

INTRODUCCIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES Y JAPONESES. UN ESTUDIO COMPARATIVO PRELIMINAR ORIENTADO A LA FORMACIÓN DE MAESTROS³

Introduction of multiplication in Spanish and Japanese textbooks. A preliminary comparative study aimed at teacher education

García, F.J.^a, Sierra, T.A.^b y Gascón, J.^c

^a Universidad de Jaén, ^b Universidad Complutense de Madrid, ^c Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

El análisis de libros de texto puede ser una herramienta poderosa en la formación inicial de docentes. Sin embargo, todo análisis implica la adopción de herramientas teóricas concretas, así como de un punto de vista explícito. Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, proponemos integrar este análisis dentro de la perspectiva más amplia de la caracterización de los paradigmas didácticos vigentes en una institución escolar, y desde la perspectiva de un paradigma didáctico de referencia construido por el investigador. En el contexto de la introducción de la multiplicación en la Educación Primaria, proponemos un posible paradigma de referencia, con el que iniciamos un análisis de libros de texto españoles y japoneses. Este análisis permite entrever la existencia de dos paradigmas vigentes sustentados en modelos epistemológicos diferentes, y persiguiendo fines educativos distintos, cuyo estudio y análisis comparativo podría enriquecer la formación de los futuros docentes.

Palabras clave: *formación inicial de profesorado, multiplicación, libros de texto, paradigmas didácticos.*

Abstract

Textbook analysis can be a powerful tool in initial teacher education. However, any analysis involves the adoption of concrete theoretical tools as well as an explicit point of view. From the Anthropological Theory of the Didactic, we propose to insert this analysis within the broader perspective of the characterization of the current didactic paradigms in a school institution, and from the perspective of a reference didactic paradigm constructed by the researcher. In the context of the introduction of multiplication in primary education, we propose a possible reference paradigm, with which we begin an analysis of Spanish and Japanese textbooks. This analysis allows us to foresee the existence of two current paradigms based on different epistemological models and pursuing different didactic ends, whose study and comparative analysis could enrich the education of future teachers.

Keywords: *initial teacher education, multiplication, textbooks, didactic paradigms.*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre libros de texto y otros materiales curriculares es un ámbito de interés creciente en la investigación en educación matemática (Fan, 2013; Rezat et al., 2021), bien sea como objeto de análisis en sí mismos, bien desde la perspectiva de cómo estos afectan a otros aspectos de las prácticas docentes. Marco-Buzunáriz et al. (2016), en una revisión de comunicaciones en los simposios de la SEIEM, observan que la mayoría de las investigaciones en este campo son de tipo empírico, predominando las primeras (objeto de análisis) en detrimento de las segundas (uso y/o impacto). Desde una visión complementaria de ambas facetas, abordamos un posible análisis de libros de texto

³ Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto PID2021-126717NB-C32, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación

con vistas a su posterior explotación en la formación de docentes, desde una perspectiva ampliada de los libros de texto y materiales curriculares como instrumentos de cambio (Rezat et al., 2021).

Un caso particularmente relevante de este uso de materiales curriculares se da en el estudio japonés de clases. En el mismo, tras identificar un tema de investigación, los docentes se embarcan en un estudio profundo (kenkyuu) de materiales curriculares (kyouzai), que ofrece la oportunidad de comprender los contenidos de los libros de texto y desarrollar sus conocimientos didácticos y matemáticos (Shinno y Mizoguchi, 2021). Esta fase de indagación, crucial en el estudio de clases en Japón, es a menudo desatendida cuando el estudio de clases se realiza en otros países (Doig et al., 2011), y se apoya en unos libros de texto de cuidado diseño. Por ello, consideramos que el análisis y la comparación de libros de texto japoneses y españoles puede ofrecer una perspectiva privilegiada.

Postulamos que cualquier uso de un material curricular en la formación de docentes debe ir precedido de un análisis del mismo, desde cierta perspectiva y con ciertas herramientas teóricas. Por ello, el problema de investigación concreto que abordaremos en esta comunicación, dentro del contexto anteriormente esbozado, es el de la caracterización de los paradigmas didácticos vigentes en las instituciones escolares (Gascón y Nicolás, 2021), tomando como base empírica ciertos libros de texto. En particular, nos centraremos en la multiplicación de números naturales en libros de texto españoles y japoneses de la institución Educación Primaria (EP), abordando las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo se introduce la multiplicación de números naturales en libros de texto de España y de Japón?
- ¿Qué diferencias existen entre los paradigmas didácticos subyacentes en uno y otro caso?

