

CONEXIONES Y RAZONABILIDAD EN EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO

Connections and reasonableness in the development of number sense

De Gamboa, G.^a, Caviedes, S.^b y Badillo, E.^a

^aUniversitat Autònoma de Barcelona, ^bUniversidad de los Lagos

Resumen

En este estudio analizamos la relación entre los diferentes tipos de conexiones matemáticas que se establecen en un aula y la movilización de la componente de razonabilidad del sentido numérico. Se analizan ocho sesiones de clase de un grupo de 1º de ESO que estudia los números decimales. Los resultados muestran que la componente razonabilidad se vincula con el establecimiento de conexiones que enfatizan procedimientos y que incluyen el desarrollo de argumentaciones vinculadas con el uso de tales procedimientos o de propiedades.

Palabras clave: conexiones, sentido numérico, razonabilidad.

Abstract

In this study we analyse the relationship between the different types of mathematical connections that are established in a classroom and the mobilization of the reasonableness component of number sense. Eight class sessions of a 1st year of ESO group that studies decimal numbers are analysed. The results show that the reasonableness component is linked to the establishment of connections that emphasize procedures and that include the development of argumentations linked to the use of such procedures or properties.

Keywords: connections, number sense, reasonableness.

INTRODUCCIÓN

La noción de conexión en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha utilizado en diversos ámbitos, con significados implícitos que, aunque varían, convergen en la idea de conexión como relación entre dos objetos. En los últimos años, esta noción ha sido caracterizada por diversos autores, y se han propuesto diversas clasificaciones p.e. Businskas, 2008; Eli et al, 2011; Hatisaru, 2023; Rodríguez-Nieto et al., 2023; De Gamboa et al., 2023. Aunque estas clasificaciones se han centrado en actividades relacionadas con diversos contenidos matemáticos, el papel de las conexiones en el desarrollo del sentido numérico puede ser relevante (De Gamboa et al., 2023). En particular, las conexiones pueden jugar un papel significativo en la aplicación del sentido numérico con números decimales a otros conjuntos numéricos como son los decimales o los enteros.

Por otro lado, las caracterizaciones del sentido numérico incorporan de manera implícita la noción de conexión matemática. Esto se debe a que el sentido numérico abarca la relación entre los números y sus magnitudes (p.e. Ghazali et al., 2021; Nickerson y Whitacre, 2010), la vinculación entre números, operaciones y puntos de referencia o benchmarks (p.e. McIntosh et al., 1992; Yang et al., 2004), así como el desarrollo de estrategias flexibles de cálculo (p.e. Yang et al., 2004). En este estudio denominamos a esta parte del sentido numérico (vinculada con el desarrollo de estrategias flexibles) como "razonabilidad", siguiendo las descripciones previas.

En consecuencia, proponemos un estudio que utiliza las conceptualizaciones recientes de las conexiones matemáticas (Rodríguez-Nieto et al., 2023; De Gamboa et al., 2023) para identificar cómo diferentes tipos de conexiones pueden influir en el desarrollo de la componente razonabilidad en el

contexto del trabajo con números decimales en un aula de 1º de ESO (12-13 años). Así, formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué tipos de conexiones matemáticas se relacionan con la componente de razonabilidad del sentido numérico?

CONEXIONES MATEMÁTICAS

La noción de conexión matemática se ha venido conceptualizando por diversos autores a lo largo de los últimos años (p.e. Businskas, 2008; Eli et al, 2011; Hatisaru, 2023; Rodríguez-Nieto et al, 2023; De Gamboa et al., 2023). Entendemos una conexión matemática como una relación entre dos objetos matemáticos (Font et al., 2013), que pueden ser problemas, definiciones, representaciones, procedimientos, propiedades o argumentos. En un contexto de aula, estas conexiones pueden emerger a través de intervenciones discursivas tanto de los alumnos como de la profesora, las cuales incorporan nuevos objetos a la discusión, generando nuevas conexiones (De Gamboa et al., 2023). En consecuencia, en muchos casos las conexiones se establecen como resultado de coordinar otras conexiones. Las conexiones que no se descomponen en otras, se llaman conexiones elementales. Por ejemplo (tal y como se observa en el apartado de análisis, conexión C12), se puede producir una conexión entre las representaciones 12,5 y 12,50 formada por dos conexiones elementales, una definida por una intervención discursiva que afirma que las dos representaciones son representaciones equivalentes del mismo número, y otra que afirma que, dado que son equivalentes, se puede cambiar de una a la otra como estrategia para resolver una operación. En consecuencia, las conexiones se pueden caracterizar en dos niveles diferentes de concreción que llamamos global y específico. En el nivel global se caracteriza qué conecta la conexión (problemas de otras disciplinas, procesos, conceptos), en qué contexto se produce dicha conexión y con qué finalidad se produce. En el presente estudio, y por motivos de espacio, nos centramos en las conexiones que de forma global se pueden clasificar como conexiones intramatemáticas conceptuales de tratamiento (IMCT), que son conexiones que no vinculan las matemáticas con situaciones de otras disciplinas, están centradas en conceptos matemáticos y en las que no se producen cambios de registro semiótico (Duval, 2006). Estas conexiones IMCT se dividen en cuatro subtipos, dependiendo de qué se enfatiza en el contexto en el que se producen: representaciones, definiciones, procedimientos o propiedades.

