

ANÁLISIS DEL NIVEL DE DEMOSTRACIÓN EN ALUMNADO DE SECUNDARIA Y BACHILLERATO: EVALUACIÓN INICIAL Y ENFOQUE EN EL USO DE LOS EJEMPLOS

Analysis of the level of proof in secondary and high school students: initial evaluation and focus on the use of examples

Cerqueda-Santacreu, G.^a, Colom-Torrens, Y.^a y Deulofeu-Piquet, J.^b

^aUniversitat d'Andorra, ^bUniversitat Autònoma de Barcelona

Resumen

A través de un análisis cualitativo, el estudio examina los niveles iniciales de demostración y el uso de los ejemplos de 28 estudiantes de secundaria y 41 de bachillerato en la realización de una demostración en una prueba diagnóstica inicial. Los resultados muestran que el uso de los ejemplos es mayoritario en los dos niveles educativos y que el alumnado combina diferentes niveles de desarrollo en un mismo intento de demostración. Aunque algunos alumnos han mostrado ejemplos potencialmente genéricos, estos no incorporan evidencia de generalidad.

Palabras clave: demostración, razonamiento, ejemplos.

Abstract

Through a qualitative analysis, the study examines the initial levels of demonstration and the use of examples by 28 high school and 41 undergraduate students in performing a demonstration in an initial diagnostic test. The results show that the use of examples is predominant at both educational levels and that students combine different levels of development in the same demonstration attempt. Although some students have shown potentially generic examples, these do not incorporate evidence of generality.

Keywords: proof, reasoning, examples.

INTRODUCCIÓN

Desde hace más de tres décadas, hay consenso entre los investigadores en que uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática sea desarrollar el sentido de demostración. Tanto los educadores en matemáticas como los redactores de los documentos de políticas educativas coinciden en la relevancia de la demostración y reclaman que esta tenga un papel más importante en los planes de estudios. A pesar de la importancia que le otorgan los investigadores y las recomendaciones de los currículos, la presencia de la demostración en las aulas de educación básica es mínima (Stylianides et al., 2017) y uno de los principales retos que tienen los profesores de matemáticas de secundaria es cambiar sus creencias sobre la demostración, considerarla adecuada para todos sus estudiantes incluirla de forma natural en sus actividades de clase (Knuth, 2002). Actualmente, los estudios realizados permiten establecer que los estudiantes tienen habitualmente una concepción errónea del concepto de prueba (Stylianides et al., 2017). En particular, una de las principales dificultades a la hora de construir demostraciones es la tendencia a apoyarse en razonamientos empíricos, considerando que un conjunto de ejemplos es suficiente para establecer la validez de una propiedad y los utilizan tanto para aceptar como para producir demostraciones (Reid y Knipping, 2010; Stylianides et al., 2017). Aun así, no hay que desestimar el rol que tienen los razonamientos basados en ejemplos en el proceso de crear, explorar y comprender conjeturas y hay que diseñar prácticas educativas que ayuden al alumnado a usarlos productivamente (Knuth y Na, 2020).

Los resultados que se presentan en esta comunicación forman parte de un estudio más amplio, enmarcado en la realización de una tesis doctoral, que tiene por objetivo describir y analizar la influencia de los ejemplos genéricos en la capacidad de producir demostraciones en alumnado de secundaria y bachillerato. Para ello, se ha diseñado un experimento de enseñanza formado por seis sesiones de 60 minutos para el aprendizaje de la demostración basado en los ejemplos genéricos, con una prueba diagnóstica previa y una prueba de evaluación final. El objetivo de la investigación que se presenta aquí es analizar el nivel de demostración del alumnado y categorizar el uso que hacen de los ejemplos en sus intentos de demostración iniciales.

