

RECURSIVIDAD Y REVERSIBILIDAD EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DE LOS MOLDES DE BIZCOCHO

Recursivity and reversibility in mathematical modelling: the case of the biscuit's molds

Marí, M., Barquero, B. y Bosch, M.

Dep. d'Educació Lingüística, Científica i Matemàtica. Universitat de Barcelona

Resumen

Presentamos un análisis epistemológico de un recorrido de estudio e investigación relacionado con la modelización algebraica y la covariación, que parte del problema de determinar las dimensiones de un molde para bizcochos. Se presenta la segunda etapa de la metodología de ingeniería didáctica, el análisis a priori, con el objetivo de ilustrar las características de recursividad y reversibilidad que aparecen en el proceso de modelización. Se concluye sobre la importancia de tomar en consideración estas características en la implementación de situaciones de aprendizaje que persigan integrar la modelización matemática como contenido fundamental.

Palabras clave: *modelización matemática, recorridos de estudio e investigación, papiroflexia, ingeniería didáctica, teoría antropológica de lo didáctico.*

Abstract

We present an epistemological analysis of a study and research path related to algebraic modelling and covariation based on the problem of determining the dimensions of a biscuit mould. The second stage of the didactic engineering methodology, the a priori analysis, is presented to illustrate the characteristics of recursivity and reversibility that appear in the modelling process. We conclude on the importance of taking these characteristics into consideration when implementing learning situations aiming to integrate mathematical modelling as a fundamental content.

Keywords: *mathematical modelling, study and research paths, origami, didactic engineering, anthropological theory of the didactic.*

INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación surge de la intención de desarrollar y hacer converger tres líneas de investigación dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 2019). La primera refiere a las investigaciones sobre el álgebra y la covariación en Educación Secundaria, tomando como punto de partida los modelos epistemológicos de referencia sobre la modelización algebraica y funcional elaborados en las tesis doctorales de Bolea (2003) y Ruíz-Munzón (2010). La segunda línea es la iniciada por García (2005) sobre la enseñanza de la modelización matemática, articulando la propuesta de la TAD con otros enfoques (Barquero y Jessen, 2020) como el ciclo de modelización (Greefrath, 2020) y el “models and modelling perspective” (Ärlebäck y Doerr, 2020). La tercera línea corresponde a los estudios sobre las condiciones que facilitan la transición de los sistemas educativos actuales hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013), con los *recorridos de estudio e investigación* (REI) como propuesta de enseñanza (Barquero et al., 2021), en particular, para la enseñanza de la modelización.

En esta comunicación, presentamos el análisis *a priori* de la dimensión epistemológica de un REI que vincula las tres líneas de investigación mencionadas. Veremos en qué sentido la propuesta integra

características esenciales de la modelización matemática—como la recursividad y reversibilidad de la relación sistema-modelo—para estudiar aspectos relacionados con la covariación de magnitudes.

MARCO TEÓRICO, PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

La modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Partimos de los trabajos iniciados por Y. Chevallard a finales de los 80 sobre la enseñanza de la modelización matemática y su relación con el álgebra escolar (Chevallard, 1989). Los desarrollos posteriores de estos trabajos por investigadores españoles conducen a concebir la modelización como un instrumento principal de la actividad matemática que, además, permite articular la matemática escolar (Bosch et al., 2006; García, 2005). En este marco, las nociones principales son las de modelo, sistema y proceso de modelización estructurado en cuatro estadios (Gascón, 1994), sin necesariamente una sucesión temporal lineal entre ellos y alternándose unos con otros de forma constante durante el proceso: 1) la definición y limitación del sistema o ámbito de la realidad a estudiar (extramatemática o intramatemática) con una situación problemática que permite plantear cuestiones a resolver y posibles conjeturas muchas veces imprecisas, 2) el análisis y profundización en las relaciones entre las componentes del sistema que permite precisar y dar mayor comprensión a los problemas iniciales planteados, 3) el trabajo técnico y su interpretación dentro del sistema que permite consolidar y evolucionar el modelo valorando en todo momento si es el adecuado para poder responder las preguntas planteadas, y 4) enunciar nuevos problemas que se pueden formular gracias a la elaboración y el trabajo en el modelo.

