

III Seminario del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático (III GIDAM 2012-SEIEM)

**9 y 10 de febrero de 2012
Salamanca**



**III Seminario Grupo de Investigación
en Didáctica del Análisis Matemático
(III GIDAM 2012-SEIEM)**

María Mar Moreno (Ed.)

Lleida, 2012

III Seminario Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático (III GIDAM 2012-SEIEM)

Edita:

© María Mar Moreno, Lleida 2012

© Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

© María Mar Moreno

Los talleres y comunicaciones aquí publicados han sido presentados y discutidos en el seno del grupo GIDAM, y posteriormente rehechos por sus autores a partir de las aportaciones de los miembros del GIDAM durante el III Seminario GIDAM 2012-SEIEM realizado en Salamanca los días 9 y 10 de febrero de 2012.

Diseño de la portada: © María Mar Moreno

Impresión y encuadernación:

ISBN: 978-84-695-6786-9

Nº de reg.: 2012113003

Fecha de entrada: 27/12/2012.

Fecha de publicación: 07/01/2013

Impreso en Lleida. España.

INDICE

PRESENTACIÓN	6
 TALLER 1: LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN PRECÁLCULO: UNA ESTRATEGIA PARA EL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA	
Jeannette Vargas Hernández (<i>Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Colombia</i>)	
María Teresa González Astudillo (<i>Universidad de Salamanca</i>)	
Salvador Llinares Ciscar (<i>Universidad de Alicante</i>)	8
 TALLER 2: CÓMO LOS FUTUROS PROFESORES INTERPRETAN EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. Derivada de una función en un punto	
Gloria Sánchez-Matamoros (<i>Universidad de Sevilla</i>)	
Ceneida Fernández (<i>Universidad de Alicante</i>)	
Julia Valls (<i>Universidad de Alicante</i>)	
Mercedes García (<i>Universidad de Sevilla</i>)	
Salvador Llinares (<i>Universidad de Alicante</i>)	21
 TALLER 3: INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS A PARTIR DEL ANÁLISIS DE FENÓMENOS DE VARIACIÓN	
Myriam Codes-Valcarce (<i>Universidad Pontificia de Salamanca</i>)	
Josefa Perdomo-Díaz (<i>Universidad de La Laguna</i>)	28
 TALLER 4: LA COMPRESIÓN DE LA RECTA TANGENTE EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO.	
Francisco Boigues (<i>Universidad Politécnica de Valencia</i>)	
Vicente Estruch (<i>Universidad Politécnica de Valencia</i>)	
Abilio Orts (<i>Universidad Politécnica de Valencia</i>)	39

COMUNICACIONES

ASPECTOS ESTRUCTURALES Y CONCEPCIONES PERSONALES SOBRE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

José Antonio Fernández Plaza (Universidad de Granada); Juan Francisco Ruiz
Hidalgo (Universidad de Granada); Luis Rico

Romero (Universidad de Granada)..... 49

PROYECTO DE INVESTIGACION

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA TECNOLOGÍA EN LA FORMACIÓN Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Matías Camacho Machín (Universidad de la Laguna)
M. Mar Moreno Moreno (Universidad de Lérida)

Carmen Azcárate Jiménez (U.A.B.)60

PRESENTACIÓN

El III Seminario del grupo de investigación de Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM) se celebró en Salamanca los días 9 y 10 de febrero de 2012 en la Universidad Pontificia. Este seminario se realizó manteniendo el mismo estilo de trabajo por talleres tal como ya se había hecho en los encuentros de Madrid y Baeza. El objetivo que perseguimos es crear un espacio de discusión y reflexión sobre diferentes temas de investigación relacionados con la didáctica del análisis matemático. Asimismo, pretendemos que sea un foro para todos los investigadores que forman parte del grupo GIDAM que nos permita compartir proyectos, conocimiento y crecer como grupo.

Los trabajos que aparecen en esta publicación son el resultado de las sesiones de trabajo de febrero de 2012. Todos los autores asumieron el compromiso de revisar sus talleres a partir del proceso de reflexión y discusión durante el desarrollo del seminario.

La publicación se organiza en tres grandes bloques: el de talleres, el de comunicaciones y por último, el de proyectos de investigación. Con este último lo que se pretende es dar a conocer a todos los miembros del GIDAM proyectos de investigación en marcha. En esta ocasión, se presentó el proyecto de investigación que dirige el profesor Matías Camacho de la Universidad de la Laguna (Tenerife) sobre: “La Resolución de Problemas y la Tecnología en la formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas”.

Se realizaron cuatro talleres. El taller 1 titulado: “la enseñanza de la función exponencial en pre-cálculo: una estrategia para el análisis de la práctica” trabajo conjunto de las universidades de Salamanca y Alicante. El taller 2: “cómo los futuros profesores interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. Derivada de una función en un punto”, trabajo realizado por miembros de la universidad de Valladolid. El taller 3 titulado: “introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación” trabajo conjunto de la Universidad de Salamanca y la Laguna. Finalmente, el cuarto trabajo, “la comprensión de la recta tangente en un entorno tecnológico”, procedente de la Universidad Politécnica de Valencia.

Hay un espacio de comunicaciones en el que se presenta un trabajo muy inicial procedente de la Universidad de Granada.

Esperamos que los trabajos que se recogen en esta publicación sobre temas de investigación en el ámbito de la Didáctica del Análisis Matemático sirvan para llegar a conclusiones que faciliten el crecimiento de esta disciplina y ayuden a resolver problemas docentes en la educación matemática.

M. Mar Moreno
Coordinadora del GIDAM

TALLER 1:
**LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN
PRECÁLCULO: UNA ESTRATEGIA PARA EL ANÁLISIS DE LA
PRÁCTICA**

Jeannette Vargas Hernández (*Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca,
Colombia*)

María Teresa González Astudillo (*Universidad de Salamanca*)

Salvador Llinares Ciscar (*Universidad de Alicante*)

LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN PRECÁLCULO: UNA ESTRATEGIA PARA EL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA

Jeannette Vargas Hernández (*Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Colombia*)

María Teresa González Astudillo (*Universidad de Salamanca*)

Salvador Llinares Ciscar (*Universidad de Alicante*)

RESUMEN

A partir de la noción de modelación de la descomposición genética de un concepto se ha realizado una investigación sobre la práctica del docente universitario de precálculo cuando enseña las funciones exponenciales. En el taller se pretende reflexionar sobre la coherencia del marco teórico, la metodología y el análisis llevados a término. Para ello, después de una exposición inicial, los asistentes discutieron acerca de una clasificación previamente realizada de algunos episodios de clase que se han asociado a ciertos mecanismos de construcción que el profesor pretende potenciar en su práctica profesional. Finalmente se hace una puesta en común de lo discutido en diferentes grupos y se plantean algunas sugerencias y comentarios sobre la investigación realizada.

ABSTRACT

From the notion of modeling the genetic decomposition of a concept a research has been made about the pre-calculus university teacher practice when teaches exponential functions. This workshop aims to consider the consistency of the framework, the methodology and the analysis that has been made. For this, after an initial explanation, the participants discussed about a classification previously made over few class episodes associated with certain mechanism of construction the teacher tries to promote in his practice. Finally a discussion about the work in each group and some suggestions and comments about the research was posed.

INTRODUCCIÓN

El taller se ha centrado en una investigación que se está realizando en torno a la enseñanza de la función exponencial en el nivel universitario. En ella se trata de responder a las preguntas: ¿Cómo modelan los profesores de precálculo, en su práctica docente, los mecanismos de construcción del concepto de función exponencial? y ¿Cuáles son las características que subyacen a las prácticas analizadas?

Para ello, a partir de una descomposición genética del concepto función exponencial realizada, usando el marco teórico APOS (Dubinsky, 1991), se describe y analiza la práctica de los docentes integrando el constructo de modelación de descomposición genética (Gavilán, 2005/2010). De esta forma se logra identificar cómo usa y justifica el docente los modos de representación simbólica y gráfica así como las relaciones que establece entre los elementos matemáticos (Sánchez-Matamoros, 2004), del concepto función exponencial.

Los dos profesores (Ernesto y Arturo, pseudónimos) que participaron en esta investigación pertenecen a dos universidades colombianas, una de carácter privado y la otra de carácter público, ambas ubicadas en la ciudad de Bogotá. Se les propuso, colaborar en ella para poder

analizar la enseñanza de las funciones exponenciales en la asignatura de Precálculo y ambos aceptaron participar en el estudio. No se realizó ningún tipo de selección, más bien, la proximidad con el investigador, las circunstancias laborales de cada uno y sus intereses personales favorecieron una disponibilidad de tiempo y de acceso a sus aulas, así como la colaboración para compartir sus ideas concernientes a su labor diaria de enseñanza de las matemáticas.

Para la recogida de datos se realizó una entrevista inicial sobre la formación de los profesores, sus concepciones acerca de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y su planificación de las sesiones correspondientes a la enseñanza de la función exponencial. Se realizó grabación de voz y video de todas las clases en las cuales el profesor aborda la enseñanza de la función exponencial y se llevan a cabo entrevistas semiestructuradas estructuradas posteriores a cada sesión clase, para contrastar la percepción del investigador en cuanto a los momentos en que el profesor propicia cada mecanismo de construcción.

Se procedió a un análisis descriptivo de datos y dos niveles de análisis inferencial y progresivo que permitieron establecer dos modelaciones de la descomposición genética de la función exponencial de cada uno de los docentes.

CONTEXTO, PARTICIPANTES Y MÉTODOS

La descomposición genética del concepto de función exponencial (Vargas et al, 2011) se ha construido partiendo de los presupuestos del marco teórico APOS (Dubinsky, 1991), de un estudio histórico del concepto de función exponencial (Vargas et al, 2010), así como de los informes de investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática.

Esa descomposición se emplea en el estudio de casos de dos docentes universitarios que imparten una asignatura de precálculo en Colombia. Los instrumentos utilizados para la recogida de datos de cada sesión de aula fueron: una entrevista inicial, una audio-video grabación de las sesiones correspondientes a la enseñanza de la función exponencial y una entrevista final para cada sesión de contraste entre el investigador y el docente. Los videos, junto con las grabaciones de voz tanto de las clases como de las entrevistas, fueron transcritos en su totalidad e incorporados a la unidad hermenéutica del software Atlas TI.

Con el constructo modelación de la descomposición genética se ha realizado un análisis de la práctica para inferir lo que subyace a la práctica de estos dos profesores universitarios de precálculo.

En la primera fase del análisis se identificaron aquellos segmentos de cada sesión de aula en los que se modela un determinado mecanismo de construcción. Posteriormente, en la segunda fase del análisis, se rehízo la clase de cada docente reagrupando los segmentos en torno a un mecanismo que el profesor esté propiciando. Los resultados de esta descripción se presentan a través de “viñetas” consideradas como un informe de la práctica del profesor (Gavilán, et al. 2007) incluyendo la inferencia realizada por los investigadores sobre la modelación de dicho mecanismo. La síntesis realizada en función de los mecanismos de construcción permitió

establecer la modelación de la descomposición genética de cada profesor. Un tercer nivel de análisis que nos permitió establecer la perspectiva de la práctica de los docentes.

En el análisis de la práctica de los docentes han intervenido dos nociones la modelación de la descomposición genética y la perspectiva de la práctica del docente.

La modelación de un mecanismo de construcción que “es una forma de dar significado, desde la perspectiva de los investigadores, a las acciones del profesor, a sus decisiones sobre qué problemas utilizar, a cómo gestiona el contenido matemático en el aula y a las justificaciones que proporciona” (Gavilán et al., 2007, p. 160) y la “modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática” (Gavilán et al., 2007, p. 9) que nos permite hablar de las características de la práctica del profesor que favorecen los procesos de construcción potencial del conocimiento en los estudiantes junto con la justificación de dichas características.

La perspectiva de la práctica del docente se refiere a las inferencias que hace el investigador sobre lo que subyace a la enseñanza del profesor. Una propuesta para inferir la perspectiva de la práctica de profesor es caracterizarla a través de dos dimensiones: la concepción del profesor sobre el aprendizaje de las matemáticas y su concepción sobre las matemáticas escolares (Simon, et al. 2000).

Todo esto se realiza bajo la consideración de que ser profesor de matemáticas «debería ser entendido desde la perspectiva de participar en una práctica social: enseñar matemáticas. La práctica profesional del profesor se ve como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor. En este sentido la práctica del profesor no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula, sino que se conceptualiza desde una perspectiva más amplia, comunidad de práctica profesional en la que se incluyen tareas como tutorías, reuniones de seminario-departamento, asistencia a actividades de formación, etc.» (Llinares, 2000, p.110).

OBJETIVOS Y DESARROLLO DEL TALLER

Los objetivos del taller fueron:

- Presentar una síntesis de la investigación realizada alrededor del constructo modelación de la descomposición genética utilizado para el análisis de la práctica de dos profesores universitarios de precálculo.
- Recibir retroalimentación sobre las clasificaciones de los segmentos de clase ya realizadas en donde se identifican los mecanismos de construcción que el profesor potencia, logrando de esta manera la integración de los participantes en el proceso de análisis de los datos.

Los participantes en el evento se dividieron en dos grupos a cada uno de los cuales se asignó uno de los docentes analizados. Se seleccionaron, previamente, dos episodios de clases que han sido transcritas y seccionadas en segmentos por los investigadores. Se revisaron dichos segmentos, clasificados de acuerdo con los mecanismos de construcción establecidos desde la teoría APOS y concretados en la descomposición genética de la función exponencial. Se

procede con las indicaciones que a continuación se detallan. Junto con dicho documento se les entregó una síntesis de la investigación realizada que fue explicada durante el taller. A dicha explicación siguió un debate sobre cuestiones que no habían quedado suficientemente claras o que necesitaban una explicación con mayor nivel de profundización.

Los asistentes debían

1. Identificar los segmentos y confirmar o no la clasificación previamente elaborada.
2. Con esta identificación de mecanismos de construcción establecer algunas inferencias sobre las creencias y concepciones del profesor acerca de la enseñanza-aprendizaje de la función exponencial.

Un ejemplo de un episodio de una de las clases, con la cual se realizó el taller, es el siguiente que corresponde a la primera clase de uno de los casos. En él, el profesor trata que los estudiantes construyan la función exponencial $y=2^x$ utilizando para ello una actividad consistente en ir doblando a la mitad sucesivamente una hoja de papel.

