

Jornadas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático

Baeza, febrero 2010



Publicación del grupo de didáctica del
Análisis Matemático de la SEIEM



Editores:

Ángel Contreras de la Fuente
Lourdes Ordóñez Cañada

Entidades colaboradoras:



Universidad de Jaén



Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática



Universidad Internacional de Andalucía “Antonio Machado”

ISBN: XX-XXXX-XXX-X

Presentación

Durante los días 14 al 16 de febrero de 2010 se han celebrado las Jornadas de Investigación del Grupo de Didáctica del Análisis de la SEIEM en la Universidad Internacional Antonio Machado de Baeza (Jaén), lugar idóneo para la reflexión y para disfrutar de la belleza de la ciudad.

Se han expuesto y debatido cuatro ponencias sobre la enseñanza-aprendizaje de la integral definida en los niveles de Bachillerato y Universidad.

La primera ponencia “Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE” de la Dra. María Teresa González Astudillo, de la Universidad de Salamanca y del Profesor Eliécer Aldana Bermúdez de la Universidad Quindío-Armenia de Colombia, en ella se expusieron los resultados que se están obteniendo en una tesis en curso sobre estudiantes colombianos de tercer año de licenciatura que se enfrentan por primera vez a la enseñanza del concepto de la integral definida de Riemann, haciendo ver cómo desde la perspectiva teórica los sujetos realizan ciertas construcciones mentales para comprender los conceptos matemáticos.

La segunda ponencia “La integral definida en las pruebas de acceso a la universidad (PAU): sesgos y restricciones en la enseñanza de este objeto en 2º de Bachillerato” de la Profesora Lourdes Ordóñez Cañada y del Dr. Ángel Contreras de la Fuente de la Universidad de Jaén, donde, aplicando el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS), se abordaron los significados institucionales de referencia de la integral definida mediante las configuraciones correspondientes y la problemática de las PAU en la enseñanza-aprendizaje de dicho concepto.

La tercera ponencia “La comprensión de la integral definida desde la perspectiva APOS en alumnos de ingeniería” fue referida por el Dr. Francisco José Boigues Planes, de la Universidad Politécnica de Valencia, y mostró un estudio realizado con estudiantes de ingeniería sobre la integral definida y su objetivo fue caracterizar los niveles de desarrollo del esquema del concepto utilizando una métrica fuzzy para determinar el grado de desarrollo del citado esquema a través de los niveles intra, inter y trans definidos desde la teoría APOS.

La cuarta ponencia “La integral de Riemann: interpretación de los errores de aproximación utilizando un CAS (Computer Algebra System)” de los Drs. Matías Camacho Machín y Martín Socas Robayna de la Universidad de La Laguna y del Dr. Ramón Depool Rivero de la Unexpo (Venezuela), en la cual se fueron describiendo e interpretando los errores que los estudiantes cometen cuando trabajan con la integral definida en un entorno informático como el CAS, todo ello según las herramientas que ofrece el marco teórico del enfoque lógico semiótico (ELOS).

También se presentaron y debatieron dos Comunicaciones de iniciación a la investigación, una sobre la comprensión visual en la integral definida, de las profesoras Blanca Souto Rubio e Inés María Gómez Chacón de la Universidad Complutense de Madrid; la otra sobre la enseñanza-aprendizaje de la optimización en estudiantes de Bachillerato, de la profesora Teresa Balcaza Bautista de un Instituto de Educación Secundaria de Jaén.

Por parte de los asistentes, los debates han sido muy ricos e intensos extrayéndose conclusiones bastante clarificadoras para la enseñanza en las aulas de los conceptos ya descritos, tanto para el profesorado universitario como de secundaria.

El Coordinador: Ángel Contreras de la Fuente.

PONENCIAS

COMPRENSIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN EL MARCO DE LA TEORÍA APOE

M^a Teresa González Astudillo*
Eliécer Aldana Bermúdez**

Resumen

En esta comunicación se presenta un estudio sobre la comprensión del concepto de Integral Definida en el marco teórico APOE de once alumnos de tercer curso de Licenciatura de Matemáticas de una universidad colombiana. Para realizar este estudio, inicialmente se identificaron los elementos matemáticos que configuran el concepto para establecer una descomposición genética del concepto de integral definida. Posteriormente, se recogió información utilizando tres instrumentos distintos: un cuestionario, una entrevista y un mapa conceptual. En esta ponencia se presenta una primera fase del análisis de los datos, que se llevó a cabo identificando los elementos matemáticos que utilizan los alumnos para resolver una de las tareas propuestas, y el uso que hacen de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Palabras clave: Integral definida, comprensión, esquema, formas de representación.

Abstract

In this paper is presented a study within the theoretical framework APOS about the understanding of the concept of definite integral of eleven third-year students of Bachelor of Mathematics, in a Colombian university. Initially the mathematical elements that make up the concept were identified and a genetic decomposition of the concept is established. Then the data were collected through three different instruments: a questionnaire, an interview and a concept map, to characterize the development of the outline of these students. In this paper a data analysis is presented based on the identification of the mathematical elements used by the students when they solved one of the mathematical problems and the use they did of graphic, algebraic and analytic systems of representations.

Keywords: Defined integral, understanding, scheme, representation systems.

1.- INTRODUCCIÓN

El marco teórico en el que se ha desarrollado esta investigación es la teoría “APOE”, desarrollada por Dubinsky (1991) y su grupo de investigadores el **Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC)**, basada en la noción de abstracción reflexiva (Piaget y García, 1982) y que fue modificada para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado. Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991) y Asiala et al., (1996) consideran que los sujetos realizan ciertas construcciones mentales para comprender los conceptos matemáticos. Estas construcciones mentales se denominan: acciones, procesos, objetos y esquemas y se logran mediante diferentes mecanismos como: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación, y tematización (Dubinsky, 1991).

* Universidad de Salamanca. España

** Universidad del Quindío-Armenia. Colombia

Asiala et al (1996) caracterizan las construcciones mentales de la siguiente forma:

- Acción: transformación de un objeto que es percibida por un sujeto como algo externo.
- Proceso: interiorización de una acción cuando esta se repite y el individuo reflexiona sobre ella.
- Objeto: encapsulación de un proceso.
- Esquema: colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas.

Para realizar estas construcciones, se distinguen seis tipos de abstracción reflexiva o mecanismos de construcción: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, generalización y tematización que se caracterizan de la siguiente forma:

- Interiorización: construcción mental de un proceso relativa a una serie de acciones sobre objetos cognitivos.
- Coordinación: a partir de dos o más procesos se construye un nuevo proceso
- Inversión: deshacer un proceso para construir uno nuevo inverso del primero.
- Encapsulación: transformación de un proceso en un objeto
- Generalización: se refiere al uso de un determinado esquema en una situación distinta a las inicialmente consideradas.
- Tematización: reflexión de un esquema considerado como un todo y siendo capaz de realizar acciones sobre dicho esquema

El refuerzo de la teoría APOE con tres niveles de desarrollo del esquema: intra, inter y trans, ha llevado a mejorar la comprensión y explicación del concepto de esquema (Dubinsky y MacDonalds, 2001). DeVries (2001), caracteriza los niveles de desarrollo de un esquema como:

- **intra**, cuando sólo se identifican aspectos individuales aislados
- **ínter**, se caracteriza por la construcción de relaciones y
- **trans**, se adquiere cuando se tiene construida una estructura completa, las relaciones descubiertas en el ínter son comprendidas dando coherencia al esquema.

En opinión de Baker et al., (2000), el uso de estos niveles para analizar el conocimiento de los estudiantes ayuda a los investigadores a considerar la riqueza de las situaciones y de los problemas de investigación. Esta idea fue matizada en el estudio de Sánchez-Matamoros (2004) sobre el desarrollo de la comprensión del concepto de *derivada* en el nivel de bachillerato (16- 18 años) y primer año de la universidad con una muestra de 150 estudiantes. El análisis del desarrollo del esquema de la derivada se realizó estudiando los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que la conforman. Las relaciones lógicas (conjunción lógica, contrarecíproco y equivalencia lógica) se entendieron como “coordinación entre operaciones” que se establecen entre los elementos matemáticos cuando se resuelve un problema y los elementos matemáticos como “el producto de una disociación o de una segregación en el interior de una totalidad previa” (Piaget, 1963, p.8).

