INFORME DEL SEMINARIO INTERMEDIO DE INVESTIGACIÓN

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO.

HOMENAJE A FRANCISCO GIL CUADRA

Almería
28 y 29 de marzo de 2019

Coordinador del grupo: Antonio Codina Sánchez

En este documento se describe la actividad realizada por el grupo PNA en la reunión intermedia celebrada en la Universidad de Almería, los días 28 y 29 de marzo de 2019. Como viene siendo habitual, el seminario se desarrolló en dos sesiones de trabajo. En la primera rendimos un homenaje a nuestro compañero Paco Gil con un acto emotivo y una conferencia sobre su trabajo de investigación impartida por Luis Rico. Posteriormente y en esta misma sesión se presentaron y discutieron dos comunicaciones de trabajos en curso. La segunda sesión comenzó con la conferencia invitada a cargo de Bernardo Gómez. A continuación se presentaron y discutieron otros trabajos en curso.
El formato elegido para las presentaciones de los trabajos fue de grupos de trabajo, es decir, se realizan las presentaciones sin turnos de preguntas para tras ellas, distribuirnos en pequeños grupos alrededor de los ponentes y discutir los mismos. Ello permitió conocer con mayor profundidad los trabajos en un ambiente más cercano con el autor/es, facilitando discusiones más distendidas y fortaleciendo los lazos entre los asistentes.

Las sesiones se celebraron con normalidad y el desarrollo de las mismas fue valorado positivamente. Queremos desde aquí agradecer al Comité Científico y Local su labor para que la reunión fuera todo un éxito. Dichos comités estuvieron formados por:

Comité Científico

Antonio Codina Sánchez, Universidad de Almería (Coordinador Grupo PNA)
Elena Castro Rodríguez, Universidad de Granada
Isabel María Romero Albaladejo, Universidad de Almería
María Teresa Sánchez Compaña, Universidad de Málaga

Comité Local

Antonio Codina Sánchez, Universidad de Almería (Coordinador)
María Asunción Bosch Saldaña, Universidad de Almería
Manuel Cortés Izurdiaga, Universidad de Almería
Antonio Frías Zorrilla, Universidad de Almería
Emilio Gil Martínez, Universidad de Almería
María del Mar López Martín, Universidad de Almería
María Francisca Moreno Carretero, Universidad de Almería
Isabel María Romero Albaladejo, Universidad de Almería

Para el desarrollo del seminario se contó con la colaboración institucional de:

Vicerrectorado de Extensión Universitaria y Deportes, Universidad de Almería
Departamento de Educación, Universidad de Almería
Facultad de Educación, Universidad de Almería
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

CRONOGRAMA

Jueves 28 de marzo		
Hora	Título	Autores
16:30-16:45	Apertura del Seminario	Autoridades UAL Antonio Codina Sánchez, (Coord. PNA y Local)
16:45-17:45	*Contribución al área del profesor Francisco Gil Cuadra*	Luis Rico Romero
17:45-18:20	Pausa Café	
18:20-18:40	*Concentración y disfrute en el aprendizaje del álgebra en educación secundaria*	Tovar Sastre, Verónica Montoro Medina, Ana Belén Petro Balaguer, Ana Belén
18:40-19:00	*La integración de pensamiento matemático y social como una práctica en formación inicial del profesorado de educación secundaria*	María Teresa Sánchez Compaña Carmen Rosa García Ruiz

		Cristina Sánchez Cruzado
19:00-20:00	*Grupos de Discusión con los Autores*	
20:00-21:00	Tiempo libre	
21:00-	Cena	

Viernes 29 de marzo		
Hora	Título	Autores
09:30-10:30	*Retos al avanzar en la aritmética*	Bernardo Gómez Alfonso
10:30-11:00	Pausa Café	
11:00-11:20	*Análisis de la estructura de los problemas de aligación*	Bernardo Gómez Alfonso María Santágueda Villanueva
11:20-11:40	*Estrategias de resolución de problemas que involucran una función afín y su inversa de estudiantes de primero de primaria desde una aproximación funcional del early algebra*	Esperanza López Centella María C. Cañadas Santiago Antonio Moreno Verdejo
11:40-12:40	*Grupos de Discusión con los Autores*	
12:40-13:00	Balance del Seminario. Elección, si procede, de coordinador del Grupo	Antonio Codina Sánchez
13:00-13:15	Clausura	

Resúmenes

A continuación se muestran los resúmenes de las contribuciones tal y como han sido enviados por los autores:

Jueves 28 de marzo		
Hora	Título	Autores
16:45-17:45	*Contribución al área del profesor Francisco Gil Cuadra*	Luis Rico Romero

Palabras clave: Conocimientos y creencias del profesor; Contenidos didácticos; Enseñanza y aprendizaje; Evaluación en matemáticas; Método de encuesta.

La conferencia tiene un doble propósito. Primero, rememorar las ideas manejadas y los objetivos propuestos por Francisco Gil sobre evaluación en matemática escolar a finales del siglo XX y evocar los estudios que realizó, las decisiones que adoptó y el modo en que abordó y resolvió el problema elegido para su tesis doctoral.

En segundo término, reconocer al joven académico quien, en la década de los 90, revisó una diversidad de conceptos educativos teóricos acerca de la evaluación de los escolares, los cuales sistematizó e interpretó como contenidos didácticos y conocimientos del profesor de matemáticas. Es el propósito rendir homenaje al investigador comprometido con la innovación quien, mediante estudio, análisis y elección de métodos y técnicas, planteó nuevas cuestiones y propuso respuestas originales, que mejoraron el conocimiento sobre la evaluación en el aula de matemáticas.

