

EL SENTIDO ESTRUCTURAL EN EL ESTUDIANTADO DE CARRERAS DE INGENIERÍA

The Structural Sense in Engineering Students

Cancec-Murillo, G.^a, Montoro, A. B.^a, Flores, P.^a y Rojano, T.^b

^aUniversidad de Granada, ^bCINVESTAV

Resumen

Esta comunicación analiza el sentido estructural que posee el estudiantado de ingeniería en su último año de formación. Para esto se diseñó y utilizó un instrumento con ejercicios de manipulación algebraica elemental y ejercicios de límite. Los resultados revelan que los sujetos muestran mayor sentido de la estructura en los ítems en los que intervienen menos objetos matemáticos, observándose dificultades en aquellos donde existe integración de varios objetos, relación entre entidades y aplicación a un contexto. Por lo tanto, se sugiere a las instituciones de educación superior tomar las medidas necesarias para fortalecer el desarrollo del sentido de la estructura desde los primeros años de formación académica, y así, evitar el arrastre de carencias y errores algebraicos hasta los últimos años de formación y posterior ejercicio profesional.

Palabras clave: *sentido estructural, sentido algebraico, manipulación algebraica, errores algebraicos, educación superior.*

Abstract

This communication analyses the structural sense possessed by engineering students in their final year of education. To accomplish this, an instrument designed to analyse this capacity was used in exercises involving elemental algebraic manipulation and limit exercises. The results reveal a development of structural sense in items involving fewer mathematical objects; however, difficulties are observed in items where multiple objects are integrated, there are relationships between structures, and application to a context is required. Therefore, it is suggested that higher education institutions take necessary measures to strengthen the development of structural sense from the early years of academic training, thus avoiding the persistence of deficiencies and algebraic errors until the final years of education and subsequent professional practice.

Keywords: *structural sense, algebraic sense, algebraic manipulation, algebraic mistakes, higher education.*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del cálculo diferencial e integral representa un desafío significativo para muchos estudiantes en educación superior, particularmente en ingeniería. A pesar de contar con una formación escolar completa y, en muchos casos, con programas de nivelación, estos estudiantes continúan enfrentando dificultades en la manipulación y aplicación de estructuras algebraicas fundamentales en el contexto del cálculo y en su especialidad. Investigaciones previas han identificado una serie de factores que contribuyen a estas dificultades (Moreno-Armella, 2021).

Según Kieran (2004), el álgebra transformativa podría ofrecer una solución a estas dificultades. Este enfoque se centra en capacitar a los estudiantes para transformar expresiones algebraicas mediante la aplicación de propiedades, lo que resalta la importancia de desarrollar un sentido estructural en ellos. Para ello, hemos emprendido una investigación cuyo objetivo principal es describir el sentido

estructural que presenta el estudiantado de ingeniería, con lo que esperamos contribuir a mejorar la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en estudiantes de ingeniería y disciplinas afines.

MARCO TEÓRICO

El término sentido estructural fue inicialmente utilizado por Linchevski y Livneh (1999) para hacer referencia, de manera amplia, a un conjunto de competencias relacionadas con la manipulación de expresiones algebraicas, que capacitan al estudiante para utilizar de manera más efectiva las técnicas algebraicas adquiridas. Estos académicos argumentan que la introducción de estructuras aritméticas en las etapas tempranas del aprendizaje algebraico podría mitigar ciertos errores estructurales que suelen cometer los alumnos al enfrentarse a problemas algebraicos (Livneh y Linchevski, 2007).

Con el propósito de fomentar el desarrollo del sentido estructural, entendido como la capacidad de aprehensión de las estructuras de los objetos algebraicos (Rojano, 2022), un equipo de investigadores mexicanos ha concebido una serie de actividades integradas en un entorno web denominado Máquina de Expresiones (MEx) (Muñoz-Porras, 2015).