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Consideremos una institución escolar I y un ámbito $\mathcal{Q}$ más o menos delimitado de la matemática a enseñar en I . Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se propone la noción de *paradigma didáctico vigente* en I relativo a $\mathcal{Q}$, $PDV_I(\mathcal{Q})$, como una forma de representar la manera más o menos explícita en la que los sujetos de la institución I interpretan la educación matemática en torno a $\mathcal{Q}$ (Gascón y Nicolás, 2021). Un paradigma didáctico se interpreta como una unidad funcional, compuesta de cuatro componentes: (1) un modelo epistemológico relativo al ámbito $\mathcal{Q}$, (2) los fines didácticos que la institución I asume respecto al aprendizaje de $\mathcal{Q}$, (3) los medios didácticos que la institución I considera adecuados para alcanzar dichos fines, y (4) los fenómenos didácticos que el modelo epistemológico saca a la luz y a los que el paradigma, globalmente considerado, responde.

Para el análisis didáctico del $PDV_I(\mathcal{Q})$, en la TAD se asume la hipótesis fundamental de que el investigador debe adoptar un “punto de vista” explícito, a modo de referencia. Este se concreta en la noción de *paradigma didáctico de referencia*, que amplía la de modelo epistemológico de referencia como instrumento fundamental de emancipación de la didáctica (Gascón, 2014). De forma análoga, estaría compuesto por un modelo epistemológico de referencia de $\mathcal{Q}$ en I , construido de forma explícita a modo de forma alternativa de interpretar el estudio de dicho ámbito en I , junto con los fines didácticos y los medios didácticos de referencia que este paradigma propugne, y los fenómenos didácticos de referencia respecto al estudio de $\mathcal{Q}$ en I que este paradigma permite visibilizar y ante los que surge como una repuesta alternativa (Gascón y Nicolás, 2021). Un paradigma didáctico de referencia $PDR_I(\mathcal{Q})$ se interpreta como una hipótesis científica, a modo de forma alternativa de entender el estudio de $\mathcal{Q}$ en I respecto al $PDV_I(\mathcal{Q})$. Y ayudará al didacta a evidenciar fenómenos didácticos asociados a la modalidad de estudio de $\mathcal{Q}$ vigente en I y a conjeturar que un proceso de estudio de $\mathcal{Q}$ en I regido por el $PDR_I(\mathcal{Q})$ permitiría soslayar tales fenómenos (Gascón y Nicolás, 2021).

Para el análisis del $PDV_I(\mathcal{Q})$, el didacta toma en consideración diversas fuentes, que analiza desde la perspectiva explicitada en el $PDR_I(\mathcal{Q})$ que asuma. En la medida en que todo libro de texto, como medio didáctico, puede ser interpretado como mediador entre un saber a enseñar y un saber enseñado

(Rezat et al., 2021), se puede interpretar que un libro de texto propone una modalidad de estudio de $\mathcal{Q}$ en I y, en consecuencia, ofrece una puerta de entrada privilegiada para el análisis del $\text{PDR}_I(\mathcal{Q})$.

En el tipo de análisis que iniciamos aquí, consideramos variables ligadas a los cuatro componentes de la noción de paradigma didáctico. Análisis más finos, que se llevarán a cabo en el futuro, implicarían la ampliación y concreción del conjunto de variables desde la perspectiva de la TAD, para analizar en detalle el proceso de estudio que el libro propone. Entre otras, variables como el tipo de tareas, técnicas y tecnologías matemáticas; tipo de tareas, técnicas y tecnologías didácticas; momentos de estudio; dialécticas de un proceso de estudio; etc. De hecho, algunas de estas, como los tipos de tareas, las técnicas o las tecnologías matemáticas, también serán usadas a continuación.