Jueves 28 de marzo		
Hora	Título	Autores
18:20-18:40	*Concentración y disfrute en el aprendizaje del álgebra en educación secundaria*	Tovar Sastre, Verónica Montoro Medina, Ana Belén Petro Balaguer, Ana Belén

Palabras clave: Álgebra, flujo, motivación, aprendizaje álgebra, introducción álgebra

Profesores de secundaria e investigadores en Didáctica de la Matemática coinciden en considerar el álgebra como un contenidos complejo para la mayoría de los estudiantes de secundaria (Castro, 2012). El grado de abstracción propio del álgebra hace que su aprendizaje requiera tiempo y esfuerzo por parte de los estudiantes, algo complicado de conseguir dada la falta de motivación hacia las matemáticas presente en secundaria.

El objetivo de la tesis es el diseño de una secuencia de actividades para el aprendizaje del álgebra que facilite la concentración y el disfrute (flujo) durante su realización. En concreto, nos centraremos en la traducción del lenguaje ordinario al algebraico. Para ello, revisaremos las propuestas de enseñanza, variables en las tareas y materiales o aplicaciones contenidas en la literatura. Basándonos en la teoría de flujo (Kleiber, Csikszentmihalyi, & Reed, 2014) seleccionaremos y adaptaremos algunas de ellas, para que estén presentes los elementos clave para facilitar la aparición de flujo en los estudiantes, sin alterar elementos clave de la actividad.

Posteriormente, utilizaremos las producciones de los estudiantes, cuestionarios, entrevistas y observaciones para analizar su puesta en práctica y comprender mejor cómo se produce el aprendizaje y las dificultades encontradas en su enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75–94). Jaén: SEIEM.

Kleiber, D., Csikszentmihalyi, M., & Reed, L. (2014). Applications of Flow in Human Development and Education. *Applications of Flow in Human Development and Education*, 467–474. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9094-9

Jueves 28 de marzo		
Hora	Título	Autores
18:40-19:00	*La integración de pensamiento matemático y social como una práctica en formación inicial del profesorado de educación secundaria*	María Teresa Sánchez Compaña Carmen Rosa García Ruiz Cristina Sánchez Cruzado

Palabras clave: formación del profesorado, curriculum integrado, discursos de odio.

Con esta propuesta de comunicación pretendemos compartir y hacer visible una experiencia innovadora llevada a cabo en el Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga, en la que hemos participado profesorado de las áreas de conocimiento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Sociales. Concretamente se ha desarrollado en la asignatura de Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa, en las especialidades de Matemáticas y Ciencias Sociales, durante el curso académico 2017/2018. Dicha asignatura se organiza para formar futuros docentes como agentes curriculares críticos, comprometidos con educar para una ciencia ciudadana.

Han participado un total de 30 alumnas y alumnos de la especialidad de matemáticas y 40 de la especialidad de Ciencias Sociales. El plan formativo se organiza en torno al diseño de un Proyecto Integrado, a partir de los curricula de Matemática, Ciencias Sociales y Filosofía. La temática del proyecto recoge un problema social como es la difusión de corrientes de opinión en las redes sociales, los medios de comunicación y la cultura popular; en forma de discursos de odio (hate speech).

Los Proyectos Integrados se han diseñado a partir de la identificación de discursos de odio de carácter homofóbico, sexista, racista, xenófogo, gerontofóbico, transexual e islamofóbico, con el objeto de que la propuesta educativa contemple su análisis, y la elaboración de contra-narrativas que permitan educar científicamente para el ejercicio de una ciudadanía crítica y reflexiva. A la vez que les permite desarrollar habilidades para la investigación-acción educativa y abrir una perspectiva interdisciplinar en la formación inicial del profesorado. Destacamos las bondades y necesidades de dicha práctica, sobre todo en la educación secundaria en la que tan parcelado se encuentra todo el conocimiento. También entendemos que este tipo de prácticas puede ayudar al alumnado a tomar conciencia sobre la necesidad de adoptar un enfoque social en el aula, siempre desde esa perspectiva interdisciplinar, para difundir nuestro legado cultural, poder entender el presente y concebir el futuro. Incidir en el potencial que tiene la enseñanza de las humanidades, las ciencias y las matemáticas para lograr una alfabetización científica y tecnológica de la ciudadanía a partir de un enfoque social y humano.

Se han diseñado un total 8 proyecto basados en la identificación de los discursos de odio expuesto anteriormente, los contenidos matemáticos que se han utilizado para la elaboración de las contra-narrativas han sido, la teoría de conjuntos, los números complejos, el sistema de numeración decimal posicional y completo, la estadística y la probabilidad, las teselaciones de los mosaicos, el origen y la historia del número 0, las fracciones y los porcentajes.

Viernes 29 de marzo		
Hora	Título	Autores
09:30-10:30	*Retos al avanzar en la aritmética*	Bernardo Gómez Alfonso

Palabras clave: didáctica, aritmética, educación secundaria, retos

Al avanzar en el estudio de la aritmética los estudiantes se enfrentan a cambios significativos en las matemáticas que ya han aprendido. Estos cambios afectan no solo al conocimiento matemático en sí mismo sino también al conocimiento matemático como objeto de enseñanza.