- P. Pensemos en lo siguiente, cojamos una hoja y la vamos a doblar y me van a decir cuántas veces alcanzan a doblarla por la mitad, la mitad, la mitad, la mitad, hasta que físicamente la puedan doblar. Una hoja por cada grupo y me dicen cuántas veces la pueden doblar.
- E. Depende del tamaño.
- P. Claro, va a depender del tamaño, pero uno puede decir....- *dirigiéndose al grupo*- ¿cuántos dobleces llevan?
- E. ya no pueden continuar -
- P. -*tomando el papel del ejercicio*- cuantos dobleces llevan
- E. Siete
- P. Fíjense que se volvió prácticamente imposible de continuar, y vean el grosor en el que ya va. Aproximadamente cuánto lleva de grosor, cuánto le calculan a eso.
- E. Cinco
- P. Por ahí un centímetro, yo creo que menos. Si uno lo pudiera hacer doblando muy bien, la idea es que uno podría ver que tan grueso le quedaría. De qué otra manera lo puede hacer, cuántas veces le está añadiendo al grueso? Mejor dicho, ¿cuántas veces lo hiciste?
- E. Siete veces
- P. Ella lo hizo 7 veces, es decir que eso equivale a colocar ¿cuántas hojas una encima de la otra. Hagan de cuenta que yo quisiera ver cuántas hojas colocaría una encima de la otra. ¿Cuántas hojas quedarían una encima de otra.
- E. Muchas.
- P. Muchas, ¿cuántas?
- E. Setenta
- P. No. Volvamos otra vez. -*toma la hoja*-. Primer doblez. ¿El primer doblez, equivale a colocar cuántas hojas una encima de otra?
- E. Dos
- P. Segundo doblez -*lo va haciendo con la hoja*- ¿cuántas hojas?
- E. Cuatro.
- P. Tercer doblez
- E. Ocho
- P. Cuarto doblez

- E. Diez y seis
P. Diez y seis, quinto doblez.
E. Treinta y dos
P. Sexto doblez
E. Sesenta y cuatro.
P. Y el otro, quedarían ¿cuántas?
E. Ciento veintiocho y ocho
P. O sea, esta que ya no puedo doblar, sería 128. Hagamos una tablita donde se muestre eso *-en el tablero dibuja y va hablando-* a ver doblez número, equivale a que grosor dos el segundo cuatro, ¿el tercero cuánto fue?
E. Ocho
P. Cuarto diez y seis, quinto treinta y dos *-escribe puntos sucesivos y dice - yo voy a pegar aquí un brinco, un salto.*

<i>Doblez (número)</i>	<i>Grosor</i>
1 →	2
2 →	4
3 →	8
4 →	16
5 →	32
⋮	⋮

- P. Un salto. Por ejemplo al doblez número 10. ¿Quién me dice como conseguir el resultado sin necesidad de ir de uno en uno?
E. Mil veinticuatro
P. Da 1.024, pero de que otra manera, supongamos que yo le digo a Juan Camilo que no es diez sino el número 25, si usted va a ser dos por dos por dos por dos. ¿Quién me dice como consigo el resultado?
E. Diez a la
P. Esto que está acá viene siendo las potencias de dos, esto es dos a la cero, esto es dos a la uno, doblez tres dos a la tres, doblez cuatro dos a la cuatro, y así. *-el profesor completa la tabla en el tablero-*

<i>Doblez (número)</i>	<i>Grosor (en hojas)</i>
1 →	2 = 2 ¹
2 →	4 = 2 ²
3 →	8 = 2 ³
4 →	16 = 2 ⁴
5 →	32 = 2 ⁵
⋮	⋮
10 →	

- P. De manera que en el doblez 10 ¿sería dos a la...?
E. Diez
P. Busquemos en la calculadora a ver cuanto es dos a la diez.
E. Mil veinticuatro

P. 1.024 -escribe en la tabla-

<i>Doblez (número)</i>	<i>Grosor (en hojas)</i>
1 →	2 = 2^1
2 →	4 = 2^2
3 →	8 = 2^3
4 →	16 = 2^4
5 →	32 = 2^5
⋮	⋮
10 →	$2^{10} = 1.024$

P. ¿Cuánto creen que sea el grueso de una hoja de esas de cuaderno?, ¿Cómo haría yo para saber?, ¿Quién me ayuda a averiguar? Supongamos que yo quiero saber el grueso de esta hoja. ¿Qué se ingeniarían ustedes para decirme como lo medirían? Yo quiero medir el grueso de esto pero por supuesto es muy poco y si cojo una regla me queda muy difícil apreciar el grueso de una sola. Entonces que hago

E. Acumulo hojas

Ernesto, junto con los estudiantes, van obteniendo las sucesivas potencias de dos, resultantes de las dobleces del papel y conduce a los estudiantes a conjeturar sobre el exponente apropiado en cada caso y sobre las dobleces obtenidas en pasos posteriores utilizando la función exponencial, dado que no se pueden obtener físicamente con el papel. Estas reflexiones, suscitadas alrededor del proceso de iteración y uso de los exponentes, corresponden a la modelización del mecanismo de interiorización de una función exponencial con base mayor que uno que había sido identificada en la descomposición genética de la siguiente forma:

- Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno.

La tarea de dobleces del papel (Diagrama 1) propicia preguntas cómo, por ejemplo, ¿quién me dice cómo conseguir el resultado sin necesidad de ir de uno en uno? que conducen a reflexionar sobre las acciones correspondientes a repetir una serie de pasos un cierto número de veces. En este caso se trata de la multiplicación de dos por dos, luego otro dos y así sucesivamente. Esta multiplicación de factores iguales se puede expresar mediante el uso de exponentes naturales para representar dicho fenómeno.

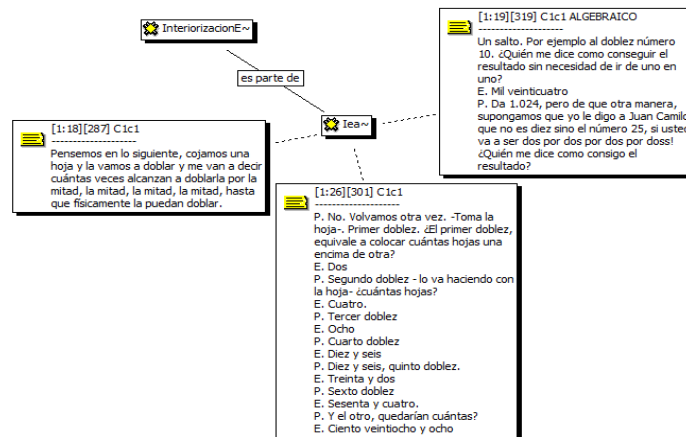


Diagrama 1: Preguntas referidas a iteración de acciones

De manera similar se presentó un episodio de la primera clase del caso dos, en donde el docente presenta la función exponencial como un objeto.

- P: Cualquier número real, entonces x pertenece a los números reales.

$$f(x) = b^x$$

$$b > 0 \quad b \neq 1 \quad x \in R$$
O sea que el exponente es la variable. Fíjense que aquí la variable está en el exponente. ¿La base qué es? Una constante. Una constante mayor que cero. ¿Por qué será que nos dicen que diferente de uno? ¿Qué pasa si fuera uno?
- E: Porque como se multiplica por él mismo, entonces o sea si el exponente sería dos, entonces uno por dos...
- P: No, póngame cuidado a lo que pregunto, le estoy preguntando por qué aparece b diferente de uno. Le pregunto lo contrario, cierto, para poder explicarme le pregunto lo contrario, qué pasaría si b valiera uno. Cómo quedaría la ecuación.
- E: Siempre daría uno.
- P: Uno, no cierto, nos daría una función constante que pues no es tan importante. Nos quedaría f de x igual a uno porque uno elevado a cualquier potencia es uno. Por lo tanto esa no es muy interesante porque es una línea recta y igual a uno paralela al eje x . Bueno, entonces por eso nos ponen estas restricciones. Bien, ¿y por qué será que la base tiene que ser mayor que cero?
- E: Por lo mismo. Porque da uno. Porque cero elevado a cualquier cosa da...
- P: No, ya es otra cosa, ya es otro análisis. La base por qué nos pide que sea mayor que cero.
- E: Porque para que sea una función tiene que ir, o sea tiene que tomar algún valor, o sea que ascienda o descienda.
- P: Entonces debemos preguntarnos lo contrario no cierto. ¿Qué pasa si fuera negativo? Fíjense qué es.
- E: Nos daría un número complejo.
- P: Le daría un número complejo en qué casos ¿Siempre?
- E: Siempre que el exponente fuera impar. Porque si fuera par y no es negativa sería entero.
- P: Bueno, que fuera un número entero par o impar y eso nos daría negativo, nos daría un número complejo, o fraccionario - refiriéndose al exponente - más bien.

E: Fraccionario.

P: Fraccionario pero fraccionario con denominador par, no cierto, porque no existen las raíces de números negativos con índice par, nos daría un número complejo, saldríamos del campo de trabajo que son los números reales. Bien, entonces por eso nos ponen esas restricciones aquí, para que siempre tenga valor. Bien, ¿cuál es del dominio de esta función?

E: Los números reales.

P: Los números reales. ¿Y cómo sabe uno?

E: Porque todos los valores que puede tomar...

P: ¿Quién?

E: Que puede tomar x .

P: x . Y aquí nos está diciendo que x es cualquier número real, no cierto. Por lo tanto el dominio, este exponente es cualquier número real, puede ser positivo, puede ser negativo, puede ser cero, puede ser fraccionario, puede ser decimal, cualquier número real. Bien, ¿y el rango qué sería?

E: Los números reales positivos.

P: ¿Los números reales positivos? ¿Por qué reales positivos? ¿Cómo sabe uno?

E: Vendrían siendo los valores de y .

P: Los valores que puede tomar aquí la f de x que es nuestra y , ¿no cierto? ¿Cómo sabe uno que son los reales positivos? ¿Esto puede dar en algún momento negativo? -señala la fórmula de la función en el tablero -

E: No.

P: ¿Por qué no? Porque si la base es positiva, no cierto, nos dijeron que era mayor que cero, si esto es positivo, no importa el exponente que tengamos. El exponente puede ser negativo, o puede ser positivo, o cero, cualquier número. Y una potencia elevada a un exponente negativo, ¿qué es? ¿Es un número positivo o negativo?

E: Positivo.

P: Positivo, recuerdan que simplemente nos queda uno sobre la misma potencia con exponente positivo, entonces simplemente es un número pequeño pero no es un número negativo.

E: ¿Entonces el rango vendría siendo determinado por la base en una función exponencial?

P: Pues aquí nos va a servir para poderlo determinar. Fíjense que si la base es positiva, no importa el exponente. Siempre nos va a dar positivo. Porque la única forma de que dé negativo esa potencia es que la base fuera negativa y teniendo un exponente determinado impar. Base negativa, exponente impar. Bueno, bien, entonces fíjense que de ahí sale el rango. Bien, ¿qué otra característica presenta esta función? ¿Qué otras características presenta? Mirémoslas todas y luego vamos a mirar cómo se grafica y qué aplicaciones tiene. ¿Qué otras características presenta?

E: Pues que va a ser creciente, ¿no?

P: ¿Siempre es creciente?

E: No necesariamente. Una función exponencial también puede ser decreciente.

P: Ah, bueno. Entonces no todas, es decir, ¿qué se requiere para que sea creciente?

E: Que la base sea positiva.

E: Si b es mayor que uno, la función es creciente.

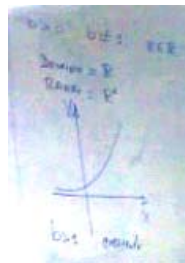
P: Entonces miremos. Vamos a hacer un esquemita aquí. Tenemos x y y aquí. Bien, entonces cómo sería la forma, ¿es una curva, no cierto?

E: Sí.

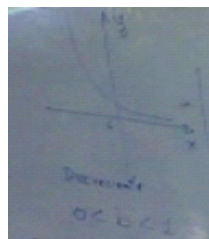
P: ¿Así será creciente?
E: Sí señor.



P: ¿Cómo sabe uno que es creciente o no es creciente?
E: Cuando los valores de x y de y van incrementando.



P: Cuando a medida que aumenta x , la y también aumenta o a medida que x disminuya, la y también disminuye, esa es una función creciente. Entonces la condición para que nos dé en esta forma es que la, ¿qué condición es?
E: Que b sea mayor que uno.
P: b mayor que uno. Entonces es creciente. Bien. ¿Y para que sea decreciente?
E: Si cero es menor que b y menor que uno y b es menor que uno la función es decreciente.



P: Entonces viene así, no cierto. Entonces es decreciente. Decreciente. ¿En este caso, la b es qué? ¿Mayor que cero y menor que uno?
E: Sí. Cero es menor que b y a es menor que uno.
P: Así, no cierto. Cero menor que b y b menor que uno. O sea que la b está entre cero y uno, no cierto. Entre cero y uno.
E: ¿Se denomina creciente la función que ambas variables suban o disminuyen su valor?
P: Sí, están en proporción. Cuando una aumenta, la otra también aumenta. Es creciente cuando eso. Y decreciente cuando, aquí pasa lo contrario, cuando una aumenta, la otra disminuye, no cierto, su valor. Cuando aumenta x , la y disminuye. Entonces es decreciente. Entonces esas son las dos formas básicas, esas dos que tenemos ahí son las formas básicas de la función

- exponencial que estamos analizando: creciente o decreciente. Bien, ¿alguna otra característica? ¿Cuál es su intersección siempre con el eje y ? ¿Cuánto vale?
- E: Cero punto uno.
- P: Cero uno, no cierto. Cero uno. ¿Por qué será que siempre cero uno? Para esta forma básica que tenemos aquí. Porque si la base es un número, qué número es en la base, un número mayor que cero, no cierto, y elevado a una potencia que es un número real. Si fuera, si el x vale cero, qué pasa, me queda un número elevado a potencia cero y todo número elevado a potencia cero, ¿cuánto vale?
- E: Uno.
- P: Uno, no cierto. Vale uno, excepto cero, porque cero a la cero no está definido, pero cualquier otro número elevado a potencia cero nos da uno. Bueno, entonces esa es otra característica, que este punto de intersección es cero uno. ¿Qué otra característica importante tiene? ¿Cuál es la intersección con el eje x ?
- E: No existe.
- P: No tiene, no cierto. No tiene intersección con el eje x . ¿Qué es lo que pasa con el eje x en la gráfica?
- E: Se acerca mucho. Se puede tener pero siempre va a quedar en infinito y nunca va a tocar el eje x .
- P: Bueno, entonces ahí se va acercando pero nunca va a tocar el eje x . Entonces el eje x sirve como de límite de la función hacia abajo. Esto se llama una asíntota horizontal. La recta y igual a cero, que es el eje x , es una asíntota, nos sirve como de límite de la función hacia abajo. Bueno.
- E: No tiene ceros, es decir que no tiene corte en el eje x -leyendo en sus apuntes-.
- P: Sí. Las intersecciones con el eje x serían: las raíces o las soluciones de la ecuación, igualando la ecuación a cero. Bueno, la gráfica. ¿Cómo es la gráfica? Ya tenemos una forma ahí pero vamos a hacer una gráfica. ¿Qué se requiere para hacer la gráfica de una función exponencial? ¿Qué es lo primero que se le ocurre a uno hacer?

Como se puede ver, en este caso, la práctica de Arturo se caracteriza por el uso casi exclusivo del discurso expositivo. Se presenta el concepto función exponencial como un objeto sin que se modele el mecanismo de encapsulación de la función exponencial.

Al tener cada grupo, del taller, las transcripciones de dos prácticas diferentes generaron matices, sobre los análisis de las construcciones que se están propiciando de un mismo concepto.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se abordan inicialmente las observaciones de cada uno de los grupos acerca de cada uno de los dos estudios de caso. Esta discusión se centró sobre las clasificaciones efectuadas de los segmentos, asociándolos a ciertos mecanismos de construcción aportados desde la teoría APOS. Los participantes estuvieron de acuerdo en la clasificación previamente realizada.

Se centra la discusión en el uso de la descomposición genética del concepto función exponencial como una noción de la teoría cognitiva y la necesidad de establecer diferencias entre el uso de esta y la noción de modelación de la descomposición genética.

Los investigadores concluimos la importancia de establecer, en la memoria de la tesis, explícitamente tres aspectos:

1. El profesor no “construye las formas de conocer de los conceptos”, sino que pone los medios —crea el contexto— para que sus estudiantes construyan los significados y desarrollen los mecanismos de construcción pretendidos. Éste es el motivo por el que intentamos describir la manera en la que el profesor “modela mecanismos de construcción de conocimiento” (Gavilán *et al.*, 2007, p. 10).
2. Nuestra investigación no tiene como objetivo identificar unas determinadas prácticas que aseguren que los estudiantes aprenderán de una determinada manera, sino comprender por qué un profesor se comporta de la manera en que lo hace y qué influye en las decisiones que toma, analizando para ello las prácticas de los docentes universitarios de precálculo y, al mismo tiempo,
3. La idea de que con esta investigación se pretendió examinar la capacidad explicativa de la noción *modelación de la descomposición genética*, al ser extendida a otros conceptos distintos del concepto de derivada con el que fue inicialmente puesta a prueba (Gavilán, 2005/2010) y en contextos distintos de los que fueron su origen.