En este proceso de modelización, los modelos construidos se transforman en nuevos sistemas a considerar, de forma que los estadios de modelización van sucediéndose, generando nuevos modelos (recursividad de la modelización) y pudiendo también actuar los sistemas como modelos de los propios modelos (reversibilidad). Por ejemplo, para ilustrar la recursividad, podemos considerar un sistema compuesto por una clase de 13 chicas y 15 chicos y un modelo de este sistema a partir de las fracciones $13/28$ y $15/28$, modelo que, a su vez, se puede modelizar con las expresiones algebraicas $a/(a + b)$ y $b/(a + b)$ y, posteriormente, con las funciones hiperbólicas $f(x) = k/(k + x)$ y $g(x) = 1 - f(x)$. La reversibilidad aparece cuando, al preguntarse si $13/28$ es mayor o menor que $14/29$, utilizamos el sistema de la clase anterior para decir que, si llega una chica nueva a la clase, la proporción de chicas aumenta y, por lo tanto, es evidente que $13/28 < 14/29$. El sistema de la clase funciona como modelo para producir conocimientos sobre las fracciones, que es aquí el modelo-sistema cuestionado.

Cabe señalar que, siguiendo a Barquero (2023), las características de recursividad y reversibilidad de la modelización han sido poco investigadas hasta la fecha y poco conceptualizadas en los diversos enfoques en educación matemática sobre modelización. El propósito de este trabajo es profundizar en el estudio de la aparición y comportamiento de estas características esenciales.

Los recorridos de estudio e investigación

En la TAD, los REI aparecen como el instrumento de investigación fundamental para analizar procesos de enseñanza y aprendizaje basados en la indagación. Son, a su vez, propuestas didácticas y herramientas de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje. Los REI surgen de la consideración de una cuestión problemática abierta, llamada cuestión generatriz Q0. Al abordarla, se genera un proceso de indagación en el que surgen nuevas cuestiones derivadas que la comunidad de estudio (estudiantes y docentes) deben abordar y cuyas respuestas contribuyen a la elaboración conjunta de una respuesta a Q0. En este proceso, se combina el estudio de nuevos saberes y técnicas con la búsqueda de información, el tratamiento de datos empíricos y la construcción de nuevos conocimientos (Chevallard, 2019). Los REI introducen en la enseñanza una modificación fuerte del contrato didáctico dominante, al transmitir el profesor a los alumnos muchas responsabilidades como la búsqueda de nuevas informaciones y saberes, la validación de las respuestas producidos o el planteamiento de nuevas cuestiones. Otro cambio relevante es la importancia que se otorga a la

producción de una respuesta a la cuestión generatriz, considerada como un fin con valor por sí misma y no como un medio para la generación de nuevos aprendizajes.

Barquero (2023) presenta los REI como dispositivo didáctico vinculado directamente con la enseñanza de la modelización matemática, al aparecer esta como un medio privilegiado para la elaboración de respuestas a las cuestiones planteadas. Distintas investigaciones relacionan los REI con la modelización matemática en secundaria, ya sea en el caso del álgebra elemental (Ruiz-Munzón, 2010), de la interdisciplinariedad (Jessen, 2014) o de la combinatoria (Vásquez et al., 2021). Este último estudio ilustra además las dos características de recursividad y reversibilidad.

Pregunta de investigación y metodología

Las investigaciones sobre modelización han puesto de manifiesto importantes restricciones relativas a la matemática escolar que dificultan que la modelización pueda vivir como una actividad normalizada en la educación secundaria y permita superar fenómenos relativos a la atomización y aislamiento de los saberes enseñados (Gascón, 1994; Rojas y Sierra, 2021). Estos fenómenos no se pueden separar de una visión dominante de la modelización en la enseñanza secundaria que queda muy limitada a la simple construcción (o, incluso, aplicación) de modelos concretos a situaciones preestablecidas, sin considerar las características de recursividad y reversibilidad mencionadas anteriormente. Nuestra hipótesis es que, para poder elaborar respuestas a las cuestiones generatrices consideradas, los REI hacen emerger procesos de modelización suficientemente desarrollados para que las características de recursividad y reversibilidad aparezcan como herramientas clave para responder a las cuestiones abordadas. Las preguntas de investigación que formulamos son:

¿Cómo se manifiestan la recursividad y reversibilidad en los procesos de modelización generados por los REI? ¿Cómo tomar dichas características en cuenta en el diseño e implementación de los REI?