MARCO TEÓRICO

Demostración en la matemática escolar

Para llevar a cabo nuestra investigación, tenemos que definir que entendemos por demostración en el contexto escolar en el que se realiza. Tomamos como referencia la definición propuesta por Stylianides (2007), quien define demostración como un argumento matemático (es decir, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de un enunciado) con las siguientes propiedades: utiliza propiedades aceptadas por la comunidad de clase que son ciertas y no necesitan justificación; utiliza métodos de razonamiento válidos y conocidos (o dentro de su alcance) en la comunidad de clase; y se comunica con formas de expresión o representación que son apropiadas y conocidas (o dentro de su alcance) por la comunidad de clase. El hecho de que los tres elementos que forman la demostración tengan que ser válidos, hace que esta definición sea coherente con la consideración de demostración de la disciplina matemática. Por otro lado, también se requiere que estos tres elementos sean conocidos por los estudiantes, lo que dota a la definición de flexibilidad suficiente para adaptarse a los distintos niveles educativos y permite que se introduzca desde los cursos más elementales.

Knuth et al. (2010) definen un marco con cuatro niveles para situar la progresión en el desarrollo de la capacidad para producir una demostración. En el nivel 0, los alumnos ignoran la necesidad de una demostración y pueden no presentar argumentos o presentar argumentos autoritarios. En este nivel encontramos justificaciones que cumplen con los esquemas de demostración por convicción externa (Harel y Sowder, 1998), que incluyen los esquemas de demostración ritual (basado en la apariencia) y autoritario (basado en referenciar el libro de texto o al docente). En el nivel 1, el alumno ve la necesidad de demostrar, pero su argumento no es general. Este nivel se subdivide en cuatro niveles, según el uso que les dan a los ejemplos. Gradualmente, los alumnos creen suficiente testear algunos ejemplos (1.a), testean casos de manera sistemática (1.b), testean casos extremos (1.c) y utilizan ejemplos genéricos para justificar (1.d). Estos cuatro subniveles pasan progresivamente de una simple verificación hasta una demostración genérica, progresando por los subniveles intermedios que, aunque no constituyen una demostración, incrementan la plausibilidad de la conjetura. En el nivel 2, el alumno es consciente de la limitación empírica e intenta producir un argumento general, aunque este no es matemáticamente aceptable por ser incompleto o incorrecto. Los niveles del 0 al 2 se diferencian por conciencia de la necesidad de demostrar y por la expresión concreta o general de los argumentos. Finalmente, en el nivel 3 el alumno es consciente de la necesidad de un argumento general y es capaz de producirlo, incluyendo referencias a las condiciones del enunciado y generando una cadena de deducciones con una conclusión explícita. Aunque pueda faltar formalismo o rigor, forman parte de este nivel los alumnos producen una demostración general completa.

Uso de los ejemplos para demostrar. Evidencia empírica y ejemplos genéricos

Analizar ejemplos específicos puede proporcionar una comprensión más profunda de una conjetura y puede dar ideas para el desarrollo de una demostración (Knuth y Na, 2020). Sin embargo, gran parte de los alumnos consideran que la evidencia empírica es suficiente para demostrar una propiedad. Esta dependencia excesiva de los ejemplos como medio de justificación es una de las principales dificultades al producir demostraciones (Reid y Knipping, 2010, Knuth et al., 2010). En