Desde una perspectiva específica, se caracterizan los elementos específicos que se conectan (problemas, definiciones, representaciones, procedimientos o proposiciones) y cómo se produce dicha conexión. Esta clasificación recoge los resultados de otros estudios y describe cuatro grupos de conexiones elementales: las conexiones representacionales entre dos representaciones de un objeto (Businskas, 2008; Rodríguez-Nieto et al, 2023; De Gamboa et al., 2023); las conexiones de rasgo común entre dos objetos matemáticos por compartir un rasgo común, por ejemplo las operaciones $11 - 3 \cdot (2 - 3)$ y $11,84 - 3,2 \cdot (2,3 - 3,7)$ (Eli et al., 2011, De Gamboa et al., 2023); las conexiones procedimentales que relacionan un procedimiento con un problema, concepto o con otro procedimiento (Businskas, 2008; Rodríguez-Nieto et al, 2023); y las conexiones argumentales que conectan dos proposiciones, P1 que actúa premisa y P2 que actúa de conclusión (Businskas, 2008; De Gamboa et al., 2023), y que incluyen razonamientos de tipo inductivo, justificaciones, generalizaciones o particularizaciones. En el apartado de metodología se muestra un ejemplo de cómo se utilizan de manera complementaria estas dos clasificaciones. Es importante señalar que, aunque en los niveles global y específico se usen términos similares, éstos no están correlacionados. En el ejemplo previamente mencionado (conexión entre las representaciones 12,5 y 12,50) se identificó una conexión IMCT con énfasis en procedimientos (cambio estratégico de representación) formada por dos conexiones elementales, una de tipo representacional y otra de tipo argumental.

SENTIDO NUMÉRICO Y RAZONABILIDAD

La noción de sentido numérico ha sido objeto de la atención de numerosos investigadores en educación matemática a lo largo de las últimas décadas (Adamuz-Povedano, 2023). En las definiciones propuestas por diversos autores se puede observar un consenso al describir el sentido

numérico incluyendo tres componentes: los números y su magnitud, las operaciones y el uso estratégico de los números y las operaciones para la resolución de un problema o actividad (McIntosh et al, 1992; Sowder, 1992; Yang y Li, 2004). En la revisión sistemática de la definición de sentido numérico realizada por Ghazali et al. (2021) se identifican cinco temas emergentes en la literatura sobre sentido numérico: la composición de números, la identificación de números, la magnitud de los números, las operaciones aritméticas, y la realización de juicios y la toma de decisiones (Make Judgement). Mientras que los cuatro primeros temas están caracterizados por descriptores de habilidades, el quinto tema incorpora de manera implícita elementos de toma de decisiones estratégicas para la resolución de un problema o una actividad. En este estudio nos centramos en el uso estratégico (Yang et al, 2004) de los números y las operaciones para la resolución de una situación problemática, lo que Ghazali et al. (2021) denominan Make Judgement.

En particular, denominamos a esta componente razonabilidad, partiendo de la descripción de Ghazali et al. (2021), pero ampliando el sentido de ésta a lo que McIntosh et al. (1992) describen como comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; ser consciente de que existen múltiples estrategias (cálculo mental, escrito, estimación...) y escoger la más adecuada; utilizar una representación y/o un método eficiente; y revisar los datos y los resultados. El uso de términos como necesaria, adecuada, eficiente o revisión conllevan de manera implícita una finalidad en el uso de los números y las operaciones, y por lo tanto la necesidad de desarrollar estrategias flexibles para el uso de los números y las operaciones en los diferentes contextos en los que deben ser utilizados en el sentido de Heinze et al. (2009). En particular, entendemos la razonabilidad como tomar decisiones estratégicas flexibles (Yang et al, 2004) sobre la exactitud y pertinencia de un cálculo, una representación, un procedimiento o una propiedad, para abordar problemas numéricos.

