera de razonar que nos permite enfrentarnos a un problema sobre unos datos con el objetivo de que un ordenador lo resuelva" (p. 12). En Palop et al. (2024) se conceptualiza el PC mediante tres pilares: datos, problemas y algoritmos. Además, se distinguen componentes del PC, con diferentes intensidades de relación con cada pilar (Figura 1) y se entiende el proceso de pensamiento desde un punto de vista competencial.

Figura 1. Configuración en tres pilares del pensamiento computacional. Palop et al. (2024).



Modelo MTSK

En la actualidad, la investigación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas ha sido objeto de estudio; debido a ello se han desarrollado modelos como el MTSK (Carrillo et al., 2018) que, como otros modelos, considera distinciones en dos dominios de conocimiento (matemático y didáctico del contenido) y, además, incluye un dominio sobre las creencias.

El dominio de Conocimiento Matemático (MK) está organizado en tres subdominios. El Conocimiento de los Temas (KoT) tiene como referente el conocimiento matemático que es objeto de enseñanza e incluye el conocimiento que el profesor tiene sobre las propiedades de los temas matemáticos y sus fundamentos, los procedimientos, la fenomenología o diferentes registros de representación. El conocimiento de la estructura matemática (KSM) abarca las múltiples conexiones entre entes matemáticos. Por último, el subdominio de Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM) contempla cómo se genera conocimiento matemático y cómo se valida. Por su lado, el conocimiento didáctico del contenido (PCK) también se estructura en tres subdominios. El conocimiento de enseñanza de matemáticas (KMT) incluye conocimiento de teorías de enseñanza, de recursos y de estrategias. El subdominio de las características del aprendizaje de matemáticas (KFLM) considera el conocimiento del contenido desde la perspectiva del aprendizaje (teorías personales o formales del aprendizaje, fortalezas o dificultades en el proceso de aprendizaje, formas de interacción de los estudiantes con el contenido y expectativas de los estudiantes). El subdominio de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) abarca el conocimiento sobre todo lo que el estudiante debe, o es capaz de, aprender en un determinado nivel escolar. Finalmente, el modelo MTSK incluye el dominio de las creencias y concepciones sobre las matemáticas y sus procesos de enseñanza y aprendizaje entendiendo que éstas, están intrínsecamente ligadas al conocimiento del profesor de matemáticas, es decir, lo permean (Aguilar-González et al., 2019).

MÉTODO

En esta comunicación se explora el conocimiento especializado de 34 estudiantes para maestro (EPM) que, tras recibir una formación de una hora y media en PC, debían analizar una tarea Bebras a partir de un cuestionario diseñado ad hoc para la investigación y se analizan las respuestas de este cuestionario mediante el modelo MTSK.

Participantes

Los participantes de este estudio la constituyen 34 EPM de la asignatura Matemáticas y su Didáctica I del Grado de Maestro/a de Educación Primaria de la Universidad de Oviedo, seleccionados por facilidad de acceso. Los EPM dieron su consentimiento a la recogida y uso de los datos (anónimos) con fines de investigación.

Instrumento

De forma previa a la administración del cuestionario los EPM recibieron una sesión de formación en PC. En esta sesión se analizaron varias definiciones del PC, se exploraron las componentes según el modelo de Palop et al. (2024) y se resolvieron y analizaron varios problemas de la iniciativa Bebras. Tras esta formación, se pidió a los EPM que completaran el cuestionario que se describe a continuación escogiendo una tarea Bebras (iniciativa mencionada en el marco teórico),de entre 10 opciones ofrecidas por los investigadores, para que justificasen la más adecuada para usarla en su clase de matemáticas. Todos los EPM realizaron al menos un cuestionario completo. Algunos EPM, opcionalmente, respondieron el cuestionario para una tarea extra, pero no siempre de forma completa, por lo que del número de respuestas por pregunta varía (Tabla 1).

Para explorar el conocimiento especializado que pueda emerger en las producciones de los EPM se escogieron los subdominios KoT, KMLS, KFLM y KMT y el dominio de creencias y concepciones, ya que se consideró que tenían una relación más evidente con el PC. Se excluyeron los subdominios

KSM y KPM ya que, al tener las tareas como foco principal el PC a nivel de educación primaria, la estructura y la práctica matemática no se consideraron objeto principal de la investigación. Por una parte, el conocimiento de la lógica matemática o de axiomas y definiciones o de prácticas de demostración, incluidos en el KPM, no se consideraron explícitamente en el objetivo de la tarea ni del nivel al que iba dirigida; por otra parte, el conocimiento de las ideas principales de la disciplina y las conexiones de complejización, propias del KSM, tampoco supuso el foco de la tarea.

Tabla 1. Descripción del cuestionario y elementos del conocimiento pretendidos. Elaboración propia.

Número de pregunta	Texto de la pregunta	Elementos del conocimiento pretendidos en la pregunta	Número de respuestas
1. Tarea	Indica el número de tarea escogida.	No aplica	56
2. Solución	Explica la solución que has encontrado para la tarea.	KoT	56
3. Saberes	Explica qué saberes básicos de matemáticas identificas en la tarea y por qué.	KoT y KMLS	52
4. Componentes	Explica qué componentes del PC identificas en la tarea y por qué.	KoT y KMLS	44
5. Competencias	Además del PC, ¿identificas alguna otra competencia específica del área de Matemáticas? ¿Por qué?	KoT y KMLS	43
6. Elección	¿Por qué has elegido esta tarea? Da razones tanto basadas en los criterios mencionados en clase para escoger tareas como en tu opinión.	KoT, KMLS, KFLM, KMT y creencias y concepciones	47

Análisis de datos

Se realizó un análisis cualitativo de las respuestas a las preguntas 2, 3, 4 y 5, identificando qué subdominios del modelo MTSK se evidenciaban. En las respuestas a la pregunta 6, además de identificar los subdominios, se analizó el dominio de creencias y concepciones. En la Tabla 2 se exponen los criterios de inclusión y exclusión que se consideraron para clasificar cada respuesta de los EPM en cada subdominio atendiendo a evidencias de conocimiento (Flores et al., 2013) puesto que las respuestas contenían elementos que permiten afirmar que se posee un determinado conocimiento.

Tabla 2. Criterios de identificación de subdominios MTSK y creencias utilizadas. Elaboración propia.

Subdominio	Criterios
KoT	Si la respuesta contiene únicamente explicaciones a una solución, aportaciones no curriculares propias de los EPM o un conocimiento sobre el tema de matemáticas o PC.
KMLS	Si la respuesta contiene elementos curriculares del área de Matemáticas o componentes del PC. Aunque los elementos curriculares estén mal identificados, su aparición se puede considerar conocimiento de ellos. Si la respuesta dice que no existen competencias o saberes básicos, también se considera KMLS, puesto que se muestra su conocimiento.
KFLM	Si la respuesta muestra un conocimiento sobre teorías del aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con el contenido matemático o intereses y expectativas. Se considera KFLM si los EPM tienen en cuenta alguna característica de la tarea (por ejemplo, la dificultad).
KMT	Si la respuesta muestra un conocimiento sobre teorías de enseñanza, recursos o estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.
Creencias y concepciones	Se considerará creencia o concepción siempre que el EPM exprese su opinión sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

RESULTADOS

En la Tabla 3 se muestran los resultados, exponiendo el número de respuestas que han sido clasificadas en cada subdominio (una respuesta puede mostrar evidencias de varios subdominios).

Tabla 3. Clasificación de respuestas en subdominios del modelo MTSK. Elaboración propia.

Pregunta	KoT	KMLS	KFML	KMT	Creencias y concepciones
2. Solución	31	2	0	0	No aplica
3. Saberes	33	39	0	0	No aplica
4. Componentes	29	37	0	0	No aplica
5. Competencias	10	35	0	1	No aplica
6. Elección	16	18	24	3	24

Para las preguntas de la 2 a la 5 se observa que, salvo en un caso de KMT, los EPM solo muestran evidencias de los subdominios KoT y KMLS. Estas respuestas son consecuentes con las preguntas: se pedía identificar tanto elementos curriculares como demostraciones del conocimiento propio. En la pregunta 6 encontramos una mayoría de respuestas clasificadas en KFLM, KMLS, KoT y creencias y concepciones. Al considerar los resultados por pregunta observamos que en la pregunta 2, a excepción de dos respuestas que incluyen KMLS, el resto solo muestra evidencias de KoT, lo que parece lógico, puesto que se trataba de resolver una tarea y, por lo tanto, los EPM muestran su conocimiento sobre este tema al resolverla.

En las preguntas 3 y 4 los EPM muestran mayoritariamente, evidencias de los subdominios KMLS y KoT, por este orden. Este resultado también es coherente con la naturaleza de la pregunta, en la que se pedía que identificasen elementos curriculares (KMLS) y explicasen el porqué de su elección, lo que favorece que emerja el conocimiento de los temas (KoT). Es notable, además, que KoT y KMLS se muestran de forma conjunta 21 veces en cada una de estas preguntas, lo que subraya la asociación que realizan los EPM entre ambos subdominios, cuestión sobre la que se reflexionará en la discusión.

En la pregunta 5 hay una gran mayoría de respuestas clasificadas en el subdominio KMLS y una minoría dentro del subdominio KoT; además, únicamente se observan dos respuestas que combinan los subdominios KoT y KMLS y una que combina los subdominios KMLS y KMT.

Finalmente, en la pregunta 6, al pedir que los EPM justificasen su elección y diesen su opinión sobre la tarea, en la mayoría de las respuestas (36 de 47) se identifican múltiples subdominios (generalmente, tres o más por respuesta), cuestión que se ha omitido en la Tabla 3 por la gran cantidad de combinaciones diferentes que se ha constatado. Por otro lado, se identificaron las creencias y concepciones expresadas por los EPM en las respuestas a la pregunta 6, encontrando que, en su mayoría, realizan comentarios sobre concepciones de aprendizaje y sobre metodología y diferencias individuales entre alumnos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Uno de los primeros aspectos de interés que podemos destacar es la coherencia de las respuestas a las preguntas 3 y 4 con estudios sobre el conocimiento evidenciado por EPM respecto a contenidos matemáticos, en los que se muestra cómo los EPM tienden a elegir y utilizar de forma conjunta los subdominios KoT y KMLS por encima del resto de subdominios del MTSK (Muñiz-Rodríguez et al., 2022). El análisis de las respuestas a la pregunta 3 evidencia que los EPM son capaces de mostrar conocimientos sobre los saberes básicos de matemáticas y sobre las componentes del PC. En Muñiz-Rodríguez et al. (2022) se defiende que el conocimiento de los EPM acerca de los saberes básicos puede haberse adquirido durante sus años de escolarización, lo que explicaría la aparición del subdominio KoT. Además de su escolarización previa, los EPM reciben formación curricular en sus estudios de grado, lo que explica la aparición del subdominio KMLS y su conexión con el KoT. Por su parte, en resultados de la pregunta 4 se obtienen valores similares a la pregunta 3 respecto a la emergencia del KoT y del KMLS, a pesar de que los EPM han manifestado informalmente no haber

recibido nunca instrucción sobre PC, la sesión de formación sobre PC recibida antes de la tarea puede justificar este resultado. Sin embargo, en la pregunta 5 los EPM mayoritariamente muestran evidencias del subdominio KMLS sin estar asociado al KoT, al contrario que en las preguntas 3 y 4. La pregunta indica que se deben identificar competencias específicas y explicar por qué, pero el alumnado únicamente realiza la identificación. En las preguntas 3 y 4, además de identificar el saber básico o la componente del PC (muestra de KMLS), explicaban el motivo de la identificación (muestra de KoT), mientras que en la pregunta 5 se observa que los EPM, mayoritariamente, identifican la competencia específica sin explicar el motivo.

Dentro de las investigaciones en el modelo MTSK no encontramos, de acuerdo con nuestra información, trabajos que hayan explorado la relación del KoT y el KMLS de los EPM con las competencias específicas y el PC, por lo que no es posible conectar este resultado con la literatura existente. Sin embargo, sí es posible realizar conjeturas acerca de su relación con resultados previos obtenidos al analizar el conocimiento de los EPM al resolver tareas matemáticas. Por un lado, el modelo de educación competencial en el que se relacionan los criterios de evaluación con competencias y no directamente con contenidos se ha implantado con la LOMLOE (MEFP, 2022), por lo que los EPM no dominan aún el papel curricular de las competencias como sí lo tienen de los saberes básicos, siendo posible que la competencia sea vista como algo ajeno o alejado de los temas (KoT). Por otro lado, el caso del PC es paradigmático en la LOMLOE, dado que aparece como competencia y como saber básico; así, los EPM muestran un conocimiento sobre el tema, tratando de explicar las componentes del PC como saberes básicos, pero sin asociarlo a las competencias, lo que refuerza la idea previa acerca de la dificultad para apropiarse de la noción de competencia.

En Vergara et al. (2021) se realiza un análisis similar al realizado en esta comunicación en una tarea eminentemente matemática, observando los subdominios KFLM y KMT de forma relacionada. Sin embargo, el análisis de los datos muestra que, al enfrentarse a una tarea de PC, los EPM no muestran evidencias de KMT, aunque sí de KFLM, como se acaba de comentar. Como se postula en Muñiz-Rodríguez et al. (2022), el no haber vivido esta experiencia, ni siquiera como discentes, hace que los EPM sean ajenos al conocimiento de KFLM sobre PC.

El análisis de la pregunta 6 revela que los EPM son capaces de aplicar conocimientos didácticos de la práctica matemática, manifestándose en los subdominios KFLM y KMLS. Además, también muestran su conocimiento de los temas, con un alto número de respuestas con evidencias de KoT. Esto es coherente con el estudio de Climent et al. (2016), en el que destacan que los EPM son capaces de mostrar un buen nivel de KFLM si está sustentado por un buen nivel de KoT. En este caso, la gran muestra de evidencias de KFLM no se acompaña únicamente de KoT, sino que el aprendizaje previo de las componentes del PC hizo que también se sustentara en un buen KMLS.

En la pregunta 6, además, se buscaron evidencias de creencias y concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Se han evidenciado concepciones sobre metodología y actividad del docente en el aula, en concreto, los EPM creen que la diferenciación individual del alumnado sería el dinamizador ideal del aprendizaje. Estos resultados van en consonancia con Aguilar-González et al. (2019), donde se evidenciaban, como aquí, asociaciones frecuentes entre este tipo de concepciones y el KFLM.

Los resultados respaldan que los EPM evidencian conocimiento sobre los saberes básicos de matemáticas y sobre las componentes del PC, pero no sobre las competencias específicas del currículo. Dada la coincidencia de este hallazgo con Aguilar-González et al. (2019) y Muñiz-Rodríguez et al. (2022), podemos afirmar que el trabajo con el PC establece relaciones claras con el conocimiento matemático, lo que, a su vez, resulta consistente con el modelo de Palop et al. (2024), en el que se postula que las conexiones entre el PC y las matemáticas posibilitarían que los EPM muestren cierto conocimiento especializado en una tarea de PC. En este sentido, cabe comentar que, a pesar del desconocimiento de los EPM acerca de las diferentes definiciones y conceptualizaciones

del PC, han mostrado evidencias de conocimiento acerca de las componentes de este, mencionando las palabras más comunes y que, muy probablemente, ya conocieran de manera informal.

A partir de estos hallazgos, resulta pertinente plantearse la existencia de un modelo especializado de conocimiento respecto al PC. Este modelo se puede plantear mediante tres opciones:

- En primer lugar, si se considera que el PC es una parte del conocimiento matemático, ya estaría encajado dentro del modelo MTSK y únicamente habría que identificar y clasificar sus características en cada subdominio.
- En segundo lugar, considerando el conocimiento sobre PC como un constructo diferente al conocimiento matemático, pero asumiendo las evidentes relaciones entre ambos, podría ampliarse el modelo MTSK para añadirle las características no matemáticas del PC.
- En tercer lugar, si el PC y el conocimiento matemático se consideraran dominios de diferentes disciplinas, cabría la posibilidad de elaborar un modelo PCTSK, en el que se definieran las características del conocimiento computacional y didáctico-computacional (como en otras extensiones del modelo MTSK, por ejemplo, el BTSK de Luís y Carrillo, 2020).

De la misma forma que el modelo MTSK ha resultado de gran utilidad en la formación de profesorado, la caracterización del conocimiento sobre PC (en cualquiera de las tres opciones propuestas) contribuirá a definir propuestas de formación de profesores (Santaengracia et al., 2023), lo que respalda la necesidad de profundizar en esta línea de investigación.

FINANCIACIÓN

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el Ministerio de Educación y Formación Profesional a través de la Ayuda para la Formación de Profesorado Universitario (FPU) con número FPU21/05874 y por el proyecto PID2021-122180OB-100 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Álvaro Aguilar-González y Luis J. Rodríguez-Muñiz pertenecen a la Red MTSK (https://redmtsk.net/).

Referencias

Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2019). An Example of Connections between the Mathematics Teacher's Conceptions and Specialised Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2), em1664. https://doi.org/10.29333/ejmste/101598

Barr, V. y Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: What is Involved and what is the role of the computer science education community? *ACM Inroads, 2*(1), 48–54. https://doi.org/10.1145/1929887.1929905

Brennan, K. y Resnick, M. (2012, April). New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking. En *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association*, *Vancouver, Canada* (Vol. 1, p. 25).

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, E., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018): The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, V. J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 9*, 85–103. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.108

Dagienė, V. y Sentance, S. (2016). It's Computational Thinking! Bebras Tasks in the Curriculum. In: Brodnik, A. y Tort, F. (Eds) Informatics in Schools: Improvement of Informatics Knowledge and Perception. *ISSEP 2016. Lecture Notes in Computer Science*, vol 9973. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46747-4_3

Dagiene, V. y Dolgopolovas, V. (2022). Short Tasks for Scaffolding Computational Thinking by the Global Bebras Challenge. *Mathematics, 10*(17), 3194. https://doi.org/10.3390/math10173194

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275–282). SEIEM.

Grover, S., Fisler, K., Lee, I. y Yadav, A. (2020). Integrating Computing and Computational Thinking into K-12 STEM Learning. En J. Zhang, M. Sherriff, S. Heckman, P. Cutter y Á. Monge (Eds.), *Proceedings of the 51st ACM Technical Symposium on Computer Science Education* (pp. 481-482). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/3328778.3366970

Luís, M. y Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (BTSK). *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 11*(7), 19–36. https://doi.org/10.26843/10.26843/rencima.v11i7.2788

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, de 2 de marzo de 2022, 24386–24504.

Muñiz-Rodríguez, L., Valenzuela-Molina, M., Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). ¿Qué aprendemos sobre el conocimiento de los estudiantes para maestro a partir de su autoconcepto? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 391–399). SEIEM.

Palop, B., Diaz, I., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Santaengracia, J. J. (2024). A holistic approach t o Computational Thinking in K-12 Education [manuscrito presentado para publicación]. Universidad Complutense de Madrid, Universidad de Oviedo.

Palts, T. y Pedaste, M. (2020). A model for developing computational thinking skills. *Informatics in Education, 19*(1), 113–128. https://doi.org/10.15388/infedu.2020.06

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* Basic Books.

Rodríguez-Muñiz, L.J., Aguilar-González, Á., Lindorff, A. y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). Undergraduates' conceptions of mathematics teaching and learning: an empirical study. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 523–547. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10105-5

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Tang, X., Yin, Y., Lin, Q., Hadad, R. y Zhai, X. (2020). Assessing computational thinking: A systematic review of empirical studies. *Computers & Education, 148,* 103798. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103798

Vergara, L., Climent, N. y Codes, M. (2021). Construcción de conocimiento especializado a partir de una tarea formativa sobre visualización. En P.D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 629 –636). SEIEM.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

ARGUMENTACIÓN PRÁCTICA SOBRE AMBIGÜEDADES EN LA VALORACIÓN DEL DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE FUNCIONES

Practical argumentation on ambiguities in the evaluation of the design of a didactic unit on functions

Sol, T., Breda, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G.

Universitat de Barcelona

Resumen

En este trabajo se estudia la argumentación práctica que se da al valorar el componente ambigüedades del criterio de idoneidad epistémica, en el diseño de una unidad didáctica de funciones realizada en un ciclo de Lesson Study, para ser implementada con un grupo de estudiantes de cuarto año de la Educación Secundaria Obligatoria. Para ello, se analiza la argumentación práctica de ocho formadores de futuros profesores de matemáticas de secundaria (que conocen el criterio de idoneidad epistémica) utilizando el modelo de Toulmin. El resultado es que los participantes detectan una ambigüedad y realizan una argumentación práctica que, primero, les permite controlarla y, después, evitarla en el rediseño de la unidad didáctica.

Palabras clave: *ambigüedad, argumentación práctica, criterio de idoneidad epistémica, funciones, lesson study.*

Abstract

This research study practical argumentation in assessing the ambiguity component of the criterion of epistemic suitability regarding the design of a didactic unit on functions carried out within the framework of a Lesson Study, implemented with a group of fourth-year students in Compulsory Secondary Education. The practical argumentation of eight trainers of future secondary mathematics teachers (who already know the epistemic suitability criterion) was analysed using the Toulmin model. The result was the participants detected an ambiguity and they were engaged in practical argumentation which, first, allowed them to control this ambiguity and, subsequently, avoid it in redesigning the didactic unit.

Keywords*: ambiguity, epistemic suitability criterion, functions, lesson study, practical argumentation.*

INTRODUCCIÓN

Recientemente ha aumentado el interés por investigar la argumentación práctica en la formación de profesores (Castiblanco, 2021). Si bien existen diferentes trabajos enfocados a la reflexión docente donde se combina el *Lesson Study* (LS) y los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (Hummes et al., 2023), en estos dispositivos se ha estudiado poco la argumentación práctica en la valoración de secuencias de tareas realizada por formadores de profesores que conocen los CID (Sol et al., 2023).

La investigación que se presenta forma parte de un estudio más amplio, donde ocho participantes de un ciclo de LS (Lewis y Hurd, 2011), que son formadores de futuros profesores de secundaria de matemáticas y ya conocen la herramienta CID, diseñan una unidad didáctica sobre funciones (UD), para ser impartida con estudiantes de cuarto año de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Uno de los objetivos es analizar la argumentación práctica de los participantes al utilizar los CID en las cuatro etapas del ciclo. En particular, en este trabajo nos interesa estudiar la argumentación práctica realizada por los participantes al valorar, en la UD diseñada, el componente ambigüedades del criterio

Sol, T., Breda, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G. (2024). Argumentación práctica sobre ambigüedades en la valoración del diseño de una unidad didáctica sobre funciones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 497-504). SEIEM.

de idoneidad epistémica, y proponer acciones para controlar o evitar estas ambigüedades potenciales en un rediseño.

MARCO TEÓRICO

Argumentación práctica

En esta investigación se entiende la argumentación práctica como aquella "argumentación dirigida a decidir un curso de acción" (Lewiński, 2018, p. 219). Gómez (2017) entiende la argumentación práctica como aquella que se da en contextos sociales y que se orienta a elegir una acción para resolver un problema práctico. La argumentación práctica responde, entre otras, a preguntas como '¿cómo justifica *a* la elección de la acción *b* ante una situación *c*?', donde *a* es el nombre o la descripción de un agente, b es la acción y *c* es la descripción de una situación problemática donde puede haber varias opciones posibles a realizar. Ambos autores coinciden en que debe de existir la elección de una acción y la argumentación explícita o implícita para esta elección, lo cual no sucede cuando sólo se afirma si algo es verdadero o falso.

El modelo de Toulmin, aunque no está pensado específicamente para la argumentación práctica, también se puede aplicar a este tipo de argumentación. De acuerdo con Toulmin (2003) los elementos de un argumento son: afirmación o conclusión, la cual se busca validar; datos, información en la cual la afirmación o conclusión se basa; garantía, proposiciones como reglas, principios o enunciados que permiten realizar inferencias; refutador, circunstancia en la cual la garantía no es válida; modalizador, indica el grado de fuerza de la garantía en la relación entre datos y afirmación, con palabras como necesariamente, provisionalmente, probablemente, generalmente, casi, quizás, seguramente, tal vez, posiblemente, etc.; y respaldo, justificaciones que respaldan las garantías, estas pueden ser resultados de la investigación científica o experiencias, entre otras.

Criterio de idoneidad epistémica

El criterio de idoneidad epistémica es uno de los criterios que compone la herramienta criterios de idoneidad didáctica (Font et al., 2010) del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2007). A partir del criterio de idoneidad epistémica es posible evaluar y valorar si las matemáticas que se enseñan son "buenas matemáticas". Un proceso de instrucción matemática tiene mayor grado de idoneidad epistémica en la medida en que: a) los significados institucionales implementados (o pretendidos) son representativos del significado de referencia (dicho significado será relativo al nivel educativo correspondiente); b) las tareas pretendidas presenten una cierta riqueza de procesos matemáticos (p. e. establecimiento de conexiones, modelización, resolución de problemas, formulación de hipótesis, argumentación, etc.); c) no existan errores matemáticos realizados o validados por el profesor en el proceso de instrucción (Font et al., 2024); d) se controlen al máximo las posibles ambigüedades que puedan llevar a los alumnos a confusiones o errores. La Tabla 1 presenta los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica (Breda et al., 2017).

Tabla 1. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica (adaptado de Breda et al., 2017, p. 1903)

Componentes	Indicadores
Errores	No se observan prácticas que se consideren no válidas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo al que se dirigen; uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, conexiones, etc.).

Representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar teniendo en cuenta el nivel educativo. Para uno o varios significados parciales, se ofrece una muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, se usan diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…) y conversiones entre los mismos.

Caracterización de ambigüedad

En el EOS (Godino et al., 2007) se considera el constructo conflicto semiótico, entendido como la disparidad entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos –persona o institución– en interacción comunicativa. Los conflictos semióticos pueden ser de tres tipos: los conflictos semióticos de tipo epistémico, en los que la disparidad se produce entre instituciones o entre sus representantes (por ejemplo, la institución matemática versus la institución escolar, o entre la institución escolar y el mundo de la vida); los conflictos semióticos de tipo cognitivo, en los que la disparidad se da en el mismo sujeto; los que no se consideran ni epistémicos ni cognitivos y que, sobre todo, se producen en la interacción entre el profesor y el alumno, llamados conflictos interaccionales. Los conflictos semióticos pueden ser potenciales o bien darse en acto.

Los conflictos epistémicos no suelen ser responsabilidad de los profesores de matemáticas (más bien tienen que convivir con ellos); y los conflictos cognitivos, los cuales suelen ser fomentados por ellos, se buscan como una estrategia didáctica para facilitar el aprendizaje de los alumnos. Ahora bien, hay muchos otros conflictos semióticos que se generan en la interacción entre el profesor y los alumnos y, en algunos casos, la responsabilidad del profesor es alta, ya que han sido promovidos por él. Dicho de otra manera, nos interesan, sobre todo, los que el profesor provoca, no los que no puede evitar. Un ejemplo paradigmático de conflicto semiótico interaccional provocado por el profesor (emisor) son las ambigüedades que se generan a partir de sus emisiones (mensajes destinados a transmitir, aportar datos, comunicar un hecho, informar de algo en concreto, etc.). Un ejemplo típico es el uso de metáforas, que pueden ser tomadas en sentido literal por algunos alumnos y no en el sentido metafórico, como espera el profesor.

En nuestro caso, la investigación se realiza sobre un grupo de formadores de futuros profesores que conocen los CID, es decir conocen qué hay que entender por ambigüedad y cómo intentar evitarla en un rediseño de la secuencia de tareas que la ha generado.

La ambigüedad es un fenómeno que ocurre en las lenguas naturales, y consiste en el hecho de que una sola construcción lingüística expresa más de un sentido o contenido semántico, esto es, cuando posee más de un significado (lo cual puede generar un conflicto semiótico). Técnicamente, una construcción lingüística o emisión es ambigua si puede ser interpretada de más de una manera (Löbner 2002). Esta misma caracterización de ambigüedad se puede aplicar en las clases de matemáticas. Si bien el lenguaje matemático tiene el propósito de caracterizar los hechos y las reglas de razonamiento con precisión, alejándose así de las ambivalencias propias del lenguaje natural, hay autores (Foster, 2011; Marmur y Zazkis, 2022) que consideran que hay "ambigüedad productiva", que es la que se aprovecha para fomentar el aprendizaje.

Las ambigüedades están presentes en las matemáticas por diferentes razones –entre otras, que hay términos técnicos que, utilizados en el lenguaje cotidiano, pueden tener diferentes interpretaciones como, por ejemplo, *diferencia* o *pendiente*–, o bien están presentes en las matemáticas escolares ya que, para su enseñanza, los contenidos matemáticos se modifican y adaptan para que sean asequibles para los alumnos, por ejemplo, ciertas definiciones se simplifican y resultan imprecisas. Desde diferentes marcos teóricos se ponen ejemplos de cómo determinados términos técnicos que también se usan en el lenguaje cotidiano pueden generar diferentes interpretaciones:

No es lo mismo hablar de "reducir fracciones" que de "simplificar fracciones"; el significado informal de "reducir" puede comunicar la impresión incorrecta de que la fracción que se obtiene es un número más pequeño, cuando se trata del mismo número (…) Ni es lo mismo hablar de "los ángulos de fuera" que de "los ángulos externos" de un polígono; el significado informal de "fuera" difícilmente sugiere el ángulo que se crea con un lado del polígono y la extensión del lado adyacente. (Planas et al., 2022, pp. 357-358).

Si bien algunas ambigüedades se pueden considerar causadas por aspectos intrínsecos a las matemáticas (polisemia de algunos símbolos, limitaciones espacio-temporales de los símbolos matemáticos ostensivos, etc.); y otras, en términos del EOS, se pueden relacionar con el paso del significado de referencia al significado implementado; o, en términos de la didáctica fundamental francesa, con el proceso de la transposición didáctica (por ejemplo, que una función como $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tenga una discontinuidad asintótica en $x = 0$, valor que no es del dominio; o que en la secundaria el signo radical aplicado a número tenga dos valores); no todas ellas se pueden explicar por estas dos causas, ya que en otros casos la causa son las emisiones no controladas del profesor.

Al valorar un proceso de instrucción con los CID, el componente ambigüedades del criterio de idoneidad epistémica se aplica a las ambigüedades que generan (o pueden generar) conflictos semióticos de las que los profesores son responsables, es decir, interesan las ambigüedades que tienen su origen en emisiones del profesor (o futuro profesor), en cuanto representante de la institución matemática. Estas emisiones las puede hacer él directamente o bien hallarse en los libros de texto (emisiones que él avala). Por tanto, en este trabajo nos interesan, en particular, las emisiones del profesor (realizadas por él, o bien avaladas por él) que: a) son (o podrán ser) interpretadas por los alumnos de manera diferente a la que él espera, b) la interpretación del alumno le parece razonable al profesor, incluso cuando sea errónea y c) el profesor asume una cierta responsabilidad en el hecho de que suceda *a* y *b* (por ejemplo, en un examen acepta como respuesta correcta la respuesta inesperada que da el alumno, o que, en un nuevo rediseño, la definición imprecisa que ha originado la ambigüedad será modificada). Asumir que se ha propiciado una ambigüedad implica la habilidad de ver una situación de más de una manera.

La tercera característica nos lleva a excluir la polisemia propia de las matemáticas de la ambigüedad que nos interesa estudiar en esta investigación. Según la Real Academia Española, la polisemia es la pluralidad de significados de una palabra o de cualquier signo lingüístico. Por ejemplo, el signo "-" es polisémico al cambiar su significado según se aplique a un número (en este caso, es el signo del número y forma parte del número) o bien, se aplique a una operación entre dos números (en este caso no forma parte del número). Dicho de otra manera, excluimos la polisemia cuya causa está en las mismas matemáticas y de la cual el profesor no sería responsable.

También excluimos las ambigüedades y polisemias que están fuertemente arraigadas en los libros de texto de la secundaria y de las cuales tampoco se puede considerar responsable al profesor. Quedan excluidas, a su vez, las ambigüedades cuyo origen son palabras que tienen un significado diferente en el lenguaje natural al que tienen en matemáticas. También queda excluido, de esta caracterización de ambigüedad, el hecho de que un objeto matemático pueda tener varios significados (por ejemplo, la mediatriz se puede definir como la perpendicular que corta al segmento por el punto medio o bien la recta formada por todos los puntos equidistantes de los extremos del segmento), ya que este aspecto que tiene que ver con la complejidad (entendida como pluri significación) del objeto matemático a enseñar; incluimos en esta exclusión las situaciones en las que la ambigüedad es el resultado de diferentes, pero no equivalentes, definiciones.

Lo primero que hay que destacar es que la noción de ambigüedad que aquí nos interesa –en sí misma– es ambigua, ya que en muchos casos no tendremos claro si el episodio que se analiza lo es o no, es decir, si cumple las tres condiciones comentadas. Lo segundo es que, dado que en última instancia hay un contexto que juega un papel central en la desambiguación, nos interesan aquellas

ambigüedades en las que el contexto no ha sido suficiente para evitarlas (al menos para algunos alumnos), generando así una disparidad de interpretaciones (conflicto semiótico). Por desambiguación entendemos cualquier desambiguación semántica, léxica o de otro tipo, siempre que permita que una emisión, que se podría entender de varias maneras, en aquel contexto se entienda solo de una manera (por ejemplo, el profesor habla de la raíz de un número y todos los presentes entienden que es la raíz cuadrada). Es importante señalar que las emisiones de un profesor que originen ambigüedades, si bien pueden ser imprecisas, no se consideran errores matemáticos.

METODOLOGÍA

Contexto y análisis de datos

En el ciclo de LS participaron ocho formadores de profesores de matemáticas de secundaria que ya conocían los CID y, en particular, conocían el criterio de idoneidad epistémica. El ciclo consta de 17 sesiones divididas en las siguientes etapas: análisis del currículo y definición de objetivos, planificación de la lección, implementación y observación de la clase, valoración y reflexión.

Para este estudio se seleccionaron dos sesiones del LS (videograbadas), referentes a la etapa de valoración y reflexión, en la cual los participantes valoraron con los CID, de forma conjunta, la UD diseñada. Previamente a las sesiones de valoración conjunta, cada participante realizó su valoración individual con los criterios, en particular con el componente ambigüedades del criterio epistémico.

En las dos sesiones de valoración, se identificaron veinticinco argumentos prácticos; de estos, seis fueron respecto al criterio epistémico, de los cuales, dos versan sobre ambigüedades. Para considerar un argumento dentro del análisis, se debían poder identificar como mínimo los siguientes elementos: conclusión, datos y garantía.

El análisis siguió las siguientes fases: I) Revisar los vídeos de la valoración del diseño de la UD. II) Transcripción del diálogo. III) De la transcripción, dividir el diálogo por valoración con cada componente, determinar y ordenar las ideas en la valoración por componente. El diálogo no es siempre ordenado, algunas veces los temas se interrumpen, en particular en los argumentos. IV) Identificar las palabras que indican la existencia de argumentos, tales como "entonces", "por lo tanto", "por ejemplo", entre otras. V) Identificar discusiones de argumentación práctica en las valoraciones; donde un participante identifica una posible mejora, hay propuesta o propuestas de mejora, consenso de elección de acción para tratar la mejora. VI) Estructurar los argumentos prácticos de las discusiones, considerando el modelo de Toulmin. Para estructurar los argumentos prácticos utilizando el modelo de Toulmin (fase VI), en primer lugar, en la discusión (fase V), se identifica el dato, que es lo que se puede mejorar de la UD, y la conclusión, que es una acción que se propone para la mejora de la UD. Después de establecer el dato y la conclusión, en segundo lugar, se plantea una garantía (muchas veces implícita en el discurso), con sus modalizadores, que son palabras que dan fuerza a la garantía. En tercer lugar, se busca en el diálogo respaldos para esta garantía, que pueden provenir de los conocimientos o experiencias de los participantes. Por último, se buscan refutadores (casos de excepción donde la garantía conecta los datos con la conclusión).

RESULTADOS

Al considerar el componente ambigüedades, los participantes buscaron en el dossier para los alumnos ambigüedades potenciales, en este proceso discutieron algunos fragmentos y los descartaron ya que no cumplían las tres condiciones señaladas en la subsección sobre caracterización de ambigüedad, por ejemplo, se descartó como ambigüedad las preguntas abiertas.

Una participante comentó que sí había una ambigüedad potencial en el dossier al definir el sistema de coordenadas cartesianas, ya que se identificaba el eje de las abscisas con el eje horizontal y el eje de las ordenadas con el eje vertical. Esta observación generó una argumentación muy rica, ya que se

trata de un caso que cae en la frontera entre una ambigüedad habitual en casi todos los libros de secundaria sobre funciones y una ambigüedad generada en el dossier para el alumnado:

P1: Quizás sí que hemos cometido una ambigüedad porque en el texto [dossier para alumnado], … dice "el sistema de coordenadas cartesianas está formado por dos ejes perpendiculares entre sí formando un plano, el plano XY. El eje de abscisas es el eje horizontal (…)" que igual hace referencia al gráfico [está en el dossier], pero entonces yo creo que deberíamos haber puesto al menos otro en el que los ejes no sean horizontal y vertical. O sea, que no coincida para que puedan visualizar al menos un caso en que la perpendicularidad no sea de esta forma. […]

P2: Bueno pero la cuestión es si lo ponemos al principio o lo ponemos al final, porque a lo mejor al final podríamos poner algún problema con un sistema en que no estuvieran [en posición horizontal y vertical] pero al inicio está bien. Yo creo que el problema aquí es no decir la palabra "normalmente" o "habitualmente", es el problema que veo aquí en este texto. […]

P1: Yo pondría "normalmente", como en esta figura, pero yo sí que de alguna una manera, y más en el dossier que está por escrito [material para los estudiantes], diría que hay posibilidad de que no sea así, sólo por si algún día de mayores se lo miran [el alumnado].

P2: Yo no llego a esto. Yo digo que los profesores cuando explican los sistemas de coordenadas, en estas edades, restringen a sistemas de coordenadas perpendiculares y yo esto lo aceptaría como inevitable, lo que no me parece bien es que nosotros añadamos más a esto y digamos además que es un sistema con un eje horizontal y un eje vertical, ¿no sé si me explico?

P1: Sí, sí, perfectamente, sí.

P4: De hecho, no hace falta porque si en la figura cada eje tiene su nombre, no hace falta que digas que es el horizontal y el otro es el vertical porque están en la figura identificados con el nombre ¿no? eje de ordenadas y de abscisas.

P2: Sí, pero no veo problema que diga vertical y horizontal, puedes poner "normalmente" o "habitualmente", lo que noto a faltar porque también luego todos van a ser horizontales y todos van a ser verticales, simplemente es esto. Creo que hemos hecho una discusión interesante con estos matices. Entonces podíamos refinar un poco el texto, en el rediseño podemos refinar este texto, está formado por dos ejes perpendiculares [el sistema de ejes de coordenadas cartesiano] formando un plano. El eje de abscisas es normalmente el eje horizontal, o algo así. […]

P3: Sí, sí, y por ejemplo, en el documento anterior estaba escrito "el procedimiento para dibujar un sistema de ejes cartesiano", no se definía el sistema de ejes cartesiano se proponía un procedimiento para dibujar el sistema de ejes cartesianos y que había que tener varios pasos, primer paso es coger un punto, que sería el punto O del plano, sería el origen, después dibujar una recta que pase por O que sea el eje de las abscisas y después dibujar una recta perpendicular a la recta anterior que pase por el punto a, esa recta sería el eje de las ordenadas.

P2: Entonces, ¿qué sugieres? ¿cambiar lo que hay por esto que acabas de leer?

P3: Tenemos una definición que acabamos de decir que puede generar una cierta ambigüedad porque estamos utilizando horizontal y vertical, en este otro documento lo que tenemos no es una definición, es un procedimiento para dibujar un sistema de ejes cartesianos.

P4: A mí me parece mejor.

P2: Bueno entonces una conclusión sería cambiar el texto que hay por este texto [el del procedimiento para construir un sistema de coordenadas].

Después de este diálogo, los participantes no identificaron más ambigüedades y concluyeron que habían cuidado que no hubiera ambigüedades en la UD.

En este ejemplo, el argumento práctico sucede en la discusión para decidir ¿qué se debe hacer con la ambigüedad identificada? los participantes consensuaron cambiar el texto del dossier, decidiendo que para controlar la ambigüedad identificada era mejor no escribir la definición del sistema de ejes de

coordenadas cartesianas, pero sí escribir el procedimiento para dibujarlos. El simple hecho de argumentar que algo es una ambigüedad no lo caracteriza como un argumento práctico. El argumento práctico sucede después de identificar la ambigüedad, en particular, cuando se discute sobre qué hacer con la ambigüedad identificada.

Además del ejemplo aquí expuesto respecto al criterio epistémico, se identificaron argumentos prácticos sobre: modificar los nombres de los ejes coordenados en el dossier de los estudiantes; ampliar la representatividad de las representaciones de los puntos en el plano considerando las representaciones verbal, gráfica y simbólica; pensar en las diferentes representaciones necesarias para el desarrollo de las diferentes tareas; detallar la información para evitar ambigüedades en la comprensión de los enunciados de las tareas por parte de los alumnos; pensar en promover la participación más activa de los estudiantes; evitar ambigüedades generadas a partir de la explicación del sistema de coordenadas cartesianas; fomentar la explicación grupal de las actividades para aclarar dudas de los alumnos sobre determinados conceptos.

Argumento práctico

Del diálogo anterior se infiere el siguiente argumento práctico: *Datos*: a) hay una ambigüedad en la definición del sistema cartesiano al identificar el eje de las abscisas con el eje horizontal y el eje de las ordenadas con el eje vertical; b) creo que deberíamos haber puesto al menos otro ejemplo en el que los ejes no sean horizontal ni vertical; c) en la definición del sistema cartesiano, no se usa la palabra "normalmente" al identificar el eje de las abscisas con el eje horizontal y el eje de las ordenadas con el eje vertical. *Garantía*: debemos intentar controlar la ambigüedad. *Respaldo*: pero no veo problema en que diga vertical y horizontal, puedes poner "normalmente", es lo que noto a faltar, porque también luego todos van a ser horizontales y todos van a ser verticales, simplemente es esto. *Conclusión:* cambiar el texto donde se define el sistema cartesiano por el texto donde se da un procedimiento para dibujar el sistema cartesiano. Así se evita la ambigüedad.

CONCLUSIONES

La primera conclusión es que las ambigüedades son difíciles de evitar, incluso cuando la UD ha sido diseñada por formadores de profesores que conocen los CID. La segunda conclusión es que los tres tipos de ambigüedades (propias de las matemáticas, las que habitualmente podemos encontrar en la secundaria y las provocadas por el profesor) presentan situaciones que se hallan en la frontera, como es el caso de los sistemas de coordenadas. Lo que es habitual en la secundaria es que se presenten sistemas de dos ejes perpendiculares en los que el eje de abscisas es paralelo al borde inferior de la página y el eje de ordenadas es paralelo al borde lateral de la hoja, y también, aunque no siempre, en muchos libros de texto se identifica el eje de ordenadas con el eje vertical y el de abscisas con el horizontal. Precisamente, el hecho de que sea una ambigüedad frontera es lo que genera una argumentación práctica rica que, primero, permite proponer una acción para controlarla y, después, evitarla en un rediseño sustituyendo la definición por un procedimiento.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "FEDER Una manera de hacer Europa" y PRE2019-090177 (financiado por Ministerio de Ciencia e Innovación y Universidades/Fondo Social Europeo/Agencia Estatal de Investigación).

Referencias

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Castiblanco, W. F. R. (2021). *Modos de argumentación durante la formación docente inicial: construcción de conocimiento en la clase de Didáctica de la Física* [Tesis doctoral, Universidad Nacional de la Plata]. http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/124595

Font, V., Breda, A., Sala-Sebastià, G. y Pino-Fan, L. (2024). Future teachers' reflections on mathematical errors made in their teaching practice. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01574-y

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Foster, C. (2011). Productive ambiguity in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 3–7.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education 39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Gómez, J. (2017). ¿Qué es la argumentación práctica? *Revista Co-herencia*, *14*(27), 215–243. https://doi.org/10.17230/co-herencia.14.27.9

Hummes, V., Breda, A., Font, V. y Seckel, M. J. (2023). Improvement of Reflection on Teaching Practice in a Training Course That Integrates the Lesson Study and Criteria of Didactical Suitability. *Journal of Higher Education Theory & Practice*, *23*(14), 208–224. https://doi.org/10.33423/jhetp.v23i14.6395

Lewiński, M. (2018). Practical argumentation in the making: Discursive construction of reasons for action. En S. Oswald, T. Herman y J. Jacquin (Eds.) *Argumentation and Language – Linguistic, Cognitive and Discursive Explorations* (pp. 219–241). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73972-4_10

Lewis, C. C. y Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Heinemann.

Löbner, S. (2002). *Understanding semantics*. Routledge.

Marmur, O. y Zazkis, R. (2022). Productive ambiguity in unconventional representations: "what the fraction is going on?". *Journal of Mathematics Teacher Education*, *25*, 637–665. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09510-7

Planas, N., Alfonso, J. M., Arnal-Bailera., A., Beltrán-Pellicer, P. y Morell, M. (2022). Tensiones y prácticas inclusivas en la enseñanza de las matemáticas. En L. J. Blanco Nieto, N. Climent Rodríguez, Ma. T. González Astudillo, A. M. Verdejo, G. Sánchez-Matamoros García, C. de Castro Hernández y C. Jiménez Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 352–372). Universidad de Granada.

Sol, T., Breda, A., Sánchez, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G. (2023). Criterios de idoneidad didáctica en la argumentación práctica docente al seleccionar problemas para introducir el tema de función. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 515–522). SEIEM.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument* (2nd ed.). Cambridge University Press. (Original work published 1954).

USO DE LAS UNIDADES DE ÁREA EN PROBLEMAS FORMULADOS POR FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA

Use of area units in posed problems by prospective primary teachers

Sosa-Martín, D., García-Alonso, I. y Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta un estudio sobre el uso de las unidades de medida de área por parte de futuros docentes de educación primaria cuando formulan problemas sobre dicha magnitud. Se consideran 220 problemas, formulados por 75 futuros docentes, en los que se analiza la tipología de unidades (no convencionales o convencionales) y los errores en su uso y descripción, en función de la plausibilidad (es decir, resolubilidad) de los problemas. Los resultados indican que los problemas formulados son mayoritariamente resolubles con un alto porcentaje de ellos en los que no se indican las unidades de medida, lo que los convierte en problemas con información insuficiente. Los errores encontrados se corresponden con descripciones incompletas o incorrectas de las unidades no convencionales que muestran la necesidad de un abordaje de las mismas en las asignaturas de didáctica de la matemática.

Palabras clave*: unidades de medida de área, formulación de problemas, futuros docentes de primaria.*

Abstract

This study presents an analysis of the use of area measurement units by future primary school teachers when pose problems about this magnitude. A total of 220 problems posed by 75 future teachers were analysed. The study examined the type of units used (conventional or no conventional) and the errors made, in terms of the plausibility (solvability) of the problems. The results indicate that the majority of the problems posed were solvable, with a high percentage lacking any indication of measurement units, making them problems with insufficient data. The errors found corresponded to incomplete or incorrect descriptions of non-conventional units, highlighting the need to address these issues in mathematics education courses.

Keywords*: area measurement units, problem posing, future primary school teachers.*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la medida produce dificultades en estudiantes de diferentes edades que han sido señaladas en la investigación desde hace varias décadas (Baturo y Nason, 1996). Para muchos estudiantes la comprensión de la medición se queda rezagada respecto a otras ideas matemáticas debido a que su instrucción suele enfocarse en aprender procedimientos para medir de forma directa (Stephan y Clements, 2003) o en aplicar fórmulas, sin comprensión de las ideas que subyacen a las magnitudes (Simon y Blume 1994). En concreto, el área se ha mostrado como una de las magnitudes más complejas para los estudiantes (Baturo y Nason, 1996; Yuberta et al., 2011), a pesar de que se usa con frecuencia en la vida cotidiana y sirve de modelo para explicar otros conceptos matemáticos, como el significado de fracción o la multiplicación numérica o algebraica. Diferentes trabajos han analizado la comprensión del área por parte de futuros docentes mostrando ciertas debilidades, entre las que se señalan las relacionadas con las unidades de medida (Caviedes et al., 2019; Chamberlin, 2022: Livy et al., 2012).

Sosa-Martín, D., García-Alonso, I. y Bruno, A. (2024). Uso de las unidades de área en problemas formulados por futuros profesores de primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 505-512). SEIEM.

Para desarrollar los conceptos asociados a la medición de área en las aulas de primaria, los docentes deben buscar y crear problemas desde diferentes perspectivas y con diversos materiales. Por ello, el proceso de creación o formulación de problemas es una habilidad a desarrollar en los futuros docentes (Silver, 1994). Además, la investigación ha mostrado que formular problemas es un modo de aprender matemáticas y al mismo tiempo, un medio adecuado para evaluar la comprensión de los conceptos matemáticos adquiridos. Esto se ha señalado para alumnado de primaria y secundaria, así como para docentes en formación y en activo (Cai y Hwang, 2022; Ellerton, 2013).

Hay pocos estudios que aborden cómo formulan problemas de medida de área los futuros profesores. Una excepción es el estudio de Vargas et al. (2023) quienes analizan las tareas geométricas propuestas por futuros maestros a partir de unas ciertas imágenes que evocan diferentes contextos. Como resultado principal destaca el bajo nivel cognitivo de las tareas, centradas en su mayoría en la determinación de cuestiones aritméticas, como cálculo de áreas, perímetros, etc., sin implicar otros procesos clave de la actividad geométrica, como la visualización o la representación. En esta misma línea, la contribución que presentamos aborda el papel que otorgan los futuros docentes de educación primaria a las unidades de medida de área en los problemas que formulan. En concreto, el objeto del estudio es:

1. Conocer los tipos de unidades (convencionales y no convencionales) más empleados cuando formulan problemas de áreas, según la plausibilidad (o resolubilidad) del problema.

2. Analizar los principales errores en la expresión de las unidades de área en los enunciados de los problemas formulados.

MARCO TEÓRICO

La investigación sobre la enseñanza del concepto de área y su medición en la educación primaria lleva vigente varias décadas (e.g. Bofferding et al., 2023; Huang et al., 2013; Stephan y Clements, 2003). El aprendizaje inicial implica observar la particularidad de esta magnitud, reconocer las unidades adecuadas y seguir un procedimiento de medición directo (reiterando la unidad de medida sobre la superficie a medir) o indirecto (a través de las fórmulas). En ambos casos se pueden utilizar unidades de medida no convencionales (por ejemplo, número de figuras planas iguales dentro de la superficie) o convencionales (por ejemplo, del Sistema Internacional, SI). Es usual que en la enseñanza inicial se comience con la comparación y la ordenación de áreas de distintas figuras de forma directa y, posteriormente, se traten las mediciones indirectas a través de sus fórmulas. La investigación ha informado de diferentes errores por parte de los estudiantes en el aprendizaje del área, tales como no entender cómo se produce la unidad de área a partir de la unidad de longitud, no comprender situaciones de conservación del área o la estructura de rejilla en relación al área, o confundir el área y el perímetro incluidas sus fórmulas (Tan Sisman y Aksu, 2016). Si bien existe consenso sobre la importancia de la instrucción conceptual para una enseñanza eficaz del área, aún son necesarias investigaciones que examinen en profundidad su comprensión (Idrus et al., 2022). La enseñanza del área presenta a priori una dificultad de tipo didáctico, pues para medir un área no hay un instrumento conocido por los estudiantes, como puede ser la regla para el caso de la longitud o la balanza para la masa; además, en ocasiones se produce un abordaje rápido hacia la aplicación de fórmulas, antes de que los estudiantes hayan interiorizado el sentido de esta magnitud.

Para que los docentes puedan ofrecer una instrucción significativa en la medición de áreas a sus estudiantes, es fundamental que ellos mismos posean una comprensión sólida de este concepto. Sin embargo, este conocimiento por parte de muchos docentes de primaria se ha mostrado insuficiente (Livy et al., 2012). En este último estudio se muestra cómo docentes en activo manifiestan errores similares a los de estudiantes de primaria y tienen habilidades limitadas para encontrar ejemplos necesarios para enseñar este tópico. Las dificultades de los futuros docentes en la medición de áreas pueden organizarse en torno a una dependencia excesiva en enfoques basados en fórmulas y dificultades con las unidades de área. En este sentido, se ha constatado una clara tendencia a asociar

el área con el uso de fórmulas (Caviades et al., 2021) priorizando métodos numéricos y fórmulas frente a métodos geométricos e intuitivos que facilitarían la medición (Caviedes Barrera, 2019). En esta población también se han identificado muchas dificultades para estimar el área de superficies y para hacer mediciones sin la utilización de fórmulas (López-Serentill, 2022). Barrett et al. (2011) y Stephan y Clements (2003) señalan que el uso adecuado de las unidades de medida en el proceso de medición implica realizar determinadas acciones: identificar las unidades, abstraer, iterar, coordinar unidades anidadas (sin dejar espacios y sin solaparse) y usarlas para establecer la razón de la medición. Estas acciones están relacionadas entre sí, así la iteración de la unidad implica contar con una comprensión adecuada de la propia unidad establecida. En este sentido, distintos investigadores han indicado que a pesar de la importancia del concepto de unidad de medida, rara vez se ha analizado su uso más allá de las unidades de longitud (Barrett et al., 2011). Estos mismos autores señalan que, en ocasiones, el concepto de unidad no suele estar bien desarrollado en los estudiantes y utilizan las unidades como "etiquetas para nombrar una cantidad que, con frecuencia, lo hacen sin ser capaces de mostrar el significado de la unidad correspondiente" (p. 638). En el caso de los futuros docentes, encontramos que Chamberlin y Candelaria (2014) comprobaron que un número significativo de los futuros maestros de primaria participantes en su estudio tenía una comprensión limitada del área, de cómo se mide y de sus unidades métricas. En otros trabajos con futuros docentes se ha observado que presentan errores pues utilizan unidades lineales en lugar de unidades cuadradas para medir el área (Simon y Blume, 1994; Tierney et al., 1990). También Chamberlin (2022) detecta confusiones sobre las unidades de área y una falta de apreciación de las ventajas de usar cuadrados unitarios como unidades de área. En línea con estos trabajos, en este estudio se pone el foco en la acción de cómo los futuros docentes identifican las unidades de medida de área al formular problemas, observando cómo de precisos son en su expresión.

METODOLOGÍA

Participantes e instrumento

Se realizó un estudio con una muestra de 75 estudiantes, seleccionados mediante un muestreo aleatorio simple entre 199 estudiantes matriculados en la asignatura de Didáctica de la Medida y la Geometría, del tercer curso del grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna. Estos estudiantes no recibieron formación previa sobre formulación de problemas y resolvieron un cuestionario digital, elaborado al efecto, compuesto por tres actividades, en el que se les ofrecía la oportunidad de utilizar un Geoplano online (Geoboard) como soporte para elaborar los problemas. La primera actividad, objeto de análisis en este trabajo, se plantea con el siguiente enunciado:

Actividad 1. Formula tres problemas sobre áreas, de diferente dificultad, donde aparezca el número 36. Este número puede ser un dato o una solución. Recuerda que puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto, …).

Proceso de análisis de los datos

Los 75 participantes seleccionados formularon un total de 220 problemas, puesto que algunos solo presentaron uno o dos problemas. Para su análisis se ha seguido una metodología cualitativa (Cohen et al., 2018), en la que se han establecido categorías de respuestas atendiendo al análisis del contenido (Krippendorff, 2013). Cada problema se codificó con un proceso múltiple ciego con tres codificadores. Para ello, se siguieron las categorías de análisis descritas en la Tabla 1, observando la resolubilidad o plausibilidad de cada problema. Así, Grundmeier (2015) distingue entre problema: a) no plausible si contiene afirmaciones no válidas y no es resoluble aun cuando se añada más información; b) plausible con información insuficiente, si puede resolverse aunque el enunciado sobreentiende (o no hace explícita) parte de la información; c) plausible con información suficiente de una tarea o varias tareas matemáticas. También se han categorizado aquellos que no hacen referencia a las áreas, a pesar de ser un requisito de la tarea.

Tabla 1. Categorías de análisis de la plausibilidad de los problemas formulados

Categorías	Descripción
NP	No es plausible por contener errores matemáticos
PIn	Plausible con información insuficiente (explícita o no) para resolverlo
P	Plausible con información suficiente, de una o varias tareas matemáticas

Posteriormente, se profundizó en el estudio de las unidades de medida implicadas en los problemas formulados, observando si no se indican (NI), o se indican siguiendo el *Sistema Internacional* o *No Convencionales*. Cuando se indican las unidades, se ha analizado el tratamiento dado a la definición. Así, se ha podido observar que, o bien se ha indicado la definición *correcta* (Corr), o bien incorrecta, ya sea porque se *omite la definición* o explicación de la unidad (Omis), o se hace una *descripción incorrecta de la unidad* (Desc). Finalmente, se han categorizado como *otros* el resto de errores (Otro) en el uso de las unidades.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Los problemas que enunciaron los futuros profesores fueron muy semejantes en cuanto a su estructura, en el sentido de que eran problemas directos que pedían calcular el área de figuras simples (cuadrados, rectángulos, o figuras irregulares). El primer análisis de los problemas formulados atendió a las categorías de la Tabla 1. Es necesario señalar que no todos los problemas formulados van acompañados de una imagen o representación en el geoplano. Se analizan 215 problemas formulados por futuros maestros. De estos, plantearon 21 (9.5%) problemas que no son plausibles (NP), es decir, con errores matemáticos que impiden su resolución. Cuatro de estos problemas manifiestan errores relacionados con las unidades de medida utilizadas (Figura 1).