REFERENCIAS

- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-123.
- Gavilán, J.M. (2005/2010) *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Publicada en 2010 por Edición Digital @tres, S.L.L.
- Gavilán, J.M., García, M; Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25 (2), pp. 157–170
- Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. Ponte y L. Sarrazina (eds.) *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Italia, Actas da Escola de Verao-1999*, Lisboa, Sección de Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación/Sociedad de Educación y Matemática, 109-132.
- Sánchez-Matamoros, G. M. (2004). Análisis de la Comprensión en los Alumnos de Bachillerato y Primer año de Universidad sobre la Noción de Derivada (desarrollo del concepto). Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. España.
- Simon, et al. (2000). Characterizing a Perspective Underlying the Practice of Mathematics Teachers in Transition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 pp. 579-601
- Vargas, J. González, M.T., Llinares, S., (2010). *Historia de la Función exponencial en un Proceso de elaboración de descomposición genética*. En la Tercera Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática ENHEM. Universidad del Valle. Colombia.
- Vargas, J., González, M.T., Llinares, S. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Disponible el 23 de marzo de 2011: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1292.pdf>

TALLER 2:
**CÓMO LOS FUTUROS PROFESORES INTERPRETAN EL
PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE
BACHILLERATO**

Derivada de una función en un punto

Gloria Sánchez-Matamoros (Universidad de Sevilla)

Ceneida Fernández (Universidad de Alicante)

Julia Valls (Universidad de Alicante)

Mercedes García (Universidad de Sevilla)

Salvador Llinares (Universidad de Alicante)

CÓMO LOS FUTUROS PROFESORES INTERPRETAN EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Derivada de una función en un punto

Gloria Sánchez-Matamoros (*Universidad de Sevilla*)

Ceneida Fernández (*Universidad de Alicante*)

Julia Valls (*Universidad de Alicante*)

Mercedes García (*Universidad de Sevilla*)

Salvador Llinares (*Universidad de Alicante*)

RESUMEN

Las investigaciones de la práctica del profesor de matemáticas subrayan la importancia de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes y la relevancia de su caracterización en diferentes dominios matemáticos. En este ámbito, se han generado cuestiones relativas a la relación entre diferentes dominios de conocimiento que intervienen en esa competencia docente y cómo se desarrolla. Uno de los objetivos de esta investigación es identificar y caracterizar el papel que desempeña el conocimiento del profesor del aprendizaje de tópicos matemáticos en la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes. El tópico matemático en este estudio es la derivada de una función en un punto.

1. *Presentamos los fundamentos y las características del instrumento que estamos desarrollando y,*
2. *Actividad: Análisis de las producciones de estudiantes para profesor para generar descriptores del desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido”.*

INTRODUCCION, CONTEXTO, PARTICIPANTES Y MÉTODOS

En los últimos años las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han subrayado la importancia de la competencia docente “mirar con sentido” (Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002). La competencia docente “mirar con sentido” permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Aunque en los últimos años esta competencia ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas, la idea común es cómo los profesores procesan e interpretan situaciones complejas en el contexto del aula. Un ámbito particular de desarrollo de esta competencia es el pensamiento matemático de los estudiantes. Jacobs et al. (2010) conceptualizan esta competencia como tres destrezas interrelacionadas:

- **Identificar** las estrategias usadas por los estudiantes.
- **interpretar** la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes.
- **decidir** cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

El énfasis reciente en caracterizar y comprender mejor el desarrollo de esta competencia docente (Fernández, Valls y Llinares, 2011) está vinculado a la necesidad de que los profesores

de matemáticas adopten sus decisiones de acción considerando la manera en la que los estudiantes aprenden las matemáticas.

Un ámbito de interés particular para estudiar el desarrollo de esta competencia en los estudiantes para profesor de educación secundaria es el Cálculo, y dentro de este ámbito el concepto de derivada. Este concepto se introduce en el currículo español en Matemáticas de 1º de Bachillerato Tecnológico, a través de un significado intuitivo como es la medida de la velocidad de cambio de una función que se apoya en la idea de razón (tasa de variación).

Sin embargo, las investigaciones han mostrado la dificultad que tienen los estudiantes de bachillerato en la construcción del concepto de derivada en un punto (Sánchez–Matamoras, García y Llinares, 2008; García, Llinares y Sánchez–Matamoras, 2011). Esta situación constituye un contexto idóneo para intentar aportar información sobre cómo los estudiantes para profesor identifican el pensamiento matemático de los estudiantes y cómo lo dotan de sentido para tomar decisiones de acción como aspectos característicos de la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes. En nuestra investigación pretendemos en primer lugar generar descriptores del desarrollo de esta competencia considerando la idea de derivada desde la perspectiva del conocimiento que se moviliza en la realización de las actividades cognitivas de identificar, interpretar y tomar decisiones de acción. En segundo lugar, nuestro propósito es diseñar módulos formativos que favorezcan el desarrollo de esta competencia y determinar aspectos que favorezcan o limiten este desarrollo, lo que nos permitirá refinar los descriptores que describan el desarrollo de esta competencia.

OBJETIVOS TALLER Y DESARROLLO

Este taller de investigación lo vamos a dividir en dos partes.

PARTE 1. Descripción y fundamentación del instrumento usado para estudiar y caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito de la derivada de la función en un punto.

- Objetivo: conocer las características del instrumento diseñado y sus fundamentos.

PARTE 2. Actividad práctica

- Objetivo: identificar pautas y características del proceso a través del cual transformar las evidencias (los datos) en resultados de investigación (nuevo conocimiento).
- Material: respuestas de estudiantes para profesor de secundaria a un cuestionario.
- Cuestión a debatir: ¿qué información podemos obtener de este tipo de evidencias para caracterizar la competencia docente “mirar con sentido”?
- Metodología:

- trabajo en pequeños grupos sobre (a) el cuestionario y (b) sobre las respuestas dadas por los estudiantes para profesor de secundaria.
- puesta en común e intercambio.
- síntesis de ideas y prospectiva futura en relación al análisis.

Parte 1: descripción y fundamentación del instrumento

A este taller asistieron 15 investigadores que se agruparon en 3 grupos para realizar las tareas propuestas.

En primer lugar se realizó una presentación del taller a los asistentes, describiendo los Objetivos, el proyecto de investigación en el que está inmerso la realización de este trabajo, las actividades sus características de lo que se iba a realizar en el taller, y la metodología que se iba a seguir.

Se realizó una breve presentación donde se describió y fundamentó el instrumento usado por los investigadores (el cuestionario) para estudiar y caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito de la derivada de la función en un punto.

El cuestionario constaba de:

- tres problemas sobre la derivada de una función en un punto en distintos modos de representación, y las respuestas dadas a cada uno de estos problemas por tres estudiantes de bachillerato, además se completaba con parte de una entrevista con el estudiante sobre su resolución (figura 1), (Sánchez–Matamoros, García y Llinares, 2006).
- tres preguntas y las respuestas de los estudiantes para profesor.
 - o En la primera pregunta el estudiante para profesor debía describir cómo cada estudiante de bachillerato había resuelto los tres problemas, indicando los elementos usados y si el procedimiento era adecuado.
 - o En la segunda pregunta, debían identificar la comprensión de cada estudiante en función de las respuestas dadas a la primera pregunta.
 - o En la tercera pregunta se les pidió que indicasen qué haría (decisiones de acción) si fueran profesores de estos estudiantes de bachillerato.

Problema 3

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x=2$.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x=1$?

Estudiante 2

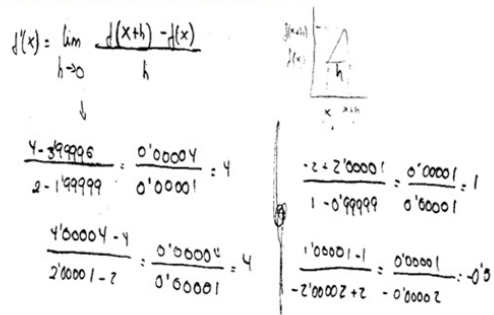
Respuesta al problema	Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea)  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ Para $x=2$: $\frac{4 - 3.99999}{0.00001} = 4$ $\frac{4.00004 - 4}{0.00001} = 4$ Para $x=1$: $\frac{-2.00002 - (-2)}{0.00001} = -2$ $\frac{-2.0002 - (-2.00001)}{0.0001} = -2$	RAZONA LA RESPUESTA El valor de la derivada de f en $x=2$ es 4 E2: aplicando la definición de derivada, encontré que en $x=2$ la aproximación es 4 I: ¿y en $x=1$? E2: me dio 1 por un lado y por el otro -0,5 I: y entonces, ¿es derivable? E2: en $x=2$ coinciden. En $x=1$ no coinciden, entonces no será derivable

Figura 1. Ejemplo de problema y respuesta + entrevista que formaba parte del cuestionario

Parte 2: aportaciones del taller

Después de la presentación de la primera parte los asistentes se distribuyeron en tres grupos. A cada uno de los grupos se les proporcionó la respuesta dada por un estudiante para profesor al cuestionario y estuvieron analizándolo durante 75 minutos.

La actividad consistía en que cada grupo analizara las respuestas dadas por el estudiante para profesor que se la había asignado, considerando:

- qué elementos matemáticos había identificado el estudiante para profesor en las respuestas dadas por los estudiantes de bachillerato en la resolución de los tres problemas propuestos en el cuestionario.
- qué había identificado el estudiante para profesor sobre la comprensión de los estudiantes de bachillerato de la función derivada en un punto.
- qué decisiones de acción había tomado el estudiante para profesor en función de la comprensión que parecía tener cada uno de los estudiantes de bachillerato.

Posteriormente, se realizó una puesta en común y se discutieron las diferentes alternativas aparecidas.

A continuación, describimos las aportaciones de los diferentes grupos.

Grupo 1

Los miembros del grupo 1 indicaron que:

- *El estudiante para profesor identifica bien los elementos matemáticos utilizados por cada uno de los tres estudiantes de bachillerato en la resolución realizada por estos a los tres problemas propuestos.*
- *El estudiante para profesor es capaz de **determinar la comprensión** sobre la derivada de una función en un punto que manifiestan dos de los tres estudiantes. No es capaz de ver la comprensión que tiene el estudiante de bachillerato 3.*
- *Sobre las acciones: El estudiante para profesor **propone acciones** adecuadas para los estudiantes de bachillerato de los que han determinado adecuadamente su comprensión. Para el estudiante que no ha identificado su comprensión, propone acciones más limitadas.*

Observación:

Este futuro profesor cuando el alumno de bachiller lo hace bien, lo interpreta bien. Cuando hay deficiencias en la resolución realizada por el alumno de bachiller le cuesta más interpretar lo que hace (aunque identifica los elementos siempre)

Grupo 2

Los componentes del grupo 2 indicaron que:

- *El estudiante para profesor no identifica bien los elementos utilizados por los tres estudiantes de bachillerato incluso valorando positivamente elementos que había utilizado mal el estudiante.*
- *El estudiante para profesor no llega a decir nada de la **comprensión** de los tres estudiantes de bachillerato. Al no hacer un análisis profundo, no reflexiona, no interpreta y se limita a “releer” la entrevista.*
- *Con respecto a las acciones: Todas las acciones que propone el estudiante para profesor para los tres estudiantes va en la línea de “repaso” del tema y hacer ejercicios.*

Grupo 3

Las aportaciones de los miembros de este grupo se limitaron a breves observaciones sobre el cuestionario, centrándose en las respuestas que había dado el estudiante para profesor a las respuestas dadas por un solo estudiante de bachillerato, indicando que *el estudiante para profesor solo describe los elementos pero que no llega a decir nada de la comprensión del estudiante. Únicamente “describe”.*

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Después del trabajo en grupo se desarrolló una discusión en gran grupo durante 30 minutos en la que se comentaron las diferentes propuestas realizadas desde cada grupo. La discusión generada permitió que se realizaran otras observaciones:

- **sobre el procedimiento de implementación** del cuestionario para los estudiantes para profesor, se propuso que los estudiantes para profesor deberían reflexionar sobre los problemas que se les plantearon a los alumnos de Bachillerato.
- **sobre el análisis** de las respuestas al cuestionario, se indicó que para decidir si un estudiante para profesor había identificado los elementos matemáticos era necesario hacer un análisis global de todas sus respuestas a la totalidad del cuestionario.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 y PSI2008-02289 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España. Y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante. España.

REFERENCIAS

- Fernández C., Valls J. y Llinares S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV*, Ciudad Real: SEIEM. pp. 351-360.
- García M., Llinares S., Sánchez-Matamoros G., (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9 (5), pp. 1023-1045.
- Jacobs V.R., Lamb L.C. y Philipp R. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), pp. 169-202.
- Mason J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Sánchez-Matamoros G., García M. y Llinares S. (2006). El desarrollo del esquema de la derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24 (1), pp. 85-98.
- Sánchez-Matamoros G., García M. y Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), pp. 267-296.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (Ed) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers’ eyes*. New York: Routledge.

TALLER 3:

**INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS A PARTIR DEL ANÁLISIS DE FENÓMENOS DE
VARIACIÓN**

Myriam Codes-Valcarce (*Universidad Pontificia de Salamanca*)

Josefa Perdomo-Díaz (*Universidad de La Laguna*)

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS A PARTIR DEL ANÁLISIS DE FENÓMENOS DE VARIACIÓN

Myriam Codes-Valcarce (Universidad Pontificia de Salamanca)

Josefa Perdomo-Díaz (Universidad de La Laguna)

RESUMEN

En este taller se presenta un conjunto de actividades diseñadas para introducir el concepto de ecuación diferencial ordinaria en un primer curso del Grado en Ingeniería Informática respondiendo a las directrices marcadas por la Educación Matemática Realista (RME). Para ello se emplean un contexto hipotético-real y un contexto matemático. Presentamos un mapa conceptual en el que describimos algunas de las relaciones que se pueden establecer entre los elementos matemáticos involucrados en las ecuaciones diferenciales ordinarias. El objetivo del taller es discutir si, con las actividades propuestas y con la dinámica de trabajo planteada, se movilizan los vínculos que hemos considerado a priori.

ABSTRACT

In this workshop we present a set of activities designed to introduce the concept of ordinary differential equation in a first degree course in computer engineering, considering the guidelines of Realistic Mathematics Education (RME). To do so, both hypothetical-real and mathematical context are used. We present a conceptual map in which some of the relationships between the mathematical elements involved in the construction of the concept of ordinary differential equations are described. The aim of the workshop is to discuss if proposed activities and the way the lessons are planned, make the links considered to be established.

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de la Didáctica de la Matemática, como disciplina científica, consiste en desarrollar programas de investigación en los que se analice cómo adaptar la enseñanza de las matemáticas a los nuevos contextos educativos que surgen a medida que la sociedad evoluciona. El nivel universitario se encuentra sometido en estos momentos a un proceso de reforma general, con influencia directa en el contexto en que se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje, en particular, de las matemáticas. Las perspectivas de los estudiantes, las expectativas del mundo laboral y los medios disponibles han cambiado, mientras que en muchas aulas se sigue observando el mismo modelo de enseñanza.

En nuestra investigación pretendemos abordar el problema que supone la adaptación de la enseñanza de las matemáticas a ese nuevo contexto, tomando como eje conductor la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Para ello, estamos trabajando en el planteamiento de un modelo de enseñanza para la introducción de este concepto en un primer curso del Grado en Ingeniería Informática, que involucra el diseño de un conjunto de actividades que guíen el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto y el planteamiento de una dinámica de aula que promueva el desarrollo del aprendizaje en un ambiente de análisis, reflexión y justificación de argumentos.

Como punto de referencia para el diseño del modelo de enseñanza hemos construido un mapa conceptual que muestra los elementos matemáticos principales que consideramos que toman parte en la construcción del concepto de EDO y las relaciones que se deben establecer entre ellos. Dicho mapa ha sido confeccionado basándonos en nuestra propia comprensión del concepto, las experiencias que hemos vivido cuando aprendimos el concepto y cuando lo hemos enseñado, y algunos resultados de investigaciones previas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las EDO (p. e. Donovan, 2004; Guerrero, Camacho y Mejía, 2010; Perdomo-Díaz, 2010; Rasmussen, 2001; Zandieh y McDonald, 1999).

