

RELACIONES ENTRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE Y DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A PARTIR DEL USO DE EJEMPLOS TRANSPARENTES EN LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Relationships between specialized knowledge of the characteristics of learning and teaching of mathematics from the use of transparent examples in the quadratic equation

Sánchez-Acevedo, N.^a, Segura, C.^b, Contreras, L. C.^c y Sosa, L.^d

^{a,b}Universidad Central de Chile/Universitat de València, ^cUniversidad de Huelva, ^dBenemérita Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen

Los ejemplos en matemáticas son reconocidos por su papel en el contexto del aprendizaje de diferentes contenidos, siendo el conocimiento que moviliza el profesor un aspecto preponderante en el aula de clases. En este reporte profundizamos en las relaciones del conocimiento didáctico especializado entre las características del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas de una profesora de secundaria en la selección y uso de ejemplos transparentes en la enseñanza de la ecuación cuadrática. Las relaciones se indagan a través de un caso instrumental desde un paradigma interpretativo con información obtenida de observaciones de aula y entrevistas semiestructuradas. Los resultados permiten establecer relaciones entre los tipos de ejemplos transparentes, el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y de las características del aprendizaje, y cómo estas sustentan las decisiones en el aula en la enseñanza de la ecuación cuadrática.

Palabras clave: *ejemplos transparentes, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, ecuación cuadrática, cualitativo.*

Abstract

Examples in mathematics are recognized for their role in the context of learning different contents, with the knowledge mobilized by the teacher being a predominant aspect in the classroom. In this report we delve into the relationships of specialized didactic knowledge between the characteristics of learning and teaching mathematics of a secondary school teacher in the selection and use of transparent examples in teaching the quadratic equation. The relationships are investigated through an instrumental case from an interpretive paradigm with information obtained from classroom observations and semi-structured interviews. The results allow establishing relationships between the types of transparent examples, knowledge about mathematics teaching and learning characteristics, and how these support classroom decisions in teaching the quadratic equation.

Keywords: *transparent examples, specialized knowledge mathematics teachers, quadratic equation, qualitative.*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento del profesor de Matemáticas es un tema de amplia investigación, pero aún hay algunos focos que necesitan mayor exploración. Por ejemplo, la naturaleza de la ejemplificación¹¹, como parte de la selección y uso de ejemplos y su relación con el conocimiento necesario que se requiere para centrar la atención en características específicas de estos ejemplos. Esta atención, sin duda, podría abrir espacios sobre buenas oportunidades en el aprendizaje de los estudiantes (Hill et al., 2005). En su trabajo sobre enseñanza y aprendizaje con ejemplos, Chick (2007) inicia con una situación sobre dos ejemplos de ecuaciones cuadráticas para dar cuenta del uso que se les puede dar y la intencionalidad de enseñanza. La situación planteada es (en términos generales) la siguiente: *Cuando un profesor de matemáticas pide a una clase que encuentre las soluciones de $x^2 - 5x + 6 = 0$, es posible que un estudiante visualice el objetivo que se quiere conseguir a partir de la ecuación y otros no. ¿Qué pasa si otro ejemplo dado es encontrar las soluciones de $x^2 - 2x + 5 = 0$? ¿qué nos dice esto? Los dos problemas no parecen muy diferentes estructuralmente, entonces ¿por qué asignar ambos?*

En este sentido, tanto los propósitos del ejemplo que se busquen conseguir, la intencionalidad de enseñanza y el conocimiento que se moviliza en la selección y uso es lo que implica la ejemplificación (Pascual y Contreras, 2018). Es decir, ejemplificar no es solo seleccionar y usar, sino que plantea la necesidad de movilizar otros aspectos que son relativos a esta acción (variación, espacios de ejemplos, secuencias de ejemplos y transparencia). Una de las características de la ejemplificación es la de ejemplos transparentes (Lesh et al., 1987; Zaskis, 2005) (que ilustramos con la situación anterior). En este sentido, y sobre la base de un trabajo anterior (Sánchez-Acevedo et al., 2023), pretendemos seguir profundizando en esta línea, específicamente en el conocimiento especializado (MTSK) movilizado a partir de la selección y uso de ejemplos transparentes. Seguir en esta línea se debe a limitada investigación centrada en la selección y uso de ejemplos transparentes para la enseñanza y su relación con el conocimiento del profesor (Adler & Pournara, 2020; Cayo et al., 2022; Zaskis, 2005); y, en cuanto al conocimiento especializado, porque el modelo MTSK se centra en la especificidad de la enseñanza de las matemáticas y tiene un carácter analítico que releva aspectos particulares y relaciones entre estos conocimientos (Zakaryan et al., 2018).