Nuestro objetivo en este trabajo es abordar la primera cuestión, considerando como estudio de caso un REI concreto diseñado para 3º de la ESO. Abordamos el estudio a partir de la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2020; García et al., 2019). Dicha metodología contiene cuatro fases: el análisis preliminar de los fenómenos didácticos en juego; el análisis a priori de la propuesta educativa que se prevé implementar para abordar dichos fenómenos; el análisis in vivo durante la implementación y el análisis a posteriori al finalizar esta. Presentamos aquí el análisis epistemológico a priori de la propuesta para poner en evidencia las dos características de recursividad y reversibilidad de la modelización matemática involucrada. Consideramos que este análisis es un punto de partida determinante para la futura implementación del REI en el aula de secundaria, si queremos que la enseñanza de las matemáticas incorpore la modelización como un ingrediente esencial y poderle atribuir un estatus matemático oficial.

El caso de estudio

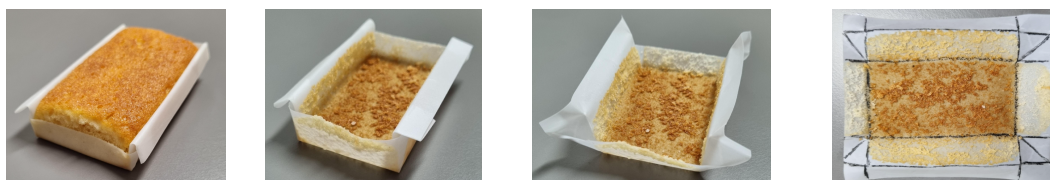
El REI que tomamos como caso de estudio parte de una cuestión generatriz adaptada de la propuesta de “la caja de la pastelera” de Chappaz y Michon (2003) que ha dado lugar a diversas investigaciones en el ámbito de la enseñanza de la modelización matemática en primaria y en formación de profesorado (Barquero et al., 2022; Ruiz-Higueras, 2008; Wozniak, 2023). En estos trabajos, se parte de la construcción de una caja de papel utilizando papiroflexia y se estudian las posibilidades que ofrece en cuanto a las dimensiones de la caja y de la hoja de papel. Una limitación clara de esta situación es la dificultad de presentar el problema de la pastelera como un caso real y relevante, teniendo en cuenta la cantidad de cajas de cartón de diferentes tamaños y formas que existen en el mercado y que resolverían el problema real de forma directa, resultando en lo Bosch et al. (2022) han tildado de “falsas indagaciones”.

Para adaptar la situación a la ESO, proponemos una variación considerando el molde de los sobaos pasiegos, unos bizcochos tradicionales de Cantabria. Se utiliza un molde de papel de fácil construcción con una pestaña para desprender rápidamente el bizcocho del molde (ver Figura 1). La

masa del bizcocho se hornea directamente dentro del molde de papel. Se puede comprobar en los supermercados las múltiples y diferentes dimensiones que tienen los moldes utilizados para elaborar este tipo de bizcocho según las distintas marcas comerciales que los fabrican. También existe información en Internet sobre el método de elaboración de este tipo de bizcochos, incluyendo la construcción de estos moldes característicos, a mano o con máquinas destinadas concretamente a ello.

La pregunta generatriz del REI aborda el tamaño de los moldes y, en consecuencia, de los propios sobaos. La formulamos inicialmente en los términos siguientes Q0: ¿Cómo construir el mejor molde para los sobaos pasiegos?