ELEMENTOS DE UN PARADIGMA DIDÁCTICO DE REFERENCIA DE LA MULTIPLICACIÓN EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Esbozamos aquí algunos rasgos fundamentales de un posible PDR que incluya a la multiplicación de números naturales en la institución EP. Por la extensión de esta comunicación, no es posible una descripción de este en detalle. Metodológicamente, su construcción se fundamenta en la asunción de un conjunto de hipótesis, que serán las que el paradigma propone, y que se contrastarán en virtud de los fenómenos didácticos que permitan sacar a la luz (Gascón y Nicolás, 2021):

- Hipótesis 1: para la construcción de este paradigma, la multiplicación debe ser interpretada dentro de un ámbito $\mathcal{Q}$ más amplio, que integre, de alguna forma, lo que se conoce comúnmente como “la aritmética” en la EP. Denotaremos por $\mathcal{Q}$ a dicho conglomerado de componentes praxeológicos no nítidamente determinado.
- Hipótesis 2: el $\text{PDR}_I(\mathcal{Q})$ ha de ser compatible con cierto paradigma de referencia disciplinar de las matemáticas asumido por el investigador. En el caso de la TAD, este es el que se denomina como paradigma de la modelización matemática, que postula que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de construcción de modelos de sistemas matemáticos o extramatemáticos, y que ha sido puesto a prueba y contrastado en diversas investigaciones dentro de la TAD (Gascón y Nicolás, 2021).
- Hipótesis 3: “lo aritmético”, por mucho que trate de los números, de sus propiedades y de las operaciones entre ellos, toma sentido en el contexto de las magnitudes y de su medida (Chambris, 2022; Chevallard y Bosch, 2001). Por consiguiente, el ámbito $\mathcal{Q}$, que no es posible describir aquí en detalle, integraría no sólo lo que tradicionalmente se asocia con la aritmética escolar, sino un dominio más amplio que incluiría así mismo a las magnitudes y su medida.

A partir de estas hipótesis, en el modelo epistemológico de referencia sobre el que se erige este $\text{PDR}_I(\mathcal{Q})$, la génesis de “lo aritmético” se interpreta fuertemente conectada con el universo de las magnitudes y su medida, asumiendo que son estas las que proporcionarían, inicialmente, una razón de ser del trabajo aritmético en EP. La aritmética escolar tendría su origen en el estudio de cuestiones que se plantean en torno a sistemas extramatemáticos cuyos objetos constituyen el “soporte” de ciertas magnitudes, emergiendo, inicialmente, como modelo de estos. Eso no significa que, necesariamente, la aritmética escolar se restrinja al estudio de estos sistemas. El carácter recursivo de la relación sistema-modelo que postula la TAD daría lugar a un progresivo alejamiento de lo aritmético respecto de las magnitudes, llegando incluso, en etapas posteriores, al estudio y modelización de sistemas de naturaleza aritmética (como el sistema de los números primos, o de los divisores de un número). Este paradigma de referencia aboga, como fin didáctico, por hacer vivir en la EP una genuina actividad de modelización de dichos sistemas, que dé lugar a la construcción de los objetos aritméticos dentro del juego sistema-modelo. Este $\text{PDR}_I(\mathcal{Q})$ surgiría como reacción a fenómenos didácticos como el de la progresiva degeneración de las prácticas matemáticas en torno a las magnitudes y su medida, que tienden a olvidar el papel que las entidades extramatemáticas juegan

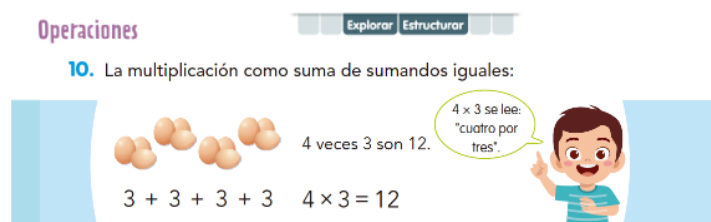
en la construcción de los conocimientos aritméticos, debilitando la que Chambris (2022) considera una posible razón de ser de la aritmética en EP. Las magnitudes quedan convertidas en sombras en el trabajo aritmético escolar (Chevallard y Bosch, 2001), donde se tienden a evitar problemáticas como la construcción de las aplicaciones medida, la elección de la unidad o los cambios de unidades.