De acuerdo con lo descrito y la relevancia que tiene explorar el conocimiento del profesor en relación con la selección y uso de ejemplos, específicamente los ejemplos transparentes, nos proponemos como objetivo determinar y describir las relaciones de conocimiento especializado entre *la enseñanza de las matemáticas y las características del aprendizaje de las matemáticas* -como parte del conocimiento didáctico del contenido- a partir de la selección y uso de ejemplos transparentes en la enseñanza de la ecuación cuadrática.

MARCO DE REFERENCIA

Con el fin de explorar en las relaciones del conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas y sobre la enseñanza de las matemáticas a partir del uso de ejemplos transparentes (Lesh et al., 1989), nos apoyamos en el modelo MTSK. Este modelo aporta un carácter holístico e integral, con fines analíticos y comprensivos, tanto dominios y subdominios de conocimiento interactúan y se integran conjuntamente de manera especializada (Carrillo, et al., 2018).

¹¹ Para mantener la idea inicial del trabajo de Sánchez et al., (2023) usamos la noción de ejemplificación y no de práctica de ejemplificar. Por una parte, para no colisionar con la noción de práctica del subdominio del conocimiento de la práctica matemática del MTSK, y por otra, la noción de ejemplificación [defendemos] debe ser consciente y movilizar elementos de variación, transparencia y secuencias de ejemplos.

El MTSK comprende tres dominios de conocimiento: (1) el matemático (MK); (2) el didáctico del contenido (PCK); y (3) el de creencias de la matemática y su enseñanza. Tanto el dominio del conocimiento matemático (MK), como el didáctico del contenido (PCK) se componen de tres subdominios y categorías. En el caso del dominio de las creencias del profesor, éste permea tanto el conocimiento de la matemática per se, como el conocimiento didáctico del contenido. En este modelo se resalta el conocimiento que es propio del profesor de matemáticas en relación con el contenido, más no el que puede ser transversal a otras disciplinas.

De este modo, el conocimiento matemático (MK) se compone de los subdominios del conocimiento de los temas (KoT), el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM) y, el conocimiento de la práctica matemática (KPM); el conocimiento didáctico del contenido (PCK) se compone de los subdominios del conocimiento de los estándares del aprendizaje de las matemáticas (KMLS), el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). En lo que sigue, y dado que el objetivo de este trabajo es analizar las relaciones entre los subdominios KFLM y KMT, nos centraremos en describir solo estos.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Este subdominio establece la relación entre el conocimiento matemático como objeto de aprendizaje y la interacción con el estudiante y formas de aprendizaje, poniendo la atención en el conocimiento sobre los aspectos matemáticos que fundamentan el aprendizaje de los estudiantes, como los errores asociados a los procedimientos. También saber cuáles son las dificultades asociadas a diferentes tipos de errores, y la interacción de los estudiantes con el contenido matemático. Por ejemplo, el conocimiento que puede tener el profesor que cuando plantea la $x^2 - 2x = 5$, puede inducir a que el estudiante considere que el coeficiente $c = 5$. Se incluyen en este subdominio las categorías de conocimiento: (i) teorías de aprendizaje; (ii) fortalezas y dificultades; (iii) formas de interacción con un contenido matemático; e (iv) intereses y expectativas.

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Este subdominio incluye aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor para seleccionar ejemplos transparentes a la técnica de factorización $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0$ para α y β enteros o saber del uso de la teoría de las situaciones didácticas para la organización de una clase. Se incluyen en este subdominio las siguientes categorías: (i) teorías de enseñanza; (ii) recursos materiales y virtuales; y (iii) estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

Tanto las categorías de conocimiento que componen el KFLM como el KMT son la base para el posterior análisis en la identificación de MTSK y relaciones entre estos subdominios movilizados en el uso de ejemplos transparentes relacionados con la ecuación cuadrática.