contraposición al uso de los ejemplos como verificación empírica, encontramos los ejemplos genéricos. Un ejemplo genérico es un ejemplo presentado de manera que destaca su rol como portador de generalidad y una demostración sobre un ejemplo genérico se presenta sobre un objeto específico, pero solo se utilizan las características que son generales a la clase que representa y no en aquellas que son concretas del ejemplo (Mason y Pimm, 1984). Lo que caracteriza el ejemplo genérico es la manera en que se presenta la verificación y no el hecho de haber verificado la propiedad para un caso. Se pueden encontrar ejemplos y demostraciones genéricos del ámbito de la educación secundaria en el estudio de Karunakaran et al. (2014) y en nuestra publicación reciente (Cerqueda Santacreu, 2024). El razonamiento usado en el ejemplo genérico puede ser reproducido sobre cualquier otro ejemplo de la clase, lo que nos da generalidad. Por esto, coincidimos con Rowland (1998) en considerar que no es justificable que las demostraciones genéricas sean vistas como inferiores a las demostraciones formales en un contexto escolar, sobre todo teniendo en cuenta su poder de explicación. Aunque los ejemplos genéricos se sitúan en el último subnivel del Nivel 1 de Knuth et al. (2010), consideramos que un alumno produce una demostración aceptable usando un ejemplo genérico cuando podamos observar que el alumno es consciente de que su argumento es general y que no usa el ejemplo como validación empírica (evidencia de generalidad) y cuando muestre las razones matemáticas que permiten que la estructura utilizada se pueda reproducir en cualquier otro ejemplo (evidencia de razonamiento) (Reid y Vallejo Varga, 2018).

METODOLOGÍA

En esta comunicación se describen los resultados obtenidos en una de las actividades de la prueba inicial, aquella que consiste en realizar una demostración y que nos permite hacer un diagnóstico del nivel de demostración inicial de los alumnos, así como del uso que hacen de los ejemplos en sus demostraciones. En esta actividad, cuyo enunciado se presenta en la Figura 1, se muestran tres sumas de un número con su cuadrado, se observa que el resultado siempre es par y se pide al alumnado demostrar que esta afirmación es cierta para cualquier número natural.

Figura 1. Enunciado de la actividad

En Blai ha sumat alguns nombres amb el seu quadrat: $2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$ $5 + 5^2 = 5 + 25 = 30$ $6 + 6^2 = 6 + 36 = 42$. Ha observat que la suma és sempre parell.	<i>Traducción del texto: Blai ha sumado algunos números con su cuadrado (...)</i> <i>Ha observado que la suma siempre es par.</i> <i>a. Demuestra que la observación de Blai es cierta para cualquier número. Justifica todas las afirmaciones que uses en tu razonamiento.</i>
--	---

a. Demuestra què l'observació del Blai és certa per qualsevol nombre. Justifica totes les afirmacions que utilitzis en el teu raonament.

En esta investigación hemos seguido una metodología cualitativa mayoritariamente descriptiva. Para analizar el nivel de demostración, empleamos los niveles de desarrollo de la demostración de Knuth et al. (2010), discutiendo y acordando la clasificación entre los autores de la comunicación. Además, hemos revisado las producciones de los alumnos generando las categorías inductivamente, buscando una jerarquización en el uso de los ejemplos sin partir de una categorización previa.

Muestra

Los datos que se presentan en este artículo son relativos al estudio realizado con una muestra de 28 alumnos de primero de segundo ciclo de Segona Ensenyança del sistema educativo andorrano, que es equivalente por edad a tercero de ESO, y 41 alumnos de primero de bachillerato. El estudio se realizó durante dos semanas del primer trimestre en los cursos 2022/23 y 2023/24. Los participantes en el estudio no han realizado con anterioridad actividades de demostración en clase en ninguno de los dos niveles educativos en los que se realiza la investigación. Las autoras de la comunicación son las profesoras que realizan la aplicación de las pruebas.

RESULTADOS Y EJEMPLOS

Alumnado de tercero de educación secundaria

La demostración pedida se puede realizar usando el hecho que la suma de dos números con la misma paridad tiene como resultado un número par y que elevar al cuadrado conserva la paridad del número. Todos los participantes de ESO que han utilizado algún razonamiento en su intento de demostración, excepto una, han usado este razonamiento. Aun así, solo dos de los alumnos han afirmado que el cuadrado de un número tiene la misma paridad que el número y ninguno de ellos lo demuestra. Por otro lado, ocho alumnos afirman que la suma de dos números pares o dos impares es par y solo uno de estos alumnos hace una demostración general de este hecho. Cinco alumnos usan una propiedad falsa, afirmando que, si el exponente de una potencia es par, el resultado será par. Esta propiedad falsa genera una contradicción en el razonamiento que no es detectada por los alumnos.