En el caso concreto de la multiplicación de números naturales, y en una primera aproximación, la interpretación de esta desde el $PDR_1(\otimes)$ esbozado implicaría considerarla dentro de la problemática más amplia de la medida de cantidades de magnitudes discretas en sistemas extramatemáticos de objetos soporte a partir de unidades simples y múltiples. Cuestiones relacionadas con la equivalencia de dichas medidas, y que conducirían a procesos de cambio de unidad, serían las que estarían en el germen de la noción de multiplicación (Chambris, 2022; Hino y Kato, 2019; Isoda y Olfos, 2021; Izsák y Beckmann, 2019). Esta actividad se podría extender y articular con procesos de medida de cantidades continuas y de cambio de unidades, lo que permitiría progresivas extensiones de la multiplicación más allá de los números naturales, su conexión con las situaciones de proporcionalidad (Isoda y Olfos, 2021) y la construcción de la magnitud producto.

INTRODUCCIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA Y JAPÓN

En el caso español, consideraremos dos libros de texto, de 2º y 3er curso (Fraile y Pineda, 2023a, 2023b), aunque otros textos también han sido revisados, observando características similares. En el 2º curso, la Figura 1 muestra cómo se introduce la noción de multiplicación, mientras que en la Figura 2 podemos observar tipos de ejercicios que suceden a dicha introducción.

Figura 1. Introducción de la multiplicación en libro de 2º de EP (Fraile y Pineda, 2023a, p. 214)



El texto no es ajeno al número natural como medida de colecciones discretas. De hecho, incluye diversas representaciones de colecciones (por ejemplo, colecciones de huevos, en la Figura 1, o de plátanos, en la Figura 2). La multiplicación se introduce, de forma explícita, como solución al problema de cómo expresar una suma de sumandos iguales (Figura 1). Así, en el primer encuentro de los estudiantes con esta, se trata de una nueva operación que emerge para dar solución a ciertas situaciones que se interpretan en términos de sumas.

Figura 2. Ejercicios de multiplicación en libro de 2º de EP (Fraile y Pineda, 2023a, p. 214 y 215)

• Observa y completa:

$5 + 5 + 5 + 5$
4 veces 5 son
 $4 \times 5 = \dots\dots\dots$

$3 + 3 + 3 + 3 + 3$
5 veces 3 son
 $5 \times 3 = \dots\dots\dots$

$2 + 2 + 2 + 2$
4 veces 2 son
 $4 \times 2 = \dots\dots\dots$

$4 + 4 + 4$
3 veces 4 son
 $3 \times 4 = \dots\dots\dots$

11. Escribe en forma de suma y de multiplicación:

• ¿Cuántos huevos hay?

Suma $6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$
Multiplicación $3 \times 6 = \dots\dots\dots$

• ¿Cuántas cerezas hay?

$\dots\dots + \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots \times \dots\dots = \dots\dots\dots$

De forma consistente con la noción de suma, las tareas que se muestran obedecen a la estructura aditiva de combinación (dadas las partes, determinar el total). Frases como “4 veces 3 son 12” (Figura

1) o “4 veces 5 son ...” (Figura 2) se refieren, a la vez, al número de veces que un sumando se repite, y al número de veces que una cantidad se repite. Las cantidades de magnitudes discretas juegan un papel tecnológico, describiendo y justificando la multiplicación como la medida de la colección que resulta de unir colecciones iguales, y que es intercambiable, rápidamente, por sumar sumandos iguales. Ejercicios como el 11 (Figura 2), en los que se propone expresar como “suma” y como “multiplicación” el resultado de reunir ciertas colecciones equipotentes, apoyan esta interpretación. Cantidades cociente, de naturaleza multiplicativa, del tipo “huevos por grupo” o “plátanos por racimo”, están ausentes.

Análogamente, en el manual de 3er curso se vuelve a definir la multiplicación, explícitamente, como “suma de sumandos iguales” (Figura 3) y de nuevo asociada a la idea de unir/juntar colecciones de igual medida. Así se describe en la guía didáctica de apoyo al docente, como uno de los aprendizajes competenciales de este tema: reconocer la multiplicación “como suma de sumandos iguales”.