Ejemplos y noción de transparencia/opacidad

La palabra ejemplo es usada en diferentes contextos y con diferentes fines a lo largo de la historia de la enseñanza de las matemáticas (Bills y Watson, 2008). Dada la ambigüedad que puede presentar el concepto de ejemplo en matemáticas en relación con lo que se quiere mostrar, algunos autores han planteado algunas conceptualizaciones al respecto (Zodik y Zaslavsky, 2008). Aquí seguimos la idea planteada por Figueiredo (2010) de ejemplo como “un elemento de una colección de objetos (entes) que es utilizado en una determinada situación de enseñanza/aprendizaje porque evidencia determinada, o determinadas, características” (p. 36).

Para ello, el uso de determinados ejemplos que ejemplifiquen lo que se pretende mostrar (objetivo del ejemplo) está influenciado por el conocimiento matemático y didáctico del profesor (Zodik y Zaslavsky, 2008), permitiendo dar apoyo a los estudiantes, dar sentido y conectar significativamente con el aprendizaje (Muir, 2007). Por lo tanto, no basta con seleccionar y usar ejemplos, también el

conocimiento del profesor debe brindar la posibilidad de comunicar lo que se quiere comunicar a través de los ejemplos en relación con el objetivo de este.

Lesh et al. (1987) proponen la idea de representaciones¹² opacas y transparentes. Para estos autores, una representación transparente no tiene ni más ni menos significado que la idea o estructura que se quiere representar, es decir, se refiere a la claridad con que los ejemplos muestran lo que realmente pretenden; y una representación opaca enfatiza algunos aspectos de la idea o estructura y resta importancia a otros.

METODOLOGÍA

Para explorar las relaciones entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KMT) movilizadas por una profesora de matemáticas a partir del uso de ejemplos transparentes en la enseñanza de la ecuación cuadrática, consideramos un caso instrumental, desde un paradigma interpretativo (Bassey, 1999).

La profesora participante, al momento de recoger la información realizaba clases en secundaria (estudiantes entre 15 a 18 años) en una escuela particular subvencionada y contaba con unos cinco años de experiencia docente. La profesora participante (de seudónimo Jenny) fue la mejor graduada de su generación (licenciada en ciencias), formaba parte de un programa de formación pedagógica. Además, Jenny contaba con la motivación de perfeccionarse en la enseñanza de la matemática.

Para la recolección de datos se utilizó la video grabación de clases (siete clases), por medio de la observación no participante (Cohen y Manion, 2002), y entrevistas semiestructuradas aplicadas posterior al análisis de las clases. Las clases en las que se presentaron ejemplos transparentes (Lesh et al., 1987) fueron transcritas, específicamente considerando aquellos episodios significativos donde hubo presencia de categorías de conocimiento, tanto en el KMT, como en el KFLM.

En el análisis de datos seguimos los siguientes pasos: (i) identificamos cada uno de los episodios de análisis (ejemplos transparentes seleccionados y usados por la profesora); (ii) los ejemplos (episodios) fueron divididos en unidades de información más específicas que nos permitieran identificar evidencias o indicios de conocimiento especializado sobre KFLM y/o KMT, como en sus relaciones; y (iii) en caso de no tener certeza de la evidencia de conocimiento movilizadas por la profesora, usamos la entrevista semiestructurada (también transcrita) para profundizar en la naturaleza particular de conocimiento y la selección de los ejemplos. Para llevar a cabo los pasos (i), (ii) y (iii) nos apoyamos del análisis de contenido (López-Noguero, 2002) y la validación se logró por medio de la triangulación de consenso entre expertos (Flick, 2007).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este apartado mostramos las relaciones de conocimiento especializado entre el KMT y el KFLM a partir de la selección y uso de ejemplos transparentes, específicamente aquellas evidenciadas en la clase 3 de la enseñanza de la ecuación cuadrática.