Molina (2010), en sus investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra, emplea el término estructura para hacer referencia a los componentes de una expresión algebraica, los símbolos que los conectan, el orden de los términos y las relaciones entre ellos. Es evidente que las expresiones algebraicas exhiben diversas estructuras, identificadas por Hoch y Dreyfus (2004) como fundamentales para discernir distintos componentes de las expresiones algebraicas que se relacionan entre sí.

Dentro de la variedad de estructuras de expresiones algebraicas, destacan los productos notables, las fracciones algebraicas, las ecuaciones y las funciones. Vega-Castro et al. (2011) identifica sentido estructural con las habilidades que permiten discernir qué interpretación de las expresiones es más adecuada según el contexto, para cambiarlas por otras que faciliten la resolución de problemas. Para ello se requiere encontrar expresiones algebraicas que compartan la misma apariencia (estructura externa) o la relación entre las cantidades y las operaciones (estructura interna) (Vega-Castro et al., 2013). Por ejemplo, en las expresiones a) $(x + 3)^2$; b) $x^2 + 9 + 6x$; c) $(3x + 6)^2$; d) $x^2 + 9x - 3x + 10 - 1$, observamos que a) y c) son similares en estructura externa, forma de cuadrado de binomio, pero internamente difieren por incorporar componentes distintos. En contraste, a), b) y d) comparten la estructura interna, aunque su estructura externa varía, requiriendo transformaciones algebraicas para relacionarlas. Comúnmente, tanto en problemas de cálculo como en álgebra, es necesario obtener expresiones equivalentes (misma estructura interna), para lo que conviene identificar estructuras algebraicas conocidas, como los productos notables (misma estructura externa).

Para caracterizar el sentido estructural se han establecido diversas componentes. Hoch y Dreyfus (2006) señalan tres niveles de sentido estructural que reflejan las habilidades alcanzadas por los estudiantes:

- Reconocen una estructura conocida en su forma más básica.
- Tratan un término compuesto como una entidad única y reconocen una estructura conocida en una forma más compleja (suma o producto).
- Eligen las manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.

En Vega-Castro (2013) vemos un amplio listado de componentes del sentido estructural, que incluyen los niveles anteriores y otras capacidades como distinguir subestructuras dentro de una entidad más compleja y reconocer relaciones entre ellas, anticipar el efecto de transformaciones en la estructura de una expresión, reconocer relaciones de igualdad en estructura de expresiones presentes, y extraer información relevante a partir de la estructura externa de una expresión, relativa al objeto que representa o a su estructura interna.

Muñoz-Porras (2015) destaca la técnica del cambio de variable como una herramienta común en el cálculo que permite reconocer estructuras en expresiones algebraicas. En este sentido, Freudenthal (1983) menciona esta acción como sustitución algebraica, en la que una expresión puede ser reemplazada por otra si son equivalentes y también enfatiza la interpretación estática de las expresiones algebraicas para que la sustitución formal sea efectiva, extendiendo su validez más allá de la simple sustitución.

Los niveles y descriptores señalados por los estos autores, nos ha permitido seleccionar componentes (C1-C8 de la Tabla 1) y un noveno que agrega el equipo para hacer referencia a la aplicación de sentido estructural en otros contextos, respaldado por las observaciones de Rojano y Palmas (2022), quienes señalan las dificultades del estudiantado para aplicar conceptos matemáticos en contextos diversos.

Tabla 1. Componentes del sentido estructural.

Componente	Descriptor
C1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.
C2	Identificar subestructuras dentro de una expresión y tratarlas como una sola entidad al transformar la expresión.
C3	Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.
C4	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.
C5	Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas.
C6	Aplicar la sustitución, ya sea internamente o de manera explícita.
C7	Reconocer relaciones de igualdad en estructura de expresiones presentes.
C8	Extraer información relevante a partir de la estructura externa de una expresión, relativa al objeto que representa o a su estructura interna.
C9	Aplicar estructuras en otros contextos.