Figura 3. Definición de a multiplicación en libro de 3er de EP (Fraile y Pineda, 2023b, p. 40)

En Japón, la forma de presentar la multiplicación está ampliamente descrita en la literatura (Hino y Kato, 2019; Isoda y Olfos, 2021). Se introduce, tanto en el currículo como en los libros de texto, en el sentido de medida de magnitudes, y en relación con la elección de la unidad que se haga: “el significado de la multiplicación de números enteros, decimales y fracciones se representa como $B \times P = A$, donde B es la cantidad base, P es el valor relativo, y A es la correspondiente cantidad que tiene el tamaño relativo especificado con respecto a B” (Hino y Kato, 2019, p. 129, traducción propia).

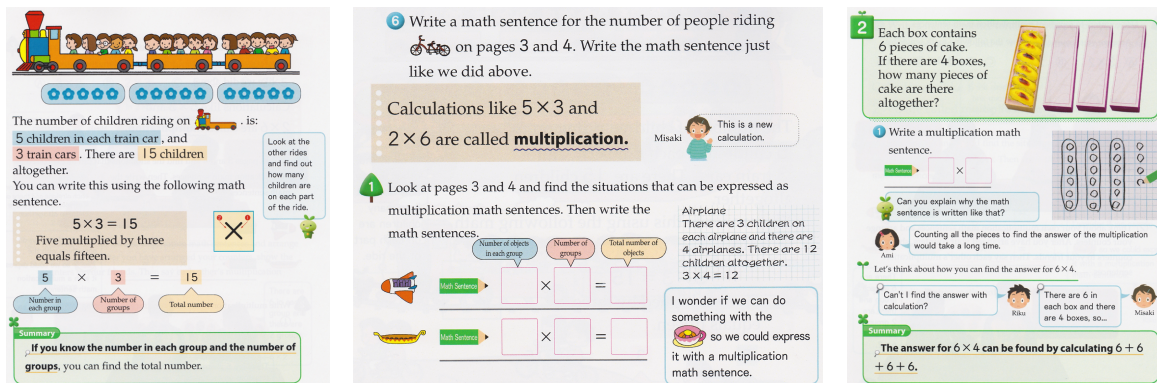
Figura 4. Introducción a la multiplicación en un libro de 2º de EP en Japón (Fujii y Majima, 2020, p. 4 y 5)

En el caso de la multiplicación de números naturales, esto implica que el primer contacto con la multiplicación se lleve a cabo a partir de situaciones en las que el tipo de problema que se aborda es

el de medir colecciones discretas (de niños, en la Figura 4), y expresar dicha medida, cuando se usan unidades, como la pareja (en las bicicletas), la tripleta (en los aviones), la cuaterna (en los coches), el quinteto (en el tren), o el sexteto (en la montaña rusa) (Figura 4).

En principio, se pretende que los estudiantes resuelvan estos problemas a partir de técnicas que ya disponen, como son el conteo del total de la colección o técnicas derivadas de este (conteo de dos en dos, de tres en tres...). Consecuentemente, el discurso tecnológico se organiza en torno a la institucionalización de las “frases matemáticas multiplicativas”: “número de objetos en cada grupo” x “número de grupos” = “total de objetos” (Figura 5). En este contexto, la suma de sumandos iguales no se presenta como un significado de la multiplicación, sino como una técnica para determinar el resultado de esta, cuando el conteo directo del total es pesado (Figura 5, imagen de la derecha).

Figura 5. La multiplicación en un libro de 2º de EP en Japón (Fujii y Majima, 2020, p. 7, 8 y 10)



ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En los textos de ambos países, el hecho de mostrar colecciones equipotentes de objetos (cantidades de magnitudes discretas) y cadenas de sumas de sumandos iguales puede inducir a una interpretación prácticamente equivalente de la multiplicación. Bajo esta visión superficial, existen profundas diferencias que se pueden interpretar como reflejo de dos paradigmas didácticos vigentes ($PDV_{ES}(@)$ y $PDV_J(@)$), con rasgos diferenciados, cuando son analizados desde la perspectiva del $PDR_I(@)$.