METODOLOGÍA

El presente estudio se enmarca en un paradigma cualitativo e interpretativo. Se analizan 8 sesiones de clase de una hora de duración, en las que se trabajan los números decimales y las operaciones con ellos, en una clase de 1º de ESO (12-13 años) en un centro público de una ciudad española. El grupo clase estaba compuesto por 23 alumnos (13 alumnos y 10 alumnas). La profesora era licenciada en matemáticas y, en el momento de la investigación, contaba con más de cinco años de experiencia como profesora de educación secundaria. Se propone un estudio de caso, que es la emergencia de conexiones matemáticas en el aula. Dadas las características del grupo clase, consideramos que se trata de un caso de tipo común en el sentido de Yin (2014), por lo que la validez externa de los resultados se fundamenta en las características que las sesiones de clase analizadas pueden compartir con muchas otras clases de matemáticas sobre números decimales. Las sesiones de clase son grabadas en video realizando una observación no participante (Cohen et al., 2000).

El análisis se centra en las interacciones entre los alumnos y la profesora en el contexto de discusiones de todo el grupo clase sobre las actividades que propone la profesora. En primer lugar, se analizan los videos grabados para identificar las conexiones matemáticas que se producen, describiendo cómo se produce la conexión entre los dos objetos matemáticos. Una vez descritas las conexiones se procede a identificar todas las intervenciones (de la profesora y de los estudiantes) que aportan significado a la conexión. Una vez identificadas las intervenciones se procede a la transcripción literal de las intervenciones.

El análisis de las conexiones matemáticas identificadas y transcritas que se muestra en esta comunicación se realizó en cuatro etapas, que se describen en la Tabla 1:

Tabla 1: Etapas del análisis

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4
Se realiza un análisis global de las conexiones identificadas	Se realiza un análisis específico de las conexiones identificadas	Se analiza la relación entre cada conexión y el sentido numérico	Se analiza la relación entre los tipos de conexiones y la componente razonabilidad

A continuación, se muestra el análisis correspondiente a las dos primeras etapas (análisis global y análisis específico) para la conexión C12, cuya transcripción es:

La profesora corrige en la pizarra la operación 16,25-12,5. Para ello escribe en columna, siguiendo la colocación propia del algoritmo estándar:

$$\begin{array}{r} 16,25 \\ - 12,50 \\ \hline \end{array}$$

PROFESORA: He escrito doce coma cincuenta. Fijémonos que el enunciado no dice doce coma cincuenta, el enunciado dice, ¿cómo dice el enunciado?

ALUMNA: Doce coma cinco

PROFESORA: y cuando leo este número, ¿cómo lo leo? [mostrando lo que ha escrito en la pizarra pero tapando el 0 de 12,50]

ALUMNA: Doce unidades y cinco décimas

PROFESORA: ¿Y ahora cómo lees este número? [mostrando el 12,50 entero]

ALUMNA: Doce unidades y cincuenta centésimas

PROFESORA: Entonces en este momento ya están expresados en el mismo idioma y podemos operar.

En este episodio se conectan dos representaciones verbales equivalentes del mismo número (doce coma cinco y doce coma cincuenta), en el contexto de una resta con decimales y con el objetivo de validar el procedimiento a seguir, utilizando el algoritmo estándar. Por lo tanto, se trata de una conexión intramatemática conceptual de tratamiento (IMCT) con énfasis en procedimientos. Desde el punto de vista del análisis específico, se pueden observar dos conexiones elementales. La primera conexión elemental es una conexión de representación equivalente entre 12,5 y 12,50. A continuación se identifica una conexión elemental argumental entre dos proposiciones. La primera proposición es que el número 12,5 se puede leer como doce unidades y cinco décimas, o como doce unidades y cincuenta centésimas. La segunda proposición es que expresar los números decimales en el mismo idioma permite restarlos mediante el uso del algoritmo estándar. Así, se puede observar que, aunque la conexión global hace énfasis en un procedimiento, el análisis específico introduce una conexión elemental argumental. Esta dualidad en el análisis se discute de manera más detallada en la sección final del documento.