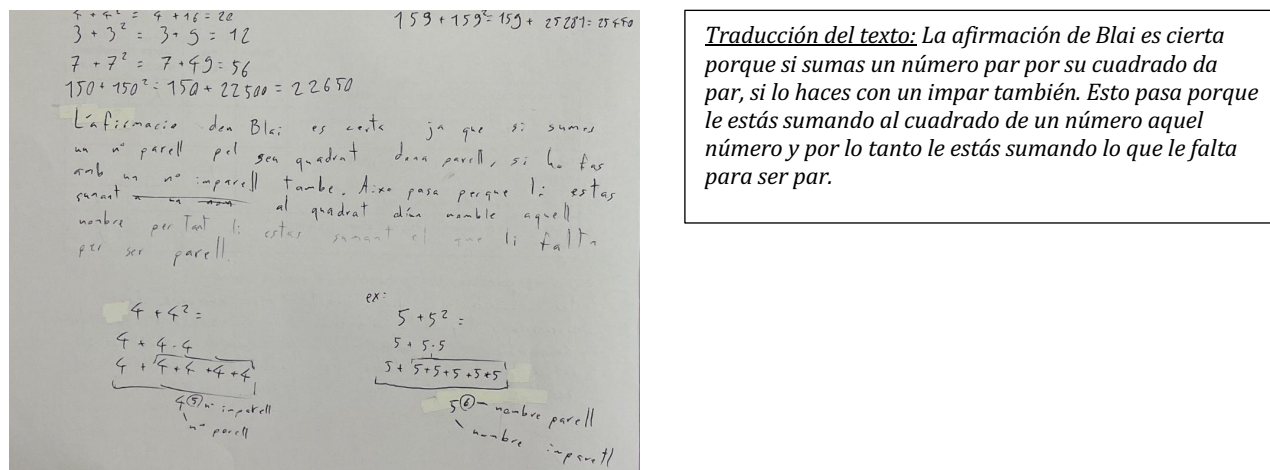
Entre el alumnado de ESO hay cinco alumnos (18%) que dejan la actividad en blanco y seis (21%) que no ofrecen ningún argumento para demostrar la propiedad y se sitúan en el nivel 0 de desarrollo de la demostración. Estos alumnos escriben una justificación tautológica, reescribiendo la propiedad. Además, hay tres alumnos (11%) que utilizan un razonamiento puramente empírico y se sitúan en el nivel 1.a, ya que consideran suficiente testear algunos casos. Estos alumnos consideran que su razonamiento es general, aunque una de ellas afirma no saber cómo razonarlo. Uno de los alumnos acompaña su verificación empírica de una afirmación tautológica. Un cuarto de los alumnos de secundaria intenta producir una demostración general usando propiedades ciertas, pero escriben una demostración incompleta. Ninguno de estos alumnos escribe su intento de demostración siguiendo una cadena deductiva, que parta de un número cualquiera y se deduzca la conclusión a partir de las propiedades generales, por lo que no encontramos alumnos en el nivel 3. En cambio, el alumnado redacta su justificación ofreciendo los motivos por los cuales considera que la propiedad es cierta. En todos estos casos el alumnado combina diferentes niveles de demostración en un mismo intento de redacción de demostración. Por ejemplo, en la producción de la Figura 2 vemos que se inicia la demostración con un testeo, en este caso sistemático (nivel 1.c), y que a continuación se intenta producir una demostración usando una propiedad general para argumentar la validez de la propiedad, aunque esta no se demuestra. Tampoco se menciona ni demuestra que las potencias mantengan la paridad. Por lo tanto, el intento de demostración no es completo, ya que no hay una cadena deductiva de razonamientos y la única propiedad utilizada no se demuestra. En la parte final, se vuelven a usar casos concretos para ejemplificar la propiedad utilizada. En la Figura 3, observamos como inicialmente se testea la propiedad con casos extremos (nivel 1.b) y después intenta producir una demostración general (nivel 2) expresando narrativamente un argumento, aunque este es incompleto y solo tiene sentido en el caso en que el número sea impar. Finalmente, se usan dos ejemplos para buscar una estructura general, aunque esta tampoco es completa y presenta un error de notación. También encontramos alumnos que combinan aspectos del nivel 0 y del 2 en una misma demostración, ya que argumentan de manera general que la suma de dos números de la misma paridad es par pero no consideran necesario justificar la acción de la potencia, escribiendo, por ejemplo, que “el que ha hecho ha sido juntar dos números iguales, uno con una potencia, pero es igual, ya que la suma será siempre par”.