El análisis de las respuestas de los estudiantes a diferentes problemas de derivadas permitió asignarles un nivel de desarrollo del esquema de derivada. Los resultados obtenidos a partir de los cuestionarios y de las entrevistas, indicaron que hay una construcción progresiva del esquema caracterizada por la cantidad de elementos matemáticos que usan los alumnos y “por la manera como realiza la síntesis de los modos de representación” (Sánchez- Matamoros, García y Llinares, 2006), Este aspecto

determinó la necesidad de considerar subniveles para mostrar esa progresión en la utilización de los elementos matemáticos.

Para poder analizar la comprensión de un concepto matemático Dubinsky (1996) considera lo que denominan descomposición genética del concepto definida como “un conjunto estructurado de constructos mentales que pueden describir cómo el concepto se desarrolla en la mente de un individuo” (Asiala, et al. 1996, p.7)

En el marco de esta teoría tratamos de abordar el problema de investigación relativo al aprendizaje del concepto de integral definida; en particular nuestro objetivo es describir el desarrollo de los esquemas de alumnos universitarios de acuerdo con la teoría APOE a partir de una descomposición genética inicial del concepto de integral definida.

Antecedentes

Entre las investigaciones realizadas en torno al concepto de integral definida hay que destacar el análisis epistemológico de Dubinsky, et al (2000) relativo a las aportaciones de matemáticos tales como Arquímedes, Cavalieri, Wallis y Roberval al desarrollo del concepto de Integral Definida. Estos matemáticos contemplan el cálculo de la integral definida desde dos puntos de vista distintos: o bien por medio de subdivisiones asociadas al método de exhaustión de los griegos que luego fue refinado por el método de aproximación de las sumas de Riemann, o bien el método de los indivisibles, que implica considerar, por ejemplo, una superficie como compuesta por líneas paralelas. Una vez realizado el estudio histórico se compararon estas concepciones de los matemáticos con las justificaciones ofrecidas por estudiantes universitarios en una entrevista después de una instrucción previa y, a partir del análisis, concluyeron que había algunas similitudes entre ambas y que, además, los estudiantes mostraban una visión diferente a la desarrollada durante la instrucción recibida.

En una investigación posterior, Czarnocha et al., (2001) muestran que para la comprensión del concepto de Integral Definida es necesaria la coordinación de dos esquemas, el esquema visual de la suma de Riemann, de índole geométrico, y el esquema de los límites de la secuencia numérica. Para realizar este estudio propusieron una descomposición genética inicial que contempla el concepto de función y el de suma de Riemann como objetos, la coordinación de los procesos de función y suma de Riemann y la aplicación del esquema de límite a las sumas de Riemann para obtener un número. Entre los resultados obtenidos se mostró: que los estudiantes tienen una concepción objeto de las sumas de Riemann y son capaces de obtenerlas a partir de particiones de diferente tamaño, que las dificultades relativas a las sumas de Riemann tienen que ver con el concepto de límite y que la dificultad con el concepto de límite crea dificultades en la comprensión del esquema de integral definida. Por ello proponen incluir en la descomposición genética el concepto de medida de la distancia, la noción de sucesión como un objeto, el esquema del límite de la sucesión, el esquema de la suma de Riemann, y la coordinación entre el esquema de la suma de Riemann y el esquema del límite de la sucesión.

Otro estudio relacionado con la construcción del concepto de Integral Definida es un estudio de caso de una estudiante universitaria realizado por Paschos et al. (2006). La comprensión de los mecanismos mentales que revela esta estudiante en la resolución de la tarea permitirá decidir si llegan a una verdadera comprensión del concepto de Integral Definida en lugar de tener sólo una percepción empírica de la integración.

Algunos de los resultados mostrados y descritos en estas investigaciones se van a manifestar también en nuestro estudio, mientras que otros van a ser completamente distintos.

2.- METODOLOGÍA

Esta investigación forma parte de un estudio desarrollado en Colombia en Armenia en la Universidad del Quindío con el que se trata de caracterizar el esquema de Integral definida de alumnos que cursan tercer año de la Licenciatura de Matemáticas y que estudian por primera vez el concepto de Integral Definida.

Para iniciar la investigación se llevó a cabo una revisión de diferentes libros de texto que incluyen el concepto de Integral Definida, lo que permitió determinar los elementos matemáticos que configuran este concepto y establecer una descomposición genética inicial. Se seleccionaron y analizaron 10 libros de texto, 5 de Bachillerato y 5 de universidad dando especial importancia a los desarrollos curriculares que sobre la Integral Definida hacían esas editoriales. Los libros de texto analizados corresponden, en su gran mayoría, a editoriales de difusión internacional que son la fuente principal de consulta de los estudiantes a quienes se les aplicó el cuestionario. Del análisis realizado de los libros obtuvimos los elementos matemáticos que constituyen el concepto de Integral Definida y cuya comprensión del concepto es el objeto de esta Investigación, y que se concretan en:

- El área como aproximación **ACA**.
- El área como límite de una suma **ALS**.
- La Integral Definida **LID**.
- Las propiedades de la Integral Definida **PID**.
- Los teoremas fundamentales y del valor medio **TFV**.

Estos elementos matemáticos pueden ser utilizados en diferentes sistemas de representación, es decir, aquellas notaciones **gráficas, algebraicas y analíticas**, o bien manifestaciones verbales, por medio de las cuales se expresan los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades más relevantes. La coordinación de los sistemas de representación, así como el uso de los diferentes elementos matemáticos serán indicadores del desarrollo del esquema de la Integral Definida en los estudiantes.

Una vez seleccionados los elementos matemáticos que constituyen el concepto de la Integral Definida, y de realizar la descomposición genética del concepto, se determinaron el tipo de tareas que debería contener un precuestionario que fue analizado por expertos en Didáctica del Análisis y aplicado de forma experimental. A partir del informe de los expertos y de los resultados de los alumnos se elaboró el cuestionario definitivo que constaba de ocho tareas y que fue contestado por once alumnos.

Se diseñó también el guión de una entrevista semiestructurada (Ginsburg et al., 1983) para obtener más información que nos permitiera describir y explicar el nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida de cada alumno. Dichas entrevistas fueron audiograbadas. Para completar la información los alumnos realizaron un mapa conceptual sobre el concepto de Integral Definida.

El análisis de los datos recogidos mediante los instrumentos mencionados anteriormente se llevó a cabo en tres fases que se describen a continuación:

Fase 1. En la primera fase del análisis se hizo una revisión de las justificaciones dadas por cada estudiante en el cuestionario definitivo, lo que nos permitió sistematizar esta primera información en diversas categorías para cada pregunta. A partir de este análisis se elaboraron y aplicaron los guiones de las entrevistas de cada alumno que, además, realizaron un mapa conceptual.

Fase 2. En esta segunda fase se analizó cada tarea de forma aislada a través de los instrumentos teóricos (elementos matemáticos usados en diferentes representaciones gráfica, algebraica y analítica), utilizando de manera conjunta el cuestionario, la entrevista y el mapa conceptual, lo que nos permitió establecer diferencias entre los

alumnos y caracterizar posteriormente la comprensión de Integral Definida por parte de cada sujeto. Previo a este análisis se hizo una lectura detenida de las transcripciones de las entrevistas, identificándose las unidades de análisis, es decir, el conjunto de frases que a lo largo de la entrevista ha expresado el estudiante o de aspectos presentes en las respuestas al cuestionario o el mapa conceptual que muestren el uso o no de los distintos elementos matemáticos.

Fase 3. Las particularidades de cada tarea y la forma cómo la había resuelto cada estudiante nos llevó a esta tercera fase en la que tratamos de estudiar, de forma global, cómo un mismo estudiante ha resuelto todas las tareas del cuestionario. Esto nos permitió obtener una información más detallada de cada individuo sobre el uso de uno o más elementos matemáticos, la coordinación entre sistemas de representación y las relaciones entre los distintos elementos para caracterizar los distintos niveles de desarrollo del esquema de Integral Definida en que se encontraba cada uno de los 11 estudiantes. Para ello se analizaron conjuntamente las respuestas al cuestionario, la entrevista y el mapa conceptual.

En esta ponencia se presenta el análisis realizado en la segunda de estas fases en relación con una de las preguntas del cuestionario que, aunque fácil en su concepción y diseño, puesto que es el desarrollo que aparece en casi todos los libros de texto, dio lugar a respuestas muy variadas por los alumnos en cuanto a los elementos matemáticos que utilizaban para responderla y las diferentes formas de representación utilizadas al efecto.