En relación con los modelos epistemológicos vigentes, en ambos casos lo aritmético aparece ligado a sistemas de cantidades de magnitudes discretas. La multiplicación se vincula a sistemas compuestos por cantidades discretas equipotentes. Sin embargo, el sentido de la multiplicación respecto de estos sistemas diverge. En el $PDV_{ES}(@)$, la multiplicación es un modelo de la unión de estas colecciones, mientras que en el $PDV_J(@)$, es un modelo de la medida de la colección total a partir de una unidad múltiple. Según Isoda y Olfos (2021), se trata de una particularización de la definición de la multiplicación por medida, para el caso de los números naturales, que es extensible más adelante.

Si bien en ambos casos se observa una tendencia a desligar los números de las cantidades que representan (Chambris, 2022), este fenómeno es más temprano y abrupto en el caso de los libros españoles, donde las magnitudes juegan un potencial papel tecnológico, explicativo y justificativo del tipo de relación que se quiere introducir, pero no son verdaderos medios de la actividad matemática que se propone en torno a la multiplicación. De hecho, esta, casi desde el comienzo, tiende a identificarse más como un modelo de un sistema compuesto por entidades matemáticas (cifras), que podría existir desligado de las cantidades que estas representan. En las expresiones multiplicativas, el primer factor se refiere, principalmente, al número de veces que el segundo se repite en una cadena de sumas, quedando las cantidades de magnitud convertidas en *sombras* de la actividad matemática que se propone (Chevallard y Bosch, 2001). Al contrario, en el caso japonés hay una necesidad de mantener la relación con la cantidades de magnitud durante el mayor tiempo posible, ya que el significado de la multiplicación que se desea introducir no se sostiene sin ellas, si bien, la confluencia final en la suma reiterada, como estrategia para determinar el resultado de una

multiplicación, parece tener un efecto en cierto desvanecimiento de las magnitudes, que formulamos con cautela aquí, por el extracto tan limitado de los libros que estamos analizando.

En coherencia con lo anterior, los fines que ambos paradigmas propugnan también difieren. En el $PDV_{ES}(\mathcal{Q})$, interpretamos que se pretende mantener al niño muy cerca de su conocimiento anterior de la suma, sin que sufra una ruptura epistemológica fuerte. Por ello, perduran los significados aditivos y se promueve una identificación de facto de la multiplicación con la suma. Este hecho vendría a reforzar el papel tan secundario de las cantidades de magnitud que ya hemos identificado, al asumir que el sentido de suma como combinación ya fue construido, y ahora no volvería a ser necesario un trabajo explícito de reunión de colecciones. Sin embargo, en el $PDV_J(\mathcal{Q})$, se persigue que los estudiantes accedan a un nuevo tipo de relación en la que, al contrario que en la suma, cada número tiene un significado diferente (unidades por grupo, número de grupos) (Isoda y Olfos, 2021). Se trata de una ruptura epistemológica que requiere de la construcción de nuevas relaciones entre cantidades de magnitud y de una extensión de los procesos de medida. Aun cuando este trabajo se apoye en conocimientos previamente construidos (conteo y suma), la multiplicación no se identifica con estos.

Al nivel de los medios didácticos, no es posible interpretar el $PDV_J(\mathcal{Q})$ sin considerar su vinculación con la *resolución estructurada de problemas*, como paradigma disciplinar de la enseñanza de las matemáticas vigente en Japón. Como sintetizamos en García et al. (2023), este propugna, como fin de la educación matemática, promover el *pensamiento matemático* de los estudiantes, que se concreta, entre otras facetas, en promover la actividad de resolución de problemas. Para ello, propone, como medios didácticos privilegiados, el uso de problemas de tipo abierto-cerrado (de solución final única, pero abordables usando diferentes estrategias) y una organización de la clase basada en la emergencia de diferentes estrategias, un debate sobre el alcance y las limitaciones de estas y una institucionalización final de un nuevo conocimiento. El problema “cuántos niños hay en cada atracción” que se presenta en el libro japonés obedece a esta estructura (Isoda y Olfos, 2021). Siendo de solución única, admite el uso de diferentes estrategias (contar de uno en uno, de varios en varios, sumar) cuya exploración y comparación conduce a institucionalizar la suma reiterada como la mejor estrategia posible en ese momento para llegar a la solución del problema propuesto. En el caso español no hay descrito, con tanto detalle y unanimidad, un paradigma global vigente. No obstante, consideramos que extractos como los mostrados bien podrían vincularse a ciertos paradigmas disciplinares clásicos de tipo tecnicista, que identifica aprender y enseñar matemáticas con aprender y enseñar técnicas matemáticas (Gascón, 2001) y, por tanto, abusa de medios didácticos tales como las representaciones ostensivas de las técnicas y los ejercicios de aplicación directa de estos, orientados a su rutinización.