En esta conferencia se describen estos cambios, destacando aquellos fenómenos en que los estudiantes pueden tener problemas de aprendizaje o aquellos aspectos que hacen que un contenido curricular sea más difícil de enseñar.

Viernes 29 de marzo		
Hora	Título	Autores
11:00-11:20	Comunicación Tipo II *Análisis de la estructura de los problemas de aligación*	Bernardo Gómez Alfonso María Santágueda Villanueva

Palabras clave: didáctica, matemáticas, problemas, aligación, estructura.

Los problemas de aligación forman parte de las matemáticas desde tiempos remotos. Obviamente los enunciados de estos problemas han evolucionado a lo largo del tiempo según usos y costumbres sociales: en el siglo XVI los problemas de aligación trataban sobre mezclas de vino, trigo… y aleaciones de oro o plata y en el siglo XIX aparecieron las disoluciones y la venta de tipos de café (ver Gómez (2015)).

Actualmente estos problemas han perdido interés educativo, pero siguen estando presentes en los libros de texto, no por sí mismos sino para la práctica de resolución de ecuaciones en los temas de álgebra. Sin embargo, son problemas que están presentes en la vida diaria. Por ejemplo en el ámbito de la restauración: en el reality show “Pesadilla en la cocina” en el episodio titulado “El Bodegón de Sancho”, Chicote le explica a los dueños del restaurante que para saber el precio de una ración ha de hacer lo siguiente: hacer el pote (el guiso) con los productos, saber cuántas raciones salen de ese pote y cuando lo sepan ya pueden calcular el precio al que pueden vender la ración de la siguiente forma, primero multiplicar las unidades de los productos utilizados por su precio, sumarlo, multiplicarlo por tres (para cubrir gastos) y dividirlo por el número de raciones que han salido del pote. En esta situación se está calculando el precio medio de la ración.

Objetivos y metodología

Estamos interesados en averiguar cuál ha sido el tratamiento que ha dado la enseñanza a estos problemas y el efecto sobre los estudiantes. El esquema general de la investigación tiene dos fases la primera es describir el modelo existente en el sistema escolar y la segunda indagar sobre las relaciones entre este modelo y las competencias del estudiantado.

En esta comunicación solamente se hablará de la primera fase.

Nuestro objetivo principal es estudiar los modelos de enseñanza utilizando una metodología de análisis de libro de texto con un enfoque de aproximación global, ya que estudiar textos aisladamente (un determinado autor en un momento o curso escolar) tiende a desconsiderar las raíces y fuentes de las concepciones vertidas.

Pero para poder describir un modelo de enseñanza local (local porque se centra en un tema, constructo u objeto matemático particular), es necesario considerar el conjunto de elementos que caracteriza su enseñanza. Como en este trabajo estamos interesados en una familia de problemas, los problemas de aligación, entendemos que entre los elementos que caracterizan su enseñanza debemos fijarnos en primer lugar en los aspectos contextuales y los estructurales, los primeros para situar su ámbito de actuación y los segundos para describir sus características: elementos matemáticos, tipos y las lecturas analíticas que determinan sus métodos de resolución. Para ello tomamos como referentes trabajos previos realizados previamente, sobre estos aspectos (Gómez, 2105; Gómez y García, 2014; y Gómez y Puig, 2018).

Los problemas de aligación

Bajo el nombre de regla de aligación se conoce el procedimiento general para resolver los problemas relacionados con mezclas, así una mezcla es la unión de varias sustancias de distinta calidad y precio; si son metales se llama aleación, y si son líquidos y sustancias, como por ejemplo la mezcla de agua y sal se llama disolución. En la actualidad parece ser que el término de aligación está en desuso y se prefiere hablar directamente de problemas de mezclas y aleaciones (Gómez, 2105, pg. 3). Ejemplos de problemas de aligación son los siguientes

<u>Ejemplo 1:</u> Un logrero ha mezclado 15 fanegas de trigo de a 23 reales la fanega con 12 fanegas de centeno a 19 reales la fanega ¿a qué precio ha de vender cada fanega del montón para no perder ni ganar? [CITATION Bai90 \p 133-134 \l 3082]
<u>Ejemplo 2:</u> Un comerciante tiene arroz de 30 y 38 ptas. El kilo, respectivamente. ¿Cuántos kilos de cada clase debe emplearse para hacer una mezcla de 100 kilos a 35 ptas. el kilo? [CITATION San78 \p 205 \l 3082]
<u>Ejemplo 3:</u> Calcular la cantidad de sal que hay que añadir a una disolución de 342 g. al 5% para elevar su concentración al 10% [CITATION Lui50 \p 122 \l 3082].
<u>Ejemplo 4:</u> Se tienen dos clases de vino, un vale 12 d, y la otra 15 d. se quieren mezclar para que valgan 13 d. Pregunta. ¿Cuánto vino hay que poner de cada clase? [CITATION Sti441 \p "266 dcha." \l 3082]

Contextos
Los contextos de los problemas de aligación es la de los problemas de mezclas, que hacen referencia a los aspectos descriptivos que adjetivan las cantidades (por ejemplo, litros, kg, etc.) y las sitúan en un ámbito de aplicación (por ejemplo, el ámbito comercial) que les da un significado real o realista. Los contextos más habituales de los problemas de aligación son:

Comercial, donde hace referido a situaciones de compra, venta, precio, costo o intercambio de productos, bienes y artículos. por ejemplo: Se tienen dos clases de vino, una vale 12 d, y la otra 15 d. se quieren mezclar para que valgan 13 d. Pregunta. ¿Cuánto vino hay que poner de cada clase? [CITATION Sti44 \p "266 dcha." \l 3082].