CONTEXTO, PARTICIPANTES Y MÉTODOS

El diseño del modelo de enseñanza que proponemos responde a las directrices marcadas por la Educación Matemática Realista (RME), teoría que surge en los años 70, de la mano de Freudenthal, y que presenta dos características principales: el uso de contextos realistas en la enseñanza de las matemáticas, con el objeto de destacar la conexión de esta disciplina con la realidad, y el uso didáctico de modelos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; <http://www.fi.uu.nl/en/rme/>). En este enfoque se diseñan secuencias de enseñanza que supongan un desafío para los estudiantes, promoviendo que organicen los conocimientos claves en un nivel para poder producir nuevos conocimientos en un nivel superior (Rasmussen, Kwon, Allen, Marrongelle y Burtch, 2006). Los problemas preceden a la matemática abstracta: los estudiantes aprenden matemáticas examinando situaciones presentadas en un contexto experimentalmente real para ellos y recurren a su conocimiento matemático para resolverlas. De esta forma, las matemáticas se presentan como una actividad o un proceso al que el estudiante debe enfrentarse, con la asistencia del profesor sólo como guía de dicho proceso.

En los últimos años, esta corriente ha trascendido a la matemática superior remarcando su cualidad de actividad humana (Kwon, 2002) en la que la modelización y la resolución de problemas adquieren un papel esencial.

El concepto de ecuación diferencial ordinaria

Algunas ideas que surgen cuando nos planteamos cuál es la esencia de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden son que es una ecuación en la que:

- la incógnita es una función,
- los términos son una función, su derivada y la variable de la que depende dicha función,
- no siempre se conoce un algoritmo para obtener la expresión simbólica de la solución.
- Es un modelo matemático de un fenómeno cuya evolución en el tiempo se puede predecir a partir de la propia ecuación o de su solución.

En esta breve lista destaca la poca relevancia de los algoritmos de resolución de ecuaciones diferenciales para la comprensión del concepto, frente al papel que desempeñan los conceptos de ecuación, función y derivada.

Partiendo de la idea de que un individuo construye su conocimiento estableciendo relaciones entre lo que ya sabe, ampliándolas, reforzándolas y adaptándolas a las nuevas situaciones, consideramos que la construcción del concepto de EDO requiere del establecimiento de vínculos dentro y entre los siguientes conceptos matemáticos: ecuación, función y derivada. Por ello, creemos necesaria la intervención del profesor a través de su instrucción, para promover que los estudiantes establezcan vínculos entre estos conceptos y así den sentido a la noción de ecuación diferencial ordinaria.

Esta idea está sustentada por la noción de esquema de la teoría APOS que consiste en “la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas de un individuo que están ligadas, consciente o inconscientemente, en un marco coherente en la mente del individuo” y se pueden utilizar para encontrar una solución a un problema matemático (Trigueros, 2005, p. 15). Así, para que se produzca la comprensión de un concepto, el individuo ha de establecer vínculos entre los elementos matemáticos que conforman dicho concepto. En el caso particular de la construcción del concepto de EDO, ésta depende de otros elementos matemáticos (principalmente ecuación, función y función derivada) y de las relaciones que se establezcan entre ellos.

Con respecto al concepto de ecuación, éste está ligado a un proceso de resolución pero también se ha de entender una ecuación como una igualdad que define una relación entre ciertas constantes y una o varias variables (en el caso de las EDO, la función adquiere el papel de incógnita).

En cuanto a la solución de la ecuación, en caso de que exista, es el valor de la variable para el cual se verifica la igualdad. La solución no tiene por qué ser única. Raychadhuri (2008) identifica dos procesos que permiten comprobar si las expresiones obtenidas al resolver una ecuación son efectivamente soluciones de la ecuación: proceso de definición (comprobar que se satisface la ecuación) y proceso de generación (resolver la ecuación y comparar la expresión obtenida con la dada).

Estos dos significados asociados al concepto de ecuación y los diferentes procesos que permiten comprobar si una función o una familia de funciones son soluciones de una EDO se deben hacer explícitos en el proceso de enseñanza puesto que no es una relación que los estudiantes establezcan de forma autónoma (Perdomo-Díaz, 2010). Diversos autores han mostrado que la tendencia de los estudiantes es reducir el estudio de las EDO a la búsqueda de un algoritmo que las resuelva (p. e. Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009; Habre, 2000; Rasmussen y Whitehead, 2003), lo que limita sus posibilidades ante la resolución de problemas.

El hecho de que las soluciones de una ecuación diferencial sean funciones, supone un cambio a nivel conceptual con respecto a las soluciones de las ecuaciones algebraicas (Rasmussen, 2001; Zandieh y McDonald, 1999). Destacamos los siguientes aspectos del concepto de función, que influyen en la construcción del concepto de EDO y su solución:

- Una función define una relación de dependencia de una variable respecto de otra/s.
- Las funciones pueden ser analizadas a partir de su representación algebraica y su expresión gráfica. Es fundamental establecer relaciones entre las diferentes representaciones del concepto para robustecer la comprensión del mismo (Artigue, 1992).

- Las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y polinómicas aparecen en numerosas ocasiones al modelizar fenómenos físicos utilizando ecuaciones diferenciales, por lo que es importante que los estudiantes conozcan sus propiedades generales.
- El caso particular de las funciones constantes y su relación con las soluciones de equilibrio es un aspecto con el que los estudiantes muestran dificultades (Habre, 2000; Rasmussen, 2001; Zandieh y McDonald, 1999), aspecto que hay que considerar en el diseño de la secuencia didáctica.

En relación con el concepto de derivada de una función, Sánchez-Matamoros (2010) sostiene que “*la noción de derivada es un concepto vinculado a dos modos de representación: analítico y gráfico*” (p. 252). El modo de representación analítico concierne a elementos matemáticos como tasa de variación instantánea, límite o función derivada, mientras que el modo gráfico concierne a elementos como pendiente de la recta tangente, crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad. Al respecto, Thurston (1994) señala que cada individuo tiene una forma particular de entender los conceptos y las ideas matemáticas y que, en el caso particular del concepto de derivada de una función, hay distintos significados que se le pueden asignar como, por ejemplo, *infinitesimal* (la relación entre el cambio infinitesimal en el valor de una función y el cambio infinitesimal en la función), *simbólico* (la derivada de x^n es nx^{n-1} , la derivada de $\sin x$ es $\cos x$, etc.), *geométrico* (la derivada es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, si la gráfica tiene tangente) o *aproximación* (la derivada de una función es la mejor aproximación lineal a la función, cerca de un punto), entre otros.

Para comprender el papel de la derivada en una EDO es necesario considerar los siguientes aspectos:

- la derivada es una función, aspecto esencial para tematizar el esquema de derivada (Sánchez-Matamoros, 2010);
- la derivada modela la variación de un fenómeno respecto de una variable independiente (normalmente el tiempo t).

Por ser la derivada una función, se le aplican todas las consideraciones mencionadas en relación con dicho concepto (en cuanto a relaciones, representaciones, estudio, etc.). Por otro lado, si el concepto de función está íntimamente ligado al concepto de solución de una EDO, el concepto de derivada lo está al de campo de direcciones asociado a una EDO, que a su vez está relacionado con el concepto de solución. En este sentido, consideramos que para interpretar el campo de direcciones es necesario:

- relacionar la derivada de una función en un punto con la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto;
- cierto dominio de la representación de una función en el plano cartesiano, y
- establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.

Estas relaciones y vínculos entre los conceptos de EDO, ecuación, función y función derivada, se han tratado de explicitar en la secuencia didáctica propuesta, la cuál comienza con un *cuestionario de conocimientos previos* y continúa con dos actividades planteadas desde la

perspectiva de la Educación Matemática Realista. A continuación describimos estos instrumentos en líneas generales, puesto que la discusión del taller se centró en ellos.

Cuestionario de conocimientos previos

Previamente a la introducción del concepto de EDO, es importante obtener información acerca de los conocimientos que los estudiantes tienen de los conceptos de ecuación, función y derivada, puesto que ellos constituirán los cimientos sobre los que se construya el nuevo conocimiento. Para ello, hemos diseñado un cuestionario con preguntas relacionadas con estos conceptos (Anexo 1).

Los estudiantes responderán a este cuestionario durante una sesión de clase, previa al inicio del estudio de las ecuaciones diferenciales. Se les irán planteando las preguntas en pequeños bloques correspondientes a cada uno de los conceptos (ecuación, función y función derivada).

Ley de enfriamiento de Newton

Tomamos este tópico como eje alrededor del cual desarrollaremos una actividad formada por un conjunto de problemas y cuestiones que los estudiantes irán respondiendo durante cuatro sesiones de clase. Con esta actividad se introducirán los conceptos de EDO, orden, solución y campo de direcciones asociado a una ecuación diferencial. El objetivo principal es introducir estos conceptos partiendo de una situación que consideramos que resulta real para el estudiante, desde el punto de vista empírico. Las cuestiones y los problemas planteados en esta actividad están pensadas para promover que los estudiantes establezcan relaciones entre diferentes fenómenos físicos y distintos modelos matemáticos (Anexo 2). Nos apoyamos en el uso del software de cálculo simbólico Maple, con el objeto de liberar al alumno de la manipulación simbólica para que centre su atención en los vínculos entre los conceptos matemáticos y los fenómenos considerados.

Contexto matemático

La secuencia didáctica finaliza con una actividad planteada en un contexto matemático real para el estudiante, en el sentido de que parte con cuestiones relacionadas con conceptos matemáticos conocidos por ellos. Esas experiencias cercanas son utilizadas para introducir la clasificación de las EDO de primer orden y los métodos de resolución de algunos tipos de ecuaciones (variables separables, homogéneas y lineales). Se parte de situaciones particulares que se van generalizando a medida que los alumnos avanzan en el desarrollo de la actividad (Anexo 3).

Dinámica de trabajo en el aula

El principal objetivo de la dinámica de aula que planteamos es fomentar que el estudiante adquiera autonomía en el proceso de aprendizaje y sea consciente de su responsabilidad en dicho proceso. Al mismo tiempo, se le integra en un ambiente de reflexión, discusión y argumentación con sus compañeros y con la profesora. Para conseguirlo, se propone la siguiente dinámica de trabajo en el aula.

- Se plantearán actividades tanto para realizar de forma individual como en pequeños grupos (máximo 3 personas), con lápiz y papel y con el software de cálculo simbólico Maple.
- Los estudiantes tendrán un tiempo para realizar la actividad propuesta, que dependerá de cada actividad. La profesora irá observando el trabajo de los alumnos y seleccionando aquellos que considere más interesantes para la discusión con todo el grupo.
- Al finalizar el tiempo establecido para la actividad, los alumnos explicarán al resto de los compañeros y a la profesora cómo la ha resuelto. El resto de los estudiantes intervienen para proponer, preguntar, etc. La profesora también intervendrá si lo considera necesario.
- Cuando se hayan presentado todas las respuestas, el grupo, en conjunto, puede establecer una serie de reflexiones finales sobre la actividad. Según el caso, este es el momento para formalizar aquellos conceptos o contenidos que lo requieran.
- Semanalmente, los alumnos escribirán una reflexión sobre lo aprendido durante la semana, las dificultades con las que se ha encontrado y cómo las ha superado.
- Al finalizar el tema, los alumnos entregarán su carpeta de trabajo.

OBJETIVOS DEL TALLER Y DESARROLLO

El objetivo general de este taller era analizar y discutir algunas de las actividades diseñadas. Para ello se consideraron tres etapas, en cada una de las cuales se trabajaron unos objetivos específicos, con una dinámica concreta.

Etapas 1 (entre 20 y 30 minutos)

- Objetivo: presentar y contextualizar la investigación que se está desarrollando.
- Dinámica de trabajo: se explicaron los aspectos generales de la investigación con el objeto de contextualizar las actividades a realizar en el taller.

Etapas 2 (entre 30 y 45 minutos)

- Objetivo: analizar y discutir las preguntas que forman el *Cuestionario de conocimientos previos* (Anexo 1), diseñado para obtener información sobre los conocimientos que los estudiantes tienen de los conceptos de ecuación, función y derivada, y sentar así las bases para el desarrollo del módulo de enseñanza para la introducción de las EDO.
- Dinámica de trabajo: se entregó una copia del cuestionario a los asistentes al taller con el fin de que relacionaran las preguntas que se formulaban en el mismo y los objetivos con los que fueron planteadas.

Etapas 3 (entre 45 y 60 minutos)

- Objetivo: analizar y discutir parte de las actividades diseñadas en torno a la *Ley de enfriamiento de Newton* y al *Contexto matemático*. Se trata de reflexionar acerca de

la forma en que dichas actividades promueven que se establezcan las relaciones descritas en el mapa conceptual del concepto de EDO.

- Dinámica de trabajo: se simuló una sesión de clase con la dinámica de aula planteada en el modelo de enseñanza. Los asistentes al taller se agruparon para realizar las actividades. A la mitad de los asistentes se les entregó la actividad *Ley de enfriamiento de Newton*, mientras que la otra mitad analizó la actividad *Contexto matemático*.

DISCUSIÓN

En relación con el *Cuestionario de conocimientos previos*, los asistentes al taller comentaron los siguientes aspectos:

- El tiempo estimado para que los alumnos respondan al cuestionario (una clase de cincuenta minutos) es muy poco, teniendo en cuenta la cantidad de preguntas que deben responder y la dinámica que se llevará en el aula.
- Se recomienda concretar algunas de las preguntas, principalmente aquellas del tipo: *¿Qué es para ti...?* y *¿Qué tipo de problemas crees que pueden resolverse utilizando...?* Como alternativa se propone la inclusión (i) de un grupo de problemas entre los cuáles haya algunos que puedan resolverse con los conceptos de ecuación, función o derivada y otros que no (ii) de ejemplos y contraejemplos de expresiones simbólicas y gráficas que se correspondan con una ecuación, función o derivada.
- Se sugiere que se incluyan algunas cuestiones que permitan establecer relaciones entre los conceptos de ecuación, función y derivada. Por ejemplo, relacionadas con la ecuación de una recta o con funciones expresadas de forma implícita.
- Se propone sustituir la palabra *Comprueba* del ejercicio 1.4 por *Averigua* o *¿Es _ solución de _?*
- Se hace mención a la necesidad de considerar el concepto de *integral* en este cuestionario de conocimientos previos, puesto que dicho concepto está íntimamente ligado al proceso de resolución de las ecuaciones diferenciales.

Respecto a la actividad *Ley de enfriamiento de Newton*, los asistentes al taller solicitaron aclarar el empleo del valor **0.01** para la constante de proporcionalidad y sugirieron emplear la palabra *esboza* para las representaciones gráficas de funciones sin el uso del software de cálculo simbólico.

En relación a la actividad *Contexto matemático*, los asistentes al taller comentaron los siguientes aspectos:

- Se cuestiona el uso de distintos símbolos para denotar a la variable independiente (**x**, **t**) y a las funciones (**y**, **f(x)**, **u(t)**). Para evitar que la notación se convierta en un obstáculo, se propone introducir los distintos símbolos gradualmente.

- Se sugiere concretar más la pregunta del primer ejercicio utilizando otra expresión como *di características de la función*, o *¿qué propiedades puedes deducir de la función a partir de su derivada?*
- Aunque los ejercicios 2 y 3 se consideran adecuados, se advierte de la posibilidad de que las constantes de los apartados b), c) y d) del ejercicio 3 puedan provocar un conflicto.
- Se advierte sobre la carga algebraica de la actividad y se plantea la posibilidad de que, final, al alumno le quede la idea de que el tratamiento de las ecuaciones diferenciales sea sólo algebraico.

Al final de la sesión, se cuestiona la necesidad de que estudiantes de Grado en Informática estudien las ecuaciones diferenciales.