A continuación, en la Tabla 2 se presenta el análisis de las unidades de medida utilizadas en los 194 problemas plausibles. De ellos el 34.5% fueron plausibles con información insuficiente (PIn) y el 65.5% plausibles con información suficiente (P). Si los observamos desde las tipologías de unidades encontramos un 21.7% del SI y un 19.1% no convencionales que están descritas de forma correcta.

Tabla 2. Número (porcentaje) de problemas según plausibilidad y tipología de unidades

Cat.	NI	Sistema Internacional		No Convencional				Total
		Corr	Desc	Corr	Omis	Desc	Otro	
PIn	58 (29.9)	2 (1.0)	2 (1.0)	0	0	3 (1.5)	2 (1.0)	67 (34.5)
P	0 (0)	40 (20.7)	0	37 (19.1)	34 (17.5)	12 (6.2)	4 (2.1)	127 (65.5)
Total	58 (29.9)	42 (21.7)	2 (1.0)	37 (19.1)	34 (17.5)	15 (7.7)	6 (3.1)	194 (100)

Se explica, a continuación, el análisis realizado que ha dado lugar a los resultados anteriores. Los ejemplos mostrados se enumeran con el código asignado a cada estudiante y el número del problema.

A. No indican las unidades

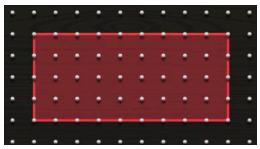
Los futuros maestros y maestras han formulado 58 problemas (29.9%) en los que no se especifica la unidad de medida a utilizar, los cuales se consideran en la categoría PIn, puesto que ello implicaría no poseer toda la información necesaria. En esta categoría se incluyen problemas como el 015-1 (Figura 1) que es un problema resoluble con información insuficiente pues, para indicar el área es necesario conocer cuál es la unidad de medida.

Figura 1. Ejemplos de problemas formulados en las categorías NP y NI. Fuente: elaboración propia

113-2: Sabemos que la cama de Luis tiene forma de rectángulo, si queremos calcular su área y podemos medirlo con el rectángulo siguiente: ¿de cuántos rectángulos está formada la cama?



015-1: Indica el área de la siguiente figura.

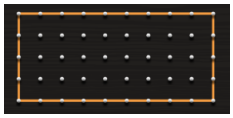


B. Unidades del Sistema Internacional

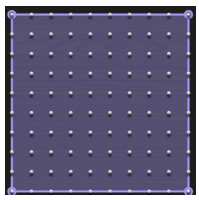
Se han formulado 44 problemas en los que se utilizan unidades del SI (22.7%). Es relevante que, en su mayoría, presentan toda la información necesaria para su resolución. Solo dos de ellos son PIn debido a que no especifican una de las dimensiones de la figura necesaria para su resolución, como ocurre en el ejemplo 0243-2 (Figura 2). Además, en este problema se expresa una longitud con unidades del SI, mientras que la unidad de superficie no se concreta. Por esta razón, es uno de los problemas que se han categorizado como *error en la descripción de la unidad* (Desc). Por su parte, el problema 052-2 (Figura 2) contiene toda la información necesaria para su resolución y, por tanto, es de categoría P, y además, utiliza las unidades del SI de forma correcta. Cabe destacar que la imagen que representa en el geoplano no es parte del enunciado del problema sino de la resolución, que puede considerarse correcta si se hace la correspondencia de 1 cm con la longitud entre dos clavos consecutivos en horizontal o en vertical, conversión que no ha indicado el estudiante.

Figura 2. Ejemplos de problemas formulados en la categoría SI. Fuente: elaboración propia

0243-2: Mi madre ha decidido comprarme una alfombra para mi habitación, sabiendo que mi cuarto tiene un metro de ancho en total, me ha dicho que la superficie total de dicha alfombra es de 36 unidades. ¿Qué medidas tendrá de largo y de ancho dicha alfombra?



052-2: Si tenemos un cuadrado cuyos lados miden entre los cuatro 36 cm. ¿Cuánto medirá cada lado? ¿Cuánto medirá su superficie? Represéntalo en el geoplano para dar la solución.



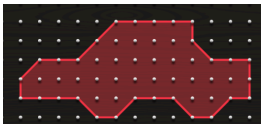
C. Unidades no convencionales

Un total de 92 problemas, que representan casi la mitad de todos los formulados (47.4%), utilizan unidades de medida no convencionales. En esta categoría se encuentran solo 5 problemas cuyo enunciado no contiene información suficiente para su resolución, como por ejemplo el problema 205-1 (Figura 3), que señala las unidades, pero cuando formula la pregunta pretende que se responda a "cuánto mide" la figura, sin indicar a qué hace referencia esa medida (área, perímetro, lado, …). Por esta razón, este problema se categoriza dentro de los problemas PIn. Un ejemplo de un problema formulado plausible usando unidades no convencionales es el 070-2 (Figura 3).

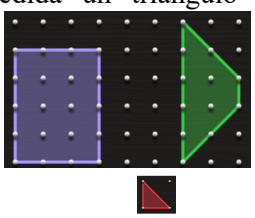
Un análisis en detalle de los problemas formulados que utilizan unidades no convencionales ha dado lugar a observar las tipologías descritas. Así, en solo 37 problemas se indican correctamente las unidades de medida, mientras que en 55 problemas (28.4%), es decir, más de la mitad de los problemas que utilizan unidades no convencionales, se cometen errores al expresar las unidades no convencionales, bien por *omisión de la explicación de la unidad* no convencional (Omis), por *errores en la descripción de la unidad* (Desc) o por otros errores (Otro) (Tabla 2).

Figura 3. Ejemplos de problemas de la categoría unidad no convencional. Fuente: elaboración propia.

205-1. Considerando como unidad de medida el cuadrado formado por 4 clavos consecutivos, averigua cuánto mide la figura de la imagen.



070-2: Tomando como unidad de medida un triángulo compuesto por tres pivotes contiguos, ¿cuál de las siguientes figuras tiene una superficie mayor? ¿Cuál es la suma de las dos áreas? La unidad de medida que se emplea es la siguiente:



C.1. Omisión de la explicación de la unidad no convencional

En este caso, los problemas incluyen las unidades no convencionales, pero no se señala cómo se construye la unidad no convencional. Se trata de un error por falta de precisión matemática. En este caso los estudiantes cuando formulan los problemas de áreas introducen las unidades no convencionales sin concretarla, es decir, indican unidades (u) o unidades cuadradas (u^2) sin explicar a qué se refiere exactamente en el contexto del problema. Se incluyeron 34 problemas (17.5%) en esta categoría, siendo la más frecuente entre los errores detectados con unidades no convencionales. Debemos señalar que esta omisión no se consideró una falta de información para la resolución del problema pues, como se puede observar en los ejemplos (Figura 4), los problemas se pueden resolver sin necesidad de más información. Así, en los problemas 130-3 y 037-2 (Figura 4) se pide construir una figura para un área predeterminada, sin explicar la unidad de medida.

Figura 4. Ejemplos de problemas que omiten explicar la unidad no convencional. Fuente: elaboración propia

130-3: Utilizando geoplano construye un polígono irregular cuya área sea 36 unidades cuadradas.

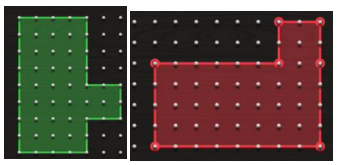
037-2: Ayudándote del geoplano, realiza figuras geométricas (en este caso, triángulos) en las que la suma de todas sus áreas de 36 u^2.

C.2. Error en la descripción de la unidad no convencional

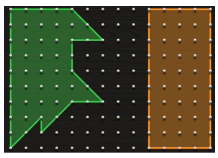
En esta categoría de error se sitúan 15 (7.7%) problemas que presentan una descripción de la unidad no convencional con errores. Como por ejemplo el problema 016-1 (Figura 5) en el que se señala que "el área estará representada por el número de cuadrados que contenga la figura", sin identificar cómo se construyen dichos cuadrados. O el problema 102-3 (Figura 5), en el cual se señala que "la unidad de medida de uno de los cuadrados formado por 4 clavos", de forma que no se trata de una descripción precisa, por lo que puede conducir a diferentes respuestas según cómo se interprete esta unidad (4 clavos consecutivos, 4 clavos en cada lado, 4 clavos interiores,…).

Figura 5. Ejemplos de problemas con error en la descripción de la unidad no convencional. Fuente: elaboración propia

016-1: Utiliza el Geoplano y dibuja 2 figuras que tengan área 36 u2, teniendo en cuenta que el área estará representada por el número de cuadrados que tenga la figura. Al tener el mismo área, ¿tienen el mismo perímetro?



102-3. A continuación tienes dos figuras de distinto área, teniendo en cuenta la unidad de medida de uno de los cuadrados formado por 4 clavos. ¿Qué figura tiene mayor superficie y cuál menos?

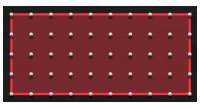


C.3. Otros errores

En esta categoría se identificaron solo 6 problemas. Un ejemplo de estos errores es cuando confunden unidades no convencionales de longitud y de superficie. Así, el problema 050-1 recoge en su enunciado "unidades cuadradas de longitud" (Figura 6).

Figura 6. Ejemplo de problema con otros errores (unidades no convencionales). Fuente: elaboración propia.

050-1: Carla quiere ponerle césped artificial a su patio, sabiendo que su área tiene 4 unidades cuadradas de ancho y 9 unidades cuadradas de largo. ¿Cuántas unidades cuadradas tiene el patio de Carla?



CONCLUSIONES

Analizar los problemas que formulan los futuros docentes es una estrategia útil para evaluar su conocimiento matemático, como ya se ha observado en trabajos previos (Cai y Hwang, 2020). El resultado más llamativo de este estudio es el alto número de problemas (casi un tercio de los

problemas analizados) que se enuncian sin señalar las unidades de medida. Esto los convierte en problemas plausibles con información incompleta, atendiendo a las categorías empleadas en la investigación (Grundmeier, 2015). Por un lado, los resultados han sido positivos, pues los futuros profesores han formulado mayoritariamente problemas resolubles, pero la ausencia de unidades los hacen incompletos. En este sentido, muchos de los futuros docentes de este estudio han planteado problemas de áreas inmediatos ("calcula el área de la figura representada en el geoplano") sin otorgar importancia a la primera acción indicada por Barret et al. (2011) relacionada con la identificación de la unidad. Los resultados coinciden con lo indicado por estos autores con alumnado de primaria, al indicar que muchas veces los estudiantes utilizan las unidades de medida como etiquetas, sin reparar en su significado e importancia. Los problemas que han planteado hacen que la reflexión sobre la unidad de medida no sea compleja. Por ejemplo, hay ausencia de problemas en los que plantee una reflexión sobre cómo influye el tamaño de la unidad en el resultado de la medición, aspecto bien interesante para el alumnado de primaria Casi la mitad de los problemas se proponen con unidades no convencionales (muy probablemente motivado por darles la oportunidad de utilizar un geoplano online), mientras que son menos los problemas con unidades del SI. El hecho de que se utilicen las unidades no convencionales ha revelado las principales causas de errores de las unidades, asociadas a descripciones incompletas y poco precisas. Por otra parte, las unidades del SI se utilizan con corrección, sin confundir las unidades de área con las de longitud. En general, se observa que los futuros maestros comprenden la iteración de la unidad pero, cuando deben describirla o definirla suelen cometer errores, ya sea porque dan por entendidas determinadas características que posee la unidad o por falta de rigor en la definición. Este trabajo pone en evidencia la necesidad de incidir en el estudio de las unidades de medida en la formación académica de los futuros docentes que muy probablemente sea extensible a otras magnitudes.

Agradecimiento.

Trabajo financiado por el proyecto PID2022-139007NB-I00 y PID2020-113601GB-I00, MCIN/AEI.

Referencias

Baturo, A. y Nason, R. (1996). Student Teachers' Subject Matter Knowledge within the Domain of Area Measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 235–268.

Barret, K.E., Cullen, C. Sarama, J., Clements, D.H.; Klanderman, D., Miller, A. y Rumsey, C. (2011). Children's unit concepts in measurement: a teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM Mathematics Education, 43,* 637–650. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0368-8

Bofferding, L., Haiduc, A.M., Aquaze, M., Chen, L. y Kocabas, S. (2023). Using Incorrect Worked Examples to Investigate the Consistency of First and Third Graders' Measurement. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21,* 1913–1934. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10334-x

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 1–8.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Una aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213–220). SEIEM.

Caviedes, S., Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis, 15*(1), 69–87.

Chamberlin, M. (2022). Lesson Experiment Cycles: Examining Factors that Affect Prospective Teachers' Learning of Area Measurement. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(1), em0665. https://doi.org/10.29333/iejme/11469

Chamberlin, M. T., y Candelaria, M. S. (2014). Learning from teaching teachers: a lesson experiment in area and volume with prospective teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 9*(2), 113–134.

Cohen, L, Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8ª edición). Routledge.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 87–101.

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 411–431). Springer.

Huang, H.M. y K.G. Witz (2013). Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems. *Journal of Curriculum and Teaching, 2*(1), 10–26.

Idrus, H., Rahim, S. y Zulnaidi, H (2022). Conceptual knowledge in area measurement for primary school students: A systematic review. *STEM Education, 2* (1), 47–58 https://doi.org/10.3934/steme.2022003

Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Paidos.

Livy, S., Muir, T. y Maher, N. (2012). How Do They Measure Up? Primary Pre-service Teachers' Mathematical Knowledge of Area and Perimeter. *Mathematics Teacher Education and Development*, *14*(2), 91–112.

López-Serentill, P. (2022). Categorización de los errores de los estudiantes para maestro de primaria en tareas de medida de magnitudes. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 363–371). SEIEM.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 472–494.

Stephan, M. y Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements y G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 3–16). National Council of Teachers of Mathematics.

Tan Sisman, G. y Aksu, M. (2016). A Study on Sixth Grade Students' Misconceptions and Errors in Spatial Measurement: Length, Area, and Volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14* (7), 1293–1319.

Tierney, C., Boyd, C. y Davis, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. En G. Booker, P. Cobb y T. N. de Mendicutti (Eds), *Proceedings of the 14th PME Conference,* Vol. 2 (pp. 307–314). PME.

Vargas, J. P., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2023). Diseño de tareas geométricas en la formación de futuros profesores de primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 531–538). SEIEM.

Yuberta, K.R., Zulkardi, Hartono, Y. y van Galen, F. (2011). Developing student's notion of measurement unit for area. *Journal on Mathematics Education, 2*(2), 173–184. https://doi.org/10.22342/jme.2.2.775.173-184

PRÁCTICAS Y SUSTENTOS TEÓRICOS EXPRESADOS POR DOS FORMADORES DE PROFESORES EN DOS CONTEXTOS ACADÉMICOS DISTINTOS. ELEMENTOS COMUNES

Practices and theoretical underpinnings expressed by two teacher educators in two different academic contexts. Common elements

Sosa, L.[a], Contreras, L.C.[b] y Sánchez-Acevedo, N.[c]

[a]Universidad Autónoma de Zacatecas (México), [b]Universidad de Huelva (España), [c]Universitat de València / Universidad Central de Chile (España / Chile)

Resumen

En este documento presentamos aspectos expresados por dos formadores de profesores de matemáticas en cuanto a fundamentos teóricos, metodologías, experiencias pragmáticas y elementos de su aprendizaje, sobre cómo han implementado su práctica de formadores de profesores de matemáticas. Ambos usan (aunque de diferente forma) como referente teórico el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Es un estudio exploratorio, en un contexto español y en un contexto mexicano. Los principales resultados apuntan los puntos fuertes que son comunes en ellos y que ambos consideran que están funcionando para formar a profesores de matemáticas.

Palabras clave: *prácticas, sustentos teóricos, contextos, formadores de profesores, matemáticas*

Abstract

In this document we present aspects expressed by two mathematics teacher educators in terms of theoretical foundations, methodologies, pragmatic experiences and elements of their learning, about how they have implemented their practice as mathematics teacher educators. Both use (although in different ways) the Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) model as a theoretical reference. It is an exploratory study, in a Spanish context and in a Mexican context. The main results point out the strengths that are common in them and that both consider are working to train mathematics teachers.

Keywords: *practices, theoretical foundations, contexts, mathematics teacher educators*

INTRODUCCIÓN

En los sistemas educativos los formadores de profesores constituyen un grupo de profesionales con responsabilidades y compromisos particulares, por ello para el desarrollo de programas de formación y para la investigación educativa, el conocimiento de esa experiencia y esas responsabilidades y compromisos representa un tema importante (Kelchtermans et al., 2017). La formación de los formadores de profesores es muy variada y su regulación inexistente; a la vez, la organización y estructura real de la formación de profesores difiere en los distintos países (Darling-Hammond y Lieberman, 2012), de hecho, de acuerdo a Kelchtermans et al. (2017), la formación de profesores abarca una amplia variedad de prácticas y un grupo mixto y diverso de profesionales. Más aún, la Comisión Europea (2012) pone de relieve la consideración de que los profesores son el factor más importante en la escuela, por su influencia en el aprendizaje de los alumnos y por lo tanto las competencias de quienes forman a esos profesores tiene que ser del más alto nivel. Sin embargo, la complejidad que existe para homogeneizar a nivel mundial el contenido del conocimiento que debe tener el formador de profesores de matemáticas ante la diversidad de perfiles y contextos es evidente (Chapman, 2021).

Sosa, L., Contreras, L. C. y Sánchez-Acevedo, N. (2024). Prácticas y sustentos teóricos expresados por dos formadores de profesores en dos contextos académicos distintos. Elementos comunes. En InicialEditor1. ApellidoEditor1, InicialEditor2. ApellidoEditor2, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 513-520). SEIEM.

En este documento pretendemos dar cuenta, a manera exploratoria, de cuatro aspectos inspirados a partir del *"call for papers"* para el número especial *"Science and Mathematics Teacher Educators and their Professional Growth"* por parte del *"International Journal of Science and Mathematics Education"* en 2019: Fundamentos teóricos, Metodologías, Experiencias pragmáticas y Elementos de aprendizaje. En este caso, nuestro objetivo es explorar esos cuatro aspectos e identificar los puntos fuertes comunes de dos formadores de profesores de matemáticas en dos contextos diferentes, atendiendo a la pregunta: ¿cuáles son los puntos fuertes comunes que los dos formadores de profesores de matemáticas consideran que funcionan en su práctica aunque estén en dos contextos distintos?

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A partir de la propuesta de Shulman (1986), en cuanto a los conocimientos mínimos básicos que ha de tener un profesor para enseñar un contenido, han surgido diversos modelos enfocados en la enseñanza de las matemáticas, uno de ellos es el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés de Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) propuesto por Carrillo et al. (2018), con la particularidad de considerar a lo especializado como un estilo de conocimiento más que un tipo de conocimiento (Scheiner et al., 2019). En MTSK hay tres dominios, el Conocimiento Matemático, el Conocimiento Didáctico del Contenido y las Creencias del profesor sobre las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dentro del Conocimiento Matemático existen tres subdominios: Conocimiento de los Temas, Conocimiento de la Estructura Matemática y Conocimiento de la Práctica Matemática. En el Conocimiento Didáctico del Contenido los subdominios son: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas.

El dominio del Conocimiento Matemático considera la disciplina de manera muy diferente a como es tratada por otros profesionales. Desde MTSK, en línea con Ma (1999), se considera relevante la profundidad con que se comprende la matemática elemental por encima de su ampliación, y esa profundidad se extiende a dos aspectos que no están demasiado presentes en la enseñanza elemental de las matemáticas, las conexiones entre conceptos y procedimientos y la sintaxis o principios de construcción, a saber, qué es una definición, cómo se define, que elementos tiene una demostración o cómo se demuestra. El dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido abarca todos los aspectos de la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje, pero es la matemática el elemento vertebrador, inspirado en la extensa producción de investigación en educación matemática de las últimas décadas. Así, preocupan las potencialidades y limitaciones de los diferentes recursos en los procesos de construcción de los conceptos matemáticos para los que han sido desarrollados, o las dificultades que muestran los estudiantes en el aprendizaje de los diferentes conceptos y procedimientos.

Entre los fundamentos de MTSK, la reflexión del profesor sobre su propia práctica se considera esencial. Para una enseñanza efectiva es importante que el profesor reflexione sobre su práctica (Sowder, 2007). Desde hace años se hacía notar la relevancia de la reflexión del profesor, por ejemplo en Dewey (1910/1977). También Schön (1983, 1987) por su parte aporta a la jerga acerca de la reflexión del profesor en la práctica y para la práctica. En sintonía con Castellanos y Moreno (2022), en el desarrollo profesional del profesor, la reflexión es un elemento fundamental y un medio para comprender progresivamente la práctica docente. Así pues, en la línea de Darling-Hammond (1998), los profesores deben analizar y reflexionar sobre su práctica, pero no quedarse ahí sino también evaluar los efectos de su enseñanza y por ende refinar y mejorar su instrucción.

El formador de profesores no puede ni debe ser ajeno a estos aspectos, la comprensión profunda de la matemática elemental que han de tener los profesores y de aquellos referentes a la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje, así como su capacidad de reflexionar sobre su práctica para

una mejor comprensión de los fenómenos que en ella se desarrollan. Por ello, los elementos que vertebran nuestro análisis comparativo se apoyan en ellos.

METODOLOGÍA

Es una investigación cualitativa, de corte exploratoria, que podría considerarse como una primera fase de un estudio de caso instrumental (Stake, 2007). Se centra en dos formadores de profesores, que llamaremos por ética con el seudónimo de Camilo y Lucía respectivamente. Camilo cuenta con 41 años de experiencia como formador de futuros profesores de nivel primaria en España, cuenta con licenciatura en matemáticas y el doctorado en Psicopedagogía. Lucía cuenta con 23 años de experiencia formando a futuros profesores y profesores en servicio principalmente de bachillerato y superior (aunque también ha formado a profesores en servicio de nivel primaria y secundaria) en México. Ella es licenciada en matemáticas y tiene tres maestrías, la primera en Matemática Aplicada, la segunda en Matemática Educativa y la tercera en Didáctica de las Ciencias y Filosofía (con enfoque en Matemáticas) así como con un Doctorado en Didáctica de las Matemáticas.

El contexto donde se desenvuelve Camilo es una universidad de España (con reconocimiento de la agencia para la Calidad Científica y Universitaria de Andalucía - DEVA), ahí se forma a futuros profesores de nivel primaria y él imparte cursos de Grado y Máster. En el Grado, imparte diversas asignaturas semestrales, relacionadas con la resolución de problemas o la enseñanza y aprendizaje de los diversos contenidos curriculares (números y operaciones, estadística y probabilidad o geometría y medida). En el Máster él desarrolla cursos semestrales vinculados al conocimiento y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Mientras que el contexto donde se desenvuelve Lucía es una universidad de México, ella imparte el curso de Desarrollo Profesional (de un año) en una maestría profesionalizante en Matemática Educativa (reconocida en el padrón de excelencia del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología -Conacyt). En ese curso están profesores en servicio de nivel primaria, secundaria, bachillerato o superior, así como futuros profesores de nivel bachillerato o superior. Es decir, Lucía ha de formar en el mismo curso tanto a profesores en ejercicio como a futuros profesores y de distinto nivel educativo.

La principal fuente de recogida de información, para esta fase, consiste de una entrevista semiestructurada (Arias, 2012) a cada uno de los formadores de profesores se les realizaron las preguntas: ¿Qué marcos teóricos están guiando su práctica?, ¿qué metodologías está usando en su práctica?, ¿qué experiencias pragmáticas parecen estar resultando exitosas? y ¿cómo están aprendiendo como formadores de profesores a crecer en su propia práctica? Las respuestas fueron grabadas en audio y posteriormente, se hizo la transcripción para analizaras. Luego se identificaron los aspectos más relevantes en cada respuesta y se optó por sintetizarlos para presentarlos en el apartado de resultados.

RESULTADOS

Fundamentos teóricos que estén guiando su práctica.

Camilo es miembro de la RED Iberoamericana sobre MTSK y ha contribuido a la elaboración del modelo. Consecuentemente, su perspectiva teórica acerca de lo que debe conformar el conocimiento de un profesor que enseña matemáticas reside en el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018). Uno de los elementos que caracterizan MTSK es la necesidad de comprender el contenido que se ha de enseñar (Shulman, 1986), desarrollado para el ámbito de la educación matemática como “comprensión profunda” por Ma (1999), entendiendo que muchos conocimientos matemáticos necesitan reconstruirse y “desempaquetarse” (Ball et al., 2008) para poder hacerlos comprensibles a otros.

El enfoque de Lucía, que también es miembro de la Red Iberoamericana sobre MTSK y contribuyó a la elaboración del modelo MTSK, está más centrado en la idea de desarrollo profesional del profesor de Matemáticas en términos de Sowder (2007) otorgando mucho peso a la reflexión del profesor con la orientación de los trabajos de Dewey (1910/1977); Schön (1983, 1987) y Darling-Hammond (1998)

y a los conocimientos propuestos en el MTSK. En particular, considerando que comprender "a la primera" un modelo de conocimientos no es fácil, ella a manera de ayuda para sus estudiantes, toma como base documentos mediante los cuales ellos puedan ir comprendiendo poco a poco fundamentos del modelo; principalmente el capítulo de libro del MTSK (Flores et al., 2014); el artículo sobre KFLM de Sosa et al. (2015); sobre KMT el de Sosa et al. (2016) y sobre KPM el de Zakaryan y Sosa (2021). Además, considera documentos en cuanto a cómo hacer planificaciones de clase (eg. Flores, 2020; Pochulu et al., 2019).

Metodologías que están usando en su práctica.

Camilo manifiesta una nítida defensa en la formación a través del análisis sistemático de la práctica usando el método de caso (Contreras, 1999). El desarrollo usual de una clase comienza con un fragmento de una sesión de aula de primaria en el que un maestro está abordando determinado contenido matemático. Tras la visualización del mismo, los futuros profesores son invitados a reflexionar acerca de algunos aspectos de los procesos de enseñanza y aprendizaje involucrados, a partir de un guion de observación inspirado en los subdominios del modelo MTSK. Al hilo de la reflexión que muestran los futuros profesores, Camilo aporta los fundamentos que provienen de la investigación en educación matemática que ayudan a la reconstrucción del conocimiento matemático implicado y sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

Lucía primero se interesa en causar sensibilidad en sus alumnos, en sentido riguroso en cuanto a qué es y porqué es una prioridad el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, cómo lograr un desarrollo profesional efectivo, cómo pueden adquirir conocimiento para, en y de su práctica como profesores de matemáticas y sobre todo el papel de la reflexión para poder crecer profesionalmente. Luego, antes de estudiar el modelo del MTSK, a manera de irlos haciendo sentir la necesidad e importancia de los conocimientos que ocupa el profesor para enseñar matemáticas, presenta actividades que los sensibilicen con situaciones problema en cuanto al conocimiento matemático (MK) y al conocimiento didáctico del contenido (PCK), para ir logrando de manera paulatina la reflexión como profesores de matemáticas.

Posteriormente, se estudia el modelo MTSK a partir del capítulo de libro de Flores et al., (2014) y a manera de ejemplo del KFLM el artículo de Sosa et al. (2015), del KMT el de Sosa et al. (2016) y del KPM el de Zakaryan y Sosa (2021). Esta parte también se complementa con algunas conferencias por parte de especialistas ad hoc. Después, en parejas eligen un tópico matemático para desarrollar tres etapas: el diseño del concentrado de conocimientos y la planificación de enseñanza; videograbación de la puesta en acción de esa planificación; y el análisis y la mejora del concentrado de conocimientos y de la planificación. En cada una de esas etapas se discute sobre la marcha en pleno en las sesiones del curso (comunidades de aprendizaje). Al final de cada etapa se les pide una reflexión individual sobre lo aprendido en cada etapa. Finalmente a manera de cierre, realizan una tabla donde han de escribir a manera de compromiso con ellos mismos, cómo mejorarán su propio desarrollo profesional, sobre todo en cuanto a sus conocimientos para, en y de la práctica, qué acciones han de mejorar y cómo lograrán esos cambios. Esto también se expone y se discute en pleno en las sesiones del curso (comunidad de aprendizaje) y va acompañado de una reflexión individual final sobre lo aprendido durante todo el curso de un año.

Experiencias pragmáticas que parecen estar resultando exitosas.

Camilo siente que abordar los elementos matemáticos y sus procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de un contexto real implica a los futuros profesores en su proceso formativo. Entiende que, de esta manera, pasan a ver el contenido como objeto de enseñanza y aprendizaje de otros, más que suyo propio, asumiendo de forma progresiva su rol de maestro y no de aprendiz. Aunque la reconstrucción del contenido matemático no es el fin esencial, al ser la matemática el "excipiente" sobre el que se articulan las reflexiones sobre su enseñanza y aprendizaje, esa reconstrucción es siempre un elemento natural añadido a la formación de los futuros maestros. Camilo elige fragmentos de vídeo que

proceden de las propias investigaciones del equipo con el que trabaja y que han sido analizadas utilizando MTSK para poner de relieve su potencialidad como elemento formativo.

Lucía expresa que dentro de las experiencias que más le funcionan es sensibilizarlos, ponerlos en el lugar de aprendiz de la enseñanza de las matemáticas, pero también en el lugar de aprendiz como sus alumnos o sea que traten de "ponerse" en el lugar de sus alumnos. Que aprendan a reflexionar en y sobre sus conocimientos y acciones en su práctica como profesores de matemáticas. Que se discuta en la comunidad de aprendizaje (en las sesiones del curso) los conocimientos mínimos necesarios a poner en juego en la planificación de enseñanza de un tópico matemático concreto, las videograbaciones de la puesta en acción de la planificación en el aula, el análisis y la mejora tanto del concentrado como de la planificación inicial, que se discuta en esa comunidad aprovechando la riqueza que aportan tanto sus compañeros que imparten o impartirán matemáticas en igual o distinto nivel educativo como la instructora del curso. Que constantemente reflexionen sobre cómo mejorar su propia práctica y qué acciones implementarían, cambiarían de acuerdo a su realidad, a su contexto, a corto, mediano y largo plazo. Que se nutra la práctica de la teoría y la teoría de la práctica.

Cómo están aprendiendo como formadores de profesores a crecer en su propia práctica.

Camilo sintió atracción por la educación matemática apenas tuvo oportunidad para comprobar que su formación como matemático no era suficiente para ayudar a otros a comprender el contenido. Inició sus estudios de doctorado en psicopedagogía, con énfasis en Educación Matemática, y trabajó en comunidades de práctica e investigación. Su desarrollo profesional ha estado ligado, desde entonces, a los grupos de formadores con los que trabaja, en los que intervienen también profesores de Primaria y Secundaria en ejercicio. Las primeras experiencias de Camilo como formador le mostraron la escasa eficacia de la formación de corte teórico. Hoy apuesta por una formación dual donde el análisis sistemático de la práctica es el eje vertebrador. Ese mismo análisis sistemático de la práctica de profesores en ejercicio que utiliza como metodología de formación, se ha convertido en una herramienta de autoformación. Los miembros del equipo con el que trabaja graban y analizan sus prácticas como formadores, validando con el modelo MTSK los elementos del conocimiento que ponen en juego. Este análisis permite el diseño, implementación y reformulación de tareas formativas que emanan de situaciones reales. Su participación activa en foros nacionales e internacionales de investigación en educación matemática compone su segundo elemento formativo.

Lucía menciona que aprende a partir de su gusto por ser profesora, en este caso de profesores, del gusto a las matemáticas (por eso hizo la licenciatura en matemáticas pero al ver que no era suficiente saber matemáticas para formar profesores de matemáticas hizo la maestría y el doctorado en Didáctica de las Matemáticas), de ser aprendiz para enseñar matemáticas, para enseñar a enseñar matemáticas. De ver a sus estudiantes cuando aprenden la diferencia entre matemáticas puras "sin ton ni son" y las matemáticas puras para la enseñanza de las matemáticas, de que vivan por ellos mismos al menos la esencia de cada subdominio del MTSK. Además, aprende de manera individual estudiando lecturas de la literatura que den cuenta de actividades que usen para formar a profesores de matemáticas, en particular de aquellas que puedan representar una situación problema para el futuro profesor o profesor en servicio, de tal manera que le ayuden a sensibilizarlos, a provocar la reflexión en ellos, en términos de los conocimientos que se requieren para ser un profesor de matemáticas profesional, que los haga sentirse aprendices para enseñar matemáticas, aprendices tanto del contenido matemático (MK) como del conocimiento didáctico del contenido (PCK). También con lecturas de la literatura respecto a cómo crece profesionalmente el profesor de matemáticas, el papel que juega la reflexión del profesor o futuro profesor de matemáticas en y sobre su práctica. Así como con otras lecturas referentes a cómo puede adquirir el futuro profesor o profesor en servicio de matemáticas conocimiento para su práctica, en su práctica y de su práctica sobre todo en términos de Sowder (2007).

Lucía afirma que también aprende de sus alumnos pero también de sus investigaciones para sus propios proyectos de investigación y para otros en los que participa como colaboradora. Además de la preparación (leer, estudiar, investigar, percibir) del contenido de sus conferencias para niños de primaria, jóvenes de secundaria, de bachillerato o de superior. O de las conferencias dirigidas a estudiantes de otros posgrados, a otros formadores o investigadores de diferentes universidades incluso de diferentes países. En ese tenor también aprende de la elaboración de sus artículos y capítulos de libro. Más aún, ella se nutre del grupo internacional SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas) y de su participación en la Red Iberoamericana del MTSK, especialmente de la Temática de Formación de Profesores y de la del Perfil del Formador de Profesores. Sin olvidar que también aprende de sus tesistas de maestría y doctorado. Así pues, Lucía aprende de manera individual pero también desde diferentes comunidades: comunidades de aprendizaje, comunidades de práctica y comunidades de investigación.

Elementos fuertes comunes entre Camilo y Lucía

En ambos casos, el modelo MTSK se sitúa como las lentes que permiten enfocar su trabajo (analizar diferentes conocimientos del profesor). Camilo y Lucía, al ser miembros de la Red Iberoamericana del MTSK y participar en la elaboración del MTSK, se sienten familiarizados con éste y de manera natural lo usan en sus cursos para formar (futuros) profesores de matemáticas.

Comparten la importancia que otorgan a los problemas (matemáticos y de educación matemática) en sus cursos y el análisis de videograbaciones tomadas de la realidad sobre enseñanza de las matemáticas. Ambos le dan valor a los problemas reales, de la práctica real, aprovechándolos para generar discusión entre sus alumnos en los cursos de formación de profesores y para provocar la reflexión de éstos, no sólo sobre el conocimiento matemático, sino también sobre el conocimiento didáctico del contenido y sus implicaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los dos usan las videograbaciones (fragmentos) como instrumento para aprender de los conocimientos que se ponen (o no) en acción. Para ambos resulta esencial que, en sus cursos de formación, sus alumnos comprendan la matemática con mayor profundidad de forma que les sirva en su contexto real para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Metodológicamente, resalta la importancia de la discusión en aula sobre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido y papel de la reflexión en la reconstrucción de los conocimientos tanto matemáticos como didácticos del contenido matemático, enriquecido con el aporte de fundamentos que provienen de la investigación. En ese sentido, destacan la importancia de ir de la teoría a la práctica y de la práctica a la teoría.

Ambos consideran la insuficiencia de la formación en contenidos matemáticos para formar (futuros) profesores de matemáticas y abogan por la necesidad de hacer un doctorado en Didáctica de las Matemáticas. y de la importancia de trabajar en comunidades de práctica y en comunidades de investigación, trabajando y colaborando con profesores de diferentes niveles educativos.

Para su propia formación, ambos consideran que el trabajo en equipo entre formadores de profesores e investigadores es primordial, que se aprende a ser formador desde el aporte de los alumnos y que es importante observar, estudiar, investigar y percibir. Destacan la relevancia de ir poniendo en práctica lo que se diseña, implementa y se reformula, a fin de experimentar y aprender como formadores de (futuros) profesores de matemáticas, de experimentar y crecer profesionalmente como formadores. El análisis de la práctica que usan en sus cursos con sus estudiantes se convierte en autoformación como formadores.

CONCLUSIONES

Aunque la formación y los contextos de los dos formadores son distintos, se destacaron elementos comunes. En este documento presentamos aspectos de manera exploratoria y, debido a la complejidad que representa homogeneizar a nivel mundial el contenido del conocimiento que debe tener el

formador de profesores de matemáticas ante la diversidad de perfiles y contextos, es conveniente que se sigan haciendo estudios que den cuenta de cómo el contexto guía la práctica del formador de profesores; de cómo la experimentación en el aula de lo que van aprendiendo los formadores va guiando el hacer, la evolución, el cambio del formador; de cómo al no haber un modelo homogéneo, mundial sobre el contenido de conocimientos del formador de profesores, los formadores se apoyan de comunidades de aprendizaje, de práctica, de investigación; de qué aporte les brindan esas comunidades y cómo van determinando en el formador de profesores la mejora de sus conocimientos, de su propio aprendizaje para enseñar a enseñar y de cómo crecer profesionalmente y mejorar su práctica de formador de profesores.

Agradecimientos

Esta investigación fue desarrollada con el apoyo de la beca de movilidad académica internacional del Consorcio de Universidades Mexicanas (CUMex), la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado (AUIP) y el proyecto PID2021-122180OB-100, del Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Los autores colaboran con la RED MTSK (https://redmtsk.net/) y quieren agradecer a los MTE participantes su generosidad y colaboración.

Referencias

Arias, F. (2012). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la metodología científica* (Sexta ed.). (pp: 73-74). Editorial Episteme.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher´s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castellanos, M. T. y Moreno, A. (2022). Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre las tareas de enseñanza. En Fernández-Plaza, J., Lupiáñez, J.L., Moreno, A. y Ramírez, R. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia*, (pp. 95-115). Octaedro.

Chapman, O. (2021). Mathematics Teacher Educator Knowledge for Teaching Teachers. M. Goos, K. Beswick (eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators,* 403-416. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_21

Contreras, L.C. (1999). El método de casos en la formación de maestros. Una aproximación desde la educación matemática. En J. Carrillo y N. Climent (Eds.), *Modelos de formación de maestros en matemáticas*, (pp. 149-162). Universidad de Huelva.

Darling-Hammond, L. y Lieberman, A. (Eds. 2012). *Teacher Education around the World*. Routledge.

Darling-Hammond, L. (1998). Teacher learning that supports student learning. *Educational Leadership*, 55, 6–11.

Dewey, J. (1910/1997). *How we think*. Heath.

European Commission (2012). *Supporting Teacher Educators for Better Learning Outcomes*. Brussels: European Commission. http://ec.europa.eu/education/policy/school/doc/teachercomp_en.pdf

Flores, A. A. (2020). La planeación didáctica desde el enfoque por competencias en educación básica. *Educando para educar*, *17*(32), 3-12.

Flores, E., Escudero, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, y M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, (pp. 57-72). Universidad de Huelva.

Kelchtermans, G., Smith, K. y Vanderlinde, R. (2017). Towards an 'international forum for teacher educator development': an agenda for research and action, *European Journal of Teacher Education*, http://dx.doi.org/10.1080/02619768.2017.1372743

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers, understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Erlbaum.

Pochulu, M., D'Andrea, L., & Ferreyro, M. (2019). Indicadores de referencia para valorar planificaciones de matemática orientadas al desarrollo de competencias en ingeniería. *Revista Electrónica de Divulgación de Metodologías emergentes en el desarrollo de las STEM*, *1*(1), 66-83.

Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J., Carrillo, J. y Pino-Fan L. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *Int J of Sci and Math Edu* 17, 153–172.

Schön, D. (1983). The reflective practioner: How professionals think in action. Basic Books.

Schön, D. (1987). Educating the reflective practioner: Toward a new design of teaching and learning in the professions. Jossey-Bass.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación matemática*, *28*(2), 151–174.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173–189. DOI 10.24844/EM2802.06

Sowder, J.T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 157–223.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudios de casos*. Ediciones Morata, S. L.

Zakaryan, D. y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, *33*(1), 71–97. https://doi.org/10.24844/em3301.03

VARIACIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PARA PROMOVER APRENDIZAJE. UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES EN FORMACIÓN INICIAL[13]

Probability problem variation to promote learning. An experience with teachers in initial training

Tizón-Escamilla, N.[a], Burgos, M.[a] y Chaverri, J.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Costa Rica

Resumen

Para favorecer el aprendizaje de las matemáticas, el profesorado debe ser capaz de analizar, interpretar y evaluar la actividad matemática de los estudiantes, tomando decisiones sobre la comprensión y dificultades que estos muestran al resolver tareas matemáticas. El objetivo de este trabajo es describir cómo un grupo de docentes de educación primaria en formación inicial varían un problema que involucra razonamiento proporcional y probabilístico para atender a las dificultades encontradas por estudiantes en su resolución durante un episodio ficticio de clase. Los resultados muestran carencias en el conocimiento especializado del razonamiento proporcional, así como de la competencia de análisis e intervención didáctica, que impiden a los docentes en formación inicial modificar el problema para responder a dicho requerimiento didáctico-matemático. Se concluye la necesidad de incorporar esta competencia en los programas de formación de docentes.

Palabras clave: *creación de problemas, formación del profesorado, probabilidad, razonamiento proporcional.*

Abstract

To favour the learning of mathematics, the teacher must be able to analyse, interpret and evaluate the mathematical activity of the students, making decisions about the understanding and difficulties they show when solving mathematical tasks. The aim of this study is to describe how a group of pre-service teachers modify a problem involving proportional and probabilistic reasoning to address the difficulties encountered by students in its resolution during a fictitious classroom episode. The results show deficiencies in the specialised knowledge of proportional reasoning and in the competence of didactic analysis and intervention, which prevent teachers in initial training from modifying the problem in order to respond to this didactic-mathematical requirement. It is concluded that there is a need to incorporate this competence in teacher training programmes.

Keywords: *problem creation, teacher training, probability, proportional reasoning*.

INTRODUCCIÓN

La relación entre el grado de conocimiento del profesorado de matemáticas y el logro de aprendizaje de sus estudiantes justifica el interés por determinar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que deben tener los docentes en formación inicial. Se acepta que el profesorado debe tener un conocimiento especializado del propio contenido, de las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje y de los factores de tipo psicológico, sociológico y pedagógico, entre otros, que condicionan dichos procesos (Godino et al., 2016). Los docentes deben ser competentes para reconocer el potencial y la dificultad de las tareas que proponen, interpretar la

13 Este trabajo se desarrolla en el marco del Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE, con apoyo del Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Tizón-Escamilla, N., Burgos, M. y Chaverri, J. (2024). Variación de problemas de probabilidad para promover aprendizaje. Una experiencia con docentes en formación inicial. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 521-528). SEIEM.

comprensión de los estudiantes sobre un contenido concreto al resolverlas, y tomar decisiones de acción para responder a sus errores. También deben identificar las oportunidades de situaciones que ocurren en la práctica para promover el razonamiento matemático de los estudiantes (Ivars et al., 2016).

Desde la investigación en educación matemática, se hace necesario diseñar e implementar experiencias formativas que promuevan el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (Godino et al., 2016), dado que un conocimiento del contenido, aunque necesario, no es suficiente para garantizar que el docente pueda reconocer y responder adecuadamente al pensamiento matemático de los estudiantes, adaptando la enseñanza a sus necesidades. De manera específica diversos investigadores han señalado la importancia de incorporar la creación de problemas en los programas de formación del profesorado. Se la considera una forma adecuada de introducir a los docentes en formación inicial en la enseñanza de las matemáticas (Leavy y Hourigan, 2020) que les permite profundizar en el contenido matemático y ser conscientes de sus posibles deficiencias (Tichá y Hošpesová, 2013), mejorando el análisis global de la actividad matemática (Malaspina et al., 2015).

En este trabajo describimos los resultados de una intervención formativa con docentes de educación primaria en formación inicial, centrada en la creación de problemas con una finalidad didáctico-matemática. Se persigue, por un lado, que los docentes en formación inicial identifiquen la ausencia de razonamiento proporcional en respuestas erróneas de los estudiantes al comparar probabilidades (Begolli et al., 2021) y decidan cómo actuar sobre el problema propuesto para ayudarles a comprender el error y avanzar en el aprendizaje. Planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo interpretan los docentes en formación inicial las respuestas de estudiantes a una tarea de comparación de probabilidades en un episodio de clase hipotético?
- ¿Qué tipo de problemas crean como variación del propuesto por el docente para facilitar la comprensión y la solución del problema del episodio por parte de los estudiantes?

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este trabajo nos basamos en el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor (Godino et al., 2016), la propuesta de creación de problemas de Malaspina et al. (2015) y la categorización de problemas creados de Grundmeier (2015).

Modelo de conocimiento y competencias del profesor de matemáticas

Desde el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) (Godino et al., 2016) se asume que el docente debe disponer de un *conocimiento matemático per se*, que le permita resolver las situaciones-problemas propias del nivel educativo en el que imparte sus clases, y articularlo con los niveles superiores. Pero, a medida que aparezca involucrado algún contenido matemático el docente debe disponer de un *conocimiento didáctico-matemático* de las distintas facetas que afectan el proceso educativo: *epistémica* (sobre el propio contenido, los significados y objetos matemáticos que serán objeto de enseñanza), *cognitiva* (cómo los estudiantes aprenden, razonan las matemáticas y de qué manera progresan en su aprendizaje), *afectiva* (conocimientos referente a las actitudes de los estudiantes y sus creencias sobre los objetos matemáticos y su estudio), *mediacional* (conocimiento de los recursos materiales, tecnológicos, temporales), *interaccional* (cómo deben organizarse las tareas y las interacciones en el aula para progresar en el aprendizaje y resolver los conflictos), *ecológica* (conocimiento de las conexiones del contenido matemático con otras disciplinas y cómo la instrucción matemática se ve afectada por factores curriculares, etc.).

Además de disponer de estos conocimientos, el modelo CCDM propone que el docente debe ser competente para describir, explicar y juzgar lo que ha sucedido en el proceso de estudio y hacer propuestas de mejora. Esta competencia para el análisis y la intervención didáctica contempla, entre otras: a) la identificación de las situaciones-problemas y las prácticas implicadas en su resolución, b) el reconocimiento de la configuración de objetos y procesos emergentes de las prácticas

matemáticas, c) modificarlas atendiendo a ciertas finalidades didácticas y los conocimientos y dificultades que encuentren o puedan encontrar los estudiantes (Godino et al., 2016).

Creación de problemas

De acuerdo con Malaspina et al. (2015), la creación de problemas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, que queda determinado por cuatro elementos fundamentales: la *información*, es decir, los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema; el *requerimiento,* esto es, lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, cuantitativo o cualitativo, gráficos o demostraciones; el *contexto*, que puede ser intra matemático o extra matemático en el que se sitúa la actividad matemática; el *entorno matemático* o marco matemático global en el que se ubican los conceptos, procedimientos o propiedades matemáticas que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema, en nuestro caso la proporcionalidad.

La creación de nuevos problemas puede darse a través de la variación de un problema dado o por elaboración (Malaspina et al., 2015). En la *variación de un problema* se construye un nuevo problema modificando uno o más de los cuatro elementos del problema inicial o base. La *elaboración de un problema* es un proceso en el que se construye un nuevo problema de forma libre, a partir de una situación (dada o configurada *a priori*, por ejemplo, un texto, una imagen, un gráfico), o bien, por un requerimiento específico, que puede tener énfasis matemático o didáctico. En la *elaboración de un problema a partir de una situación*, el contexto se origina en la situación, la información se obtiene por selección o modificación de la que se percibe en dicha situación y el requerimiento es una consecuencia de las relaciones entre los elementos de la información implícita en el enunciado. En la *elaboración a partir de un requerimiento específico,* matemático o didáctico, el contexto o la información debe establecerse para responder de manera adecuada a dicho requerimiento.

Grundmeier (2015) clasificó los productos de una tarea de creación de problemas atendiendo a su plausibilidad, suficiencia de información y complejidad. Un problema es implausible si contiene una suposición inválida y, por lo tanto, no es resoluble, aunque se incluyera más información. Si el problema es plausible será necesario determinar si es o no resoluble con la información dada.

MÉTODO

El estudio sigue un enfoque descriptivo-cualitativo, pues describe e interpreta el conocimiento didáctico-matemático de docentes de educación primaria en formación inicial (DFI en adelante) y sus dificultades para crear problemas. Se emplea el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) para examinar los protocolos de respuesta de los DFI que participaron. La experiencia formativa se implementó con 62 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria. Durante sus estudios previos de grado, los DFI han recibido una formación específica en aspectos epistémicos (conocimientos matemáticos), cognitivos (aprendizajes, errores y dificultades), instruccionales (tareas, actividades, materiales y recursos) y curriculares de la enseñanza de las matemáticas.

La intervención formativa se desarrolló durante 5 sesiones de dos horas de duración cada una. Estas son de dos tipos: a) teórico-prácticas (de gran grupo) en las que se presentan los contenidos teóricos y se ejemplifican con momentos de trabajo guiado en pequeños grupos y discusión colectiva; b) prácticas (en grupos pequeños de 4 o 5 estudiantes) en los que los DFI trabajan sobre las consignas facilitadas por la profesora como continuidad al trabajo teórico-práctico previo. En este trabajo analizamos parte de los resultados de los informes elaborado por los 12 equipos de estudiantes, con relación a la tarea que se describe a continuación[14]:

El docente propone el siguiente problema a sus estudiantes de 6º de educación primaria:

14 Según la regulación actual sobre principios éticos de la Universidad de Granada, y tras consultar con el Vicerrectorado de Investigación y Transferencia de dicha institución, no fue necesario solicitar evaluación por parte del comité ético

> **Problema.** Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A? Explica tu respuesta

Mientras los estudiantes tratan de resolver el problema en clase, algunos comentan:

> Luis: Maestro…no lo puedo resolver porque no sé cuántas bolas hay en la caja A.

A continuación, María intenta dar la solución al problema.

> María: Yo creo que, si pensamos que hay cuatro, porque te dice que en la A una es blanca y tres son negras, pues, como tienes dos negras más, entonces, para que sea igual de probable tiene que haber la misma diferencia, ¿serían entonces 18 blancas y 20 negras… no maestro?

Pero Pedro no está de acuerdo y rápidamente indica:

> Pedro: ¡Ya sé! ¡Es que no estáis usando la probabilidad! ¿Maestro puedo salir a la pizarra? ¡Ya lo he resuelto!

El docente anima a Pedro a salir y a explicar con detalle lo que ha pensado y a sus compañeros a prestar atención a su solución. Escribe en la pizarra:

> En la caja A hay una probabilidad de sacar una bola blanca es de ¼, ya que hay una blanca por cada 3 negras (1+3=4). Si en la caja B hay 20 bolas entre blancas y negras, y hay la misma probabilidad que en la caja A de sacar una bola blanca, en la caja A habría 6 blancas y 14 negras: $\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{1+5}{20}=\frac{6}{20}$

¿Cómo interpretas las respuestas de los estudiantes? ¿Qué dificultades se han encontrado?

Crea por variación del propuesto por el docente, un problema que contribuya a facilitar la comprensión y la solución del problema del episodio por parte de los estudiantes. Indica en cada caso los elementos que has variado en el enunciado y de qué manera permite a cada alumno superar su dificultad.

Para el análisis de los problemas creados se establecieron categorías de pertinencia. Un problema se considera *significativo* si, en términos de Grundmeier (2015), es plausible y puede resolverse con la información dada. En otro caso, se considera *no significativo*. Un problema significativo se considera *pertinente* (P) si facilita la comprensión del problema original ayudando a los estudiantes a superar sus dificultades, y *no pertinente* (NP) en caso contrario.

RESULTADOS

Interpretación de las respuestas e identificación de dificultades

Todos los grupos de trabajo señalaron que ninguna de las respuestas de los estudiantes de primaria fue correcta. Diez grupos indicaron dificultades individualizadas para cada uno de los estudiantes, mientras que dos de los grupos describieron dificultades de forma global. En la Tabla 1 se presentan las categorías de dificultades encontradas para cada estudiante por los diez grupos de DFI.

Tabla 1. Categorías de dificultades identificadas para cada estudiante y su frecuencia (n=10)

Estudiante	Categoría de dificultades	Fr.
Luis	Conexión entre probabilidad y proporcionalidad (CPP)	4
	Comprensión de la proporcionalidad (PP)	3
	Comprensión de la probabilidad (PB)	1
	Indica errores sin atender a sus causas (E)	2
María	Uso de una estrategia aditiva (EA)	4
	Comprensión de la proporcionalidad (PP)	3
	Indica errores sin atender a sus causas (E)	1
	No concluyentes o carentes de sentido (NC)	2
Pedro	Error en la cuantificación de la probabilidad (CPB)	4
	Error en la identificación de los datos o en el cálculo (IC)	3

	No concluyentes o carentes de sentido (NC)	3

Para la solución propuesta por Luis, los DFI señalaron con mayor frecuencia dificultades relacionadas con la conexión entre probabilidad y proporcionalidad, sin explicitar la relación de proporcionalidad o la articulación entre la probabilidad de obtener una bola blanca con la razón bolas blancas a negras ("no establece una correcta relación entre la probabilidad de sacar una bola que se le ofrece (1/4) que seguramente aplicando la proporcionalidad le repercutirá a alcanzar el dato deseado", G03). Otros grupos identificaron dificultades asociadas a la proporcionalidad ("la dificultad que hemos encontrado en Luis es que no sabe establecer la relación de proporcionalidad", G01), o a la probabilidad ("no tiene adquirido los contenidos referentes a la probabilidad", G06), no señalando la conexión entre ambas. Dos grupos indicaron errores cometidos sin atender a sus posibles causas.

Tras analizar la solución de María, la dificultad señalada con más frecuencia se asocia a la aplicación de una estrategia aditiva en lugar de establecer una relación de proporcionalidad ("María ha establecido una relación aditiva en lugar de una relación de proporcionalidad, pues considera que como hay dos negras más, quitándole dos a las 20 negras totales obtendrá 18 blancas", G07). En otros casos se destaca como dificultad no hacer uso de la relación de proporcionalidad, sin referencia explícita a una estrategia aditiva ("no está aplicando la proporcionalidad, sino que ha calculado la diferencia entre las bolas blancas y las negras", G05). En ninguno de estos casos se relaciona con la probabilidad. Por último, un grupo describe el error cometido sin indicar ninguna posible causa mientras que otros dos plantean dificultades fundamentadas en conceptos matemáticos erróneos o en resoluciones incorrectas del problema.

En la resolución de Pedro, todos los grupos describieron los errores cometidos en el proceso de resolución, pero no indicaron explícitamente las posibles dificultades asociadas a los razonamientos proporcional o probabilístico exhibidas por el estudiante. Entre los errores señalados se encuentran la inadecuada cuantificación del valor de la probabilidad de extraer un abola blanca de la caja B ("lo que ha hecho es sumar la probabilidad de que salga una bola blanca de la caja A, con sacar una bola de cualquier color de la caja B", G05) o la incorrecta identificación de los datos del enunciado y realización de cálculos ("se equivoca al poner los datos y operar con ellos", G08). Finalmente, tres grupos presentaron una descripción de los errores no concluyente o carente de sentido.

De los dos grupos que señalaron dificultades sin diferenciar en qué estudiante las reconocían, uno precisó la no identificación de la relación de proporcionalidad, el uso indebido de estrategias aditivas o el desconocimiento relacionado con la probabilidad. El otro grupo no hizo referencia a elementos matemáticos propios de la proporcionalidad o la probabilidad, indicando de forma general que las limitaciones de todos los estudiantes se relacionaban con no ser capaces de relacionar ambas cajas o con la interpretación del enunciado.

Creación de problemas para facilitar la compresión y solución del problema original

Todos los grupos crearon un problema, a excepción del grupo G12 que propuso dos, por lo que se analizaron un total de 13 problemas. Cuatro problemas resultaron no significativos. En la Tabla 2 se muestran las categorías de problemas significativos encontradas según el tipo de modificación realizado y su frecuencia, secuenciadas con las dificultades previamente identificadas.

Tabla 2. Categorías de problemas creados según el tipo de modificación realizada y su frecuencia (n=9)

Cat.	Tipo de modificación	Dificultades			Fr.
		Luis	María	Pedro	
P	Proporciona el total de bolas en la caja B	CPP	PP	CPB	1
	Añade una tabla o imagen como dato	PP	EA	CPB, NC	2
NP	Cambia a problema de reparto equitativo	E	PP	CPB	1
	Cambia a problema de cálculo explícito de la probabilidad	Globales			2
	Proporciona el total de bolas en A	CPP	EA	CPB	1

	Modifica la redacción del enunciado	CPP	EA	CPB	1
	Cambia a problema de reparto proporcional sin probabilidad	E	NC	IC	1

En dos de los problemas pertinentes se modificaron tanto la información como el requerimiento del problema. En el primero de ellos, se proporciona el número de bolas blancas que hay en la caja B, en lugar del total de bolas, y se pide determinar el número de bolas negras que hay en B (Figura 1). Los DFI justificaron cómo su problema atendía a las dificultades de Luis y María, a partir de la relación de proporcionalidad entre bolas blancas de ambas cajas (Figura 1). Sin embargo, no hicieron referencia al papel que juega la probabilidad y la razón de bolas blancas a bolas negras. La justificación asociada a Pedro resulta no concluyente.