Figura 1. Sobao pasiego en su molde de papel y patrón para la construcción del molde



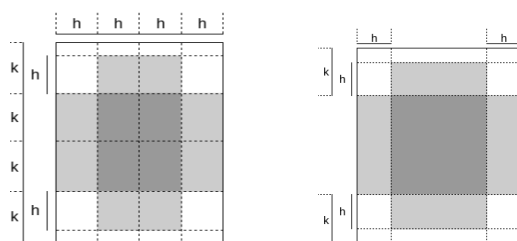
RESULTADOS DERIVADOS DEL ANÁLISIS *A PRIORI* DEL REI

El análisis epistemológico a priori que presentamos se apoya en los resultados obtenidos en experimentaciones previas sobre “La caja de la pastelería” que aportan un fundamento experimental al estudio. Lo sintetizamos describiendo las principales cuestiones que se derivan de Q0 así como los diferentes sistemas y modelos que pueden emerger para elaborar las respuestas.

Delimitación del sistema inicial

El sistema inicial que se considera es el molde del sobao y la técnica de papiroflexia que permite construirlo y que responde a la pregunta Q1: ¿Cómo se construye el molde?

Figura 2. Construcción del molde con restricción (izquierda) y sin ella (derecha)

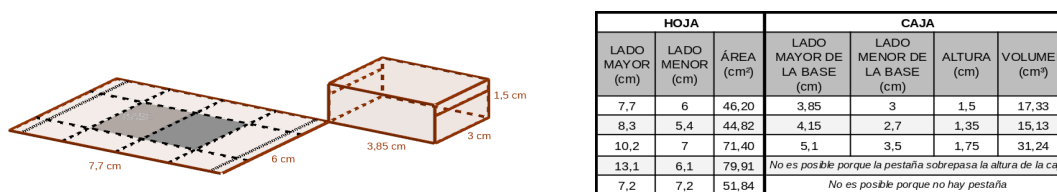


La construcción y sucesión de dobleces que conforman el molde conllevan las primeras decisiones que muestran las restricciones y libertades permitidas respecto a las longitudes de las hojas a utilizar, las selecciones de las longitudes de las dobleces y la metodología y características de cada doblez, así como la familiarización con la técnica del doblado. En particular, aparecen dos parámetros libres que son la altura del molde y la amplitud de la pestaña (Figura 1). Para simplificar esta complejidad y por motivos de espacio, proponemos restringirnos inicialmente a una construcción que dobla la hoja por mitades y determina ambos parámetros (Figura 2).

Modelos de medida y geométricos

Los primeros modelos que permiten estudiar el sistema se pueden agrupar en dos grandes tipos: modelos en forma de tablas con diferentes medidas de hojas y de los moldes resultantes, y modelos geométricos de los moldes, similares a los de la Figura 3, con medidas numéricas para cada dimensión. Ambos tipos de modelos pueden convivir y permiten formular y aportar respuestas parciales a preguntas como: ¿Qué relaciones hay entre las dimensiones del molde y de la hoja? (Q2); Dada una hoja determinada, ¿cuántos moldes pueden construirse? (Q3); Dado un molde determinado, ¿qué hojas lo crean? (Q4); ¿Qué se necesita para tener un molde con un volumen determinado? (Q5).

Figura 3. Ejemplo de modelo de medidas y geométrico



Modelos algebraicos

En el avance de dar respuesta a la pregunta Q0 aparece ahora la oportunidad (ya se conoce como desarrollarlas) y la necesidad (aún no está respondida la pregunta) de elegir qué moldes son aquellas que se proponen acordes a ciertas características concretas (la altura ha de ser la mitad que uno de los lados de la base). En este momento podemos aventurarnos en el análisis de nuestras primeras propuestas en cuanto a buscar moldes “con menor coste de hoja” o “con mayor volumen” pero encontraremos dificultades que requieren hacer progresar o ampliar los modelos de medida y geométricos previamente considerados. Es decir, el trabajo con los modelos de medida y geométrico requiere de cálculos numéricos individuales para cada caso y, ante esto, aparecen dificultades para encontrar y generalizar relaciones entre las dimensiones de la hoja y el molde. Aparece entonces la necesidad de representar estas dimensiones y expresar sus relaciones mediante expresiones algebraicas, asignando una letra a cada dimensión:

N = lado de la hoja de longitud MENOR

M = lado de la hoja de longitud MAYOR

h = altura del molde

n = lado de la base del molde de longitud menor m = lado de la base del molde de longitud mayor

Se pueden así obtener respuestas genéricas a las cuestiones anteriores:

Q2: ¿Qué relaciones hay entre las dimensiones del molde y de la hoja?