CONCLUSIONES

Las aportaciones realizadas por los participantes del Taller nos han servido para reflexionar sobre algunos aspectos fundamentales, relacionados con el diseño de cuestionarios y actividades de trabajo en el aula, contribuyendo así a la mejora de la investigación que estamos iniciando.

Una parte importante de las intervenciones iban destinadas a corregir expresiones o palabras clave en los enunciados de las preguntas. Estas aportaciones, que matizan la importancia del uso del lenguaje, han contribuido a mejorar este aspecto de las actividades.

En otros casos, las intervenciones han hecho referencia a temas abiertos que nos planteamos en nuestras discusiones, como la pertinencia del tópico de ecuaciones diferenciales en el temario de un primer curso de grado en Informática, el papel del álgebra en el aprendizaje de tópicos de Análisis matemático, o los elementos matemáticos que pueden causar conflictos en el aprendizaje.

Estas sugerencias se han tenido en cuenta para el diseño de las actividades que finalmente se utilizaron en el aula.

Recalcamos la importancia de que se celebre este tipo de eventos y de que se participe en los mismos, puesto que permiten discutir aspectos fundamentales para la investigación (marco teórico, metodología, instrumentos...). Por otra parte, agradecemos la buena disposición de los asistentes a la hora de trabajar con las tareas propuestas y el interés que mostraron, enriqueciendo el desarrollo del seminario.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. En Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.). *The concept of function. Cognitive difficulties and teaching practices. Aspects of epistemology and pedagogy*, 109-132, MAA Notes 25, USA.
- Camacho, M., Perdomo, J., Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. En Figueras, O. y Sepúlveda, A. (Eds.). *PNA* 3(3), 123-133.
- Donovan, J. E. II. (2004). A first-order differential equations schema. En D. E. McDougall y J. A. Ross (Eds.) *Proceedings of the 26th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 111-118. Toronto, Canadá.
- Guerrero, C., Camacho, M., Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 341-352.
- Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (4), 455-472.
- Kwon, O. N. (2002). Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level*, Hersonissos, Crete, Greece. Disponible en <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invKwo.pdf>
- Perdomo-Díaz, J. (2010). *Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de Resolución de Problemas*. (Tesis Doctoral). Universidad de La Laguna, España.
- Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.
- Rasmussen, C., Kwon, O., Allen, K., Marrongelle, K., Burtch, M. (2006). Capitalizing on Advances in Mathematics and K-12 Mathematics Education in Undergraduate Mathematics: An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 85-93.
- Rasmussen, C., Whitehead, K. (2003). Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. En A. Selden y J. Selden, Eds., *MAA Online Research Sampler*. (http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html)
- Raychadhuri, D. (2008). Dynamics of a definition: a framework to analyse student construction of the concept of solution to a differential equation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(2), 161-177.

Realistic Mathematics Education. (<http://www.fi.uu.nl/en/rme/>). Consultada el 27 de abril de 2010.

Sánchez-Matamoros, G. (2010). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de Universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto)*. Sevilla: Edición Digital @tres.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54 (1), 9-35.

Zandieh, M., McDonald, M. (1999). Student Understanding of Equilibrium Solution in Differential Equations. En Hitt, F. y Santos, M. (Eds.). *Proceedings of the Twenty-one Annual Meetin. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Columbus, OH:ERIC.

TALLER 4:
**LA COMPRENSIÓN DE LA RECTA TANGENTE EN UN
ENTORNO TECNOLÓGICO.**

Francisco Boigues (*Universidad Politécnica de Valencia*)
Vicente Estruch (*Universidad Politécnica de Valencia*)
Abilio Orts (*Universidad Politécnica de Valencia*)

LA COMPRENSIÓN DE LA RECTA TANGENTE EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Francisco Boigues (*Universidad Politécnica de Valencia*)

Vicente Estruch (*Universidad Politécnica de Valencia*)

Abilio Orts (*Universidad Politécnica de Valencia*)

RESUMEN

Presentamos una propuesta para la comprensión de la recta tangente en un entorno de aprendizaje en el que se puede usar un CAS. Desde una perspectiva histórica y cognitiva (APOS), analizamos un modelo de comprensión de la recta tangente como el límite de una sucesión de rectas secantes que tienen en común el punto de tangencia. La propuesta ha sido contrastada en un grupo de estudiantes de bachillerato, siguiendo el ciclo de APOS. Finalmente, mostramos unas herramientas diseñadas con el asistente matemático MATLAB® (génesis instrumental), que ayudan a los estudiantes, especialmente en el registro gráfico, a construir los objetos cognitivos descritos en la descomposición genética de la noción de recta tangente.

INTRODUCCIÓN

La recta tangente constituye uno de los tópicos más importantes en la enseñanza de las matemáticas tanto en el bachillerato como en la universidad. La noción de recta tangente es una noción nuclear del cálculo cuya comprensión es básica para comprender otras tantas nociones matemáticas. Una construcción completa de la recta tangente puede ayudar a entender nociones como la relación entre monotonía y derivada o la concavidad y convexidad de una curva. Además, la recta tangente, considerada como la mejor aproximación local a una función, es una herramienta útil para modelizar muchos fenómenos que se pueden dar en la naturaleza. Por lo tanto, hay más que sobradas razones para facilitar al estudiante una comprensión de la tangente que vaya más allá de la mera manipulación algorítmica.

Génesis histórica

Sin duda alguna, un estudio histórico de los métodos y procedimientos que se han utilizado para abordar la noción de recta tangente puede ayudar a plantear propuestas de comprensión útiles, dado que nos permite conocer las dificultades epistemológicas que pueden afrontar los estudiantes. Los primeros vestigios de lo que hoy conocemos como recta tangente se remontan a la época griega. Apolonio, autor de la obra *Cónicas*, propone un concepto de recta tangente estático, presentándola como la recta que toca a una cónica en un único punto P , de forma que no es posible trazar otra recta pasando por P e incluida entre ambas (recta tangente y cónica), es decir, se trata de la línea recta de contacto más cercano. En cambio, Arquímedes calcula la tangente a una espiral identificando la dirección de la tangente con la dirección instantánea del movimiento. Estas dos tradiciones, la estática y la dinámica, se mantendrán a lo largo de la historia.

Descartes propuso sustituir la definición de recta tangente como recta de contacto más cercano, que era válida para las secciones cónicas estudiadas por los griegos pero resultaba problemática para el creciente número de curvas que iban apareciendo, por una declaración equivalente a la afirmación de que la tangente es la posición límite de la secante. Fermat, y posteriormente McLaurin y Lagrange, adoptaron esta definición. Descartes reduce el problema de la determinación de la tangente a una curva a la construcción de una tangente a un círculo (Boyer, 1986). Por su parte, Fermat utiliza su método para obtener máximos y mínimos al cálculo de la recta tangente (Kline, 1992). Sin embargo, el procedimiento de Fermat solo se podía aplicar a curvas de la forma $y=x^n$.

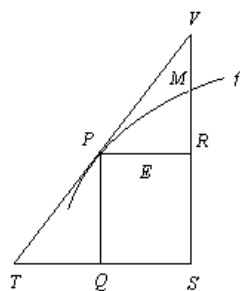


Figura 1. Triángulo de Fermat

Posteriormente, Barrow cuyo método sería seguido por Newton y Leibniz, considera una curva como el límite de un polígono cuyos lados son infinitamente pequeños, y afirma que el lado del polígono infinitamente pequeño se convierte, en el límite, en la tangente a la curva. Este procedimiento, que generaliza el de Fermat, es prácticamente idéntico al que se utiliza en nuestro cálculo diferencial salvo en la notación empleada.

Las teorías de Newton y Leibniz, considerados los fundadores del cálculo moderno, difieren claramente en su concepción. Para Newton una curva es generada por el movimiento de un punto y su fluxión es la variación en el fluir de dicha curva. Para Leibniz una curva es entendida como una poligonal de lados infinitesimales y la diferencial es el cociente de los catetos en el triángulo característico asociado en cada segmento de la curva. Así, en la teoría de Newton, la idea de límite (cantidades evanescentes que se van desvaneciendo) juega un papel fundamental mientras que en la de Leibniz los elementos fundamentales son las cantidades infinitesimales que no se pueden eliminar usando el concepto de límite. De hecho Leibniz trata la idea de curva a partir de cantidades infinitesimales y, en base a esto, estudia el orden y la magnitud de dichas cantidades (Durán, 1996).

A principios del siglo XIX, con la aparición del concepto de límite, se formalizan otros conceptos que hasta ese momento se utilizaban con poco rigor (incrementos evanescentes, cantidades infinitamente pequeñas, etc.). A ello contribuyeron las aportaciones, entre otros, de Cauchy y sobre todo de Weierstrass. Así, el cálculo infinitesimal se convertía en análisis matemático.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

El marco teórico adoptado en este trabajo es la teoría APOS, que nos ofrece un modelo sencillo de análisis de la comprensión en el pensamiento matemático avanzado. Además, manejaremos algunas de las aportaciones teóricas de la génesis instrumental. La teoría APOS es un intento de aplicar la abstracción reflexiva de Piaget a la comprensión de tópicos avanzados en matemáticas (Dubinsky, 1991). Así, se concibe la comprensión como un proceso de creación, por parte del individuo, de elementos cognitivos que son caracterizados como acciones, procesos y objetos. Los diferentes elementos cognitivos relacionados con una determinada noción son organizados, de manera estructurada, formando los esquemas. Otra de las componentes teóricas que ofrece APOS es la descomposición genética de una noción, que es una descripción detallada de las construcciones mentales que se espera que un individuo realice al formar su esquema de una noción matemática concreta.

Junto a la teoría APOS, adoptamos uno de los marcos teóricos de referencia en los estudios que consideran el uso de la tecnología, la génesis instrumental, que conjuga aspectos cognitivos con antropológicos (Artigue, 2007). Uno de los puntos básicos de esa teoría es la diferencia entre artefacto e instrumento. Artefacto se identifica con la herramienta propiamente dicha y hablamos de instrumento cuando, con el artefacto, se establece una relación significativa entre el usuario y la tarea a realizar. El proceso por el que un artefacto se convierte en instrumento, llamado génesis instrumental (Drijvers et al., 2010), consiste en la formación en el estudiante de esquemas instrumentales, entendidos como formas estables de tratar determinadas tareas. Estos esquemas instrumentales pueden ser esquemas de uso, que son aquellas formas generales directamente relacionadas con el artefacto mientras que los esquemas de acción instrumental están relacionados directamente con la actividad a realizar con el artefacto.

Aunque son muchos los estudios que han abordado la comprensión de la recta tangente, a continuación resaltaremos aquellos que están más vinculados con nuestro enfoque. Uno de los primeros trabajos a resaltar es el de Orton (1983) que señala las dificultades que encuentran los estudiantes no tanto en el cálculo de la derivada sino en su comprensión conceptual. Por su parte, Azcárate (1990) aporta la idea de esquema conceptual como elemento para analizar una determinada noción matemática. En Font (1999) se resalta el papel que tienen las diversas representaciones en la comprensión de la derivada, siendo la pendiente de la recta tangente una de esas representaciones. En Baker, Cooley y Trigueros (2000), la comprensión se concibe como la capacidad de coordinar las distintas representaciones, siendo una de ellas la noción de recta tangente. Finalmente en lo que respecta a la caracterización de las etapas de desarrollo en la construcción de la derivada, se resalta la tangente como uno de los elementos a tener en cuenta (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2010).

Es común en los trabajos analizados, el destacar a la recta tangente como un elemento a tener en cuenta en la comprensión de la derivada. No obstante, pensamos que sería importante completar dicha visión con otra con mayor autonomía respecto a la derivada, en la que se conciba a la recta tangente como la mejor aproximación lineal a una función, a nivel local, y describir los esquemas que los estudiantes desarrollan cuando manejan un entorno tecnológico.

Descomposición genética de la recta tangente

Para la descomposición genética que detallamos a continuación, hemos tenido en cuenta diferentes fuentes (Boigues, 2010). Por un lado, se tiene el significado institucional. Así, a través de la génesis histórica y de un análisis de libros de texto (Contreras et al., 2003) concebimos la recta tangente como la mejor aproximación lineal a una función en el entorno de un punto (en concordancia con la idea de Barrow y Leibniz), cuyo cálculo se obtendrá hallando el límite de una sucesión de rectas secantes. En segundo lugar, en lo que respecta a otras propuestas de descomposición genética sobre la recta tangente, la mayoría de ellas se refieren principalmente a la noción de derivada y consideran la recta tangente como una aplicación o consecuencia pero no el objeto principal del estudio. Además, obviamente, hemos tenido en cuenta también la experiencia docente del grupo investigador. Mostramos en tabla I la propuesta de descomposición genética que se ha establecido para la noción de recta tangente.

CONTEXTO, PARTICIPANTES Y MÉTODOS

En este taller se muestran una serie de herramientas diseñadas mediante un sistema de cálculo simbólico, que pueden ayudar a mejorar la comprensión de la noción de recta tangente como la mejor aproximación lineal a una función en un entorno del punto de tangencia. El taller va dirigido a investigadores del campo de la educación matemática y a estudiantes de postgrado. Se combinaron explicaciones magistrales con ejercicios prácticos con el programa MATLAB[®].

En primer lugar, se expone la descomposición genética que hemos establecido para la recta tangente, teniendo en cuenta algunos elementos de la teoría APOS y el análisis de una serie de libros de texto, que son referencias comunes en Bachillerato y estudios de Ingeniería.

A continuación, se describen algunas de las funciones han sido desarrolladas mediante MATLAB[®] que explicamos a los estudiantes para ayudar a la construcción de algunos de los elementos de de la descomposición genética y que pueden mejorar la interacción entre el estudiante y el artefacto, sobre todo dentro del registro gráfico. Finalmente se plantea un ejercicio para que ser ejecutado con las ordenes MATLAB[®].