Figura 1. Problema y justificación propuestos por G09. Modifica información y requerimiento

Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 6 bolas blancas. Teniendo en cuenta que es igual de probable sacar una bola blanca en la caja A y B ¿Cuántas bolas negras hay en la caja B?

Justificación

Con esta variación permite superar las dificultades al alumnado. Por un lado Luis y María (que tienen dificultad en la asimilación y en la aplicación de la probabilidad en relación a la proporcionalidad de los casos favorables y los casos posibles) ahora, al decir cuántas bolas blancas hay en la caja B, se puede observar la proporcionalidad 1 bola blanca caja A — 6 bolas blancas caja B y por tanto se les facilita el entendimiento de dicha relación. Pedro no tiene dificultad en la asimilación de proporcionalidad pero se ha equivocado en el cálculo, al sumar ambas probabilidades, pero al decir ahora cuántas bolas blancas hay en la caja B no se encontrará con esta dificultad.

El segundo de los problemas añade como información una tabla para recoger distintos valores del número de bolas blancas, negras y totales, así como de la relación de proporcionalidad, e introduce como requerimiento completar dicha tabla (Figura 2). Los DFI argumentaron que completar esta tabla orientaría al alumnado y les ayudaría a tomar consciencia de que la razón de bolas blancas a bolas negras debe mantenerse constante para que la probabilidad de extracción en ambas cajas sea la misma.

Figura 2. Problema y justificación propuestos por G04. Modifica la información y el requerimiento

Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si hay la misma probabilidad de sacar una bola blanca que en la caja A? Completa poco a poco la tabla, comprendiendo lo que haces y explica tu respuesta.

CAJA A

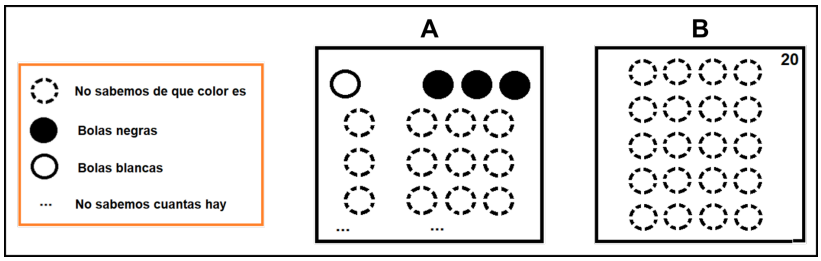
Bolas blancas	1	2	3	4	5
Bolas negras					
Total bolas (Blancas+Negras)					
Relación de proporcionalidad					

Justificación

Para poder facilitar la comprensión del problema y acabar con las dificultades que tienen estos niños, que en el caso de Luis y María es que no son capaces de sacar la razón de probabilidad y la de Pedro, que, si calcula la razón de probabilidad, pero luego no sigue avanzando de manera correcta en la resolución del problema, incluiremos en el ejercicio una tabla que irá guiando a los alumnos hacia la solución y comprensión del problema. Como podemos observar de esta manera los alumnos comprenderían el proceso y llegarían a la solución sin tener las dificultades que tenían antes. Además de esta manera se darían cuenta de que la relación de proporcionalidad no depende del número total de bolas que haya, porque en este caso siempre es la misma, ya que se respeta siempre que por cada bola blanca hay tres negras.

El tercer problema pertinente creado por variación del original modifica únicamente la información del problema base. Los DFI mantuvieron el mismo enunciado, pero añadieron una imagen para facilitar el reconocimiento de la relación de proporcionalidad entre bolas blancas y negras (o blancas y totales) en la caja A y cómo esta debe mantenerse en la caja B para que la probabilidad de extraer bola blanca sea la misma (Figura 3). Sin embargo, los DFI no justificaron su decisión.

Figura 3. Imagen con la que el grupo G07 completa el problema original



En tres de los problemas no pertinentes (no respondían a la finalidad didáctico-matemática) los DFI modificaron el entorno matemático del problema original (razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades), evitando la dificultad encontrada. Por ejemplo, G05 (Figura 4) propone una situación de reparto equitativo de un conjunto de bolas en cajas. Los DFI indicaron que el cambio en el entorno facilita la resolución del problema, sin describir cómo puede ayudar a comprender el problema original ni a superar las dificultades observadas previamente.

Figura 4. Problema propuesto por G05. Se modifica el entorno matemático (problema de reparto equitativo)

> Disponemos de 4 cajas, la caja A, la B, la C y la D. En cada una de ellas queremos meter el mismo número de bolas (entre blancas y negras). Si tenemos 100 bolas en total, ¿cuántas bolas habría en cada caja? ¿cuántas bolas sobran?

En los otros dos casos se proporciona el espacio muestral de un experimento aleatorio y se pide determinar la probabilidad de que uno o varios sucesos tengan lugar. Por ejemplo, G02 considera que su problema (Figura 5) atiende a las dificultades de los estudiantes al proporcionar el número total de elementos del espacio muestral y emplear en su resolución números naturales en lugar de racionales.

Figura 5. Problema propuesto por G02. Su resolución no involucra el razonamiento proporcional

> Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen bolas blancas y bolas negras. En la caja A encontramos 7 bolas blancas y 2 negras. Y en la otra caja hay 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Si escogemos al azar una de las cajas y escogemos una bola ¿Que probabilidad hay de que la bola sea de color negra?

El grupo G12 creó dos problemas en los que modificaban la información: proporcionando el número total de bolas de la caja A, o bien modificando la redacción del enunciado, indicándose que "en la caja A por cada bola blanca hay el triple de bolas negras". Los DFI argumentan que proporcionar el número de bolas en A e indicar la relación multiplicativa mediante la expresión "el triple" puede fomentar la superación de las limitaciones de Luis y María, respectivamente, si bien ninguna de estas medidas contribuye de forma significativa a la superación de dificultades por parte de los estudiantes.

Finalmente, G08 modifica el problema inicial para transformarlo en una situación de reparto proporcional en un contexto no probabilístico, no atendiendo a las dificultades de los estudiantes. En este caso, se proporciona el número total de bolas de una caja y su razón de bolas blancas a negras, indicando que es la misma que en una segunda caja donde se conoce el total de bolas. La justificación que dan los DFI en este caso no permite identificar cómo tienen en cuenta las dificultades señaladas.

CONCLUSIONES

Los docentes deben ser capaces de interpretar el grado de comprensión de los estudiantes al resolver una tarea matemática, así como de modificarla para fomentar la superación de las dificultades que se planteen (Godino et al., 2016). En respuesta a las preguntas de investigación de este trabajo, por un lado, hemos encontrado que los DFI presentan importantes limitaciones al interpretar las respuestas de los estudiantes y de discernir qué dificultades se reconocen tras sus prácticas matemáticas. Pocos fueron los casos en los que los DFI identificaron limitaciones que conectaban el razonamiento probabilístico con el proporcional. Además, si bien la mitad de los DFI señalaron dificultades asociadas a la proporcionalidad, en ningún caso se describieron con precisión y claridad qué aspectos del razonamiento proporcional eran objeto de tales limitaciones. Estos resultados están en línea con investigaciones previas que observan dificultades por parte de DFI al interpretar respuestas de estudiantes a tareas de proporcionalidad (Fernández et al., 2012) e identificar las estrategias erróneas y elementos del razonamiento proporcional en este tipo de tareas (Burgos et al., 2022).

Por otro lado, para los participantes también fue complejo crear un problema por variación del problema base que ayudase a los estudiantes a superar sus dificultades. En pocas ocasiones los DFI fueron capaces de crear problemas de proporcionalidad manteniendo el contexto probabilístico y atendiendo a las limitaciones observadas en las resoluciones de estudiantes. En mayor medida, los participantes crearon problemas cuya resolución no involucraba el razonamiento proporcional, no

atendían a las dificultades de los estudiantes o resultaban incorrectos o ambiguos. Este hecho concuerda con los resultados obtenidos por Burgos et al. (2023), quienes también observaron importantes limitaciones por parte de DFI al crear problemas de proporcionalidad.

Aunque somos conscientes de la limitación que supone el tamaño reducido de la muestra, este trabajo pone de manifiesto una carencia importante en la competencia de análisis e intervención didáctica de los futuros docentes: la capacidad para crear problemas en el contexto probabilístico que ayuden a sus estudiantes a superar las dificultades y progresar en el aprendizaje. Si bien es necesario ampliar el alcance de este estudio, los resultados nos llevan a considerar conveniente incluir en los programas de formación docente oportunidades para que los futuros docentes reflexionen sobre la finalidad de las tareas que proponen a sus alumnos, analicen las prácticas de estudiantes como respuesta a estas, interpretando sus estrategias y dificultades, y puedan modificarlas para que el error sea fuente de aprendizaje.

Referencias

Begolli, K.N., Dai, T., McGinn, K.M. y Booth, J.L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science*, *49*, 441–473. https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9

Burgos, M., López-Martín, M.M., Aguayo-Arriagada, C.G. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia, 36*(1), 588-611.

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023). Creación de problemas de probabilidad y razonamiento proporcional. Una experiencia con maestros en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 171-179). SEIEM.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8va ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM Mathematics Education, 44*, 747-759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.

Grundmeier, T. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer et al. (Eds.), *Mathematical Problem-posing, Research in Mathematics Education*, (pp. 411–431). https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_20

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Descriptores del desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas en estudiantes para maestro. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 305-314). SEIEM.

Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 341–361. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861–2866). CERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289630

Tichá, M., y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133–143. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1

COMPRENSIÓN DE LA ALEATORIEDAD POR MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL EN FORMACIÓN

Early childhood pre-service teachers' understanding of randomness

Vera, O.[a], Batanero, C.[b] y Pallauta, J.D.[c]

[a]Universidad de Cádiz, [b]Universidad de Granada, [c]Universidad de Los Lagos (Chile)

Resumen

Propuestas recientes reclaman incluir ideas sobre el azar y la probabilidad en la educación infantil, pero esta introducción precisa de la preparación previa del profesorado de esta etapa educativa. Dicha preparación específica no se ha contemplado en España hasta la fecha, y son pocas las investigaciones que analizan el conocimiento previo del profesorado en formación. El objetivo de este trabajo fue realizar un estudio exploratorio de la concepción de aleatoriedad en los maestros de educación infantil en formación. Para ello se analizan las respuestas de una muestra de 132 maestros en formación a un cuestionario con una pregunta abierta y otra en que se deben discriminar sucesos aleatorios y no aleatorios. Los resultados indican en una parte de los participantes una concepción incompleta de la aleatoriedad y falta de discriminación de sucesos aleatorios y deterministas.

Palabras clave: *comprensión de la aleatoriedad, fenomenología del azar, evaluación, maestros de educación infantil en formación***.**

Abstract

Recent proposals claim to include ideas about chance and probability in early childhood education, but this introduction requires prior preparation of childhood education teachers. Such specific preparation has not been considered in Spain to date, and few studies have analyzed the prior knowledge of trainee teachers. The aim of this paper was to carry out an exploratory study of the conception of randomness among trainee early childhood education teachers. To this end, the responses of a sample of 132 trainee teachers to a questionnaire with an open question and another in which random and non-random events were to be discriminated were analyzed. The results indicate a primitive conception of randomness and lack of discrimination between random and deterministic events in some participants.

Keywords*: understanding randomness, chance phenomenology, assessment, early childhood pre-service teachers.*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad encontramos propuestas que sugieren iniciar en la educación infantil y primer ciclo de educación primaria en experiencias con juegos y experimentos aleatorios sencillos y el lenguaje del azar (Alsina, 2012; Vásquez y Alsina, 2019). Ello se debe a la utilidad de la probabilidad en múltiples situaciones cotidianas y al hecho de que investigaciones recientes muestran la capacidad de los niños de estas edades para comprender y trabajar con situaciones aleatorias sencillas e iniciar el aprendizaje del lenguaje asociado (Batanero et al., 2021). Puesto que la comprensión del azar y la probabilidad no es espontánea y requiere un largo periodo de aprendizaje, es importante comenzar cuanto antes a incluir las ideas relacionadas a los niños (Alsina, 2012; Batanero et al., 2021).

Estas propuestas educativas se requiere una preparación adecuada del profesorado (Gea y Fernandes, 2018), aunque la presencia de la probabilidad y su didáctica en las asignaturas de didáctica de las matemáticas en los Grados de Educación Infantil es muy escasa. Las investigaciones sobre el

Vera, O., Batanero, C y Pallauta, J. (2024). Comprensión de la aleatoriedad por maestros de educación infantil en formación. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 529-536). SEIEM.

conocimiento de los futuros maestros se han centrado usualmente en los maestros en formación de educación primaria y señalan dificultades de comprensión de la probabilidad (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2024). Para seguir la sugerencia de Franco y Alsina (2022) que indican la conveniencia de realizar estudios con maestros de educación infantil, el objetivo de este trabajo es presentar los resultados de la evaluación de las características que asignan a los sucesos aleatorios, los ejemplos que proponen y la discriminación entre fenómenos aleatorios y deterministas de una muestra de maestros de educación infantil en formación

ANTECEDENTES

Aunque la investigación sobre formación de profesores es muy amplia, son pocos los trabajos centrados en la probabilidad. De ellos, la mayor parte se enfoca en el profesorado de educación primaria en formación y generalmente en el conocimiento matemático. Así Ortiz et al. (2006) analizan la comparación de probabilidades por maestros de educación primaria en formación. Gómez (2014) estudia el conocimiento matemático para enseñar probabilidad de una muestra de maestros de educación primaria en formación, indicando dificultades de comprensión de diversos conceptos asociados, aunque no contempla específicamente su comprensión de la aleatoriedad o la fenomenología que le asocian.

Respecto al conocimiento didáctico, Gea y Fernandes (2018) proponen a una muestra de futuros maestros dos tareas en las cuales debían determinar la probabilidad de un suceso y clasificar como correctas o incorrectas una serie de respuesta de estudiantes, dando la mayor parte respuestas satisfactorias. Fueron peores los resultados en el trabajo de Gómez (2014) al identificar errores en tareas de probabilidad frecuencial, juego equitativo y sesgo de equiprobabilidad. Vásquez y Alsina (2015) analizan las respuestas de 93 profesores en activo de educación primaria a un cuestionario sobre aspectos matemáticos y didácticos de la probabilidad, indicando un conocimiento muy insuficiente sobre el tema. A una conclusión similar llegan Burgos et al. (2022) en un grupo de futuros profesores de educación primaria al evaluar las soluciones de sus estudiantes o proponer propuestas didácticas para ayudarles a superar sus errores.

El cuestionario utilizado en esta investigación se ha tomado de Hernández- Salmerón (2015), quien evalúa la comprensión de la idea de aleatoriedad en una muestra de 89 estudiantes de 1º y 2º cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Califica las respuestas a los ítems como correctas, parcialmente correctas o incorrectas, sin analizar las argumentaciones empleadas. Sus resultados indican que fue difícil para los estudiantes proporcionar ejemplos de aleatoriedad diferentes de los juegos de azar.

MARCO TEÓRICO

- El concepto de aleatoriedad ha recibido diferentes significados a lo largo de la historia y está asociado a discusiones de tipo filosófico. De acuerdo con Batanero (2016), todavía existen diferentes definiciones del concepto. En el aula usualmente se introduce a través de algunas propiedades como “impredecibilidad”, “posibilidad de varios resultados”, “no controlable” y en forma más avanzada “con frecuencia relativa estable en una serie larga de experimentos”. Por ello existe una diversidad de concepciones, descritas por la autora y en Bennet (1999), entre otras, las siguientes:
- Aleatoriedad como contraposición a lo causado, o bien como conjunto de causas desconocidas. Es una visión primitiva de la aleatoriedad que no la liga con la probabilidad y fue predominante hasta el renacimiento. Implica una visión determinista subyacente del mundo, que consiste en suponer que todo tiene causa, pero no se conoce para los fenómenos aleatorios (Bennet, 1999). Esta concepción se superó a comienzos del siglo XX, ya que se observó la existencia de fenómenos aleatorios con causa conocidas, como el movimiento Browniano (Poincaré, 1912/1987).

- Aleatoriedad como equiprobabilidad: Consiste en considera aleatorias únicamente aquellas situaciones en que todos los casos posibles son equiprobables. Está ligada a la concepción clásica de la probabilidad, correspondiente a los primeros desarrollos de la probabilidad, por ejemplo, en la correspondencia de Pascal y Fermat y prácticamente se reduce a considerar como aleatorios únicamente los juegos de azar, pues es difícil encontrar otras situaciones en que los sucesos posibles sean equiprobables (Batanero, 2016).
- Aleatoriedad como estabilidad de las frecuencias: Serían aleatorios los sucesos cuya frecuencia relativa se estabiliza a largo plazo. Está asociada a la concepción frecuencial de la probabilidad, que introduce Jacques Bernoulli al demostrar la ley de los grandes números (Bennet, 1999) y supone ampliar la aplicación de la probabilidad a muchos fenómenos.
- Aleatoriedad dependiendo del conocimiento: Sería una visión subjetiva donde un suceso puede ser aleatorio para unas personas y no para otras, dependiendo de su conocimiento del fenómeno. Corresponde a la concepción subjetiva de la probabilidad, sostenida, entre otros por Kyburg (Bennet, 1999) y que acepta la actualización de las probabilidades, mediante nuevos datos y sucesivas aplicaciones del teorema de Bayes.
- Una visión más reciente es debida a Von Mises quien define una secuencia aleatoria como aquella que no sigue un patrón conocido o que pueda conocerse y que se liga a la elaboración de las primeras tablas de números aleatorios (Batanero, 2016). Finalmente, según la misma autora se considera aleatorio cualquier fenómeno en que se pueda aplicar el cálculo de probabilidades.

MÉTODO

La muestra participante en el estudio estuvo formada por 132 estudiantes del Grado de Magisterio en Educación Infantil, de la Universidad de Cádiz, que cursaban la asignatura de Conocimiento Matemático en Educación Infantil, en segundo curso de su carrera. Los estudiantes de la muestra no habían estudiado previamente ninguna asignatura de matemática en la universidad, de donde, su conocimiento en relación al cuestionario pasado es el que traen de sus estudios a nivel secundario y que incluye la probabilidad simple, compuesta y condicional, así como las ideas de experimento y suceso aleatorio y la resolución de problemas sencillos de probabilidad. En su gran mayoría son mujeres que rondan un promedio de 19 años de edad.

Cuestionario

Estos participantes completaron individualmente y por escrito el cuestionario que se presenta en la Figura 1. Dicho cuestionario se ha tomado de Hernández- Salmerón (2015), quien tomó las preguntas de textos dedicados al profesorado, como el de Godino et al., (1988). Está centrado en evaluar la discriminación de los participantes entre fenómenos aleatorios y deterministas, y las características y fenomenología que los alumnos atribuyen al azar. Está formado por dos preguntas. La primera de respuesta abierta y en la segunda se pide indicar si una serie de fenómenos son o no aleatorios.

En la Pregunta 1 se evalúa la comprensión intuitiva que tiene el maestro en formación de un fenómeno aleatorio y se espera que den una definición usando sus propias palabras. Se les pide además un ejemplo, para analizar la fenomenología que consideran para los fenómenos aleatorios. La pregunta 2 presenta una serie de situaciones en las que el futuro maestro ha de discriminar cuáles son aleatorias (situaciones a, c, e) y cuales deterministas (b, d y f). Está inspirada en una investigación de Konold et al. (1991), aunque las situaciones presentadas son ligeramente diferentes a las de aquel estudio. La situación a describe un juego de azar, la c un fenómeno meteorológico y la e un resultado deportivo. Por tanto, la situación a sería aceptada como aleatoria por aquellos participantes que admiten la concepción de azar como equiprobabilidad, la c por los que también aceptan la que corresponde a estabilidad de las frecuencias y la e por los que aceptan igualmente la concepción subjetiva.

Figura 1. Cuestionario

¿Qué quiere decir que una cosa ocurre al azar? Explícalo con un ejemplo.

Indica con una cruz (X) en cuáles de las siguientes situaciones interviene el azar y en cuáles no:	Si	No
Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros		
Observar si mañana sale el sol		
Observar si mañana llueve o no		
Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados		
Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra		
Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo		

Recogidas las respuestas escritas de los participantes, se realizó un análisis de contenido (Neuendorf, 2017) de las respuestas a las dos partes de la primera pregunta. Para cada situación descrita en la pregunta 2, se codificó simplemente si se respondía que el fenómeno era aleatorio o no.

Categorías de análisis de la primera pregunta

Las categorías utilizadas para la primera parte de la pregunta, en que el estudiante da su definición intuitiva de qué es algo que sucede al azar se describen a continuación. Fueron obtenidas mediante un proceso cíclico, en que uno de los autores clasificó y revisó varias veces las respuestas, siendo revisada la codificación por otro autor, hasta llegar a un consenso. Las primeras categorías implican ideas que pueden equipararse a algunas de las concepciones históricas de la aleatoriedad descritas en Benner (1999):

C1. Contrapuesto a causa y efecto: Se indica que algo que ocurre al azar no tiene causa. Corresponde a una concepción primera del azar, consistente en suponer que todo está causado y un fenómeno es aleatorio simplemente porque no se conoce su causa o porque no tiene una causa que lo produzca, es decir es casual.

E1: Algo que no está planeado, que ocurre por casualidad.

C2: Sin explicación: Aleatorio sería aquello cuya causa no conocemos; está por tanto también ligada a la categoría C1 aunque no es exactamente la misma concepción pues se admite que el fenómeno pueda tener causa, pero no las conocemos. Ambas son concepciones primitivas hoy superadas.

E2: Que ocurre aleatoriamente, sin explicación y la mayoría de las veces por factores externos.

C3: Equiprobabilidad: Corresponde a la visión de un experimento aleatorio como aquel cuyos resultados son equiprobables, que estuvo aceptada en las primeras etapas de estudio de la probabilidad y está ligada a la concepción clásica e la probabilidad y da una visión parcial de la misma, pues sólo se aplicaría a los juegos de azar.

E3: Que hay un 50% de posibilidades de que ocurra o no

C4: Referencia a la probabilidad: Cuando se considera que un fenómeno aleatorio es aquél al que se le puede aplicar las reglas de la probabilidad y eventualmente ocurrirá y sería una concepción que engloba a la C3.

E4: Tiene probabilidad de que ocurra, pero no significa que ocurrirá al 100%.

Otras definiciones utilizadas por los participantes se apoyan en propiedades de los fenómenos aleatorios:

C5: No ordenado: Corresponde a una propiedad de una secuencia de resultados aleatorios (más que de un suceso), pues al no tener un patrón conocido, no se puede encontrar un orden en la misma. Sería similar a la concepción de Von-Mises.

E5: Una cosa que ocurre de forma aleatoria sin una sucesión determinada, es decir, sin un orden establecido.

C6: Impredecible: Una característica de los sucesos aleatorios es que son fortuitos; no se puede decir con seguridad si ocurrirán o no en una única repetición del experimento aleatorio; sin embargo se puede predecir la distribución del conjunto de sucesos en una serie de repeticiones del experimento.

E6: Cuando se hace algo y hay posibilidad de que pase cualquier cosa

C7: Falta de control: Otra propiedad de la aleatoriedad es que no se puede controlar y ocurre a pesar de la falta de control.

E7: Que ocurre de manera aleatoria, es decir, sin controlar el resultado o la variable.

C8. Varias características: Cuando el maestro en formación alude en su respuesta a varias de las anteriores características, por ejemplo, E8 hace referencia a la probabilidad, a la vez que a la imposibilidad de control e impredecibilidad.

E8: Hace alusión a que es una probabilidad, la cual no puede ser un resultado previsible pues existen variables que no podemos controlar y por tanto no podemos conocer con exactitud el resultado.

Las categorías empleadas para clasificar los ejemplos proporcionados en la segunda parte de la primera pregunta han sido las siguientes:

C1: Juego de azar: Cuando se propone un juego de azar, como la lotería, sacar bolas de urnas, juegos de dados o cartas. Estos tipos de ejemplo son los más frecuentes en los libros de texto de educación primaria, pues los sucesos que intervienen son equiprobables, con lo cual son más sencillos de comprender por los niños. Los maestros en formación han trabajado con estos libros y además estos juegos son parte de su experiencia.

E9: Un ejemplo puede ser el bingo, donde van saliendo números al azar y gana el que le hayan salido todos los números.

C2: Economía: No son ejemplos que suelan aparecer en los libros de texto, ni tampoco tienen los participantes en el estudio tanta familiaridad con ellos. Por ello, sólo un estudiante plantea el ejemplo de hacer una inversión y no saber si será rentable o no.

E10: Hacer una inversión y ver el resultado.

C3: Escolar: En la escuela se producen con frecuencia situaciones aleatorias, como el éxito o calificación en un examen, el hecho de que la maestra pregunte a determinado alumno, o los compañeros que toquen en el mismo grupo de clase. Por ello, algunos ejemplos, indican estas situaciones.

E11: La clase que te toca en el instituto.

C4. Entretenimiento, sociedad: En la sociedad también son frecuentes las situaciones aleatorias, como la coincidencia con un amigo en un lugar, la familia donde naces, el número de miembros de la familia o el orden de una persona entre sus hermanos o los juegos practicados en sociedad, como sortear para hacer un regalo.

E12: Elegir el nombre de la persona a la que harás un regalo para el amigo invisible,

C5: Transporte: Situaciones aleatorias relacionados con el mismo son la puntualidad respecto al horario, duración de un trayecto, o imprevistos en los medios de transporte.

E13: Voy a Cádiz y pierdo el autobús.

C6: Comercio: Se citan situaciones de compras o ventas de diversos productos que pueden ser aleatorias.

E14: Vas a comprar una sudadera roja y no estás seguro si la venden en tu tienda favorita.

C7: Deporte: Serían aleatorios los resultados de competiciones deportivas o de deportes practicados por el maestro en formación.

E15: Cuando jugando al futbol chutas a portería. Existe la misma probabilidad de que sea gol o no.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En primer lugar, en la Tabla 1 presentamos los resultados de la definición dada por los maestros en formación de algo que ocurre por azar, con la finalidad de evaluar su comprensión intuitiva de la aleatoriedad. Lo más frecuente fue considerar algo que ocurre al azar como contrario a la causa y efecto o sin causas conocidas (categorías C1 y C2) que son concepciones ya superadas e incorrectas. La concepción como equiprobabilidad (C3) sería parcialmente correcta al ser muy limitada, luego el resto de categorías corresponden a concepciones correctas (C4 a C8, en total 57,6% de participantes.

Tabla1. Frecuencia y porcentaje de definiciones en la Pregunta 1

Porcentaje de participantes que da cada respuesta	Frecuencia	%
Contrario a causa y efecto	38	28,8
Sin explicación	5	3,8
Equiprobabilidad	13	9,8
Referencia a la probabilidad	5	3,8
No ordenado	13	9,8
Impredecible	27	20,5
Falta de control	22	16,7
Varias características	9	6,8

Hernández-Salmerón (2015) no clasifica las respuestas por categorías y solo indica que el 71,4 % en primer curso de la ESO y el 78,8% en segundo curso dan respuesta y ejemplo correcto en esta pregunta, por lo que los resultados en este estudio son algo peores que los de la autora.

En la Tabla 2 se presentan los ejemplos proporcionados por los maestros en formación en la Pregunta 1, mediante los que tratamos se inferir la fenomenología que aplican a los fenómenos de azar. Se obtiene una muy amplia mayoría de estudiantes que propone algún juego de azar como ejemplo de situación aleatoria. Es preocupante, además que casi la cuarta parte no llega a proponer ningún ejemplo, de lo que deducimos que los maestros en formación no están seguros de qué tipos de fenómenos son aleatorios. Hernández-Salmerón (2015) no clasificó el tipo de ejemplo propuesto por los estudiantes en su trabajo, aunque por los porcentajes dedos de ejemplo y respuesta correcta, vemos que, en nuestro caso, se obtienen también alrededor del 75% de ejemplos correctos.

Tabla2. Frecuencia y porcentaje de ejemplos proporcionados en la Pregunta 1

Porcentaje de participantes que da cada respuesta	Frecuencia	%
Juegos de azar	83	62,9
Economía	1	0,8
Escolares	4	3,0
Entretenimiento, sociedad	8	6,1
Transporte	2	1,5
Comercio	1	0,8
Deporte	3	2,3
No ejemplifica	30	22,7

En la Tabla 3 se presentan los resultados en la Pregunta 2, donde se pide discriminar entre una serie de situaciones cuáles están relacionadas con el azar. A pesar de su aparente sencillez, se encuentran dificultades de discriminación de las situaciones deterministas y aleatorias por parte de los participantes.

Tabla 3. Porcentaje de maestros en formación que reconoce como aleatoria diferentes situaciones

Porcentaje de participantes que da cada respuesta	Si	No
Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros	95,4	4,7
Observar si mañana sale el sol	30,2	69,8

Observar si mañana llueve o no	53,5	46,5
Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados	6,2	93,8
Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra	78,3	21,7
Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo	11,6	88,4

En relación con las situaciones deterministas (b, d y f), donde el mayor porcentaje de maestros en formación que las reconocen como tales se da es la situación d) que corresponde a un fenómeno físico bien conocido por los participantes, por haberlo experimentado en su vida cotidiana y estudiado en la enseñanza secundaria. Incluso así, un porcentaje pequeño no la considera aleatoria. La segunda situación reconocida como determinista más frecuentemente, es la f, aunque de nuevo algo más del 10% no la considera así. Respecto a la situación b se puede haber interpretado la pregunta como un pronóstico del tiempo y no como un fenómeno físico pues el sol sale a diario. En todo caso, casi la mitad de los participantes no la considera aleatoria.

Al comparar con el trabajo de Hernández-Salmerón (2015) con estudiantes de educación secundaria, el porcentaje de estudiantes de 1º de la ESO que consideró determinista el suceso b fue del 6,1% y del 13,5% en 2º curso. Para el suceso f los porcentajes fueron 82,1% y 81,8% respectivamente y para el suceso d el 87,5% y 87,9%. Por lo tanto, nuestros resultados son mejores que aquellos para las situaciones d y f y peores para la b.

Respecto a las situaciones aleatorias, la mejor reconocida como tal es la a) que corresponde a un juego de azar y donde se aplicaría la concepción de aleatoriedad como equiprobabilidad de resultados (Batanero, 2016). En la situación e) solo el 78,3 % reconoce la aleatoriedad; en esta situación sería aplicable una concepción subjetiva de la aleatoriedad, pues puede influir en la respuesta del estudiante el hecho de que sea bueno o malo encestando al baloncesto. Finalmente, solo algo más de la mitad de la muestra considera aleatorio que un día llueva o no, donde se aplicaría una concepción frecuencial, pero que parte de los participantes puede haber interpretado desde el punto de vista subjetivo, dependiendo de la información que tengan sobre el pronóstico del tiempo. Los porcentajes de estudiantes que consideran aleatorias estas situaciones para 1º y 2º cursos de ESO en la investigación de Hernández-Salmerón (2015) fueron 87,5% y 93,9% en la situación a, 57,1% y 54,1% en la d y 87,5% y 93,9% en la e. Por tanto, dichos resultados son similares a los del presente estudio en las dos últimas y mejores en la primera.

CONCLUSIONES

Los resultados de la evaluación llevada a cabo, muestra ideas correctas sobre la aleatoriedad en una parte los maestros en formación y en otra concepciones incorrectas y falta de discriminación de los fenómenos aleatorios y deterministas. También se ha mostrado una fenomenología muy reducida de los fenómenos aleatorios, prácticamente reducida a los juegos de azar. Los resultados coinciden con otras evaluaciones llevadas a cabo con maestros de educación primaria en formación como las de Gómez (2014) o Vásquez y Alsina (2015), quienes indican una formación insuficiente de los mismos respecto a otros conceptos probabilísticos y respecto al conocimiento didáctico relacionado.

Estos resultados podrían afectar una posible introducción de ideas de azar y probabilidad en la educación infantil y primeros cursos de educación primaria, reclamada por autores como Alsina (2012) o Godino et al. (1988). También denota una pobreza en la cultura probabilística (Gal, 2005) de estos futuros maestros, que no contemplan la amplia posibilidad de aplicación de la probabilidad en situaciones cotidianas, escolares o sociales y no todos reconocen cuando una situación es o no aleatoria. Sería por tanto, necesario atender a la formación matemática y didáctica de los maestros de educación infantil en formación, para poder seguir estas recomendaciones.

Finalizamos reconociendo la limitación del estudio, que debiera ser completado con otras evaluaciones con nuevas muestras y preguntas complementarias a las utilizadas en este trabajo.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/ y FEDER (una forma de hacer Europa).

Referencias

Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en educación infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas, 7,* 4-22.

Batanero, C. (2016). Understanding randomness. Challenges for research and teaching. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34–49). European Society for Research in Mathematics Education.

Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education, 56*(1), 5-17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C., Álvarez Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A., y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA, 15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Bennett, D. J. (1999). *Randomness.* Harvard University Press.

Burgos, M., López-Martín, M. del M., Aguayo-Arriagada, C. G., y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia, 36*(1),1-24. http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38

Franco, J. y Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta, 51*(1), 7-16. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning (pp. 39-63). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gea, M. M. y Fernandes, J. A. (2018). Conocimiento de futuros profesores de los primeros años escolares para enseñar probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14,* 15–30. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.213

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988). *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Síntesis.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Hernández-Salmerón, E. (2015). *El lenguaje del azar en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria.* Tesis de Máster. Máster en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Konold, C., Lohmeier, J., Pollatsek, A., Well, A., Falk, R. y Lipson, A. (1991). Novices' views on randomness. *Proceedings of the XIII PME NA Conference* (pp. 167-173). PME-NA.

Neuendorf, K. A. (2017). The content analysis guidebook. sage.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P, Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Poincaré, H. (1987). *Calcul des probabilités.* Jacques Gabay (Trabajo original publicado en 1912).

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7,* 27–48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Acta Scientiae, 21*(3), 131-154. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215

MIRAR PROFESIONALMENTE LOS MATERIALES CURRICULARES: COHERENCIA ENTRE INTERPRETAR Y DECIDIR

Curricular noticing: Coherence between interpreting and deciding

Zorrilla, C., González-Forte, J. M., Ivars, P. y Fernández, C.

Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio explora cómo un grupo de 60 estudiantes para maestro de Educación Primaria (EPM) mira profesionalmente los materiales curriculares. En particular, nos centramos en examinar la coherencia entre la interpretación de una secuencia de actividades de un libro de texto sobre fracciones y cómo completan la secuencia. Los resultados muestran que más de la mitad de los EPM fueron coherentes en su diseño de la secuencia respecto a la interpretación dada en al menos uno de los aspectos interpretados (elementos matemáticos, modos de representación, tipo de actividad y tipo de fracción). Además, nos informan sobre los aspectos que consideraron los EPM en su diseño.

Palabras clave: *mirar profesionalmente los materiales curriculares, libros de texto, fracciones, estudiantes para maestro, educación primaria.*

Abstract

This study explores how a group of 60 pre-service primary school teachers (EPM) notice curricular materials. In particular, we focus on examining the coherence between their interpretation of a textbook activity sequence on fractions and how they complete the sequence. The results show that more than half of the EPM were consistent in the activities sequence designed regarding the interpretation given in at least one of the aspects interpreted (mathematical elements, modes of representation, type of activity and type of fraction). In addition, results inform us about the aspects that the EPM considered in the activities sequence designed.

Keywords: *curricular noticing, textbooks, fractions, pre-service teachers, primary school.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

La competencia docente mirar profesionalmente ha generado un creciente interés en las últimas décadas entre la comunidad científica (e.g., Dindyal et al., 2021; Weyers et al., 2023). El foco de atención de muchos de estos estudios ha sido mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes usando la conceptualización de Jacobs et al. (2010) como tres destrezas interrelacionadas: identificar, interpretar y decidir cómo responder. Estos estudios han identificado características particulares de cada una de las destrezas, pero hay menos que aporten información sobre su interconectividad (Santagata et al., 2021), la cual permite definir la competencia docente como práctica integral. Para examinar dicha interconectividad o relación entre destrezas, Rotem y Ayalon (2023) usan el constructo *coherencia*, que definen como el grado en que los futuros docentes tienen en cuenta: (a) los aspectos identificados en la situación al interpretar, y (b) sus interpretaciones cuando proponen cómo continuar con la instrucción. Los resultados de su estudio mostraron una falta de coherencia entre lo que se identifica e interpreta y las propuestas para continuar con la instrucción.

En particular, de entre las tres destrezas, la destreza "decidir cómo continuar la enseñanza" es la más difícil y exigente para los docentes, ya que estos pueden ser muy específicos en cuanto a los detalles al "identificar" e "interpretar" sin usar esta información para "decidir cómo continuar la enseñanza"

Zorrilla, C., González-Forte, J. M., Ivars, P. y Fernández, C. (2024). Mirar profesionalmente los materiales curriculares: coherencia entre interpretar y decidir. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 537-544). SEIEM.

(Barnhart y van Es, 2015; Choy, 2016). Las dificultades que los maestros afrontan al tomar decisiones para la enseñanza pueden estar provocadas porque sus orientaciones (creencias) y recursos (intelectuales, contextuales y materiales) sean contradictorios o por la falta de estos (Schoenfeld, 2011). Por tanto, las dificultades para diseñar/seleccionar actividades que ayuden a los estudiantes a progresar en su comprensión podrían derivarse de los obstáculos que presentan los docentes para interactuar con los recursos y materiales (e.g., libro de texto) que tienen a su disposición. Por tanto, surge la necesidad de explorar cómo los estudiantes para maestro miran profesionalmente los materiales curriculares, entendidos en nuestro estudio como los libros de texto escritos o digitales.

Mirar profesionalmente los materiales curriculares

Mirar profesionalmente los materiales curriculares ha sido conceptualizada como la interrelación entre: (i) identificar aspectos relevantes de los materiales curriculares que se tienen a disposición, (ii) interpretar las oportunidades para la instrucción que propicia cada material, i.e., cómo se establecen relaciones entre los aspectos relevantes identificados y las oportunidades para la instrucción que estos generan y, (iii) decidir cómo usar los materiales considerando los aspectos relevantes de cada uno y las oportunidades que brindan en el diseño de una lección (Dietiker et al., 2018).

El desarrollo de esta competencia permite al profesorado dar sentido a la complejidad del contenido y a las oportunidades pedagógicas de los libros de texto (Amador et al., 2017; Dietiker et al., 2018). Los libros de texto son el recurso más usado por los profesores en la preparación de las clases (Glasnovic Gracin, 2018); pero enseñar con estos no es una tarea fácil y está mediada por las creencias, experiencias y conocimientos de los profesores (Dietiker et al., 2018). Investigaciones previas centradas en mirar profesionalmente los materiales curriculares han mostrado que los EPM identifican diferencias en el diseño de las actividades y reconocen nuevas oportunidades de los materiales al comparar diferentes versiones de la misma actividad (Amador et al., 2017). McDuffie et al. (2018) mostraron que, aunque el profesorado atendía a características similares de los materiales docentes, la interpretación y las decisiones variaban en función de las orientaciones de los profesores y el tipo de currículo. Sin embargo, no hemos encontrado estudios centrados en la interconectividad de las destrezas en mirar profesionalmente los materiales curriculares.

Estudios previos han mostrado que las lentes teóricas son herramientas que ayudan a los EPM a centrar su mirada profesional (Fernández y Choy, 2020; Fernández et al., 2018). En nuestro estudio, se usará como lente teórica una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), ya que se ha mostrado como una herramienta potencial para apoyar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Ivars et al., 2020). Por tanto, las THA podrían ayudar a los EPM a interpretar las oportunidades de los materiales y a tomar decisiones, coherentes con la interpretación realizada, para superar posibles limitaciones.

Esta investigación forma parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo es caracterizar el desarrollo de mirar profesionalmente los materiales curriculares en estudiantes para maestro de educación primaria. En particular, en este estudio, nos centramos en examinar la coherencia entre la interpretación dada por los EPM a una secuencia de actividades de un libro de texto sobre fracciones y cómo completan la secuencia teniendo como apoyo una THA sobre el concepto de fracción como parte-todo.

MÉTODO

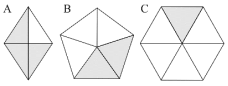
Participantes e instrumento

En el proyecto participaron un total de 171 EPM matriculados en una asignatura del Grado en Maestro en Educación Primaria cuyo objetivo es desarrollar competencias docentes como interpretar la comprensión matemática de los estudiantes para tomar decisiones en la instrucción centradas en su comprensión (mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes), planificar lecciones o analizar materiales curriculares como los libros de textos (mirar profesionalmente los

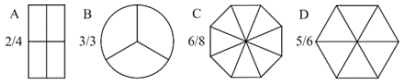
materiales curriculares). Antes de esta asignatura, los EPM habían cursado dos asignaturas de contenido matemático: una de sentido numérico y una de sentido geométrico.

Se proporcionó a los EPM dos páginas de un libro de texto de 3.º de Educación Primaria (Ferrero de Pablo et al., 2019; pp. 126-127) con las actividades que se muestran a continuación. En una sesión de 100 min se les pidió analizar de manera individual la secuencia de actividades y completarla para continuar favoreciendo la comprensión del concepto de fracción como parte-todo:

1. Escribe la fracción que representa la parte pintada en cada figura:



2. Pinta la fracción indicada en cada figura:



3. Representa las siguientes fracciones e indica, en cada una de ellas, el numerador y el denominador:

   a) 2/6 b) 4/8 c) 5/7 d) 2/4 e) 7/9

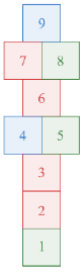
4. Lisa ha pintado dos rectángulos de color amarillo y azul.

   a. ¿Los dos rectángulos tienen la misma cantidad de pintura azul?

   b. ¿En cuál de los dos rectángulos el color amarillo representa 1/2?



5. Observa la rayuela de la derecha, que está dividida en nueve rectángulos iguales. Los rectángulos rojos representan 4/9 de la rayuela. Expresa mediante fracciones la parte representada por los rectángulos azules y la parte representada por los rectángulos verdes.



Para analizar estas actividades, los EPM respondieron a las siguientes preguntas: (a) Indica, para cada actividad, los elementos matemáticos necesarios para la resolución de la actividad; (b) Indica, para cada actividad, el tipo de actividad; (c) En cada actividad ¿Qué tipo de fracción se usa? ¿Qué modos de representación (y contextos) se utilizan?; (d) ¿Qué otros elementos/s matemático/s no aparecen en la secuencia de actividades y podrían favorecer la comprensión del concepto de fracción como parte-todo? ¿Cómo?; (e) ¿Qué conexiones se establecen entre los modos de representación para favorecer la comprensión del concepto de fracción como parte-todo? ¿Qué otras conexiones ayudarían a favorecer la comprensión?; (f) Teniendo en cuenta la respuesta al apartado b ¿qué otros tipos de actividades podrían favorecer la comprensión? (g) Completa la secuencia de actividades del libro de texto con una secuencia de actividades (mínimo 3 actividades) que ayude a continuar favoreciendo la comprensión del concepto de fracción como parte-todo. Las preguntas a, b y c se vinculan con la destreza identificar; las preguntas d, e y f con la destreza interpretar; y la g con la destreza decidir.

Para responder a estas preguntas los EPM disponían de un documento teórico con una THA sobre el significado de fracción como parte-todo (Ivars et al., 2020). La THA incluye el objetivo de aprendizaje (comprender el significado del concepto de fracción parte-todo), un proceso hipotético de aprendizaje (niveles de comprensión) y un conjunto de actividades diseñadas para ayudar al alumnado a progresar a través de los diferentes niveles de comprensión. El proceso hipotético de aprendizaje subraya los elementos matemáticos relevantes que deben ser comprendidos: las partes en que se divide el todo deben ser de igual tamaño, aunque pueden tener diferente forma (E1); una parte puede dividirse en otras partes / considerar grupo de partes como una parte (E2); usar una parte como

unidad iterativa para construir otras fracciones o el todo, i.e., "n veces a/b" (E3) y la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte, i.e., cuanto mayor sea el número de divisiones del todo, más pequeña será cada parte (E4). Por otra parte, el conjunto de actividades incluye ejemplos de tipos de actividades que pueden apoyar la comprensión del significado parte-todo del concepto de fracción: identificar y representar fracciones; reconstruir el todo cuando se da una parte, o una parte cuando se da otra parte; y comparar fracciones. Asimismo, estos tipos de actividades se ejemplifican utilizando diferentes modos de representación (gráfico, simbólico, concreto y verbal), contextos (continuo/discreto) y tipos de fracciones (propia/impropia).

En esta comunicación presentamos un análisis preliminar de un grupo de 60 EPM sobre la relación entre la interpretación de la secuencia de actividades y las decisiones que se toman para completar la secuencia de actividades. Por tanto, los datos analizados son sus respuestas a los apartados d, e y f que dirigen su atención hacia la interpretación de las limitaciones/potencialidades de los aspectos identificados (o no) en las actividades (elementos matemáticos, modos de representación, tipo de fracción y tipos de actividades; según la THA proporcionada) para favorecer la comprensión del concepto de fracción como parte-todo; y al apartado g (completar la secuencia de actividades).

Análisis

El análisis de los datos se realizó en tres etapas. En la primera etapa se analizó cómo los EPM interpretaban con relación a los cuatro aspectos: elementos matemáticos, tipo de fracción, tipo de actividad y modos de representación. Es decir, se analizó qué aspectos que no aparecían en la secuencia de actividades del libro de texto habían sido identificados. Para esta etapa, se utilizaron las características para cada aspecto proporcionadas en la THA (elementos matemáticos [E1, E2, E3 y E4], los tipos de fracción [propia/impropia], los tipos de actividades [identificar y representar fracciones; reconstruir el todo cuando se da una parte, o una parte cuando se da otra parte; comparar fracciones] y los modos de representación [gráfico, simbólico, concreto y verbal] y contextos [continuo o discreto]). Cuatro investigadores analizaron las respuestas que fueron categorizadas usando estas características (categorías). Se discutieron hasta llegar a un consenso (100%). En la segunda etapa, los cuatro investigadores analizaron la secuencia de actividades diseñada por los EPM, identificando los aspectos que tuvieron en cuenta en el diseño (se usaron las mismas categorías que en la etapa anterior). En la tercera etapa se analizó la coherencia entre la interpretación y la secuencia de actividades diseñada (Rotem y Ayalon, 2023). Es decir, si los EPM tenían en cuenta los aspectos interpretados en el diseño de las actividades (coherentes o no coherentes) y para los coherentes se identificaron qué aspectos habían considerado.

RESULTADOS

El análisis de la coherencia nos permitió identificar cuatro grupos de EPM: cinco EPM no diseñaron la secuencia de actividades; 11 EPM diseñaron una secuencia de actividades que no era coherente con lo interpretado; 12 EPM diseñaron una secuencia de actividades que era coherente con al menos un aspecto interpretado, pero tuvieron dificultades diseñando al menos una de las actividades; y 32 EPM diseñaron una secuencia de actividades que era coherente con al menos un aspecto de lo interpretado. A continuación, se describen e incluyen evidencias de los últimos tres grupos (el primer grupo no completó la tarea al no diseñar la secuencia de actividades).

La EPM5 es un ejemplo del grupo de EPM que diseñaron una secuencia de actividades que no era coherente con lo interpretado (Tabla 1). En su interpretación de la secuencia de actividades indicó que no se trabajaban actividades de reconstruir la unidad. Asimismo, interpretó que los elementos matemáticos E2 (una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como un parte) y E4 (la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte considerando un mismo todo) no se trabajaban. Además, aludió a que la secuencia de actividades, pese a conectar los modos de representación simbólico y gráfico en contexto continuo, no trabajaba ni el contexto discreto ni el modo de representación escrito. Aunque en su interpretación atendió a aspectos que

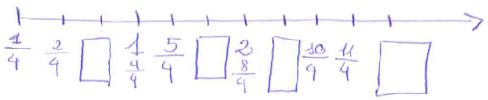
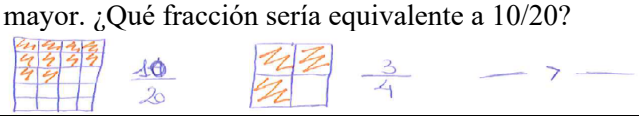
podían completarla para promover la comprensión del concepto de fracción como parte-todo, la EPM no consideró su interpretación en el diseño de la secuencia de actividades y diseñó tres actividades de identificar fracciones propias, dada una situación con números naturales, en las que no están involucrados los elementos E2 y E4. En estas actividades tampoco se observa el modo de representación gráfico en contexto discreto ni la propuesta de actividades de reconstruir la unidad.

Tabla 1. Interpretación y secuencia propuesta por la EPM5

Respuestas a apartados d, e y f	Respuesta a apartado g
d) Una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte; Relación inversa entre el n.º de partes y el tamaño de la parte: A mayor n.º de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual). e) Al ser modos de representación simbólicos y contexto continuo se establece la misma conexión en todos los ejercicios anteriores. Otras conexiones podrían ser: mediante representación escrita y contexto discreto. f) Podríamos realizar ejercicios de completar la unidad para fijar bien el aprendizaje y entendimiento de las fracciones.	Actividad 1: Tengo una pizza, me he comido 3 trozos y quedan 6. ¿Cuál sería la fracción de pizza que me he comido? Actividad 2: Un estudiante emplea 8 horas del día en dormir, 6 horas en labores académicas y 3 horas de alimentarse. ¿Qué parte del día le queda para hacer otras actividades? Actividad 3: Hoy por la mañana he caminado 3 kilómetros, en total del día debo caminar 5 km. ¿Qué fracción me queda por caminar hoy?

La EPM15 es un ejemplo del grupo de 12 EPM que fueron coherentes de acuerdo con lo interpretado, pero tuvieron dificultades diseñando al menos una de las actividades (Tabla 2). En su interpretación, esta EPM indicó que la secuencia se podía completar con actividades que trabajaran el E4 (relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte manteniendo el todo igual), introduciendo el contexto discreto y la recta numérica, usando fracciones impropias, y diseñando actividades de reconstruir el todo, de comparar, ordenar y reconocer fracciones y construir fracciones equivalentes. Esta EPM diseñó tres actividades: una actividad de representar fracciones propias e impropias en la recta numérica, una actividad de reconstruir el todo en contexto continuo (dada una $f < 1$), y una actividad de comparar y construir fracciones equivalentes con fracciones propias en contexto continuo. Esta secuencia es coherente con los tipos de actividades de reconstruir la unidad, comparar y ordenar y construir fracciones equivalentes, y con el uso de la recta numérica y el uso de fracciones impropias. Sin embargo, la EPM tuvo dificultades en el diseño de las actividades, ya que en la actividad 1, la representación de la recta numérica no es correcta.

Tabla 2. Interpretación y secuencia propuesta por la EPM15

Respuestas a apartados d, e y f	Respuesta a apartado g
d) Elemento 4 (Relación inversa entre el nº de partes y el tamaño de la parte: A mayor n.º de divisiones del todo, cada parte es más pequeña [manteniendo el todo igual]). e) Ayudarían el contexto discreto y las fracciones impropias. f) Recta numérica, reconstruir el todo desde una parte, comparar fracciones y ordenar fracciones, reconocer/construir fracciones equivalentes.	1. Escribe las fracciones que corresponden a los siguientes huecos:  2. El bizcocho representa 2/4. ¿Cuánto representa la unidad? Dibújala.  3. Observa las siguientes representaciones y di qué fracción es mayor. ¿Qué fracción sería equivalente a 10/20? 

Finalmente, 32 EPM diseñaron una secuencia de actividades y fueron coherentes con al menos un aspecto de lo interpretado. La Tabla 3 muestra los aspectos considerados en la interpretación para diseñar la secuencia de actividades y el número de EPM (columna de la derecha) en cada caso. La

última fila indica el número de estudiantes que tuvieron en cuenta en su secuencia cada uno de los cuatro aspectos considerados. La suma de estos números no es 32, ya que hubo estudiantes que tuvieron en cuenta más de un aspecto para el diseño de su secuencia.

Tabla 3. Número de EPM y aspecto/s tenido/s en cuenta en la secuencia propuesta

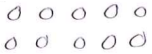
Tipo de actividad	Elementos matemáticos	Tipo de fracción	Modo de representación	N
x	x			9
x		x	x	5
x		x		3
x	x		x	3
	x		x	2
		x	x	2
	x			2
		x		2
x				1
	x	x		1
x			x	1
x	x	x		1
23	18	14	13	

Veintitrés de los 32 EPM decidieron cambiar el tipo de actividad, proponiendo otro tipo de actividad diferente a los que había en la página de libro de texto: reconstruir la unidad, comparar/ordenar fracciones, reparto equitativo y/o reconocer fracciones equivalentes. Dieciocho de los 32 EPM decidieron trabajar otros elementos matemáticos diferentes a los que se trabajaban: "las partes en las que se divide el todo deben ser de igual tamaño, aunque pueden tener diferente forma" (E1), considerando que las partes pueden ser distintas en forma, al interpretar que en el libro de texto todas las actividades presentaban partes de igual tamaño y forma; "una parte puede dividirse en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte" (E2); y "relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: a mayor número de divisiones del todo, más pequeña es cada parte" (E4).

Catorce de los 32 EPM decidieron cambiar el tipo de fracción, proponiendo actividades con fracciones impropias. Por último, 13 de los 32 EPM decidieron cambiar el modo de representación, proponiendo actividades en las que proporcionaban la representación gráfica (o con material concreto) de las fracciones en contexto discreto, o en contexto continuo, pero proporcionándoles material manipulativo (e.g., regletas de Cuisenaire). Un ejemplo de este grupo es el EPM26 (Tabla 4). En su interpretación de la secuencia del libro de texto indicó que no había actividades de repartos equitativos ni de reconstruir la unidad, no se trabajaba la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte (E4), no se utilizaban los modos de representación gráfico y concreto en contexto discreto, y no se incluían fracciones impropias. En su secuencia de actividades tuvo en cuenta el tipo de actividad (propuso tres actividades de reconstruir la unidad), el modo de representación (en las actividades 2 y 3 el contexto es discreto), y el tipo de fracción (en la actividad 3 la fracción es impropia).

Tabla 4. Interpretación y secuencia propuesta por el EPM26

Respuestas a apartados d, e y f	Respuesta a apartado g
d) Elemento 4: relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: a mayor n.º de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual). e) y f) Otros tipos de actividades que podrán favorecer la comprensión:	Actividad 1. Contexto continuo con fracciones propias. Si [representación gráfica] son 2/3, ¿cuál es la unidad?  Actividad 2. Contexto discreto. Fracción propia. Si tenemos 4 canicas que representan 2/3, ¿cuál es la unidad?

reconstruir la unidad, fracciones impropias, contexto discreto y realizar repartos equitativos.	Actividad 3. Contexto discreto. Fracciones impropias. Estas canicas representan 5/4. ¿Cuál es la unidad? 

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados han permitido, por una parte, examinar la coherencia entre las destrezas interpretar y decidir de la competencia mirar profesionalmente los materiales curriculares en EPM al analizar una secuencia de actividades de una página de un libro de texto y, por otra parte, identificar qué aspectos consideran los EPM en el diseño de las actividades. En cuanto a la coherencia, 44 de los 60 EPM diseñaron una secuencia de actividades coherente con al menos un aspecto interpretado (aunque 12 de ellos mostraron dificultades al diseñar alguna de las actividades). Este resultado parece sugerir que la información proporcionada en el documento teórico (THA) ayudó a los EPM a proponer una secuencia de actividades coherente con su interpretación, lo que subrayaría la importancia del uso de unas lentes teóricas para estructurar la mirada profesional de los EPM (Fernández y Choy, 2020; Ivars et al., 2020). Sin embargo, otros 11 EPM, aunque habían interpretado correctamente las características que podían incluirse para completar la secuencia, propusieron actividades que no eran coherentes con su interpretación, mostrando una desconexión entre lo identificado en el material curricular y su diseño (Rotem y Ayalon, 2023).

Por otra parte, los resultados han permitido identificar los aspectos considerados por los 32 EPM que no tuvieron dificultades al diseñar una secuencia de actividades con fracciones. La mayoría de EPM (23 EPM) se basaron en el tipo de actividad como aspecto a atender para el diseño de la secuencia, mientras que realizar cambios con respecto al modo de representación fue lo menos habitual (13 EPM). Este último resultado podría deberse a la preferencia mayoritaria de EPM por contextos continuos al representar fracciones gráficamente (Castro-Rodríguez et al., 2016).

Aunque los resultados comienzan a mostrar algunas características de las relaciones que se establecen entre las destrezas interpretar y decidir en la competencia mirar profesionalmente los materiales curriculares, dada la complejidad, son necesarios más estudios para seguir avanzando en este campo.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por los proyectos CIAICO/2021/279 (Generalitat Valenciana), PID2020-116514GB-I00 (Ministerio de Ciencia e Innovación) y Redes de Investigación en Docencia Universitaria 2022 ref. 5904 (ICE de la Universidad de Alicante).

Referencias

Amador, J. M., Males, L. M., Earnest, D. y Dietiker, L. (2017). Curricular noticing: Theory on and practice of teachers' curricular use. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 427–443). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_25

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, *45*, 83–93. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.09.005

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 129–146. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9673-4

Choy, B. H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(3), 421–440. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0173-3

Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M. y Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: a framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(5), 521–532. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.5.0521

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM Mathematics Education*, *53*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Fernández, C. y Choy, B. H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, teaching, psychological, and social perspectives. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teachers Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 337–360). Brill.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, (13), 39–61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Ferrero de Pablo, L., Martín Martín, P., Gómez Quesada, J. M., Quevedo Blasco, V. J., Bernal López, E. I. y Bustos Franco, R. (2019). *Matemáticas 3. Primaria. Pieza a Pieza*. Editorial Anaya.

Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(7), 1003–1024. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). A learning trajectory as a scaffold for pre–service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 529–548. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

McDuffie, A. R., Choppin, J., Drake, C. y Davis, J. (2018). Middle school mathematics teachers' orientations and noticing of features of mathematics curriculum materials. *International Journal of Educational Research*, *92*, 173–187. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.019

Rotem, S. H. y Ayalon, M. (2023). Constructing coherency levels to understand connections among the noticing skills of pre-service mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1–27. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09574-7

Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adleff, A. K., Yang, X. y Kaiser, G. (2021). Mathematics teacher learning to notice: a systematic review of studies of video-based programs. *ZDM Mathematics Education*, *53*(1), 119–134. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01216-z

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Routledge.

Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R. y Kaiser, G. (2023). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x

PÓSTERES

ARGUMENTOS INFORMALES PARA EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN FORMAL EN MATEMÁTICAS

Informal arguments for learning formal proofs in Mathematics

Acosta-Hernández, C., Camacho-Machín, M. y Marrero, I.

Universidad de La Laguna

Es sabido que existen muchas dificultades para el aprendizaje de la demostración formal en matemáticas y en el uso de argumentos visuales para validarlas por parte de los estudiantes del Grado de Matemáticas, sobre todo cuando comienzan con sus estudios en la Universidad (Jerez-Santana y Camacho-Machín, 2021). Una demostración formal es un argumento deductivo que establece el resultado a probar y que se ajusta a las normas del sistema de representación verbal-simbólico (razonamiento sintáctico) de la prueba. Un argumento informal, en el que intervienen elementos de visualización matemática, es un argumento deductivo que establece el resultado a probar sin ajustarse a las normas del sistema de representación de la prueba (razonamiento semántico) y que puede ser considerado como algo provisional que "ayuda" a la consecución de una demostración formal. Entender lo que significa una demostración no es fácil, requiere cierta madurez y necesita un aprendizaje. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al analizar las respuestas de un grupo de 22 estudiantes de cuarto curso del Grado en Matemáticas a un cuestionario adaptado del que usaron Zazkis y Villanueva (2016), y se enmarca en un proyecto más amplio que, entre otras, trata de responder las preguntas: ¿Cómo influyen los argumentos informales basados en la visualización matemática en la comprensión de una prueba o demostración formal de resultados matemáticos? ¿Cuáles son los errores y dificultades que presentan los estudiantes para conectar ambos tipos de argumentos e interpretar tales resultados? Las tareas utilizadas incluían un argumento informal, apoyado en una imagen visual, y dos pruebas formales, una de ellas acorde a los planteamientos efectuados en el argumento informal y la otra no. Se pidió a los estudiantes, en primer lugar, que seleccionaran cuál de las pruebas formales respondía al argumento formal y cuál no, y a continuación que justificasen su respuesta. A fin de comparar los resultados obtenidos en ambas investigaciones, se siguieron los criterios propuestos por Zazkis y Villanueva para determinar los porcentajes de éxito. En nuestro caso, suponen un 95,5% en T1, un 63,6% en T2 y un 50% en T3, frente al 100%, el 37,5% y el 12,5% del trabajo inicial. Es significativo que, a pesar de que las tareas fueron administradas en otro orden, la T1 obtuvo los mejores resultados y la T3 los peores en ambos estudios. Cabe conjeturar que las mejores tasas de éxito obtenidas en nuestra investigación guardan relación con la formación matemática previa de los participantes (cuarto curso del Grado en Matemáticas frente al equivalente a un primer curso en el estudio inicial). No obstante, se debe profundizar en el análisis de los criterios utilizados para establecer la conexión entre los argumentos informales y las pruebas formales elegidas, por lo que se realizarán entrevistas basadas en tareas a una muestra de los participantes en nuestra investigación.

Agradecimientos: Esta investigación ha sido subvencionada por el PI de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE

Referencias

Jerez-Santana, K. O. y Camacho-Machín, M. (2021). Preferencias de los esquemas para la prueba de estudiantes de los grados de Matemáticas y Física. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 660). Valencia. SEIEM.

Zazkis, D. y Villanueva, M. (2016). Student conceptions of what it means to base a proof on an informal argument. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 318–337. DOI 10.1007/s40753-016-0032-3.

Acosta-Hernández, C., Camacho-Machín, M. y Marrero, I.. (2024). Argumentos informales para el aprendizaje de la demostración formal en matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 547). SEIEM.

IDENTIFICACIÓN DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN PROBABILIDAD POR FUTUROS DOCENTES

Identification of Proportional reasoning in probability by future teachers.

Albanese, V.[a], Burgos, M.[a] y López-Martín, M.M.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Almería

Un aspecto relevante en la formación docente consiste en la evaluación y desarrollo de competencias profesionales para identificar los conocimientos y dificultades de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos (Buforn et al., 2021). Así, basándonos en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (Godino et al., 2017), analizamos y evaluamos los conocimientos y habilidades de un grupo de futuros docentes de primaria para identificar respuestas correctas y reconocer rasgos de razonamiento proporcional y probabilístico en la actividad matemática de estudiantes.

Trabajos previos muestran que los futuros docentes desconocen el papel del razonamiento proporcional en aspectos esenciales del razonamiento probabilístico, como son el análisis del espacio muestral y la cuantificación proporcional de las probabilidades y la comprensión y uso de las correlaciones (Supply et al., 2020; Burgos et al., 2022). Con este trabajo se persigue contribuir a las investigaciones sobre conocimientos didáctico-matemáticos del profesor con relación al razonamiento proporcional en el contexto de la probabilidad, específicamente en la dimensión cognitiva. Se adopta un enfoque mixto exploratorio para el analizar y evaluar las respuestas de 133 futuros docentes de primaria de una universidad española. En la tarea, los participantes deben evaluar la adecuación de las respuestas de estudiantes ficticios a un problema matemático que requiere determinar la composición de una urna (con un número conocido de casos posibles) de tal manera que la probabilidad de éxito sea igual a la de otra urna en la que no se conoce la composición exacta, pero sí la razón entre casos favorables y desfavorables. Centramos la atención en el análisis de la respuesta dada por una alumna ficticia que basa la resolución en la igualdad de razones entre casos favorables y casos desfavorables. Los resultados muestran las dificultades de los participantes para justificar sus valoraciones en base a la presencia de razonamiento proporcional, considerando como errónea una estrategia que no use la regla de Laplace. Este hallazgo resalta los desafíos en el razonamiento proporcional de los futuros docentes al abordar problemas matemáticos en contextos probabilísticos.

Referencias

Burgos, M., López-Martín, M. M, Aguayo, C.G. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuros profesores de educación primaria. *Uniciencia, 36*, 1–24. http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Supply, A. S., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2020). Can we count on early numerical abilities for early probabilistic reasoning abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 24*(1), 19–37. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1805551

Buforn, À., Pérez-Tyteca, P. y Monje, J. (2021). Ansiedad matemática y la competencia mirar profesionalmente: el caso de dos estudiantes para maestro. En P.D. Diago, D.F. Yáñez, M.T. González y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 181–188). SEIEM.

Burgos, M. y López-Martín, M.M. (2024). Identificación de razonamiento proporcional en probabilidad por futuros docentes. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 548). SEIEM.

ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE RESOLUCIONES DE UN PROBLEMA DE PORCENTAJES[15]

Analysis of the cognitive demand for solutions of a percentages problem

Contreras, D.A.

Universitat de València

Identificar y atender adecuadamente a los estudiantes con alta capacidad matemática (en adelante, ACM) es un desafío constante para el profesorado. Autores como Castro et al. (2015) destacan la importancia de formular tareas que supongan un reto apropiado para el estímulo de los estudiantes con ACM, permitiéndoles exhibir características como las habilidades de pensamiento lógico y la inversión de procesos mentales en el razonamiento matemático (Tourón et al., 1998).

Se presenta el avance de una investigación doctoral cuyo objetivo es diseñar y validar un cuestionario basado en la resolución de problemas que permita identificar la ACM en alumnos de 7.º básico del sistema educativo chileno (1.º de ESO del sistema educativo español). Se utiliza el modelo de los niveles de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), reformulado por Benedicto (2018), diseñado para valorar la complejidad del razonamiento necesario para resolver problemas y que, caracteriza cuatro niveles de demanda cognitiva: memorización (MEM), algoritmos sin conexiones (ASC), algoritmos con conexiones (ACC) y hacer matemáticas (MAT).

En este póster se analiza la demanda cognitiva de las resoluciones de 87 estudiantes de 7.º básico, de entre 12 y 13 años, de tres centros educativos chilenos: público, concertado y privado. En particular, se analiza un problema de porcentajes con dos preguntas: la primera busca seguir una secuencia de operaciones aritméticas y la segunda, realizar la misma secuencia en orden inverso. La complejidad del problema surge cuando los estudiantes deben plantear y resolver una relación porcentual inversa.

Los resultados del análisis de las resoluciones muestran que 29 estudiantes (33%) resolvieron con éxito la primera pregunta (ACC). En la segunda, 20 estudiantes (23%) cometieron errores en la inversión porcentual (ASC), mientras que solo 4 estudiantes (5%) la resolvieron correctamente (ACC), sugiriendo la presencia de habilidades de ACM. Otros estudiantes emplearon estrategias incompletas, clasificadas en el nivel de ASC, mientras que las estrategias incorrectas o dejar la pregunta en blanco no se evaluaron en ningún nivel de demanda cognitiva.

Referencias

Benedicto, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* [Tesis de doctorado, Universitat de València, España]. http://hdl.handle.net/10550/66468

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, 21, 85-104.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.

Tourón, J., Repáraz, C., Peralta, F., Gaviria, J., Fernández, R., Ramos, J. y Reyero, M. (1998). Identificación del talento verbal y matemático: descripción de un proyecto de validación. En A. Sipán (Coord.), *Respuestas educativas para alumnos superdotados y talentosos* (pp. 281-292). Mira.

[15] Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i PID2020-117395RB-I00 y de la ayuda predoctoral PRE2021-097725, financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por el FSE+.

Contreras, D. A. (2024). Análisis de la demanda cognitiva de resoluciones de un problema de porcentajes. En InicialEditor1. N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 549). SEIEM.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE MAESTROS EN FORMACIÓN EN EL DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PARA ALUMNADO CON TEA

Prospective teachers' mathematical knowledge in posing and adapting probabilistic problems for students with ASD

Álvarez-Cándano, C., Giadas, P. y Alonso-Castaño, M.

Universidad de Oviedo

La formación en inclusión educativa en los programas de formación inicial docente en matemáticas es limitada (Sabariego et al., 2021) ya que los futuros maestros de educación especial reciben una formación general sobre adaptaciones curriculares. En este sentido, cuando estudian probabilidad, contenido cada vez más presente en la formación matemática desde los primeros niveles (Alsina et al., 2021), y su didáctica deben desarrollar un adecuado conocimiento matemático para la enseñanza, lo que incluye ser capaces de realizar adaptaciones apropiadas para su futuro alumnado. Así, en este trabajo, se ha diseñado una tarea formativa en la que 9 estudiantes de la mención de educación especial de la Universidad de Oviedo, con formación en probabilidad y resolución de problemas, debían diseñar y resolver un problema de probabilidad dirigido al 6.º curso de Educación Primaria para luego adaptarlo para una alumna con Trastorno de Espectro Autista (TEA) y Trastorno Específico del Lenguaje (TEL). El objetivo de este trabajo ha sido determinar cómo era el conocimiento matemático para la enseñanza mostrado por el alumnado de dicha mención, al desarrollar el problema con y sin adaptaciones. Para el análisis de los datos se realizó un análisis del contenido utilizando el modelo MTSK (Carrillo-Yáñez et al., 2018). Los resultados revelaron que 8 de los 9 estudiantes fueron capaces de plantear y resolver problemas de probabilidad adaptados al nivel, mostrando evidencias de un conocimiento de los temas y de los estándares de aprendizaje de las matemáticas adecuados. Sin embargo, mostraron deficiencias en su conocimiento al realizar las adaptaciones ya que, aunque todos identificaron que debían incluir representaciones visuales, menos texto y una resolución mediante materiales manipulativos, sólo una alumna fue capaz de identificar que el acercamiento a la probabilidad debería hacerse de manera intuitiva, lo que destaca la necesidad de incidir en la formación en adaptaciones específicas para la enseñanza de las matemáticas en los programas de formación de maestros.

Agradecimientos

Los autores pertenecen a la Red MTSK (https://redmtsk.net/) de la AUIP. Además, Pablo Giadas agradece al proyecto PAPI-22-PF-12 del Vicerrectorado de Investigación de la Universidad de Oviedo, a través del Plan de Apoyo y Promoción de la Investigación.

Referencias

Alsina, Á., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L.J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. Épsilon - Revista de Educación Matemática, 104, 99-128.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

Sabariego, P., García-Moya, M., Goñi-Cervera, J. y Polo-Blanco, I. (2021). Pensamiento probabilístico en alumnado con TEA: propuesta de instrumento de evaluación. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 676). SEIEM.

Álvarez-Cándano, C., Giadas, P., Alonso-Castaño, M. (2024). El conocimiento matemático de maestros en formación en el diseño y adaptación de problemas de probabilidad para alumnado con TEA. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 550). SEIEM.

EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN PROYECTOS STEAM: UN ESTUDIO DE CASOS

Statistical literacy in steam projects: a case study

Anasagasti, J., Landa, J. y Berciano, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

En el contexto educativo actual, los proyectos interdisciplinarios que integran ciencia, tecnología, ingeniería, arte y matemáticas (STEAM, por sus siglas en inglés) ofrecen una oportunidad única para los estudiantes de explorar conceptos complejos de una manera práctica y significativa. Sin embargo, muchos de los proyectos implementados no abordan el aprendizaje de las Matemáticas de una manera mínimamente consistente (Rodrigues-Silva y Alsina, 2022). Es más, estudios como el de Diego-Mantecon et al. (2021) plantean dudas acerca de si los proyectos interdisciplinarios son adecuados para explotar las matemáticas escolares de forma eficaz.

En cuanto a la educación estadística, tal como indican Batanero y Díaz (2004), resulta innegable que los proyectos de investigación son herramientas que permiten mostrar la utilidad y aplicar los conocimientos estadísticos durante todo el proceso. Por ello, en este estudio se investiga cualitativamente cómo se emplea la información estadística dentro de un proyecto STEAM implementado en un instituto de educación secundaria de tercer año (3º ESO).

El enfoque del proyecto se centró en analizar las variaciones en la presión arterial en reposo después de realizar ejercicio físico o ingerir productos como la sal, refrescos azucarados o café. Los resultados muestran que los estudiantes recopilaron datos del pulso y la presión arterial tanto de forma manual como utilizando dispositivos de medición precisos, utilizando tablas estadísticas que después debían interpretar. En la fase de comunicación hicieron también uso de las tablas y, en algún caso, gráficos estadísticos como herramientas clave para mostrar los resultados obtenidos. En cuanto a la corrección en el uso de dichas herramientas se observa que, tal como indican Berciano et al. (2021), la argumentación basada en datos estadísticos presenta limitaciones considerables.

Como conclusiones, el estudio revela que este tipo de contexto ofrece un gran potencial para trabajar el sentido estocástico; el proyecto proporcionó a los estudiantes una comprensión práctica de cómo ciertos factores externos pueden afectar la fisiología humana. No obstante, debemos destacar la importancia de involucrar a los docentes de matemáticas en los proyectos STEAM para que este tipo de actividades genere un mayor aprendizaje estadístico significativo.

Referencias

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). ICE.

Berciano, A., Anasagasti, J. y Zamalloa, T. (2021). Sentido estadístico en la formación de las y los estudiantes del grado de Educación Infantil. Una aproximación desde un contexto de aprendizaje STEAM. *PNA, 15*(4), 289-309. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22510

Diego-Mantecon, JM., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. y Ortiz-Laso, Z. (2021). An attempt to evaluate STEAM project-based instruction from a school mathematics perspective. *ZDM Mathematics Education, 53*, 1137–1148. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9

Rodrigues-Silva J. y Alsina Á. (2022). Las matemáticas desde el abordaje steam en la educación primaria: una revisión sistemática de la literatura. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXV (pp. 509-518). SEIEM.

Anasagasti, J. Landa, J. y Berciano, A. (2024). Educación estadística en proyectos STEAM: un estudio de casos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 551). SEIEM.

PORTAL 2: UNA APROXIMACIÓN LÚDICA A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Portal 2: A playful approach to problem-solving

Antequera-Barroso, J.A.[a], Cáceres-García, M.J.[b], Sánchez-Barbero y B.[b], Carmona-Medeiro, E.[c]

[a]Facultad de Formación del Profesorado, Universidad de Extremadura, [b]Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Salamanca, [c]Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Cádiz.

¿Quién alguna vez en su vida no ha jugado a algún videojuego? Si hablamos de nuestros/as estudiantes podríamos ver como un gran número los utiliza en su vida cotidiana. Entre los argumentos para su uso son el desconectar de su día a día, diversión y el juego online entre amigos/as. Juegan, cooperan, dialogan y desarrollan estrategias para superar las distintas fases o niveles. Revuelta y Guerra (2012) indican cinco pasos o fases que siguen las personas a la hora de jugar. Estos pasos son muy similares a los descritos en la literatura para la resolución de problemas matemáticos tanto por Polya (1989) como por Mason et al. (1992), entre otros. Este hecho nos hizo plantearnos si nuestros/as estudiantes eran capaces de relacionar sus estrategias en el videojuego con las fases de los procedimientos de resolución de problemas matemáticos. Para ello se les presentó en formato taller colaborativo el videojuego "Portal 2", se les dio una serie de consignas de juego tanto libre como guiado. También se introdujeron, dentro de las sesiones de este mini taller, como herramientas de análisis, un cuestionario, pre y post, anonimizado Google Forms y un informe sobre sus estrategias de juego para poder discutir y comparar con los procedimientos o fases de la resolución de problemas durante las sesiones. En total participaron 160 estudiantes del Grado de Educación Infantil de la Universidad de Cádiz durante el curso 2020-2021.

El resultado que pudimos comprobar a la finalización del taller fue que los/as estudiantes se podían clasificar en tres tipos de videojugadores/as, independientemente de si necesitaban o no ayuda externa, muy similares a los tipos o clases de estudiantes a la hora de resolver un problema matemático. Estudiantes que resuelven sin o con mínima ayuda, estudiantes que se atascan, pero pueden continuar con o sin ayuda externa y estudiantes que directamente desisten. Además, consideraron que, aunque los procedimientos de juego y los de resolución de problemas fuesen similares, prima el aspecto lúdico de los videojuegos frente a la resolución de los problemas.

Referencias

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar Matemáticamente*. Labor.

Polya, G. (1989) *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Trillas.

Revuelta, F.I. y Guerra, J. (2012) ¿Qué aprendo con videojuegos? Una perspectiva de meta-aprendizaje del videojugador. *Revista de Educación a Distancia*, 33, 1–25.

Antequera-Barroso, J.A., Cáceres-García, M.J., Sánchez-Barbero, B. y Carmona-Medeiro, E. (2024). Portal 2: Una aproximación lúdica a la resolución de problemas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 552). SEIEM.

USO DE LA ASTRONOMÍA PARA FOMENTAR LA FUNCIONALIDAD DE LA MEDIDA EN EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Use of Astronomy to encourage the functionality of Measurement in Primary Teacher Education

Arjona-Aranda, G. y García-Gil, A.D.

Universidad de Málaga

Una creencia común del alumnado de Educación Primaria sobre las matemáticas refleja su dificultad y supuesto alejamiento de la realidad, así como la percepción de que es abstracta y difícil de aplicar a temas de interés (Soto y Flores-López, 2022). Sin embargo, la matemática les aporta un aspecto funcional y formativo que les permite adaptarse al medio, organizarlo y transformarlo. A su vez, posee un aspecto instrumental en el que se conoce la matemática como parte de la cultura universal y se modelizan situaciones reales y resuelven problemas contextualizados (González Marí, 2020). Por esta razón, resulta pertinente motivar al futuro profesorado con temas relevantes que estén relacionados con las matemáticas para que se lo puedan transmitir a su alumnado en un futuro.

En nuestro caso, se llevó a cabo una experiencia en la asignatura de Didáctica de la Medida del grado de Educación Primaria de la Universidad de Málaga, con aproximadamente 170 alumnos y alumnas. La propuesta didáctica estaba orientada a la relación que tiene la medida de amplitudes angulares con la astronomía, para que el alumnado observe esta relación y transversalidad al realizar el taller. En particular, hicimos hincapié en el estudio de las coordenadas altacimutales para obtener posiciones en el cielo de distintos cuerpos celestes, y así poder mostrar el desarrollo de las capacidades de identificar, relacionar y operar sobre la amplitud angular (Alsina, 2019). Para ello, el alumnado del grado, dividido en grupos de entre 5 y 6 personas, construyó un telescopio con objetos cotidianos, y midieron y compararon conjuntamente distintas posiciones de objetos colocados en el aula o señalados en el cielo. Además, estimaron la posición de un cuerpo celeste que se movía a una velocidad constante en un tiempo determinado a partir de una palma abierta, utilizando así unidades no tradicionales ajenas a los grados centígrados. La actividad se realizó tanto dentro como fuera del aula, pudiendo así mostrar temas interdisciplinares relacionados con la astronomía.

Con estas actividades, el alumnado del grado pudo ver el proceso de aprendizaje de la amplitud angular a partir de una tarea dinámica y creativa. Fueron capaces de ver cómo se pueden enseñar las medidas y estimaciones de amplitudes angulares en Primaria con instrumentos no convencionales que ellos y ellas podían crear. Además, observaron la posibilidad de enseñar y aprender matemáticas fuera del aula, con temas de interés tanto para el alumnado como para el profesorado.

Referencias

Alsina, A. (2019). La medida de 6 a 12 años. En A. Alsina (Ed.), *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas* (6 a 12 años) (1ª ed., pp. 185-230). Graó.

González Marí, J.L. (2020). Claves para una educación matemática humanista. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,* 88, 49-59.

Soto, M.E. y Flores-López, W.O. (2022). Creencias hacia las matemáticas en la formación de educación primaria de la Escuela Normal Bluefields. *Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas*, 5(1), 32-45. https://doi.org/10.5377/recsp.v5i1.15119

Arjona-Aranda, G. y García-Gil, A.D. (2024). Uso de la astronomía para fomentar la funcionalidad de la medida en el grado de educación primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 553). SEIEM

UN ESTUDIO SOBRE REPRESENTACIONES DE FRACCIONES EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

A study on fraction representations in Secondary Education

Armas, Y., Marrero, I. y Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Numerosos estudios han demostrado que aprender fracciones presenta dificultades para el alumnado de primaria y secundaria, en especial las relativas al uso de representaciones (Lamon, 2001). Tunç-Pekkan (2015) diseñó y aplicó una prueba a 656 estudiantes de 4º y 5º grado de Primaria (9-11 años) en EEUU para analizar cómo interpretan y representan fracciones usando el rectángulo, el círculo y la recta numérica. En la presente investigación se ha aplicado dicha prueba a 435 estudiantes de 1º a 4º de Educación Secundaria (12-16 años) de Tenerife, con el objetivo de dar respuesta a las siguientes cuestiones: A. ¿Cuál de las tres representaciones resulta más compleja para los estudiantes de Secundaria? B. ¿Qué errores cometen los estudiantes en cada representación? C. ¿Se percibe una evolución positiva a lo largo de la etapa? D. ¿Cómo se comparan los resultados de ambos estudios? La prueba constó de 19 ítems, agrupados en seis tipos de problemas, que abordaban diferentes aspectos de las representaciones de fracciones: 1. Identificar fracciones unitarias; 2. Representar fracciones propias (no unitarias); 3. Reconstruir la unidad a partir de una fracción unitaria; 4. Reconstruir la unidad partiendo de una fracción propia (no unitaria); 5. Identificar fracciones impropias; y 6. Reconstruir la unidad a partir de una fracción impropia. Para el análisis se introdujo una codificación de error por ítem, a fin de determinar los de mayor frecuencia. Como respuestas a las cuestiones de investigación se obtuvieron las siguientes:

A. Excepto en los ítems de tipo 2, la representación rectangular es la de mayor éxito, seguida de la circular. La de recta numérica es la que reviste mayor complejidad para los estudiantes.

B. Se detectan errores comunes a las tres representaciones y otros que dependen de la tipología del ítem. El error más frecuente es la identificación errónea del todo y de las partes.

C. No hay evidencia de una evolución positiva a medida que se asciende de nivel en la etapa, si bien en 4º curso se aprecia una mejoría en los resultados relativos a la recta.

D. El comportamiento es similar en ambos estudios para los problemas del tipo 1, 2, 3, y 6. Los de tipo 4 mejoran en Secundaria y los de tipo 5 obtienen un éxito sorprendente para la representación circular en Primaria.

Se concluye un bajo rendimiento del alumnado de la ESO respecto a la interpretación y realización de representaciones de fracción que no mejora lo suficiente a lo largo de los cuatro cursos, lo que requiere un tratamiento didáctico específico.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto PID2022-139007NB-I00 del MCIN/AEI.

Referencias

Lamon, S.J. (2001). Presenting and Representing: From Fractions to Rational Numbers. En A. Cuoco (Ed.), *The Role of Representation in School Mathematics*, *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 146-65). NCTM.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419-441.

Armas, Y., Marrero, I. y Bruno, A. (2024). Un estudio sobre representaciones de fracciones en educación secundaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 554). SEIEM.

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LOS GRADOS EN MAGISTERIO EN EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA

Mathematics Education in the Primary Education Degrees in Spain

Arnal-Palacián, M.

Universidad de Zaragoza

La actual legislación educativa española, LOMLOE, demanda la necesidad de renovar los planes de estudio del Grado en Magisterio en Educación Primaria (Ros-Magán et al., 2023). Estos mismos autores señalan que los actuales planes de estudios de Grado contienen un número de créditos de las Ciencias y las Matemáticas inferior a las recomendaciones establecidas en el Libro Blanco del título de Grado en Magisterio (ANECA, 2005). Previamente, y en este mismo sentido, Alsina (2020) analizó la situación de las matemáticas y su didáctica en los Grados en Magisterio en Educación Infantil. En el presente trabajo se pretende analizar la distribución de créditos de las matemáticas y su didáctica en los Grados en Magisterio en Educación Primaria en España. Para ello, se ha realizado la búsqueda de todas las universidades que imparten la titulación que conduce a la labor docente en Educación Primaria en el Registro de Universidades, Centros y Títulos (RUCT). Esta búsqueda arrojó como resultado 89 registros. De entre ellos se seleccionaron aquellos que condujesen a la titulación de Grado. Esta nueva búsqueda arrojó 77 resultados. Sin embargo, se excluyeron aquellos casos en los que el estado de la titulación fuese "Titulación extinguida" y "Titulación a extinguir". Esto excluyó a 10 de los registros. Para cada uno de estos 67 registros restantes, se accedió al apartado de "Planificación de las enseñanzas" y, posteriormente, al documento de la sección "Descripción del plan de estudios" para obtener las asignaturas obligatorias con posible vinculación con el área Didáctica de las Matemáticas. Los resultados señalan que las asignaturas obligatorias de matemáticas y/o su didáctica en los Grados en Magisterio en Educación Primaria tienen de moda y mediana una presencia de 18 ECTS, distribuidas en la mayor parte de los casos en tres asignaturas. En ocasiones aludiendo al propio contenido desarrollado y, en otros casos, presentadas de manera genérica (I, II y III). Estas asignaturas se concentran, mayoritariamente, en 2º y 3er curso. Las universidades españolas que tienen una mayor carga lectiva de las matemáticas y/o su didáctica son la Universidad de Cádiz y la Universidad de Almería, con 24 ECTS respectivamente. En el otro extremo encontramos a la universidad privada Universidad Francisco de Vitoria con 10 ECTS de formación para los futuros docentes. Fuera del análisis quedó la Mondragón Unibertsitatea, que únicamente cuenta con una asignatura STEM de 10 ECTS, que combina ciertos aspectos de las matemáticas con los de la lengua.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Grupo de Investigación en Educación Matemática (S60_23R) del Gobierno de Aragón.

Referencias

ANECA (2005). *Libro Blanco. Título de Grado en Magisterio*. Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

Alsina, Á. (2020). La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 23*(2), 373-387

Ros-Magán, G., Rodríguez-Arteche, Í., Fraile-Rey, A. y Pastor-Mendoza, J. (2023). Formación en el Grado de Educación Primaria en las disciplinas STEM: análisis ante su reforma en España. *Revista de educación 1*(402), 85–113. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2023-402-596

Arnal-Palacián, M. (2024). La Educación Matemática en los Grados en Magisterio en Educación Primaria en España. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 555). SEIEM.

HABILIDADES METACOGNITIVAS DEL PROFESORADO DE INFANTIL EN FORMACIÓN EN UNA ASIGNATURA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Metacognitive abilities of prospective early childhood education teachers in a mathematics education subject

Arnal-Palacián, M.[a], Kusaka, S. [b]. y Oller-Marcén, A.M. [a]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Naruto University of Education

Las habilidades metacognitivas son la capacidad para comprender, supervisar y regular los procesos cognitivos. Sobre este constructo se vienen realizando estudios físicos y prácticos desde la década de 1970 (Kusaka y Ndihokubwayo, 2022). En educación matemática, las investigaciones se han focalizado en su relación con la resolución de problemas (Schoenfeld, 1983). A nivel institucional, la OCDE esboza una visión de la educación futura en el que estas habilidades se destacan como una competencia importante a desarrollar durante la educación escolar (OCDE, 2018). Así, cobra especial importancia la investigación sobre habilidades metacognitivas de futuros docentes. En el presente trabajo se pretende comenzar a indagar en este aspecto en el ámbito de la formación de profesorado de Educación Infantil (EI) y en el contexto concreto de una asignatura sobre educación matemática. Para ello se aborda un estudio cuantitativo de carácter descriptivo y exploratorio basado en una adaptación del cuestionario MAI (*Metacognitive Awareness Inventory*) propuesta por Harrison y Vallín (2018). Los 19 ítems que conforman esta versión (frente a los 52 del original) se agrupan en dos dimensiones: conocimiento y regulación. En el estudio participaron 67 estudiantes del Grado en Magisterio en EI en la Universidad de Zaragoza que cursaban la asignatura Didáctica de las Matemáticas. Las puntuaciones obtenidas fueron altas globalmente en ambas dimensiones. En el caso del conocimiento se obtuvo una media de 4.31 y una desviación típica de 0.75; mientras que para la regulación estos valores fueron de 4.41 y 0.70, respectivamente. Un análisis de conglomerados ha permitido identificar dos perfiles entre los participantes. Además, aunque el tamaño y la composición de la muestra no permiten sacar conclusiones claras, los resultados obtenidos parecen sugerir algunas diferencias en función del sexo o la posesión de estudios previos. Será necesario realizar estudios a mayor escala que permitan profundizar en estos indicios.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Grupo de Investigación en Educación Matemática (S60_23R) del Gobierno de Aragón.

Referencias

Harrison, G. M. y Vallin, L. M. (2018). Evaluating the metacognitive awareness inventory using empirical factor-structure evidence. *Metacognition and Learning*, *13*, 15–38.

Kusaka, S. y Ndihokubwayo, K. (2022). Metacognitive strategies in solving mathematical word problems: a case of Rwandan primary school learners. *SN Social Science, 2*, 186. https://doi.org/10.1007/s43545-022-00495-5

OCDE. (2018). *The Future of Education and Skills: Education 2030 - The future we want*. OECD Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science, 7*(4), 329–363. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0704_3

Arnal-Palacián, M., Kusaka, S. y Oller-Marcén, A.M. (2024). Habilidades metacognitivas del profesorado en formación de educación infantil en una asignatura de educación matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 556). SEIEM.

DESEMPEÑO DE LOS CENTROS EDUCATIVOS EN EL ÁMBITO STEAM: ANÁLISIS DE LA PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

The Performance of Schools in the STEAM Field: Analysis of the Perception of Primary Education Teachers

Arrieta, N., Sagarduy, A. y Bilbao, I.

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Ciencias Experimentales y Sociales, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV / EHU)

Dentro del ámbito y las políticas educativas, la competencia matemática es esencial en la nueva competencia STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, por sus siglas en inglés). En la Comunidad Autónoma del País Vasco, en 2018 se introdujo la estrategia educativa STEAM Euskadi y en el reciente Decreto 77/2023 que establece el currículo de Educación Básica y su implantación en Euskadi, se ha definido la competencia STEM como competencia clave. La integración de este modelo, enfrenta diversos desafíos en la organización escolar, recursos, formación docente, y estrategias pedagógicas (Alsina y Silva-Hormazábal, 2023; Boice et al., 2021). Así, la competencia STEM, está desafiando la complejidad del currículo, planteando importantes retos en los entornos de enseñanza e instituciones educativas, y falta una visión global de su implementación en los centros educativos, especialmente en Primaria. Este trabajo explora la educación STEAM como campo de investigación emergente y destaca la necesidad de promover estrategias en todos los niveles educativos. Se realiza una investigación cuantitativa no experimental para analizar la perspectiva del profesorado de Primaria sobre el desempeño de los centros educativos en el ámbito STEAM, con 53 participantes. Con este propósito, se lleva a cabo un análisis de los componentes críticos fundamentales para el desarrollo de competencias STEAM, seguido de la elaboración de un cuestionario piloto basado en herramientas existentes (Jimenez Iglesias et al., 2018). La validación exploratoria del cuestionario muestra una alta homogeneidad y consistencia interna. Los resultados revelan que la percepción del profesorado tiende a ser moderadamente desfavorable, particularmente en relación a la conexión con profesionales de la industria, la formación docente, la infraestructura escolar y la coeducación. No obstante, se observa una percepción positiva en relación a la implementación de metodologías activas, el liderazgo y las conexiones comunitarias. No se hallaron diferencias significativas en la percepción según identidad de género o experiencia docente, pero sí en función del tipo de centro. En futuras investigaciones cabría ampliar el tamaño de la muestra y realizar ajustes en el cuestionario para fortalecer su validez y la generalización de los resultados.

Referencias

Alsina, Á. y Silva-Hormazábal, M. (2023). Promoviendo la formación del profesorado de matemáticas para la sostenibilidad desde un enfoque STEAM. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, *23*, 105-125. https://doi.org/10.35763/aiem23.5402

Boice, K.L., Jackson, J.R., Alemdar, M., Rao, A.E., Grossman, S. y Usselman, M. (2021). Supporting Teachers on Their STEAM Journey: A Collaborative STEAM Teacher Training Program. *Education Sciences, 11*(3), 105. https://doi.org/10.3390/educsci11030105

Jiménez Iglesias, M., Faury, M., Iuliani, E., Billon, N. y Gras-Velázquez, A. (2018). *European STEM Schools Report: Key Elements and Criteria*. European Schoolnet.

Arrieta, N., Sagarduy, A. y Bilbao, I. (2024). Desempeño de los centros educativos en el ámbito STEAM: análisis de la percepción del profesorado de Educación Primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 557). SEIEM.

PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO SOBRE EL USO DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS EN UN PROYECTO STEAM

Teacher's perception of the use of mathematical processes in a STEAM project

Arrieta, I., Baro, I. e Izagirre, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

En las últimas décadas se ha comenzado a introducir en las escuelas la educación STEAM. Esta educación hace referencia a una manera de enseñar y aprender integrando disciplinas como la ciencia, tecnología, ingeniería, las artes y las matemáticas de una forma eminentemente práctica y resolviendo problemas reales para evitar que se vean como ámbitos aislados y sin ninguna aplicación real (Moore y Smith, 2014).

Por otro lado, la matemática es, sobre todo, saber hacer, una ciencia en la que el método predomina claramente sobre el contenido (Guzmán, 2001). Por este motivo, el autor considera que los procesos de pensamiento matemático son el centro de la educación matemática. En esta línea, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) estableció cinco procesos matemáticos: la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, la representación y las conexiones. Este nuevo planteamiento curricular, pues, implica partir de un enfoque mucho más globalizado que no se limite a la enseñanza de los contenidos de forma parcelada, sino trabajarlos de forma integrada, explorando cómo se potencian unos con otros (Alsina, 2020).

De este modo, el objetivo de este trabajo es estudiar la percepción del profesorado sobre los procesos matemáticos que se pueden trabajar en un proyecto STEAM titulado "Estudio del suelo". Con este fin, se ha llevado a cabo un estudio de caso donde se ha realizado una entrevista semi-estructurada a la jefa de estudios y a una tutora de 4º de Primaria (máximas responsables del diseño del proyecto) de un colegio público situado en la costa de Guipúzcoa.

El análisis de las entrevistas muestra que, según las entrevistadas, utilizan la resolución de problemas en las actividades del proyecto, haciendo un especial hincapié en actividades que planteen al alumnado la oportunidad de resolverlos in situ, pero, a su vez, llama la atención que no plantean la incorporación del resto de procesos matemáticos a lo largo de todo el proyecto, ni si quiera el de conexión, implícito en cierta manera a los proyectos STEAM. Así, concluimos que la percepción de las entrevistadas es que emplean un único proceso matemático, el más conocido actualmente, pero como futuro trabajo de investigación se plantea la necesidad de contrastar si esa percepción se refleja en la realidad o simplemente se debe a un desconocimiento de los procesos matemáticos.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por el proyecto de investigación Hezkuntza23/01 y el grupo GIU21/031

Referencias

Alsina, Á. (2020). Conexiones matemáticas a través de actividades STEAM. *Unión, 58*, 168-190.

Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma, 19*, 5-25.

Moore, T. J. y Smith, K. A. (2014). Advancing the State of the Art of STEM Integration. *Journal of STEM Education: Innovations and Research, 15(1),* 5-10.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Arrieta, I., Baro, I. e Izagirre, A. (2024). Percepción del profesorado sobre el uso de los procesos matemáticos en un proyecto STEAM. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 558). SEIEM.

DESCRIPCIÓN DE CASO DEL USO DE LAS DISTINTAS REPRESENTACIONES DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN QUINTO DE PRIMARIA

Case description of the use of different representations of rational numbers in the fifth grade of primary school

Baro, I., Izagirre, A. y Arrieta, I.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

La educación interdisciplinar, protagonista en la última década, pretende ofrecer al alumnado herramientas para lidiar situaciones de la vida cotidiana (Alsina, 2019). Situaciones o conceptos que en ocasiones pueden ser elementales como son los números racionales, resultan ser uno de los conceptos matemáticos más complejos en educación primaria manifestando por parte del alumnado dificultades para representarlos y operar con ellos (Gónzalez-Forte, et al., 2022). Según estos autores, muchos errores se deben a la extensión de las reglas de los números naturales a los racionales.

Por consiguiente, el objetivo de este trabajo es analizar el tipo de representaciones de los números racionales que el profesorado de educación primaria tiene en cuenta a la hora de diseñar e implementar un proyecto STEAM que cumpla con las condiciones curriculares del ciclo superior y que use el entorno natural cercano, en este caso, un huerto. Para ello, desde un enfoque cualitativo, se ha llevado a cabo un estudio de caso en un colegio público de San Sebastián (Guipúzcoa) y se han analizado las respuestas dadas por dos profesoras de quinto de Educación Primaria, por medio de una entrevista semi-estructurada.

Los resultados muestran que el profesorado manifiesta la posibilidad de trabajar los números racionales en un entorno natural como es el huerto. De hecho, afirma que el alumnado de quinto de primaria trabaja las proporciones mediante el porcentaje de la cantidad de cada verdura que hay en el huerto (brócoli, lechuga, etc.); verdura que fue plantada por ellas/os mismas/os. Igualmente, afirman que los números racionales son trabajados por medio de la elaboración de ungüentos en jarros de cristal utilizando las plantas del huerto (lavanda, caléndula, etc.), para cuyas elaboraciones debieron seguir diferentes recetas donde se indicaban las cantidades mediante fracciones de hojas/flores y aceite.

En consecuencia, se aprecia cómo el profesorado plantea distintos tipos de representación de los números racionales por medio de porcentajes y fracciones en situaciones relacionados con la vida cotidiana y en un entorno STEAM.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por el proyecto de investigación Hezkuntza23/01 y el grupo GIU21/031.

Referencias

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Editorial Graó.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022) Profiles in understanding operations with rational numbers, *Mathematical Thinking and Learning*, *24*(3), 230-247. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1882287

Baro, I., Izagirre, A. y Arrieta, I. (2024). Descripción de caso del uso de las distintas representaciones de los números racionales en quinto de primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 559). SEIEM.

PUENTES ENTRE INVESTIGACIÓN Y TRANSFERENCIA: EL PROYECTO LABINQUIRY EN SECUNDARIA

Building bridges from research to dissemination: LabInquiry project at secondary school level

Barquero, B.[a], Beltrán-Pellicer, P.[b], López-Serentill, P.[c], Marí, M.[a,d] y Vásquez, S.[a,e]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universidad de Zaragoza, [c]Universitat de Girona, [d]European International School of Barcelona, [e]Escola Natzaret Esplugues de Llobregat

El problema de la transferencia de resultados generados por la investigación a la sociedad y a la comunidad educativa no es un asunto fácil. El trabajo colaborativo entre investigadores y docentes es clave para que las infraestructuras producidas desde la investigación puedan ser adaptadas y desarrolladas para poder ser efectivamente llevadas al aula. En este póster abordamos cuestiones relativas a qué infraestructura matemático-didáctica es necesaria, y nos proponemos investigar sobre qué condiciones facilitan la transferencia de propuestas educativas a profesores no investigadores y qué tipo de colaboración se puede establecer para sostener dicha transferencia. Nos centramos en el caso del proyecto LabInquiry, un proyecto de prueba de concepto en educación, cuyo objetivo es desarrollar, juntamente con equipos de docentes, diseños didácticos basados en los *recorridos de estudio e investigación* (REI) (Bosch, 2018), tal como se proponen desde la Teoría Antropológica de los Didáctico, y siguiendo una metodología de ingeniería didáctica para sus sucesivas adaptaciones.

Presentamos los resultados de estas adaptaciones de uno de los REI piloto de LabInquiry para implementar situaciones de aprendizaje en la Educación Secundaria Obligatoria. Este REI parte de una cuestión inicial sobre la seguridad de las contraseñas: ¿Por qué nos recomiendan poner cifras y caracteres especiales en las contraseñas? Para poder abordar esta cuestión, la situación se inicia proponiendo el estudio de distintos tipos de candados (con números, fechas, letras, direcciones, etc.) con el objetivo de distinguir cuál de ellos es más seguro (Vásquez et al., 2021). El trabajo de modelización matemática que se genera y se analiza en este trabajo, al describir y contabilizar el número de códigos que admite cada tipo de candado y el tiempo que tardarían en abrirse, sirve de base para estudiar problemas de contar más complejos, como es el caso de las contraseñas.

Discutimos los resultados de la implementación de este REI en cuatro centros de Secundaria de Cataluña, con estudiantes de 3º y 4º de la ESO y distintos perfiles de docentes. Para las experimentaciones, el equipo de LabInquiry ha facilitado un Google Classroom con material para los docentes, estudiantes y observadores, que se ha adaptado a las condiciones concretas de cada centro. Las implementaciones se han acompañado a través de un grupo de Telegram que facilitaba el intercambio de experiencias, dudas y cuestiones emergidas durante las experimentaciones. Los resultados muestran qué elementos han sido claves en la creación de esta infraestructura de transferencia, qué limitaciones han aparecido, así como se analizan diversas cuestiones profesionales que han surgido en la colaboración entre docentes e investigadores.

Referencias

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. de Souza y M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians* (pp. 4001–4022). World Scientific Publishing.

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (2021). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621 – 628). Valencia: SEIEM.

Benet-Vidal, A., López-Iñesta, E., Sanz, María T., García-Costa, D. y Grimaldo, F. (2024). Representaciones gráficas para la resolución de problemas aritméticos en tercero de primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 560). SEIEM.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN TERCERO DE PRIMARIA

Graphic representations for solving arithmetic problems in third grade

Benet-Vidal, A., López-Iñesta, E., Sanz, María T., García-Costa, D. y Grimaldo, F.

Universitat de València

El alumnado de Educación Primaria al comenzar a resolver problemas matemáticos se enfrenta a desafíos como el aprendizaje de técnicas a utilizar (por ejemplo, sumar o restar) y la interpretación del problema en sí. Además, en ocasiones, el enunciado de los problemas resulta complejo debido a: 1) las palabras empleadas y sus aspectos léxicos y morfológicos; 2) las cantidades y sus relaciones; y 3) la relación entre estos dos aspectos anteriores (Daroczy et al., 2015).

Para superar estas dificultades, se trabaja conjuntamente la lectura y la resolución de problemas. En este sentido, las fases de Pólya (1945) siguen vigentes y se relacionan con la definición de lectura de Santiago et al. (2007) que incluye un proceso de abstracción, análisis, síntesis, inferencia, predicción y comparación. Así se ponen en juego los conocimientos, intereses y estrategias del lector o lectora, con los aspectos que proporciona el texto, en unas circunstancias determinadas. De esta forma, la lectura se torna una interacción entre lector, texto y contexto que combinada con un método gráfico puede mejorar la interpretación de enunciados y la resolución de problemas.

El objetivo del trabajo consiste en analizar la resolución de varios problemas de matemáticas de alumnado de Educación Primaria después de la explicación de un método que emplea técnicas basadas en habilidad lectora y unas representaciones gráficas concretas denominadas grafos. La metodología consiste en leer de manera analítica el enunciado del problema y obtener la información relevante descomponiendo el enunciado en proposiciones u oraciones. Se obtienen las cantidades del texto (datos e incógnitas) y se establecen las relaciones existentes entre las cantidades mediante diagramas causales y se resuelve el problema. Como caso de estudio, se aplica la metodología en un aula tercero de Primeria de Valencia (25 estudiantes). Se estudian las variables estrategia de resolución, tipo de grafo construido, fallos cometidos y resultado obtenido.

El análisis de las resoluciones confirma la mejora de la comprensión del enunciado y la realización de problemas después de la intervención. Los resultados sugieren que la sinergia de estrategias y representaciones gráficas contribuye a entender mejor los enunciados y los conceptos matemáticos involucrados. Se observa que el alumnado comprende mejor que no existe una única opción de plantear y esto influye positivamente en la actitud y la creatividad del alumnado al resolver problemas.

Referencias

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D. y Nuerk, H. C. (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology,* 6, 348. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348

Santiago, Á. W., Castillo, M. C. y Morales, D. L. (2007). Estrategias y enseñanza-aprendizaje de la lectura. *Folios*, (26), 27-38. https://doi.org/10.17227/01234870.26folios27.38

Benet-Vidal, A., López-Iñesta, E., Sanz, María T., García-Costa, D. y Grimaldo, F. (2024). Representaciones gráficas para la resolución de problemas aritméticos en tercero de primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 561). SEIEM.

DIFICULTADES EN LA APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN EL CONTEXTO DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA EN REGISTRO GRÁFICO

Difficulties in the application of the concept of derivative in the context of the instant speed in graphic register

[a]Bermejo-Luna, M. y Sánchez-Matamoros García, G.

Universidad de Sevilla

Dentro de las STEM (*Science, Technology, Engineering y Mathematics*) se está investigando sobre la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes y su aplicación a otras áreas (Goos et al., 2023). Concretamente, si nos centramos en las Matemáticas y la Física observamos que son muchas las investigaciones centradas en establecer cómo se producen las conexiones entre ambas. El objetivo de este trabajo es identificar las dificultades observadas en la resolución de una tarea sobre la velocidad instantánea presentada en registro gráfico por estudiantes de Bachillerato. El marco teórico utilizado es el propuesto por Rebello et al. (2017) que define la transferencia de conocimiento como la aplicación de lo aprendido en una situación en otra situación diferente. Esta transferencia sólo puede producirse si se ha construido un esquema robusto en el dominio inicial del aprendizaje. Esta investigación se llevó a cabo con estudiantes de Bachillerato (17-18 años) que respondieron a una tarea (que formaba parte de un cuestionario más amplio) en las que se les preguntaba sobre la velocidad en un instante de tiempo desde la gráfica de posición – tiempo. El enfoque metodológico ha sido cualitativo e inductivo. Respondieron la tarea 82 estudiantes. Y de ellos, sólo el 6% la respondieron de forma correcta, estableciendo la conexión entre las Matemáticas y la Física. Las principales dificultades que mostraron los estudiantes de Bachillerato fueron: realizar el cociente de la posición con respecto al tiempo del momento pedido, confundir la velocidad media con la velocidad instantánea, confundir el valor de la ordenada de la recta tangente con la pendiente de la recta tangente y un mal uso de las unidades. Los estudiantes, pese a haber estudiado el concepto de derivada en un punto en el registro gráfico, no son capaces de aplicarlo en otra situación distinta. Esto puede ocasionar futuras dificultades en el estudio de las disciplinas STEM. Una de las causas de estas dificultades puede estar en el currículo español para las materias de Matemáticas y Física, en el que la relación que se establece de manera histórica entre ambas materias aparece de forma poco explícita (Bermejo-Luna y Sánchez-Matamoros, 2022). Es la separación en su enseñanza la que hace que un mismo objeto sea identificado como distinto por los estudiantes dependiendo del contexto en el que se estudie.

Referencias

Bermejo-Luna, M. V. y Sánchez-Matamoros, G. (2022). El esquema de derivada en la respuesta de un estudiante a tareas de cinemática: estudio de caso. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 169-177). SEIEM.

Goos, M., Carreira, S. y Namukasa, I.K. Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. *ZDM Mathematics Education 55*, 1199–1217 (2023). https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z

Rebello, N. S., Cui, L., Bennett, A. G., Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2017). Transfer of Learning in Problem Solving in the Context of Mathematics and Physics. *Learning to Solve Complex Scientific Problems*, 223-246. https://doi.org/10.4324/9781315091938-10

Bermejo-Luna, M. y Sánchez-Matamoros García, G. (2024). Dificultades en la aplicación del concepto de derivada en el contexto de la velocidad instantánea en registro gráfico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 562). SEIEM.

LA FORMA GEOMÉTRICA EN EL DIBUJO INFANTIL

Geometric shape in children´s drawing

Bilbao, I., Sagarduy, A. y Arrieta, N.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

El dibujo es una herramienta que posibilita el estudio de la comprensión infantil en el ámbito de la educación matemática desde la primera infancia; por ejemplo, con relación a la comprensión numérica, al desarrollo del pensamiento lógico, y también, en lo concerniente a la comprensión de la forma geométrica (Alsina, 2019). En este trabajo de investigación se examinó el empleo espontáneo de formas geométricas básicas en los dibujos elaborados por una muestra de niños y niñas de primer curso de Educación Primaria (6-7 años). Con este fin, se analizaron 57 dibujos creados por el alumnado de dos centros educativos del municipio de Munguía (Vizcaya) siguiendo los criterios publicados en la investigación previa (Villarroel y Sanz, 2016). En concreto se estudió como el alumnado de la muestra representó tres formas geométricas: las curvas cerradas, los cuadriláteros y los triángulos. Los resultados indican que 9 de cada 10 dibujos analizados presentan curvas cerradas completas, siendo esta la forma geométrica predominante en la muestra. Por otro lado, los cuadriláteros completos aparecen en la mitad de los dibujos de la muestra, y los triángulos completos son la figura geométrica menos representada, observándose en 1 de cada 4 dibujos. Estos resultados indican que los niños y las niñas de la muestra estudiada recurren de manera espontánea a la forma geométrica para completar sus representaciones, aunque cada forma geométrica se muestra con frecuencias de uso diferente. En términos generales estas ideas están en consonancia con los resultados de la investigación previa que señala que antes incluso del inicio de la educación formal en el ámbito de la geometría, el alumnado cuenta con un conocimiento intuitivo básico de la forma geométrica que le permite utilizar este recurso de manera espontánea en sus dibujos (Alsina, 2018; García et al. 2015; Castro et al., 2002). Este enfoque desde la mirada infantil contribuye con nuevas evidencias que permiten reforzar las aportaciones realizadas en investigaciones anteriores, de esta manera ofrecer hallazgos para aplicar en futuras investigaciones para poder mejorar las prácticas educativas.

Referencias

Alsina, A. (2018). La adquisición de conocimientos matemáticos intuitivos e informales en la Escuela Infantil: el papel de los materiales manipulativos. *RELAdEI. Revista Latinoamericana De Educación Infantil, 5*(2), 127–136. Recuperado a partir de https://reladei.com/index.php/reladei/article/view/208

Alsina, A. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática En La Infancia, 8*(1), 1–19. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19

Castro Martínez, E., Olmo Romero, M. Á. D. y Castro Martínez, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil.* Universidad de Granada. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de la Matemática.

García Rozo, M., Villegas, Mª M. y González, F. (2015). La noción del espacio en la primera infancia: Un análisis desde los dibujos infantiles. *Paradígma, 36*(2), 223-245. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512015000200011&lng=es&tlng=es.

Villarroel, J. D. y Sanz Ortega, O. (2016). A study regarding the spontaneous use of geometric shapes in young children's drawings. *Educational Studies in Mathematics*, 94, 85-95.

Bilbao, I., Sagarduy, A. y Arrieta, N. (2024). La forma geométrica en el dibujo infantil. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 563). SEIEM.

PERCEPCIONES DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS SOBRE LA ENSEÑANZA A ESTUDIANTES CON AUTISMO

Perceptions of Mathematics Teachers on Teaching Students with Autism

Bolado-Peña, A.[a], Van Vaerenbergh, S.[b] y González-Bernal, J.[a]

[a]Universidad de Burgos, [b]Universidad de Cantabria

En la actualidad, la educación inclusiva es un tema prioritario en los sistemas educativos a nivel mundial, especialmente en relación con el alumnado con Trastorno del Espectro Autista (TEA). La enseñanza de las matemáticas a este alumnado presenta desafíos únicos que requieren metodologías específicas. Sin embargo, la literatura de investigación de los últimos años reconoce carencias importantes en la formación inicial del profesorado sobre las necesidades educativas del alumnado con TEA (Hart Barnett y Cleary, 2015). Este estudio se propone investigar las prácticas actuales y las necesidades formativas de los docentes de matemáticas, con el fin de mejorar la calidad educativa para este alumnado.

El instrumento de recogida de datos empleado en este estudio fue el cuestionario "INTEA", que incluye preguntas basadas en el *Index for Inclusion* (Booth y Ainscow, 2002) y preguntas específicas sobre percepciones del profesorado sobre la enseñanza de las matemáticas a alumnado con TEA. El cuestionario se distribuyó por correo electrónico a centros educativos de todas las comunidades autónomas de España, y la recogida de datos se realizó durante tres meses, de febrero a abril de 2024. Participaron 429 docentes de matemáticas de todas las etapas educativas, incluyendo 308 docentes de educación infantil y primaria, y 122 de educación secundaria, bachillerato y formación profesional. Las preguntas abordan diversos aspectos, como las prácticas habituales del profesorado y su familiaridad con metodologías específicas para la enseñanza de matemáticas a alumnado con TEA.

En este estudio se presentan los primeros resultados del estudio, centrados en las creencias, prácticas docentes y conocimientos del profesorado sobre la enseñanza de las matemáticas a alumnado con TEA. Se analizan las respuestas relacionadas con el rendimiento académico de estos estudiantes, la percepción del impacto de las competencias matemáticas en su autonomía y calidad de vida, y la importancia de su inclusión en clases regulares. Asimismo, se explora el grado de conocimiento y familiaridad del profesorado con metodologías específicas para la enseñanza de matemáticas a este alumnado, y las estrategias y adaptaciones curriculares que emplean para facilitar su aprendizaje. Los resultados de este análisis cualitativo ofrecen una visión preliminar sobre las necesidades formativas del profesorado, destacando áreas clave para el desarrollo de programas de formación específicos que mejoren la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con TEA.

Agradecimientos

Trabajo realizado bajo el proyecto PID2022-136246NB-I00 financiado por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 / FEDER, UE.

Referencias

Hart Barnett, J. E. y Cleary, S. (2015). Review of evidence-based mathematics interventions for students with autism spectrum disorders. *Education and training in autism and developmental disabilities, 50*(2) 172-185.

Booth, T. y Ainscow, M. (2002). *Index for inclusion: developing learning and participation in schools.* London: Centre for Studies on Inclusive Education (CSIE).

Bolado-Peña, A., Van Vaerenbergh, S. y González-Bernal, J. (2024). Percepciones del profesorado de matemáticas sobre la enseñanza a estudiantes con autismo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 564). SEIEM.

ANÁLISIS DE LA DISCUSIÓN EN EL AULA SOBRE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE FERMI EN GRUPO

Analysis of a class discussion after solving a Fermi problem in groups

Brunet-Biarnes, M. y Albarracín, L.

Universitat Autònoma de Barcelona

En los últimos años, ha crecido el interés por incorporar actividades de modelización matemática en diferentes niveles educativos para mostrar al alumnado la relación entre las matemáticas y su entorno. Un ejemplo de problemas que requieren un enfoque basado en modelos matemáticos y que se pueden trabajar en el aula de primaria son los problemas de Fermi, basados en resolver problemas en contexto real usando estimaciones razonadas (Albarracín y Gorgorió, 2014).

En esta investigación nos centramos en analizar la puesta en común entre estudiantes de educación primeria (4.º curso) después de trabajar en un problema de Fermi. La actividad en el aula se presenta en varias fases, partiendo de un trabajo individual en el que cada alumno propone su propio plan de acción para resolver el problema. Después los alumnos trabajan en pequeños grupos (de 4 alumnos), comparten sus propuestas y acuerdan un plan de acción grupal que acaba basándose en un modelo matemático y que ejecutan conjuntamente. Los estudiantes entregan un informe razonado con los métodos utilizados y la solución alcanzada. Por último, se plantea una discusión final donde se explican y comparan las estrategias utilizadas y modelos matemáticos generados para resolver el problema. Un elemento clave de esta última fase es el docente, que es la persona encargada de gestionar la discusión: gestiona los turnos de palabra, promueve la retroalimentación, formula preguntas, etc. (Smith y Stein, 2016).