3.- RESULTADOS

Se van a presentar los resultados correspondientes a la tarea 3 del cuestionario cuyo enunciado era:

Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo $[0,4]$
-Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R .
-Justifica tu respuesta.

.En esta tarea se da la expresión algebraica de una función positiva y continua en el intervalo $[0,4]$, para la que se pide aproximar un área mediante particiones por lo que no aparece la palabra integral, el estudiante debe justificar el procedimiento utilizado y, en este caso, no se proporciona la gráfica asociada a la expresión algebraica.

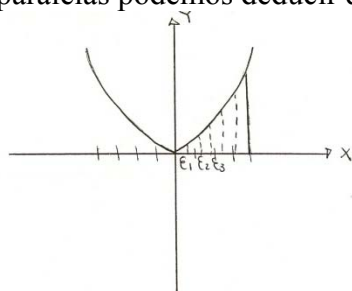
En esta tarea se esperaba que los estudiantes utilizaran los elementos matemáticos: el área como aproximación (ACA), el área como límite de una suma (ALS), la Integral Definida (LID) y el teorema fundamental del Cálculo (TFM), y una síntesis entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico, para decidir un valor aproximado del área y su valor exacto.

A continuación se van a mostrar las repuestas de los alumnos a esta pregunta organizadas de forma gradual y progresiva y distribuidos en tres grupos, según la cantidad de elementos matemáticos que utilizan para resolverla así como el uso que hacen de las diferentes formas de representación.

Primer grupo: Alumnos que utilizan sólo un elemento matemático y no coordinan los sistemas de representación.

El alumno A4 realiza una representación gráfica de la función, divide el intervalo mediante una partición en subintervalos iguales pero sólo marca las abscisas y las

ordenadas de la partición, no dibuja los rectángulos necesarios para mostrar gráficamente la aproximación del área. Dado que sólo divide el área mediante líneas paralelas podemos deducir que tiene una concepción del área de los indivisibles.



Para aproximar por particiones cogemos
 $f(\epsilon_1) \times \Delta x_1 + f(\epsilon_2) \times \Delta x_2 + f(\epsilon_3) \times \Delta x_3$

En el sistema algebraico, plantea una suma sin indicar su significado, relacionándolo parcialmente con la gráfica al utilizar las abscisas en ambos sistemas.

Durante la entrevista tampoco fue capaz de construir los rectángulos ni de calcular sus alturas y mostró una idea de límite como aproximación como se puede percibir en el siguiente extracto:

I: ¿Una suma de Riemann le da el valor exacto del área o una aproximación?

A4: Yo sé que una suma de Riemann es un proceso limite.

I: ¿Qué es un proceso limite?

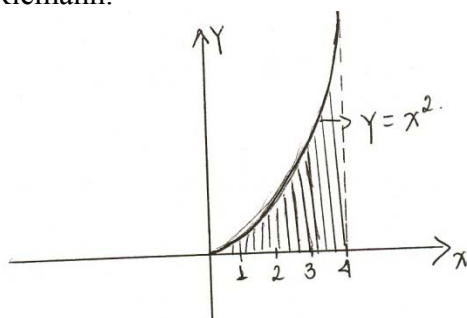
A4: La integral definida.

I: ¿Cuando aplica el proceso limite está hallando el valor del área o lo está aproximando?

A4: La estoy aproximando, porque la estoy calculando en este intervalo cerrado.

Podemos concluir que este alumno no coordina sistemas gráfico y algebraico, confunde las sumas de Riemann con el límite de esas sumas, no discrimina entre valor exacto y aproximado y no es capaz de aproximar el valor del área por ningún método.

La alumna A6 representa gráficamente la función, y al igual que el anterior divide el intervalo mediante líneas verticales como si tuviera la intuición de los indivisibles. Desde el punto de vista algebraico, plantea el área como el límite de una suma de Riemann.



$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\epsilon_k) \Delta x_k$$

$$f(\epsilon_1) \Delta x_1 + f(\epsilon_2) \Delta x_2 + f(\epsilon_3) \Delta x_3 + \dots + f(\epsilon_n) \Delta x_n$$

Al intentar durante la entrevista que proporcionara un cálculo aproximado del área, se observa que el cálculo del área de los rectángulos supone para ella un gran problema empezando por el primero de ellos. Así dice que el rectángulo lo tiene que construir a partir de 0.5 porque no puede construir un rectángulo en el 0, aun cuando está construyendo rectángulos superiores. Cuando tiene que hallar su altura, no evalúa el valor de la abscisa correspondiente en x^2 , sino identifica la altura con la abscisa, en este caso 0.5 (el resto de los rectángulos van a tener de base 1). Además, para calcular el área del rectángulo tendría que multiplicar 0.5 por 0.5 y ella está considerando que el área es 0.5 en lugar de 0.25. Finalmente señala que el área calculada de esta forma es una aproximación por defecto cuando, en realidad, está construyendo rectángulos superiores.

I: ¿Cómo obtiene el área?

A6: El área es la función evaluada.

I: ¿Qué va a evaluar?

A6: x^2

I: ¿En qué valor va a evaluar a x^2 ?

A6: En 0.5

I: ¿Por qué en 0.5?

A6: Porque es mi altura

I: ¿Halle el área de cada uno, cómo sería?

A6: Del primer rectángulo me da de longitud 0.5 de base por 0.5 de altura.

I: ¿Cómo obtiene la base?

A6: Es que la base no la puedo tomar desde 0 porque ahí, no se me forman rectángulos.

I: ¿Cuál sería el área del primero?

A6: El área del primero sería 0.5 por 0.5 de altura

I: ¿Cuál sería el valor, entonces?

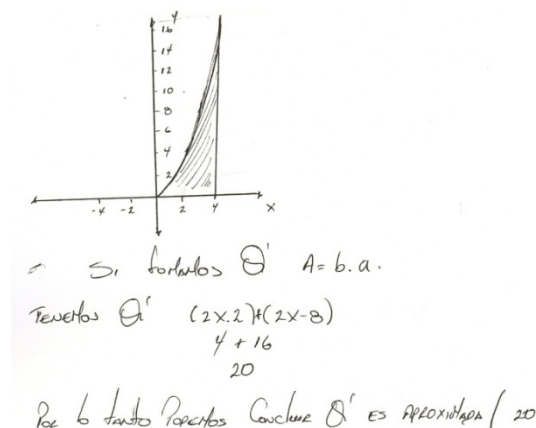
A6: Sería $0,5+4+9+16=29,5$

I: ¿Ese 29,5 qué representa?

A6: La cota más baja que puede tomar el área de la gráfica.

Esta alumna utiliza únicamente el elemento matemático ACA y no consigue una síntesis entre los sistemas gráfico y algebraico, para ella son sistemas independientes.

El alumno A5 representa gráficamente la función, divide el intervalo en dos subintervalos iguales (sólo de forma algebraica, en la gráfica no hace ninguna división), calcula el área de los rectángulos superiores correspondientes, de forma incorrecta puesto que no evalúa la función $f(x)=x^2$ en $x=2$ y $x=4$, sino $f(x)=2x$ y, finalmente, suma las dos áreas obtenidas.



Durante la entrevista, este alumno no proporcionó ninguna información más por lo que sólo utilizó el elemento matemático ACA y dada la forma de calcular las áreas de los rectángulos sólo utilizó el sistema algebraico

El alumno A1 realiza una representación gráfica de la función, divide numéricamente el intervalo utilizando una partición regular en cuatro subintervalos y calcula una aproximación del área por exceso aunque en la entrevista dice lo contrario por lo que podemos inferir que no está coordinando la representación gráfica con la algebraica.

$x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$
 Sea Partición regular, con $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 4$, por
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) (\Delta x_k)$
 R: $A \approx \sum_{k=1}^4 x_k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

Esto lo manifiesta claramente durante la entrevista de la siguiente forma:

I: ¿Cómo calcula las alturas de los rectángulos usando las particiones?

Al: Evaluando la función...

I: ¿Esos rectángulos son superiores o inferiores, qué tipo de rectángulos está trazando?

Al: Inferiores.