De hoja a molde: $h = \frac{1}{4} N$ $m = \frac{1}{2} M$ $n = \frac{1}{2} N$ (es decir, $h = n/2$)

De molde a hoja: $M = 2m$ $N = 2n$

Q3: Dada una hoja determinada, ¿qué moldes pueden construirse?

Para poder construir un molde la hoja ha de cumplir $N < M < 2N$ (no puede ser una hoja cuadrada $M = N$ para que exista pestaña y $M < 2N$ para que la pestaña no sobrepase la altura). Se obtiene: $h = \frac{1}{4}N$, $m = \frac{1}{2} M$, $n = \frac{1}{2} N$.

Q4: Dado un molde determinado, ¿con qué hojas puede construirse?

Suponiendo $m > n$, el molde debe tener una altura $h = \frac{1}{2}n$ y, para que la pestaña sobrepase la altura, $M < 2N$ (o $m < 2n$). Entonces, si $m < 2n$ y $h = \frac{1}{2}n$, una hoja con dimensiones $N = 2n$ y $M = 2m$ genera el molde.

Q5: ¿Qué se necesita para tener un molde con un volumen determinado?

El volumen es $V = mnh = (\frac{1}{4} N) (\frac{1}{2} M) (\frac{1}{2} N) = (1/16) N^2M$. Dado un volumen V_0 se puede utilizar cualquier hoja con dimensiones N, M que cumplan $N < M < 2N$ y $M = 16 V_0 / N^2$.

Modelos funcionales

El modelo algebraico ha abierto nuevas posibilidades de estudio al generar una evolución en las cuestiones anteriormente planteadas y plantear nuevas preguntas relevantes: ¿Cómo afectan al volumen, altura y área pequeñas variaciones en las dimensiones de la hoja? (Q6); ¿Con cuál de las hojas, con un área determinada, se construye un molde con un volumen máximo? (Q7); ¿Cuáles de los moldes con un volumen determinado tienen una menor área de hoja? (Q8). En el modelo algebraico estas preguntas tienen difícil solución y corresponde indagar en la evolución a otro modelo que les dé respuesta. En la base de este modelo se encuentran las funciones que relacionan las

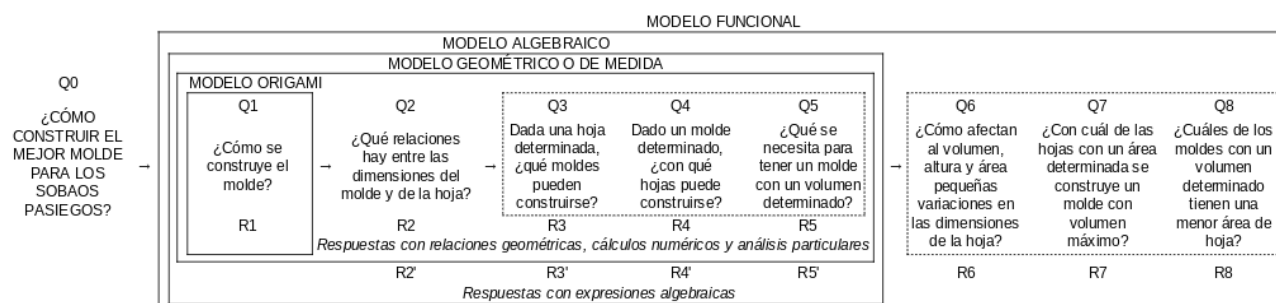
dimensiones de la hoja y las del molde y aquellas que muestran cómo influyen las distintas variables del sistema en el volumen del molde. Este desarrollo es el que relaciona la modelización algebraica con la funcional y la covariación. Por motivos de espacio, no lo desarrollaremos aquí.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este trabajo se ha propuesto estudiar el fenómeno didáctico que hemos formulado como la invisibilidad de los procesos de recursividad y reversibilidad en los procesos de modelización matemática escolar, así como su potencial para generar nuevos cuestionamientos y procesos de modelización. Nos hemos centrado en presentar las dos primeras etapas de la metodología de ingeniería didáctica, tal como la adaptamos en las investigaciones sobre los REI, en un caso de estudio: el del REI sobre los moldes para bizcochos. El análisis a priori de dicho REI ha permitido profundizar sobre cómo se desarrollan las propiedades de recursividad y reversibilidad como procesos centrales en la actividad de modelización matemática, emergidas ante esta situación.