El objetivo principal de la investigación es caracterizar la puesta en común como actividad generadora de oportunidades de aprendizaje sobre modelización matemática en primaria a partir del trabajo de resolución de un problema de Fermi. La muestra consta de 24 estudiantes de quinto de primaria. Antes de la recogida de datos, se estructura la discusión utilizando las categorías de preguntas que puede formular un docente de Boaler y Brodie (2004). Se describen las interacciones entre grupos y la forma en la que responden a las solicitudes del profesor que guía la puesta en común. Los resultados muestran el potencial de la puesta en común para evidenciar la presencia de actividad de modelización entre los estudiantes. Destaca el papel clave del profesor como guía de la puesta en común y como agente que promueve que los grupos de trabajo contrasten sus modelos.

Esta investigación contribuye a mejorar nuestra comprensión de cómo fomentar las discusiones efectivas en el aula para promover el cuestionamiento y la revisión de las estrategias utilizadas por los alumnos poniendo el foco en la validación de modelos matemáticos.

Referencias

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. Educational Studies in Mathematics, 86(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Boaler, J. y Brodie, K. (2004). The importance of Depth and Breadth in the Analysis of Teaching: A Framework for Analyzing Teacher Questions. En *Proceedings of the 26th Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* IGPME.

Smith, M. y Stein, M. (2016). 5 *Prácticas para Orquestar Discusiones Matemáticas Productivas*. NCTM.

Brunet-Biarnes, M. y Albarracín L. (2024). Análisis de la discusión en el aula sobre la resolución de un problema de Fermi en grupo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 565). SEIEM.

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN EN PROBLEMAS DE FRACCIONES EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Solving strategies in fraction problems in secondary school

Caballero-Carrasco, A., Galán-Corbacho, E., Casas-García, L. M. y Soto-Ardila, L. M.

Universidad de Extremadura

El concepto de fracción es difícil de aprender por el alumnado y se acentúa con la multiplicidad de significados que posee (Pruzzo, 2012). Un obstáculo para su comprensión es la ausencia de cotidianidad en su contextualización (Jaimes et al., 2021) y la utilización de los problemas como tareas de consolidación (Avella et al., 2017). Además, el docente suele establecer un procedimiento o estrategia determinado para la resolución de problemas matemáticos de fracciones, generando una estrecha relación entre el tipo de instrucción recibida y la estrategia empleada por el estudiante (Copur-Gencturck y Doleck, 2021). Ello deriva en una resolución memorística, mecanizada y reproductiva de los problemas.

El objetivo de este estudio es analizar el éxito/fracaso, el número de estrategias desarrolladas y su tipología en la resolución de problemas de fracciones del alumnado de 4º de ESO.

Se desarrolla una investigación no experimental a través de un estudio descriptivo y la complementariedad de metodologías cuantitativa y cualitativa. La muestra, conformada mediante un muestreo no probabilístico ocasional, está constituida por 180 resoluciones de problemas matemáticos de fracciones de 60 estudiantes de 4º de ESO matriculados en la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. El instrumento empleado fue una prueba criterial constituida por tres problemas verbales de fracciones (Copur-Gencturk y Doleck, 2021).

Los estudiantes utilizan mayormente estrategias mostradas previamente (formales), obteniendo mayor éxito cuando emplean estrategias informales de resolución. Además, el éxito es mayor cuando emplean dos o más estrategias y aún mayor si las estrategias empleadas son la combinación de las estrategias fracción unidad y razonamiento proporcional. Estos resultados evidencian la necesidad de potenciar las estrategias personales e informales en la resolución de problemas, así como de instar a los estudiantes al diseño de diversas estrategias de resolución, ejecutando una en primer lugar y servir las terceras para valorar y comprobar su corrección.

Esta investigación fue financiada por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y Junta de Extremadura, proyecto GR21093, y por los proyectos PID2022-139684NB-I00 y PID2022-140601OA-I00 de la Agencia Estatal de Investigación.

Referencias

Avella, D., Salazar, F. y Miguez, J. (2017). Resolución de problemas matemáticos con fracciones enfocados al contexto escolar. *Educación y Ciencia, 20*, 147–167.

Copur-Gencturk, Y. y Doleck, T. (2021). Linking teachers' solution strategies to their performance on fraction word problems. *Teaching and Teacher Education, 101*,103314

Jaimes, J., González, N. y Carvajal, C. (2021). Aprendizaje del objeto fracción en un contexto rural. *Boletín Redipe, 10*(8), 430–452.

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Pilquen-Sección Psicopedagogía, 8*, 6.

Caballero-Carrasco, A., Galán-Corbacho, E., Casas-García, L. M. y Soto-Ardila, L. M. (2024). Estrategias de resolución en problemas de fracciones en Educación Secundaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 566). SEIEM.

UTILIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN SITUACIONAL EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO REALISTA

Use of Situational Information in the Resolutions of a Realistic Mathematical Problem

Cáceres-García, M.J.[a], Sánchez-Barbero, B.[a] y Antequera-Barroso, J.A. [b]

[a] Universidad de Salamanca, [b] Universidad de Extremadura

Tanto la investigación como las directrices curriculares de varios países sugieren vincular las matemáticas con situaciones reales, este aspecto debería favorecerse desde la formación inicial de docentes. En este trabajo entendemos por problemas verbales realistas aquellos que reflejan eventos reales y que requieren de razonamiento sobre la información situacional junto con herramientas matemáticas para su resolución (Vicente y Orrantia, 2007). Es sabido que soluciones matemáticamente correctas pueden carecer de sentido para la situación real planteada (Verschaffel et al., 1994). Algunas investigaciones previas mostraron la baja percepción del realismo de estudiantes para maestro cuando resolvían problemas aritméticos verbales. En este sentido, en este trabajo se analiza la percepción de realismo de estudiantes para maestro a partir de las resoluciones que dieron al problema *"Esteban ha comprado 4 tablones de 2,5 metros cada uno. ¿Cuántos tablones de 1 metro puede obtener de esos tablones?"*. Para el análisis se utilizó el sistema de categorías que Cáceres y Chamoso (2017) adaptaron de otras investigaciones y que incluía tres niveles de percepción de realismo en función de si la información situacional se consideraba tanto en el proceso de matematización como en el de interpretación del resultado en el contexto real, solo en uno de dichos procesos o en ninguno de ellos, según el ciclo de modelización de Maaß (2006). Los resultados mostraron la ausencia de resoluciones donde se alcanzara el mayor nivel de realismo, y solo un 37% incluyó aspectos realistas, en concreto un 26% de las respuestas dadas consideró la información situacional en el proceso de matematización y un 7% en el de interpretación de la solución en el contexto real. Estos resultados, además de tener implicaciones educativas, abren camino para futuras investigaciones sobre percepción del realismo en otro tipo de tareas o la reflexión de los estudiantes para maestro sobre la conveniencia o no de utilizar tareas realistas durante la Educación Primaria.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto REALINTER (PIC-2022-05) financiado por Universidad de Salamanca y está respaldado por el GIRME (Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa).

Referencias

Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2017). Percepción del realismo en las resoluciones de estudiantes para maestro de una tarea geométrica realista. *VIII CIBEM. Libro de actas* (pp. 136–144). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education, 38*(2), 113–142.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lassure, S. (1994). Realistic consideration in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, *4*(4), 273–294.

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación*, *19*(1), 61–85.

Cáceres-García, M.J., Sánchez-Barbero, B. y Antequera-Barroso, J.A. (2024). Utilización de la información situacional en la resolución de un problema matemático realista. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 567). SEIEM.

ESTRATEGIAS DE ASOCIACIÓN DE ECUACIONES A PROBLEMAS VERBALES

Strategies for associating equations with word problems

Campos, C.[a], González-Calero, J. A.[b], Arnau, D.[a] y García-Moreno, M. A.[a]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Castilla - La Mancha

El aprendizaje del lenguaje algebraico y su utilización para la resolución de problemas verbales es uno de los contenidos esenciales en secundaria. Habitualmente, para abordar estas tareas, se traduce el enunciado al lenguaje algebraico para, posteriormente, resolver la ecuación una vez abandonada parte de la semántica del texto inicial. Sin embargo, es conocida la dificultad que experimenta el alumnado de secundaria cuando resuelve problemas de manera algebraica.

Según Duval (2017), la utilización de representaciones semióticas y la posibilidad de realizar transformaciones de las representaciones semióticas son la base del razonamiento matemático. Este autor distingue dos tipos principales de transformaciones de las representaciones semióticas: los tratamientos, que se realizan dentro de un mismo registro semiótico, y las conversiones, que involucran dos registros semióticos diferentes. Las conversiones a su vez pueden dividirse en congruentes y no congruentes. Las conversiones congruentes son aquellas en las que es posible realizar una *codificación directa,* cambiando unos signos del registro inicial por otros signos del registro final. Las conversiones no congruentes son aquellas en las que no es posible realizar la codificación directa y resultan significativamente más complejas. En el caso de la resolución algebraica de problemas verbales resulta generalmente necesario realizar conversiones no congruentes seguidas de tratamientos sobre las expresiones algebraicas.

Desde esta perspectiva, la conversión se realiza siempre desde el lenguaje verbal al lenguaje algebraico. En la investigación de la que presentamos parte de resultados, pretendemos analizar los procesos de conversiones no congruentes asociadas a la resolución algebraica de problemas. En concreto plantemos tareas donde la conversión puede realizarse tanto del lenguaje natural al lenguaje algebraico como viceversa. Con este fin diseñamos tareas donde se ofrecía un enunciado y se pedía identificar la ecuación, entre cuatro posibles, que describía la situación planteada.

A modo de pilotaje, y con la finalidad de describir las estrategias de resolución empleadas, estudiantes de 4.º curso de secundaria resolvieron estas tareas por parejas mientras se registraba el proceso de resolución, tanto escrito como oralmente. Como variable independiente se consideró la utilización o no de una ecuación considerada estándar como solución. De manera habitual, se observó que se mantenía el esquema de resolución típico donde se producía una ecuación a partir del enunciado (conversión) seguida de tratamientos dentro del registro algebraico. En menor medida se observaron otras estrategias en las que la identificación se apoyaba en conversiones desde el registro del álgebra al lenguaje natural sin necesidad de llevar a cabo conversiones.

Agradecimientos

Realizado al amparo del proyecto TED2021-129485B-C42, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia)

Referencias

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers to semiotic representations*. Springer International Publishing.

Campos, C., González-Calero, J. A., Arnau, D. y García-Moreno, M. A. (2024). Estrategias de asociación de ecuaciones a problemas verbales. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 568). SEIEM

ESTUDIO SOBRE LA EFICACIA DE LA DURACIÓN DE SESIONES ORIENTADAS AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Study on the effectiveness of the duration of sessions focused on computational thinking in teacher training

Campos, C.[a], del Olmo-Muñoz, J.[b], Diago, P. D.[a], González-Calero, J. A.[b]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Castilla – La Mancha

La nueva ley educativa (LOMLOE) introduce explícitamente el pensamiento computacional (PC) como una de las habilidades esenciales que deben ser desarrolladas en todos los niveles educativos no universitarios. Esta nueva exigencia hace necesario contemplar esta área dentro del programa educativo del profesorado en formación para que éstos puedan integrar de manera adecuada el PC en su futura labor de enseñanza en el aula.

Como parte de un proyecto de innovación orientado a futuros maestros de Educación Primaria, en la Facultat de Magisteri de la Universitat de València nos planteamos como objetivo cómo se debe llevar a cabo la instrucción del profesorado en formación para el desarrollo de propuestas de enseñanza relacionadas con el PC. En este trabajo presentamos una parte de los resultados de este proyecto, en especial, los que tienen como objetivo determinar la efectividad de sesiones de formación de diferentes duraciones. Con este fin, durante el curso 2023-2024 se diseñó un experimento piloto en el que se compararon dos propuestas formativas destinadas a dos grupos diferentes del Grado de Maestro de Educación Primaria. Uno de los grupos cursó ocho sesiones de formación sobre PC, en un contexto más específico de utilización de las TIC como recurso didáctico. El segundo grupo tuvo una formación más reducida, de tan solo dos sesiones, en un contexto más general sobre didáctica de las matemáticas. Con el fin de evaluar el resultado de las intervenciones, se midió en el alumnado el sentido de eficacia autopercibido en la utilización de la programación y el PC en su futura labor docente. Para ello se utilizó el cuestionario propuesto por Bean et al. (2015), en el que se evalúa la autopercepción del alumnado medida desde diferentes dimensiones, como la enseñanza de conceptos relacionados con el pensamiento computacional, o la enseñanza de la programación por bloques.

Los resultados muestran que, si bien el grupo con mayor formación presenta una mayor percepción de adquisición de competencias, también el alumnado que recibió un número de sesiones reducido muestra una mejora significativa en esta autopercepción. De este modo, ante la necesidad de proporcionar a los futuros docentes una formación en PC, los resultados de nuestro experimento piloto sugieren que incluso propuestas de corta duración aportan beneficios contrastables en los futuros maestros.

Agradecimientos

Realizado al amparo del proyecto TED2021-129485B-C42, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia) y del proyecto CIGE/2023/103 de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Bean, N., Weese, J., Feldhausen, R., y Bell, R. S. (2015). Starting from scratch: Developing a pre-service teacher training program in computational thinking. Presentado en 2015 IEEE Frontiers in Education Conferencae (FIE). https://doi.org/10.1109/fie.2015.7344237

Campos, C., del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D. y González-Calero, J. A. (2024). Estudio sobre la eficacia de la duración de sesiones orientadas al pensamiento computacional en la formación docente. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 569). SEIEM.

EVALUACIÓN DE LAS DISPOSICIONES DE PENSAMIENTO CRÍTICO ESTADÍSTICO GRÁFICO

Evaluation of dispositions to Statistical Graphic Critical Thinking

Casas-Rosal, J.C. [a], León-Mantero, C. [a], Gutiérrez-Rubio, D. [a] y Madrid, M.J. [b]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

La gran cantidad de información que reciben a diario las personas en la sociedad actual, unida a los avances proporcionados por la inteligencia artificial y a la difusión que ofrecen las redes sociales y otros medios de comunicación, otorgan una importancia vital al desarrollo del pensamiento crítico. Este puede definirse como un pensamiento razonable y reflexivo centrado en decidir qué creer o hacer (Ennis, 1993). Profundizando en este concepto, Ennis (2018) describió los conjuntos de disposiciones y habilidades que debe tener un pensador crítico, lo que permite desagregar este concepto y construir instrumentos de evaluación del pensamiento crítico.

Parte de la información que reciben diariamente las personas contiene falsedades que se difunden en formato de noticia y que tienen motivaciones políticas (Bennett y Livingston, 2018), y en estos casos la información estadística gráfica es un recurso recurrentemente usado debido a la dificultad que muestran muchas personas en su correcta interpretación (Glazer, 2011). El tipo de pensamiento que requieren las personas para evaluar este tipo de información se ha denominado pensamiento crítico estadístico gráfico (SGCT) (Casas-Rosal et al., 2024).

Por tanto, el objetivo de este trabajo es construir y validar un instrumento que permita evaluar las disposiciones de una persona cuando se enfrenta a desinformación que contiene información estadística gráfica. Por tanto, a partir del trabajo de Ennis (2018) se construyó un instrumento en el que se evaluaban cada una de las 11 disposiciones constitutivas de este tipo de pensamiento. Este cuestionario fue analizado y validado para estudiantes universitarios con diferentes muestras piloto y evaluado por un grupo de expertos.

Los resultados obtenidos son robustos y muestran la existencia de tres factores: la disposición para ser analítico, reflexivo y abierto a interpretaciones, la disposición a ser flexible para cambiar de opinión tras una primera conclusión errónea y la disposición a rectificar.

Agradecimientos

La investigación ha sido financiada con el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Córdoba.

Referencias

Bennett, W. L. y Livingston, S. (2018). The disinformation order: Disruptive communication and the decline of democratic institutions. European Journal of Communication, 33(2), 122–139. https://doi.org/10.1177/0267323118760317

Casas-Rosa, J.C., León-Mantero, C., Arencibia-Montero, O. y Gutiérrez-Rubio, D. (en prensa). Evaluation and improvement of statistical graphic critical thinking of preservice teachers. Teaching statistics.

Ennis, R. H. (1993). Critical thinking assessment. *Theory into practice*, *32*(3), 179-186.

Ennis, R. H. (2018). Critical thinking across the curriculum: A vision. *Topoi*, *37*, 165-184.

Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: A review of the literature. Studies in Science Education, 47(2), 183-210. https://doi.org/10.1080/03057267.2011.605307

Casas-Rosal, J. C., León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D. y Madrid, M. J. (2024). Evaluación de las disposiciones de pensamiento crítico estadístico gráfico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 570). SEIEM.

NOCIÓN DE ÁREA EN LAS DIRECTRICES CURRICULARES CHILENAS

Concept of Area in the Chilean Curriculum Guidelines

Caviedes, S[a], Pallauta, J.[a], Elgueda-Ibarra, M.[b] y Marquéz, M.[a]

[a]Universidad de Los Lagos, [b]Universidad de Granada

Las múltiples situaciones en las que la noción de área se manifiesta, junto con las diversas representaciones empleadas, ponen de relieve su complejidad (Gutiérrez, 2004). Variados estudios indican que los estudiantes y futuros maestros de Educación Primaria enfrentan desafíos y cometen errores al resolver problemas relacionados con el área, debido, en parte, a la falta de estrategias de resolución adecuadas (p.e. Caviedes et al., 2021). En Chile las directrices curriculares (MINEDUC, 2018) estructuran la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria (6 a 12 años) en torno a cinco temas: Números y operaciones, Patrones y álgebra, Geometría, Medición, y Datos y probabilidades. En algunos de estos ejes, se introduce la noción de área, ya sea como un concepto independiente o como un recurso para abordar otros temas. Por ejemplo, dicho concepto se emplea para representar gráficamente la aproximación fenomenológica de la fracción como parte-todo o para la construcción e interpretación de gráficos sectores.

La investigación sobre la noción de área en las directrices curriculares es escasa (Hong et al., 2018), y en Chile no se han encontrado estudios que aborden este tema de manera explícita. En este estudio se identifican criterios de idoneidad epistémica (Godino et al., 2023) vinculados a la noción de área en las directrices curriculares chilenas de Educación Primaria, en los ejes de Geometría y Medición. A partir de un análisis de contenido (Drisko y Maschi, 2016) se detecta que, las directrices curriculares chilenas no consideran situaciones problema que permitan relacionar y coordinar distintos significados de la noción de área. Evidenciando una baja idoneidad epistémica para tales directrices, y que sugieren la necesidad de integrar algunos indicadores para mejorar este aspecto.

Agradecimientos

Proyecto IVM16-23 “Conocimiento matemático y didáctico matemático de profesores de Educación Básica sobre nociones geométricas fundamentales”, Vicerrectoría de Investigación y Posgrado de la Universidad de Los Lagos, Chile.

Referencias

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Una aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213 – 220). SEIEM.

Drisko, J. W. y Maschi, T. (2016). *Content analysis*. Oxford University Press.

Godino, J., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia, 18*(1), 1-20. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Gutiérrez, A. (2004). Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas. En Luengo, R. (Eds.), *Líneas de investigación en educación matemática* (vol. 1, pp. 83-108). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Hong, D. S., Choi, K. M., Runnalls, C. y Hwang, J. (2018). Do textbooks address known learning challenges in area measurement? A comparative analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 30, 325-354. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0238-6

MINEDUC. (2018). *Bases curriculares Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Caviedes, S., Pallauta, J., Elgueda-Ibarra, M. y Márquez, M. (2024). Noción de área en las directrices curriculares chilenas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 571). SEIEM.

UN PROBLEMA DE GENERALIZACIÓN EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA DESDE LA INCLUSIÓN

A generalisation problem-solving in the primary education classroom through inclusion

Chico, A.[a], Robotti, E.[b], Climent N.[a] y Gómez-Hurtado, I.[a]

[a]Universidad de Huelva, [b]Universitá di Genova

Considerando que el docente requiere de conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas teniendo en cuenta la diversidad del aula, este estudio de caso se centra en la resolución de un problema de generalización por parte de un docente en un aula neurodiversa de educación primaria. Se trata de un colegio rural, con una clase compuesta por siete estudiantes (9-12 años), entre los que encontramos un alumno con trastorno del espectro autista. Nuestro objetivo es estudiar el conocimiento del docente cuando aborda la resolución de un problema de generalización matemática en un aula diversa.

Mediante la observación y videograbación de la sesión, se analizan las decisiones didácticas del docente atendiendo al conocimiento del profesor sobre el contenido y la educación inclusiva. Nos apoyamos en el modelo del conocimiento especializado del docente de matemáticas, MTSK (Carrillo et al., 2019), considerando que resolver problemas moviliza conocimiento matemático sobre los temas (KoT), conexiones entre contenidos (KSM), la práctica matemática (KPM), conocimiento sobre la enseñanza (KMT), las características del aprendizaje (KFLM) y los estándares de aprendizaje (KMLS). Paralelamente, tomamos de base los principios del Diseño Universal de Aprendizaje (CAST, 2018) para el estudio de la enseñanza desde una perspectiva inclusiva. Los principios de Compromiso, Representación, y Acción y Expresión, se estructuran en diferentes criterios que influyen en el proceso de resolución de problemas al describir múltiples formas de motivación, de presentación de la información, y de procesamiento y expresión.

El análisis de las decisiones del docente muestra evidencias de conocimiento sobre el desarrollo de procesos de generalización y estrategias de resolución de problemas (KPM) y sobre las características del alumnado (KFLM). Destacamos la diversidad de indicadores de conocimiento de estrategias de enseñanza y ejemplos, muy vinculadas con la representación y la búsqueda de regularidades (KMT). Por otro lado, el análisis señala indicadores de inclusión en términos de participación del alumnado en la resolución, la gestión de sus diferentes estrategias y la incorporación de elementos de comunicación que han impulsado el desarrollo de distintas hipótesis de generalización. Se observa un predominio de descriptores de métodos de representación durante la comprensión, ejecución y revisión del problema. Nuestro estudio pretende continuar desarrollando una perspectiva dual que aúne el conocimiento especializado y las prácticas inclusivas. Destacamos la necesidad de trasladar los resultados de la investigación a la formación docente, con objetivo de propiciar el conocimiento sobre metodologías didácticas que contemplen la neurodiversidad del aula de primaria.

Referencias

CAST (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. CAST.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Montes, M.Á. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu, B. (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*. Research in Mathematics Education (pp. 297–316). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_16

Chico, A., Robotti, E., Climent N. y Gómez-Hurtado, I. (2024). Discontinuidades en el proceso de formulación y resolución de problemas de futuros maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 572). SEIEM.

DISCONTINUIDADES EN EL PROCESO DE FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FUTUROS MAESTROS

Discontinuities in the process of problem posing and solving by prospective teachers

Chico, A.[a], Martín-Díaz, J.P.[a], Pascual, I.[b] y Montes, M.[a]

[a]Universidad de Huelva, [b]Universidad de Sevilla

La formulación de problemas en general, y más en concreto, la competencia profesional en formulación de problemas escolares, son un foco de atención actual relevante en la investigación en Educación Matemática (Carrillo et al., 2021; Cai et al., 2022; Montes et al., 2024). En particular, es de especial interés el proceso de formulación en sí (Baumanns y Rott, 2022), con especial atención a posibles fases, estrategias de formulación, procesos internos, y productos del proceso.

En este trabajo abordamos un fenómeno que se identificó durante el proceso de recogida de información para una investigación más amplia. En particular, se pedía a los estudiantes para maestro (EPM) de la asignatura "Didáctica de la Matemática: Números y Operaciones", de la Universidad de Huelva, que formulasen un problema de suma y producto de fracciones, y que lo resolviesen tanto numérica como gráficamente.

Durante la revisión de esta tarea, se observó que algunos de los EPM, al formular el problema, planteaban un enunciado con mayor o menor coherencia, pero que, al enfrentarse a la resolución de dicho problema, no se resolvía el problema formulado, sino que, aparentemente, había algún error de comprensión del enunciado. Sin embargo, se observó que las incoherencias en el planteamiento del enunciado tenían el potencial de explicar los errores de comprensión, dado que el análisis conjunto del enunciado y la resolución evocaba a los investigadores la posibilidad de que los EPM estuvieran resolviendo el problema que pretendían formular, si bien la formulación final difería de lo pretendido en aspectos de redacción, con implicaciones directas en la resolución. Esto generó lo que denominamos "discontinuidades en el proceso de formulación y resolución". Estas discontinuidades han sido categorizadas, organizándose en cuatro grandes bloques: Por un lado, tenemos discontinuidades tarea-enunciado y enunciado-resolución, y por otro, discontinuidades internas al enunciado, o internas a la resolución. Se mostrarán ejemplos de cada una de estas categorías.

Referencias

Baumanns, L. y Rott, B. (2022). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 110*(2), 251–269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME.

Carrillo, J., Montes, M. y Contreras, L.C. (2021). La competencia profesional en formulación de problemas escolares. En GIDIMAT-UA (Ed.), *Ideas para la Educación Matemática* (pp. 162–183). Compobell.

Montes, M., Chico, J., Martín-Díaz, J.P. y Badillo, E. (2024). Mathematics teachers' specialized knowledge mobilised through problem transformation. *Journal of Mathematical Behavior, 73*, pp. online. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101132

Chico, A., Martín-Díaz, J.P., Pascual, I. y Montes, M. (2024). Discontinuidades en el proceso de formulación y resolución de problemas de futuros maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 573). SEIEM.

CONSTRUYENDO CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO E INTEGRADO EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL

Building specialized and integrated knowledge in students for early childhood education teachers

Codes, M., Morón, M. C. y Trabajo, M.

Universidad de Huelva

Desde la formación del profesorado de Educación Infantil, enfocamos parte de nuestros esfuerzos en facilitar que construyan un conocimiento integrado y especializado. Integrado, en contraposición con la segregación de contenidos, tanto inter como intradisciplinares, y especializado en el sentido de Carrillo et al. (2018) que ponen en valor la especialización, en su caso, del conocimiento del profesorado que enseña matemáticas. A partir de la herramienta que nos proporciona el modelo de conocimiento especializado del profesorado que enseña matemáticas (MTSK) para analizar el conocimiento del profesorado (Carrillo et al., 2008), encontramos en la categoría *fenomenología y aplicaciones*, dentro del dominio del conocimiento de los temas (KoT), un espacio para conectar de manera natural la Matemática con otras disciplinas.

Coincidiendo con Gómez y Cañadas (2011) en el papel del análisis fenomenológico como herramienta docente que se debe promover en las aulas de formación del profesorado de Educación Infantil, encontramos en el álbum ilustrado *El libro de la primavera* de R.S. Berner, un recurso eficaz en formación de profesorado para contextualizar tareas acordes con nuestros objetivos de integración y especialización (Codes et al., 2024). Esa eficiencia radica en su potencial generador de preguntas de investigación en el ámbito escolar que son susceptibles de integrarse en una tarea formativa, por la representación de escenas de la vida cotidiana reconocibles para el alumnado de Educación Infantil. Para valorar el potencial de integración de las preguntas, proponemos el uso de las categorías del subdominio KoT atendiendo a la capacidad de establecer relaciones entre las categorías del conocimiento especializado para enseñar Matemáticas y el especializado para enseñar Ciencias Sociales. Con ello avanzamos en la extensión del modelo MTSK al conocimiento especializado para enseñar otras disciplinas, en este caso, las Ciencias Sociales.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-122180OB-I00, Ministerio de Ciencia e Innovación, Gobierno de España; COIDESO, Universidad de Huelva; DESYM (HUM-168); proyecto ProyExcel_00297 (Junta de Andalucía); proyectos de innovación educativa, 2020 al 2024, Vicerrectorado de Innovación y empleabilidad, Universidad de Huelva.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Codes, M., Morón, M. C. y Trabajo, M. (2024). Construcción del conocimiento integrado en la formación inicial docente: un avance desde educación infantil. *Actas del XVII Congreso Internacional de Educación e Innovación* (pendiente de publicación).

Gómez, P., y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios Revista Latinoamericana de Educación, 2(nº especial)*, 78-89. https://doi.org/10.18175/vys2.especial.2011.05

Codes, M., Morón, M. C. y Trabajo, M. (2024). Construyendo conocimiento especializado e integrado en estudiantes para maestro de educación infantil. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 574). SEIEM.

LA COMPRENSIÓN ESTADÍSTICA TREINTA AÑOS DESPUÉS

Statistical Understanding Thirty Years Later

Dorta, N. y Hernández A.

Universidad de La Laguna

En este estudio se valora la comprensión estadística de estudiantes en último curso de bachillerato, en situaciones contextualizadas que incluyen un resumen de datos. Investigaciones anteriores ya han analizado dicha comprensión estadística en estudiantes de diversos niveles educativos (Batanero et al., 1994; Batanero, Godino y Navas 1997; Garfield, 2003), mostrando especial interés en la comprensión conceptual de medidas de tendencia central y dispersión, y la interpretación de representaciones gráficas. En ellas se describieron los principales errores y dificultades que presentaban entonces. Cabe preguntarse ¿Qué dificultades tienen los estudiantes respecto a la comprensión estadística actualmente? ¿Persisten las mismas que en los años 90?

Se planteó un estudio cualitativo que involucró a 10 estudiantes (todo el grupo) matriculados de Bioestadística, optativa de segundo de Bachillerato. La selección fue intencional, ya que este grupo eligió la materia pensando en mejorar su formación estadística, de cara a su próxima promoción a grados universitarios de ramas socio-sanitarias y científico-técnicas. En este sentido, se puede afirmar que era el grupo que había recibido más formación estadística y tenía mayor interés en ella del centro escolar.

Tomando como referencia el cuestionario *Statistical Reasoning Assessment* (Garfield, 2003) y la propuesta de Batanero et al. (1997). Se diseñaron y adaptaron diversos instrumentos para identificar errores en la comprensión de conceptos estadísticos básicos: media, mediana y desviación típica. Para ello, se tuvo en cuenta las dificultades y errores relacionados con la comprensión de estos términos descrita en Batanero et al. (1994); seleccionando así 6 ítems, que fueron el centro de la toma de datos. Además, se realizaron entrevistas semiestructuradas a cinco estudiantes, para corroborar los resultados extraídos del cuestionario. El análisis y comparación de los datos obtenidos en el cuestionario y las entrevistas permitió extraer conclusiones.

Los resultados reflejan una falta de comprensión en el tratamiento de valores atípicos y su influencia en elegir la media o la moda como representante, según el tipo de distribución. Además, la capacidad para predecir valores estadísticos a partir de gráficos está mermada por un exceso de dependencia por los algoritmos de cálculo y la falta de comprensión de distribuciones con mayor dispersión de datos. Por último, se evidenció en siete de los participantes una carencia en las diferencias entre causa y correlación. Concluimos que muchas de las dificultades y errores descritas en los años 90 siguen estando presentes, por lo que sigue existiendo la necesidad de tomar acciones en las aulas de Secundaria centradas en la mejora la comprensión de conceptos estadísticos.

Referencias

Batanero, C., Godino, J. D., y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, 310–324.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 25*(4), 527–547. https://doi.org/10.1080/0020739940250406

Garfield, J. B. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal, 2*(1), 22–38. https://doi.org/10.52041/serj.v2i1.557

Dorta, N. y Hernández, A. (2024). La comprensión estadística treinta años después. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 575). SEIEM.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN PARA LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE EDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA ESPAÑOLA

Evaluation Criteria for Probability in Spanish Compulsory Secondary Education Curriculum Guidelines

Elgueda-Ibarra, M., Gea, M. M. y Stuardo-Aguayo, A.

Universidad de Granada

El cambio curricular en España intensifica el enfoque competencial en matemáticas y para Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se establecen diez competencias específicas, que contribuyen al logro de las competencias clave que el estudiante ha de desarrollar durante su etapa formativa. Las directrices curriculares establecen criterios de evaluación para dichas competencias específicas y orientaciones para diseñar situaciones de aprendizaje que movilicen el sentido matemático. Nos centramos en el sentido estocástico y, en base al Enfoque Ontosemiótico (EOS, Godino et al., 2019), completamos estudios previos que analizan el significado institucional pretendido de la probabilidad en el actual currículo de la ESO (Elgueda-Ibarra y Gea, 2024). Nos preguntamos cómo se establece la evaluación de las competencias específicas, según los saberes básicos en probabilidad, tanto en las directrices curriculares autonómicas como las que regulan el territorio al ámbito de la gestión estatal. Mediante consulta al Portal del Sistema Educativo Español (Educagob, 2024) accedimos a toda la documentación para la revisión documental. Bajo un enfoque descriptivo y cualitativo, haciendo uso del análisis de contenido (Krippendorff, 2004), se identificaron las relaciones entre competencias específicas y saberes básicos en probabilidad.

Elgueda-Ibarra y Gea (2024) muestran diferencias entre comunidades autónomas en contenidos sobre probabilidad (por ejemplo, en Castilla y León no se establece contenidos en probabilidad en primer ciclo de la ESO, mientras que Galicia solo contempla su estudio en 3ºESO). Nuestros resultados muestran otras limitaciones tanto en las directrices curriculares autonómicas como en las que regulan el territorio al ámbito de la gestión estatal, porque solo Galicia y Andalucía presentan conexión de criterios de evaluación con saberes básicos en probabilidad y la tendencia es evaluar saberes mediante representación, sin considerar competencias fundamentales en cuanto a la reflexión crítica sobre la validez de una resolución o la destreza socioafectiva.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Educagob. (2024). *Portal del Sistema Educativo Español. Currículos en las Comunidades Autónomas.* https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/curriculo-lomloe/curriculos-ccaa.html

Elgueda-Ibarra, M. y Gea, M. (2024, aceptado) La probabilidad en el curriculum español de educación secundaria obligatoria por comunidades autónomas. *Actas del XXI Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. FESPM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37- 42.

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to Its Methodology* (2nd ed.) Sage Publications.

Elgueda-Ibarra, M., Gea, M. M. y Stuardo-Aguayo, A. (2024). Criterios de evaluación para la probabilidad en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria española. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 576). SEIEM.

IMPORTANCIA DEL LENGUAJE EN EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE EDUCACIÓN INFANTIL ENSEÑANDO GEOMETRÍA

Importance of language in the specialized knowledge of an early children's education teacher teaching geometry

Escudero-Domínguez, A.[a], Muñoz-Catalán, M.C.[a] y Montes, M.[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Huelva

Los profesionales de Educación Infantil son diferentes a los profesores de Educación Primaria, Secundaria, Bachillerato o Universidad, ya que esta etapa posee unas características especiales. Uno de los aspectos que debemos conocer para entender al profesor de Educación Infantil es la etapa madurativa en la que se encuentra su alumnado, pues esto condiciona su labor profesional (Escudero-Domínguez et al., 2021). Este docente debe tener presente que se trata de una etapa generadora de lenguaje. En este sentido, Boaler y Greeno (2000) argumentan que los discentes necesitan tener posibilidades para usar su propio lenguaje, teniendo tiempo para pensar por sí mismos, para realizar sus propias interpretaciones y tomar sus propias decisiones. Así, entendemos que los profesores han de ofrecer a los estudiantes oportunidades para expresarse con su propio vocabulario e ir alentando el lenguaje para apoyar el crecimiento de las habilidades de razonamiento (Clements y Sarama, 2014).

Este póster forma parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es comprender el conocimiento especializado que un profesor de Educación Infantil moviliza cuando enseña Geometría. Lo hemos afrontado desde el modelo *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge-MTSK* (Carrillo et al., 2018). Conforme avanzábamos en el análisis, identificábamos indicadores de conocimiento en relación con el lenguaje dentro de cada subdominio, por lo que los resultados que estamos obteniendo revelan el papel tan importante que tiene el conocimiento del profesor sobre el lenguaje en esta etapa para promover la construcción del conocimiento del alumno en lo referente a Geometría. Consideramos necesario reconsiderar la caracterización de los distintos subdominios de MTSK desde la perspectiva del lenguaje, en lo que respecta al análisis del profesor de Educación Infantil.

Agradecimientos: Proyecto I+D+i, código RTI2018-096547-B-I00; Proyecto Junta de Andalucía, con referencia ProyExcel_00297); y Red MTSK AUIP (Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado).

Referencias

Boaler, J. y Greeno, J. G. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning: International perspectives on mathematics education* (pp. 171–200). Ablex Publishing

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M; Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalan, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education 20(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clements, D.H. y Sarama, J. (2014). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach.* Roultledge. https://doi.org/10.4324/9780203520574

Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M.C. y Codes, M. (2021). ¿Qué conocimiento especializado moviliza un profesor de Infantil a través de una tarea de estampación de figuras geométricas? En G. Gómez, C. Rodríguez, M.N. Campos y M. Ramos (Eds.), *Nuevos escenarios educativos: hacia el horizonte 2030* (pp. 617–629). Dykinson.

Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M.C. y Montes, M. (2024). Importancia del lenguaje en el conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil enseñando Geometría. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 577). SEIEM.

COMPRENDIENDO LA FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA DEL FUTURO PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA ORDENANDO LAS FICHAS DE UN DOMINÓ

Understanding the mathematical flexibility of future primary school math teachers arranging domino tiles

Escudero-Ávila, D.[a], Joglar, N.[a] y Cid-Cid, A.[b]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad Rey Juan Carlos

El objetivo principal de los formadores de matemáticas y su didáctica de futuros docentes de educación primaria (FDEP) es el diseño de tareas formativas que ayuden a estos últimos a desarrollar los conocimientos necesarios para su labor profesional cuando enseñan matemáticas. Una parte fundamental de la competencia matemática es la flexibilidad matemática, tanto procedimental como representacional, que es transversal a todos los contenidos y bloques de la matemática escolar (Joglar-Prieto et al., 2024). Comprender cómo es esta competencia en los FDEP es necesario, tanto para diseñar tareas formativas que promuevan el desarrollo de su flexibilidad matemática, como otras que les ayuden a construir elementos del conocimiento didáctico-matemático necesarios para ayudar al alumnado de primaria a resolver problemas de forma flexible. Esta es la cuestión de investigación que se plantea en este póster.

Para dar una primera respuesta a la cuestión planteada, se videograbaron dos sesiones en las que seis FDEP trabajan en equipo para resolver a una tarea formativa basada en la situación "La densidad del dominó". En la tarea deben ordenar las fracciones que representan las fichas de un dominó, partiendo de 10 fichas elegidas al azar, a las que se van añadiendo progresivamente más hasta llegar a un juego completo en base 9. La tarea está secuenciada en diferentes actividades y momentos para permitir recoger información sobre cómo es su flexibilidad procedimental y representacional, tanto espontáneamente como de forma inducida (Joglar-Prieto *et al*., 2024).

Los resultados del análisis de estos episodios nos permiten observar cómo los FDEP utilizan sus conocimientos matemáticos básicos para resolver un problema de manera colaborativa, poniendo en juego y comparando distintas estrategias de orden, diferentes representaciones de dichos procesos y considerando varios significados de las fracciones. Estos resultados nos permiten también identificar lo que conocen y cómo lo conocen acerca de la idea de fracción, además de reconocer concepciones adecuadas e inadecuadas sobre el contenido, su enseñanza y su aprendizaje (Carrillo-Yáñez *et al*., 2018). Todo esto, sin duda, permitirá adaptar adecuadamente el contenido de la formación inicial de los FDEP para que consigan desarrollar las competencias profesionales que necesitan para enseñar matemáticas.

Agradecimientos

Proyecto I+D+i, código RTI2018-096547-B-I00; y Red MTSK AUIP

Referencias

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Joglar-Prieto, N., Escudero-Ávila, D. y Cid-Cid, A. (2024). Flexibilidad matemática y ordenación de fracciones en primaria. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *103*, 24–32.

Escudero-Ávila, D., Joglar, N. y Cid-Cid, A. (2024). Comprendiendo la flexibilidad matemática del futuro profesorado de matemáticas de primaria ordenando las fichas de un dominó. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 578). SEIEM.

CREENCIAS DEL PROFESORADO SOBRE LA DISCALCULIA

Teachers' beliefs about dyscalculia

Espina, E.[a], Marbán, J. M.[a], y Maroto, A. I.[a]

[a]Universidad de Valladolid

La discalculia es un trastorno del aprendizaje que afecta de manera persistente a la correcta adquisición de las habilidades matemáticas (Meier et al., 2021). La detección temprana de este trastorno es un trabajo colaborativo entre los especialistas, el profesorado y los familiares (Calderón-Delgado et al., 2019). En particular, el profesorado desempeña un papel crucial en el diagnóstico, ya que es uno de los primeros agentes que puede observar los síntomas de la discalculia que pueden manifestar los niños a diario en el aula. En este sentido, nos hemos preguntado: ¿qué conocimiento tiene el profesorado de Educación Infantil y Primaria sobre la discalculia? El objetivo de este póster es presentar los resultados vinculados con las creencias que tiene el profesorado sobre la discalculia. Se ha utilizado el cuestionario como técnica de recogida de información y este se ha administrado en formato online. Cabría preguntarse si los resultados son especialmente un reflejo del conocimiento de la discalculia en el territorio nacional o son comparables con otros entornos similares y, por ello, se ha administrado en dos contextos diferentes, uno español (Castilla y León) y uno portugués (región de Lisboa e Vale do Tejo). La muestra de Castilla y León ha estado formada por 199 docentes y la de Lisboa por 111. En este póster únicamente se muestran los resultados de la sección "Creencias y concepciones sobre la discalculia", en la cual se ha recogido la información a través de la presentación de un conjunto de 18 afirmaciones sobre las características de la discalculia en las que los docentes debían manifestar su acuerdo o desacuerdo. El análisis de los cuestionarios ha mostrado que los resultados de Castilla y León y de Lisboa han sido bastantes similares. En ambas regiones se percibe que los docentes tienen un conocimiento medio de las características principales de la discalculia, ya que un alto porcentaje de docentes han respondido correctamente ante el 50 y el 75% de las afirmaciones (60,3% en Castilla y León y 59,46% en Lisboa). Las características de la discalculia que los docentes tienen más claras son: la discalculia no se debe a un coeficiente intelectual bajo, no se debe a una lesión cerebral, no se debe a una enseñanza insuficiente o deficiente, interfiere en el rendimiento académico y en las actividades de la vida diaria y se puede presentar de forma comórbida, entre otras características. Sin embargo, poseen las siguientes creencias erróneas: creen que la discalculia es una dificultad de aprendizaje rara (menos de un 1%), que se adquiere, que no tiene origen neurológico o genético, que desaparece con una adecuada intervención y que no se puede rendir bien en matemáticas, entre otras creencias. En conclusión, se considera necesaria la formación sobre este trastorno para aumentar el conocimiento del profesorado y, por lo tanto, las posibilidades de identificar de forma temprana sus síntomas dentro del aula y así poder atenderla y mejorar el aprendizaje y disfrute de las matemáticas en el alumnado con discalculia.

Agradecimiento: Esta investigación ha sido financiada por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León a través de las ayudas destinadas a la contratación predoctoral de personal investigador, cofinanciadas por el Fondo Social Europeo.

Referencias

Calderón-Delgado, M. A., Zamora-Delgado, R. I., Palma-Palma, R. y Moya, M. E. (2019). Dyscalculia and pedagogical intervention. *International Research Journal of Management, IT & Social Sciences, 6*(5), 95-100. https://doi.org/10.21744/irjmis.v6n5.710

Meier, P., McCaskey, U. y Kucian, K. (2021). Typical errors made by children and adolescents with developmental dyscalculia. *Lernen und Lernstörungen, 10*(3), 135-150. https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000348

Espina, E., Marbán, J. M., y Maroto, A. I. (2024). Creencias del profesorado sobre la discalculia. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 579). SEIEM.

SUMAS Y DIFERENCIAS DE LEIBNIZ: ANTESALA DE LA INTEGRAL

Leibniz sums and differences: prelude of the integral.

Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M.T. y Fuertes-Prieto, M.A.

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.

Universidad de Salamanca.

La historia de la matemática puede ser una fuente de conocimiento para dotar de mayor sentido a los conceptos matemáticos, en particular al concepto de integral. En el siglo XVII gracias a los trabajos, entre otros, de Fermat, Pascal, Wallis y Roberval, se demostró la gran utilidad de las series numéricas para calcular áreas curvas. Leibniz, cogió el testigo y, a partir de 1684, expuso su idea de diferencias infinitamente pequeñas lo que permitiría poder recuperar una sucesión inicial por medio de la suma de estas. Definió *df(x)* como un incremento en *f(x)* cuando nos movemos a lo largo del eje x.

En nuestra investigación, se plantean dos tareas en relación con lo expuesto, las cuales han sido resueltas por trece estudiantes del máster de formación del profesorado en la especialidad de matemáticas organizados en cuatro grupos. La primera tarea está relacionada con sucesiones numéricas y sucesiones de diferencias. Se demuestra que mediante la suma de diferencias se puede recuperar la sucesión inicial. En la segunda, donde se trabajan los argumentos de Leibniz para calcular el área bajo una curva, se asocia la integral con un proceso de suma infinita y la diferencial con un proceso de resta infinita, donde las diferencias son infinitamente pequeñas. De esta manera, se le da sentido numérico a lo que con posterioridad constituyó el Teorema Fundamental del Cálculo.

El objetivo principal es utilizar las series de diferencias de Leibniz para entender el cálculo del área bajo una curva, es decir, el concepto de integral, como un proceso de suma infinita de diferencias infinitamente pequeñas. Se utiliza la historia de la integral para obtener un conocimiento más profundo de este (Ma, 1999). Se ha pretendido dotar a los estudiantes de un conocimiento de la integral definida a través de una aproximación por módulos (Jankvist, 2000).

En esta investigación se ha utilizado la ingeniería didáctica como metodología, la cual ha sido estructurada en cuatro fases: preliminar, donde se analizó la historia de la integral; análisis a priori, donde se diseñaron de las tareas en concordancia con la historia; experimentación, donde se pusieron en práctica los materiales elaborados; y análisis a posteriori, donde se analizaron los resultados y se extrajeron las conclusiones de cada tarea. En el presente póster se presentan los resultados y conclusiones extraídas de las dos tareas correspondientes con los argumentos de Leibniz. Los futuros docentes lograron asociar la integral con un proceso de suma infinita de diferencias infinitamente pequeñas ligando los argumentos de Leibniz con el teorema fundamental del cálculo.

Referencias

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235-261.

Ma, L. (1999) *Knowing and Teaching Elementary mathematics: Teachers understanding of fundamental mathematics in China and in the United States*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M.T. y Fuertes-Prieto, M.A. (2024). Sumas y diferencias de leibniz: antesala de la integral. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 580). SEIEM.

SEGURIDAD EN LAS REPUESTAS A TAREAS DE ESTIMACIÓN POR PARTE DE ALUMNADO DE SECUNDARIA SEGÚN SU GÉNERO

Confidence in responses to estimation tasks by secondary students according to their gender

Fariña, M. y Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Diversos estudios han establecido relaciones entre la facilidad del alumnado para resolver tareas matemáticas y su grado de seguridad al hacerlo, valorando, entre otros aspectos, el factor del género (Foster, 2016). Yang y Sianturi (2019) concluyen que el alumnado presenta una alta seguridad cuando valoran si el resultado de una tarea numérica es razonable, a pesar de que este sea erróneo. Por otro lado, Foster (2016) indica que el alumnado femenino demuestra una seguridad en sus respuestas menor que lo que justificaría sus habilidades, mientras que el alumnado masculino presenta una seguridad significativamente mayor que su habilidad matemática.

En el presente estudio, se ha realizado una prueba online a 59 estudiantes de 2.º de la ESO (35 chicas y 24 chicos) sobre razonabilidad numérica (Yang y Sianturi, 2019). La prueba consiste en 8 actividades, entre las que se incluyen la estimación de un cálculo y la estimación de una medida en un contexto. En cada actividad, el alumnado debe elegir la respuesta más razonable entre cuatro propuestas e indicar el grado de seguridad. Para valorar la seguridad en su elección el alumnado debe elegir una opción dentro de la siguiente escala: nada seguro, poco seguro, neutro, seguro y muy seguro. El objetivo del estudio es valorar la seguridad con la que el alumnado ha completado las actividades en función de su género.

Para analizar los resultados, se ha valorado el porcentaje de alumnado masculino y femenino que ha respondido correctamente a la actividad y la seguridad con la que se identifica. En cuanto al porcentaje de alumnado femenino y masculino que responde correctamente a la actividad, se observa que, en siete de las ocho actividades, el rendimiento de ambos géneros es muy similar, mientras que en una actividad de estimación de medida el alumnado masculino duplica al femenino en cuanto a respuestas correctas. En este sentido, podemos afirmar que el género no es un factor decisivo en la resolución de actividades matemáticas de razonabilidad. No obstante, al valorar la seguridad del alumnado al responder, se observa que el alumnado masculino, haya dado una respuesta correcta o no, se siente más seguro que el alumnado femenino. El alumnado femenino tiende a sentirse seguro o neutro, aunque sus respuestas sean correctas, mientras que el alumnado masculino suele indicar en mayor medida que se siente seguro o muy seguro. Estos resultados coinciden con los presentados anteriormente por Foster (2016). Sería interesante estudiar si se pueden extrapolar a cualquier tipo de actividades matemáticas.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto PID2022-139007NB-I00 del MCIN/AEI.

Referencias

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, *91*, 271-288. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9660-

Yang, D. C. y Sianturi, I. A. J. (2019a). Six grade students´ performance, misconceptions, and confidence when judging the reasonableness of Computational Results. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(8), 1519-1540. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09941-4

Fariña, M., Bruno, A. (2024). Seguridad en las respuestas a tareas de estimación por parte de alumnado de secundaria según su género. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 581). SEIEM.

CONFLICTOS COMOGNITIVOS EN EL DISCURSO DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR EN TAREAS CON SÓLIDOS NO PROTOTÍPICOS

Commognitive conflicts in the pre-service mathematics teachers' discourse in task situations involving non-prototypical solids

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Martín-Molina, V.

Universidad de Sevilla

La práctica matemática de definir es relevante en el aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles educativos. Sin embargo, muchos estudiantes para profesor de matemáticas (EPM) tienen problemas con las definiciones matemáticas (Avcu, 2023). La investigación que estamos desarrollando utiliza la comognición (Sfard, 2023) como marco teórico para estudiar esta práctica matemática. En este marco, las matemáticas son un tipo de discurso y el aprendizaje es conceptualizado como un cambio en dicho discurso. Una fuente de aprendizaje son los conflictos comognitivos, que son situaciones en las que los interlocutores usan dos discursos inconmensurables, lo que se pone de manifiesto, por ejemplo, cuando usan la misma palabra de dos formas distintas o producen narrativas que no son asumibles mediante las mismas reglas de justificación (Sfard, 2023). En esta investigación, se analiza si hay diferencias entre el discurso de EPM cuando responden a preguntas sobre sólidos prototípicos y su discurso cuando responden a preguntas similares sobre sólidos no prototípicos. Además, se estudia si la aparición de conflictos comognitivos está ligada a la presencia de sólidos no prototípicos.

Los participantes en la investigación han sido 35 EPM de Educación Secundaria organizados en 9 grupos de 3-4 alumnos (M1, ..., M9). El instrumento de recogida de datos fue un cuestionario con cinco preguntas sobre la construcción y selección de definiciones. Cada grupo debía debatir y consensuar las respuestas a las preguntas del cuestionario. Se recogieron las respuestas escritas y las grabaciones en audio de los debates. Se analizó la actividad discursiva de los grupos de EPM utilizando la comognición y se identificaron diferentes conflictos comognitivos que parecen ligados a la presencia de sólidos no prototípicos. Un conflicto comognitivo surgió porque los discursos de los EPM del grupo M7 eran inconmensurables, mientras otro conflicto comognitivo surgió en el grupo M8 por la inconmensurabilidad entre el discurso de los EPM y el discurso matemático (las definiciones) del cuestionario. En el grupo M7, los EPM fueron conscientes del conflicto, pero no pudieron resolverlo al no identificar las causas del mismo. En el grupo M8, los EPM no fueron conscientes del conflicto comognitivo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto PID2022-139079NB-I00 del MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER/UE, y por el VII PPIT de la Universidad de Sevilla.

Referencias

Avcu, R. (2023). Pre-service middle school mathematics teachers' personal concept definitions of special quadrilaterals. *Mathematics Education Research Journal, 35*(4), 743-788. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00412-2

Sfard, A. (2023). Taming fantastic beasts of mathematics: Struggling with incommensurability. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *9*(3), 572-604. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00156-7

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Martín-Molina, V. (2024). Conflictos comognitivos en el discurso de estudiantes para profesor en tareas con sólidos no prototípicos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 582). SEIEM.

REFLEXIONES SOBRE MATERIALES Y DISEÑOS INSTRUCCIONALES PARA INTRODUCIR LA SUMA DE FRACCIONES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS

Reflections on materials and instructional designs to introduce the addition of fractions as an activity for initial teacher training.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Gutiérrez-Álamo-Rodríguez, P. y Méndez-Coca, M.

Universidad Complutense de Madrid

Una de las demandas profesionales que tiene que afrontar el profesorado es la selección y uso didáctico de materiales (e.g. Kaminski y Sloutsky, 2020). En este póster se presenta una actividad formativa dirigida a futuras maestras de primaria, la cual se contextualizó en el tema de suma de fracciones en un registro icónico-gráfico partiendo del conocimiento previo sobre el significado de la fracción como parte todo usando un modelo de áreas. La actividad formativa tiene cuatro etapas: la primera es el diseño reflexionado de un material didáctico para el tema en cuestión, en la que se propusieron tareas para la selección de la forma, tamaño y alcance (en función de la elección de seis denominadores), de los materiales. En la segunda etapa, se discutió el uso del material diseñado para resolver ejercicios de sumas de fracciones. En la tercera etapa, se reflexionó sobre la necesidad de tener diseños instruccionales para aprovechar el potencial didáctico del material, así como para anticiparse a las producciones de los estudiantes de primaria. Finalmente, en la cuarta etapa se debatió sobre cómo se puede distanciar del material a los estudiantes de primaria para que muestren su comprensión sobre el proceso (suma de fracciones) sin necesidad de la manipulación.

Para la reflexión sobre la incorporación de materiales manipulativos en el aula de primaria, empleamos la noción de razonamiento analógico de González (1997), en la que se aprovecha el conocimiento previo adquirido en una situación familiar (*dominio fuente*) para transferir una parte de dicho conocimiento a una situación nueva (*dominio meta*) tomando en consideración que no todos los materiales manipulativos son adecuados para todas las situaciones matemáticas. El éxito de esa transferencia está determinado por la similitud entre el dominio meta y el dominio fuente, así como por la presencia de características relevantes compartidas.

Consideramos que el trabajo con este tipo de actividades formativas ha permitido a las maestras en formación reflexionar sobre criterios fundamentados para la evaluación y selección de materiales didácticos apropiados para enseñar desde un enfoque profesional.

Agradecimientos

Ayuda PID2021-122180OB-100 financiado/a por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER Una manera de hacer Europa.

Referencias

González, M. J. (1997). Aprendizaje por analogía: análisis del proceso de inferencia analógica para la adquisición de nuevos conocimientos. Trotta

Kaminski, J.A., y Sloutsky, V.M. (2020). The use and effectiveness of colorful, contextualized, student-made material for elementary mathematics instruction. International Journal of STEAM Education, 7, 1-23, https://doi.org/10.1186/s40594-019-0199-7

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Gutiérrez-Álamo-Rodríguez, P. y Méndez-Coca, M. (2024). Reflexiones sobre materiales y diseños instruccionales para introducir la suma de fracciones en la formación inicial de maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 583). SEIEM.

MEJORANDO LAS CAPACIDADES DE VISIÓN Y RAZOMANIENTO ESPACIAL DE LOS FUTUROS MAESTROS

Improving the vision and spatial reasoning capabilities of pre-service teaches

Fuertes Prieto, M.A., Rodríguez Sánchez, M., Alonso Ruano, B.M. y Rodríguez Muelas, D.

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales.

Universidad de Salamanca

En el aprendizaje de las matemáticas, la visualización espacial es una componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración (Arcavi, 2003), habiéndose demostrado que su entrenamiento mejora no solo el razonamiento espacial sino también las habilidades matemáticas en general.

Por otra parte, el diseño y la impresión 3D es una tecnología emergente que puede servir para mejorar la comprensión de la geometría en aspectos como el desarrollo de la percepción espacial, mejorar el razonamiento y el pensamiento abstracto, adquirir mejores habilidades en la resolución de problemas y establecer estrategias y metodologías de aprendizaje colaborativo (Kit et al.,2022). A pesar de ello, la impresión 3D es la tecnología que más sentimientos negativos despierta entre los futuros maestros (Blanco et al., 2022).

A partir de estas premisas, y con el objetivo de comprobar si la realización de una serie de tareas que implicasen el diseño de modelos 3D y su posterior impresión y manipulación mejora las capacidades de visión y razonamiento espacial de los futuros maestros de Educación Primaria, se han diseñado y puesto en práctica tres tareas a las que se han dedicado seis horas lectivas.