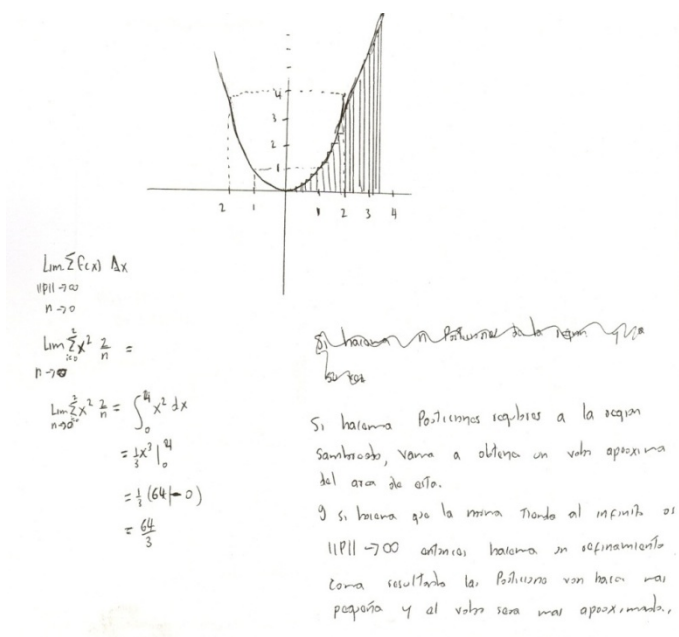
A continuación divide el intervalo en cinco partes y expresa la suma de las áreas correspondientes a los rectángulos contruidos sobre esas partes, pero como no está coordinando los dos sistemas, el gráfico y el algebraico, no está evaluando la función en los valores adecuados de las abscisas. En realidad, aunque ha hecho sólo cuatro divisiones, está calculando el área de un rectángulo de más (el último). No se está dando cuenta de que para dividir el intervalo en cuatro subintervalos necesita cinco abscisas y está manejando esas cinco abscisas incorrectamente.

$$\sum_{k=0}^4 (x_k^2) \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(0) + \frac{4}{5}(1) + \frac{4}{5}(4) + \frac{4}{5}(9) + \frac{4(16)}{5} = \frac{4}{5} + 4 + \frac{36}{5}$$

En la entrevista no consigue afinar la partición, insiste siempre en la misma, aunque menciona el proceso de paso al límite por lo que podemos concluir que sólo utiliza un elemento matemático ACA y dados los problemas que tiene para pasar entre los dos registros, en realidad, sólo utiliza el algebraico.

Segundo grupo: Alumnos que utilizan más de un elemento matemático, alguno de ellos de forma incorrecta y/o no coordina los diferentes sistemas de representación.

El alumno A3 hace una representación gráfica de la función, divide gráficamente el intervalo mediante una partición regular y construye bastantes rectángulos para aproximar el área. Plantea la expresión del límite de una suma de Riemann pero confunde las tendencias de la longitud de la partición y la cantidad de divisiones del intervalo. Aunque plantea ese límite, no es capaz de calcular el área ni siquiera por aproximación por lo que recurre a integrar la función utilizando la regla de Barrow.



Durante la entrevista muestra una concepción procesual del límite, indicando que cuando se tiende a infinito entonces se va a obtener un valor más aproximado del área de la región sombreada.

A3: Al trazar más, al tener más particiones voy a aproximarme más al valor, que es a lo que iba a llegar, si hago n particiones regulares y si esas particiones las hago cada vez más pequeñas obtengo un valor más aproximado al área sombreada de esa región, aplicando lo que es la sumatoria de Riemann, que nos dice que si a esos subintervalos los hacemos que tiendan hacia el infinito, que cada vez sean más pequeños que se aproximen a cero, entonces esos subintervalos van a dar un valor más aproximado del área de la región sombreada

I: ¿Qué haría para aproximar esta área?

A3: Trazar rectas paralelas que estén debajo de la curva.

A3: Tenemos el límite de una partición cuando tiende al infinito de la sumatoria de la función x^2 de $\Delta(x)$, que $\Delta(x)$ es la diferencia del intervalo $4/n$, que sería esto lo puedo expresar como una integral porque la sumatoria de Riemann me lleva a una integral definida.

Como la función es $f(x)=x^2$ va a confundir los rectángulos con los que se aproxima el área de la función con cuadrados, es decir está considerando el área formada por líneas rectas correspondientes a ordenadas para cada punto de la división del intervalo, que dada la función con la que está trabajando, considera que son cuadrados por lo que se puede deducir que tiene la intuición de indivisibles en relación con el área de la figura.

I: ¿Cómo sería?

A3: Que pueden ser cuadrados de lado 1×1 , entonces obtengo cuadrados de 1×1 , de 2×2 , de 3×3 y otro cuadrado de 4×4 , así estaría abarcando el $[0, 4]$, y dentro de cada cuadrado va a estar sombreada una parte de la curva, y sería entrar a trabajar con los cuadrados independientemente.

I: ¿Qué va a formar con esas particiones?

A3: Voy a formar cuadrados, porque los estoy uniendo.

I: ¿Cuadrados o rectángulos qué está formando?

A3: Son cuadrados, sino que se ven como rectángulos, pero son cuadrados.

I: Escriba los valores que va obteniendo de cada uno.

A3: Acá tengo un cuadrado de 1×1 , pero como puedo observar, la parte sombreada es sólo una parte, entonces el cuadrado tendría que subdividirlo en partes iguales de tal manera que esas partes que me queden divididas y completamente sombreadas.

Durante la entrevista también plantea el cálculo del límite de las sumas de Riemann, pero vuelve a confundir las dos tendencias que ha expresado en el cuestionario y no se percata del error.

I: ¿Cuál es el valor?

A3: Si conozco la sumatoria de Riemann, podría utilizar la sumatoria de Riemann

I: Lo que le piden realmente es aproximar haciendo particiones.

A3: Como la parte sombreada yo la puedo subdividir en intervalos, tales que cada intervalo sea lo más pequeño posible para que me de un valor más aproximado a esa área sombreada. Esos subintervalos los llamaríamos Δx , entonces nuestro Δx sería igual a la diferencia del intervalo sobre n . Que nos dio $4/n$.

I: ¿Qué representa este $4/n$?

A3: Este $4/n$ nos representa el valor en que se debe dividir el intervalo para llegar a un valor aproximado del área y ese $4/n$ lo sustituimos en la fórmula de Riemann y tenemos el límite cuando la partición tienda al infinito de la sumatoria.

I: ¿Cómo calcula esto aplicando el límite de la sumatoria de Riemann?

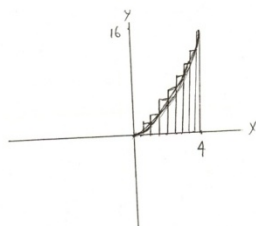
A3: Haciendo la suma de estas particiones cuando tienda al infinito.

I: ¿Cómo sería?

A3: Esto sería igual al límite cuando n tiende a cero de la sumatoria de n , desde cero hasta 4 que es el intervalo que nos están dando de x^2 entonces empezamos a desarrollar esto cuando n valga cero nos daría el punto inicial que sería cero, más cuando n valga 1 nos daría $4x^2$, cuando n valga 2 nos daría $2x^2$, cuando n vale cero el valor sería cero, cuando n valga 1 nos daría la sumatoria $4x^2$.

Este alumno es capaz de relacionar el límite de la suma de Riemann con la integral definida y su cálculo mediante la regla de Barrow con lo que está utilizando tres elementos matemáticos: ACA, LID, TFC pero no es capaz de calcular el área de forma aproximada ni mediante el límite, porque necesita coordinar diferentes sistemas de representación al mismo tiempo e interfiere la concepción del área que posee.

El alumno A8 representa gráficamente la función, divide gráficamente el intervalo en subintervalos iguales y construye rectángulos superiores a la curva. Menciona que al refinar la partición se obtiene una mejor para aproximación del área pero para calcularla recurre al cálculo de la integral mediante la regla de Barrow.



Justificación: Entre más pequeña sea la partición ^{la suma de} los rectángulos será más próxima al área total de la región entre la curva y el eje x.

Una aproximación para esta área, sería 30.

utilizando la integral. $\int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}$.

Durante la entrevista no fue capaz de obtener ninguna aproximación del área, es capaz de verbalizar los aspectos teóricos pero no de ponerlos en práctica.

I: ¿Cuál sería el ancho de cada rectángulo?

A8: Pues la aproximación, sería ¿El ancho?