RESULTADOS

Se identificaron 37 conexiones matemáticas, de las cuales 28 fueron conexiones intramatemáticas conceptuales de tratamiento. De estas últimas, 13 estaban relacionadas con la componente razonabilidad. La Tabla 2 presenta la codificación de cada conexión, su descripción, en la que se justifica su relación con la razonabilidad, y su clasificación resultante del análisis global.

Tabla 2: Clasificación de las conexiones relacionadas con el componente razonabilidad según el análisis global

Código	Descriptor	Análisis global
C2	Se conecta la situación del partido de fútbol con la noción de muestra estadística. Se produce una conexión entre la situación analizada y la noción de muestra en un estudio estadístico para valorar el procedimiento a utilizar. Se valora la adecuación de los procedimientos para el propósito que se persigue.	IMCT- Procedimiento.
C12	Se argumenta que hay que expresar los números con la misma exactitud: centésimas. Se conectan dos formas de leer un número con el objetivo de decidir qué procedimiento utilizar.	IMCT- Procedimiento
C14	Se conectan las representaciones de 2,286 y 0,5, para decidir cuál es mayor.	IMCT- Representación
C17	Un alumno se confunde y relaciona una suma con el procedimiento de redondeo. Se discute la razonabilidad de la aplicación del redondeo.	IMCT- Procedimiento

C19	Un alumno propone no escribir todos los ceros al multiplicar decimales acabados en ceros. Se conectan dos formas de aproximarse al algoritmo estándar valorando la economía en la escritura.	IMCT- Procedimiento
C20	La profesora utiliza un ejemplo sin decimales $11 - 3 \cdot (2 - 3)$ para mostrar el orden de las operaciones para $11,84 - 3,2 \cdot (2,4 - 3,7)$. Se conectan dos operaciones que comparten estructura para decidir qué procedimiento utilizar.	IMCT- Procedimiento
C21	Se enfatiza en el caso $2,4 - 3,7$ a partir de recordar la operación $2 - 3$. Se conectan dos operaciones que comparten estructura para decidir qué procedimiento utilizar. Además, se relacionan $2,4 - 3,7$ con $3,7 - 2,4$, para decidir el signo del resultado.	IMCT- Procedimiento
C27	A partir de un problema en que se dividen 35 metros de manera equivalente por seis árboles, se relacionan las operaciones $35:6$ y $36:7$ con relación al significado del problema para decidir qué operación utilizar.	IMCT- Procedimiento
C28	Se conectan las operaciones $35:7$ con $34:7$. Se justifica la estimación del resultado para $34:7$ como menor a 5 argumentando que si disminuye el dividendo y el divisor no varía, disminuye el cociente.	IMCT- Propiedad
C29	Se conecta la noción decimal periódico y decimal infinito no periódico a partir de la operación $34:7$. Se valora la razonabilidad de que el resultado no sea periódico	IMCT- Propiedad
C33	Se justifica que al dividir entre diez se mueve la coma hacia la izquierda, ya que el resultado es más pequeño.	IMCT- Propiedad
C34	Se conectan operaciones en las que dividendo y divisor se han multiplicado por el mismo número justificando que, al multiplicar el dividendo y el divisor en una división, el cociente no varía, emergiendo un procedimiento para la división de decimales.	IMCT- Propiedad
C37	Se conectan los cuadrados de números positivos mayores y menores que 1. Se justifica la razonabilidad de obtener un resultado menor al elevar al cuadrado.	IMCT- Propiedad

El análisis específico de las conexiones anteriores permitió identificar y describir de manera detallada las conexiones elementales que definieron las conexiones de la Tabla 2. La Tabla 3 muestra los resultados de los análisis global y específico para cada conexión. Hay conexiones que aparecen en más de una fila de una misma columna, ya que están formadas por conexiones elementales de distinto tipo, como es el caso de C12, cuyo análisis se detalló en el apartado anterior.