Con una muestra preliminar de 55 alumnos, los análisis de las respuestas del test validado de visualizaciones de Purdue (Guay, 1976) ponen de manifiesto que, tras la realización de las tareas, los alumnos mejoraron de manera significativa en las tres habilidades principales relacionadas con la percepción espacial medidas por el test (rotación, desarrollo plano de figuras tridimensionales y vistas). Así, en una escala de cero a diez, los resultados referidos a la rotación pasaron de 4,2 a 4,9, los de desarrollo de 4,9 a 5,9 y los de vistas de 4,9 a 5,4.

Estos resultados animan a introducir, de manera justificada, una nueva tecnología, como es el diseño e impresión 3D, en la formación en educación matemática de los futuros maestros.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Blanco, T. F., Fernández-López, A., Martínez-Albella, J. y Rodríguez-Raposo, A. (2022). Explorando las emociones de futuros docentes frente al uso de tecnologías emergentes en el aprendizaje de la geometría. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXV (p. 595). SEIEM.

Kit Ng, D. T., Tsui, M. F. y Yuen, M. (2022). Exploring the use of 3D printing in mathematics education: A scoping review. *Asian Journal for Mathematics Education*, 1(3), 338-358.

Guay, R. (1976). *Purdue spatial visualization test. Educational testing service*. Purdue Research Foundation.

Fuertes Prieto, M.A., Rodríguez Sánchez, M., Alonso Ruano, B.M. y Rodríguez Muelas, D. (2024). Mejorando las capacidades de visión y razomaniento espacial de los futuros maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 584). SEIEM.

ESTUDIO EXPLORATORIO DE LA CONFIANZA Y RENDIMIENTO DE FUTUROS MAESTROS RESOLVIENDO PROBLEMAS DE FERMI: IN SITU VS ASISTIDOS POR IA

Exploratory study of the confidence and performance of prospective teachers solving Fermi problems: in situ vs. IA-assisted

Gallart, C.[a] Segura, C.[a], Albarracín, L.[b] y Ferrando, I.[a]

[a]Dpto. de Didáctica de la Matemática, UV; [b]Dptm. de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentales, UAB

El nuevo currículo de Educación Primaria (EP) destaca la resolución de problemas para el desarrollo de la competencia de modelización (MEFP, 2022). Para garantizar una introducción efectiva de estas actividades en las aulas es necesario conseguir que el profesorado esté familiarizado con este tipo de tareas, tanto desde una perspectiva cognitiva como afectiva (Chapman, 2012). Por otro lado, el avance de las tecnologías de inteligencia artificial, ha puesto al alcance de todos el acceso a herramientas de consulta que pueden ser útiles en el proceso de resolución de problemas, en particular en la fase de validación. Se presentan los resultados de un estudio exploratorio con futuros maestros que se enfrentan a resolver dos secuencias de problemas de estimación con diferentes características y en dos condiciones concretas: resolución in situ en el contexto en que se formula el problema y resolución en el aula con acceso a ChatGPT.

Los objetivos de investigación son: identificar la relación entre las características del contexto de los problemas y la confianza en la resolución, e identificar diferencias y similitudes en la confianza y el rendimiento según las condiciones del proceso de resolución. Se analizan los resultados de un estudio empírico exploratorio con 66 futuros maestros de EP. Los participantes, en grupos de 4, resolvieron primero una secuencia de 5 problemas de Fermi cuyo enunciado se contextualiza en el entorno de la facultad. El diseño se basa en variar ciertas características contextuales (tamaño y forma de los elementos a estimar, orden en la distribución, etc.) del problema (Ferrando y Segura, 2020), y la resolución se realiza in situ. A continuación, los participantes resolvieron 2 problemas de Fermi, formulados en un contexto alejado a su realidad inmediata, en el aula con ChatGPT. Se analizan las resoluciones, las conversaciones con la IA y las respuestas a una pregunta sobre el nivel de confianza en la resolución. Estudios previos encontraron que las características contextuales influían en la estrategia de resolución (Ferrando y Segura, 2020), y nuestros resultados los amplían mostrando que también influyen en el rendimiento y en la confianza de los futuros maestros. Si bien no se puede asegurar que el uso de herramientas IA generativas influya en el nivel de confianza en la resolución, se observan diferencias en los procesos de validación.

Referencias

Chapman, O. (2012). Prospective elementary school teachers ways of making sense of mathematical problem posing. *PNA*, *6*(4), 135–146.

Ferrando, I. y Segura, C. (2020). Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. *Avances de Investigación Matemática, 17*, 84–97. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.306

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 157/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/157/con

Gallart, C., Segura, C., Albarrcín, L. y Ferrando, I. (2024). Estudio exploratorio de la confianza y rendimiento de futuros maestros resolviendo problemas de Fermi: in situ vs asistidos por IA. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 585). SEIEM.

DISEÑO DE UN ESTUDIO SOBRE EL IMPACTO DEL FORMATO Y EL CONTEXTO EN ASPECTOS COGNITIVOS Y AFECTIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Design of a study on the impact of format and context on cognitive and affective aspects in problem solving

García-Cerdá, C., Ferrando, I., Segura, C.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

En los planes de estudio de todo el mundo la resolución de problemas ocupa un lugar central en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De hecho, el nuevo currículo español promueve la introducción en las aulas de problemas matemáticos en los que el alumnado debe gestionar información sobre situaciones reales y complejas para resolverlos (MEFP, 2022). Sin embargo, el alumnado podría tener dificultades para alcanzar estas competencias. Por ello, hemos diseñado un estudio, en el marco de una tesis doctoral, con el objetivo de estudiar cómo influyen algunas características de los problemas en aspectos cognitivos y afectivos de la resolución de problemas.

En particular, se van a explorar las relaciones entre el formato en el que se presenta la información, la cantidad de información, la conexión con la realidad (contexto), la comprensión lectora, el rendimiento y algunos aspectos afectivos (Schoenfeld, 2010). En cuanto al formato y la información, se considerarán distintas variables; como si se trata de textos continuos o discontinuos, la longitud del texto, la multimodalidad, y el exceso o falta de datos. En cuanto al contexto, se considerarán problemas verbales de tipo PISA y problemas de modelización, que tienen una conexión más fuerte con la realidad (Niss et al., 2007). Se analizará el impacto de las características del problema en el rendimiento y en aspectos afectivos. Además, se empleará un cuestionario validado de competencia lectora para poder determinar cómo se relaciona con el rendimiento según el tipo de problema, ampliando estudios previos (Pongsakdi et al., 2020). Se espera que el exceso o la falta de información y la complejidad en la descripción de la situación influyan en el rendimiento (Ferrando y Segura, 2020), y que esto se relacione con el nivel de competencia y las emociones.

Referencias

Ferrando, I. y Segura, C. (2020). Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17*, 84–97. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.306

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, 52, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. L. (2007). Introduction. En W. Blum, P. L. Galbraith, H., W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 3–32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_1

Pongsakdi, N., Kajamies, A., Veermans, K., Lertola, K., Vauras, M. y Lehtinen, E. (2020). What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. *ZDM Mathematics Education, 52*, 33–44. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01118-9

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203843000

García-Cerdá, C., Ferrando, I. y Segura, C. (2024). Diseño de un estudio sobre el impacto del formato y el contexto en aspectos cognitivos y afectivos en la resolución de problemas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 586). SEIEM.

UN ESTUDIO PILOTO SOBRE EL USO DE SISTEMAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA COMO UNA HERRAMIENTA DE ENTRENAMIENTO PARA FUTUROS PROFESORES

A pilot study on the use of generative artificial intelligence systems as a training tool for prospective teachers

García-Bayona, I.[a], Pérez-Suay, A.[a] y Ersari, E.[b]

[a]Universitat de València, [b]Kafkas University

Con el nacimiento de los sistemas de inteligencia artificial (IA) generativa, los investigadores han comenzado a analizar sus diferentes capacidades en contextos educativos. Por ejemplo, las herramientas de IA pueden ayudar a los profesores en formación a reforzar sus conocimientos del contenido (Yang y Chen, 2023). Algunos estudios muestran que los sistemas de IA todavía carecen de comprensión profunda en algunas áreas de las matemáticas y son poco eficaces al corregir conceptos erróneos. La precisión y eficacia de las soluciones puede depender de los datos de entrada, las instrucciones proporcionadas y la complejidad de las ecuaciones (Wardat et al., 2023). Para los profesores en formación, los posibles errores y concepciones erróneas de los estudiantes pueden ser un factor de desmotivación y frustración en la práctica docente (Sandholtz, 2011). En este sentido, nuestra propuesta sugiere aprovechar las imperfecciones actuales de los sistemas de IA generativa para proporcionar un escenario en el que los futuros profesores, mediante interacción con la IA, puedan entrenarse en la labor de guiar a los estudiantes con dificultades en la resolución de problemas matemáticos, detectando errores en soluciones y razonamientos, a la vez que reflexionan sobre sus propias carencias en el contenido y mejoran sus habilidades a la hora de explicar. Los participantes del estudio fueron seis estudiantes del Grado en Maestro/a en Educación Primaria. Se planteó un cuestionario con siete problemas basados en imágenes extraídos de las pruebas TIMSS de rendimiento matemático para cuarto de primaria. Los estudiantes fueron entrevistados individualmente en una sesión que incluía resolución de los problemas a mano (de diferentes formas), reflexión sobre errores de los estudiantes de primaria, y la interacción con la IA Gemini (de Google DeepMind) para guiarla en la resolución de los problemas. Se obtuvo una media de 2.2 sobre 3 en número de estrategias diferentes propuestas por problema, y de 1.86 sobre 3 en el éxito al guiar a Gemini a la solución correcta. Los resultados sugieren que Gemini maneja mejor los problemas del ámbito aritmético, y tiene grandes dificultades en la lectura e interpretación de gráficos estadísticos. Las dinámicas generadas en las entrevistas muestran un interés por parte de los estudiantes en la aplicación de la IA como entrenamiento para su labor docente.

Agradecimientos

Proyectos UV-SFPIE_PIEE-2736919 (UV) y CIGE/2023/103 (GVA).

Referencias

Sandholtz, J. H. (2011). Preservice teachers' conceptions of effective and ineffective teaching practices. *Teacher Education Quarterly, 38*(3), 27-47.

Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., y Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(7), em2286. https://doi.org/10.29333/ejmste/13272

Yang, T. C., & Chen, J. H. (2023). Pre-service teachers' perceptions and intentions regarding the use of chatbots through statistical and lag sequential analysis. *Computers and Education: Artificial Intelligence, 4*, 100119. https://doi.org/10.1016/j.caeai.2022.100119

García-Bayona, I., Pérez-Suay, A. y Ersari, E. (2024). Un estudio piloto sobre el uso de sistemas de inteligencia artificial generativa como una herramienta de entrenamiento para futuros profesores. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 587). SEIEM.

PROCESOS DE PLANIFICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Planning processes in word problem solving in primary education

García-Marques, M. E.[a], Arnau, D.[a] y González-Calero, J. A.[b]

[a]Universitat de València – Estudi General, [b]Universidad de Castilla-La Mancha

La resolución de problemas es una de las habilidades fundamentales de la actividad matemática y es un elemento central dentro del currículo de matemáticas en educación primaria. La resolución aritmética de problemas verbales se extiende a lo largo de toda la primaria y resulta una fuente relevante de dificultad para el alumnado. Durante la fase de planificación, la dificultad está relacionada con la toma de tres tipos de decisiones: qué operaciones hay que hacer, entre qué cantidades y en qué orden (Puig y Cerdán, 1988).

En este trabajo analizamos la capacidad del alumnado para realizar una planificación apropiada cuando resuelven problemas verbales multietapa de manera aritmética. En concreto, presentamos resultados de un estudio exploratorio en el que se analiza la relación entre la competencia en la resolución aritmética de problemas verbales y la capacidad para identificar y nombrar las cantidades necesarias para resolverlo. Con este fin se diseñaron tres cuestionarios formados por 5 tareas relacionadas con la resolución aritmética de problemas verbales. Los cuestionarios se administraron a dos grupos naturales de quinto curso de educación primaria. En el primer cuestionario, el alumnado resolvió de forma individual una secuencia de problemas típicamente aritméticos. El análisis de los resultados de este cuestionario nos permitió analizar su capacidad en la resolución de problemas verbales. Además, en base a estos resultados, se agrupó al alumnado en parejas homogéneas para la administración del segundo y tercer cuestionario. Las tareas del segundo y tercer cuestionario tomaban como elemento central problemas isomorfos a los del primer cuestionario. Así, en el segundo cuestionario, se presentaban problemas verbales multietapa y se solicitaba que identificaran y dieran nombre a las cantidades conocidas y desconocidas que consideraban necesarias para resolverlos. En el tercer cuestionario, se presentaban problemas verbales multietapa junto a un conjunto de nombres de cantidades y se solicitaba al alumnado que clasificara dichos nombres en cuatro categorías: cantidad conocida, cantidad desconocida intermedia, cantidad desconocida incógnita del problema y cantidad no relevante en la resolución.

Las actuaciones de las parejas en el segundo y tercer cuestionario fueron registradas mediante protocolos audiovisuales y escritos. A partir de estas producciones hemos identificado las dificultades y los errores habituales del alumnado, y hemos relacionado su competencia en la resolución aritmética de problemas con la habilidad para producir una planificación de las cantidades que deberán emplearse en la resolución.

Agradecimientos

Realizado al amparo del proyecto TED2021-129485B-C42, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia), del proyecto UV-SFPIE_PIEC-2736765 de la Universitat de València y del proyecto CIGE/2023/103 de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

García-Marques, M. E., Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2024). Procesos de planificación en la resolución de problemas verbales en educación primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 588). SEIEM.

ANÁLISIS DE LA ROTACIÓN MENTAL EN ALUMNADO DE EDUCACIÓN INFANTIL: UNA COMPARATIVA DE CUATRO TEST

Analysis of mental rotation in preschool students: a comparison of four tests

Garcia-Marques, M. E., Diago, P. D. y Arnau, D.

Universitat de València – Estudi General

Uno de los subcomponentes más estudiados de las habilidades espaciales es la rotación mental. El objetivo de la investigación de la que presentamos resultados es analizar el desarrollo de la competencia en rotación mental de alumnado de educación infantil. Para ello se propuso que estudiantes de último curso de infantil (5-6 años) resolvieran individualmente cuatro tests de rotación mental formados cada uno por cuatro ítems. En el primero de ellos se debía identificar, entre cuatro opciones, la imagen formada por una figura que había sido rotada a partir de una figura inicial de referencia (Jansen, 2013). En el segundo test, se proporcionaba una imagen de referencia formada por dos figuras y se solicitaba que se identificara, entre cuatro imágenes, cuál podría ser el resultado de la rotación y unión de las figuras de referencia (Levine, 1999). En las tareas del tercer test se proporcionaba una imagen con una figura inicial y debía seleccionarse, de entre cuatro opciones, la figura que al añadirla a la primera mediante rotación produjera un cuadrado sin solaparse ninguna parte (Thurstone, 1938). El cuarto test estaba formado por tareas donde se mostraba un recorrido en una cuadrícula con métrica Manhattan y cuatro secuencias de órdenes formada por las instrucciones básicas adelante, atrás, giro derecha, giro izquierda. Las tareas pretendían emular actividades desenchufadas de robots de suelo donde era necesario utilizar el sistema de referencia solidario a la imagen orientada del robot.

El análisis de los resultados muestra que no existen diferencias significativas de género en la tasa de acierto de ninguno de los tests. A su vez, no se encuentran correlaciones significativas entre los resultados de los diferentes tests, es decir, buenos o malos resultados de un sujeto en un test no implican buenos o malos resultados en los otros tests. Como consecuencia, cabría pensar que cada uno de los tests evalúa una subcompetencia diferente de la rotación mental.

Agradecimientos

Realizado al amparo del proyecto UV-SFPIE_PIEC-2736765 de la Universitat de València y del proyecto CIGE/2023/103 de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Hahn, N., Jansen, P. y Heil, M. (2010). Preschoolers' mental rotation of letters: Sex differences in hemispheric asymmetry. *Cognitive Neuroscience, 1*, 261–267. https://doi.org/10.1080/17588928.2010.485248

Jansen, P., Schmelter, A., Quaiser-Pohl, C., Neuburger, S. y Heil, M. (2013). Mental rotation performance in primary school age children: Are there gender differences in chronometric tests? *Cognitive Development, 28*(1), 51–62. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2012.08.005

Levine, S. C., Huttenlocher, J., Taylor, A. y Langrock, A. (1999). Early sex differences in spatial skill. *Developmental Psychology, 35*(4), 940–949. https://doi.org/10.1037/0012-1649.35.4.940

Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. University of Chicago Press.

García-Marques, M. E., Diago, P. D. y Arnau, D. (2024). Análisis de la rotación mental en alumnado de educación infantil: una comparativa de cuatro tests. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 589). SEIEM.

THINKING CLASSROOMS: PERCEPCIÓN DEL ALUMNADO EN FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

Thinking Classrooms: teaching training students' perception

Gómezescobar, A.[a], De la Fuente, A.[a], Garrido-Martos, R.[a], Benito, A.[a] y Morales, L.[b]

[a]Universidad Autónoma de Madrid, [b]IES Gran Capitán

El modelo de *Thinking Classrooms* o Aulas para pensar de Liljedahl (2020) se centra en la resolución de problemas para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a través de grupos aleatorios que trabajan en superficies verticales borrables, facilitando la colaboración y el intercambio de ideas intra e intergrupo. El docente guía a los estudiantes con preguntas orientadoras que los conducen hacia la resolución de problemas de forma independiente. Al final de cada sesión, se realiza una consolidación colectiva para revisar los conceptos clave y las estrategias de resolución utilizadas por los distintos grupos.

El objetivo de la propuesta es analizar las percepciones de los estudiantes en Formación Inicial Docente sobre la metodología *Thinking Classrooms* a partir de sus creencias respecto al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) (Aguilar et al., 2022). La muestra se conforma con 47 estudiantes del Grado en Maestro/a en Educación Primaria y 48 del Grado en Maestro/a en Educación Infantil. Se realiza un estudio exploratorio analizando los resultados de un cuestionario online, que cuenta con dos preguntas abiertas sobre los beneficios y perjuicios de la metodología y, además, se pide valorar ítems con una escala Likert de 1 a 5 su grado de implicación, colaboración entre componentes del grupo asignado aleatoriamente, el intercambio de ideas/estrategias con el resto de grupos, el conocimiento y uso de estrategias para resolver la tarea, la disminución del miedo al error, la flexibilidad, la innovación, el uso de contenidos matemáticos previos, el aprendizaje de contenidos matemáticos nuevos, el tiempo de adaptación, la gestión de tiempo, la adaptación de la variedad de estilos de aprendizaje, la resistencia hacia la metodología y el impacto sobre los resultados de aprendizaje.

En las preguntas abiertas, analizadas a partir de categorías deductivas, se destacan como beneficios: el aprendizaje en grupo aleatorio; un ambiente positivo en el aula, aunque determinan que se genera un ambiente ruidoso; el dinamismo a través del uso de pizarras verticales; el hecho de prestar mayor atención a la tarea o el desarrollo de las habilidades de razonamiento y aplicación práctica de contenidos. En cuanto al análisis cuantitativo, se obtienen resultados positivos, por encima de 3 puntos en todos ellos. Destacan la implicación en la tarea propuesta, la colaboración e intercambio de ideas y estrategias entre estudiantes del mismo grupo, el grado de innovación de la metodología utilizada, el uso de contenidos matemáticos previos para resolver la tarea, la flexibilidad de la metodología y la valoración positiva para el aprendizaje de contenidos matemáticos nuevos.

Referencias

Liljedahl, P. (2020). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Corwin Mathematics Series.

Aguilar-González, Á., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). Las creencias y su papel en la determinación de relaciones entre elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. C. Yáñez, M. Á. M. Navarro y N. C. Rodríguez (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino.* (pp. 109–120). Dykinson, S.L. https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.13

Gómezescobar, A., De la Fuente, A., Garrido-Martos, R., Benito, A. y Morales, L. (2024). Thinking classrooms: percepción del alumnado en formación inicial docente. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 590). SEIEM.

USO DEL REKENREK PARA ENSEÑAR HABILIDADES NUMÉRICAS A UN ESTUDIANTE CON AUTISMO

Use of rekenrek to teaching numeracy skills to a student with autism

González-de Cos, L.[a], Polo-Blanco, I. [a], Bruno, A.[b], Tregón, N [c] y Goñi-Cervera, J.[c]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de La Laguna, [c]Universidad de Zaragoza

Estudios recientes ponen de manifiesto dificultades en la adquisición de habilidades matemáticas tempranas en alumnado con trastorno del espectro autista (TEA), concretamente en la adquisición del conteo y de la cardinalidad (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, 2024). La investigación con alumnado con TEA ha señalado la eficacia de la secuencia denominada Concreta-Representacional-Abstracta (CRA) para la adquisición de contenidos matemáticos básicos (Flores et al., 2014). Por otra parte, los materiales manipulativos, como el ábaco rekenrek, se muestran útiles en alumnado con dificultades de aprendizaje (Tournaki et al., 2008).

Se presentan los resultados de un estudio cuyo objetivo ha sido analizar la eficacia de la secuencia CRA en el aprendizaje de la cardinalidad, la comparación de cantidades y la iniciación a la suma, empleando el rekenrek, tanto manipulativo como representado en papel. Se ha realizado un estudio de caso, con una metodología descriptiva, en el que se ha evaluado una secuencia de instrucción, con un estudiante de 5 años, diagnosticado con TEA, escolarizado en 1.º de Educación Primaria. Las sesiones de instrucción siguieron la secuencia ejemplificación, práctica guiada y práctica independiente, frecuentemente empleada en alumnado con dificultades de aprendizaje. Las actividades comenzaron con la representación de cantidades, intentando que el estudiante recurriera en lo posible a la subitización, se continuó con la comparación de dos cantidades, y, por último se introdujo la suma de cantidades representadas en las dos filas del ábaco. Los resultados sugieren que la intervención realizada con la secuencia CRA, y con el uso del rekenrek, se ha adaptado al perfil individual del estudiante, permitiéndole avanzar en su conocimiento numérico previo. También se evidenció el uso inicial de estrategias de conteo que fueron evolucionando hacia la subitización de cantidades, propiciadas por las características del rekenrek. Se muestran los avances del aprendizaje numérico del estudiante, así como las acciones de la instructora que le permitieron superar sus dificultades.

Agradecimientos

Proyectos PID2022-136246NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE, y SUBVTC-2023-0014, financiado por el Gobierno de Cantabria.

Referencias

Fernández-Cobos, R. y Polo-Blanco, I. (2024). Early math competence in students with autism. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 59*(2), 165–178.

Flores, M. M., Hinton, V. M., Strozier, S. D. y Terry, S. L. (2014). Using the concrete-representational-abstract sequence and the strategic instruction model to teach computation to students with autism spectrum disorders and developmental disabilities. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 49*(2), 547–554.

Tournaki, N., Bae, Y. S. y Kerekes, J. (2008). Rekenrek: A manipulative used to teach addition and subtraction to students with learning disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal 6*(2), 41–59.

González-de Cos, L., Polo-Blanco, I., Bruno, A., Tregón, N. y Goñi-Cervera, J. (2024). Uso del rekenrek para enseñar habilidades numéricas a un estudiante con autismo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 591). SEIEM.

TAREAS DE COMPARACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE LA SECUENCIA CONCRETA-REPRESENTACIONAL-ABSTRACTA EN UNA NIÑA CON AUTISMO

Numeracy comparison tasks using the concrete-representational-abstract sequence by a girl with autism

Goñi-Cervera, J.[a], Polo-Blanco, I. [b], Bruno, A.[c], Tregón, N. [a] y González-de Cos, L.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Universidad de Cantabria, [c]Universidad de La Laguna

Las habilidades matemáticas tempranas se han mostrado predictoras de aprendizajes futuros de esta materia (Duncan et al., 2007), y entre ellas destaca la comparación de cantidades. Algunos estudios (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, 2024) muestran que el alumnado con autismo tiene más dificultades que sus compañeros de desarrollo típico en matemática temprana. Dada la importancia de intervenir tempranamente en alumnado con autismo, presentamos un estudio basado en una instrucción explícita con la secuencia Concreta-Representacional-Abstracta (CRA; Mercer y Miller, 1992) en el que se observa la progresión de una niña de 5 años con autismo al resolver tareas de comparación numérica. Las sesiones se introdujeron secuencialmente: en la fase concreta se comparaba el cardinal de dos colecciones de 1 a 5 objetos, en la fase representacional el cardinal de dos colecciones de 1 a 5 objetos dibujados y en la fase abstracta, se comparaban dos números del 1 al 5. Esta última fase se combinaba con materiales y/o representaciones, fusionando las fases concreta-abstracta y representacional-abstracta. Los resultados muestran una mejoría durante la instrucción, observándose mayores dificultades en las tareas de comparación tipo "menos que" en las fases concreta y representacional. Además, el cambio de terminología en la fase abstracta resultó en mayor dificultad de comprensión de las tareas, probablemente debido al cambio de terminología (e.g., "mayor qué" en vez de "más que"). Las ayudas por parte de la instructora se centraron en reforzar mediante pictogramas las palabras clave (e.g., "más", "menos", "mayor" …) y atraer la atención de la niña mediante el juego. La instrucción se apoyó en las fortalezas características de la población con autismo, entre las que pueden destacar un pensamiento predominantemente visual y una buena adaptación a las rutinas (Grandin, 1995). Como implicaciones didácticas, resaltar la elección de temas de interés para la niña y el diseño de las tareas con instrucciones claras, así como la importancia de llevar a cabo intervenciones tempranas en alumnado con autismo.

Agradecimientos

Proyectos PID2022-136246NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE, y SUBVTC-2023-0014, financiado por el Gobierno de Cantabria.

Referencias

Duncan G. J., Dowsett C. J., Claessens A., Magnuson K., Huston A. C., Klebanov P., Pagani L. S., Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K y Japel C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology* 43(6), 1428–1446. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428

Fernández-Cobos, R. y Polo-Blanco, I. (2024). Early math competence in students with autism. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 59(2), 165–178.

Grandin, T. (1995). *Thinking in pictures*. New York, NY: Vitage Books

Mercer, C. y Miller, S. P. (1992). Teaching students with learning problems in math to acquire, understand, and apply basic math facts. *Remedial and Special Education,* 13(3), 19–35. https://doi.org/10.1177/074193259201300303

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., Bruno, A., Tregón, N. y González-de Cos, L. (2024). Tareas de comparación numérica mediante la secuencia concreta-representacional-abstracta en una niña con autismo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 592). SEIEM.

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS E IDENTIFICACIÓN DE ERRORES DE LOS MAESTROS EN FORMACIÓN EN LA LECTURA DE DIAGRAMAS DE BARRAS

Problem-posing and the identification of pre-service teachers' mistakes in reading bar diagrams

Guerra-Ones, V., Perdomo-Díaz, J., Torres-González, M.D. y Almeida-Cabrera, R.

Universidad de La Laguna

Las representaciones gráficas desempeñan un rol esencial en el desarrollo del sentido estocástico, por su utilidad para comunicar información. Por tanto, el desarrollo del pensamiento estadístico en los futuros maestros debe fomentar tanto la habilidad de representar e interpretar gráficos de datos, como la de formular problemas estadísticos a partir de ellos. Existen investigaciones que han identificado dificultades y errores conceptuales de los futuros profesores de educación primaria relacionados con la representación de gráficos estadísticos (e.g. Izaguirre et al, 2023).

El objetivo de este trabajo es identificar los errores que los docentes en formación cometen cuando se les pide formular un problema estadístico a partir de la lectura e interpretación de un gráfico estadístico dado, en este caso, un diagrama de barras. El estudio se ha realizado con 27 estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria, usando como instrumento una actividad de formulación de problemas semiestructurada, donde hay que analizar previamente una imagen (Embid et al., 2023). Se analizaron tres variables: lectura del diagrama de barras, definición de la variable y su clasificación como variable estadística. Los resultados muestran errores en la lectura del gráfico estadístico, como intercambiar el rol de los ejes o interpretar el diagrama de barras como un histograma, que también han sido observados en otros estudios (e.g. Whitaker y Jacobbe, 2017) y también con la definición de la variable estadística.

En el póster se muestran los resultados generales del estudio, en términos de que la lectura del diagrama, la definición y clasificación de la variable estadística fueran correctos o no, así como ejemplos de respuestas que evidencian el potencial de la formulación de problemas como herramienta para detectar dificultades y errores conceptuales.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo del Proyecto PID2022-139007NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

Referencias

Embid, S., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., García-Alonso, I. y Sosa-Martín, D. (2023). Errores en la formulación de problemas de fracciones y efectos de la variable situación en futuros docentes de primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 219–226). SEIEM.

Izagirre, A., Anasagasti, J. y Berciano, A. (2023). Conocimiento estadístico del futuro profesorado de educación primaria en la representación de datos. *AIEM -Avances de investigación en educación matemática*, 24,111–130. https://doi.org/10.35763/aiem24.4646seiem.es

Whitaker, D. y Jacobbe, T. (2017). Students' Understanding of Bar Graphs and Histograms: Results From the LOCUS Assessments. *Journal of Statistics Education,* 25 (2), 90–102. https://doi.org/10.1080/10691898.2017.1321974

Guerra-Ones, V., Perdomo-Díaz, J., Torres-González, M.D. y Almeida-Cabrera, R. (2024). Formulación de problemas e identificación de errores de los maestros en formación en la lectura de diagramas de barras. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 593). SEIEM.

ESTRUCTURAS DE COMPROMISO DE DOCENTES DURANTE LA CREACIÓN DE UN CÓDIGO DE SEGURIDAD

Teachers' Engagement structures during the building of a security code

Irigoyen-Carrillo, M. E.[a], González-Astudillo, M. T.[a] y Alvarado-Monroy, A.[b]

[a]Universidad de Salamanca, [b]Universidad Juárez del Estado de Durango

La investigación sobre el compromiso matemático ha abordado con frecuencia dimensiones cognitivas, afectivas y conductuales, en las que se ve implicado el contexto social y cultural, así como las interacciones personales (Goldin et al., 2017; Middleton et al. 2017; Warner, et al. 2019). Durante la resolución de una tarea matemática el compromiso de una persona resulta variable; la atención y el propósito dirigido a la actividad puede cambiar en la medida que la persona la experimenta.

En un intento por capturar los patrones de comportamiento de una persona al involucrarse con las matemáticas en contextos sociales se recurre a las estructuras de compromiso (Goldin et al., 2011). El deseo motivador, los rasgos de personalidad, los sentimientos y reacciones emocionales del individuo, así como el conjunto de creencias y valores, se ven implicados, interactuando dinámicamente entre sí. En dichas estructuras las interacciones con la cognición matemática, incluidas las estrategias de resolución de problemas y la heurística resultan ser relevantes (Niss y Højgaard, 2019).

En el presente póster se analizan las estructuras de compromiso de tres docentes de educación preuniversitaria, en México, al experimentar una tarea relativa a una misión de rescate y seguridad para la que es necesario crear un código de seguridad proponiendo una regla de correspondencia biunívoca entre dos conjuntos. Para ello, se ha considerado la metodología de estudio de caso (Yin, 2018), a fin de identificar formas de actuación y participación recurrentes. La diversidad de estrategias, el desarrollo de la creatividad y la argumentación en la elaboración de métodos de cifrado de información dio cuenta de las formas de participación de los docentes, reconociendo las distintas estructuras de compromiso a lo largo de la tarea.

Referencias

Goldin, G., Epstein, Y., Schorr, R. y Warner, L. (2011). Beliefs and engagement structures: behind the affective dimension of mathematical learning. *ZDM Mathematics Education*, 43, 547-560.

Goldin, G. A. (2017). Motivating desires for classroom engagement in the learning of mathematics. En C. Andrà, D. Brunetto, E. Levenson y P. Liljedahl (Eds.), *Teaching and learning in maths classrooms* (pp. 219–229). Springer.

Middleton, J., Jansen, A. y Goldin, G. (2017). The complexities of mathematical engagement: Motivation, affect, and social interactions. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 667–699). National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. y Højgaard, T. (2019) Mathematical competencies revisited. *Education Studies in Mathematics*, 102, 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Yin, R. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods*. SAGE Publications Ltd.

Warner, L. y Schorr, R. (2019). Engagement Structures and the Development of Mathematical Ideas. En Chamberlin, S.A., Sriraman, B. (Eds.), *Affect in Mathematical Modeling. Advances in Mathematics Education* (pp. 67-85). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_5

Irigoyen-Carrillo, M. E., González-Astudillo, M. T. y Alvarado-Monroy, A. (2024). Estructuras de compromiso de docentes durante la creación de un código de seguridad. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 594). SEIEM.

WHICH ONE DOESN´T BELONG?: DESARROLLANDO COMPETENCIAS PROFESIONALES DEL FUTURO PROFESORADO DE INFANTIL

Which one doesn't belong? Developing professional competencies of future early childhood teachers

Joglar-Prieto, N.[a], Domínguez, E.[a], Murcia, J. A.[a], Méndez, M.[a], Ramírez-García, M.[b] y Cid, A. I.[c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]C. U. La Salle, [c]Universidad Rey Juan Carlos

La formación inicial didáctico-matemática del profesorado de Educación Infantil está recibiendo mucha atención desde la investigación en los últimos años, resultando cada vez más necesario combinar enfoques teóricos y prácticos para ayudar a los futuros docentes a desarrollar competencias profesionales como son la habilidad de diseñar situaciones de aprendizaje matemático y la mirada profesional o *noticing* (Joglar-Prieto *et al*., 2021). Con el objetivo de dar respuesta a este problema, se plantea el trabajo en una comunidad de práctica (Wenger, 1998) compuesta por formadores-investigadores y maestras en ejercicio, para diseñar una tarea formativa dirigida a estudiantes del Grado en Maestro en Educación Infantil siguiendo una metodología de investigación basada en diseño (Molina et al., 2011). Se pretende que los futuros docentes diseñen una situación de aprendizaje que facilite el trabajo con colecciones de objetos, promoviendo prácticas matemáticas como el razonamiento, el uso de diferentes registros de representación y la precisión. El punto de partida de la tarea formativa es ponerlos en el papel de resolutores de actividades del tipo *Which one doesn´t belong* (Danielson, 2016), para, posteriormente, realizar un análisis didáctico de la situación vivida que les permita hacer un primer diseño adaptado al alumnado de 3, 4 y 5 años. La propuesta elaborada en esta primera iteración es llevada al aula de infantil y videograbada en colaboración con las maestras participantes, para refinar el diseño desde la experiencia práctica. Nuevamente, de vuelta al aula universitaria, el estudiante refina su diseño a través del visionado de los episodios usando una pauta para detectar e interpretar evidencias de aprendizaje matemático de los niños y niñas. Se consiguen dos productos: por un lado, una tarea formativa dirigida a los estudiantes del citado grado, y por otro una situación de aprendizaje dirigida al alumnado de infantil. Ambos productos servirán como punto de partida de un nuevo ciclo de investigación. El enriquecimiento de todos los participantes de la comunidad de práctica construida en el proceso ha sido bidireccional, permitiendo el desarrollo profesional de todas las personas implicadas.

Referencias

Danielson, C. (2016). *Which One Doesn't Belong? A Shapes Book, Teacher's Guide with Student Book*. Routledge.

Joglar-Prieto, N., Belmonte, J. M., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Pizarro, R. N., Ramírez-García, M. y Méndez, M. (2021). El papel de una tarea formativa sobre el número en el desarrollo de la competencia noticing del futuro maestro de Educación Infantil. En GIDIMAT-UA (Ed.), *Ideas para la educación matemática: Perspectivas desde el trabajo de M.ª Luz Callejo de la Vega* (pp. 183–203). GIDIMAT-UA.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge University Press.

Joglar-Prieto, N., Domínguez, E., Murcia, J. A., Méndez, M., Ramírez-García, M. y Cid, A. I. (2024). Which one doesn´t belong?: desarrollando competencias profesionales del futuro profesorado de infantil. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 595). SEIEM.

MTSK EN EDUCACIÓN INFANTIL: CONOCIMIENTO PRETENDIDO PARA EL DISEÑO DE TAREAS FORMATIVAS

MTSK in early childhood education: intended knowledge for the design of formative tasks

Joglar-Prieto, N.[a], Ramírez-García, M.[b], Liñán-García, M.M.[c] y Muñoz-Catalán, M.C.[c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]La Salle Centro Universitario, [c]Universidad de Sevilla

En el ámbito de la formación inicial del profesorado de Educación Infantil hay una creciente preocupación por identificar el conocimiento especializado que deben construir los estudiantes a través de las tareas formativas que se les plantean. En este trabajo se propone que este conocimiento proceda de situaciones de aprendizaje reales videograbadas, ricas en conocimiento especializado para enseñar matemáticas. Para ello, el conocimiento movilizado por los docentes grabados, enriquecido con el conocimiento evocado tanto a los investigadores (Liñán-García et al., 2021), como a otros profesionales relacionados con esta práctica (como maestras en ejercicio), va a constituir el conocimiento pretendido por los formadores para los futuros maestros (Barrera-Castarnado et al., en prensa).

En particular, en esta propuesta se toma como punto de partida un episodio en el que una maestra de Educación Infantil, con experiencia docente y en la formación permanente, trabaja descomposiciones aditivas de números naturales con su alumnado de 5 años. Ella desarrolla una sesión basada en la metodología Number talks (Parrish, 2022), usando un Rekenrek. Utilizando el modelo analítico MTSK (Carrillo et al., 2018), se analiza el conocimiento movilizado por la informante en el episodio, y se complementa con el conocimiento evocado a un grupo de maestras de la etapa de infantil y a formadoras-investigadoras que constituyen desde hace tiempo una comunidad de práctica (Wenger, 1998). Se obtiene así el conocimiento pretendido que sustentará el diseño de tareas formativas para el profesorado de infantil sobre la descomposición del número natural. Esta colaboración no solo ayuda a diseñar tareas formativas basadas en tareas profesionales, sino que también favorece el desarrollo profesional de todos los implicados en la comunidad.

Agradecimientos: Proyecto I+D+i RTI2018-096547-B-I00; Proyecto Junta de Andalucía (ProyExcel_00297); Red MTSK AUIP.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Barrera-Castarnado, V.J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M.C. y Liñán-García, M.M. (En prensa). Conocimiento especializado del profesor: un experimento de enseñanza centrado en una tarea formativa sobre geometría. *AIEM*, https://doi.org/10.35763/aiem26.5359

Liñan-García, M.M., Muñoz-Catalán, M.C., Contreras, L.C. y Barrera-Castarnado, V.J. (2021). Specialised Knowledge for Teaching Geometry in a Primary Education Class: Analysis from the Knowledge Mobilized by a Teacher and the Knowledge Evoked in the Researcher. *Mathematics, 9*(21), 2805. https://doi.org/10.3390/math9212805

Parrish, S. (2022). *Number talks: Whole number computation*. Heinemann.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. New York: Cambridge University Press.

Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M., Liñán-García, M.M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2024). MTSK en Educación Infantil: conocimiento pretendido para el diseño de tareas formativas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 596). SEIEM.

EVALUACIÓN DE LAS ACTITUDES Y ANSIEDAD HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ALUMNADO DE UN IES DE CASTELLÓN: ESTUDIO DE CASO

Evaluation of attitudes and anxiety towards mathematics in students of a secondary school in Castellón: a case study

Juan-Gallego, M.[a], Santágueda-Villanueva, M.[b] y Juan-Verdoy, P.[c]

[a]Universitat Jaume I, [b]Departament d'Educació i Didàctiques Específiques, UJI,

[c]Departament Matemàtiques, UJI.

Actualmente, España se encuentra entre los países donde el alumnado muestra más ansiedad ante las matemáticas (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 2022, p. 135), lo que provoca una peor disposición hacia la asignatura (Nortes-Martínez-Artero y Nortes-Checa, 2019).

El objetivo de este trabajo es evaluar la actitud y ansiedad hacia las matemáticas en el alumnado de un instituto público de la provincia de Castellón. Para ello se ha utilizado una adaptación al cuestionario sobre las actitudes y ansiedad hacia las matemáticas de Mato (2006), que hace uso de la escala Likert. Se pretende evaluar las emociones del alumnado, con el objetivo de identificar qué variables tienen mayor impacto sobre el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas.

La muestra la conforman 77 alumnos distribuidos entre 3.º ESO, 4.º ESO y 1.º Bachillerato. Se trata de una investigación cuantitativa de tipo descriptivo que busca caracterizar una situación concreta. Los cuestionarios se respondieron anónimamente a través de un formulario de Google Sites (con los portátiles proporcionados por el centro) durante una sesión de aula. El análisis de datos se ha realizado mediante el paquete estadístico Jamovi en la versión 2.4.11. Se concluye que existe una correlación significativa en relación con los resultados académicos en matemáticas en múltiples variables. En líneas generales, existe desmotivación y falta de confianza en sus habilidades por aprender la asignatura. Además, se muestra que el género femenino presenta valores significativamente superiores de ansiedad matemática frente al masculino. La correlación entre actitud y rendimiento académico resulta positiva (R = 0,611). Por el contrario, la correlación entre ansiedad y rendimiento resulta negativa (R = –0,281), del mismo modo que entre ansiedad y actitud (R =- –0,321).

Agradecimientos

Este estudio ha recibido la financiación de la UJI (UJI-A2022-01 y 50403/24).

Referencias

Ministerio de Educación y Ciencia [MEC]. Instituto de Evaluación. (2022). *PISA 2022 Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe Español.* https://www.libreria.educacion.gob.es/libro/pisa-2022-programa-para-la-evaluacion-internacional-de-los-estudiantes-informe-espanol_183950/

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. (2019). ¿A mayor ansiedad menor rendimiento en matemáticas? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 453–462). Valladolid: SEIEM.

Mato, Mª. D. (2006). *Diseño y validación de dos cuestionarios para evaluar las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas en alumnos de educación secundaria obligatoria.* [Tesis de Doctorado, Universidade da Coruña]. Repositorio Universidade da Coruña.

Juan-Gallego, M., Santágueda-Villanueva, M. y Juan-Verdoy, P. (2024). Evaluación de las actitudes y ansiedad hacia las matemáticas en a de un IES de Castellón: estudio de caso. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 597). SEIEM.

PERCEPCIONES DEL ALUMNADO SOBRE APRENDIZAJE COOPERATIVO Y AUTORREGULACION EN CONTEXTOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO DE CASO

Student's Perceptions about Cooperative Learning and Self-Regulation in Problem Solving Contexts: A Case Study

Landa, J. [a], Berciano, A.[a] y Marbán, J. M.[b]

[a]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, [b]Universidad de Valladolid

La adquisición de habilidades matemáticas desde las primeras edades resulta ser un buen predictor de éxito académico futuro del alumnado. En este sentido, la formación inicial del profesorado de Primaria y, en particular, la adquisición de niveles altos de autorregulación ante la resolución de problemas matemáticos se antoja crucial para alcanzar tal fin (Hidalgo-Moncada et al., 2021). Asimismo, el aprendizaje cooperativo es un enfoque metodológico apropiado para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y, especialmente, para la resolución de problemas en cualquier etapa escolar (Herrada y Baños, 2018).

El objetivo de este estudio es identificar las percepciones que el alumnado manifiesta tener sobre autorregulación del aprendizaje y aprendizaje cooperativo en contextos de resolución de problemas matemáticos tras el desarrollo de una propuesta didáctica basada en los principios del aprendizaje cooperativo, trabajando, en particular, en agrupaciones de 4 o 5 estudiantes que asumen roles específicos que van rotando. La implementación se llevó a cabo durante 4 semanas y los problemas matemáticos abarcaron contenidos básicos de todas las áreas de la matemática escolar. Este estudio, que forma parte de uno mayor y que queda enmarcado en una primera fase exploratoria de este, se ajusta a un diseño metodológico propio de un estudio de caso con un único participante, estudiante de primer curso del grado de Educación Primaria de la UPV/EHU, buscando un primer acercamiento global a la realidad del aula que permita posteriormente profundizar sobre las implicaciones que la propuesta didáctica tiene realmente en el nivel de autorregulación del alumnado.

Los resultados sugieren que este estudiante percibe los principios del aprendizaje cooperativo positivamente, destacando que le ayudan a fomentar la interacción entre iguales y, con respecto a su nivel de autorregulación, menciona que su persistencia ante la tarea aumenta, porque dedica más tiempo a la tarea al tiempo que comenta que es capaz de razonar y pensar más profundamente gracias a las conversaciones con sus compañeros y compañeras de grupo. En definitiva, parece que la implementación contribuye a la mejora de su percepción de su nivel de autorregulación hacia la resolución de problemas matemáticos. Esto plantea una línea futura de investigación sobre las características que emergen en el grupo de clase relacionadas con la mejora de la autorregulación en el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Referencias

Herrada, R. I. y Baños, R. (2018). Experiencias de aprendizaje cooperativo en matemáticas. Espiral. *Cuadernos del Profesorado*, 11(23), 99-108.

Hidalgo-Moncada, D., Vanegas, Y. y Díez-Palomar, J. (2021). Prácticas de autorregulación del aprendizaje de las matemáticas promovidas por futuros profesores. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 335 – 342). SEIEM.

Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J.M. (2024). Percepciones del alumnado sobre aprendizaje cooperativo y autorregulación en contextos de resolución de problemas: un estudio de caso. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 598). SEIEM.

LA PROPORCIONALIDAD EN UN PROYECTO STEAM: UN ESTUDIO DE CASO

Proportionality in a STEAM Project: a case study

Landa, J. , Anasagasti, J. y Berciano, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Diversas investigaciones en diferentes contextos educativos respaldan ampliamente los beneficios de la educación STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas) en el desarrollo del aprendizaje del alumnado en secundaria. La educación STEAM se centra en la aplicación del conocimiento en contextos del mundo real y suelen implicar resolución de problemas que requieren pensamiento crítico y creatividad (Wahyuningsih et al., 2020). Este enfoque va en línea con los estándares de procesos matemáticos del National Council of Teachers of Mathematics (2000) siguientes: el razonamiento, la representación, la conexión, la comunicación y la resolución de problemas. Por otro lado, a lo largo de la educación básica, se debe desarrollar el sentido numérico, considerado como un constructo troncal referido a la comprensión profunda y flexible de los números y las relaciones entre ellos (Bruno, 2023); lo que proporciona la base para comprender y trabajar la proporcionalidad, entre otros.

El objetivo del presente estudio es analizar los estándares de procesos matemáticos que emergen al trabajar la proporcionalidad en un contexto STEAM, denominado "Sorginkeria eta Sukaldea", llevado a cabo en un centro público del País Vasco con alumnado de segundo de educación secundaria. A lo largo de la implementación, el centro establece una conexión entre la brujería, los procesos químicos y la cocina, con el fin de entender y trabajar distintos contenidos curriculares históricos, químicos, físicos y matemáticos involucrados (extraídos del currículo), entre otros.

Los resultados preliminares muestran que, con respecto a la proporcionalidad, se trabajan: 1) la conexión (inter-matemática) y la resolución de problemas, por medio del establecimiento de una tarea referida a la determinación de qué descuentos de distintos supermercados son mejores, 2) la representación, por medio del análisis de anuncios de promociones de supermercados (2x1, 70% de descuento…) y 3) la conexión (intra-matemática) en la realización de cálculos y clasificaciones de orden numéricas. Estos primeros resultados nos abren una línea de investigación para profundizar en la viabilidad y repercusión de la incorporación de los estándares de procesos matemáticos en la alfabetización numérica del alumnado a lo largo de este proyecto STEAM.

Agradecimientos

Parcialmente financiado por proyecto de investigación Hezkuntza23/01 y grupo GIU21/031.

Referencias

Bruno, A. y Almeida, R. (2023). Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula desecundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 27-41). SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* NCTM.

Wahyuningsih, S., Nurjanah, N. E, Rasmani, U. E. E, Hafidah, R., Pudyaningtyas, A.R. y Syamsuddin, M. M. (2020). STEAM learning in early childhood education: A literature review. *International Journal of Pedagogy and Teacher Education, 4*(1), 33-44. https://dx.doi.org/10.20961/ijpte.v4i1.39855

Landa, J., Anasagasti, J. y Berciano, A. (2024). Análisis de la inserción de los procesos matemáticos en el uso de la proporcionalidad en un proyecto STEAM. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 599). SEIEM.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN POR UN ALUMNO CON AUTISMO

Multiplication and division problem solving by a student with autism

Laso-Munitis, L., González-de Cos, L., Fernández-Cobos, R. y Polo-Blanco, I.

Universidad de Cantabria

Los estudiantes con trastorno del espectro del autismo (TEA) muestran de manera generalizada más dificultades en matemáticas que sus compañeros de desarrollo típico, concretamente suelen presentar mayores dificultades en la resolución de problemas matemáticos (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, 2024).

Algunos autores han demostrado cómo metodologías basadas en esquemas se muestran útiles para ayudar a estudiantes con dificultades de aprendizaje a mejorar su desempeño en la resolución de problemas (Clausen et al., 2021). En el trabajo que se presenta se muestra un estudio de caso de cómo un estudiante de 14 años con TEA se enfrenta a problemas de razón de multiplicación y de división partitiva en el contexto de una Instrucción Basada en Esquemas Modificada (MSBI).

En particular, se explicitan detalles acerca de cómo la metodología propuesta equilibra la instrucción y facilita el aprendizaje del estudiante, promoviendo la autonomía y permitiéndole progresar en los contenidos a través de sus propias estrategias informales. Se destaca el carácter individualizado de la instrucción, así como la elaboración de recursos y apoyos poniendo el foco en las necesidades educativas del participante. El análisis del progreso del estudiante, junto con los recursos y apoyos que se explican, pueden resultar útiles para el profesorado; especialmente, para aquellos docentes que dirigen su labor educativa hacia alumnado con características similares, que buscan profundizar en las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

El presente estudio se enmarca en un proyecto más amplio que se está desarrollando dirigido a que estudiantes con TEA aprendan a resolver problemas aritméticos verbales y otros contenidos matemáticos.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos PID2022-136246NB-I00, financiado por MCIN/AEI / 10.13039/501100011033 / FEDER, UE, y SUBVTC-2023-0014, financiado por el Gobierno de Cantabria.

Referencias

Clausen, A.M., Tapp, M.C., Pennington, R.C., Spooner, F. y Teasdell, A. (2021). A systematic review of modified schema-based instruction for teaching students with moderate and severe disabilities to solve mathematical word problems. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities, 46*(2), 94-107. https://doi.org/10.1177/15407969211007561

Fernández-Cobos, R. y Polo-Blanco, I. (2024). Early math competence in students with autism. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 59*(2), 165–178.

Laso-Munitis, L., González-De Cos, L., Fernández-Cobos, R. y Polo-Blanco, I. (2024). Resolución de problemas de multiplicación y división por un alumno con autismo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 600). SEIEM.

INSTRUMENTO PARA VALORAR LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Instrument for assessing direct proportionality

Liviano-Carmona,V. y Caballero-Carrasco, A.

Universidad de Extremadura

La proporcionalidad es uno de los conceptos clásicos matemáticas presente en todos los niveles de la educación obligatoria. Smith (2002) afirma que "no hay área en la escuela elemental, tan rica matemáticamente, cognitivamente complicada y difícil de enseñar como fracciones, razones y proporcionalidad" (p. 3). Así, el alumnado presenta dificultades al resolver situaciones proporcionales sencillas. Nuestro objetivo es crear un instrumento para conocer tanto el nivel de adquisición del razonamiento proporcional como el procedimiento de resolución de problemas de proporcionalidad directa utilizado por el alumnado de primero de E.S.O.

El instrumento creado contempla toda la tipología de problemas existentes. Cramer y Post (1993) diferencian entre problemas de valor perdido, de comparación numérica y de comparación cualitativa. Atendiendo a la fenomenología presente en los enunciados, Oller (2012) distingue entre problemas relacionados con intercambios, con repartos, con préstamos y con mezclas y aleaciones. Lamon (1993) los caracteriza según sus características semánticas: problemas bien compactados (*well-chunked measures*), conjuntos asociados, parte-parte-todo y ampliadores y reductores. Además, debemos atender al contexto y a la estructura numérica del problema, relacionados con una mayor dificultad a la hora de acometer las tareas (Steinthorsdottir, 2006, citado por Martínez-Juste et al., 2019), así como la forma de representar el concepto de razón (Valverde, 2013).

El instrumento consta de 11 problemas en los que se ha tenido en cuenta toda la variabilidad anteriormente descrita y que combina las diferentes formas de representar el concepto, para que los datos obtenidos en su implementación sean amplios y su discusión con la bibliografía rica.

Agradecimientos

Esta investigación fue financiada por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y Junta de Extremadura, Proyecto GR21093.

Referencias

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). An action research experience to teach compound proportional situations. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 37*(2), 85. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2603

Oller, A. M. (2012). Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria. [Universidad de Valladolid].

Smith III, J. P. (2002). The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios. In G. Litwiller, G. Bricht (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 yearbook* (pp. 3-17). National Council of Teachers of Mathematics.

Valverde, G. (2013). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de Educación Primaria*. Universidad de Granada.

Liviano-Carmona, V. y Caballero-Carrasco, A. (2024). Instrumento para valorar la proporcionalidad directa. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 601). SEIEM.

FACETA COGNITIVA EN UNA TAREA PROAFECTIVA PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE LOS ALGORITMOS

Cognitive facet in a pro-affective task for the reconstruction of algorithms

Lois, C. [a], Sequeiros, P. G.[a], Núñez-García, C.[b] y Salgado, M.[b]

[a] Universidade de Santiago de Compostela, Facultade de Formación do Profesorado, Lugo

[b] Universidade de Santiago de Compostela, Facultade de Ciencias da Educación, Santiago de Compostela

Estudios como el de Marbán et al. (2020) apuntan que la evolución de los afectos hacia las matemáticas y su enseñanza durante la formación inicial del futuro profesorado de primaria puede ser negativa, lo que sugiere la necesidad de desarrollar y evaluar programas formativos que contribuyan a la adquisición de competencias didáctico-matemáticas haciendo hincapié en la faceta afectiva. Nos proponemos desarrollar una serie de actividades para la formación de maestros que incidan positivamente en su domino afectivo. Se trata de aportar modelos de tareas que evidencien alta idoneidad didáctica (Godino et al., 2023) y destaquen por su idoneidad afectiva.

En este póster se presenta el análisis de las configuraciones cognitivas de los estudiantes que surgen como respuesta a la tarea final de una secuencia didáctica que sirve como generatriz para la reconstrucción de los sistemas de numeración y el análisis didáctico de los algoritmos. Para el diseño de la secuencia didáctica se partió de la propuesta de Estepa (2006) y se reformuló el contexto de la actividad promoviendo el empleo de material manipulable (cubos encajables) con la idea de conferirle mayor idoneidad mediacional y afectiva.

La tarea se implementó con una muestra de 270 estudiantes del Grado en Maestro/a de Educación Primaria. El objetivo aquí es estudiar la idoneidad cognitiva, que evalúa el grado en que los significados pretendidos están en la zona de desarrollo potencial del alumnado, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados implementados (Godino et al., 2023). Todas las configuraciones identificadas son efectivas en el sentido de que resuelven la tarea, pero se distinguen distintos niveles en función del tipo de representación empleada (manipulativa, gráfica y simbólica) y del sistema de numeración subyacente.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-122326OB-I00 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033.

Referencias

Estepa, A. (2006). Reconstrucción de una organización matemática: Sistema de numeración posicional. Bases y relaciones entre ellas. En L. Ruíz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 339-358). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(6), em2270. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del domino afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (18), 73–86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

Lois, C., Sequeiros, P. G., Núñez-García, C., Salgado, M. (2024). Faceta cognitiva en una tarea proafectiva para la reconstrucción de los algoritmos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 602). SEIEM.

DESCUBRIENDO LAS PERMUTACIONES EN 6.º: UN ESTUDIO EN EL CONTEXTO EDUCATIVO DEL MÉTODO DE HEJNÝ

Discovering permutations in 6th grade: a study in the context of Hejný Method

López Centella, E.

Universidad de Granada

El *Método de Hejný* –o constructivismo genético (Kvasz y Pilous, 2020)– consiste en una forma específica de enseñar matemáticas basada en el paradigma constructivista y apoyada en la teoría de modelos genéricos (Hejný, 2012), adoptada por más de 750 de las 4100 escuelas checas de educación primaria y secundaria (www.h-mat.cz/en/Hejný-method). En los últimos años, se ha presentado evidencia de los efectos positivos del método en el aprendizaje del alumnado (e.g., Chytrý et al., 2020; Greger et al., 2022). En este contexto, desarrollamos un estudio de investigación cualitativa con el objeto de (a) identificar y describir las estrategias y representaciones utilizadas por estudiantes enseñados a través del Método de Hejný en la resolución de tareas matemáticas, y (b) analizar su capacidad de generalización. Participaron 23 estudiantes de sexto curso (11-12 años), instruidos a través del Método de Hejný durante sus cinco cursos escolares anteriores en una escuela pública de Praga. La fase experimental consistió en dos sesiones en que los participantes afrontaron, sin instrucción previa al respecto, tareas no estándar basadas en diversos contenidos matemáticos. Bajo un enfoque inspirado en la teoría fundamentada, analizamos sus producciones escritas. En este póster presentamos los resultados obtenidos relativos a una tarea sobre permutaciones que, mediante varias cuestiones, solicita el número de formas en que pueden abrocharse los botones de una chaqueta según el número de botones de esta. Pese a que la combinatoria se aborda en etapas posteriores a la primaria en el currículo educativo checo, los participantes lograron articular sus respuestas a través del uso de múltiples representaciones numéricas, verbales, tabulares, esquemáticas y pictóricas que, en buena medida, les condujeron a respuestas correctas. Los razonamientos exhibidos en casos particulares fueron generalizados por algunos participantes, descubriendo la noción y formulación de las permutaciones de los elementos de un conjunto (el razonamiento proporcional protagonizó algunos errores en este sentido). Destacamos la capacidad de los participantes para describir sus propias estrategias y justificar sus respuestas.