I: ¿Cómo obtendría el ancho de cada rectángulo?

A8: El ancho de cada rectángulo sería lo más pequeño que se pudiera calcular.

I: ¿Qué sería el ancho con relación al rectángulo?

A8: El ancho sería, en este caso por así decirlo la base.

I: ¿Cómo obtiene las alturas?

A8: Las alturas las obtengo haciendo las líneas hasta que sean más aproximadas a la gráfica.

I: ¿podría obtener el área exacta de esa gráfica?

A8: Si.

Como se puede observar en el siguiente extracto tiene una concepción de indivisibles en relación con el área ya que la considera como un conjunto de rectas.

I: ¿Cómo?

A8: Haciendo que esos rectángulos que estamos formando sean tan pequeños hasta que por así decirlo sean líneas que me cubran esa área. Otra forma sería que a esta línea habría que sumarle todas esas líneas que nos surgirían aquí.

I: ¿Para qué las suma?

A8: Porque se supone que toda esta área la hemos partido en pequeños líneas, la sectorizamos, la hemos llenado en puras líneas, que en este caso serían rectángulos de base muy pequeña, entonces habría que sumarlos.

I: ¿Para qué los va a sumar?

A8: Para obtener el área total.

I: ¿Qué obtiene ahí, una aproximación o el valor del área?

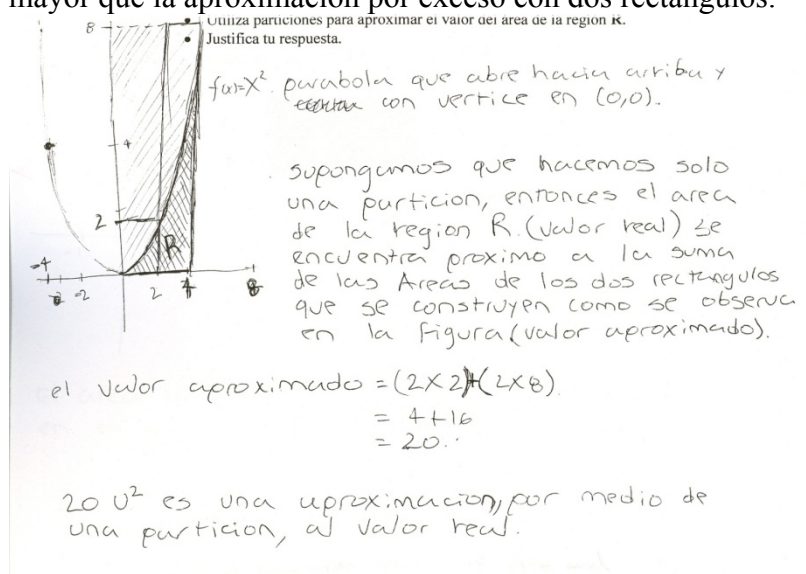
A8: Obtendría el valor del área.

A8: Ya dijimos que sería sumando toda esa parte, la base de esta figura, convirtiendo en unas líneas esta parte de cero a cuatro, convirtiéndolo en una especie de puntos que serían las bases.

Aunque menciona el elemento matemático ACA no es capaz de conseguir una aproximación y sólo utiliza la integral definida. Consigue una síntesis entre los sistemas gráfico y algebraico para calcular la integral.

El alumno A7 representa gráficamente, aunque mal, la función puesto que la relación entre las abscisas y las ordenadas corresponden a la función $f(x)=2x$. Hace una partición en dos intervalos y construye los dos rectángulos superiores correspondientes a la partición. Como ha representado mal la función, calcula mal las áreas de los rectángulos

y luego las suma. No es capaz de darse cuenta de que la integral le da un valor del área mayor que la aproximación por exceso con dos rectángulos.



Durante la entrevista no es capaz de hacer otro tipo de particiones pero sí calcula el área utilizando la regla de Barrow.

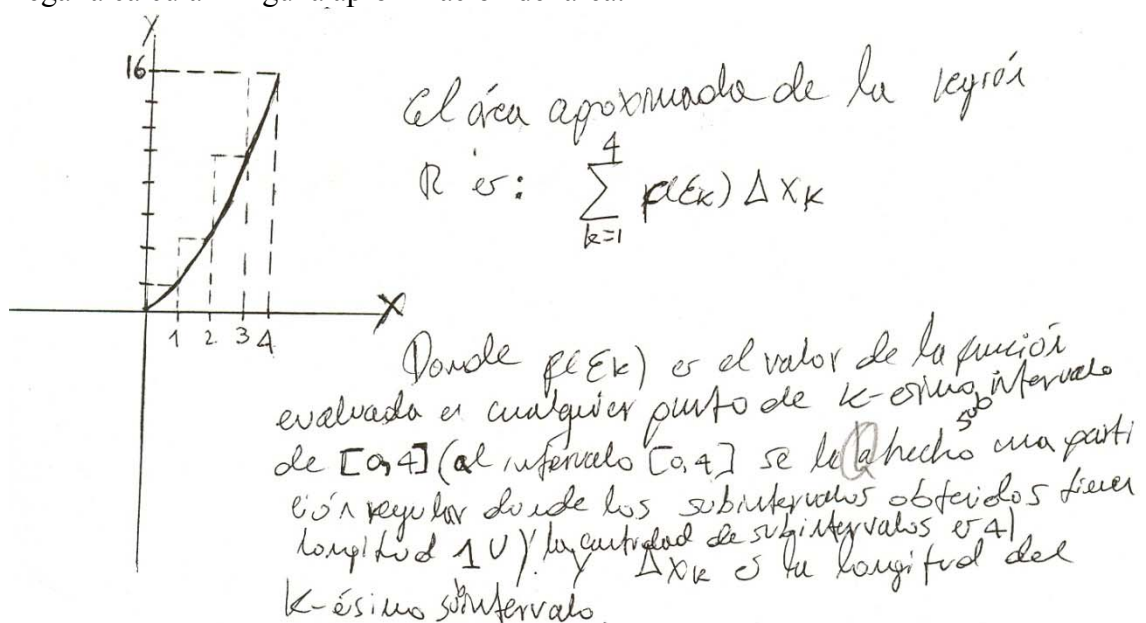
I: ¿Cómo sería con una integral?

A7: Seria la, $\int_0^4 x^2 dx$ si la calculo, entonces esto es: $\int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4$

esto es 4 al cubo sobre 3 y esto es 16, 40, 64

Utiliza dos elementos matemáticos ACA, TFC pero no hay síntesis entre los sistemas gráfico y algebraico puesto que los cálculos no son correctos

El alumno A2 realiza una representación gráfica de la función, divide gráficamente el intervalo mediante una partición regular en cuatro subintervalos, dibuja los rectángulos superiores y plantea la suma de las áreas de los rectángulos de forma algebraica pero sin llegar a calcular ninguna aproximación del área.



Durante la entrevista es capaz de verbalizar la división de la partición y el refinamiento de dicha partición y de calcular una aproximación.

I: ¿Cuántos rectángulos?

A2: Los rectángulos que trace ahí, fueron sólo 4.

I: ¿Cuántos puede trazar, cuantos debería trazar?

A2: ¿Deberían?

I: Sí.

A2: Para obtener el área precisa deberían ser infinitos.

I: ¿Qué significa trazar infinito número de rectángulos?

A2: Infinito número de rectángulos hablando en términos de sumatorias sería empezar trazando muchos, acá tengo 4, puedo trazar 8, puedo trazar 50, si los que quiera.

I: Como queremos un valor aproximado del área ¿cuál sería? ¿Podría escribirlo?

A2: Esta vez, si tengo los valores de la función, entonces lo que hice fue trazar 4, si 1, 2 y 3 acá y la base de cada uno es 1, entonces sería la sumatoria de f evaluado en ϵ_k , que sería la altura de la función, que es la altura del rectángulo trazado correspondiente y multiplicarlo por la base de cada rectángulo que es 1; es decir $f(x)$ evaluado en 1, es 1, es decir el primer triángulo sería 1 el área, luego el área del segundo, sería la altura de la función, evaluado en 2; es decir 4 (el estudiante traza la gráfica).

I: ¿Por qué evaluado en 2?

A2: Porque 2 me daría la altura que necesito, la altura del segundo.

I: ¿Cuál es la base de cada rectángulo?