Tabla 3: Clasificación de las conexiones siguiendo los dos niveles de análisis

Subtipo de conexión intramatemática con tratamiento				
		Representación	Procedimiento	Propiedad
Tipos de conexiones elementales que aparecen (análisis específico)	Rp*	C14	C12	
	Rc*		C17, C20, C21, C27	
	Pl*		C19, C27	
	Ag*		C2, C12, C20, C28, C29, C33, C34, C37 C21	

Rp: representacional; Rc: Rasgo común; Procedimental; Ag: Argumental

La Tabla 3 muestra un protagonismo de las conexiones IMCT con énfasis en los procedimientos, así como de las conexiones elementales de tipo argumental. Las conexiones IMCT con énfasis en procedimientos observadas fueron potencialmente útiles para validar procedimientos (C2, C12, C20, C21), y para validar la adecuación de un procedimiento en comparación a otros (C17, C27). En el caso de las conexiones elementales argumentales se dieron a partir de dos situaciones. Por un lado, cuando la conexión argumental se produjo en una conexión IMCT con énfasis en propiedades, la proposición P1 de la conexión elemental argumental fue la formulación de una propiedad conocida o trabajada anteriormente (p.e. en C33 la P1 es que dividir entre 10 es hacer más pequeño lo que se divide), o la identificación de un patrón (p.e. en C29 un alumno observa el patrón de restos de la división y formula que es posible que el patrón cambie). Por otro lado, cuando la conexión elemental

argumental se produjo en una conexión con énfasis en procedimientos, la proposición P1 se construyó a partir de otra conexión previa (p.e. en C12 se observa que el número 12,5 se puede leer como doce unidades y cinco décimas, o como doce unidades y cincuenta centésimas a partir de una conexión anterior entre las dos representaciones verbales). Para profundizar en la relación entre ambos niveles de análisis (global y específico) en el caso de IMCT con énfasis en procedimientos y conexiones elementales argumentales, a continuación, mostramos con más detalle el análisis de las conexiones IMCT con énfasis en procedimientos que incluyen conexiones elementales de tipo argumental: C2, C12, C20 y C21.

La conexión C12 se analizó a modo de ejemplo en la metodología. En el caso de la conexión C20, en el contexto de la corrección de la resolución de la operación $11,84 - 3,2 \cdot (2,4 - 3,7)$, varios alumnos muestran su desacuerdo en relación al orden de las operaciones y al signo de la resta dentro del paréntesis. Como respuesta a las dudas de los estudiantes la profesora les propone una operación similar:

PROFESORA: Eh, voy a ponerlos al siguiente ejercicio. No es un ejercicio del libro, pero si yo les pusiera este ejercicio que se llama $11 - 3 \cdot 2$ [lo escribe y lo dice en voz alta] menos... oye ahh vamos a ponerle este número ¿qué les parece si le pongo un 3 en lugar de un 3,7? ¿Qué hacen ustedes? $[11 - 3 \cdot (2 - 3)]$

ALUMNOS: Paréntesis

PROFESORA: paréntesis, genial. Lo que te está pasando, lo que te están diciendo, pero aquí es que tenías que dejarlo todo igual y solo sustituir el paréntesis, algo que decía Tomás. Vale, entonces paréntesis ¿qué les sale? [de $(2 - 3)$]

Se produce una conexión entre dos operaciones combinadas que coinciden en las operaciones que hay que realizar y en el orden en el que hay que realizarlas. La segunda operación propuesta es una versión simplificada de la primera, ya que se eliminan los decimales para poner el foco en las operaciones, por lo que se trata de una conexión IMCT que enfatiza procedimientos. En este fragmento, se identifica una conexión elemental entre las dos operaciones, $11,84 - 3,2 \cdot (2,4 - 3,7)$, y $11 - 3 \cdot (2 - 3)$, basadas en el rasgo común de compartir las operaciones y la aplicación de las reglas de prioridad de operaciones. Esta conexión da paso a otra conexión elemental de argumentación entre dos proposiciones. La primera proposición P1 es: las dos operaciones combinadas anteriores -una en números racionales no enteros y la otra en números enteros- coinciden en las operaciones que aparecen y en el orden en que deben ser resueltas. La proposición P2 es: si en la operación en enteros se resuelve el paréntesis y se sustituye, entonces en la operación en racionales no enteros también hay que calcular el paréntesis y sustituirlo.