La naturaleza recursiva del proceso de modelización queda claramente ilustrada en este caso de estudio, mostrándose cómo, en parte debido a la constante ampliación del sistema estudiado, los modelos matemáticos se transforman y completan en cada paso, evolucionando hacia estructuras más completas y complejas, pasando de los modelos de medida y geométricos (M1), a aquellos algebraicos (M2) y a los modelos funcionales (M3). Además, los sistemas también evolucionan y, en cada paso, engloban todo el trabajo de modelización realizado hasta el momento. Es decir, el sistema inicial (S0), con las instrucciones de construcción del molde y la técnica de papiroflexia que permite construirlo, se amplía considerablemente con el trabajo con los modelos de medida y geométricos (M1). Estos permiten simular y estudiar distintos casos de moldes, seleccionar las variables más relevantes, organizarlas e iniciar su análisis tanto numérico como geométrico. A su vez, con el objetivo de profundizar en las relaciones entre las dimensiones de la hoja y del molde y generalizarlas, los modelos numéricos (de medida) y geométricos previamente considerados deben evolucionar y ser modelizados, a su vez, por los modelos algebraicos (M2). Este proceso recursivo puede seguir, por ejemplo, al considerar cuestiones sobre cómo determinar el molde con cierto volumen determinado o cuál de ellos usa superficie mínima de papel, extendiendo los sistemas y modelos previos para considerar ahora modelos funcionales (M3) en los cuales se puedan abordar, con cierta facilidad, cuestiones sobre variación, covariación y optimización. La Figura 4 resume esta evolución y dialéctica entre los sistemas y los modelos, sirviendo de ejemplo ilustrativo del proceso de modelización según la TAD, e incorporando las cuestiones que facilitan la consideración de los distintos modelos.

Figura 4. Esquema del proceso de modelización



En cuanto a la reversibilidad del proceso de modelización, esta aparece en casi cada construcción de modelos nuevos cuando los modelos anteriores, y los sistemas ampliados, pasan a utilizarse como fuente de validación de las nuevas propuestas. Así, por ejemplo, si se quiere estudiar la variación del volumen o área con pequeñas variaciones de la hoja (Q6) o estudiar qué molde tiene un volumen máximo (Q7), si bien son preguntas que pueden surgir cuando uno considera los modelos algebraicos-funcionales (M3) y estudiar su variación y optimización (nuevo sistema a estudiar), se puede recurrir

a los modelos geométricos-de medida (M1) para la simulación y exploración de casos mediante la representación geométrica o numérica de la variación de las magnitudes que intervienen.

Consideramos que el análisis a priori, al margen de mostrar en acción las características de recursividad y reversibilidad, pone de manifiesto cuáles son los elementos esenciales del propio proceso de modelización (cuestiones, sistemas, modelos, herramientas de validación de modelos, etc.) que deben tener un estatus claro y propio durante el desarrollo del REI. Esto conlleva fijar una terminología concreta para poderse referir a ellos que, al ser de naturaleza muy variada, raramente existe en la cultura escolar. Por ejemplo, el análisis a priori muestra la necesidad de referirse a las variables principales a considerar: dimensiones de las hojas, del molde, parámetros libres o fijados en las hojas o en los moldes, etc. Muestra también la necesidad de nuevos términos para nombrar e institucionalizar los modelos intermedios generados por los procesos de modelización: “modelo de la papiroflexia”, “modelos geométricos y de medida”, “modelo algebraico” o “modelo funcional”. En este sentido, el análisis a priori permite anticipar qué terminología es necesario crear con el profesorado, y estos con los estudiantes en el aula, para ayudar a dar un estatus oficial a elementos tan esenciales en el proceso de modelización. Confirma así las observaciones de Wozniak (2012) sobre el “mutismo” de las actividades de modelización en el aula.