Figura 2. Intento de demostración del participante A313 combinando razonamientos de distinto nivel

Handwritten student work showing calculations and a paragraph of reasoning in Spanish. The calculations are: $1+1^2=1+1=2$, $3+3^2=3+9=12$, $4+4^2=4+16=20$, $7+7^2=7+49=56$, $8+8^2=8+64=72$, $9+9^2=9+81=90$, $10+10^2=10+100=110$. The paragraph says: "Siempre da par porque si sumamos par + par da par y también si sumamos impar + impar dará par. Como algún ejemplo que hay arriba. Si sumamos $3+3^2$ sería que sumáramos $3+9$ y dará 12 porque sumamos impar + impar. Lo mismo si sumamos $8+8^2$ sería que sumamos $8+64$ i donara 72 porque sumamos par + par." There is a correction in the text: "Si sumamos $3+3^2$ sería que sumáramos $3+9$ i donara 12".

Traducción del texto: Siempre da par porque si sumamos par + par da par y también si sumamos impar + impar dará par. Como algún ejemplo que hay arriba. Si sumamos $3+3^2$ sería que sumáramos $3+9$ y dará 12 porque sumamos impar + impar. Lo mismo si sumamos $8+8^2$ sería que sumamos $8+64$ que da 72 porque sumamos par y par.

Figura 3. Intento de demostración del participante A324 combinando razonamientos de distinto nivel



En referencia al uso de ejemplos, 16 de los 23 alumnos (70%) que contestan la actividad usan algún ejemplo que puede aparecer solo o combinado con un razonamiento general. Podemos clasificar estos ejemplos en cuatro grupos distintos, independientemente de la corrección o completitud del resto de razonamientos que aparecen en el intento de demostración. Dos alumnos realizan operaciones para verificar que los ejemplos dados en el enunciado son correctos y explicar el funcionamiento de estas operaciones, sin ofrecer ningún razonamiento sobre la paridad de los resultados. La mayoría de los alumnos (36%) usan ejemplos para verificar la propiedad y cuatro de ellos no acompañan esos ejemplos de ningún razonamiento general. Cuatro alumnos (14%) usan los ejemplos para ejemplificar propiedades que usan en su razonamiento. Es decir, en su intento de demostración emplean propiedades ciertas y generales, pero estas no se demuestran de manera general, sino que se verifican con el testeo de casos concretos. Una alumna usa un ejemplo para detectar una estructura en la operación que permitiría demostrar la propiedad (ver Figura 3). Distinguimos estos ejemplos, que designamos como potencialmente genéricos, de aquellos en que el alumno proporciona directamente el resultado de la operación, puesto que muestran una estructura que podría ser generalizable. En este caso, la alumna muestra en sus dos ejemplos que la operación requerida por la actividad es análoga a multiplicar un número por su siguiente. Sin embargo, la alumna no usa la estructura presentada en la redacción de su argumento y no hay evidencia escrita de generalidad, por lo que no producen un ejemplo genérico que sea demostración.