MÉTODOLÓGIA

El presente estudio es de tipo cualitativo, exploratorio, descriptivo y transeccional que utiliza una muestra por conveniencia, la cual se aplica a casos disponibles a los que se tiene acceso en el momento del estudio (Hernández et al., 2010). Participan 16 estudiantes de ingeniería (química, electricidad, electrónica y en automatización) de una institución de Educación Superior Técnico Profesional (TP) de Chile, que se encuentran en su último año de formación.

Instrumento

Similar a los trabajos de Hoch y Dreyfus (2006) y Muñoz-Porras (2015), nuestro cuestionario consta de un apartado sobre factorización y de resolución de ecuaciones (A y C), ambos con dos preguntas cada uno. Por otro lado, se incluyeron dos ítems (B) en los que los sujetos deben completar los recuadros de manera que se verifique la igualdad, aspecto que aparece en las guías de trabajo de la institución y en los trabajos de Vega-Castro (2013). Se cuenta con la autorización de las autoras para su aplicación. Por último, se incluyeron cuatro preguntas sobre el cálculo de límites de una función en un punto (D), la última de ellas contextualizada, seleccionadas de evaluaciones realizadas por los docentes de la institución. Esta decisión fue motivada ya que esta investigación pretende analizar el sentido estructural de estudiantes de ingeniería, como una mejora de sus habilidades en cálculo, dimensión ausente en los instrumentos existentes.

Se solicitó a tres expertos de sentido estructural la revisión del diseño del instrumento y a tres docentes de la institución en que se aplica, que resolvieran el instrumento y dieran su retroalimentación. En la Tabla 2, se muestran los ítems del cuestionario.

Tabla 2. Ítems del cuestionario

A) Transforme las expresiones en otras equivalentes mediante factorización.

1) $x^4 - 7x^2 + 10 =$

2) $50x^2y^4 - 18z^6 =$

B) Complete cada recuadro de tal forma que las expresiones sean equivalentes y se pueda simplificar.

3) $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x - \boxed{}}{\boxed{} (\sqrt{x} + \boxed{})}$

4) $\frac{(h+2)^2 - 4}{\boxed{}} = \frac{(\boxed{} + 2)(\boxed{} - 2)}{(h+2) - 2}$

C) Resuelva las ecuaciones, calculando el valor de la expresión solicitada

5) Si $6(2-a) + 3(2-a) = 0$, ¿cuánto vale $2-a$?

6) Si $4a^2b^2 - 4ab + 1 = 0$, ¿cuánto vale ab ?

D) Transforme las expresiones, indicando los códigos de las estructuras utilizadas para determinar el valor de los siguientes límites:

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}$

8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\text{sen}(3x)}{5x}$

10) El ingreso promedio por artículo X en una empresa es $I = \frac{x}{200x - 0,2x^2}$

¿Qué sucede si los productos disminuyen a cero?

Los estudiantes los ítems propuestos individualmente, contando con 80 minutos en horario de clases. Durante la aplicación del instrumento se le solicitó al estudiantado hacer el desarrollo completo de sus respuestas, indicando la importancia de estas para la investigación y se les pide registrar los códigos de las estructuras utilizadas. Para ello, se les entrega una guía de código-estructura con productos notables, propiedades de potencias, propiedades de raíces, ecuaciones y límites trascendentes.

RESULTADOS

En la Tabla 3 se presenta un resumen de los resultados, indicando el número de estudiantes que respondieron a cada ítem, los que mostraron únicamente destrezas de manipulación y los que evidencian las diferentes componentes de sentido estructural, considerando que en algunos ítems se aplica más de una componente, razón por la cual la suma pueda ser mayor al número total de respuestas.