Contexto de la clase: En el inicio de la clase 3, Jenny escribe en la pizarra los siguientes ejemplos: (a) $2x^2 + 2x - 15 = 0$; (b) $12x^2 - 5x - 2 = 0$; (c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; (d) $x^2 + 8x + 16 = 0$ y (e) $3x^2 - 2x + 1 = 0$. A partir de estos ejemplos plantea que el objetivo de la clase será usar la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas (sean completas o incompletas) presentada en forma estándar, considerando que ya habían trabajado (en clases anteriores) los tipos de ecuaciones cuadráticas y algunos métodos de factorización. De acuerdo con esto, mostramos las relaciones entre el KFLM y KMT.

¹² En este caso, consideramos ejemplos transparentes y opacos (Figueiredo y Contreras, 2015).

Relaciones entre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT), formas de interacción con el contenido matemático (KFLM) y fortalezas y dificultades (KFLM)

A partir de los ejemplos que selecciona y propone Jenny, en la entrevista elaboramos la pregunta sobre los ejemplos seleccionados para resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula. Al respecto Jenny menciona:

- P: los ejemplos tienen relación más con la organización de la estructura y el uso de la fórmula. En estos casos tratamos de pasar por todos los tipos de ejemplos, es decir, ecuaciones cuadráticas completas e incompletas, con el coeficiente “a” negativo, para ver también algunas estrategias de resolución pensando en que habitualmente los estudiantes puedan tener una imagen estática de alguna ecuación y cuando uno cambia cierto parámetro, los estudiantes presentan dificultades.

Los ejemplos usados por Jenny son transparentes a la intencionalidad de enseñanza, es decir, mostrar la técnica de la fórmula con ecuaciones cuadráticas expresadas en forma estándar. En cualquier otro ejemplo de ecuación cuadrática, por ejemplo $2x^2 + 2x = 15$, la intencionalidad de enseñanza sería opaca, obscureciendo la intencionalidad de enseñanza en relación con el objetivo de Jenny.

La respuesta de la profesora da evidencia de KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), pues conoce tipos de ejemplos (transparentes a la intencionalidad de enseñanza) que son coherentes con el objetivo que se propone en la clase. Además, para la selección de estos ejemplos, Jenny considera la forma en que los estudiantes interaccionan con el contenido matemático (KFLM). En este caso, evaluar en la fórmula de la ecuación cuadrática por los estudiantes es un proceso espontáneo, dado que la identificación de los coeficientes a, b y c del trinomio es un tema que la profesora trabajó en clases previas. A partir de la identificación de los coeficientes, incluye en los ejemplos (transparentes) algunas ecuaciones con diferentes signos en a, b o c (cambio de cierto parámetro) (KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), para que los estudiantes no tengan una imagen estática de éstas y al momento de resolver otro tipo de ecuaciones no presenten dificultades (KFLM-fortalezas y dificultades) en la resolución.

A partir de la respuesta de Jenny, en su selección de los ejemplos evidenciamos relaciones entre KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y KFLM (interaccionan con el contenido matemático), siendo el KFLM de la profesora el que moviliza el KMT en la selección de determinados ejemplos transparentes de ecuaciones cuadráticas estándares. Este tipo de ecuaciones permite que los estudiantes centren la atención en identificar los coeficientes para usar la fórmula. Del mismo modo, el conocimiento de la profesora sobre las dificultades de los estudiantes, cuando se usan ejemplos diferentes (KFLM), activa su conocimiento sobre KMT, al momento de considerar en los ejemplos de ecuaciones cuadráticas completas, aquellas con signos negativos y positivos como una estrategia de enseñanza, ejemplos que, si bien no son explícitos en la secuencia mostrada, son relevados por Jenny como parte de su proceso de enseñanza.

Relaciones entre formas de interacción con el contenido matemático (KFLM) y recursos materiales y virtuales (KMT)

De esta misma secuencia, preguntamos a Jenny sobre la fuente de selección de estos ejemplos (como parte de la ejemplificación), y al respecto nos respondió:

- P: los ejemplos usados están extraídos de los libros de textos o están extraídos de facsímiles, los cuales son documentos o pruebas o exámenes, o prototipos de exámenes que están abiertos para que los profesores tengan acceso y son para profundizar también en temas procedimentales que los estudiantes deben saber.