A2: Es 1, entonces simplemente conozco las alturas, me estaría dando las áreas por eso las trace con base 1 más sencillo que sería menos aproximado, el segundo sería 4, el tercero sería 9 y el cuarto sería 16, todo esto en unidades cuadradas, esto sería 5, 13, 23, 29, unidades cuadradas, trazando sólo 4 rectángulos para hacer una pequeña aproximación (el estudiante hace los cálculos en una hoja de respuestas).

I: ¿Está seguro que es 29?

A2: Serían 25, ah no, 30 unidades cuadradas (el estudiante corrige en una hoja de respuestas).

Calcula el área como aproximación para 4 rectángulos pero no es capaz de hacerlo con más.

I: ¿Qué necesitaría para expresar ese límite de esa suma?

A2: Tendría que tener, el límite de esta suma.

I: ¿Cuál sería, cómo lo obtendría, cuál es la base y cuál es la altura?

A2: La base es $\Delta(x)$, sería la base de todos.

I: ¿Y la altura?

A2: Es una partición regular y la altura sería $f(\epsilon_k)$.

I: ¿Qué tiene planteado ahí, entonces?

A2: Tengo la sumatoria de las áreas de los rectángulos, que incluí en el área bajo la curva, es decir la partición.

No es capaz de plantear el área como límite de una suma pero si calcula el área como integral para lo cual coordina la representación gráfica con la representación algebraica y con la analítica.

A2: Eso sería, hablando en términos del ejercicio, la

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}.$$

I: ¿Cuánto le daría el límite de esa sumatoria?

A2: El límite de esa sumatoria me daría...

I: ¿Cuál es la diferencia entre hallar el límite de una sumatoria y calcular la integral?

A2: Para mí, la diferencia es que el procedimiento de las particiones para hallar el área con el límite de la sumatoria de Riemann se puede, pero es menos práctico.

Pero sorprendentemente, durante la entrevista la da más peso a la noción de aproximación y de límite que al cálculo de la integral por medio de la regla de Barrow.

I: ¿Si le fueras a enseñar a un estudiante por primera vez a resolver este ejercicio cómo lo haría, por aproximación, por el límite, o integraría de una vez?

A2: Empezaría mostrándole el proceso, cómo es que se llega a una integral.

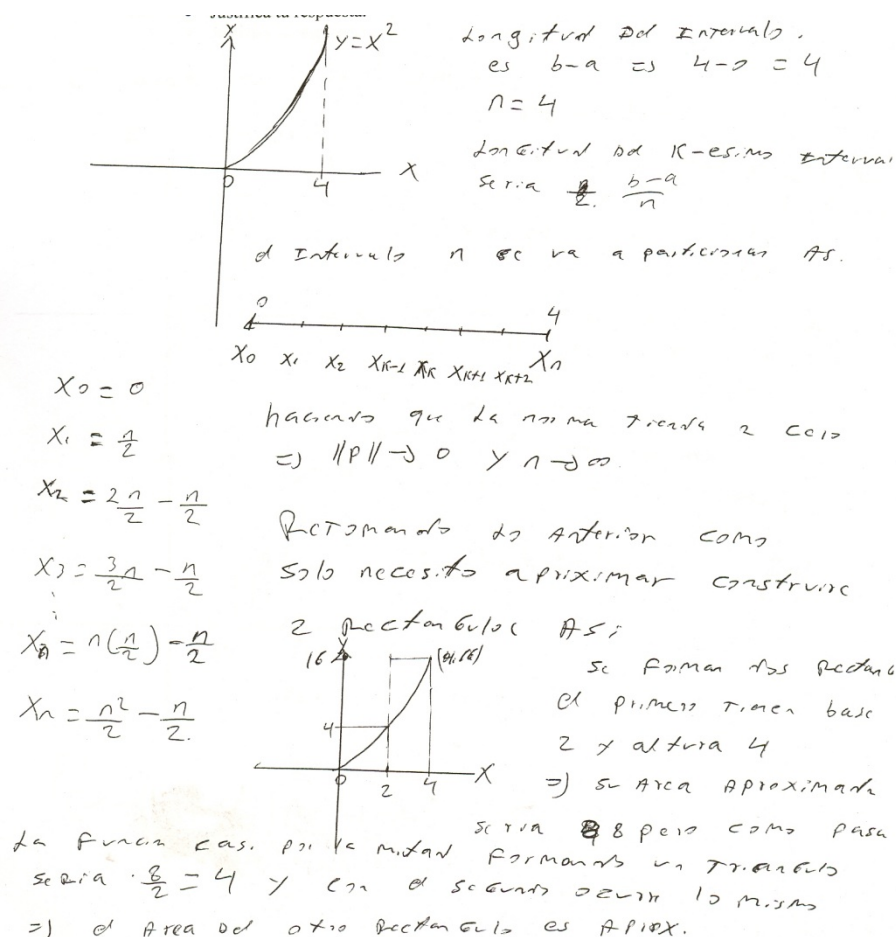
I: ¿Cuál es ese proceso, podría describirlo, cómo sería?

A2: Primero empezaría diciéndole que si necesito hallar el área bajo una curva de la gráfica de una función, o cualquier área utilizaría los rectángulos, porque como ya dije son las figuras geométricas que más se ajustan para hacer la aproximación para incluir rectángulos y sumar sus áreas, luego mostrarle que cuando esos rectángulos se hacen cada vez mayores, el área es cada vez más aproximada y si uno hace que el número de rectángulos sea infinito, va a obtener el área precisa, entonces ese sería el procedimiento y mostrarle que eso se define como el límite de una sumatoria de Riemann, que es lo mismo que tener una integral definida.

Aunque verbalmente integra los tres elementos matemáticos, no es capaz de realizar una aproximación distinta que utilizando 4 rectángulos, ni siquiera es capaz de plantear un límite.

Tercer grupo: Alumnos que utilizan correctamente varios elementos matemáticos y son capaces de coordinar diferentes sistemas de representación.

El alumno A10 divide numérica y gráficamente el intervalo mediante una partición en subintervalos iguales y construye dos rectángulos superiores aunque calcula el área por defecto porque divide cada rectángulo en dos triángulos y suma las áreas de esos triángulos.



Cuando se le plantea que calcule de otra forma el área recurre a la integral definida y la utilización de la regla de Barrow.

I: ¿De qué otra forma diferente a la anterior podría calcular el área bajo la gráfica?

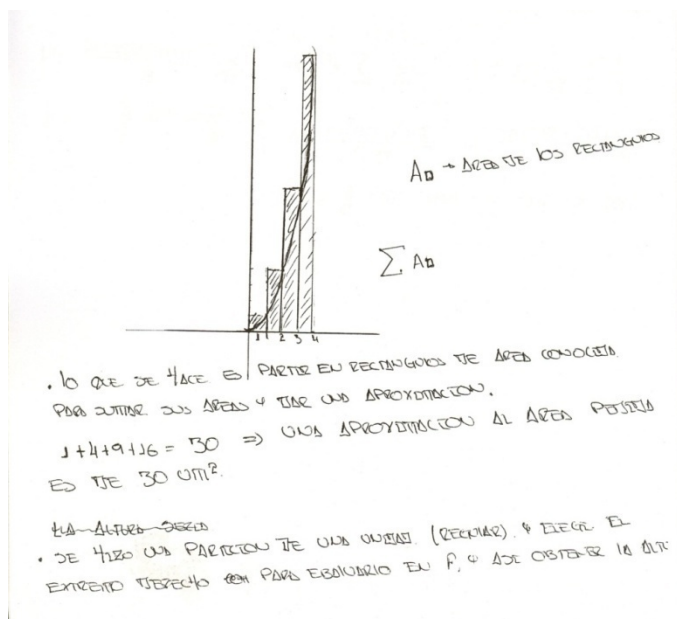
A10: ¿De qué otra forma? Haciendo uso de la integral definida.

I: ¿Cuál sería la integral definida, ahí?

A10: Pues tengo la función $f(x)=x^2$ y tengo el intervalo donde se encuentra definida esa función que es $[0,4]$, estos serían los límites de integración de esta función, entonces puedo llevar eso a la siguiente integral definida: $\int_0^4 x^2 dx$ al aplicar una operación obtengo que eso es igual al cubo de x sobre 3, y eso lo debo evaluar en el límite de integración para resolverla.

Se puede concluir que para calcular el área por aproximación este alumno coordina los sistemas gráfico y algebraico y que utiliza los elementos matemáticos ACA y TFC.