En el caso de la conexión C2 se conecta la situación de un partido de fútbol con los procedimientos numéricos que se utilizan (cálculo de razones y su expresión decimal) y se dan argumentos sobre la validez de los resultados obtenidos para el partido de fútbol analizado. Además, se señala la falta de validez estos resultados para realizar predicciones sobre los resultados de los mismos equipos en otros partidos, lo que constituye una conexión elemental argumental. En la conexión C21, que sigue a la conexión C20 analizada más arriba, se conectan las operaciones $2,4 - 3,7$ y $3,7 - 2,4$ a partir de un procedimiento propuesto por un alumno. La respuesta de la profesora permite el establecimiento de una conexión elemental argumental que concluye que el procedimiento propuesto por el alumno $(3,7 - 2,4)$ es una buena estrategia siempre que se tenga en cuenta el signo del resultado.

CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados de la tercera columna de la Tabla 2, junto con la lectura vertical de la Tabla 3 muestra el protagonismo de las conexiones intramatemáticas conceptuales de tratamiento (IMCT) con énfasis en procedimientos. Sin embargo, el análisis horizontal de la Tabla 3 muestra que las conexiones elementales que más se identificaron fueron las de tipo argumental. El análisis más detallado de las

cuatro conexiones que se encuentran en la intersección señala que, en las conexiones que se relacionan con el componente razonabilidad del sentido numérico, existe un énfasis en los procedimientos al considerar el análisis global (qué se conecta y para qué). Sin embargo, al examinar las conexiones elementales (cómo se formulan las relaciones que permiten establecer la conexión), se observan conexiones de tipo argumental en varios casos. En particular se observa que, en este caso, la proposición P1 que desencadena la conexión elemental argumental emerge de otra conexión elemental anterior de tipo representacional, de rasgo común, o procedimental. Esto subraya la relevancia de abordar ambos análisis para una comprensión más profunda del papel de las conexiones en el desarrollo del sentido numérico. En este sentido, es fundamental explorar cómo se puede desarrollar un conocimiento estratégico (Fariña y Bruno, 2021; Heinze et al., 2009; Yang et al., 2004), el cual podría forjarse, al menos en parte, mediante la formulación de proposiciones basadas en conexiones representacionales, de rasgo común y procedimentales. Así, las conexiones que se relacionan con la componente razonabilidad implican la argumentación de procedimientos y propiedades, que implican la construcción más o menos explícita de proposiciones y el establecimiento de conexiones que las relacionen para el desarrollo de estrategias de cálculo. En este sentido, el análisis de las conexiones que aparecen cuando se desarrolla el sentido numérico puede resultar una herramienta útil para comprender mejor cómo se desarrolla el sentido numérico en el aula y para el diseño de propuestas metodológicas o programas formativos con el objetivo de promover el desarrollo del SN (Adamuz-Povedano, 2023). Para profundizar en la relación entre las conexiones matemáticas y la componente razonabilidad es crucial explorar otros contextos educativos, como el estudio de los números naturales en educación primaria o la introducción de los números enteros en educación secundaria.

Referencias

- Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11–25). SEIEM.
- Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Dissertation [Doctoral dissertation, Simon Fraser University].
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. London: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203224342>
- De Gamboa, G., Badillo, E. y Font, V. (2023). Meaning and Structure of Mathematical Connections in the Classroom. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 23(2), 241-261. <https://doi.org/10.1007/s42330-023-00281-2>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. y Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middlegrades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 23(3), 297–319. <https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0>
- Fariña, M. y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261 – 268). Valencia: SEIEM.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Ghazali, M., Mohamed, R. y Mustafa, Z. (2021). A Systematic Review on the Definition of Children's Number Sense in the Primary School Years. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(6), 1-12. <https://doi.org/10.29333/ejmste/10871>

- Hatisaru, V. (2023) Mathematical connections established in the teaching of functions. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 42 (3) 207–227. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrac013>
- Heinze, A., Star, J. R. y Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM*, 41, 535-540. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4>
- McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-44.
- Nickerson, S. D. y Whitacre, I. (2010). A local instruction theory for the development of number sense. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(3), 227-252. <https://doi.org/10.1080/10986061003689618>
- Rodríguez-Nieto, C.A., Rodríguez-Vásquez, F.M. y Font, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f' . *Educational Studies in Mathematics*, 114, 63–88. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10246-9>
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouw (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). MacMillan Publishing Company.
- Yang, D. C., Hsu, C. J. y Huang, M. C. (2004) A Study of Teaching and Learning Number Sense for Sixth Grade Students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education* (2), 407–430 <https://doi.org/10.1007/s10763-004-6486-9>
- Yin, R. (2014). *Case Study Research: Design and Methods*. Sage.