Tabla 3. Resumen de resultados por ítem

Ítem	Respuestas	Manipulación	Componentes								
			C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
I1	16	6			10						
I2	14	4	10		5	5					
I3	12	10				2	2		1		
I4	12	7		5	5		5				
I5	15	11		2				2			
I6	15	13			2			1			
I7	13	9	4				4				4
I8	11	7	4			4	4		2		4
I9	9	6			3		3				3
I10	9	4	5				5			3	5

En relación con la participación del estudiantado se puede destacar que de las 10 preguntas realizadas las ocho primeras fueron contestadas por la mayoría de los estudiantes, sin embargo, las últimas dos preguntas superan levemente el 50% de respuestas (independiente si estas están correctas o no).

En el ítem A referido a preguntas de factorización, encontramos que todos los estudiantes contestaron a la primera pregunta, de los cuales 10 evidencian sentido estructural, pues transformaron de forma correcta la expresión, identificando la estructura en su forma compuesta (C3) ya que reconocen la identidad $a^2+(b+c)a+bc=(a+b)(a+c)$ y pueden aplicar $a^4=(a^2)^2$ para poder sustituir en la estructura (Figura 1).

En la segunda pregunta, el nivel de participación del estudiantado baja un poquito, así como el grado en que evidencian sentido estructural. De los 14 estudiantes que respondieron, solo cinco evidencian sentido estructural, eligiendo manipulaciones para hacer el mejor uso de una estructura, en este caso, sacar factor común 2 (C4), que a su vez supone reconocer la estructura (factor común) en su forma más simple (C1), lo que permite identificar la diferencia de cuadrados $a^2 - b^2=(a+b)(a - b)$ en su estructura más compleja (C3), aplicando propiedades de potencia $a^{mn}=(a^m)^n$. En la Figura 2 vemos un ejemplo de dicha resolución. Otros cinco estudiantes solo llegan a determinar el factor común 2 (C1), no identificando la diferencia de cuadrados.

Figura 1. Ejemplo de respuesta al ítem 1 con sentido estructural

1) $x^4 - 7x^2 + 10 = (x^2 - 2)(x^2 - 5)$

CÓDIGOS	N2
---------	----

CÓDIGOS	N2
---------	----

$$\begin{aligned}
 & (x^2 - 2)(x^2 - 5) \\
 & x^4 - 7x^2 + 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 7x^2 + 10 \\
 & = (u - 2)(u - 5) \\
 & = (x^2 - 2)(x^2 - 5)
 \end{aligned}$$

Sea $u = x^2$
 $u = -7u + 10$

Figura 2. Ejemplo de respuesta al ítem 2 con sentido estructural

CÓDIGOS	N3
---------	----

$$\begin{aligned}
 & 2(25x^2y^4 - 3z^6) \\
 & 2(5xy^2 + 3z^3)(5xy^2 - 3z^3)
 \end{aligned}$$

Otro apartado con alto índice de respuesta fue el referido a la resolución de ecuaciones (C), cuyos apartados fueron resueltos por la mayoría de los estudiantes. Si bien los resultados en sus dos ítems son muy diferentes. En el caso del ítem 5, si bien 10 de los 15 estudiantes respondieron correctamente, no necesariamente están utilizando sentido estructural. La mayoría optó por la manipulación mecánica de resolución de paréntesis, calculando el valor de “a” para luego calcular “2 - a” (Figura 3 izquierda). Concretamente, solo cuatro apreciaron el marcador visual del paréntesis para considerar “2 - a” como una entidad al transformar la expresión (C2), obteniendo así la solución (Figura 3 derecha).

En contraste, en el ítem 6, solo dos de los 15 estudiantes que resuelven la tarea tratan ab como una única identidad, reconociendo que se trata de una ecuación cuadrática (C3). En la Figura 4 vemos la solución de dichos estudiantes, en el que el estudiante de la derecha, además, reconoce la estructura de cuadrado del binomio en su forma compuesta (C3), aplicando sustitución (C6).