Científico-técnico, destaca aquellas situaciones sobre la ciencia, sus usos y aplicaciones técnicas, por ejemplo: Con dos líquidos de densidades 1,3 y 0,7 se ha formado una mezcla de densidad 0,9. Sabiendo que la cantidad total es de 30 m^3 se piden las cantidades de cada líquido [CITATION Gar59 \p 110 \l 3082].

Problemas ingeniosos o recreativos, ya que ha sido usado en la matemática tradicional porque han sido utilizados para desarrollar el ingenio, para situaciones relacionadas con grupos e instrucciones sociales, por ejemplo: Cierto obispo ordenó repartir 12 panes entre el clero. Previó así que cada sacerdote recibiera dos panes; un diácono medio y un lector la cuarta parte. Obrando así el número de clérigos y de panes resulta el mismo. Diga, quién quiera, ¿cuántos sacerdotes, diáconos y lectores debe haber? [CITATION 80463 \p 1155 \l 3082]

Monetario, intervienen dos tipos de monedas y sus pesos: Un mercader tiene 2 piezas de oro, el cual no sabe cuánto (cuántos marco) pesa cada pieza, por más que sabe que el marco de la una pieza vale 23 ducados cada marco, y así mismo el marco de la segunda pieza vale 18. Este mercader, de estas dos piezas hizo una que pesó 40 marcos, después de juntadas en uno, y halló que valía cada marco veinte ducados. Demando cuánto pesaba cada pieza antes de que fuesen fundidas [CITATION Ort37 \p 176 \l 3082].

Orfebrería donde intervienen diversos metales y no se gana ni pierde nada, por ejemplo: Se funden juntos un anillo de oro, de ley 850 milésimas y 20 g de peso, y un pendiente de oro, de ley 900 milésimas y 25 g de peso, al objeto de hacer un anillo. Dígase cuanto pesará y cuál será su ley. [CITATION Álv68 \p 60 \l 3082]

Liga de plata y oro, se une el oro o la plata de distintas calidad para bajar la calidad del metal de mayor calidad, así: Un hombre tiene dos suertes de oro, uno es de ley 17 quilates, y el otro es de 23 quilates, quiere hacer oro de 22 quilates de ley, preguntase cuanto oro tomará de cada suerte para que juntas las dos cantidades, y ligada una con la otra, sea oro de ley de 22 quilates [CITATION San25 \p "222 dcha." \l 3082].

Bancario que consiste en el cambio de monedas, así: Un banco tiene dos tipos de cambio: en uno da *a* monedas por una corona, y en el otro da *b* monedas por lo mismo. Una persona desea obtener c monedas por una corona. ¿Cuántas monedas de cada tipo deben darle?[CITATION Eul22 \l 3082]

Estructura

El apelativo “estructura” es ampliamente usado y la mayoría parte de las personas no sienten la necesidad de explicar qué quiere decir con eso. En contextos diferentes el término estructura puede querer decir cosas diferentes para diferentes personas. En este trabajo se usa el término estructura en el contexto de los problemas. Entendemos que la estructura de un problema atiende a dos componentes, una interna y otra externa: externa por sus aspectos matemáticos descriptivos e interna por las relaciones y conexiones entre sus cantidades.

La estructura externa de los problemas de aligación es la de una composición y un promedio. La noción de composición la tomamos de Freudenthal (1983) que se define como una terna (Ω, M, ω), donde Ω es un conjunto de partes o clases de un universo; a cada una de las cuales se es asocia una magnitud o una medida en M mediante una función ω [CITATION Fre83 \p 75 \l 3082] . Por ejemplo, los minerales que componen una aleación forman el conjunto Ω y la función ω puede ser la que les asigna su masa (peso o porcentaje que le corresponde a la aleación). En los problemas de aligación intervienen dos funciones: ω_1 que asigna las cantidades m_i de cada parte o sustancia y ω_2 que asigna los precios p_i de cada parte o sustancia.

Por otro lado, el promedio se define[CITATION Wen97 \l 3082] por un número que en una adición se puede sustituir por los sumandos sin alterar la suma. No confundir con el algoritmo para calcularlo, en el caso que el promedio que se pide es el precio medio se calcula a través de las fórmulas:

$$\frac{\sum m_i p_i}{\sum m_i} = P_m$$ Donde P_m es el precio medio.

La estructura interna de los problemas de aligación viene dada por la lectura analítica del problema.

La “lectura analítica” del problema es la reducción del enunciado a una lista de cantidades y relaciones (y conexiones) entre cantidades, transformándolas para dar lugar a partir de esas cantidades y relaciones a la ecuación, a la fórmula o a la regla que lo resuelve (Gómez, y Puig, 2108, pg. 10).

Desde el punto de vista cognitivo, se distingue entre dos tipos de lectura analítica: la epistemológica, que aparece reflejada en los libros de texto como cogniciones petrificadas, en el sentido de Puig (2006); y la personal, es la lectura analítica que hacen los sujetos cuando están intentando resolver el problema.

La primera da cuenta de los métodos tradicionales de resolución, mientras que la segunda muestra los productos o efectos de la enseñanza en los individuos en particular.