Agradecimientos

Estudio de investigación financiado por el Programa de Movilidad en Centros Extranjeros de Investigación «José Castillejo» del Ministerio de Universidades de España (Ref. CAS22/00550).

Referencias

Hejný, M. (2012). Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis scholae, 6*(2), 41-55. https://doi.org/10.14712/23363177.2015.39

Kvasz, L. y Pilous, D. (2020). Cognitive principles of genetic constructivism. *Didactica Mathematicae, 42*, 5-37. https://doi.org/10.14708/dm.v42i0.7062

Chytrý, V., Medová, J., Říčan, J. y Škoda, J. (2020). Relation between pupils' mathematical self-efficacy and mathematical problem solving in the context of the teachers' preferred pedagogies. *Sustainability, 12*(23), 10215.

Greger, D., Chvál, M., Martínková, P., Potužníková, E., Soukup, P. y Vondrová, N. (2022). *Hejný's Method of teaching mathematics in the TIMSS international survey. Final report.* PedF UK, Prague.

López Centella, E. (2024). Descubriendo las permutaciones en 6.º: un estudio en el contexto educativo del método de Hejn´y. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 603). SEIEM.

ESTRATEGIAS Y ERRORES DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN UN PROBLEMA VERBAL CON FRACCIONES

Strategies and errors of lower secondary students when addressing a word problem involving fractions

López Centella, E.

Universidad de Granada

Los problemas verbales han sido identificados durante décadas entre los más desafiantes para los estudiantes (Jupri y Drijvers, 2016; Pongsakdi et al., 2020). En este estudio de investigación cualitativa nos proponemos identificar aquellos errores que persisten en la resolución de problemas verbales por alumnado de educación secundaria tras ser instruido al respecto. Concretamente, nuestros objetivos de investigación son: (a) describir las estrategias y los errores de alumnado de segundo curso de educación secundaria al abordar un problema verbal con fracciones, y (b) analizar la potencial relación entre tales estrategias y errores. Para ello desarrollamos un estudio con 79 estudiantes (13-14 años) de un instituto público español. La intervención de aula incluyó un pretest y un postest, presentando cada uno de ellos 10 problemas verbales de distinta naturaleza a los participantes. Entre ambos tests mediaron 8 semanas durante las cuales los participantes fueron instruidos en álgebra por su profesorado (operaciones, expresiones algebraicas, ecuaciones de primer y segundo grado, sistemas de ecuaciones lineales, resolución de problemas verbales mediante ecuaciones, etc.). En este póster presentamos los resultados de nuestros objetivos en relación con la tarea «María ha gastado 3/5 de su sueldo en el alquiler de su vivienda y 2/7 de su sueldo en alimentación. Si tras estos gastos aún le quedan 200 € de su sueldo, ¿cuánto es el total de su sueldo?». Bajo un análisis de las producciones escritas de los participantes inspirado en la teoría fundamentada, identificamos las siguientes estrategias: (1) formulación de una ecuación, (2) obtención del dato incógnita mediante una aproximación aritmética parte-todo, (3) razonamiento proporcional (mediante reducción a la unidad por método numérico, pictórico o simbólico por regla de tres), (4) operaciones variadas no identificadas como ninguna de las anteriores estrategias. Entre los principales errores, destacamos: (1) identificación incorrecta del papel de las fracciones involucradas en el problema (entendidas como cantidades en sí mismas en lugar de como operadores), (2) formulación incorrecta de una ecuación (identificación incorrecta de relaciones entre elementos del problema y, en consecuencia, de las operaciones), (3) unión desajustada, en la representación pictórica de un todo, de partes relativas a distintas particiones de dicho todo; (4) representación pictórica incorrecta de la parte de un todo expresada por una fracción; (5) consideración de una relación aditiva entre cantidades no aditivas. Resalta el uso de estrategias aritméticas y pictóricas por más del 80% de participantes frente a su reciente instrucción en álgebra. Se constata el impacto de las carencias en la comprensión conceptual de las fracciones y las relaciones en las representaciones implicadas en estrategias tanto aritméticas como algebraicas.

Referencias

Jupri, A. y Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(9), 2481–2502. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1299a

Pongsakdi, N., Kajamies, A., Veermans, K., Lertola K., Vauras, M. y Lehtinen, E. (2020). What makes mathematical word problem-solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. *ZDM Mathematics Education, 52*(1), 33–34. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01118-9

López Centella, E. (2024). Estrategias y errores de estudiantes de secundaria en un problema verbal con fracciones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 604). SEIEM.

UN ESTUDIO DEL IMPACTO DE LA COMPRENSIÓN LECTORA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS

A study of the impact of reading comprehension on the resolution of additive problems

López-Iñesta, E. [a], Sanz, Maria T. [a], García-Costa, D. [a], Grimaldo, F. [a], Santágueda, M.[b], Álvarez, E.[a], Paniagua, S.[a] y Mocholí, P.[a]

[a]Universitat de València, [b]Universitat Jaume I

Para alcanzar un buen desempeño en la resolución de problemas aritméticos, la habilidad y la comprensión lectora resultan indispensables. De hecho, se trata de capacidades básicas que se trasladan a otras materias escolares donde es necesario plantear y resolver problemas. Para resolver problemas con éxito, se deben superar varias fases como leer, reflexionar, planificar estrategias, revisar el procedimiento, comprobar la solución y comunicar los resultados (Pólya, 1945). De hecho, distintas investigaciones han mostrado una correlación positiva entre el desempeño en la resolución de problemas y el nivel de compresión lectora en estudiantes de todos los niveles (Boonen et al., 2014; OCDE, 2019; Sanz et al., 2020). Sin embargo, resultados de pruebas como las PIRLS (2023) y los cambios en la adquisición de la competencia en lectoescritura (LOMLOE, 2022) muestran un descenso en la comprensión lectora del alumnado de primaria que tienen efectos en el rendimiento en la resolución de problemas.

En este trabajo se presenta el uso de un entorno tecnológico en un contexto relacionado con la Educación Matemática en la resolución de problemas aritméticos. Se trata de una aplicación informática diseñada ad-hoc para la investigación con la que se puede analizar cómo el alumnado interactúa con enunciados de problemas aritmético-verbales mientras lee y resuelve problemas. Se exponen los resultados preliminares de un cuestionario de problemas aritméticos aditivos de una etapa (cambio, combinación, comparación) basado en los trabajos de Riley et al. (1983) aplicado en 6 centros de la Comunidad Valenciana en la etapa de educación primaria a 210 estudiantes. Destaca el impacto de las complicaciones en la lectura del alumnado de primer curso lo que dificulta la resolución de problemas y cómo el paso a segundo curso supone una gran mejora en cuanto a la comprensión lectora y la resolución en problemas.

Referencias

Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J. y van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research, 68*(4), 15-26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

OCDE (2019). Marco Teórico de Lectura. PISA 2018. OECD Publishing. https://tinyurl.com/2cjvpnv5

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Riley, M. S., Greeno, J. G., y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153–196). New York: Academic Press.

Sanz, M. T., López-Iñesta, E., Garcia-Costa, D. y Grimaldo, F. (2020). Measuring Arithmetic Word Problem Complexity through Reading Comprehension and Learning Analytics. *Mathematics, 8*(9), 1556. https://doi.org/10.3390/math8091556

López-Iñesta, E., Sanz, Maria T., García-Costa, D., Grimaldo, F., Santágueda, M., Álvarez, E., Paniagua, S. y Mocholí, P. (2024). Un estudio del impacto de la comprensión lectora en la resolución de problemas aditivos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 605). SEIEM.

GEOMETRÍA APLICADA EN LA ENSEÑANZA ELEMENTAL DE LAS NIÑAS EN EL SIGLO XIX: LA CARTILLA DE LUCIANA CASILDA MONREAL

Applied geometry in the elementary education of girls in the 19th century: Luciana Casilda Monreal's book

Madrid, M.J.[a], León-Mantero, C.[b], Casas-Rosal, J.C.[b] y Maz-Machado, A.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba

La Ley de Instrucción pública de 1857 estableció distinciones entre la primera enseñanza elemental y superior de las niñas y la de los niños, y entre estas diferencias se incluye la omisión para las niñas de Principios de Geometría, Dibujo lineal y Agrimensura, que junto con otras materias se reemplazaba por, entre otras, Labores propias del sexo y Elementos de Dibujo aplicado a las mismas labores. Esto motiva la publicación de textos dirigidos específicamente a estos ámbitos para la primera enseñanza de la mujer, y entre ellos, se encuentran las tres partes de la Cartilla de geometría y dibujo aplicada a las labores y al corte para uso de las escuelas de niñas publicadas en 1884, 1885 y 1888 y escritas por Luciana Casilda Monreal, que indica en las obras ser profesora en las escuelas públicas de Madrid y Barcelona.

El objetivo de esta propuesta es analizar estos textos desde una perspectiva didáctico matemática que nos permita conocer más sobre cómo se enseñaba geometría a las niñas en la época. Para ello se ha realizado una investigación descriptiva de tipo histórico matemático que se centra en el análisis de textos del pasado a través del análisis de contenido siguiendo las directrices de Maz (2009).

La Cartilla de geometría y dibujo aplicada a las labores y al corte para uso de las escuelas de niñas está formada por tres partes, todas ellas breves, escritas con un lenguaje principalmente verbal e incluyendo varias láminas de dibujo para explicar los siguientes contenidos: líneas, rectas, ángulos, polígonos, triángulos, cuadrilateros, paralelogramos, circunferencia, círculo, polígono inscrito y circunscrito, figuras semajantes, aplicación de la geometría al corte y auxilio de las prendas, geometría, geometría plana y del espacio, rectas y planos, poliedros, primas, pirámides, poliedros regulares y cuerpos redondos, áreas, volúmenes y problemas.

La autora expone que esta obra se elabora a petición de muchas compañeras maestras para ocupar un vacío existente en la enseñanza de esta materia y valora la importancia de los conocimientos geométricos, tanto como cultura general, como por sus múltiples aplicaciones. Y es precisamente esto último un aspecto a destacar de la obra, su aplicación de la geometría a la costura, que se muestra incluso en algunos de los problemas que se plantean.

Otra cuestión a destacar en la obra es que aparecen en ella distintas advertencias y preguntas destinadas a apoyar en su enseñanza a las maestras que utilicen este libro.

Referencias

Ley de Instrucción pública autorizada por el Gobierno para que rija desde su publicación en la Península é Islas adyacentes, lo que se cita. *Gaceta de Madrid, 1710*, 10 de septiembre de 1857, 1-3.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). SEIEM.

Madrid, M.J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J.C. y Maz-Machado. (2024). Geometría aplicada en la enseñanza elemental de las niñas en el siglo XIX: la cartilla de Luciana Casilda Monreal. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 606). SEIEM.

TRANSFERENCIA ANALÓGICA EN PROBLEMAS DE PROBABILIDAD BAYESIANA CON FUTUROS DOCENTES

Analogical transfer on Bayesian probability problems with future teachers

Mallart-Solaz, A.

Universitat Autònoma de Barcelona

Gick y Holyoak (1980) estudian el concepto de transferencia analógica (TA) en resolución de problemas, considerándolo como el efecto que facilita la solución de un primer problema al solucionar otro problema análogo. Catrombone y Holyoak (1989) señalaron como aspectos importantes en la TA inducir un esquema resolutivo que destaque la información relevante, el contexto sin importar la cantidad de problemas de práctica, el tiempo entre la práctica y la prueba, o formular preguntas para una mayor abstracción. En este estudio se analiza la estrategia poco estudiada de la creación de problemas análogos para mejorar la TA en el contexto de problemas bayesianos, y otra estrategia, la reflexión explícita sobre la resolución de ejemplos concretos.

El marco teórico del estudio, junto al concepto de TA, toma dos aspectos clave de la creación de problemas de matemáticas: a) la existencia de cuatro elementos destacados que son información, requerimiento, contexto y entorno matemático (Malaspina, 2021); b) la competencia del profesor de matemáticas de saber elegir problemas, analizarlos, modificarlos e incluso crearlos con finalidad didáctica (Niss y Højgaard, 2019).

El objetivo del estudio es mostrar la creación de problemas análogos como un recurso que mejora las resoluciones de problemas bayesianos. El enfoque metodológico ha sido cuantitativo. La muestra la forman 50 estudiantes que se preparan para ser maestros de matemáticas, subdivididos en tres subgrupos (A, B, C) según se sentaron en el aula el primer día. El experimento consistió en tres partes: 1) se explica y discute un problema de probabilidad bayesiana en gran grupo; 2) el subgrupo A crea un problema de resolución análoga, el B reflexiona sobre el ejemplo redactando los pasos, el C resume un artículo de expertos sobre el interés de los futuros maestros en saber crear problemas de matemáticas para enseñar a resolverlos; 3) todos resuelven dos problemas bayesianos diferentes al ejemplo (uno sin porcentajes, otro con tres variables en vez de dos). Los instrumentos usados y analizados han sido de registro escrito: cuestionarios abiertos sobre resoluciones, resoluciones de problemas, creaciones de problemas. Las tareas se realizaron individualmente en el aula habitual.

Las respuestas correctas de los dos problemas obtenidas por los subgrupos A y B son mejores que las de C. Sobre el primer problema, el grupo A consigue más transferencia en la estrategia y resolución. Sobre el segundo problema, el grupo A consigue el 100% de transferencia en la resolución y en respuestas correctas. Se puede concluir, siendo cautelosos debido al tamaño de la muestra, que la creación de problemas análogos y la reflexión explícita en torno a la resolución de ejemplos concretos mejora las resoluciones de los problemas bayesianos.

Referencias

Catrombone, R. y Holyoak, K. J. (1989). Overcoming contextual limitations on problem solving transfer. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 15*, 1147–1156.

Gick, M.L. y Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology, 15*, 306–355.

Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia,10*(1), 1–17. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.1-17

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Mallart-Solaz, A. (2024). Transferencia analógica en problemas de probabilidad bayesiana con futuros docentes. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 607). SEIEM.

ESTUDIO DE CASOS CRUZADOS: LA DISONANCIA COGNITIVA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Cross-case study: Cognitive dissonance in the mathematics classroom

Marbán, M.[a], Marbán, J.M.[b] y Maroto, A.[b]

[a]Universidad Rey Juan Carlos, [b]Universidad de Valladolid

En el aula de matemáticas las interacciones entre profesorado y alumnado forman un sistema que se retroalimenta mutuamente y en el que, además de los procesos cognitivos, cada vez tienen más importancia la influencia y presencia de variables socioafectivas. En muchas ocasiones el profesorado no es consciente de sus propios procesos emocionales y de qué manera moldean sus comportamientos o respuestas en el aula. Por ello, desde un sistema dinámico del afecto en el que sus constructos se relacionan de manera dinámica influyendo no sólo al individuo sino también a su comportamiento y toma de decisiones en el aula (Pepin y Roesken-Winter, 2015), queremos estudiar y analizar la presencia de disonancia cognitiva entre el profesorado que enseña matemáticas. Presentamos aquí el primer objetivo de nuestra investigación que es la identificación de discrepancias entre las prácticas matemáticas que valora un profesor en el aula y la frecuencia con la que esas acciones están presentes en el aula. Dichas acciones se obtienen a partir de la pauta de observación validada POEMat.ES (Joglar *et al*., 2021) con la que se genera un cuestionario que los participantes responden de manera online. Posteriormente, con una entrevista semiestructurada, se analiza si dicha reflexión sobre la práctica docente genera disonancia cognitiva entre nuestros casos, es decir, incomodidad psicológica ante la gestión de cogniciones que no concuerdan, donde cognición se considera lo que una persona conoce, hace, siente o el ambiente que rodea a dicha persona (Festinger, 1957).

Nos situamos en un enfoque metodológico cualitativo, abordando la investigación desde una comparativa de estudio de casos cruzados entre 16 profesores que actualmente dan clase de matemáticas. Las variables cruzadas analizadas son: sexo, etapa educativa y experiencia docente. Los datos se recogen a través de un cuestionario y, posteriormente, una entrevista semiestructurada confirmatoria y de ampliación. Atendiendo a la variable sexo, los resultados muestran que existe una mayor disonancia en hombres que en mujeres. Respecto a la etapa educativa, es el profesorado de universidad del grado de Matemáticas el que presenta mayores discrepancias. Finalmente, los profesores noveles reflejan diferencias en la dimensión que hace referencia a aspectos de contenido matemático. Aunque se deben contrastar estos resultados con la segunda fase de la investigación, en la que se analizan las entrevistas semiestructuradas centradas en la gestión de la disonancia, se puede concluir que el profesorado vinculado a etapas educativas donde la presencia de la Didáctica de la Matemática es más evidente, presenta menores discrepancias respecto a las acciones matemáticas planteadas que el profesorado que está en etapas más vinculadas al contenido matemático.

Agradecimientos: Estudio realizado en una estancia de investigación en el campus de Segovia de la UVA, financiada por la convocatoria de ayudas a la movilidad de la URJC.

Referencias

Festinger, L. (1957). *A theory of cognitive dissonance*. Stanford University Press.

Pepin, B. y Roesken-Winter, B. (2015). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education*. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham.

Joglar, N., Ferrando, I., Abánades, M. Á, Arteaga, B. P., Barrera, V., Belmonte, J. M., Crespo, R., Fernández, I. A., Fraile, A. y Hernández, E. (2021). POEMat. ES: Pauta de observación de la enseñanza de matemáticas en educación secundaria en españa. *Avances De Investigación En Educación Matemática,* (20), 89-103. https://doi.org/https://doi.org/10.35763/aiem20.4004.

Marbán, M., Marbán, J. M. y Maroto, A. (2024). Estudio de casos cruzados: la disonancia cognitiva en el aula de matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 608). SEIEM.

ACTIVIDAD CEREBRAL EN ESCOLARES CON SUMAS CRONOMETRADAS: UN ANÁLISIS EXPLORATORIO CON EEG

Brain activity in school children with timed additions: an exploratory analysis with EEG

Marbán, J. M., García-Monge, A., Santamaría-Vázquez, E. y Marcos-Martínez, D.

Universidad de Valladolid

El desarrollo de nuevos dispositivos portátiles para el registro de señales electroencefalográficas (EEG) ha abierto la posibilidad de trasladar los estudios sobre la actividad cerebral desde las condiciones de laboratorio a contextos reales a fin de aumentar la validez ecológica de estos estudios (Matusz et al., 2019). Si aceptamos el carácter situado y culturalmente construido del aprendizaje se entenderá el interés de estudiar el funcionamiento cerebral en contextos educativos cotidianos.

Un ámbito educativo de aplicación de estos estudios es el del dominio afectivo en matemáticas. La medición de sus componentes o dimensiones a través de métodos observacionales o escalas tiene sus limitaciones y no permite desarrollar herramientas de feedback instantáneo. Con el fin de comprender mejor este dominio y llegar a desarrollar herramientas de neurofeedback que ayuden a profesorado y alumnado a tomar conciencia sobre los estados emocionales que provocan diferentes tareas matemáticas, iniciamos hace unos años la indagación sobre la actividad cortical en contextos naturalistas y seminaturalistas (García-Monge et al., 2023)

Este estudio supone la fase inicial de una investigación más amplia cuyo objetivo es desarrollar una herramienta de neurofeedback que, utilizando señales electroencefalográficas (EEG), detecte estados de ansiedad matemática durante la realización de tareas matemáticas en contextos escolares naturalistas o semi-naturalistas. Específicamente, este estudio compara la actividad EEG entre una situación en la que 15 escolares (de 8 a 9 años) realizan sumas y otra en la que realizan sumas similares, pero bajo presión de tiempo. Este contraste fue elegido para llevar a cabo una comparación exploratoria inicial, ya que estudios previos muestran cómo el tiempo es un factor que aumenta la ansiedad ante las tareas matemáticas.

Los resultados muestran una actividad significativamente mayor durante las sumas cronometradas en las áreas frontal y parietal en las bandas de frecuencia theta (3-7Hz, relacionada con la carga de trabajo y la memoria de trabajo) y beta alta (20-30Hz, asociada con la excitación y la ansiedad).

Agradecimientos

La publicación es parte de la actuación PID2022-138325OB-I00 financiada por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE

Referencias

García-Monge, A., Marbán, J.M., Rodríguez-Navarro, H. y Escudero, A. (2023). Actividad cerebral como respuesta a diferentes tipos de tareas aritméticas. En C. Jiménez-Gestal, A.A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVI (pp. 339-346). Ediciones Universidad de la Rioja.

Matusz, P. J., Dikker, S., Huth, A. G. y Perrodin, C. (2019). Are we ready for real-world neuroscience? Journal of Cognitive Neuroscience, 31(3), 327–338. https://doi.org/10.1162/jocn_e_0127

Marbán, J. M., García-Monge, A., Santamaría-Vázquez, E. y Marcos-Martínez, D. (2024). Actividad cerebral en escolares con sumas cronometradas: un análisis exploratorio con EEG. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 609). SEIEM.

ANÁLISIS DE PROPUESTAS DE PROBLEMAS REFORMULADOS POR FUTUROS DOCENTES DE SECUNDARIA

Analysis of Problem Proposals Reformulated by Pre-service Secondary School Teachers

Martín-Ferraz, A. y Hernández, A.

Universidad de La Laguna

En este estudio se examinan las reformulaciones de problemas realizadas por futuros profesores de Educación Secundaria, en el contexto de una asignatura formativa del Máster de Profesorado. Al referirnos al proceso de reformulación de problemas hacemos referencia a las ideas de Baumanns (2022). Según el autor, este proceso implica una revisión crítica y una adaptación creativa de los problemas planteados, ya sea aportando nuevas ideas o eliminando elementos existentes en el problema inicial. El análisis se enfoca en comprender cómo los y las docentes en formación abordan el proceso de reformulación tras resolver dos problemas iniciales. Así como, en observar cómo en la formulación de las propuestas influyó la exploración y la resolución del problema original con ayuda del Sistema de Geometría Dinámico, GeoGebra.

Durante el desarrollo de una de las asignaturas, centrada en la enseñanza de las Matemáticas para Educación Secundaria post-obligatoria, se introdujo una serie de actividades relacionadas con la resolución de problemas siguiendo los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013). El grupo de quince estudiantes se dividió en siete equipos, para abordar la secuencia de actividades. Esta incluía la resolución de dos problemas, uno relacionado con la construcción de un cuadrado y, otro, el análisis de variaciones de área de una superficie del plano cartesiano. En primer lugar, se les solicitó resolver ambos problemas utilizando diferentes aproximaciones (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013), una de ellas dinámica que fue objeto del análisis; y posteriormente, debían reformular nuevos problemas basados en los originales.

Aquí se presenta un caso de reformulación para evidenciar la influencia del uso de GeoGebra previo en la propuesta posterior. Un equipo al reformular el problema de la construcción del cuadrado utilizó algunos de los pasos de la resolución desarrollada. Mostrando la similitud entre lo que hicieron durante la resolución y lo que luego proponen en la reformulación.

Se concluye el estudio con una clasificación de las propuestas de problemas reformulados, respecto a tres elementos: uso de un contexto más familiar para los estudiantes de secundaria, introducción de cambios matemáticos relevantes e inclusión de datos numéricos.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido subvencionada por el Proyecto de Investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE, que lleva por título: Formulación de problemas matemáticos con herramientas digitales en la formación inicial de profesorado (ForDiMat).

Referencias

Baumanns, L. (2022). *Mathematical problem posing: Conceptual considerations and empirical investigations for understanding the process of problem posing.* Springer.https://doi.org/10.1007/978-3-658-39917-7

Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1-2), 279-302. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268

Martínez-Ferraz, A. y Hernández, A. (2024). Análisis de propuestas de problemas reformulados por futuros decentes de secundaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 610). SEIEM.

PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO SOBRE SU CONOCIMIENTO Y FORMACIÓN EN DISCALCULIA

Teachers´ Perception of their Knowledge and Training in Dyscalculia

Meaños-Asensi, R.

Universidade de Vigo

En el último siglo, las políticas educativas, tanto nacionales como internacionales, buscan promover las matemáticas para mejorar la competitividad en una sociedad globalizada que depende cada vez más del conocimiento y del progreso científico. Sin embargo, este enfoque de las llamadas "matemáticas para todos" pueden generar barreras de acceso "para algunos" (Valero, 2017). Dentro de este grupo de alumnado se encuentran los que presentan discalculia: un trastorno del aprendizaje que afecta a las habilidades aritméticas (Kosc, 1974), agravado por el desconocimiento en la detección y actuación por parte del profesorado (Niss, 2002).

Esta investigación tiene como objetivo "analizar la percepción del profesorado de Educación Primaria (EP) sobre su conocimiento y formación en discalculia". Para ello, se utilizó un enfoque cuantitativo descriptivo no experimental. El instrumento utilizado fue un cuestionario ad hoc, validado por un grupo de expertos y por una prueba piloto. La muestra consistió en 105 docentes de EP de Galicia, compuesta mayoritariamente por mujeres (82.9%) y docentes de 41-50 años (31.4%), con una distribución equilibrada en términos de experiencia (aproximadamente un 30% tenía más de 20 años trabajados). Además, provenían principalmente de centros públicos (76.2%) y tenían una titulación máxima de grado (73.3%), siendo las especialidades más comunes Curricular (43.8%) y Pedagogía Terapéutica (16.2%).

A través de una escala Likert, en la que el valor 1 es "conocimiento nulo" y el 4 "excelente", los resultados ("media"±"desviación típica") muestran que el profesorado percibió su conocimiento sobre la discalculia como limitado (1.993±0.701). así como en el conocimiento en herramientas de identificación (2.187±0.824) y en pautas de actuación (2.086±0.786). En cuanto a la formación inicial en discalculia (1 es "nunca" y 4 es "frecuentemente") se encontró que el profesorado evaluó negativamente la información recibida (2.019±1.028) y la adquisición de competencias para intervenir en el aula (1.686±0.837). Respecto a la formación continua, los docentes consideraron dedicar poco tiempo a actualizarse sobre la discalculia (el valor 1 es 0; 2 es 1-5; 3 es 5-10; y, 4 es +10). Prefirieron recursos en línea (2.657±1.099) sobre otras actividades formativas como cursos (1.752±0.841), charlas o congresos (1.667±0.816) y libros o revistas (2.105±1.055).

Esto resalta la necesidad urgente de incluir la discalculia tanto en la formación inicial docente de Educación Primaria como en la continua ya que, independientemente del interés del profesorado, se desconoce una oferta formativa adecuada. Esto ayudaría a cerrar la brecha existente en su preparación que dificulta la detección e intervención de este trastorno.

Referencias

Kosc, P. (1974). Developmental Dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities, 7(3),* pp. 46–59.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education.

Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación, 73,* 99-128.

Meaños-Asensi, R. (2024). Percepción del profesorado sobre su conocimiento y formación en discalculia. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 611). SEIEM.

PERCEPCIONES DE LOS DOCENTES SOBRE LA PRÁCTICA EDUCATIVA EN RELACIÓN CON SU EXPERIENCIA DOCENTE

Teachers' Perceptions of Educational Practice in Relation to Teaching Experience

Mohamed-Chemlali, N.[a], Hossein-Mohand, Ha.[a], Hossein-Mohand, Ho.[b], Osuna-Acedo, S.[a]

[a]Universidad Nacional de Educación a Distancia, [b]Universidad de Granada

El póster aborda las percepciones de los docentes de Matemáticas sobre la práctica educativa en relación con su experiencia docente en Melilla. La enseñanza de las Matemáticas requiere un desarrollo profesional sólido y una comprensión profunda de las prácticas educativas, enfrentando desafíos significativos en su formación continua. La efectividad en la enseñanza depende tanto del contenido como de la pedagogía (Bashir, 2023). Para investigar este tema se utilizó un diseño cuantitativo transversal con un enfoque ex post facto. Se aplicó un cuestionario cerrado a 61 docentes de Matemáticas de secundaria en Melilla durante el año escolar 2018-2019, seleccionados mediante un método de muestreo no probabilístico de conveniencia. La fiabilidad y consistencia fueron evaluadas mediante el juicio de expertos. Los resultados muestran que la mayoría de los docentes (45.9%) tiene entre 1 y 5 años de experiencia, con solo el 16.39% con menos de un año de experiencia y un 6.56% con más de 20 años. En cuanto a la consciencia sobre los errores comunes del alumnado, los docentes con más experiencia muestran una mayor consciencia sobre estos errores, existiendo una asociación significativa entre la experiencia docente y esta consciencia. Sin embargo, no se encontró una asociación significativa entre la experiencia docente y la evaluación del aprendizaje del alumnado. Respecto a la habilidad para organizar y mantener la dinámica en el aula, los docentes con más experiencia demuestran mayores habilidades en la gestión del aula, lo que indica una asociación significativa entre la experiencia docente y esta habilidad. En cuanto a la mejora de técnicas metodológicas, no se encontraron diferencias significativas en la percepción de la mejora metodológica según la experiencia. En conclusión, la experiencia docente influye en la percepción y organización en el aula, pero no en la evaluación del aprendizaje ni en la percepción de mejora metodológica. Es crucial la formación continua para todos los docentes, independientemente de su experiencia, para garantizar una enseñanza efectiva de las Matemáticas (Bonghanoy et al., 2019). La experiencia ayuda a mejorar la identificación de errores y la gestión del aula, pero no necesariamente la evaluación o las técnicas metodológicas (Hofman, 2022).

Referencias

Bashir, S. (2023). Pedagogy of Mathematics. *International Journal of Basic Sciences and Applied Computing, 10*(2), 1-8. https://doi.org/10.35940/ijbsac.b1159.1010223.

Bonghanoy, G., Sagpang, A., Jr., R. y Rellon, L. (2019). Transformative Professional Development for Mathematics Teachers. *Journal on Mathematics Education, 10*(2), 289-302. https://doi.org/10.22342/JME.10.2.6882.289-302.

Hofman, J. (2023). Classroom management and teacher emotions in secondary mathematics teaching: a qualitative video-based single case study. *Education Inquiry*, *14*(3), 389–405. https://doi.org/10.1080/20004508.2022.2028441.

Mohamed-Chemlali, N., Hossein-Mohand, Ha., Hossein-Mohand, Ho. y Osuna-Acedo, S. (2024). Percepciones de los docentes sobre la práctica educativa en relación con su experiencia docente. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 612). SEIEM.

FUTUROS DOCENTES FRENTE AL SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EL CURRÍCULO: UNA EXPERIENCIA DE LECTURA ACTIVA

Future Teachers and the Stochastic Sense in the Curriculum: An Active Reading Experience

Muñoz-Escolano, J. M., Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S.

Universidad de Zaragoza

Los nuevos currículos LOMLOE incorporan los sentidos como bloque de saberes con un perfil más competencial, centrado en procesos. El sentido estocástico, que integra contenidos de probabilidad y estadística a través de sus ideas fundamentales (Batanero y Chernoff, 2018), es uno de ellos. Ante esta reforma, es pertinente cuestionar cómo el profesorado de Matemáticas aborda la lectura de los documentos normativos (Beltrán-Pellicer et al., 2023). Por otro lado, desde un punto de vista formativo, el análisis crítico de estos documentos es un elemento clave en la formación inicial de futuros docentes, ya que se ponen en juego competencias profesionales importantes como la competencia en análisis normativo y permite a los estudiantes movilizar distintos conocimientos especializados del profesor de matemáticas y evocar experiencias personales que conforman sus creencias y concepciones sobre la enseñanza (Godino et al., 2017).

En este trabajo nos planteamos como objetivo analizar los comentarios que efectúan estudiantes del Grado de Magisterio en Ed. Primaria cuando se enfrentan a la lectura de las secciones dedicadas al sentido estocástico en el desarrollo curricular aragonés. Para ello, se propuso una experiencia de "lectura activa" de dicho documento a través de la plataforma en línea *Perusall*, en la que participaron 57 estudiantes. Una vez recogidas las 38 anotaciones realizadas, se han analizado atendiendo a las facetas de un proceso de estudio matemático (Godino et al., 2017) y a las categorías surgidas de manera inductiva en Beltrán-Pellicer et al. (2023).

Los resultados señalan que en los comentarios se movilizan todas las facetas (epistémica, cognitiva, interaccional, afectiva, ecológica y mediacional). En particular, la faceta ecológica aparece reflejada cuando mencionan la finalidad de las matemáticas escolares y la presencia de estos saberes en la vida cotidiana, mientras que la mediacional aparece en comentarios cuando apuntan al uso de recursos como juegos o TIC y a la ausencia de tiempo para estos contenidos. En varios comentarios, los participantes evocan su experiencia previa en el sistema educativo o en el Grado.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER,UE; y apoyado por el Grupo autonómico S60_23R (Gobierno de Aragón). Así mismo, agradecemos los comentarios de Juan D. Godino.

Referencias

Batanero, C. y Chernoff, E. (eds). (2018). *Teaching and Learning Stochastics. ICME-13 Monographs*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_18

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S. y Muñoz-Escolano. J. M. (2023). Explorando el hueco entre el currículo pretendido y el implementado: percepciones de docentes en formación y en activo. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 97–112). SEIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113.

Muñoz-Escolano, J. M., Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2024). Futuros docentes frente al sentido estocástico en el currículo: una experiencia de lectura activa. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 613). SEIEM.

EL CRDM-GUY BROUSSEAU: UN ESPACIO PARA LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

The CRDM-*Guy Brousseau*: a space for research in didactics of mathematics

Orús, P., Gregori, P. y Santágueda-Villanueva, M.

Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions. Universitat Jaume I de Castellón.

El CRDM-*Guy Brousseau* es un Centro de Recursos de Didáctica de la Matemática que se encuentra en la Biblioteca de la Universitat Jaume I (Orús y Peydró, 2012). En él se pueden encontrar los recursos documentales y bibliográficos producidos por el *Centre d'Observation et de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques* (COREM) creado por Brousseau, en torno a la escuela (maternal y primaria) Jules Michelet en Talence (Francia). Desde 1972 a 1999 fue una "escuela para la observación", un lugar de intercambio entre maestros, alumnos, formadores e investigadores con un objetivo común: comprender mejor los fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Era un laboratorio que permitía experimentar y confrontar en las aulas las numerosas investigaciones producidas en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) creado por Brousseau (1998) y los diferentes actores del COREM (Fregona y Orús, 2017). Gascón (2012) presenta la importancia de la TSD para el grupo de investigación "Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica" de la SEIEM y Fregona y Orús (2017) para el ámbito de la formación docente, tanto inicial como continua.

Este póster muestra el potencial del CRDM-*Guy Brousseau*, recogiendo los trabajos que se han elaborado a partir del 2010 utilizando el fondo. Es un trabajo de tipo exploratorio descriptivo, utilizando técnicas bibliométricas cuantitativas. Los trabajos se encuadran en la TSD (Fregona et al., 2023), incluyendo inicios de estudios históricos sobre el fondo (Santágueda-Villanueva, 2024). Concluimos que es un espacio para el avance de la Didáctica de la Matemática desde distintas perspectivas investigadoras, pero también docentes.

Referencias

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Fregona, D. y Orus, P. (2017). El Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática Guy Brousseau: un sitio para explorar prácticas de enseñanza de las matemáticas. En D. Fregona, S. Smith, M. Villarreal y F. Viola, *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios: aportes para la educación matemática (*pp. 109–132). Ed. Universidad Nacional de Córdoba (Argentina).

Fregona, D., Orus, P., Coulange, L. y Train G. (2023) Le CRDM Guy Brousseau, un bon outil pour ressourcer l'activité du chercheur en didactique des mathématiques. En A. Chesnais y H. Sabra. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2021* (pp. 65–91). IREM de Paris.

Gascón, J. (2012). La Revolución Brousseauniana como razón de ser del Grupo DMDC. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 15–22). SEIEM.

Orús, P. y Peydró, L. (2012) *Presentación del centro de recursos de didáctica de las matemáticas, CRDM-Guy Brousseau.* XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Jaén, España.

Santágueda-Villanueva, M. (2024). *Situaciones de aprendizaje para la multiplicación presentes en el Centro de Recursos de Didáctica de la Matemática Guy Brousseau: avances de una investigación*. Seminario de Investigación Historia de las Matemáticas y Educación Matemática de la SEIEM, Salamanca, España.

Orús, P., Gregori, P. y Santágueda-Villanueva, M. (2024). El CRDM-*Guy Brousseau*: un espacio para la investigación en Didáctica de la Matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 614). SEIEM.

ESPERANZA MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA: ANÁLISIS EXPLORATORIO

Expected Value in Secondary Education: Exploratory Analysis

Oval-Trujillo, Z., García-Alonso, I.

Universidad de La Laguna

En las últimas décadas, el estudio de la probabilidad es de gran interés para la investigación en Educación Matemática. Uno de los conceptos poco explorados y del que existen pocas investigaciones previas es la esperanza matemática. Treviño (2017) realiza un estudio con estudiantes de bachillerato, en el que muestra que son capaces de identificar si un juego no es equitativo mediante el cálculo del valor esperado. Por otro lado, Schlottmann (1994) concluye que los niños de entre y y 10 años comprenden algunos componentes básicos del concepto de valor esperado. En este estudio se analiza la comprensión de la esperanza matemática en estudiantes de secundaria que involucran la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, mediate un estudio exploratorio y descriptivo.

La experiencia se realizó con 20 estudiantes de 2º de la ESO. Se les presenta un juego de azar: una urna con 20 bolas (12 blancas y 8 negras), con un jugador 1 que apuesta 200€ a obtener blanca y un jugador 2 que apuesta 100€ a obtener negra. Los estudiantes debían responder razonadamente a tres preguntas con las que se va a analizar el razonamiento empleado y el rol de la esperanza matemática en su toma de decisiones. Las preguntas planteadas son: 1) En una sola jugada, ¿qué jugador elegirías?; 2) Si se realizan 5000 jugadas, ¿qué jugador escogerías?; 3) ¿Cómo cambiarías los datos iniciales para que ningún jugador tenga ventaja?

Los resultados obtenidos en la primera pregunta muestran que la mayoría de los estudiantes (70%) basan su elección en la probabilidad de un evento o la ganancia del resultado de un evento. Pocos razonan exclusivamente con la probabilidad del evento. Con respecto a la segunda pregunta, la mayoría (45%) han elegido el jugador 2 basándose en la ganancia que este obtiene. Además, 6 de los estudiantes que eligieron este jugador cambiaron de opinión con respecto a la pregunta (1). Sólo uno de los estudiantes realizó un cálculo para estimar las ganancias medias tras 5000 lanzamientos, a partir de las ganancias de cada lanzamiento. En cuanto a la tercera pregunta, el 70% de los estudiantes modificaron el juego igualando la probabilidad de ganar y las apuestas de cada jugador. Sin embargo, dos estudiantes emplearon un razonamiento proporcional con el que modificar el juego original y que ahora fuera un juego justo. En general las respuestas a la última pregunta muestran que los estudiantes poseen una idea intuitiva del significado de valor esperado, a través de la justificación dada usando las ganancias del jugador teniendo en cuenta la apuesta y la probabilidad de éxito.

Este estudio exploratorio permite comprobar que el alumnado es capaz de razonar en un entorno de incertidumbre en el que se debe tomar una decisión según los valores de dos variables aleatorias. La actividad propuesta ha puesto de manifiesto las ideas que poseen sobre el concepto de esperanza matemática, sin haberlo estudiado previamente. Será necesario ampliar la muestra para profundizar en los resultados obtenidos.

Referencias

Treviño, H. G., Haro, J. y García, J. M. C. (2017). Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *11*, 107–125.

Schlottmann, A. y Anderson, N. H. (1994). Children's judgments of expected value. *Developmental Psychology, 30*(1), 56–66.

Oval-Trujillo, Z. y García-Alonso, I. (2023). Esperanza Matemática en Educación Secundaria: Análisis Exploratorio. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 615). SEIEM.

ANÁLISIS EMOCIONAL DE TRES FORMACIONES PARA DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Emotional Analysis of Three Training Sessions for Mathematics Teachers

Palop, B. y Maestre, N. A.

Dept. Didáctica de las CC. Exp., Socs y de la Matemática, U. Complutense de Madrid

El sentido socioafectivo está incluido en el currículo de matemáticas en España desde 2021 (LOMLOE). En España, el alto nivel de ansiedad matemática está analizado por PISA (OECD, 2022) y numerosas investigaciones académicas relacionan esta ansiedad con los resultados académicos y el desarrollo profesional (Maloney y Beilock, 2012). Este fenómeno no solo afecta al rendimiento de los estudiantes, sino que también influye en su percepción y actitudes hacia las matemáticas, condicionando su experiencia de aprendizaje (Marbán et al., 2020). En este contexto, se ha reconocido la importancia del papel del docente en la gestión de las emociones de los alumnos durante las sesiones de clase.

En este poster mostraremos los resultados preliminares de nuestra investigación, en la que se utiliza el modelo de Russell de las emociones (Russell, 1980) para recoger información sobre el estado emocional de las personas que participan en una formación. En este sentido, se realizó la recogida de datos durante tres sesiones de formación de una hora cada una sobre matemáticas y sobre género durante el I Encuentro Socioafectivo de la U. Autónoma de Madrid. En las formaciones participan 37, 34 y 38 adultos, respectivamente, mayoritariamente profesores en formación o en ejercicio de ESO y Bachillerato.

De manera previa al inicio de la primera sesión, se familiarizó a los participantes con el modelo y se les facilitó una hoja con dos ejes cartesianos en la que, durante la sesión formativa, debían registrar su estado emocional. En el eje horizontal se les solicitó ubicar su nivel de placer/displacer y en el eje vertical, su nivel de activación, generando en cada toma de datos un punto dentro de los ejes identificado por el minuto en el que se hace el registro. En la Formación 1, los asistentes realizaron las anotaciones en los momentos en que ellos deseaban; en la Formación 2, se añadieron a las anotaciones libres algunas pautadas por los investigadores; en la Formación 3, se pautó una temporalización de 7 minutos para las anotaciones.

Se presentan en este poster los resultados del análisis de las emociones percibidas por los participantes, contrastados con momento del discurso y/o las tareas propuestas por el docente a lo largo de las formaciones.

Referencias

OECD (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. OECD. https://doi.org/10.1787/53f23881-en

Maloney, E. A. y Beilock, S. L. (2012). Math anxiety: Who has it, why it develops, and how to guard against it. *Trends in Cognitive Sciences*, *16*(8), 404–406. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.06.008

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del domino afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *18*, 73–76. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

Russell, J. A. (1980). A circumplex model of affect. *Journal of Personality and Social Psychology*, *39*(6), 1161–1178. https://doi.org/10.1037/h0077714

Palop, B. y Maestre, N.A. (2024). Análisis emocional de tres formaciones para docentes de matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 616). SEIEM.

CREANDO MATEMÁTICAS EN EL TALLER

Creating mathematics at the workshop

Pérez-Rodríguez, M.[b] , Álvarez Díaz, B.[a] y Conde-Lago, J.[a]

[a]Xunta de Galicia; [b]Universidade de Vigo

En los últimos años, diversos agentes del sector educativo, gubernamental, empresarial e industrial destacan la necesidad de mejorar las competencias STEM. En relación a las matemáticas, sus contenidos deben ampliarse y orientarse, adoptando un enfoque extracurricular y multidisciplinar para crear entornos de aprendizaje que impliquen situaciones de la vida real (English, 2017).

Por otra parte, existe una evidente falta de gusto, rechazo o apatía hacia la materia por parte de los estudiantes (Larkin y Jorgensen, 2016). En el caso de las niñas esta desmotivación es todavía mayor (Rojo et al., 2018). Las metodologías educativas suelen basarse en un modelo empirista, sin aprendizaje significativo y que produce bajo rendimiento. La implementación de programas educativos no formales en etapas tempranas para mejorar la cultura y la educación matemática, fomentaría el conocimiento, el interés y la percepción positiva de las matemáticas (Li y Schoenfeld, 2019).

El proyecto educativo Te lo cuentan las matemáticas (FECYT-Ministerio de Ciencia e Innovación, desde 2021) está dirigido a mejorar la educación matemática y aumentar la motivación hacia la materia en la etapa de Educación Primaria. La práctica educativa se basa en la realización de 12 talleres, centrados en el razonamiento y la comprensión conceptual mediante recursos manipulativos, tecnológicos, transversales y funcionales, buscando un aprendizaje significativo y el uso de las matemáticas en la vida cotidiana y en la comprensión de fenómenos de otros ámbitos. Tras la implementación del programa en el curso 2022-23 se realizó un estudio de tipo mixto para evaluar su efectividad en relación con la motivación (gusto, dificultad, utilidad, auto-concepto, interés...). En la investigación participaron 466 escolares de 10 a 12 años pertenecientes a los 15 centros educativos de Educación Primaria de Galicia que participaron en el proyecto. Los instrumentos utilizados fueron un cuestionario en escala Likert (1-5) adaptado del cuestionario MSLQ (Duncan y McKeachie, 2005) y entrevistas a los escolares. Se concluyó que la motivación en la realización de los talleres fue positiva, especialmente en las niñas, validando así el uso de los talleres como metodología exitosa para aprender matemáticas.

Referencias

Duncan, T. G. y McKeachie, W. J. (2005). The making of the motivated strategies for learning questionnaire. *Educational psychologist*, *40*(2), 117-128.

English, L. D. (2017). Advancing elementary and middle school STEM education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 5-24.

Larkin, K. y Jorgensen, R. (2016). 'I hate maths: why do we need to do maths?'Using iPad video diaries to investigate attitudes and emotions towards mathematics in year 3 and year 6 students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 925-944.

Li, Y. y Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International journal of STEM education*, *6*(1), 1-13.

Rojo Robas, V., Villarroel Villamor, J. D. y Madariaga Orbea, J. M. (2018). The affective domain in learning mathematics according to students' gender. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *21*(2), 183-202.

Álvarez-Díaz, B., Conde-Lago, J., Pérez- Rodriguez, M. (2024). Creando matemáticas en el taller. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 617). SEIEM.

DESARROLLO DE CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE MAGISTERIO ANTE TAREAS MATEMÁTICAS LUDIFICADAS

Development of didactic-mathematical knowledge and skills of student-teachers facing gamified mathematics tasks

Piñero Charlo, J.C., Canto López M.C. y Manchado Porras, M.

Universidad de Cádiz

Este documento presenta un estudio de caso micro-etnográfico, donde se realiza un análisis de la disposición productiva de estudiantes de magisterio ante tareas de naturaleza matemática. A tal fin se implementaron experiencias de Aprendizaje Basado en Juegos, que sustituyeron al 50% de las sesiones prácticas convencionales a lo largo de todo un curso académico (siendo, por tanto, la mitad de las tareas ludificadas y la otra mitad, convencional).

Las intervenciones analizadas consistieron en una secuencia de tareas prácticas, no conectadas, cada una de ellas de 90 minutos de duración y realizadas en horario lectivo de la asignatura "Didáctica de las Matemáticas I" del grado en Educación Primaria de la Universidad de Cádiz. Las tareas planteadas implicaban versiones ludificadas de problemas clásicos de la didáctica de las matemáticas como el problema de la ampliación de la figura planteado por Brousseau (M. Artigue, 1989).

A fin de establecer un punto de partida desde el que parte la disposición productiva del alumnado, se realizó un análisis cuantitativo del rechazo a las matemáticas usando una herramienta validada: el cuestionario sMARS (Núñez-Peña et al., 2013), al inicio de la asignatura. La evolución del estado mental en términos de habilidad matemática vs dificultad del desafío fue registrada en cada sesión ludificada usando una Flow chart (Csikszentmihalyi, 1990). El análisis de los datos evidenció la existencia de un "canal de Flow" en las sesiones ludificadas, dicho canal resultó inexistente en las sesiones convencionales. Los datos del estudio demuestran que los resultados relativos al dominio procedural del conocimiento didáctico-matemático (Piñero, 2024) tienen un desarrollo equivalente independiente de la estrategia utilizada (ludificada/convencional). Lo mismo puede decirse respecto del dominio del conocimiento matemático. Sin embargo, se aprecia una evolución diferencial positiva para las sesiones ludificadas en el dominio didáctico, particularmente en lo referido a: conectividad intra/extra matemática, ajuste a un contexto, e identificación/gestión de dificultades. Respecto del dominio afectivo, es la dimensión que muestra un mayor grado de mejora respecto de experiencias no ludificadas.

Referencias

Núñez-Peña, M.I., Suárez-Pellicioni, M., Guilera, G. y Mercadé-Carranza, C. (2013). A Spanish version of the short Mathematics Anxiety Rating Scale (sMARS). *Learning and Individual differences*, *24*, 204-210. http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2012.12.009

Csikszentmihalyi, M (1990). *Flow: The Psychology of Optimal Experience*, New York: Harper Perennial

Piñero Charlo, J.C., Canto López, M.C. y Caballero Leiva, C. (2024). Tratando la ansiedad matemática de maestros en formación mediante Aprendizaje Basado en Juegos. *Bolema Rio Claro*, *38,* e220218. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a220218

Piñero Charlo, J.C., Canto López M.C. y Manchado Porras, M. (2024). Desarrollo de conocimientos y habilidades didáctico-matemáticas de estudiantes de magisterio ante tareas matemáticas ludificadas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 618). SEIEM.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES DE MAGISTERIO EN TAREAS DE ALGORITMIZACIÓN DE PATRONES: UN ESTUDIO DE CASO

Didactic analysis of the performance of student-teachers in pattern algorithmization tasks: a case study

Piñero Charlo, J.C., Costado Dios, M.T. y Alegre Salguero, M.P.

Departamento de Didáctica, área de Matemáticas. Universidad de Cádiz, España.

Este documento presenta un estudio de caso micro-etnográfico, donde se realiza un análisis didáctico de intervenciones que evidencian las dificultades que los participantes -estudiantes de magisterio- presentaron respecto de la realización de tareas de algoritmización de patrones. El estudio asume el marco que el enfoque EOS (Godino et al., 2017) plantea, utilizando su sistemática de análisis (Font et al., 2010) para discutir las facetas del conocimiento didáctico-matemático (Godino et al., 2016) en las que los participantes muestran errores.

Las intervenciones analizadas consistieron en una secuencia de 3 tareas prácticas y conectadas, cada una de ellas de 90 minutos de duración y realizadas en horario lectivo de la asignatura "Didáctica de las Matemáticas I" del grado en Educación Primaria de la Universidad de Cádiz. Las tareas planteadas implicaban una secuenciación de números cuadrados que podían construirse de forma manipulativa hasta un cierto punto de la secuencia, siendo necesaria la algoritmización a partir del punto en el que el manipulable se volvía obsoleto. Se monitorizó la acción de los estudiantes de magisterio en audio, video y mediante el informe entregado por los propios estudiantes. Las discusiones y conversaciones de los estudiantes fueron transcritas para su posterior análisis.

Durante la experiencia se documentaron los errores observados respecto de: la construcción de la secuencia a nivel manipulativo, dependencia del material facilitado para establecer el criterio de algoritmización, cambio de criterios durante la etapa de aplicación del algoritmo sin aplicar la modificación a términos precedentes… y otros que relacionan con dificultades de tipo didáctico y epistemológico. Dado que las tareas propuestas están a una "distancia razonable" de lo que ya saben los estudiantes de magisterio involucrados, se atribuyen estos errores a: (i) Falta de práctica matemática para identificar patrones. (ii) Sesgos inducidos por los obstáculos didácticos. (iii) Incapacidad para codificar las secuencias en un algoritmo sencillo y proporcional. (iv) Escasa capacidad de abstracción. Así, los datos recopilados arrojaron que un alto porcentaje de los participantes -85%- no logra desarrollar estrategias para deducir patrones, ni son capaces de realizar un proceso de abstracción adecuado.

Referencias

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89–105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y ompetencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285–294). SEIEM.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema Rio Claro*, *31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Piñero Charlo, J.C., Costado Dios, M.T. y Alegre Salguero, M.P. (2024). Análisis didáctico del desempeño de estudiantes de magisterio en tareas de algoritmización de patrones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 619). SEIEM.

TAREAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Tasks for constructing specialized knowledge in mathematics teacher education

Plazas, R., Climent, N. y Contreras, L.

Universidad de Huelva

El proyecto en el que se enmarca esta investigación (PID2021-122180OB-I00) explora dos vertientes complementarias de la formación del profesorado utilizando el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018). Por un lado, se identifican las características clave de tareas formativas y, por otro, se profundiza en perfiles profesionales y se caracteriza el conocimiento del formador, relacionando estos elementos con el conocimiento que construyen futuros profesores. En este caso nos centramos en la identificación de características de las tareas formativas. El modelo MTSK ha mostrado su utilidad para diseñar tareas en la formación inicial, por su potencial en la delimitación y evaluación del conocimiento pretendido, detallando subdominios y categorías, del conocimiento matemático y didáctico del contenido (Climent et al., 2023). Este trabajo tiene como objetivos caracterizar tareas para la construcción de conocimiento especializado en la formación de profesores de matemáticas y contribuir a la sistematización de su diseño. La metodología se enmarca en la investigación de diseño y en los experimentos de enseñanza (Molina, 2021). Para la recogida de datos se utilizan videograbaciones, producciones del alumnado y observación no participante. Se realiza el análisis de datos con subdominios y categorías del MTSK. Unos primeros resultados apuntan a que la visualización de un vídeo sobre una situación de aula real permite que los estudiantes desarrollen su PCK (Climent et al., 2023) y cómo una tarea diseñada a partir de un taller de resolución de problemas con alumnado real permite el desarrollo de conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre las características del aprendizaje de las matemáticas (Chico et al., 2023). La tesis doctoral vinculada a este proyecto (ligada a Contrato Predoctoral PRE2022-105267) va a analizar la relación entre las características de las tareas formativas y el conocimiento movilizado por futuros profesores.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., Codes, M., Contreras, L., Martín, J. y Pascual, M. (2023). Tareas en la formación inicial de maestros para la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *98*(37.2), 55-72. https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99221

Chico, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2023). Designing tasks for prospective teachers: specialised knowledge on the inclusive teaching of problem-solving. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the CERME13* (pp. 3719-3726). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83 – 97). SEIEM.

Plazas, R, Climent, N., y Contreras, L. (2024). Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 620). SEIEM.

UNA COMPARATIVA DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA EN ESPAÑA Y PORTUGAL

A comparison of the Spanish and Portuguese mathematics curriculum for Elementary School

Ramírez, M., García, P., Contreras, L.C. y Climent, N.

Universidad de Huelva

Durante los últimos años, diversas investigaciones han comparado planes de estudio de diferentes países con el objetivo de identificar similitudes, diferencias y áreas de mejoras (Kácovský et al., 2023; Schmidt y Houang, 2012). Estas investigaciones son fundamentales, especialmente en contexto de cambios legislativos como ha sido el caso de España (Real Decreto 157/2022).

Realizamos un análisis documental para establecer una comparativa entre los currículos de Educación Primaria de matemáticas de España y Portugal. Basándonos en la investigación de Schmidt y Houang (2012) sobre el análisis del currículo de los países con mayor rendimiento en TIMSS, se analiza el enfoque, coherencia y rigor de ambos currículos. Además, realizamos un análisis descriptivo-comparativo de elementos curriculares (saberes básicos/contenidos, capacidades matemáticas transversales/competencias específicas...). Para analizar el enfoque (la cantidad de temas por grado) nos centramos en el primer ciclo de Primaria en España (y su equivalente en Portugal). En cuanto a la coherencia y el rigor, que aluden a la secuenciación de contenidos a lo largo de un mismo curso y de distintos cursos, comparamos lo equivalente a los dos primeros ciclos en los temas Números y Álgebra (Portugal) y sentidos numérico y algebraico (España).

Los resultados arrojan que, aunque hay paralelismo entre los elementos de ambos currículos, se observan diferencias, por ejemplo, en el pensamiento computacional, que en el currículo portugués es considerado una capacidad matemática transversal (Despacho n.º 8209/2021) mientras que en España se relaciona con el sentido algebraico. En cuanto a la secuenciación, una diferencia es una mayor complejización de los contenidos del tema Números en Portugal que en España. Ambos introducen por primera vez álgebra/sentido algebraico en 1er curso; sin embargo, en Portugal, la inclusión del pensamiento computacional en las capacidades matemáticas es más amplia que en España, abarcando habilidades como "extraer la información esencial de un problema". De aquí extraemos posibles sugerencias para la implementación del currículo español.

Referencias

Despacho n.º 8209/2021, de 19 de agosto, Aprendizagens Essenciais 2.º Ano, 1.º Ciclo do Ensino Básico, Matemática. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_2.o_ano.pdf

Kácovský. P., Jedličková, T., Kuba, R., Snětinová, M., Surynková, P., Vrhel, M. y Stratilová Urválková, E. (2023). Czech and Slovak intended curricula in science subjects and mathematics: a comparative study. *International Journal of Science Education*, *46*(5), 440–461. https://doi.org/10.1080/09500693.2023.2243372

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157/con

Schmidt, W. y Houang, R. (2012). Curricular Coherence and the Common Core State Standards for Mathematics. *Educational Researcher*, *41*(8), 294–308. https://doi.org/10.3102/0013189X12464517

Ramírez, M., García, P., Contreras, L.C. y Climent, N. (2024). Una comparativa del currículo de Matemáticas de primaria en España y Portugal. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 621). SEIEM.