Figura 3. Manipulación vs sentido estructural en resolución de ecuaciones. Respuesta al ítem 5

$$\begin{aligned}
 6(2-a) + 3(2-a) &= 0 \\
 12 - 6a + 6 - 3a &= 0 \\
 12 + 6 - 6a - 3a &= 0 \\
 18 &= +6a + 3a \\
 18 &= 9a \\
 \frac{18}{9} &= a \\
 2 &= a \\
 2 - a &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6x + 3x &= 0 \\
 9x &= 0 \\
 x &= 0/9
 \end{aligned}$$

Figura 4. Ejemplo de respuesta al ítem 6 con sentido estructural

CÓDIGOS 4

$$4a^2b^2 - 4ab + 1 = 0$$

fórmula

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4 \cdot 1)}}{2 \cdot 4}$$

$$x_1 = \frac{4 \pm 0}{8} = 0.5 / \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-4) \pm 0}{2 \cdot 4} = 0.5 / \frac{1}{2}$$

CÓDIGOS N3

$$4x^2 - 4x + 1$$

$$(2x-1)(2x-1)$$

$$2x-1=0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

En el caso del apartado B, en el que se pide completar las ecuaciones, son 12 los estudiantes que responden. De estos, únicamente dos estudiantes responden correctamente al ítem 3 (Figura 5), usando manipulaciones previas para determinar la respuesta (C4), distinguiendo subestructuras dentro de la fracción algebraica y relaciones entre ellas (C5) a través de la racionalización. En el caso del ítem 4, son 5 los estudiantes que responden correctamente: identifican subestructuras dentro de una expresión, en este caso $h+2$ y la tratan como una sola entidad (C2), identificando una estructura diferencia de cuadrados de forma compuesta, $(h+2)^2 - 22$ (C3) y reconocen subestructuras en la fracción algebraica (C5) para determinar relación entre ellas (C7).

Figura 5. Manipulación vs sentido estructural en la resolución al ítem 3

3) $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)}$

CÓDIGOS 23

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}^2-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

3) $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)}$

CÓDIGOS 23

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

En el ítem D referido a operatoria y aplicación de límites, se puede apreciar que únicamente cuatro estudiantes responden correctamente a los ítems 7 y 8 (de los 13 y 11 que contestan, respectivamente). En el caso del ítem 7, identifican estructuras en su forma simple tanto en el numerador como el denominador, $a^3 - b^3$ y $a^2 + (b+c)a + bc$ (C1) y determinan relaciones entre las subestructuras para simplificar (C5) y luego poder calcular el valor del límite (C9). En el ítem 8, además de estas últimas componentes, vemos que realizan manipulaciones previas para determinar la estructura en su forma compuesta (C4) en este caso la diferencia de cuadrados $a^2 - b^2$ por medio de racionalización (C7). En la Figura 6 se muestra un ejemplo de resolución del ítem 7 (izquierda) y el ítem 8 (derecha) donde se perciben dichas componentes.

Figura 6. Ejemplo de respuesta al ítem 7 (izquierda) y el ítem 8 (derecha) con sentido estructural

CÓDIGOS E2-N5

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3-2^3)}{(x-2)(x-2)} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{4+4+4}{2-2} = \frac{12}{-1} = -12$$

CÓDIGOS T1

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{8-3}{\sqrt{3+1}-2} = \frac{0}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Derivamos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}+2 = \sqrt{3+1}+2 = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

En el ítem 9, como se muestra en la Figura 7, únicamente tres de los nueve estudiantes que responden a esta pregunta lo hacen de manera correcta, identificando la estructura en su forma compuesta (C3) en contexto de límites trigonométricos y relacionan las subestructuras involucradas (C5) para finalmente calcular el valor del límite (C9).