La lectura analítica de los problemas de aligación empieza al identificar la condición esencial de toda mezcla que se puede enunciar de dos maneras, la primera es que después de hecha la aligación debe resultar el mismo valor que por separado, o lo que es lo mismo, que el total de las cantidades ha de valer lo mismo antes y después de la mezcla, que transcrita al lenguaje algebraico es la siguiente ecuación:

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 = (m_1 + m_2) P_m (I)$$

Donde m_i son las cantidades de cada sustancia y p_i los precios. Utilizamos P_m para indicar el precio medio. Esta lectura de la condición esencial de las mezclas favorece la resolución de los problemas en los que la cantidad desconocida o pregunta es P_m, sin más que aplicar la fórmula (II) derivada de la ecuación (I):

$$P_m = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2}{m_1 + m_2} (II)$$

Otra forma de enunciar esta condición esencial es que lo que se gana con el de menor valor ha de compensar (ser igual) a lo que se pierde con el de mayor valor, o lo que es lo mismo, la pérdida que resulta por la mezcla de unas cantidades ha de ser igual a la ganancia que producen las otras, que transcrita al lenguaje algebraico es la siguiente ecuación:

$$m_1 (p_1 - P_m) = m_2 (P_m - p_2) (III)$$

Esta segunda lectura de la condición esencial de las mezclas favorece la resolución de los problemas en los que las cantidades desconocidas o pregunta son es la cantidad $m_1 y m_2$, sin más que aplicar la fórmula (IV) derivada de la ecuación (III):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_m - p_2}{p_1 - P_m} (IV)$$

Los problemas que corresponden a la pregunta ¿cuánto vale P_m? se denominan de aligación medial, y los problemas que corresponden a la pregunta ¿cuánto valen $m_1 y m_2$? O ¿cuánto valen $p_1 y p_2$? se denominan aligación alternada.
Obsérvese que, en este segundo tipo de problemas, la respuesta que da la fórmula (IV) es una razón, y por tanto admite muchos valores, por lo que la solución al problema es indeterminada.

Para limitar el número de respuestas hay que añadir un dato más, lo que da lugar a dos subtipos: la aligación alternada total (ejemplo 2) donde se trata de determinar las cantidades en que entran los componentes de la mezcla conocidos los precios de las componentes, el precio medio de la mezcla y la cantidad total de la mezcla; y la aligación alternada parcial_(ejemplo 3) se trata de determinar la cantidad con que entra una de las componentes de la mezcla, sabiendo los precios de las componentes, el precio medio, y las cantidades con que entran el resto de las componentes. Representación tabular

Para visualizar la lectura analítica de los problemas de aligación es útil usar la representación tabular, para ello adaptamos el esquema usado para tareas de comparación de razones por Gómez y García (2014).

<u>Ejemplo 1</u>: Un logrero ha mezclado 15 fanegas de trigo de a 23 reales la fanega con 12 fanegas de centeno a 19 reales la fanega ¿a qué precio ha de vender cada fanega del montón para no perder ni ganar? (Bails, 1790, págs. 133-134)

En este caso, el par de composiciones: Ω_1 y Ω_2 son {trigo, centeno} y ϖi: asigna una cantidad a cada uno de los elementos de Ω (véase en la tabla)

	Trigo	**Centeno**	**Cantidades de la mezcla**	
ω_1: $\Omega_1 \rightarrow$ **fanegadas**	m_1=15 fanegadas	m_2=12 fanegadas	$m_1+m_2=15+12$ fanegadas	Dato conocido
ω_2: Ω_2 $\rightarrow$ **reales/fanegadas**	p_1=23 reales/fanegada	p_2=19 reales/fanegada	P_m= reales/fanegada	Pregunta $P_m = \frac{m_1p_1+m_2p_2}{m_1+m_2} = \frac{15 \times 23 + 12 \times 19}{15+12}$
Precios de (fanegadas)	$m_1p_1 = 15 \times 23$	$m_2p_2 = 12 \times 19$	$m_1p_1 + m_2p_2 = 15 \times 23 + 12 \times 19$	Dato conocido

Tabla 1. Estructura interna del ejemplo 1.

<u>Ejemplo 2</u>: Un comerciante tiene arroz de 30 y 38 ptas. El kilo, respectivamente. ¿Cuántos kilos de cada clase debe emplearse para hacer una mezcla de 100 kilos a 35 ptas. el kilo? [CITATION San78 \p 205 \l 3082]

El par de composiciones. Ω_1 y Ω_2 son {arroz caro, arroz barato} y ϖi: asigna una cantidad a cada uno de los elementos de Ω (véase en la tabla)

Tabla 2. Estructura interna del ejemplo 2 vista desde el punto algebraico.

	Arroz barato	**Arroz caro**	**Cantidades de la mezcla**	
ω_1: $\Omega_1 \rightarrow$ **Kg**	$m_1=x$	$m_2=y$	$m_1+m_2=x+y=100$	Preguntas $P_m = \frac{p_1m_1+p_2m_2}{m_1+m_2} \rightarrow 35 = \frac{30x+38y}{100}$
ω_2: Ω_2 $\rightarrow$ **ptas/kg**	p_1=30	p_2=38	P_m= 35	Datos conocidos
Precios de (ptas)	$p_1m_1=30x$	$p_2m_2=38y$	$p_1m_1+p_2m_2=30x+38y$	Datos conocidos

Tabla 3. Estructura interna del ejemplo 2 vista desde el punto aritmético.