	ESQUEMA A
A1	Dada una función $f(x)$ y un punto de la gráfica $P(x=a, f(a))$ se realiza la acción de ampliar (zoom) la gráfica de $f(x)$ en el punto P .
A2	La interiorización como proceso de A1.
A3	El encapsulamiento como objeto de A2.
	ESQUEMA B
B0	Dada una función $f(x)$ y un punto de la gráfica $P(x=a, f(a))$ ejecutar la acción de dibujar una recta secante que una el punto P con otro punto $Q(x=a+h, f(a+h))$ relativamente próximos.
B1	Formar una sucesión de rectas secantes manteniendo fijo P y variando el punto Q acercándose a P (h tendiendo a 0).
B2	Interiorizar B1 como proceso.
B3	Encapsular B2 como un objeto.
	ESQUEMA C (NOCIÓN DE RECTA TANGENTE)
A=A3	
B=B3	
ARB	Identificar la tendencia de B como la mejor aproximación a A .
	ESQUEMA D (EXPRESIÓN ANALÍTICA DE LA RECTA TANGENTE)
D1	Cálculo de la recta secante: $y - f(a) = m_s(x - a)$, $m_s = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
D2	Cálculo de la recta tangente: $y - f(a) = m(x - a)$, $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Tabla 1 (Propuesta de descomposición genética para la noción de recta tangente)

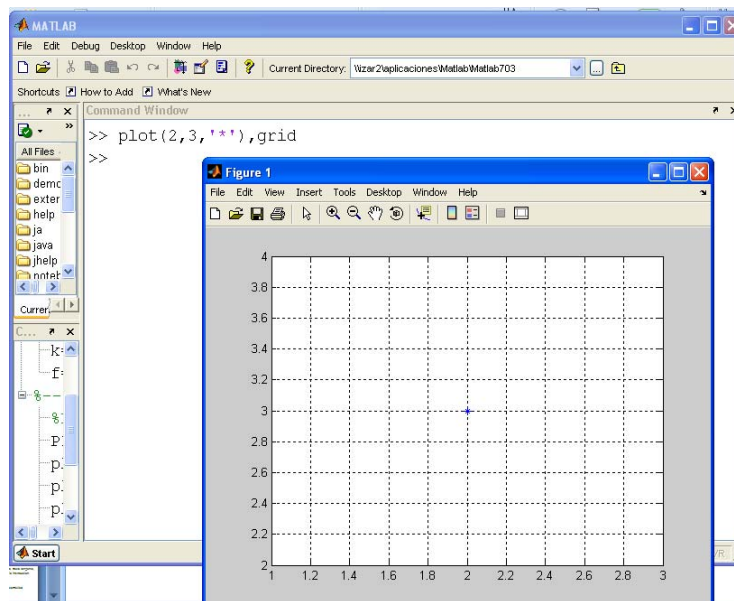
OBJETIVOS TALLER Y DESARROLLO

Con este taller se pretendían dos objetivos:

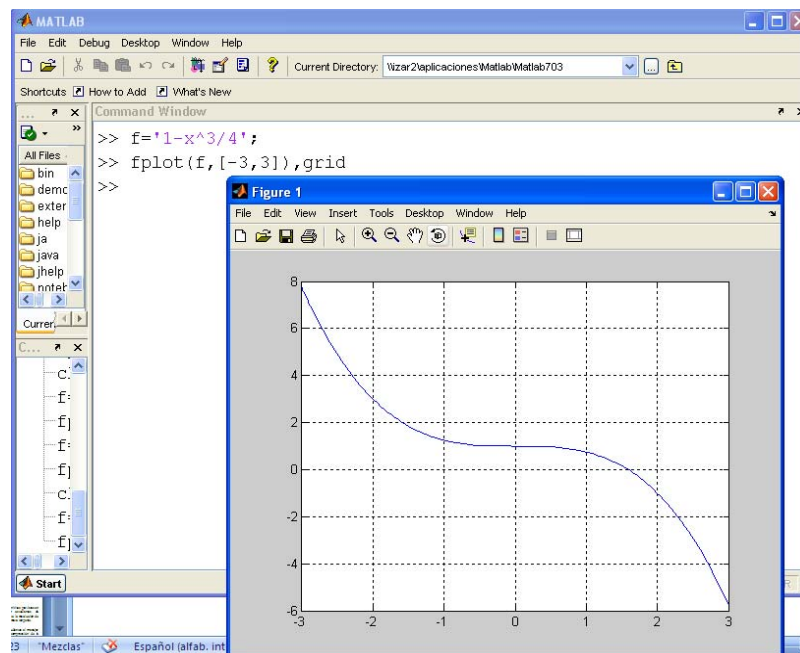
- Analizar si los diversos elementos propuestos en la descomposición genética eran los adecuados en estudiantes de primer curso de ingenierías o de ciencias experimentales.
- Establecer si las herramientas MATLAB[®] propuestas podrían ayudar a construir algunos de los elementos de la descomposición genética.

Para ello, se entrega la descomposición genética para su estudio. Al cabo de unos minutos se abrirán turnos de preguntas y comentarios. A continuación, se explicarán las herramientas MATLAB[®] (Cordero, Hueso, Martínez y Torregrosa, 2005).

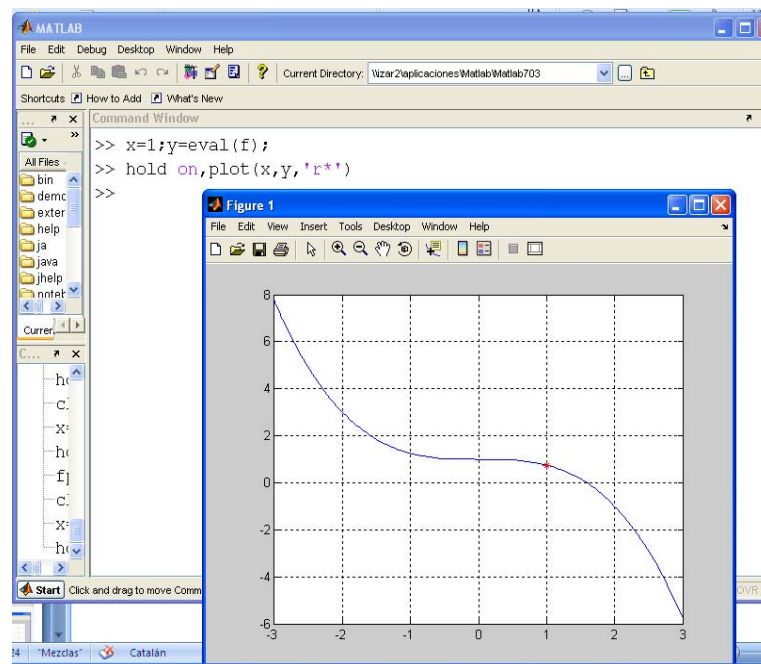
- Representación de puntos con MATLAB[®]



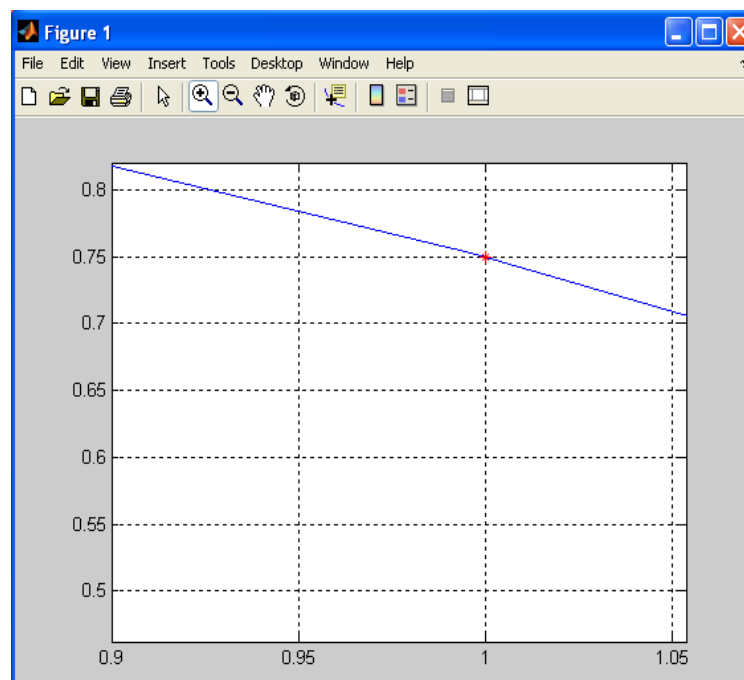
b) Representación de funciones con MATLAB[®]



c) Representación de puntos sobre una función



d) El zoom de MATLAB[®]



Y finalmente se plantea el siguiente ejercicio

Ejercicio de evaluación MATLAB®:

Representa, en una ventana MATLAB®, la función $g(x) = (2x+1) \cdot (x-3) \cdot (1-x)$ y los puntos de la gráfica con $x=-2$, $x=1/3$ y $x=4$.

a) ¿Qué coincidencias presentan la gráfica de la función en entornos de los tres puntos?

b) ¿Y qué podemos resaltar en cuanto a las diferencias?

CONCLUSIONES

Respecto al primer objetivo, se resaltó la inquietud de definir la noción de recta tangente un tanto separada de la noción de derivada. Reforzar la adquisición de los elementos A1 y A2, y de esta manera complementar las imágenes asociadas a las palabras “rozar”, “tocar” ó “atravesar”. Insistir para que interioricen la acción de crear una sucesión de rectas secantes como aproximación de la tangente, y de esta manera lograr un esquema que vaya más allá del elemento D2, es decir, el cálculo de la expresión analítica de la recta tangente.

En relación al segundo objetivo, se abrió un debate, intenso por momentos, sobre la eficacia de que los alumnos aprendan un CAS para que adquieran una comprensión aceptable de una determinada noción matemática. Se destacaron dos ideas al respecto del uso de ciertos CAS: que no es necesario un dominio completo del CAS para determinadas actividades y que pueden constituir un instrumento útil para enriquecer los esquemas de la recta tangente con las correspondientes acciones que ayuden a superar *determinadas imágenes erróneas*.

BIBLIOGRAFIA

- Artigue, M.; Batanero C.; Kent, P. (2007), Mathematics thinking and learning at post secondary level. In Fr. Lester (ed.), *Second Handbook of research on Mathematiccs Teaching and learning*. NCTM-IAP; Charlotte, NC, 1011-1045.
- Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Baker, B.; Cooley, L.; Trigueros, M. (2000). A Calculus graphing Schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.

- Boigues, F. J.; Estruch, V.; Llinares, S. (2010). El papel de sistemas de cálculo formal en la comprensión de las matemáticas: el caso de la integral definida. *Modeling in Science Education and learning*. Vol. 3(1), 3-18.
- Boigues, F. J. (2010). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. En A. Contreras y L. Ordoñez (Eds.), *jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático*. (pp. 42-77). Universidad de Jaén.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*, Alianza. Madrid.
- Contreras y colaboradores (2003). Análisis de manuales de 1º y 2º de bachillerato, en cuanto a los conceptos básicos del Cálculo infinitesimal derivada e integral, bajo la perspectiva de los obstáculos epistemológicos. *Proyecto de investigación del Instituto de Estudios Giennenses*. Jaén.
- Cordero, A., Hueso, J.L., Martínez, E. & Torregrosa, J.R. (2005). *Métodos Numéricos con Matlab*. Valencia: editorial UPV.
- Drijvers, P, et al. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles y J.B. Lagrange (Eds). *Mathematics Education*, pp. 89-132. New York: Springer.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Eds.), *Advanced Mathematical thinking*, pp. 95-123. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Durán, A. (1996). Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo, Alianza. Madrid.
- Font, V. (1999). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.
- Garcia, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematized derivative Schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*(on line). Taiwan.
- Kline, M. (1992). El pensamiento matemático: Desde la Antigüedad a nuestros días (vol. 1), Alianza. Madrid.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

COMUNICACIONES

ASPECTOS ESTRUCTURALES Y CONCEPCIONES PERSONALES SOBRE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

José Antonio Fernández Plaza (*Universidad de Granada*)

Juan Francisco Ruiz Hidalgo (*Universidad de Granada*)

Luis Rico Romero (*Universidad de Granada*)

RESUMEN

El objeto de este trabajo es describir e interpretar las concepciones personales de un grupo de estudiantes de bachillerato acerca del concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados y sintetizados a partir de investigaciones previas. Estos aspectos son: la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, su carácter exacto o aproximado, su consideración como proceso potencialmente infinito o finito en la práctica, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. Los estudiantes respondieron a seis cuestiones para valorar la veracidad o falsedad de enunciados relativos a estos aspectos. Basados en estos aspectos, analizamos y tipificamos respuestas obtenidas en perfiles y destacamos la riqueza de relaciones entre los aspectos estructurales descritos, particularmente la vinculación entre la alcanzabilidad y la rebasabilidad.

ABSTRACT

The purpose of this work is to describe and interpret the personal conceptions related to the concept of finite limit of a function at one point from a group of non-compulsory secondary education students in terms of structural aspects, compiled and synthesized from prior research. These aspects are: the interpretation of the limit notion as an object or a process, its exact or approximate character, its consideration as a potentially infinite or finite in practical process, its reachability and its possibility of being exceeded. Students answered six questions to verify the truthfulness or falsity of statements related to these properties. Based on these structural aspects, we analyze and typify the provided responses in profiles, pointing out the richness of relationships between these structural aspects, highlighting the one between reachability and the possibility of being exceeded.

INTRODUCCIÓN

La presencia de características estructurales que subyacen en las concepciones de los escolares acerca del concepto de límite, en particular para el límite finito de una función en un punto, está documentada en diversos autores. Así es el caso de la dualidad objeto/proceso (Tall, 1980) o del carácter inalcanzable y/o irrebasable del valor del límite para una función en un punto (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Schwingendorf, Thomas, Nichols y Vidakovic, 1996; Monaghan, 1991; Tall y Vinner, 1981).

Indagar sobre las relaciones entre las concepciones expresadas por los escolares y las características citadas, ofrece la oportunidad de revisar, actualizar y discutir las interpretaciones hechas por los autores citados.

Este estudio está enfocado hacia la exploración de significados que organizan el concepto de límite, poniendo de manifiesto que las características estructurales mencionadas no han perdido actualidad, que forman parte de las concepciones de los escolares y de los usos del lenguaje. Detectamos también cómo la revisión de estas características contribuye a explicar e interpretar las concepciones específicas y globales de los alumnos, lo cual es objetivo del trabajo.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Tall (1980) enfatiza la riqueza y diversidad de procesos de paso al límite (limiting processes) clasificados en dos tipos, según tradición del Análisis Matemático (Rey Pastor, 1952, pp. 27-30). En primer lugar, procesos de paso al límite continuos, tales como el límite de una función en un punto y la propia noción de continuidad. En segundo lugar, procesos de paso al límite discretos, como ocurre con los límites de sucesiones y series, las expansiones decimales, o la aproximación de áreas de formas geométricas. Los procesos de paso al límite tienen fundamentación métrica, o bien una topológica más general.

Tall identifica que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y, posteriormente, la definición formal, la imagen conceptual se “contamina” con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Los estudiantes conciben, en su mayoría, la noción de límite como un proceso dinámico y no lo identifican con una cantidad numérica (Tall, 1980).

Las técnicas algorítmicas para el cálculo de límites no suelen provocar dificultades a los escolares (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005). Cornu (1981, 1983) citado por Gray y Tall (1994) pone de manifiesto la naturaleza distinta de estas técnicas respecto a las de los algoritmos aritméticos y algebraicos a las que los escolares están acostumbrados.

Monaghan (1991) estudia la influencia del lenguaje sobre las ideas de los estudiantes con los términos “tender a”, “aproximarse a”, “converger a” y “límite”, en cuanto a su uso referido a diferentes gráficas de funciones y a los ejemplos con los que los escolares explican dichos términos. Nuestro enfoque en este caso es diferente al no pedir a los escolares que definan los términos; estimulamos su uso libre, haciendo las inferencias de significado oportunas a partir de sus producciones, lo cual permite explorar la amplitud y precisión del vocabulario utilizado por los escolares cuando hablan de límite funcional y de los matices que asocian.

Romero (1995) y Blázquez (2000) recogen los avances y limitaciones de los estudiantes frente a los conceptos de número real y límite, respectivamente. La definición que se tome de límite funcional cumple un importante papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje tal como reportan Blázquez, Gatica y Ortega (2009).

Concepciones y Aspectos Estructurales

Consideramos idealmente una *concepción personal* como la descripción que proporciona un sujeto de parte o toda su imagen conceptual, este último término adoptado en el sentido de Tall y Vinner (1981), subyacente a un concepto dado, lo que dichos autores llaman *definición*

conceptual, siendo irrelevante la fidelidad entre esa descripción y la comprensión del sujeto. Las definiciones que dan los estudiantes en contextos informales manifiestan sus concepciones personales. Por otra parte, cuando hablamos de *concepciones locales o específicas* entendemos la interpretación fundada de lo que el sujeto comunica sobre su imagen conceptual mediante estímulos apropiados, independientemente de que el mensaje transmitido por el sujeto pueda ser incompleto o defectuoso. Las *concepciones globales* surgen de compilar y sintetizar varias concepciones específicas de un mismo sujeto. Nuestra interpretación trata sobre aquello que entendemos quiere comunicar el sujeto. La triangulación entre investigadores a la hora de interpretar los enunciados proporciona confianza sobre la validez de las interpretaciones.

Llamamos *aspectos estructurales* a aquellas características, propiedades, nociones, términos, etc., documentados en la literatura. Contribuyen a interpretar las concepciones personales, declaradas por los estudiantes de bachillerato sobre la noción de límite. Describimos a continuación tales aspectos, identificando cada aspecto con un código; subrayamos que ninguno de ellos agota el concepto de límite.