Alumnado de primero de bachillerato

Entre el alumnado de bachillerato, hay dos alumnos que no responden a la actividad. Encontramos nueve (22%) alumnos que usan un razonamiento puramente empírico, situándose en el nivel 1 de demostración. Estos alumnos acompañan los ejemplos de una afirmación general que repite tautológicamente la propiedad, sin ofrecer ninguna argumentación sobre la validez de esta más allá de la comprobación empírica realizada. Cinco de estos alumnos consideran que su verificación demuestra la propiedad para todos los números.

Un total de nueve alumnos (22%) se sitúan en el nivel 2 de desarrollo, presentando intentos de demostración generales, aunque no del todo completos, y haciendo uso de propiedades generales que no son demostradas. Además, hay 12 alumnos (29%) que combinan razonamientos de nivel 1 y 2 en su intento de demostración. Diez de estos alumnos utilizan afirmaciones generales en su intento de demostración, pero las verifican con casos concretos. Un alumno solo demuestra correctamente parte de la propiedad, usando el lenguaje algebraico, y verifica su expresión algebraica con un ejemplo concreto. El alumno restante utiliza una expresión algebraica para traducir el enunciado, intentando hacer un razonamiento general, pero la manipulación simbólica que realiza no permite producir una demostración algebraica ya que no muestra ninguna propiedad de los números representados. Igual

que el otro alumno, usa un ejemplo para verificar su expresión algebraica. Todos los alumnos que se sitúan en el nivel 2 o en una combinación de nivel 1 y 2, excepto tres, consideran que su razonamiento es general. Finalmente, cinco alumnos (12%) se sitúan en un nivel 3 de demostración, produciendo un argumento general aceptable. Cuatro de estos alumnos realizan una demostración algebraica, aunque en tres de los casos falta formalismo y se producen errores de notación. En estos casos, la demostración cumple la función de verificación, pero no de explicación.

En cuanto al uso de ejemplos, 24 de los 39 (62%) que realizan la actividad usan algún ejemplo en su intento de demostración, que puede aparecer combinado con un razonamiento general expresado narrativamente o en lenguaje algebraico. Podemos clasificar los ejemplos en siete funciones distintas, cuatro de las cuales coinciden con las usadas por el alumnado de secundaria. Un alumno usa un valor concreto para ejemplificar la operación y el resultado que describe en una tautología. La mayoría de los alumnos (22%) usan los ejemplos para verificar la propiedad. Siete de estos nueve alumnos no acompañan los ejemplos de ningún razonamiento. Los dos alumnos restantes intentan producir un razonamiento general sin usar estos ejemplos. Además, hay ocho alumnos (19%) que usan ejemplos para ejemplificar pasos en un proceso general deductivo, es decir, usan los ejemplos para justificar las propiedades generales que emplean en su razonamiento. Otros dos alumnos usan un ejemplo para explicar los motivos por los cuales una propiedad es cierta para cualquier número. Un alumno usa un ejemplo para detectar una estructura en la operación que permitiría demostrar la propiedad, aunque la estructura detectada no es general. Dos alumnos usan ejemplos para ilustrar una expresión algebraica encontrada en un proceso de demostración algebraica (ver Figura 4); es decir, llevan a cabo una demostración algebraica de la propiedad, pero emplean valores concretos para demostrar la validez de la misma. Podemos conjeturar en estos casos que, aunque la demostración algebraica esté completa, no genera suficiente convencimiento en los alumnos, quienes incluyen una verificación numérica. Finalmente, un alumno usa un ejemplo como contraejemplo, aunque evidentemente este no cumple las condiciones del enunciado.

Figura 4. Intento de demostración del participante AB12 que ilustra una expresión algebraica con un ejemplo

Expressió utilitzada per expressar un nombre parell

$$2n + 2n^2 = 2n + 4n^2$$

Si el coeficient dels dos termes és igual a 2 i un nombre parell llavors el nombre ~~serà~~ sempre serà parell.