	Arroz barato	Arroz caro	Cantidades de la mezcla	
ω_1: $\Omega_1 \rightarrow$ Kg	$m_1=x$	$m_2=y$	$m_1+m_2=x+y=100$	Preguntas $\frac{m_1}{m_2}=\frac{P_m-p_2}{p_1-P_m} \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{35-38}{30-35}$
ω_2: $\Omega_2 \rightarrow$ ptas/kg	$p_1=30$	$p_2=38$	$P_m= 35$	Datos conocidos
Diferencia al P_m	$p_1-P_m=30-35$	$P_m-p_2=35-38$	0	Datos conocidos

Conclusiones y líneas futuras de investigación

Con lo anterior los problemas de aligación quedan completamente descritos en sus aspectos estructurales y contextuales.

Creemos que esto nos ayudará a describir los modelos de enseñanza local y a poder estudiar sus efectos en el aprendizaje de los estudiantes a la vista de su desempeño cuando están intentando resolverlos en sus distintos tipos.
Actualmente estamos intentando describir el modelo de enseñanza local mediante el análisis de los libros de texto de la generación actual de los manuales escolares: LGE (1971) y LOGSE (1992).

Más adelante, queremos continuar el estudio de los modelos de enseñanza en su dimensión histórico - epistemológica, centrándonos en tres épocas de la evolución de los manuales escolares bien diferenciadas: la de los libros y manuales de autor, la de las series cíclicas escolares, la de las enciclopedias y la penúltima generación de manuales escolares antecedente de la actual

Bibliografía

Alcuino(804). (1863). Propositiones ad acuendos juvenes. En J. P. Migne, *Patrologiae Cursus Completus:Patrologiae Latinae,* (Vol. tomus 101, págs. columnas 1143-1160). Paris.

Álvarez, A. (1968). *Matemáticas septimo curso.* Valladolid: Miñón.

Bails, B. (1790). *Arismética para negociantes.* Madrid: La viuda de Ibarra.

Euler, l. (1822). *Elements of algebra.* Londres: Harvard College Library.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

García, J. (1959). *Matemáticas tercer curso.* Alcoy: Edición Marfil.

Gómez, B. (2015). Los problemas de aligación. *XIV CIAEM-IEACME, Chiapas, México.*

Gómez, B., & García , A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguale. En M. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Órtega, *Investigación en Educación matemática XVIII* (págs. pp. 375- 384). Salamanca: SEIEM.

Gómez, B., & Puig, L. (2018). Oh tú que indicas tan bien las horas, ¿cuántas han pasado desde esta mañana? Problemas descriptivos de fracciones. En P. Flores, J. Lupiáñez, & I. Segovia, *Enseñar Matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz.* (págs. 115-128). Granada: Atrio.

Ortega, J. (1537). *Compusición de la Arte de la Aritmética y juntamente de Geometría.* Sevilla: Jacom Combreger(1ª ed. 1512).

Puig, L. (2006). Vallejo Perplejo. En A. Maz, M. Rodríguez, & M. Romero, *José Mariano Vallejo, el matemático ilustradoi. Una mirada desde la Educación Matemática* (págs. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cordoba.

Santa Cruz, M. G. (1625). *Libro de Arithmetica especulativa, y practica, intitulado, el dorado contador,contiene la fineza y reglas de contar oro y plata, y los Aneajes de Flandes. Por moderno y compendioso estilo.* Madrid: impreso por la viuda de Alonso Martín.

Santillana. (1978). *Guía didáctica Matemáticas 8 EGB.* Valencia: Santillana.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica Integra.* Norimberg: Johan Petreium.

Vives, L. (1950). *Matemáticas cuarto curso por Edelvives.* Zaragoza: Luis Vives.

Wentworth, G. (1897). *Aritmética práctica.* Boston: Edit. Ginn y compañia

Viernes 29 de marzo		
Hora	Título	Autores
11:20-11:40	*Estrategias de resolución de problemas que involucran una función afín y su inversa de estudiantes de primero de primaria desde una aproximación funcional del early algebra*	Esperanza López Centella María C. Cañadas Santiago Antonio Moreno Verdejo

Palabras clave: *early algebra*, pensamiento funcional, estrategias de resolución, función inversa, Educación Primaria.

Se conoce como *early algebra* un enfoque particular para la enseñanza y el aprendizaje temprano de las matemáticas, surgido en los años 80 en los Estados Unidos de América. Entre los objetivos del *early algebra* no está adelantar a la educación infantil y primaria el currículo matemático relativo al álgebra concebido actualmente en etapas educativas posteriores, sino iniciar el tratamiento de nociones propias del álgebra de manera significativa y accesible para los escolares. Esto supone un intento organizado de facilitar la inmersión de los escolares en esta materia y su comprensión real de las ideas algebraicas. Entre las distintos canales para este fin, destaca el pensamiento funcional, “centrado en la relación entre dos (o más) cantidades que varían, y para el cual las funciones constituyen sistemas de representación de la generalización de la relación entre cantidades” (Smith, 2008, p. 143).

Numerosas investigaciones, tanto en el panorama nacional como en el internacional, evidencian la manifestación de pensamiento algebraico y funcional de niños de educación primaria e incluso infantil. Más concretamente, Blanton y Kaput (2004) documentan cómo niños de 6 a 10 años de edad son capaces de detectar relaciones aditivas y multiplicativas entre las variables de relaciones funcionales. Brizuela et al. (2015) evidencian la comprensión de las letras como variables por parte de estudiantes de 6 y 7 años; mientras que Merino, Cañadas y Molina (2013) dan cuenta de la variedad y el uso combinado de estrategias empleadas por estudiantes de la misma edad al resolver un problema basado en un ejemplo genérico.