Figura 7. Ejemplo de respuesta al ítem 9 con sentido estructural

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(3x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(3 \cdot 0)}{5 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

CÓDIGOS T1

$$= 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{5x} \times \frac{1}{3} \right)$$

$$= 2 \times \frac{3}{5} \times 1 = \frac{6}{5} //$$

DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos del análisis muestran una clara discrepancia entre la manipulación algebraica y el sentido estructural por parte de los estudiantes. Si bien se observa una destreza en la manipulación algebraica en los ítems A, B y C, en la pregunta 5, donde se constata que a pesar de que un número considerable de estudiantes obtienen respuestas correctas, su proceso de resolución se limita a una ejecución mecánica del procedimiento sin identificar marcadores visuales, ni comprender el significado de las expresiones algebraicas. Estos hallazgos coinciden con las ideas planteadas por Vega-Castro (2010), quien sostiene que el trabajo de los estudiantes con expresiones algebraicas suele ser superficial y mecánico, sin una verdadera comprensión de estas, lo que demuestra la necesidad de mejorar el sentido estructural de los estudiantes en el ámbito algebraico.

Por otro lado, el análisis revela que el ítem D presenta la mayor cantidad de preguntas sin desarrollo o con desarrollos incorrectos. Estos resultados muestran la importancia de fomentar en los estudiantes una comprensión más profunda y flexible de los conceptos matemáticos, capacitándolos para aplicarlos de manera efectiva en diferentes situaciones y contextos.

Además, se observa que un alto porcentaje de estudiantes no registró los códigos utilizados en sus desarrollos. Esto podría atribuirse a la falta de familiaridad con este tipo de evaluación, a la priorización del desarrollo de los ejercicios sobre la argumentación de estos o incluso al desconocimiento de las estructuras involucradas. Estos hallazgos resaltan la importancia de propiciar en el estudiantado el desarrollo de habilidades que les permitan reflexionar sobre sus procesos de resolución y registrar adecuadamente sus estrategias y razonamientos.

En última instancia, los resultados del estudio destacan la necesidad de potenciar el desarrollo del sentido estructural en el estudiantado desde los primeros años de formación. Dotar al estudiantado con las herramientas necesarias para comprender profundamente las expresiones algebraicas y aplicar

conceptos matemáticos en diversos contextos, no solo mejorará su desempeño en asignaturas específicas como cálculo y especialidad, sino que también los preparará mejor para enfrentar desafíos de modelización y resolver problemas del mundo real de manera efectiva.

En cuanto al marco conceptual y de análisis utilizado en este estudio, cabe mencionar que las componentes y categorías que lo conforman permitieron dar cuenta, en unos casos, de la presencia de rasgos particulares de sentido estructural algebraico en los estudiantes participantes, y en otros, permitieron identificar la ausencia (o no utilización) de esta capacidad. Será interesante analizar la naturaleza y las características de los ítems en donde se observó lo anterior, así como los antecedentes de los estudiantes en cuanto a su experiencia y conocimientos matemáticos.

Referencias

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Hardcover.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). PME.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). PME.
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chic, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Kluwer AP.
- Linchevski, L. y Livneh D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.
- Livneh, D. y Linchevski, L. (2007). Algebrification of arithmetic: Developing algebraic structure sense in the context of arithmetic. En J. Woo, H. Lew, K. Park y D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 217-225). PME
- Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *SUMA*, 65, 7-15.
- Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM, Mathematics Education*, 53, 621-633. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9>.
- Muñoz-Porras, V. (2015). *Herramienta ad hoc para el Sentido de la Estructura en Álgebra*. [Tesis Doctoral]. Departamento de Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Rojano, T y Palmas, S. (2022). The Importance of Algebra Structure Sense for the Teaching and Learning of Mathematics. En T. Rojano (Ed.), *Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners* (pp. 141-155). Routledge.
- Rojano, T. (2022). *Algebra structure sense development amongst diverse learners*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003197867>.
- Vega-Castro, D. (2013). Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el Sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas. [Tesis Doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Vega-Castro, D., Molina y M., Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M.^a M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, 575-584. SEIEM.
- Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Relime*, 15(2), 232-258.