Lo que menciona Jenny evidencia conocimiento sobre KMT (recursos materiales y virtuales), pues conoce fuentes de selección de ejemplos, en este caso, el libro de texto y facsímiles de acceso a la universidad. Se observa también que la docente considera que una parte de la enseñanza debe estar

centrada en que los estudiantes desarrollen estrategias procedimentales estandarizadas. Las estrategias que menciona Jenny que deben conocer los estudiantes, a partir de las fuentes de donde selecciona los ejemplos, se relacionan con su conocimiento de las formas de interacción con el contenido matemático (KFLM), pues sabe qué y cómo deben aprender los estudiantes. En este caso, el KFLM es el que activa el KMT de Jenny a partir de los cinco ejemplos transparentes (a), (b), (c), (d) y (e) seleccionados y utilizados en clase.

Relaciones entre fortalezas y dificultades (KFLM), estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT) y teorías de enseñanza (KMT)

A partir de la resolución de los ejemplos de ecuaciones cuadráticas (conocimiento de los temas, KoT), Jenny muestra de manera explícita la identificación de los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas, en este caso

- P: $2x^2 + 2x - 15 = 0$] Primero identificar las variables ¿Cuál es a?
- E: Todos aquí ¿Cuál es la a?, a estos nos dedicaremos
- P Dos ¡Muy bien! dos ¿Cuál es b?
- E: Uno.
- P Uno, guds ¿Cuál es c?
- E: Menos quince.
- P: ¿Menos?
- E: Quince.
- P: [La profesora anota en la pizarra $2x^2 + 2x - 15 = 0$ y los coeficientes]

A partir del diálogo que Jenny sostiene con los estudiantes en la identificación de los coeficientes de la ecuación, observamos que remarca la pregunta sobre el valor que toma el coeficiente c, evidenciándose su conocimiento sobre fortalezas y dificultades (KFLM), dado que sabe que los estudiantes cometen errores cuando identifican coeficientes sin considerar el signo. Esto se ve confirmado en la respuesta que nos entrega Jenny, a partir de la entrevista, sobre el énfasis en relación con los signos:

- P: entonces todas las ecuaciones que están acá son ecuaciones cuadráticas simples y estándares, pero estaban pensadas justamente teniendo la idea de que los estudiantes no desviarán el foco, porque, obviamente, si el objetivo era identificar la idea era atender a eso, es decir, ejemplos claros para centrar la atención de los estudiantes. Luego con esto claro, puedo ver otro tipo de ecuaciones con otros procedimientos.

La respuesta de Jenny muestra evidencia de conocimiento sobre tipos de ejemplos claros (transparentes) (KMT), pues de acuerdo con el objetivo de la clase selecciona determinados ejemplos (transparentes) con la intención que los estudiantes centren la atención en los dos aspectos definidos por ella, la identificación de coeficientes de ecuaciones cuadráticas estándares y el uso de la fórmula para el cálculo de soluciones. Del mismo modo, se puede evidenciar que usa como estrategia la selección de ejemplos transparentes de ecuaciones cuadráticas estándares para afianzar el uso de la fórmula en los estudiantes y no desviar la atención, y luego pasar al uso de ecuaciones cuadráticas no estándares que impliquen otro tipo de procedimientos (KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

A partir de los análisis realizados se desprende lo siguiente: (i) En relación con el KMT se evidencia que la selección y uso de ejemplo transparentes, por parte de la profesora, se basa en su conocimiento pedagógico del contenido (PCK) sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y recursos materiales y virtuales, los que parecerían estar apoyados en el conocimiento sobre teorías de aprendizaje. En este sentido, el KMT movilizado por la profesora le permite, de acuerdo con la intencionalidad de enseñanza, seleccionar ejemplos de ecuaciones cuadráticas estándares para la enseñanza de la fórmula

como técnica para resolver este tipo de ecuaciones. Como parte del análisis, emerge como relevante el hecho que la profesora selecciona tipos de ecuaciones cuadráticas específicas (transparentes al propósito de enseñanza), haciendo énfasis en no desviar la atención de los estudiantes. (ii) Sobre el KFLM, se logra evidenciar que la selección y uso de ejemplos transparentes, permite a la profesora movilizar conocimientos sobre fortalezas y dificultades y formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático. Este conocimiento se refleja en que tanto la selección de los ejemplos (en el libro de texto) y su utilización en el aula se sustentan en que sabe cómo los estudiantes llevan a cabo sus procedimientos, particularmente aritméticos, y algunos de los errores y dificultades a los que se ven enfrentados.