Desde una aproximación funcional del marco del early algebra, el objetivo de esta investigación es identificar y describir las estrategias de un grupo de 30 estudiantes de primero de primaria (6-7 años) de un colegio español al resolver dos problemas de generalización.

Como parte de una investigación más amplia, diseñamos varios problemas con características distintivas y basados en diferentes funciones lineales y afines. En este estudio nos centramos en el trabajo llevado a cabo por los estudiantes en dos cuestionarios individuales sobre dos problemas que involucran la función $f(x)=x+5$ y su inversa f^{-1}. Ambos problemas se presentan contextualizados: uno centrado en la relación entre las edades de dos hermanos, y otro en la relación entre el número de perros y el número de platos en una cuidadora de animales. Las preguntas de los cuestionarios refieren a casos particulares de la función y a su forma general. Analizamos las respuestas de los estudiantes a cuestionarios escritos mediante el diseño de un sistema de categorías establecido con base en la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 1990) y trabajos relacionados (Cañadas y Fuentes, 2015; Merino et al. 2013; Morales et al., 2016, 2018). Identificamos y describimos las siguientes estrategias: respuesta directa, variación constante (aumento/disminución), operacional, conteo, particularización, generalización, repetición, recursión y asignación no reglada. En particular, completamos los sistemas de categorías existentes en la literatura de investigación al respecto con la detección de la estrategia de recursión, explicada en nuestro trabajo. Destacamos la diversidad y el uso combinado de estrategias, y sus diferentes frecuencias según las cuestiones involucren f o f^{-1}. Concluimos que las cuestiones de los problemas que involucran la función inversa f^{-1}

ofrecen mayor dificultad para el alumnado que aquellas que involucran f.

Marco teórico:

La presente investigación se encuadra en el marco teórico de una aproximación funcional del early algebra (Blanton y Kaput, 2011). Se conoce por early algebra a un enfoque particular para el aprendizaje temprano de las matemáticas, surgido en los años 80 en Estados Unidos de América. en Entre los orígenes de esta nueva forma de conceptualizar el álgebra escolar destacan los trabajos de Davis (1985, 1995) y Kaput (1999), y las iniciativas del National Council Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 2000). En ellos se señala:

> la importancia de un comienzo temprano en el álgebra, aprovechando el conocimiento informal de los estudiantes;
> la integración del aprendizaje del álgebra con el de otros temas, aplicando apropiadamente el conocimiento matemático;
> la inclusión de las diferentes formas de pensamiento algebraico (ver Figura 1);
> la construcción sobre el potencial lingüístico y cognitivo natural de los estudiantes, animándoles al mismo tiempo a reflexionar sobre lo que aprenden y a articular lo que saben;
> y la promoción del aprendizaje activo y la construcción de relaciones, priorizando el sentido y la comprensión.

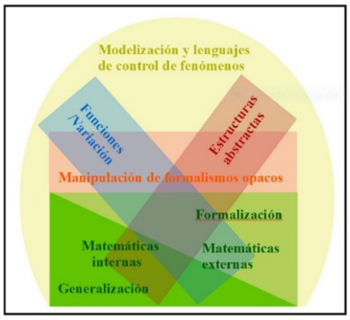

Figura 1. Interrelación de las cinco formas de razonamiento algebraico (adaptado de Kaput, 1999)

Como buena parte de los antecedentes del presente trabajo, la Tabla 1 relaciona una serie de investigaciones recientes en torno al pensamiento funcional de alumnado de educación primaria, conectadas temática y metodológicamente con esta investigación.

Tabla 3. Investigaciones recientes sobre pensamiento funcional en alumnado de primaria

Investigación	Edad	Objeto de estudio / Hallazgos de investigación	Funciones

Amit y Neria (2008)	11-13	Métodos de generalización en problemas que involucran funciones lineales y no lineales	f(x)=2x+6 g(x)=x(4+x) h(x)=1/2(x+1)(x+2)
Bastías y Moreno (2016)	10-11	Identificación de vinculaciones entre variables de una función afín	
Blanton y Kaput (2004)	6-10	Identificación de propiedades de relaciones funcionales → Paridad, relación aditiva/multiplicativa entre variables,…	*f*(x)=2*x* *g*(*x*)=3*x*
Brizuela et al. (2015)	6-7	Introducción de notación de variable → Comprensión de letras como variables	f(x)=x+1 f(x)=x+3
Brizuela y Earnest (2008)	7-10	Uso de relaciones funcionales y sistemas de representación para interpretar problemas (del tipo "hacer un trato")	
Cañadas et al. (2016)	6-7	Articulación de ideas sobre la relación funcional involucrada en un problema → Establecimiento de función involucrada	f(x)=2x
Cañadas y Fuentes (2015)	6-7	Estrategias y sistemas de representación en problemas basados en funciones → Diversidad de estrategias, predominio de la representación pictórica	f(x)=5x
Merino et al. (2013)	6-7	Estrategias al abordar una en un ejemplo genérico → Variedad y uso combinado de estrategias	f(x)=2x+2
Morales et al. (2016)	6-7	Estrategias para resolver un problema que involucra una relación funcional → Mayor uso de operatoria, identificación de correspondencia y covariación	f(x)=x+5
Morales et al. (2018)	6-7	Relaciones funcionales identificadas y estrategias para resolver un problema que involucra una relación funcional → Mayor uso de operatoria y conteo, vínculo entre estrategias usadas y relaciones funcionales identificadas	f(x)=x+5
Pinto y Cañadas (2018)	10-11	Percepción de la función inversa de una función e identificación de estructuras en un problema que las involucra	f(x)=2x+6
Pinto y Cañadas (2017)	8-9	Generalización de la relación funcional involucrada en un problema	f(x)=2x+6
Schliemann, Carraher y Brizuela (2001)	9-10	*Estrategias para tratar con tablas de funciones y funciones afines*	f(x)=3x f(x)=2x+1