- *Dualidad objeto/proceso (O/P)*. Paralelamente a los modelos cognitivos de Cottrill et al. (1996) y Sfard (1991) que postulan la naturaleza dual de un concepto como proceso y objeto, los escolares pueden distinguir entre el “objeto” límite (un número o punto) y el “proceso” que lo origina. Este aspecto trata de dilucidar dónde el estudiante pone el énfasis cuando enuncia su concepto de límite, si en el objeto, en el proceso dinámico (Tall, 1980), o si considera ambos mediante una visión dual.
- *Naturaleza del “objeto límite”: Carácter Exacto/Aproximado (E/A)*. Sierpinska (1987) detectó concepciones que asumen el carácter definido (corresponde a un valor exacto que es posible calcular) o indefinido (sólo conocemos aproximaciones del límite).
- *Naturaleza del “proceso límite”: Carácter infinito potencial/Finito práctico (IP/FP)*. Este aspecto trata de discriminar entre los escolares que enfatizan el carácter finito del proceso (práctico o formal), los que destacan su carácter infinito potencial, o bien, aquellos que aceptan los dos.
- *Propiedad local de la función: Límite Alcanzable/No alcanzable. (Alcanz.)* Este aspecto fue tratado por Cornu (1991) y Monaghan (1991) quienes lo asocian con un uso coloquial de los términos “límite” y “tender”. Consideramos tres sentidos no excluyentes para interpretar la alcanzabilidad del límite: (a) Si la función puede o no tomar el valor del límite en un entorno reducido del punto (un entorno sin incluir el punto); (b) Considerar la alcanzabilidad “real” del límite como término “final” del proceso infinito actual que desencadena; (c) No alcanzabilidad, debida al carácter infinito potencial del proceso práctico, es decir, a la exclusión (provocada por la función o por el algoritmo) de la imagen del punto donde se lleva a cabo el estudio. Añadimos un cuarto sentido: (d) Continuidad / posibilidad de evaluación de la función en el punto. Conjeturamos que los escolares pueden manifestar estos cuatro sentidos.

- *Propiedad local de la función: Acotación superior o inferior por el valor del límite (Reb.)* Consideramos esta propiedad relacionada con la interpretación coloquial del término “límite” (Cornu, 1991; Monaghan, 1991). Un límite es considerado *no rebasable* si acota los valores de la función en el proceso de aproximación, superior o inferiormente según la monotonía creciente o decreciente, respectivamente, de la función en un entorno del punto.

El objetivo de este trabajo es valorar la pertinencia de estos aspectos estructurales para describir y relacionar las concepciones específicas declaradas por los estudiantes de bachillerato encuestados.

CONTEXTO, PARTICIPANTES Y MÉTODOS

Se trata de un estudio descriptivo, basado en el método de encuesta con reactivos abiertos, cuyo diseño resumimos a continuación.

Sujetos

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes españoles de primer curso de Bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología, todos del mismo grupo académico. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia se utilizó el libro de texto *Matemáticas I* de la editorial SM y los apuntes propios del profesor.

Instrumento y aplicación

Trabajamos con un cuestionario que incluye seis preguntas de respuesta abierta, que se presentan en dos versiones diferentes, A y B. Los ítems son adaptados de Lauten, Graham y Ferrini-Mundy (1994); sus enunciados se encuentran en el Apéndice.

Las preguntas son de respuesta abierta. Requieren asignar, de manera justificada, los valores verdadero (V) o falso (F) a una afirmación sobre una propiedad relativa al concepto de límite de una función en un punto.

La tabla 1 incluye una caracterización de los ítems de verdadero/falso en términos de los aspectos estructurales directamente vinculados y descritos en el apartado anterior.

Ítems	Aspectos estructurales				
	O/P	E/A	IP/FP	Alcanz.	Reb.
1.A	X				
2.A					X
3.A			X	X	
1.B				X	
2.B		X	X		
3.B			X		

Tabla 1: Vinculación teórica entre los reactivos de verdadero/falso del instrumento y los aspectos estructurales teóricos

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010/2011. Del total de sujetos, 18 respondieron al cuestionario A y otros 18 respondieron al cuestionario B; el instrumento se aplicó durante una sesión ordinaria en la clase de matemáticas. Durante el trabajo de campo 18 sujetos respondieron a la versión A y otros 18 sujetos a la versión B. La aplicación se llevó a cabo en una sesión ordinaria de clase de matemáticas.

ANÁLISIS DE DATOS

La instrucción previa recibida por los estudiantes justifica la adecuación de los reactivos utilizados para que los estudiantes puedan contestarlos, siendo aceptable las respuestas en blanco o atípicas.

Para la interpretación fundada de las concepciones personales de los estudiantes buscamos características estructurales que las discriminen, sin destacar errores o aciertos. Utilizamos como categorías de análisis los aspectos estructurales antes presentados.

Recogemos y organizamos las descripciones que hacen los sujetos en respuesta a los reactivos de Verdadero/Falso. Clasificamos según perfiles basados en el o los aspectos estructurales teóricos principales asociados a cada reactivo, las respuestas recogidas en cada pregunta según afinidad de los argumentos propuestos. La existencia de subperfiles permite añadir matices al perfil correspondiente no contemplados a priori –los sujetos proporcionan información adicional a la que se solicita– por eso utilizaremos el término “empírico” para indicar que emergen de las respuestas de los sujetos.

Por razones de espacio, ejemplificaremos el análisis de las respuestas asociadas a un ítem en particular, aunque la discusión de los resultados la realizaremos de manera global.

Análisis de un ítem particular

Ilustraremos el análisis para el ítem 1.A cuyo enunciado es “Un límite describe cómo se mueve una función cuando x se mueve hacia cierto punto”. El término clave *describe cómo* relaciona “teóricamente” este ítem al aspecto estructural *objeto/proceso* (O/P), por lo que diremos que es *principal* respecto a dicho aspecto.

Así los perfiles de respuesta que mostramos en la tabla 2 se denominan según las variantes del aspecto estructural considerado. Mientras que los subperfiles, según el caso, denotan otro/s aspecto/s estructurales diferentes, en este caso, los aspectos estructurales *Exacto/Aproximado* (E/A) y *Alcanzabilidad* (Alcanz.), por lo que el ítem 1.A es *secundario* respecto a tales aspectos estructurales, y por tanto subordinados al aspecto estructural O/P.

Perfiles	Descripción de los perfiles
Perfil I (Proceso)	Opción verdadero: El límite origina y describe un proceso dinámico. Ejemplo: “Verdadero: <i>Sí, ya que el límite nos da todos los puntos posibles que puede adquirir la función</i> ”.
Perfil II (Objeto/Proceso)	Opción verdadero: Se enfatiza el límite como el resultado del proceso dinámico que, implícitamente, también es parte del concepto; expresa una concepción dual de objeto y proceso. Ej. “Verdadero: <i>Porque el límite describe hacia qué punto se acerca la función</i> ”
Perfil III (Objeto)	Opción falso. Se diferencia el objeto límite del proceso dinámico que lo origina. Ej. “Falso. <i>Un límite describe hacia dónde tiende la función $f(x)$</i> ” Esa diferencia se hace patente cuando se establece que el proceso dinámico no alcanza el valor del límite y en la consideración del carácter aproximado de su valor Subperfil III.1 (No Alcanzable / Aproximado) . Ej. “Falso: <i>Un límite es un número aproximado al que se acerca una función sin resultado exacto</i> ”.

Tabla 2: Perfiles y subperfiles de argumentos para el ítem 1.A

Ejemplos de vínculos entre los aspectos estructurales teóricos propuestos

Como muestra la tabla 2, la respuesta al ítem 1.A “Falso. *Un límite es un número aproximado al que se acerca una función sin resultado exacto*” remarca la distinción entre el objeto límite y el proceso correspondiente, por razón de la no alcanzabilidad.

No podemos esclarecer si el término “aproximado” se refiere a (1) la acción o efecto de aproximar el valor exacto límite; (2) el valor del límite es aproximación de otro “valor exacto”, por lo tanto, no existe una vinculación clara entre este aspecto y el carácter exacto/aproximado del valor. La respuesta que este sujeto propone para el ítem 2.A “Verdadero. *Si el límite de una función es 4 un resultado de esa función no puede ser 5*” parece indicar un sentido (1), luego

interpretamos que el valor del límite es exacto pero “aproximado por” los valores de la función correspondiente sin llegar a alcanzarlo, y en este caso a rebasarlo.

DISCUSIÓN

La tabla 3 resume las distintas vinculaciones que se dan entre los aspectos estructurales prefijados y los ítems correspondientes que provocan tales vínculos.

Aspectos estructurales principales	Aspectos estructurales secundarios				
	O/P	E/A	IP/FP	Alcanz	Reb
O/P		1.A		1.A	
E/A	2.B		2.B		
IP/FP	2.B, 3.B	3.B		3.B, 3.A ¹	
Alcanz			1.B, 3.A ¹		1.B
Reb			2.A	2.A	

Tabla 3: Vinculación empírica entre los aspectos estructurales teóricos y los ítems secundarios implicados

Observamos que ningún aspecto estructural es considerado de manera aislada por los escolares y se establecen relaciones relevantes entre ellos. Las relaciones más llamativas son las siguientes:

- *OP-Alcanz-E/A*. Esta relación está ejemplificada en el apartado anterior.
- *Reb-Alcanz-IP/FP*. Aparte de la relación (IP/FP-Alcanz) dada por el ítem 3.A explicada al pie de página, el ítem 2.A induce una relación más compleja entre estos tres aspectos estructurales contemplada en la respuesta “*Verdadero: Porque un límite es un punto al que una función se aproxima infinitamente sin llegar a él*”.
- *Alcanz-Reb*. Entre estos dos aspectos se establece otro vínculo dado por el ítem 2.B, cuando un sujeto admite la alcanzabilidad del límite pero no su rebasabilidad. Por ejemplo, “*Un límite es un número que la función alcanza pero no lo sobrepasa*”, esto concuerda con resultados de Cornu (1991).
- *OP-E/A*. El ítem 2.B provoca también que los sujetos enfatizen la naturaleza del límite como un objeto, y dentro de esta naturaleza su carácter exacto, como se puede interpretar de la respuesta: “*Falso. Un límite, es un tope numérico y no es aproximativo, sino concreto*”. Su carácter procesual: “*Falso: Un límite es una*

¹ El ítem 3.A es principal para los aspectos estructurales *IP/FP* y *Alcanz*., pero algunos sujetos ponen de manifiesto la equivalencia intrínseca entre el carácter infinito potencial del proceso y la no alcanzabilidad del límite, por ejemplo, “El límite no se puede alcanzar, pero sí que se aproxima la cifra cada vez más a él”.

aproximación que puedes hacer hasta cierto punto de precisión”; y su naturaleza dual como en: “Verdadero. Los límites pueden ser infinitos aproximándose a un valor que cada vez será más preciso [límite se considera como un proceso]. O también puede ser un número exacto, que cuanto más nos aproximamos más concreto será este [límite se considera un objeto]”, además pone de manifiesto que la naturaleza exacta-aproximada del límite es relativa. Esta interpretación tiene sentido en el modelo de Sfard (1991).

La figura 1 muestra un diagrama que detalla las vinculaciones entre los aspectos estructurales teóricos y los reactivos que las establecen. Las flechas unidireccionales expresan el sentido del vínculo, es decir, el aspecto estructural “origen” provoca vía un reactivo otro aspecto estructural “extremo”. Mientras que las flechas bidireccionales muestran que un reactivo provoca argumentos que se interpretan en términos de ambos aspectos estructurales.

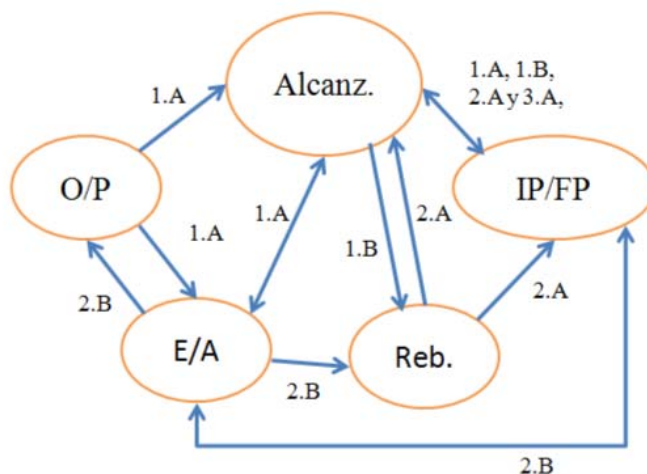


Figura 1: Diagrama de vínculos establecidos empíricamente entre los aspectos estructurales teóricos

CONCLUSIONES

Se hace patente que los reactivos utilizados han recogido información adicional a la que en principio fueron diseñados y que muestran la riqueza de conexiones que los escolares establecen entre unos aspectos estructurales teóricos y otros. A nivel de concepciones específicas, los escolares tratan con gran amplitud los aspectos teóricos correspondientes, mientras que en cuanto al carácter global, las concepciones personales de los escolares giran en torno a una concepción de límite como un número exacto generado por un proceso infinito potencial ontológicamente diferente y que se caracteriza como inalcanzable y no rebasable, concordando con Cornu (1991) y Monaghan (1991), no obstante, hemos obtenido evidencias particulares referidas a la dualidad objeto/proceso (Tall, 1980; Sfard, 1991) y el carácter aproximado de su valor (Sierpinska, 1987).

Las relaciones establecidas por los escolares entre los aspectos estructurales propuestos justifican la necesidad de modificaciones en la planificación de la enseñanza de este concepto,

sobre todo las que implican el carácter infinito potencial del proceso, la no alcanzabilidad del límite, su no rebasabilidad y el carácter aproximado de su valor.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Modelización y representaciones en educación matemática” (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) del 3^{er} Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

BIBLIOGRAFÍA

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 12(1), 145-168.

Cornu, B. (1991). Limits, In D. Tall, (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. (pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, Ed., Schwingendorf, K., Thomas, K., Nichols D. & Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

Edwards, B.S., Dubinsky, Ed. & McDonald, M.A. (2005). *Advanced Mathematical Thinking. Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25.

Gray E.M. & Tall, D.O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115- 141.

Lauten, A.D., Graham, K. & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, 13(2), 225-237.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.

Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Tall D.O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In Karplus, R. (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 170-176, Berkeley.

Tall, D.O & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151- 169.

APÉNDICE: ÍTEMS INCLUIDOS EN LOS CUESTIONARIOS

Cuestionario A.

- (1.A.) Un límite describe cómo se mueve una función $f(x)$ cuando x se mueve hacia cierto punto.
- (2.A.) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.
- (3.A.) Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza.

Cuestionario B.

- (1.B.) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.
- (2.B.) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera
- (3.B.) Un límite es un número al cual los valores de una función $f(x)$ pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x .

PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA TECNOLOGÍA EN LA FORMACIÓN Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Matías Camacho Machín (*Universidad de La Laguna*)

M. Mar Moreno (*Universidad de Lleida*)

Carmen Azcárate (*Universidad Autónoma de Barcelona*)

RESUMEN

El Proyecto de Investigación que se presenta surge como una extensión hacia la formación inicial y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas de la Educación Secundaria de algunos aspectos que han venido desarrollándose con anterioridad en los Proyectos de Investigación “La Resolución de Problemas de Matemáticas en la Educación post-obligatoria haciendo uso de herramientas tecnológicas. Problemas de aprendizaje y métodos de enseñanza” (SEJ2005-08499) y “Competencia matemática, resolución de problemas y tecnología”(EDU2008-05254) El propósito principal de este Proyecto de Investigación es doble. En primer lugar se trata analizar y determinar competencias matemáticas y profesionales de los profesores de matemáticas para la educación secundaria, tanto obligatoria como post obligatoria, al objeto de establecer un marco de referencia que ayude a construir un programa de formación basado en la Resolución de Problemas. El segundo propósito del Proyecto presentado, se dirige hacia el diseño e implementación de un material curricular basado en la Resolución de Problemas como parte integrante del programa de formación de profesores en formación inicial (Máster de Profesorado) y profesores en activo.