El alumno A9 representa gráficamente la función, divide gráfica y numéricamente el intervalo mediante una partición en subintervalos iguales y construye cuatro rectángulos superiores. Calcula el área de cada rectángulo y las suma.



Durante la entrevista se observa que confunde las subestimaciones con la idea de hacer la partición con subintervalos cada vez más pequeño.

I: ¿Cuándo se aproxima más al área usando subestimaciones o sobreestimaciones y por qué?

A9: Subestimaciones, porque entre más pequeños los hago me aproximo más al área.

Calcula el límite de las sumas de Riemann pero se confunde al calcular el interior del sumatorio puesto que multiplica la expresión por 4 dos veces cuando sólo tiene que aparecer una vez.

DE DE QUERER MAS APROXIMACION DE HACER QUE LA PARTICION
 TENGA A INTENTO. (OSEA EL # DE PUNTOS).

Y LOS QUEDARON ALGO ADE.
 LA LONGITUD DE LOS RECTANGULOS QUE FORMAN LA BASE ES $= \frac{b-a}{n}$
 DE LOS RECTANGULOS Y LA ALTURA SERA $f(x)$

PARA QUE QUEDE.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{16}{n^3} \sum k^2 = \frac{16}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{4(2n^3 + 3n^2 + n)}{3n^3} = \frac{8n^3 + 3n^2 + n}{3n^3} \Rightarrow \text{EL LIMITE ES } \frac{8}{3}$$

POR LO QUE EL AREA ES $\frac{8}{3} \text{ cm}^2$

Durante la entrevista relaciona el límite de la suma de Riemann con la integral definida

I: ¿De qué otra forma diferente a la anterior podría calcular el área bajo la gráfica?

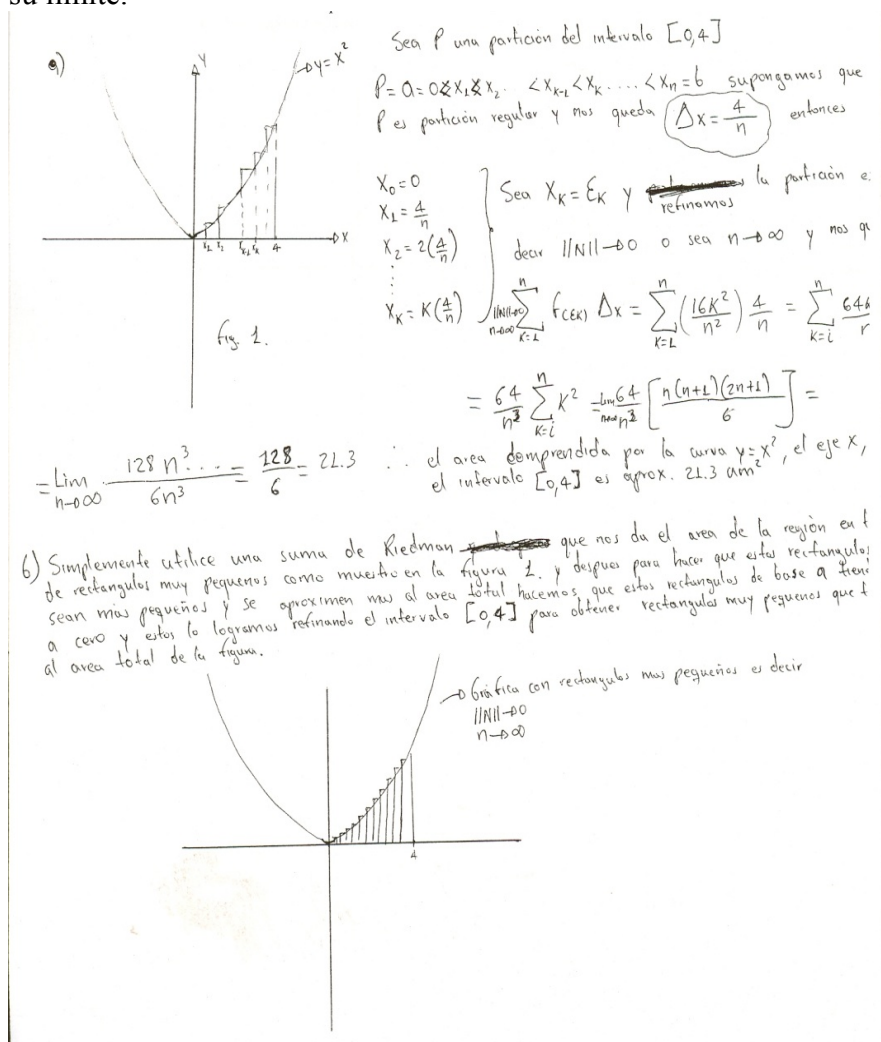
A9: Usando el límite de la sumatoria de Riemann, que en últimas es una integral definida.

I: ¿Cómo plantearía el límite de una sumatoria de Riemann en este ejercicio?

A9: Es que el límite de la sumatoria de Riemann cuando n tiende a infinito y la partición tiende a 0 siempre es la integral definida, pero para evitarme tanto trabajo con la integral definida.

Para realizar la tarea, este alumno utiliza tres elementos matemáticos ACA, ALS y este último lo relaciona con LID, además coordina los sistemas gráfico, algebraico y analítico.

El alumno A11 divide numérica y gráficamente el intervalo mediante una partición en subintervalos iguales, construye rectángulos superiores, calcula la suma de Riemann y su límite.



Durante la entrevista, menciona la idea de aproximación del área y cómo obtendría el cálculo exacto a través del límite.

A11: Lo que hice aquí fue aplicar la definición matemáticamente de la integral definida, que se define como el límite de una suma de Riemann, ahí lo escribí y cogía la función y tomaba un ϵ_k cualquiera, quien era ese ϵ_k , era cualquier punto que estaba en cualquier intervalo, en cualquier parte del intervalo lo que hacía era coger ese punto que lo llame ϵ_k y lo evalué en la función y lo multiplique por la altura, de cada rectángulo, que en ese caso lo llame Δx y al hacer esa suma obtuve el valor de la integral.

I: ¿Qué obtuvo aquí, una aproximación o el valor exacto del área?

A11: No, entiendo que es una aproximación.

I: ¿Qué valor obtuvo?

A11: Acá obtuve 21, 3, pero por lo menos me dio positivo.

Este alumno, para realizar la tarea utiliza dos elementos matemáticos ACA y ALS, los relaciona con LID y consigue coordinar los tres sistemas de representación.

4.- CONCLUSIONES

En general, la mayoría estos estudiantes no tienen una concepción objeto de la suma de Riemann puesto que a lo largo de la tarea mostraron que, aunque recuerdan su

definición y su formulación algebraica, cuando tienen que utilizarla no saben cómo hacerlo. No manejan los diferentes sistemas de representación ni los coordinan. Casi todos se encuentran cómodos con el registro algebraico, algunos muestran un cierto manejo del gráfico, pero muy pocos se desenvuelven en el registro analítico. Fundamentalmente esto se debe a una concepción errónea del concepto de límite y la falta de los recursos para formular y calcular límites de sucesiones por sí mismos.

Tienen grandes dificultades en relación con las particiones. Normalmente se limitan a las particiones evidentes obtenidas a partir de las diferentes abscisas naturales del intervalo donde se quiere calcular el área, pero no son capaces de hacer otras particiones ni de generalizar. Confunden las tendencias de la longitud de partición y el número de subintervalos formados por la ausencia de coordinación entre los registros gráfico y algebraico. Eso mismo se puede aplicar a la visualización de los rectángulos superiores e inferiores para calcular su área. Curiosamente la mayoría construyó rectángulos inferiores aunque los cálculos luego los hacían con rectángulos superiores debido a sus dificultades para interpretar el registro algebraico y traducirlo al gráfico.

Además de analizar la forma de resolución de la tarea, hemos observado cuáles son los errores que han cometido los alumnos que se pueden sintetizar en los siguientes aspectos: manejar el concepto de límite como una simple aproximación, confundir el cálculo exacto y aproximado, errores al calcular las alturas de los rectángulos por no haber síntesis entre los sistemas gráfico y algebraico, confusión en las tendencias de n y de la longitud de los intervalos, dificultades para expresar una suma de Riemann en una situación concreta, muchos alumnos tienen una intuición de indivisibles del concepto de área, confusión en el cálculo entre el área por exceso y por defecto (aunque la mayoría dibuja los rectángulos inferiores, el cálculo se refiere a rectángulos superiores), dificultades a la hora de visualizar los rectángulos superiores o inferiores y errores en los cálculos algebraicos.