Como hemos comentado al inicio del trabajo, queda abierto el problema de la transferencia al aula del REI diseñado, incluyendo la toma en consideración de dichas propiedades de la modelización. En particular, se pone en evidencia que, además de una infraestructura didáctica apropiada (para que los alumnos manipulen, planteen cuestiones, elaboren respuestas, etc.), también son necesarias nuevas herramientas epistemológicas para sostener el proceso de modelización y que este permita producir las respuestas esperadas. Actualmente, está previsto que este REI se experimente durante el 3º trimestre del curso 2023/24 con estudiantes de 3º de la ESO y docentes no investigadores. Es aquí donde vamos a poder ampliar nuestra investigación y abordar el problema de las condiciones para la transferibilidad de estas herramientas. Un punto más abierto de futuro desarrollo es, a partir del análisis a priori aquí presentado, analizar en profundidad el proceso modelización algebraica y funcional (en el sentido de Ruiz-Munzón, 2010), así como el de la noción de covariación en la progresiva evolución de los modelos considerados. Cabe destacar cómo, en cada uno de los modelos, aparece de forma implícita el concepto de covariación entre magnitudes, concepto que va evolucionando en su tratamiento según el modelo lo permite. El caso invita a profundizar en el análisis a posteriori de la próxima experimentación para seguir estudiando los fenómenos didácticos relativos a la invisibilidad de propiedades tan centrales de la modelización matemática.

Referencias

- Ärlebäck, J. B. y Doerr, H. M. (2020). Más allá de modelos descriptivos: Cuestiones de investigación sobre diseño e implementación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 5–20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.307>
- Artigue, M. (2020). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*, 202-206. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Barquero, B. (2023). Mathematical modelling as a research field: Transposition challenges and future directions. En P. Drijvers, H. Palmer y C. Csapodi (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (No. 1). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME.
- Barquero, B. y Jessen, B. E. (2020). Impacto del enfoque teórico en el diseño de tareas de modelización matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 98–113. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.317>
- Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., y Ruiz-Munzón, N. (2022). Study and research paths in the frontier between paradigms. *Int Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(5), 1213–1229. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1988166>

- Barquero, B., Bosch, M. y Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 21, 87–106. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4232>
- Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. *Monografía del seminario matemático García de Galdeano*, 29. Universidad de Zaragoza.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J. y Ruiz-Higueras, L. (2006) La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37–74.
- Bosch, M., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzón, N. (2022). Real or Fake Inquiries? Study and Research Paths in Statistics and Engineering Education. En R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen y C. Winslów (Eds.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 393–409). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_19
- Chappaz, J. y Michon, F. (2003). Il était une fois.... La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19–32.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43–72.
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2, 161–182.
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71–114.
- García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.
- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75–94. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267>
- Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x*, 37, 43–63.
- Greefrath, G. (2020). Competencia en modelización matemática. Selección de desarrollos actuales de investigación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 38–51. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.303>
- Jessen, B. E. (2014). How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting? *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 19, 199–224.
- Rojas, C. y Sierra, T. Á. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 41–63. <https://doi.org/10.35763/aiem20.4031>
- Ruiz-Higueras, L. (2008). Modelización Matemática en la Escuela Primaria. La reconquista escolar de dominios de realidad. En *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87–119). Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (2021). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM.
- Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation: une question d'équipement praxeologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 32(1), 7–55.
- Wozniak, F. (2023). Modelizar para fabricar un libro o fabricar un libro para modelizar. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 99, 39–43.