INTRODUCCIÓN

El Proyecto de Investigación que se presenta surge como una extensión hacia la formación inicial y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas de la Educación Secundaria de algunos aspectos que han venido desarrollándose con anterioridad en los Proyectos de Investigación “La Resolución de Problemas de Matemáticas en la Educación post-obligatoria haciendo uso de herramientas tecnológicas. Problemas de aprendizaje y métodos de enseñanza” (SEJ2005-08499) y “Competencia matemática, resolución de problemas y tecnología”(EDU2008-05254).

Es sabido que el conocimiento matemático de los profesores de Secundaria juega un papel importante en la enseñanza de la disciplina, sin embargo, resulta necesario investigar los efectos de ese dominio del conocimiento de los profesores en los escenarios de enseñanza. Es evidente que el sólo dominio del conocimiento matemático no es suficiente para promover una comprensión conceptual en sus estudiantes a partir de su práctica de enseñanza. Es decir, el conocimiento del contenido no es suficiente para que el profesor logre un aprendizaje sólido y profundo en sus estudiantes. Algunos investigadores utilizan la noción de conocimiento matemático para la enseñanza para referirse a lo que los profesores deben conocer en términos de contenidos, representaciones, formas de pensar, actuar y utilizar para que sus estudiantes desarrollen un conocimiento matemático sólido o profundo.

Thompson, Carlson, & Silverman, (2007, pp. 416,417) afirman que:

Si las estructuras conceptuales de un profesor constan de hechos y procedimientos desconectados, su enseñanza es probable que enfatice hechos y procedimientos desconectados. En contraste, si sus estructuras conceptuales incluyen una red de ideas matemáticas y formas de pensar compatibles, al menos será posible que intente desarrollar estas mismas estructuras conceptuales en sus estudiantes. Creemos que esta forma última de comprensión matemática sirve como una condición necesaria para que los maestros enseñen a sus estudiantes una comprensión de alto nivel.

Así, un reto importante en la educación matemática es buscar diversas maneras y programas para preparar a los profesores de matemáticas en los distintos niveles de educación. En particular, conviene conocer y discutir modelos de preparación o formación de profesores utilizados en diferentes sistemas educativos con la intención de construir o robustecer las propuestas o programas existentes. Además, también resulta importante establecer un programa de desarrollo profesional que le permite al profesor conocer e incorporar a su práctica avances y resultados de investigación de la didáctica o educación matemática.

Conviene caracterizar el tipo de conocimiento matemático para la enseñanza y las cualidades matemáticas de los escenarios de enseñanza. En relación del conocimiento matemático para la enseñanza se refiere al conocimiento matemático que los profesores necesitan para llevar a cabo su actividad como profesor. Involucra, de acuerdo a Shulman (1987) no sólo el conocimiento disciplinar sino también el conocimiento que sustenta la enseñanza. Por ejemplo, cómo definir determinado concepto en los diferentes grados escolares, identificar los errores que los estudiantes pueden cometer durante su estudio, o saber porque y cómo cierto procedimiento o algoritmo funciona. En relación a la calidad de la enseñanza se refiere al rigor y riqueza de las actividades de enseñanza, la forma de presentar, discutir y justificar los conceptos, las formas de evaluar o monitorear el aprendizaje de los estudiantes y en general las dinámicas de clase utilizadas para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Una parte de este proyecto se articula mediante un estudio conjunto que permita contrastar los programas de formación y desarrollo profesional entre México y España. Se propone la colaboración para desarrollar el diseño de un conjunto de problemas o tareas que se utilizarán en los programas de ambos países (CINVESTAV, U. de la Laguna, U. de Lleida y U.A.B.). La idea es utilizar estos problemas en los programas de formación durante un semestre y analizar cómo los profesores en formación y en activo resuelven y los utilizan para sustentar sus prácticas profesionales.

Por tanto, el propósito principal de este Proyecto de Investigación es doble. En primer lugar se trata analizar y determinar competencias matemáticas y profesionales de los profesores de matemáticas para la educación secundaria, tanto obligatoria como post obligatoria, al objeto de establecer un marco de referencia que ayude a construir un programa de formación basado en la Resolución de Problemas. Para ello, se utilizarán tres elementos teóricos para configurar el marco conceptual que guiará el Proyecto de Investigación con el objetivo de facilitar el análisis e interpretación de los resultados. Se utilizará las ideas subyacentes en el concepto de *Trayectorias Hipotéticas* de enseñanza y aprendizaje (Santos-Trigo, 2007; Simon y Tzur, 2004, Sacristán, et al, 2010), en segundo lugar *la Resolución de Problemas* (Schoenfeld, 1992, 2010; Santos, 2007) y el tercer elemento del marco conceptual surge de la ergonomía cognitiva

(Rabardel, 1995) y se combina con el enfoque antropológico de la didáctica (Chevallard, 1992), constituyendo lo que se denomina *aproximación Instrumental* (Guin et al, 2005) el cual se relaciona principalmente con el uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las Matemáticas. El segundo propósito del Proyecto presentado, se dirige hacia el diseño e implementación de un material curricular basado en la Resolución de Problemas como parte integrante del programa de formación de profesores en formación inicial (Máster de Profesorado) y profesores en activo. Se tratará de diseñar las actividades de profesionalización (Santos-Trigo y Camacho, 2009) guiadas por algunos principios que resultan fundamentales en la Resolución de Problemas como tópico de investigación (Santos-Trigo, 2007; Lesh y Doerr, 2003).

OBJETIVOS

Los objetivos generales de este proyecto de investigación son:

- a) Caracterizar el tipo de conocimientos matemáticos en términos de competencias que necesitan los profesores de matemáticas de Educación Secundaria para ser capaces de desarrollar actividades de resolución de problemas en el aula haciendo (o no) uso de herramientas computacionales.
- b) Construir un marco de referencia que pueda ser utilizado por los profesores de matemáticas de secundaria tanto en formación inicial como en activo, que les permita estructurar y organizar la enseñanza de los contenidos matemáticos basándose en el uso de herramientas tecnológicas en ambientes de Resolución de Problemas.
- c) Diseñar, desarrollar y evaluar un programa de formación de profesores basado en la resolución de problemas donde el uso de la tecnología resulte ser relevante,.
- d) Establecer implicaciones tanto metodológicas como didácticas que se deriven del estudio de las distintas propuestas de formación.

Las principales contribuciones de nuestra propuesta van dirigidas hacia la obtención de datos sobre:

- Las competencias matemáticas y profesionales que deben poseer los profesores de matemáticas de Secundaria.
- El uso sistemático de ejemplos y contraejemplos en la Resolución de Problemas.
- El papel de la tecnología como instrumento de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la secundaria.
- La influencia de los conocimientos matemáticos de los profesores y futuros profesores en su formación didáctica y profesional.

- La conjugación en la Resolución de Problemas de los sistemas de representación geométrico, numérico, gráfico y algebraico y de la tecnología.
- Las estrategias que doten a los profesores que desarrollan su formación inicial de una mayor responsabilidad en su proceso de aprendizaje,
- El papel que puede jugar el uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Se trata, en definitiva de un estudio sobre las competencias matemáticas y profesionales de los profesores de matemáticas, sobre resolución de problemas y el empleo sistemático de la tecnología en enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria que puede ser abordado dada la experiencia investigadora de las instituciones e investigadores que participan (cuatro instituciones, 7 investigadores (uno post-doctoral) y seis estudiantes de doctorado).

METODOLOGÍA

El diseño de investigación que mejor se adapta a los objetivos del presente proyecto es el estudio de casos múltiples. Las razones para esta elección son las siguientes:

- participación de investigadores de diferentes niveles educativos y de diferentes centros;
- necesidad de tipificar la diversidad tanto de los estudiantes como de los profesores;
- importancia de analizar el contexto de las diferentes instituciones educativas que participarán directa o indirectamente en el Proyecto.

Otros participantes en esta investigación son profesores de Secundaria y de universidad que colaborarán voluntariamente en la experiencia y provienen de diversos centros. Además de los profesores que ya nos han facilitado sus aulas, sus documentos, sus alumnos (que siempre participan por propia voluntad).

Los métodos de recogida de datos son fundamentalmente de tipo cualitativo. Serán los siguientes:

Estudiantes de posgrado y profesores en activo.

- Videgrabación de pares de estudiantes trabajando ante una tarea preparada.
- Videgrabación de sesiones de clase de los profesores.
- Cuestionarios semi-abiertos diseñados específicamente para cada investigación.
- Entrevistas basadas en la resolución de tareas grabadas en video.
- Entrevistas a pares de estudiantes.
- Entrevistas a profesores en activo.

- Observación sistemática de algunos estudiantes y grupo de estudiantes cuando realizan las tareas diseñadas.

Materiales:

- El Material Curricular de Resolución de problemas diseñado para cada una de las experiencias.
- Software (CAS, Geometría Dinámica, Excel...)
- Calculadoras Simbólicas.
- Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje.
- Proyectos internacionales.

El análisis de datos es fundamentalmente de tipo cualitativo basado en un contraste continuado de tipo inductivo (Patton, 1980). La información se analiza y se codifica de acuerdo con códigos y categorías consensuadas entre los participantes, con la validación de investigadores externos; es frecuente organizar los diferentes puntos de vista en torno a dilemas a partir de los cuales se estructuran los datos.

Para las comparaciones múltiples entre las categorías se organizan tablas u otros sistemas de comparación cualitativos (Miles y Huberman, 1984). La validez de los resultados se intenta asegurar mediante multiplicidad de fuentes de datos y de investigadores que participan en la discusión de las conclusiones.

Será imprescindible profundizar en las formas de análisis y de comunicación gráfica o visual de los resultados.

TAREAS A REALIZAR

Vamos a considerar seis tareas generales para los distintos problemas didácticos de investigación, que se corresponden con los objetivos que nos hemos propuesto alcanzar con proyecto de investigación:

Tarea 1.- Selección, análisis y discusión de la bibliografía específica sobre las competencias y conocimientos del profesor y desarrollo profesional, así como realizar una búsqueda bibliográfica exhaustiva para cada uno de los temas a trabajar en cada uno de los ámbitos de investigación.

Tarea 2.- Esta tarea consistirá en la selección de los problemas que se trabajarán con los estudiantes de posgrado y los profesores en activo. Para ello, se analizarán en detalle las diferentes Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje y las Trayectorias de enseñanza con el fin de configurar el diseño del material curricular, esto es, las actividades para la resolución de problemas mediante el uso de múltiples representaciones que se usarán en las diferentes investigaciones. Se diseñarán sesiones con el uso del con los CAS y el software de geometría dinámica (según la investigación que se desarrolle). En el caso del uso de las herramientas

tecnológicas, la noción de transposición Informática de Balacheff nos guiará teóricamente hacia este objetivo, es decir, a entender el paso entre el “saber matemático” y el “saber a enseñar utilizando entornos informáticos”. En este caso, las propuestas de enseñanza estarán basadas en técnicas instrumentadas con las distintas herramientas tecnológicas en la cual entren en juego, y se articulen, los diferentes registros de representación que aparecen en la resolución de problemas de optimización (geométrico, gráfico, numérico y simbólico). El ordenador y las calculadoras simbólicas también jugarán un importante papel en esta fase. El objetivo es diseñar seis actividades de resolución de problemas (con la Calculadora Simbólica)

En los problemas que se diseñarán, se incluirá una estructura que defina los elementos básicos que a continuación se describen:

Introducción. Cada una de las actividades incluirá un apartado que describa el contexto de la actividad, contextos matemáticos donde el estudiante tiene que construir configuraciones geométricas, identificar patrones numéricos, analizar funciones recursivas, generalizar, formalizar o modelizar.

Conceptos Matemáticos Relevantes Asociados con el Problema o Actividad. La idea es que para cada actividad se identifiquen los conceptos y recursos matemáticos que son relevantes en el desarrollo del problema. Esta información es fundamental para evaluar el potencial teórico de la actividad (THA)

Procesos de Solución. En particular resulta importante identificar las formas potenciales en que las ideas matemáticas asociadas con la actividad se representan y estructuran para proponer caminos de solución.

Las Herramientas. En particular interesa identificar el potencial que ofrece tanto los sistemas de representación utilizados como las herramientas tecnológicas puestas en juego en los caminos de solución. Por ejemplo, en el caso de la herramientas tecnológicas, Excel puede resultar de gran utilidad al analizar información que involucren datos numéricos o analizar el comportamiento de fenómenos continuos a partir de modelos discretos (con procesos de refinamiento); Cabri-Geometre resulta útil en la construcción de representaciones dinámicas que permiten determinar invariantes o relaciones a partir del movimiento de determinadas partes de la configuración; o el uso de la calculadora favorece la búsqueda y entendimiento de patrones recursivos o el análisis de expresiones algebraicas y sus correspondientes representaciones.

Posibles Soluciones. Cada actividad se acompañará de las distintas formas posibles de soluciones en cada uno de los sistemas de representación o mediante las herramientas tecnológicas. Es decir, antes de implementar la actividad en el aula será importante caracterizar los caminos de solución, las conexiones y posibles extensiones de la actividad original. Esto también ayuda evaluar las cualidades matemáticas y las posibles limitaciones que puedan surgir durante el periodo de su implementación.

Tarea 3.- Se elaborarán las herramientas de observación, y se implementarán de manera sistemática en las diferentes aulas los materiales diseñados.

Tarea 4.- Al objeto de incluir las modificaciones necesarias en relación con las reflexiones y análisis de las potencialidades y las dificultades que han surgido durante el diseño de las actividades, se hará una experiencia piloto con el objetivo de que se confronten las ideas vertidas en el marco teórico con la praxis. Se reflexiona sobre la escritura de los materiales y las tareas propuestas y se contrasta el diseño realizado para los distintos estudiantes de posgrado, haciendo un análisis comparativo entre los estudiantes de Barcelona, La Laguna y México.

Analizaremos exhaustivamente la resolución de las tareas por parte de los estudiantes (videgrabaciones), con el objetivo de comprobar la utilidad y la validez didáctica de los materiales diseñados. Se realizará la reescritura de los materiales.

Tarea 5.- Desarrollo de la experiencia definitiva, en la que los estudiantes de posgrado y los profesores en activo realicen las labores de profesionalización en el sentido de preparar las tareas para ser llevadas a las aulas de Secundaria.

Tarea 6.- Se establecerán finalmente, después del análisis de los resultados, las conclusiones, revisión de los materiales utilizados y redacción de la memoria final de los diferentes trabajos de investigación. Se evaluará además el diseño y desarrollo del trabajo desarrollado en las diferentes tareas.

(Este trabajo ha sido financiado por el proyecto del plan nacional EDU2011-29328)

BIBLIOGRAFÍA

- Adler, J., Ball, D., Krainer, K, Fou-Lai, L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, pp. 359-381.
- Camacho, M. Santos-Trigo, M. (2006) “Sobre el desarrollo del sentido numérico y el uso de software dinámico” *UNO*, 42, pp. 20-33.
- Even, R. (2011). The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: practitioners’ views. *ZDM Mathematics Education*, 43:941-950.
- Khaneman, D. (2011). *Thinking fast and slow*. NY: Penguin Group.
- Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2009) 'Towards the Construction of a Framework to Deal with Routine Problems to Foster Mathematical Inquiry', *PRIMUS*, 19: 3, pp. 260-279.
- Santos-Trigo, M. (2010). A mathematical problem-solving approach to identify and explore instructional routes based on the use of computational tools. In J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard, & J. Hertzog, (Eds.), *Technology implementation and teacher education: Reflective models*, pp 208-313. IGI Global: Hershey PA.
- Santos-Trigo, M. Camacho, M (2011) Towards the development of a technological framework that enhances mathematics proficiency in problem solving approaches. (Pendiente de publicación en *For the Learning of Mathematics*)

- Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational application*. NY: Routledge.
- Zazkis, R, & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, 31(2), pp. 8-13.