Un altre exemple aplicant la fórmula anterior

$n = 11$

$$2 \cdot 11 + 4 \cdot 11^2$$

$$22 + 4 \cdot 121$$

$$22 + 484$$

$$\boxed{506}$$

$\frac{21}{11} \quad \frac{921}{121}$

Traducción del texto:

Expresión usada para expresar un numero par.

Si el coeficiente de los dos términos es igual a 2 un número par entonces el numero será par.

Otro ejemplo aplicando la fórmula anterior.

Los alumnos que usan el ejemplo para explicar los motivos por los cuales una propiedad usada es cierta y para descubrir una estructura utilizan representaciones del ejemplo que podrían potencialmente generar un ejemplo genérico, del mismo modo que hemos visto en la producción de una alumna de secundaria en la Figura 3. Sin embargo, los alumnos no explicitan en ninguno de los casos los motivos por los cuales esta estructura es general a cualquier otro ejemplo, de manera que no hay evidencia escrita de generalidad.

Finalizamos la presentación de resultados con una tabla comparativa (Tabla 1) de los porcentajes de alumnos que se sitúan en cada nivel o combinación de niveles de demostración. Se incluyen los alumnos que han dejado la actividad en blanco y aquellos que han respondido sin cumplir las condiciones del enunciado. Como se ha descrito en el marco teórico, el nivel 2 incluye razonamientos generales que no son aceptables por ser incorrectos o incompletos. Los alumnos de secundaria que se sitúan exclusivamente en el nivel 2 presentan razonamientos incorrectos mientras que los de bachillerato ofrecen razonamientos incompletos.

Tabla 3. Porcentajes de alumnos por niveles de demostración en ESO y Bachillerato

	Blanco	Otros	N0	N1				N0-2	N1-2	N2	N3
				1.a	1.b	1.c	1.d				
Alumnos ESO	17,9	3,6	21,4	10,7	3,6	0	7,1	14,3	10,7	10,7	0
Alumnos Bachillerato	4,9	2,4	7,3	17,1	0	4,9	0	0	29,2	22	12,2

DISCUSIÓN Y COMENTARIOS FINALES

El nivel de demostración detectado se correlaciona con la revisión bibliográfica realizada, que señala las dificultades que enfrentan los alumnos de todos los niveles al realizar demostraciones. De acuerdo con la literatura consultada, se esperaría un excesivo respaldo de los ejemplos en las justificaciones (Reid y Knipping, 2010; Stylianides et al., 2017). En el caso del alumnado de secundaria, se ha observado una menor cantidad de justificaciones de nivel uno del previsto. Esta situación podría atribuirse al hecho de que el enunciado de la actividad ya ejemplifica la conjetura dada, lo que podría llevar a los estudiantes a considerar que dichos ejemplos son suficientes para demostrar la propiedad. Como resultado, se observa que muchos alumnos no proporcionan una verificación empírica, pero tampoco presentan un argumento general; este último es tautológico, emplea propiedades falsas o es notablemente incompleto. La proporción de estudiantes que intentan elaborar una demostración general es similar en ambos niveles educativos, y muchos de ellos combinan más de un nivel en la misma demostración, aunque solo encontramos alumnos capaces de redactar una demostración aceptable en bachillerato. La combinación de distintos niveles en un mismo estudiante ya ha sido previamente abordada por investigadores como Ibañez (2001), quien prefiere referirse al esquema de prueba utilizado en un problema determinado más que en el esquema de prueba del alumno.