CONCLUSIONES

La selección y uso de ejemplos transparentes (Lesh et al., 1987) ha dejado en evidencia la movilización de relaciones de conocimiento especializado de los dos subdominios del MTSK (Zakaryan et al., 2018); sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT) y las características del aprendizaje de los estudiantes (KFLM). A partir de los ejemplos transparentes usados por la profesora en la clase descrita de la enseñanza de la ecuación cuadrática se ponen en juego diversos conocimientos sobre las decisiones de enseñanza, considerando la forma en que los estudiantes aprenden, en este caso específico, sobre la ecuación cuadrática.

Los elementos de conocimiento que moviliza la profesora y las relaciones de estos dos subdominios, pertenecientes al Conocimiento Didáctico del Contenido, emergen y se conectan a partir de la selección y uso de ejemplos transparentes en la enseñanza de este contenido. En particular, se logra evidenciar que es el conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes (KFLM, en las categorías descritas) es el subdominio que activa y el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT). En particular, las decisiones que toma la profesora en relación con las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y el uso de los recursos materiales en la selección de ejemplos transparentes, está sustentado en el conocimiento de como los estudiantes proceden en matemáticas y sus fortalezas y dificultades, lo que permite ayudarles a los estudiantes, de manera consciente a comprender y operar en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Los resultados mostrados en este trabajo se han reportado en investigaciones previas (Chick, 2007; Muir, 2007; Zaskis, 2005; Zodik y Zaslavsky, 2008), pero motivadas desde la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de diversos contenidos matemáticos y el conocimiento del profesor. Pocos de estos trabajos han abordado la ejemplificación en la enseñanza (Adler & Pournara, 2020; Sánchez-Acevedo et al., 2024). Con los resultados de este trabajo (parte de una investigación de mayor envergadura) esperamos seguir avanzando en las relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas y la ejemplificación, específicamente en la enseñanza de la ecuación y función cuadrática. Con estos resultados vamos contribuyendo en esta línea, partiendo con aspectos particulares, como lo es el caso de los ejemplos transparentes y las relaciones en el PCK, específicamente en el KMT y el KFLM, los cuales dan cuenta de la dualidad de la enseñanza y el aprendizaje.

Agradecimientos

Este trabajo es parte del proyecto de I+D+i PID2021-122180OB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE y ha sido vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Adler, J. y Pournara, C. (2020). Exemplifying with variation and its development in mathematics teacher education. En D. Potari & O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: volume 1. Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development* (pp. 329–353). Sense.

- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20 (3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Cayo, H., Contreras, L. C. y Codes, M. (2022). Análisis de la selección y uso de ejemplos como vía de acceso al conocimiento especializado del profesor. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 199-207). SEIEM.
- Chick, H. L. (2007). Teaching and learning by example. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 3–21). MERGA.
- Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla
- Figueiredo, C. (2010). *Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional* [Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura, España].
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.
- Hill, H.C., Rowan, B. y Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371–406. <https://doi.org/10.3102/00028312042002371>
- Lesh, R., Behr, M. y Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. En Claude Janvier (Ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41–58). Lawrence Erlbaum.
- López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI, Revista de Educación*, 4, 167–179.
- Muir, T. (2007). Setting a good example: Teachers' choice of examples and their contribution to effective teaching of numeracy. En J. Watson, y K. Beswick (Eds.). *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematical Education Research Group of Australasia*, 2, 513–522. MERGA.
- Pascual, M. I. y Contreras, L. C. (2018). Un instrumento para el análisis de los ejemplos matemáticos para la enseñanza. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 650). SEIEM.
- Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L. y Contreras, L. C. (2023). Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 256–263). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 105-123. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>
- Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2–3), 207–217. <https://doi.org/10.1080/00207390412331316951>
- Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 165–182. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6>