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL. TRATAMIENTO DESCONECTADO EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Computational thinking. Treatment unplugged in the Primary Education classroom

Rodríguez Muelas, D., Rodríguez Sánchez, M., Fuertes Prieto, M.A. y Alonso Ruano, B.M.

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las CC EE. Universidad de Salamanca

El pensamiento computacional está adquiriendo cada vez mayor relevancia desde un punto de vista académico, habiendo sido incluido en el currículum de Educación Primaria. Autores como Ros-Esteve et al. (2019) tratan sobre la posible repercusión en los niños de la introducción de determinados aspectos que forman parte del pensamiento computacional de una manera "unplugged".

El objetivo de este trabajo es establecer si se podrían mejorar las habilidades relacionadas con el pensamiento computacional de los alumnos de primaria utilizando actividades desenchufadas relacionadas con la visión espacial mediante orientación topológica en el plano y con la secuenciación de elementos que forman parte de diferentes procesos.

Con una muestra de 48 alumnos de edades comprendidas entre los 7 y 9 años (2.º y 3.º de Educación Primaria) y siguiendo la metodología utilizada por Zapata-Cáceres et al. (2021), se ha utilizado el cuestionario validado BCTt- Test de Pensamiento Computacional para medir las habilidades iniciales relacionadas con el pensamiento computacional. Posteriormente, se realizan una serie de tareas seleccionadas por el equipo de investigación que, de manera totalmente desenchufada, pretenden desarrollar dichas habilidades. Finalmente, se vuelve a realizar el cuestionario para determinar si la instrucción "unplugged" ha sido efectiva y de qué manera, tanto en el aspecto referido al desarrollo topológico como al aspecto de secuenciación.

Los resultados iniciales reflejan que, en el caso de segundo de Primaria, el desarrollo de estas habilidades es escaso o muy escaso, mientras que en el caso de tercer curso es relativamente satisfactorio.

Esta investigación, por tanto, aporta una selección de actividades relacionadas con el pensamiento computacional desenchufado y los resultados pueden servir para establecer una forma efectiva de introducir el pensamiento computacional en las aulas de Educación Primaria, facilitando tanto el diseño como la planificación de actividades sin necesidad de dispositivos tecnológicos.

Referencias

Zapata-Cáceres, M. y Fanchamps, N. (2021). Using the beginners computational thinking test to measure development on computational concepts among preschoolers. *5th APSCE International Computational Thinking and STEM in Education.*

Ros-Esteve, M., López-Iñesta, E. y Diago, P. D. (2019). Introducción de pensamiento computacional mediante actividades desenchufadas en la resolución de problemas de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 650). SEIEM.

Zapata-Ros, M. (2019). Pensamiento computacional desenchufado. *Education in the Knowledge Society (EKS), 20*, 29. https://doi.org/10.14201/eks2019_20_a18

Rodríguez Muelas, D., Rodríguez Sánchez, M., Fuertes Prieto, M.A. y Alonso Ruano, B.M. (2024). Pensamiento computacional. Tratamiento desconectado en el aula de educación primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 622). SEIEM.

DISEÑO DE HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EN LA ENSEÑANZA DE LAS DERIVADAS EN VARIAS VARIABLES

Design of a Specialized Knowledge Analysis Tool in Teaching Multivariable Derivatives

Rojas-Celis C[a] y Cáceres M. J.[b]

[a]Universidad El Bosque, [b]Universidad de Salamanca

En este resumen se presenta el primer avance de una investigación cuyo objetivo general es identificar el conocimiento matemático, que manifiestan los profesores durante la enseñanza de las derivadas en varias variables, a estudiantes de programas de Matemáticas e ingenierías, utilizando el modelo *Mathematical Teacher Specialiced Knowledge* (MTSK). Para lograrlo, se han diseñado tres etapas; la primera de ellas consiste en la elaboración de categorías e indicadores para los tres dominios que expone el MTSK: conocimiento matemático (MK), conocimiento didáctico del contenido (PCK) y las creencias. En la siguiente etapa, se aplicarán estas categorías e indicadores en tres estudios de caso con profesores del curso de Cálculo en varias variables, con el fin de identificar el conocimiento especializado según el modelo. La etapa final pretende identificar cómo los profesores de matemáticas adquirieron el conocimiento especializado para enseñar el concepto de derivadas en varias variables, relacionándolo con sus creencias, las cuales influyen en sus formas de enseñar.

En este contexto, las autoras presentan, para la primera etapa, el diseño de categorías e indicadores para los subdominios del Conocimiento Matemático (MK) en la enseñanza de las derivadas parciales. Para ello, se realizó una revisión bibliográfica que incluyó cuatro documentos (Carrillo et al., 2018), (Carrillo et al., 2022), (Delgado-Rebolledo, 2020) y (Espinoza, 2020), con los que se identificaron los conceptos y definiciones del MK y sus subdominios. Se diseñaron cinco categorías con ocho indicadores para el subdominio sobre el conocimiento de los temas (KoT), cuatro categorías con cuatro indicadores para el conocimiento de las estructuras matemáticas (KSM), y la misma cantidad para el conocimiento de la práctica matemática (KPM). Este proceso permitió, primero, una comprensión profunda del tema de interés, así como de la formalidad matemática que lo acompaña, y segundo, identificar el qué y el para qué del tema a enseñar.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C., (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M. y Climent, N., (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson S.L.

Delgado-Rebolledo, (2020). *Una propuesta de categorización del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios* [Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/Txt-0000/UCB0379_01.pdf

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función*. [Tesis doctoral]. Universidad de Valparaíso.

Rojas, C. y Cáceres, M. (2024). Diseño de herramienta de análisis del conocimiento especializado en la enseñanza de las derivadas en varias variables. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 623). SEIEM.

EXPERIENCIAS ESCOLARES Y DISEÑO DE TAREAS PROFESIONALES

School experiences and professional task design

Rosell, C., Vanegas, Y. y Estrada, A.

Universitat de Lleida

Aprender a fomentar un aprendizaje significativo de las nociones matemáticas en edades tempranas requiere comprender, entre otros aspectos, cómo los niños construyen su conocimiento y cómo atribuyen significado a ciertos tipos de situaciones. Se sabe que el aprendizaje de nociones geométricas es fundamental, ya que proporciona elementos relevantes para que los niños interpreten y describan su entorno, así como diversos fenómenos. Coincidimos con Sarama et al. (2021) en que comprender las trayectorias de aprendizaje puede mejorar las estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y promover el desarrollo del pensamiento matemático en los niños.

El propósito de esta comunicación es describir una experiencia en la que se identifican las trayectorias de aprendizaje (Clements y Sarama, 2009) de la noción de simetría seguidas por un grupo de 50 alumnos de 5-6 años de una escuela pública española. Se registran audiovisualmente las diferentes sesiones y posteriormente se digitalizan y realizan las transcripciones correspondientes. Estos registros (textuales y visuales) se constituyen en los datos del estudio. Se encuentra que los niños son capaces de reconocer similitudes y repeticiones de las obras de arte estudiadas. Explican un cambio de orientación asociándolo a la línea del horizonte cuando realizan una actividad en la que se analiza la ilustración de un cuento ("El reflejo del pájaro"). En su mayoría identifican ejes de simetría horizontales y verticales. Y, pocos niños, son capaces de encontrar otros ejes (diagonales) en las diferentes obras artísticas estudiadas.

Los resultados de esta experiencia escolar se han constituido en la base para el diseño de tareas profesionales. Con dichas tareas se busca involucrar a futuros maestros de educación infantil en cómo enseñar matemáticas en las etapas iniciales. Tal y como plantean Watson y Ohtani (2015) las tareas son el fundamento del aprendizaje matemático. Conocer las miradas iniciales que tienen los futuros maestros cuando analizan diversas experiencias escolares permitirá fomentar una postura reflexiva como motor permanente para la transformación de la práctica docente y su desarrollo profesional. Según Vanegas et al. (2021), un aspecto clave en la formación de maestros es el diseño de tareas profesionales que promuevan el desarrollo del conocimiento profesional necesario para enseñar los contenidos matemáticos.

Referencias

Clements, D. y Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003083528

Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A. y Vanegas, Y. (2021). Length measurement in the early years: teaching and learning with learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-24. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1858245

Vanegas, Y. M., Giménez, J., Prat, M. y Edo, M. (2021). **P**rofessional Tasks in Early Childhood Education Teacher Education: Promoting Reasoning at 0-3**.** *Acta Scientiae*, 23(7). https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6307

Watson, A. y Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Rosell, C., Vanegas, Y. y Estrada, A. Experiencias escolares y diseño de tareas profesionales. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 624). SEIEM.

DESARROLLO DE HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN EN GEOMETRÍA MEDIANTE MANIPULATIVOS IMPRESOS EN 3D

Development of Visualization Skills in Geometry through 3D Printed Manipulatives

Rotger-García, L., Ruíz-González, A. y Ribera-Puchades, J. M.

Universitat de les Illes Balears

La visualización en matemáticas, definida por Gutiérrez (1996) como el razonamiento que involucra elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, es fundamental en el estudio de la geometría. Duval (1998) argumenta que la enseñanza de la geometría es compleja debido a los distintos procesos cognitivos que implica: visualización, construcción con herramientas y razonamiento. El uso de manipulativos, como las figuras 3D, se ha considerado útil para facilitar la comprensión de conceptos abstractos y proporcionar una base para razonamientos más elaborados (Ramírez, 2012). Este tipo de material no solo enriquece la experiencia de aprendizaje con ejemplos visuales, sino que también ayuda a los estudiantes a verificar hipótesis y profundizar en el análisis de formas geométricas. El objetivo de este estudio es el analizar el desarrollo de las habilidades de visualización en estudiantes de los primeros cursos de Educación Secundaria mediante el uso de materiales manipulativos impresos en 3D en la resolución de problemas de geometría.

El estudio se ha efectuado mediante la observación sistemática de alumnado de 1º y 2º de ESO del IES Torcuato Fernández-Miranda en Arroyomolinos, Madrid. Para tal fin, se implementó una sesión en la asignatura de Matemáticas donde se utilizó material impreso en 3D como material manipulativo de apoyo para la resolución de problemas de visualización. Los problemas tratados incluyeron el estudio de secciones planas, simetrías y la composición y descomposición de formas geométricas tridimensionales. Específicamente, se llevó a cabo un análisis cualitativo de las transcripciones de las sesiones, examinando las respuestas de los estudiantes antes y después de manipular los objetos impresos en 3D. Como resultado, se observó el uso de los manipulativos 3D para corregir respuestas incorrectas, en línea con Ramírez (2012). Aunque los procesos de validación con el material 3D facilitaron la resolución de problemas, no se detectó una mejora significativa en las habilidades de visualización de los estudiantes, acorde con los resultados de Fuertes-Prieto et al. (2023) en futuros maestros. Se sugiere la necesidad de investigaciones más extensas que integren tanto la impresión 3D como las herramientas tecnológicas de modelado 3D.

Referencias

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Fuertes-Prieto, M. A., Alonso-Ruano, B. M., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Rodríguez-Muelas, D. (2023). Introducción del diseño e impresión 3D en la formación matemática de los futuros maestros. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 568). SEIEM.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. *Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.*, 1, 3-19.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/23889

Rotger-García, L., Ruíz-González, A. y Ribera-Puchades, J. M. (2024). Desarrollo de habilidades de visualización en geometría mediante manipulativos impresos en 3D. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 625). SEIEM.

ANÁLISIS DEL CICLO DE MODELIZACIÓN EN UN CONTEXTO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA 3D

Analysis of the Modeling Cycle in a 3D Geometry Problem-Solving Context

Rotger-García, L.[a], Gilardi, L.[b], Ribera-Puchades, J. M.[a], Nolla, A.[b] y Benito, A.[b]

[a]Universitat de les Illes Balears, [b]Universidad Autónoma de Madrid

Una de las posibles dificultades que se encuentran en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría tridimensional es la usual representación plana de los objetos tridimensionales (Parzysz, 1988). Los programas de modelado tridimensional (PM3D) pueden convertirse en herramientas tecnológicas que faciliten los procesos de visualización de los objetos tridimensionales en un contexto de resolución de problemas. Desde la perspectiva de la modelización (Blum y Leiß, 2007), estos problemas de geometría tridimensional pueden ser simplificados con el objetivo de matematizar la situación planteada para, posteriormente, validar el modelo tridimensional diseñado. En estos procesos, el uso de la tecnología puede facilitar la experimentación matemática, el análisis y la validación de los objetos tridimensionales diseñados (Greefrath, 2019).

El presente estudio tiene como objetivo analizar el proceso completo de modelización llevado a cabo por alumnado de Educación Primaria y Secundaria durante la resolución de problemas de geometría tridimensional. Este estudio se desarrolló en el contexto de un taller extracurricular en la Comunidad de Madrid. Los problemas planteados en la experiencia incluían la necesidad de traducir al lenguaje matemático objetos 3D para su modelización. Se empleó el PM3D TinkerCAD, que facilita la construcción de modelos tridimensionales mediante el uso de formas primitivas (ortoedros, prismas, cilindros…) que pueden modificarse en posición, forma, tamaño y mediante operaciones binarias lógicas sobre conjuntos geométricos. Algunos de estos modelos fueron impresos en 3D para validar la respuesta a los problemas. Este análisis se centra en las creaciones del alumnado participante en el programa, examinando los modelos elaborados en las diversas etapas del proceso de modelización para abordar los problemas propuestos.

Los resultados destacan la relevancia del proceso de validación de los modelos creados mediante PM3D, así como del análisis de los objetos impresos en 3D diseñados para resolver los problemas propuestos, en línea con el modelo de Blum y Leiß (2007). Estos procedimientos de validación han evidenciado, entre el alumnado participante, la necesidad de desarrollar nuevos ciclos de modelización que sean más precisos en términos de dimensión y forma, especialmente.

Referencias

Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester, United Kingdom: Ellis Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Greefrath, G. (2019). Mathematical modelling – Background and current projects in Germany. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 23-41). Valladolid: SEIEM.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing" problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79–92. https://doi.org/10.1007/BF00428386

Rotger-García, L., Gilardi, L., Ribera-Puchades, J. M., Nolla, A. y Benito, A. (2024). Análisis del ciclo de modelización en un contexto de resolución de problemas de geometría 3D. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 626). SEIEM.

EXPLORANDO EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN MATEMÁTICAS: EXPERIENCIAS DESCONECTADAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Exploring computational thinking in mathematics: disconnected experiences in elementary education.

Ruano-Cano, A.[b], Sánchez-Cruzado, C.[a], Moral-Sánchez, S. N.[a], Sánchez-Compaña, T.[a], Raya-Fernández, A.[a]

[a] Universidad de Málaga, [b] Universidad de Almería

El pensamiento computacional se incorpora al currículum del área de Matemáticas en la actual legislación educativa. Selby y Woolland (2014) describen el pensamiento computacional como un método de resolución de problemas que incorpora procesos de reflexión y utiliza la descomposición, los algoritmos, las abstracciones, la evaluación y el reconocimiento de patrones. Por otro lado, se precisa de actividades que fomenten la gestión de emociones o mejoren la actitud frente al error (Boaler, 2016). En este trabajo se pretende observar si mediante actividades sin ordenador (experiencias desconectadas), el alumnado es capaz de desarrollar habilidades propias del pensamiento computacional, superar retos y gestionar el error como oportunidad de aprendizaje.

La experiencia se llevó a cabo en un colegio público de Málaga, con 50 estudiantes de 4º y 5º de primaria. Se realizó un experimento de enseñanza con 4 sesiones introduciendo al alumnado al pensamiento computacional con material manipulativo, sin ordenadores. Se usó el juego Turing Tumble (simulador de computadoras mecánicas con componentes plásticos que actúan como puertas lógicas básicas impulsadas por canicas). Las sesiones iban incrementándose en dificultad, desde lo que se denomina como cacharreo, a actividades de creación de caminos para obtener determinados patrones (equivalente a crear algoritmos), reconocimiento de patrones, depurar y/o mejorar los algoritmos. Los primeros resultados muestran que se consiguen desarrollar destrezas computacionales. En cuanto a la parte socioafectiva, hay diversidad en cuanto a la superación de retos, al nivel de frustración ante los errores y la forma de trabajar en grupo.

Agradecimientos

Financiado por el Proyecto de Plan Propio de la UMA, JA.B1-34, código: B1-2023_029.

Referencias

Boaler, J. (2016). *Mentalidades matemáticas. Cómo liberar el potencial de los estudiantes mediante las matemáticas creativas, mensajes inspiradores y una enseñanza innovadora.* SIRIO

Selby, C. y Woolland, J, (2014). *Refining an understanding of computational thinking*. University of Southampthon. https://eprints.soton.ac.uk/372410/

Ruano-Cano, A., Sánchez-Cruzado, C., Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compaña, T., Raya-Fernández, A. (2024). Explorando el pensamiento computacional en matemáticas: experiencias desconectadas en educación primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 627). SEIEM.

EXPLORANDO LA DISTRIBUCIÓN DE LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ANÁLISIS DESDE UNA PERSPECTIVA GLOBAL

Exploring the Distribution of Math Anxiety in Primary Education: An Analysis from a Global Perspective

Sagarduy, A., Arrieta, N. y Bilbao, I.

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Ciencias Experimentales y Sociales. Universidad del País Vasco/ Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

En la Educación Obligatoria el aprendizaje de las matemáticas es fundamental, ya que ofrece ventajas desde diversas perspectivas (instrumental, intelectual, comunicativa, cultural, lúdica, estética, recreativa e histórica) interrelacionadas (Pina y Ayala, 2001). Sin embargo, frecuentemente su enseñanza se enfrenta a desafíos debido a la percepción adversa que el alumnado tiene hacia esta disciplina, lo cual se refleja en los resultados y actitudes académicas, afectando el rendimiento en todas las etapas del aprendizaje, con especial énfasis en la Educación Primaria (Ashcraft y Krause, 2007). La ansiedad matemática, es definida como un conjunto de reacciones emocionales negativas que interfieren con la ejecución de actividades matemáticas y juega un papel crucial deteriorando tanto el desempeño como la disposición del estudiantado hacia la asignatura (Larracilla-Salazar et al., 2019; Richardson y Suinn, 1972). En este contexto, el objetivo principal de este trabajo de investigación fue explorar la literatura científica existente sobre la ansiedad matemática en Educación Primaria. Para ello, a partir de las palabras clave 'ansiedad matemática' y 'Educación Primaria', se realizó un análisis bibliométrico de los estudios científicos publicados en las revistas escaneadas en la *Web of Science*, obteniendo un total de 360 publicaciones. Asimismo, las variables: evolución temporal, co-ocurrencia de palabras clave, distribución de publicaciones por revista, institución, país y autoría fueron analizadas y visualizadas a través del software *VosViewer*. Los principales resultados revelaron que: (1) existe un interés creciente por parte de la comunidad científica en estudiar la ansiedad matemática en la Educación Primaria, (2) la palabra 'motivación' emergió como la palabra clave más destacada en el análisis de tendencias, (3) *Frontiers in Phychology* destacó como la revista más relevante e influyente, (4) la Universidad de Chicago sobresalió tanto en cantidad como en calidad de sus publicaciones, (5) Estados Unidos mostró su liderazgo en el abordaje de la ansiedad matemática y (6) en términos de autoría, hubo una mayoría de mujeres, donde Susan C. Levine destacó por su alta producción científica. Este enfoque bibliométrico proporciona una visión detallada acerca de este fenómeno en la literatura científica actual, ofreciendo hallazgos valiosos para futuras investigaciones y mejora de prácticas educativas.

Referencias

Ashcraft, M. H. y Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. *Psychonomic Bulletin & Review, 14*(2), 243-248. https://doi.org/10.3758/BF03194059

Larracilla-Salazar, N., Moreno-Garcia, E. y Escalera-Chavez, M. E. (2019). Anxiety toward Math: A Descriptive Analysis by Sociodemographic Variables. *European Journal of Educational Research, 8*(4), 1039-1051. https://doi.org/10.12973/eu-jer.8.4.1039

Pina, F. H. y Ayala, E. S. (2001). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. *Educación Matemática, 13*(1), 119-123. https://doi.org/10.24844/em1301.09

Richardson, F. C. y Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of counseling Psychology, 19*(6), 551. https://doi.org/10.1037/h0033456

Sagarduy, A., Arrieta, N. y Bilbao, I. (2024). Explorando la distribución de la ansiedad matemática en la Educación Primaria: Un análisis desde una perspectiva global. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 628). SEIEM.

UNA SECUENCIA DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS ELEMENTALES DE LA TEORÍA DE GRAFOS

A sequence of tasks for teaching elementary concepts of graph theory

Sánchez-Fabián, L.[a, b] y González, A.[c]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]IES Benjamín Jarnés (Fuentes de Ebro), [c]Universidad de Sevilla

Una rama de la matemática con gran relevancia en la actualidad es la teoría de grafos, que, con la implantación de la nueva ley educativa, ha sido incluida en el currículo no universitario. Por ello, se hace necesario diseñar y evaluar propuestas de enseñanza de nociones básicas de esta temática, lo cual motivó el objetivo de este trabajo: crear una secuencia de tareas como parte de una *trayectoria hipotética de aprendizaje* (Simon, 1995) de la teoría de grafos. El referente teórico que se tomó para diseñar dicha secuencia fue la particularización del modelo de Van Hiele (1986) a la teoría de grafos elaborada por González et al. (2021). Además, se utilizó el enfoque de la *enseñanza a través de la resolución problemas* (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021) como guía para elaborar las tareas.

El estudio sigue la metodología de *investigación basada en el diseño* (Molina, 2021). Se llevó a cabo un *experimento de enseñanza* durante varias sesiones donde se realizaron las tareas de la secuencia para, posteriormente, analizar las producciones obtenidas. Los participantes en dicho experimento fueron los estudiantes de una clase de Educación Secundaria de un centro público de la provincia de Huesca, quienes fueron divididos en 5 grupos de trabajo. Para recoger los datos, se utilizaron diferentes instrumentos tales como el diario de clase del profesor, las producciones escritas del alumnado, entrevistas semiestructuradas y grabaciones de los grupos durante las sesiones de aula.

La evaluación de la propuesta se realizó adaptando el método descrito por Cárcamo et al. (2021), comparando la trayectoria hipotética de aprendizaje con la *trayectoria real de aprendizaje*. Para ello, hubo que definir un *criterio de aproximación* entre ambas trayectorias teniendo en cuenta las respuestas dadas, de tal forma que se distinguieron casos de aproximación baja, media y alta. Se obtuvieron resultados que revelaron diferentes tipos de evolución en la complejidad del razonamiento sobre grafos. Sin embargo, se observó una progresión global creciente del grupo clase en la secuencia.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, *98*, 11-21. https://doi.org/10.24310/mgnmar.v3i2.14693

Cárcamo, A., Fortuny, J. M. y Fuentealba, C. (2021). Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 45-64. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2857

González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Puertas, M. L. (2021). Characterizing Levels of Reasoning in Graph Theory. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(8), em1990. https://doi.org/10.29333/ejmste/11020

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez., M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV*, 83-97. SEIEM.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* Academic Press.

Sánchez-Fabián, L. y González, A. (2024). Una secuencia de tareas para la enseñanza de conceptos elementales de la teoría de grafos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 629). SEIEM.

PROGRAMANDO ROBOTS DE SUELO CON ALUMNADO DE 2.º Y 3.º DE PRIMARIA: ¿SINERGIA ENTRE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y ROTACIÓN MENTAL?

Programming floor robots with 2nd and 3rd graders: ¿Synergy between computational thinking and mental rotation?

Sánchez-López, M. [a], González-Calero, J.A. [a], Del Olmo-Muñoz, J. [a]

[a] Universidad de Castilla-La Mancha

El pensamiento computacional es un conjunto esencial de habilidades estrechamente vinculado al pensamiento matemático, la ingeniería y la práctica científica (Wing, 2006). Por otra parte, desarrollar la capacidad de rotación mental proporciona a los niños una herramienta cognitiva de gran utilidad en las matemáticas escolares (Bruce y Hawes, 2015). El presente estudio piloto se desarrolló en un centro escolar con la participación de 50 estudiantes de 2.º y 3.º de Educación Primaria. El objetivo principal era evaluar el impacto de un breve programa de intervención con robots de suelo en el desarrollo de habilidades específicas de pensamiento computacional y rotación mental. La duración total de la intervención fue de seis semanas, con evaluaciones pre-test y post-test en la primera y última semana, y cuatro sesiones intermedias dedicadas a la programación en las que el alumnado usó el robot *BeeBot* en tareas de complejidad creciente. Para la evaluación del pensamiento computacional se aplicó una reducción del BCTt (*Beginners Computational Thinking Test*) (Zapata-Cáceres et al., 2020), y para la rotación mental se utilizaron dos adaptaciones (2D y 3D) del *Vandenberg Mental Rotations Test* (Vandenverg y Kuse, 1978). Los resultados muestran una mejora significativa del alumnado tanto en sus habilidades de pensamiento computacional como de rotación mental, lo que avalaría la eficacia de la intervención a pesar de su brevedad. Además, los análisis desglosados por sexo revelaron que las chicas experimentaron un desarrollo más pronunciado en habilidades de pensamiento computacional y una ganancia similar en rotación mental. Este estudio demuestra cómo una breve intervención basada en la robótica puede mejorar significativamente habilidades matemáticas específicas y constituye una base sólida para futuros estudios que podrían investigar el uso de diversas herramientas tecnológicas, como los simuladores de robot.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo del proyecto TED2021-131557B-I00 financiado por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 y por la Unión Europea NextGenerationEU/PRTR; la ayuda 2022-GRIN-34039 de la Universidad de Castilla-La Mancha, cofinanciada con fondos FEDER; y la ayuda FPU19/03857 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Referencias

Bruce, C. D. y Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM, 47*(3), 331–343.

Vandenberg, S. G. y Kuse, A. R. (1978). Mental Rotations, a Group Test of Three-Dimensional Spatial Visualization. *Perceptual and Motor Skills, 47*(2), 599–604.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33.

Zapata-Cáceres, M., Martin-Barroso, E. y Román-González, M. (2020). Computational thinking test for beginners: Design and content validation. *2020 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON), 2020*-April, 1905–1914.

Sánchez-López, M., González-Calero, J. A. y Del Olmo-Muñoz, J. (2023). Programando robots de suelo con alumnado de 2.º y 3.º de primaria: ¿sinergia entre pensamiento computacional y rotación mental? En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 630). SEIEM.

DEL CONOCIMIENTO ADQUIRIDO AL CONOCIMIENTO EN USO

From acquired knowledge to knowledge in use

Sánchez-Matamoros, G.[a], Moreno, M.[b], Valls, J.[b] y Aráuz, D.F.[c]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Alicante, [c]Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua

Recientemente investigadores educativos han apuntado la necesidad de relacionar la teoría con la práctica como estrategia pedagógica de la formación docente (Darling-Hammond et al., 2017; Llinares, 2014), llevando a algunos programas de formación del profesorado a adoptar una formación basada en la práctica "practice-based teacher education" (Matsumoto-Royo y Ramírez-Montoya, 2021), lo que implica mayor contacto con la práctica en el aula y cambios en los programas formativos (McDonald et al., 2013). El objetivo de este estudio es determinar las diferencias entre el conocimiento adquirido por una estudiante para profesora de matemáticas de secundaria (EPS) en las aulas universitarias y el conocimiento en uso en un aula de 10º grado de educación secundaria durante las prácticas de enseñanza. Para ello utilizaremos el modelo de enseñanza de prácticas nucleares de McDonald et al. (2013) a fin de analizar las actividades en las que se basan las prácticas nucleares propuestas, su implementación en aulas reales y la posterior reflexión. La EPS cursaba la asignatura de Prácticas Profesionales IV (4 créditos académicos) de la licenciatura para profesor de matemáticas de la universidad pública de Nicaragua, cuya propuesta formativa se organizó alrededor de tres momentos, uno de formación en la universidad para la adquisición de prácticas nucleares propias de la profesión docente; otro de prácticas de enseñanza en centros de educación secundaria y un tercero de reflexión colectiva sobre las prácticas de enseñanza. En este estudio nos centramos en la práctica nuclear Diseño y Secuenciación de tareas. El conocimiento adquirido por la EPS en su formación, evidenció la capacidad de esta para diseñar una secuencia de tareas basada en la idea de aprender a reconocer estructuras algebraicas elementales en otras más complejas, mediante el uso de propiedades y transformaciones. Sin embargo, el conocimiento en uso que manifestó la EPS en las aulas de secundaria, estuvo en función de la complejidad de los cálculos aritméticos, aspecto relevante por el contexto institucional en el que no se permitía el uso de calculadoras y atendiendo a las directrices de la Guía del Docente. Por tanto, las diferencias observadas en el uso del conocimiento están condicionadas por el contexto de aplicación de este y por los objetivos de aprendizaje acordes a los planteamientos institucionales.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto Referencia: PID2020-116514GB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Darling-Hammond, L., Hyler, M. E. y Gardner, M. (2017). *Effective teacher professional development*. Learning Policy Institute.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 31-51.

Matsumoto-Royo, K., y Ramírez-Montoya, M. S. (2021). Core practices in practice-based teacher education: A systematic literature review of its teaching and assessment process. *Studies in Educational Evaluation, 70*, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101047

McDonald, M., Kazemi, E., y Kavanagh, S. S. (2013). Core practices and pedagogies of teacher education: A call for a common language and collective activity. *Journal of Teacher Education, 64*(5), 378-386. https://doi.org/10.1177/0022487113493807

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Valls, J. y Aráuz, D.F. (2024). Del conocimiento adquirido al conocimiento en uso. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 631). SEIEM.

UNA PROPUESTA PARA TRABAJAR LA SECUENCIACIÓN Y EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN UN ENTORNO VIRTUAL

A proposal for working with sequencing and computational thinking in a virtual environment

Sanz-Herranz, H. y Cuida, A.

Universidad de Valladolid

La noción de secuencia ocupa un papel crucial en el seno del pensamiento computacional, según destacan Brennan y Resnick (2012). Este concepto implica la organización de pasos o instrucciones en un orden específico necesario para resolver un problema o completar una tarea determinada. Tal estructuración es esencial no solo para la programación, sino también para el desarrollo de habilidades lógicas y de resolución de problemas en contextos diversos.

Además, es relevante mencionar que el pensamiento computacional se ha integrado recientemente en el currículo escolar, a raíz de la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE). Esta inclusión subraya la importancia de investigar acerca de la didáctica del pensamiento computacional, explorar métodos efectivos para enseñarlo y promover las habilidades relacionadas con este enfoque de pensamiento, como argumentan Grover y Pea (2013) al resaltar la importancia del pensamiento computacional como una habilidad fundamental para el siglo XXI.

Para este propósito, se ha desarrollado una serie de actividades en un ambiente virtual, inspirada en la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje descrita por Clemens y Sarama (2004). Estas actividades, diseñadas para fomentar la comprensión y aplicación de la secuenciación, fueron aplicadas de forma exploratoria a 5446 estudiantes de entre 6 y 10 años. Durante el proceso, se recolectaron datos cuantitativos sobre las tasas de efectividad y los tiempos de respuesta, además de un registro de los errores observados más comunes, lo que permite una evaluación detallada de las intervenciones educativas en tecnología digital.

Las conclusiones principales destacan que la efectividad del proceso de enseñanza-aprendizaje no depende significativamente del género ni de la edad, lo cual está en línea con estudios anteriores que sugieren que las capacidades en el pensamiento computacional pueden desarrollarse de manera efectiva en estudiantes de diferentes perfiles (Yadav et al., 2017).

Referencias

Brennan, K. y Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. Proceedings of the American Educational Research Association. Vancouver, Canada.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2),*81-89.

Grover, S. y Pea, R. (2013). Computational thinking in K-12: A review of the state of the field. *Educational Researcher*, *42*(1), 38-43. https://doi.org/10.3102/0013189X12463051

Yadav, A., Hong, H. y Stephenson, C. (2017). Expanding computer science education in schools: Understanding teacher experiences and challenges. *Computer Science Education*, *27*(4), 235-254. https://doi.org/10.1080/08993408.2017.1361036

Sanz-Herranz, H. y Cuida, A. (2024). Una propuesta para trabajar la secuenciación y el pensamiento computacional en un entorno virtual. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 632). SEIEM.

CONTRIBUCIONES A LA FORMACIÓN PERMANENTE DE LOS PROFESORES DE PRIMARIA MEDIANTE SU PARTICIPACIÓN EN ESCENARIOS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

Contributions to in-service primary teachers' education from their engagement in mathematics landscapes of investigation

Silva, G. H. G.[a] y Ponte, J. P. [b]

[a]UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa / Universidade Estadual Paulista (Unesp), Brasil, [b]UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

En la investigación sobre Educación Matemática, los estudios han señalado la existencia de escasa atención en la formación inicial del profesorado de primaria a la exploración de los contenidos matemáticos a partir de discusiones críticas orientadas a su uso pedagógico en la comprensión de los problemas sociales emergentes (Gutstein, 2018). Sin embargo, el tratamiento de estas y otras cuestiones en las clases de matemáticas se ha convertido cada vez más en un requisito de los planes de estudios básicos. Como consecuencia, muchos profesores de primaria, sobre todo los noveles, no se sienten preparados para trabajar estos temas en las clases de matemáticas, lo que les lleva a buscar formación posterior. Aunque esta situación es referida en la literatura, existen pocos estudios dirigidos específicamente a comprender cómo los profesores aprenden y ponen en práctica tareas que permiten el tratamiento de temas sociales en sus clases de matemáticas como resultado de su participación en formación permanente. Utilizando la perspectiva de la Educación Matemática Crítica, el objetivo de esta investigación es comprender cómo profesores de primaria que trabajan con escenarios de investigación se desarrollan a partir del estudio y elaboración de tareas de investigación. La Educación Matemática Crítica se ocupa principalmente de la conexión entre la educación matemática y cuestiones como la equidad, la justicia social, el racismo, el sexismo, el diálogo en el aula y la inclusión, entre otras (Skovsmose, 2023). Los escenarios ("landscapes") de investigación ha sido una forma de abordar estas preocupaciones en las aulas. Son ambientes de aprendizaje que proporcionan a los estudiantes oportunidades para construir sus propias conclusiones, aceptando la invitación a analizar situaciones y problemas con los principios de investigación, exploración, cuestionamiento y sondeo de hipótesis e ideas. Para alcanzar los objetivos, utilizamos una metodología de estudio de casos con un enfoque cualitativo. Analizaremos la participación de los profesores en un programa dirigido a maestros de primaria. Exploraremos su desarrollo de tareas basadas en el escenario de investigación. Nuestro estudio se encuentra en la fase inicial. Actualmente estamos trabajando en la implementación del curso con 10 profesores de primaria de la zona de Lisboa, Portugal.

Agradecimientos

Funded by the European Union, Horizon-MSCA-2022-PF-01, under grant 101103353. Views and opinions expressed are however those of the authors only and do not necessarily reflect those of the European Union or European Research Executive Agency (REA). Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

Referencias

Gutstein, E. R. (2018). The struggle is pedagogical: Learning to teach critical mathematics. In P. Ernest (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Education Today* (pp. 131-143). Cham: Springer.

Skovsmose, O. (2023). *Critical Mathematics Education*. New York: Springer.

Silva, G. H. G. y Ponte, J. P. (2024). Contribuciones a la formación permanente de los profesores de primaria mediante su participación en escenarios de investigación matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 633). SEIEM.

UNA PROPUESTA DE CURSOS DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO PARA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA

A proposal of Teacher Education Cycles for Critical Mathematics Education

Silva, G. H. G.[a] y Santiago, M. F. M. [b]

[a]UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa Institución, [b]Universidade Federal de Alfenas, Brasil.

La Educación Matemática Crítica (EMC) se entiende como una expresión de preocupaciones y esperanzas en relación con la Educación Matemática, representando una fuerza sociopolítica capaz de efectuar cambios sociales (Skovsmose, 2023). El trabajo pedagógico con escenarios (landscapes) de investigación es una forma de fomentar la preocupación por la ECM en las clases de matemáticas (Silva et al., 2021), ya que ofrece a los estudiantes oportunidades para participar en procesos de investigación, establecer interacciones dialógicas en el aula y reflexionar críticamente sobre cuestiones sociopolíticas (Skovsmose, 2023). En este estudio, proponemos un modelo de formación denominado «Ciclos de formación de profesores para la ECM» y buscamos comprender cómo cinco futuros profesores de matemáticas se involucran en el estudio, desarrollo y elaboración de escenarios de investigación con estudiantes de secundaria. En este texto, enfatizamos nuestra propuesta de ciclo de formación docente, que consta de cuatro etapas. Este modelo se empleó en un programa en el que los futuros profesores desarrollan actividades con un compañero de una escuela pública, bajo la supervisión de un formador de profesores de su programa de licenciatura y un profesor-supervisor de la escuela. La primera etapa relaciona el estudio teórico de las ideas críticas de la educación matemática relacionadas con los escenarios de investigación. Se estimula a los futuros profesores a participar en tareas relacionadas con conceptos matemáticos, la semirrealidad y la realidad (Skovsmose, 2023). La segunda etapa consiste en la planificación colaborativa de uno o más escenarios de tareas basadas en la investigación. Se trata de un momento en el que el equipo evalúa el contenido matemático tratado en el aula desde la pareja-escuela y elabora escenarios de investigación. Además, los futuros profesores «prueban» las propuestas que han desarrollado con sus compañeros y a menudo se esfuerzan por anticipar situaciones imprevistas que pueden surgir. Las tareas en el aula se ponen en práctica en la tercera etapa, con el apoyo de un profesor-supervisor, individualmente o con la participación del profesor-formador y el equipo. Es crucial observar el aprendizaje de los alumnos, reflexionar sobre el enfoque adoptado en el aula, identificar los retos y las oportunidades. Por último, en la cuarta fase, se reflexiona colectivamente sobre la práctica realizada en el contexto de la formación. En este punto, todos comparten sus experiencias, informan sobre la dinámica aplicada en el aula, destacan los resultados clave y evalúan las áreas de mejora, cambio o continuación; asimismo, se discuten dificultades y lo que resultó significativo en la lección. Una vez completadas las cuatro etapas, se inicia un nuevo ciclo, considerando las experiencias anteriores. El ciclo de formación de CME que proponemos no sólo consiste en reconfigurar una práctica, sino que también implica una constante autorreflexión, atendiendo a las preocupaciones de CME y contribuyendo a la reflexión de los futuros profesores sobre sus propias prácticas, la postura adoptada en el aula, el papel de las matemáticas en la formación individual, entre otras cuestiones.

Referencias

Silva, G. H. G., Lima, I. M. S. y Rodríguez, F. G. (2021). *Educação Matemática Crítica e a (in)justiça social: práticas pedagógicas e formação de professores*. Mercado de Letras.

Skovsmose, O. (2023). *Critical Mathematics Education*. Springer.

Silva, G. H. G., Santiago, M. F. M (2024). Una propuesta de cursos de formación del profesorado para una educación matemática crítica. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 634). SEIEM.

CONTENIDOS DE LOS LIBROS DE MATEMÁTICAS SM PARA EDADES DE 13 Y 14 AÑOS EN ESPAÑA DESDE 1970 HASTA 2020

Contents of SM mathematics books for ages 13 and 14 in Spain from 1970 to 2020

Soto-Uruñuela, M.P.

Programa de doctorado en Matemáticas y Computación. Universidad de La Rioja

En este póster comparamos los contenidos matemáticos incluidos en los libros de texto distribuidos por la editorial SM, para los cursos comprendidos entre las edades, desde los 13 años hasta los 14 años, conforme a las tres leyes con vigencia desde 1970 hasta 2020 (1970-LGE, 1990-LOGSE y 2013-LOMCE) para la educación matemática en España.

Hemos seleccionado los libros de la editorial SM correspondientes a cada una de las leyes cuyo depósito legal esté dentro de una franja de cinco años, una vez asentada la ley de educación correspondiente en España: LGE (Depósito legal de 1980-1985), LOGSE (Depósito legal de 2000 a 2005) y LOMCE (Depósito legal de 2015 a 2020). Dentro de esta franja hemos intentado que los libros seleccionados correspondan también a un proyecto que tenga continuidad en la editorial para los cursos asignados a las edades de 13 y 14 años.

Hemos clasificado los contenidos de los libros seleccionados en cuatro bloques matemáticos: Números y álgebra, Geometría, Funciones y Estadística y probabilidad. Esta clasificación nos ha permitido ver que, en la mayoría de estos libros, se mantienen los bloques matemáticos, aunque no con la misma carga en todos los cursos académicos. Por ello, se ha realizado una tabla Excel comparativa de los bloques matemáticos correspondientes a los cursos coincidentes por edad en las tres leyes estudiadas. Tendremos así, 2 tablas correspondientes a los cursos 7ºEGB-1ºESO y 8ºEGB-2ºESO.

Estas tablas muestran los contenidos matemáticos por bloques incluyendo el número de capítulos y el volumen de páginas que abarca en cada uno de los libros de texto. El análisis comparativo se realiza en función de los contenidos detallados y también del peso asignado a estos contenidos en cada uno de los libros tras el paso de los años.

La comparación de los contenidos muestra cómo ha evolucionado la presentación de los contenidos matemáticos en los libros de texto desde 1970 hasta 2020 según las necesidades académicas de los estudiantes.

Referencias

Mansilla, S. y Bujanda, M.P. (1984). *Pitágoras: matemáticas, 7 EGB.* Ediciones SM.

Mansilla, S. y Bujanda, M.P. (1984). *Pitágoras: matemáticas, 8 EGB.* Ediciones SM.

Mansilla, S. y Bujanda, M.P. (2005). *Números: 1 Secundaria: matemáticas.* Ediciones SM.

Mansilla, S. y Bujanda, M.P. (2002). *Números: 2 Secundaria: matemáticas.* Ediciones SM.

Nieto, M. (2015). *Matemáticas, 1ESO: Savia.* Ediciones SM.

Nieto, M. (2016). *Matemáticas, 2ESO: Savia.* Ediciones SM.

Soto-Uruñuela, M.P. (2024). Contenidos de los libros de matemáticas SM para edades de 13 y 14 años en España desde 1970 hasta 2020. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 635). SEIEM.

UTILIDAD Y AGRADO DE LAS MATEMÁTICAS. EL DILEMA DE FUTURAS/OS MAESTRAS/OS

The utility and appeal of mathematics: the dilemma of prospective teachers

Sotos-Serrano, M.

Universidad de Castilla-La Mancha

Existe una extensa producción científica en el ámbito de las actitudes hacia las matemáticas del alumnado en los diferentes niveles escolares, así como suficiente evidencia empírica de la relación positiva entre los aspectos cognitivos y emocionales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Sánchez, 2013 y Nortes y Nortes, 2017). Esto tiene implicaciones directas en las competencias profesionales de las y los docentes con dedicación en esta materia, por lo que el conocimiento de estas actitudes resulta imprescindible para realizar cualquier diagnóstico sobre la formación matemática de futuras/os maestras/os de Educación Infantil y Educación Primaria, que son los niveles que se desarrollan durante el importante proceso de socialización primaria, teniendo en cuenta que el aprecio de la disciplina de las matemáticas es un elemento importante para cualquier docente (Aguilar y Muñiz, 2023). Así, el agrado y la utilidad de las matemáticas se pueden considerar como dos de los factores actitudinales importantes para el desempeño profesional de la enseñanza de las matemáticas.

El objetivo de este estudio es conocer las actitudes sobre la utilidad y el agrado de las matemáticas de docentes en formación de la Facultad de Educación de Albacete. Para ello se utiliza la escala de actitudes de Auzmendi (1992), una de las más utilizadas en este tipo de investigaciones, en un grupo de 203 personas de los grados de Maestro de Ed. Primaria y Maestro de Ed. Infantil. Esta metodología permite contrastar resultados con los de otras investigaciones similares realizadas durante los últimos años y comprobar si las situaciones son análogas y permanecen estables en el tiempo.

Los resultados obtenidos muestran consistencia con los de investigaciones precedentes, lo que plantea dudas sobre la capacidad de cambio de dichas actitudes durante la formación universitaria y sobre qué tipo de estrategias se pueden promover para mejorar las competencias profesionales de las/os docentes en formación.

Referencias

Aguilar, Á. y Muñiz, L. (2023). Creencias sobre las características esenciales de un buen profesor de matemáticas. En C. Jiménez, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 558). SEIEM.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria.* Ediciones Mensajero.

Nortes, R. y Nortes, A. (2017). A los futuros maestros no les agradan las Matemáticas… pero las consideran útiles. En J.M. Muñoz, A. Arnal, P. Beltrán, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 367-376). SEIEM.

Sánchez, J. (2013). *Actitudes hacia las matemáticas de los futuros maestros de Educación Primaria* (Tesis doctoral, Universidad de Granada). Repositorio institucional de la Universidad de Granada https://digibug.ugr.es/handle/10481/29827

Sotos-Serrano, M. (2024). Utilidad y agrado de las matemáticas. El dilema de futuras/os maestras/os. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 636). SEIEM.

COMPRENSIÓN DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL POR FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Prospective primary school teachers' understanding of the sampling proportion

Stuardo-Aguayo, A.[a], Gea, M. M.[a], Begué, N.[b] y Elgueda-Ibarra, M.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Zaragoza

El muestreo es una idea fundamental en el sentido estocástico (Burril y Biehler, 2011), pues sienta las bases para una adecuada comprensión de la estadística inferencial. En este trabajo nos interesamos por el conocimiento sobre el tema de una muestra de 105 estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada cuando resuelven una tarea de estimación a partir de una proporción muestral. Enmarcamos el estudio en el Enfoque Ontosemiótico (EOS, Godino et al., 2017), que interpreta el Conocimiento Didáctico Matemático del profesor en tres dimensiones (didáctica, matemática y metadidáctica). En concreto, se analiza su conocimiento matemático.

La tarea ha sido adaptada de Gómez-Torres et al. (2018) y aplicamos el método de análisis de contenido (Krippendorff, 2019) sobre los procesos de resolución de los participantes para clasificar sus respuestas en categorías mediante un proceso sistemático y objetivo. Los resultados informan de dificultades al utilizar la proporción muestral para estimar la proporción poblacional, el total poblacional o la proporción en una nueva muestra (25,7% 15,2% y 33,3% de respuestas correctas, respectivamente); siendo considerable el índice de no respuesta en cualquier apartado de la tarea (entre el 22% y el 24%) o de respuestas confusas. En general, se aprecian dificultades en la comprensión del muestreo cuando se aplica razonamiento aditivo para estimar el total poblacional (46,7%), y cuando se combina información de muestras independientes al estimar la proporción en una nueva muestra (29,6%). Por tanto, advertimos de debilidades en el conocimiento sobre muestreo de futuros profesores de Educación Primaria, no sólo en su conocimiento avanzado sino en cuanto al que comparten con su grupo clase (conocimiento común, según el EOS).

Agradecimientos

Proyecto *PID2022-139748NB-I00* financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Springer.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gómez-Torres, E., Díaz, C., Contreras, J. M., y Ortiz, J. J. (2018). Prospective teachers' probabilistic reasoning in the context of sampling. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds,), *Teaching and learning stochastics: advances in probability education research* (pp. 351-372). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_20

Krippendorff, K. (2019). *Análisis de contenido: una introducción a su metodología*. (4ª ed.). Sage.

Stuardo-Aguayo, A., Gea, M. M., Begué, N. y Elgueda-Ibarra, M. (2024). Comprensión de la proporción muestral por futuros profesores de Educación Primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 637). SEIEM.

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN UNA INTERVENCIÓN CON EXPLODING DOTS

Attitudes towards mathematics in an intervention with Exploding Dots

Suárez-González, C., Santaengracia, J. J. y Rodríguez-Muñiz, L. J.

Universidad de Oviedo

El dominio afectivo en educación matemática se conceptualiza como un constructo formado por tres componentes: las creencias matemáticas, las emociones y las actitudes (Marbán, 2016). El objetivo de esta investigación es analizar qué actitudes hacia las matemáticas se pueden identificar en el estudiantado de 1.º ESO participante en una intervención basada en Exploding Dots.

En el marco de un proyecto más amplio, que involucró a 86 centros educativos de Cataluña, Aragón, Andalucía y La Rioja, la intervención se llevó a cabo durante los meses de septiembre de 2023 y febrero de 2024 en los 42 centros del grupo experimental. La intervención se aplicó en 42 centros y se basó en el modelo Exploding Dots (https://www.globalmathproject.org/), una reconceptualización de la representación de números que permite un nuevo enfoque aritmético (y también del álgebra, aunque la intervención no había llegado aún a ese nivel en el momento de la recogida de datos). Durante el desarrollo de la intervención se visitaron 34 centros (concretamente, en noviembre de 2023 y enero de 2024) y se realizaron in situ entrevistas semiestructuradas (Patton, 2002) sobre la opinión del alumnado participante. Las entrevistas se realizaron en pequeños grupos, por parte de los investigadores y sin intervención del profesorado, durante el desarrollo de la clase. Las entrevistas se organizaron en torno a cuatro preguntas planteadas de manera flexible: (1) ¿Te gusta Exploding Dots?; (2) ¿Te gusta más o menos que las otras clases de matemáticas?; (3) ¿Te gustan las matemáticas? y (4) ¿Te gustan más las matemáticas ahora?

Para analizar las respuestas se aplicó una clasificación deductiva (Patton, 2002) a partir de las 15 dimensiones definidas en el Inventario de Actitudes hacia las Matemáticas (González-Pienda et al., 2012), sin excluir a priori otras respuestas que no pudieran ser clasificadas en ninguna dimensión.

Los resultados indican que las dimensiones utilidad percibida, competencia percibida, motivación de logro e intrínseca y sentimientos son las más frecuentes. Cualitativamente, y a falta de complementar con un estudio cuantitativo, la implementación parece haber tenido un efecto positivo en las actitudes hacia las matemáticas, especialmente en las más frecuentes.

Referencias

González-Pienda, J. A., Fernández-Cueli, M., García, T., Suárez, N., Fernández, E., Tuero-Herrero, E. y da Silva, E. H. (2012). Diferencias de género en actitudes hacia las matemáticas en la Enseñanza obligatoria. *Revista Iberoamericana de Psicología y Salud, 3*(1), 55-73.

Marbán, J. M. (2016). Matemáticas y Dominio Afectivo. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 69-74). SEIEM.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research and Evaluation Methods*. Sage Publications.

Suárez-González, C., Santaengracia, J. J., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). Actitudes hacia las matemáticas en una intervención con *Exploding Dots*. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 638). SEIEM.

EL IMPACTO DEL LENGUAJE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON ERROR DE INVERSIÓN

The Impact of Language during Word Problem Solving with Reversal Error

Ventura-Campos, N.[a], Moreno-Rus, A.[a], Santamarta, V.[a], Garcia-Segarra, P.[a] y Falomir, Z.[b]

[a] Universitat Jaume I, Castellón, España, [b] Umeå University, Suecia

Un enfoque clave en la enseñanza-aprendizaje de problemas verbales algebraicos es identificar los procesos cognitivos que se activan desde que los estudiantes reconocen una relación matemática en un problema hasta su formulación en una expresión algebraica. El caso en que el estudiantado reconoce el esquema conceptual del problema verbal de comparación, pero invierte la relación entre dos variables no siendo capaces de plasmar una expresión algebraica correcta, es el conocido como error de inversión (EI). Desde 1980 han surgido estudios elaborando teorías sobre dos modelos que pueden explicar este fenómeno, como la *coincidencia en el orden de palabras* y la *comparación estática*, aunque no existe hasta el momento evidencia que lo clarifique. Jankvist y Niss (2021), sugerían que el propio modismo "veces más/menos que" constituye un obstáculo para el estudiantado que no comprende el significado del mismo. Esta suposición se ve respaldada por los resultados de Ventura-Campos et al. (2022) en el que encuentran diferencias neuronales significativas en la comparación entre el grupo que comete EI comparado con el que no, en el giro medial temporal posterior derecho, asociado al procesamiento de nueva información semántica y nuevos significados de modismos. Hasta donde sabemos solo un estudio ha realizado una intervención interactiva para ayudar a eliminar el EI, pero con poco éxito. El objetivo de este estudio es validar a nivel conductual el videojuego ↶ε-coach creado para ayudar a la eliminación del EI para su posterior implementación en una validación a nivel neuronal con el fin de estudiar la competencia adquirida. La intervención piloto se realizó con 8 participantes que cometían EI, seleccionados mediante dos programas diseñados para su detección. Durante dos semanas, los participantes jugaron a los ocho niveles del videojuego, los cuales presentaban estrategias de resolución, tanto aritméticas como visuales, durante la ejecución destinadas a mejorar la comprensión del enunciado y su traducción a ecuación. Este videojuego recoge las recomendaciones para la elaboración de los diferentes tipos de enunciados que pueden conllevar al EI respecto a la presencia de obstrucción sintáctica, tipos de magnitud, contexto y esquemas conceptuales de comparación aditiva y multiplicativa. Al finalizar la intervención, se les evaluó de nuevo con los programas para detectar el EI. Los resultados mostraron que siete participantes lograron superar el EI. Por otro lado, cinco participantes, a pesar de no cometer EI, persistieron en errores al elegir el operador aritmético adecuado, relacionado con la comprensión de los modismos, reduciendo su incidencia solo en un 40%. En conclusión, los resultados indican que el videojuego satisface las expectativas al eliminar la inversión de variables; sin embargo, requiere de mejoras para asegurar la comprensión de los modismos y la correcta traducción a ecuación utilizando el operador adecuado. Este estudio provee la base necesaria para desarrollar una herramienta de intervención gamificada que ayude a resolver no solo el EI, sino también un error derivado de la comprensión lingüística en enunciados de problemas verbales comparativos; un aspecto que no se ha tenido en cuenta hasta el momento.

Referencias

Jankvist, UT. y Niss, M. (2021) The Students–Professors Problem—The Reversal Error and Beyond. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, 1(2), 190 –226

Ventura-Campos, N., Ferrando-Esteve, N. y Epifanio, I. (2022) The underlying neural bases of the reversal error while solving algebraic word problems. *Scientific Reports*, 12,1–14

Ventura-Campos, N., Moreno-Rus, A., Santamarta, V., García-Segarra, P. y Falomir, Z. (2024). El impacto del lenguaje en la resolución de problemas verbales con Error de Inversión. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 639). SEIEM.

LA DIFUSIÓN DE RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DE LA ESTADÍSTICA: EL PROYECTO LABINQUIRY

The dissemination of study and research paths in university statistics education: LabInquiry project

Verbisck, J.[a], Fernández-Ruano, L.[b], Markulin, K.[c], Comas-Cufí, M.[d] y Bosch, M.[a]

[a]Universitat de Barcelona, [b]IQS School of Engineering, Universitat Ramon Llull, [c]EUSS, Universitat Autònoma de Barcelona, [d]Universitat de Girona

En la actualidad, la educación universitaria vive la presión de transitar de una pedagogía centrada en el profesor y basada en la transmisión de conocimientos a enfoques más centrados en el estudiante y basados en la indagación. Sin embargo, las pedagogías de este último tipo requieren nuevas condiciones que a veces es difícil de alcanzar. En consecuencia, muchas propuestas de enseñanza basada en la indagación no superan la fase experimental (Markulin et al., 2021a). En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), esta problemática se interpreta como un cambio de paradigma: de la visita de las obras al cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013). Teorizar sobre este último paradigma ha permitido a los investigadores de la TAD desarrollar la pedagogía de los *recorridos de estudio e investigación* (REI). La implementación y análisis de los REI en diferentes contextos institucionales han aportado importantes resultados locales sobre las condiciones necesarias para integrarlos en la enseñanza universitaria actual. También han puesto en evidencia importantes limitaciones que obstaculizan su desarrollo y difusión (Markulin et al., 2021b).

LABINQUIRY es un proyecto de prueba de concepto dirigido a transferir los resultados de la investigación sobre los REI a la comunidad educativa a través la difusión de dos REI piloto, uno para la educación secundaria obligatoria y otro para la enseñanza universitaria. Se presenta en forma de una infraestructura didáctica basada en un conjunto de materiales docentes integrados en un campus virtual tipo Moodle, junto con un acompañamiento por parte del equipo TAD a través la constitución de un colectivo de docentes e investigadores que comparten la experiencia de la implementación del REI en su análisis a priori (diseño), in vivo (experimentación) y a posteriori. Presentaremos tres implementaciones del primer REI piloto de LABINQUIRY que se integra en un primer curso de estadística para grados de ingeniería. El REI se centra en la cuestión del efecto de las zonas de bajas emisiones en la calidad del aire de las ciudades de Cataluña a partir de un encargo del área de Medio Ambiente del gobierno catalán. Los resultados de estas primeras implementaciones del REI piloto se basan en las propias observaciones de los procesos de indagación en el aula, así como en las reacciones del estudiantado y de los equipos docentes-investigadores. Se constatan las consecuencias de las adaptaciones de cada REI a las condiciones concretas de los cursos en los que se integran, así como las contribuciones y debilidades de la infraestructura didáctico-matemática que les da soporte.

Referencias

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161–182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Markulin, K., Bosch, M. y Florensa, I. (2021a). Project-based learning in statistics: a critical analysis. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, *11*(1), 200–220.

Markulin, K., Bosch, M. y Florensa, I. (2021b). Un recorrido de estudio e investigación para la enseñanza universitaria de la estadística. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 417–424). Valencia: SEIEM.

Verbisck, J., Fernández-Ruano, L., Markulin, K., Comas-Cufí, M., y Bosch, M. (2024). La difusión de recorridos de estudio e investigación en la estadística universitaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 640). SEIEM.