Objetivos de investigación

El objetivo principal de esta investigación es estudiar las estrategias empleadas por estudiantes de primer curso de Educación Primaria (6-7 años) del sistema educativo español en la resolución de cuestiones basadas en una función afín y su inversa, siendo presentada la correspondiente relación funcional mediante una situación en contexto y bajo la misma formulación para cada una de las cuestiones (ya sean relativas a la propia función o a su inversa). Concretamos este objetivo en los siguientes tres objetivos particulares:

O1. Identificar y describir las estrategias empleadas por alumnado de primer curso de educación primaria en cuestiones relativas a un problema de generalización contextualizado que involucra la función $f(x)=x+5$.
O2. Identificar y describir las estrategias empleadas por alumnado de primer curso de educación primaria en cuestiones relativas a un problema de generalización contextualizado que involucra la función inversa a la anterior ($f^{-1}(x)=x-5$).
O3. Comparar las estrategias de alumnado de primer curso de educación primaria en cuestiones análogas basadas en la función $f(x)=x+5$ y en su función inversa.

Metodología

- Población. Los sujetos participantes en la fase experimental del estudio de investigación fueron un grupo de 30 estudiantes de primer curso de Educación Primaria (6-7 años). El grupo no había recibido instrucción sobre relaciones funcionales en clase; todo el alumnado compartía conocimientos elementales de aritmética y estaba habituado a leer y escribir letras en mayúscula. Bajo la consideración de la maestra del grupo, había estudiantes con altas capacidades intelectuales y estudiantes con dificultades de aprendizaje específicas, no teniendo ninguno de ellos una adaptación curricular.

- Instrumentos de recogida de la información. Cuestionarios escritos de trabajo individual basados en dos problemas contextualizados que involucran la función $f(x)=x+5$ y su inversa.

- Fase experimental. Basada en el desarrollo de las sesiones de trabajo llevadas a cabo en las visitas al colegio participante en el estudio.

Técnicas de análisis

Se trata de una investigación cualitativa, de naturaleza descriptiva y exploratoria. Para el análisis de los datos se diseñó un sistema de categorías establecido con base en la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 1990) y trabajos relacionados (Cañadas y Fuentes, 2015; Merino et al. 2013; Morales et al., 2016, 2018).

Resultados

Identificamos y describimos las siguientes categorías (no mutuamente excluyentes) de estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos: estrategia de respuesta directa, de variación constante (aumento/disminución), operacional, conteo, estrategia de particularización, de generalización, de repetición, de recursión y de asignación no reglada. En particular, completamos los sistemas de categorías existentes al respecto en la literatura de investigación hasta la fecha con la detección de la estrategia de recursión, explicada en el trabajo.

Por otro lado, destacamos la diversidad y el uso combinado de estrategias, y sus diferentes frecuencias según las cuestiones involucren f o f^{-1}.

Por último, concluimos que las cuestiones que involucran la función inversa f^{-1} ofrecen mayor dificultad para el alumnado que aquellas que involucran f.

Referencias

Amit y Neria (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of pre-algebra students, ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 40(1): 111-129.

Bastías, K. y Moreno, A. (2016). Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5º curso primaria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 565). Málaga, España: SEIEM.

Blanton, M. L. y Kaput J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking, Proceedings of the 28t Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 135-142.

Blanton y Kaput (2011), Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades, J. Cai y E. Knuth (Eds.), Early algebraization, Berlín, Alemania: Springer.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. M. y Gardiner, A. (2015). Children’s use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. Mathematical Thinking and Learning, 17, 1-30.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the “best deal” problem. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.). Algebra in the early grades (pp. 273-302). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum and Associates/NCTM.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 235-272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Davis, R. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. Journal of Mathematical Behavior, 4, 195-208.

Davis, R. B. (1995). Why are they changing school algebra and who’s doing it?, Journal of Mathematical Behavior, 14,1-3.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra, En E. Fenema y T. A. Romberg (Eds.), Mathematical classrooms that promote understanding, (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. Qualitative Sociology, 13(1), 3-21.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 365-375). Málaga: SEIEM.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. Enseñanza de las Ciencias, 36(3), 59-78.

NCTM (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Structures and generalisation in a functional approach: the inverse function by fifth graders. En Gómez, D. M. (Ed.), Proceedings of the First PME Regional Conference: South America (pp. 89-96). Rancagua, Chile: PME.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Functional thinking and generalisation in third year of primary school, Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Dublin City University.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y *Brizuela*, B. M. (2001). *When tables become function tables*. En M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 145-152). Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Institute.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En Algebra in the early grades (pp. 133-163). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.