En relación al empleo de ejemplos, se observa una similitud en el porcentaje de estudiantes entre los dos niveles de nuestro estudio, siendo mayoría los alumnos quienes los emplean. Además, en ambos niveles, la mayoría del alumnado que usa los ejemplos lo hace con el único propósito de verificar la propiedad, seguidos de los alumnos que emplean los ejemplos para ofrecer una justificación empírica a propiedades que usan en su intento de producir una demostración general. Especialmente, la afirmación de que un número mantiene su paridad al ser elevado al cuadrado es respaldada principalmente mediante la verificación empírica en los casos en los que se utiliza y se justifica. Además, son escasos los alumnos de secundaria que la emplean en su intento de demostración, incluso cuando intentan aplicar un razonamiento que la requiere. Por consiguiente, no podemos considerarla como una propiedad conocida en la comunidad de la clase de este nivel, lo que implica que los estudiantes que la utilizan sin justificación generan argumentos que no pueden ser aceptados como demostraciones válidas. Por otro lado, hemos encontrado diferencias significativas en el uso del álgebra en los dos niveles educativos (por motivos de espacio no se incluyen en esta comunicación) pero destacamos los dos alumnos de bachillerato que usan los ejemplos para ilustrar una expresión algebraica usada en una demostración general. Este uso de los ejemplos concuerda con la dificultad descrita por Knuth et al. (2010), que concluyeron que algunos estudiantes no se convencer del poder deductivo para establecer la validez general de una propiedad.

En el conjunto de la muestra, hemos identificado únicamente cuatro estudiantes que emplearon una representación del ejemplo capaz de revelar una estructura en la operación, lo que potencialmente podría generar una demostración genérica. Aunque se percibe evidencia de razonamiento, ninguno de estos alumnos ha incluido en estos ejemplos evidencia de generalidad. Distinguimos entre estos alumnos los que han usado la representación para mostrar los motivos por los que una propiedad es cierta y los alumnos que han usado la representación para encontrar una estructura generalizable. Estos últimos alumnos han realizado únicamente uno y dos ejemplos respectivamente, lo que no les ha permitido inferir los motivos por los cuales la propiedad es cierta. Los resultados obtenidos en

nuestra investigación difieren de los presentados por Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019), quienes observaron una incidencia más alta de estudiantes capaces de generar ejemplos genéricos productivos para la demostración. Sin embargo, es importante señalar que su estudio se llevó a cabo mediante entrevistas individuales, a diferencia de nuestra investigación. Sus resultados respaldan el uso de ejemplos genéricos en la demostración y en el aprendizaje de cómo demostrar y, al mismo tiempo, destacan las diferencias en la competencia de los estudiantes para comprender la idea general de una demostración a través de tales ejemplos genéricos. Siguiendo su recomendación de promover prácticas que usen los ejemplos genéricos, aplicamos una secuencia de actividades de aprendizaje y esperamos que el análisis de los resultados de la prueba final muestre una mejoría en el uso de los ejemplos genéricos y en su productividad para demostrar.

Referencias

- Aricha-Metzer, I. y Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 304–322. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002>
- Cerqueda Santacreu, G., (2024). Los ejemplos genéricos para trabajar la demostración en secundaria. *Revista SUMA*, 106, 31–40.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in College Mathematics Education III* (pp. 234–283). AMS.
- Ibañez, I. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Actas del V simposio de la SEIEM* (pp. 9–26). SEIEM.
- Karunakaran, S., Freeburn, B., Konuk, N. y Arbaugh, F. (2014). Improving Preservice Secondary Mathematics Teachers' Capability With Generic Example Proofs. *Mathematics Teacher Educator*, 2(2), 158–170. <https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.2.2.0158>
- Knuth, E. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61–88. <https://doi.org/10.1023/A:1013838713648>
- Knuth, E., Choppin, J. M. y Bieda, K. N. (2010). Middle school students' production of mathematical justifications. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 153–170). Routledge.
- Knuth, E. y Na, G. (2020). A comparative study of example use in the proving-related activities of korean and american students. *The 14th International Congress on Mathematical Education*.
- Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 277–289. <https://doi.org/10.1007/BF00312078>
- Reid, D. A. y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Brill. <https://doi.org/10.1163/9789460912467>
- Reid, D. A. y Vallejo Vargas, E. (2018). When is a generic argument a proof? En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 239–251). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_17
- Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - Volume 4*, 65–72.
- Stylianides, A. J. (2007). The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1–20. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237–266). NCTM.