CONCLUSIONES

Este análisis inicial permite ya entrever rasgos importantes de los paradigmas vigentes representados en libros de texto de España y Japón, desde la perspectiva del $PDR_I(\mathcal{Q})$. En el caso de la introducción de la multiplicación en la institución EP, bajo desarrollos aparentemente similares se esconden propuestas esencialmente distintas, que hunden sus raíces en modelos epistemológicos, fines educativos y medios didácticos diferentes. El $PDR_I(\mathcal{Q})$ también nos ha permitido cuestionar el papel que los sistemas de cantidades de magnitud y los procesos de modelización desempeñan en esta construcción escolar, abriendo la puerta a un análisis más extenso que debe avanzar hacia la ampliación de la multiplicación a números racionales y reales y a su relación con la proporcionalidad entre magnitudes. Isoda y Olfos (2021) describen esta extensión en el caso de la EP en Japón, mostrando cómo la definición de la multiplicación por medida se amplía a nuevos dominios numéricos. Sería relevante, continuar este análisis comparativo de libros de texto.

En la formación inicial de maestros, el diseño de procesos formativos en los que tengan la oportunidad de analizar y cuestionar libros de texto como los que hemos usado en esta comunicación, contribuiría a cuestionar la relatividad institucional de la construcción de los objetos matemáticos y a poner en evidencia la existencia de paradigmas didácticos vigentes con rasgos diferenciados. Postulamos que

puede ser una estrategia fecunda, que ya estamos explorando, que contribuiría a la emancipación de los futuros docentes de los paradigmas vigentes y los dotaría de herramientas para superar la ilusión de transparencia de las prácticas docentes escolares.

Referencias

- Chambris, C. (2022). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités*. Habilitation à diriger des recherches. CY Cergy Paris Université.
- Chevallard, Y. y Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques ou collège. *Petit X*, 55, 5–32.
- Doig, B., Groves, S. y Fujii, T. (2011). The critical role of task development in lesson study. En L. C. Hart, A. S. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 181–199). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_15
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM - Mathematics Education*, 45(5), 765–777. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>
- Fraile, J. y Pineda, A. (2023a). *Matemáticas 2 Primaria. Proyecto abanico*. Vicens Vives.
- Fraile, J. y Pineda, A. (2023b). *Matemáticas 3 Primaria. Proyecto abanico*. Vicens Vives.
- Fujii, T y Majima, H. (2020). *New Mathematics 2B for Elementary School*. Tokyo Shoseki.
- García, F. J., Gascón, J., Nicolás, P. y Sierra, T. A. (2023). Los paradigmas didácticos como componentes esenciales de la infraestructura del estudio de clases. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 251–258). SEIEM.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 129–149.
- Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 25 años, 99–123.
- Gascón, J. y Nicolás, P. (2021). Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 23–39. <https://doi.org/10.35763/aiem20.4033>
- Hino, K. y Kato, H. (2019). Teaching whole-number multiplication to promote children's proportional reasoning: a practice-based perspective from Japan. *ZDM - Mathematics Education*, 51(1), 125–137. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0993-6>
- Isoda, M. y Olfos, R. (2021). *Teaching Multiplication with Lesson Study: Japanese and Ibero-American Theories for International Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6>
- Izsák, A. y Beckmann, S. (2019). Developing a coherent approach to multiplication and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 83–103. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09885-8>
- Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325–334). Málaga: SEIEM.
- Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM - Mathematics Education*, 53(6), 1189–1206. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3>
- Shinno, Y. y Mizoguchi, T. (2021). Theoretical approaches to teachers' lesson designs involving the adaptation of mathematics textbooks: two cases from kyouzai kenkyuu in Japan. *ZDM - Mathematics Education*, 53(6), 1387–1402. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01269-8>