En definitiva, los alumnos utilizan algunos de los elementos matemáticos que constituyen el concepto de Integral Definida desde un pensamiento algebraico y operativo, presentan algunas dificultades con las representaciones gráficas y recuerda de memoria e incluso con errores algunos elementos matemáticos dados de modo analítico, porque los menciona pero no son capaces de utilizarlos, o tiene concepciones erróneas. Por ello, debemos considerar que el esquema de integral definida descansa en el desarrollo de otros esquemas previos como los de función, límite, sucesión y partición que son imprescindibles para desarrollarlo correctamente.

Aunque Czarnocha y otros (2001) consideran que desde el punto de vista de la enseñanza puede ser más intuitivo iniciar la enseñanza de la integral con la integral de Cavalieri-Wallis (previa a la de Riemann), nosotros consideramos que es necesario un trabajo más exhaustivo con la noción del continuo, los infinitesimales y el concepto de límite dadas las dificultades manifestadas por los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASIALA, M. et al. (1996): "A framework for research and development in undergraduate mathematics education", *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2.1-32.
- DEVRIES, D. J. (2001): *RUMEC/APOS Theory Glossary*. Georgia Collage & State University. Milledgeville. En <http://www.cs.gsu.edu/~rume/Papers/glossary.html>. [Disponible el 18 de agosto de 2008]
- DUBINSKY, E., et al. (2000): "Conceptions of Area: In Students and in History", *College Mathematics Journal*. 32 (2). 99-109.
- CZARNOCHA, B.; LOCH, S.; PRABHU, V. y VIDA KOVIC, D. (2001): "El Concept of definite integral: coordination of two schemas", *Proceedings of the XXV Conference*

- of the International Group of Mathematics Education. Utrecht: Freudenthal Institute, María van den Heuvel – Penhuizen (Ed.). 12 – 17.
- DUBINSKY, E. (1991): *Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking*, Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, Kluwer Academic Press, D. Tall (eds.)
- DUBINSKY, E. y MACDONALD, M.A. (2001). “APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduated Mathematics Education Research”, *The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. 7*. Dordrecht, Kluwer Academia Publisher. D. Holton (eds.), 273-280.
- GINSBURG, H. P.; KOSSAN, N. E.; SCHWARTZ, R. y SWANSON, D. (1983): *Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking*. The Development of Mathematical Thinking. New York, Academic Press, H. P. Ginsburg (ed.)
- PASCHOS, Th. y FAUMAK, V. (2006): “The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral. A case study”. *Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4. Prague, Czech Republic, J. Novotna; H. Moraova; M. Kretke; N. Stehlikova (eds.), 337-344
- PIAGET, J. (1963): *La Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid, Aguilar.
- PIAGET, J; GARCÍA, R. (1982): *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Madrid, Siglo XXI.
- SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.M. (2004): *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción de derivada (desarrollo del concepto)*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. M., GARCÍA, M. y LLINARES, S. (2006): “El desarrollo del Esquema de derivada”. *Enseñanza de las Ciencias*. 24 (1). 85-98.

LA INTEGRAL DEFINIDA EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU): SESGOS Y RESTRICCIONES EN LA ENSEÑANZA DE ESTE OBJETO EN 2º DE BACHILLERATO

Lourdes Ordóñez Cañada*
Ángel Contreras de la Fuente*

Resumen

En este trabajo queremos determinar si las Pruebas de Acceso a la Universidad plantean restricciones en la enseñanza de la integral definida en 2º de bachillerato y, en caso afirmativo, las repercusiones en el aprendizaje, utilizando el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) como marco teórico. En primer lugar identificamos las componentes de significado de la integral definida y posteriormente, realizamos un análisis de las PAU desde 1999 a 2008 determinando los significados que emanan de las situaciones propuestas. La comparación con el significado global nos permitirá obtener los posibles sesgos en la integral definida en las PAU, el análisis de los apuntes la influencia en el significado implementado y un cuestionario las repercusiones en los estudiantes de estos sesgos.

Palabras clave: integral definida, enseñanza, enfoque ontosemiótico, restricciones institucionales, pruebas de acceso a la universidad.

Abstract

This study determines whether the university entrance exams (UEE) pose constraints on the teaching of the definite integral in the second year of secondary education and, if this is the case, their impact on learning, using the ontosemiotic approach to mathematical cognition (OAMC) as the main reference point. We first identify the components of meaning of the definite integral and then carry out an analysis of the UEE from 1999 to 2008 identifying the implications involved. The comparison with the overall meaning of the definite integral will allow us to obtain the potential biases of the definite integral in the UEE, the analysis of the influence of the teacher's explanations in the students' notes and, finally, the development of a questionnaire on the impact of these biases on the students.

Keywords: definite integral, teaching, ontosemiotic approach, institutional constraints, university entrance exams.

1. INTRODUCCIÓN

Las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU en adelante) tienen la finalidad de valorar objetivamente la madurez académica de los alumnos, los conocimientos adquiridos en el bachillerato y la capacidad de los estudiantes para seguir con éxito las enseñanzas universitarias de cara al inicio de sus estudios universitarios. Para ello en la Comunidad Autónoma Andaluza se ha creado una ponencia de Matemáticas II con el objetivo, no sólo de elaborar dichas pruebas, sino también de informar a los centros de su estructura y organización, proponiendo un documento de orientación y facilitando modelos de exámenes. Pueden consultarse los exámenes elaborados desde el año 2001 en la página web de distintas Universidades de la Comunidad.

* Universidad de Jaén. España

Por todo lo anterior podemos asegurar que el profesor que imparte matemáticas II en 2º de bachillerato puede conocer y utilizar las PAU para planificar sus clases. De esta manera si en las PAU hubiera algún tipo de sesgo, éste puede tener un reflejo en la enseñanza-aprendizaje de 2º de bachillerato. Ya que consideramos que lo observado por Gascón para otras pruebas de evaluación externa tiene también validez en el caso de las PAU: *“La práctica, cada día más extendida (por lo menos en España), de organizar (parcialmente) el proceso de enseñanza como un “entrenamiento” para la resolución de ejercicios tipo PISA o de ejercicios extraídos de las pruebas oficiales de evaluación de las competencias básicas, hace pensar que se está produciendo una aceleración de una cierta variedad del deslizamiento metadidáctico que consiste en tomar como objeto de enseñanza lo que debería ser un medio de ayuda a la enseñanza, esto es, las tareas matemáticas que forman parte de los dispositivos didácticos de evaluación “externa”*” (Gascón, Junio 2009, p.11)

Es por esto que nos preguntamos, por una parte, ¿cuáles son las restricciones institucionales planteadas por las Pruebas de Acceso a la Universidad en cuanto al objeto integral definida en 2º de bachillerato para la comunidad autónoma andaluza? Y, por otra, ¿cómo influyen dichas restricciones en los significados realmente implementados en el aula y en los significados personales de los alumnos?

Inicialmente, el problema que se plantea tiene una *componente instruccional* pues es el profesor quien se pregunta acerca de qué contenidos explicar y cómo debe organizarlos. Sin embargo, no se puede olvidar que para poder concretar lo anterior el profesor debe tener a su disposición toda la información posible, tanto de los distintos significados de la integral definida (*componente epistemológico*) como de las dificultades que entrañan para los estudiantes cada uno de ellos y sus relaciones (*componente cognitivo*)

2. MARCO TEÓRICO

Nuestro objetivo es estudiar los fenómenos que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y en particular de la noción de integral definida. Para ello adoptamos como marco teórico el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) (Godino 2002, Contreras, Font, Ordóñez y Luque, 2005, Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2008).

Así, consideramos que “es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, entre las que debemos citar, la faceta ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos)” (Godino 2003, p. 19)

En el EOS se utiliza una dimensión subjetiva del significado basado en la noción de práctica como elemento fundamental: “llamamos *práctica* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino, 2003, pp. 91-92)

Ésta es una noción clave pues, como señala Godino (2002), “como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal) proponemos ‘los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas’” (p. 242), lo que permite considerar los objetos matemáticos como emergentes de dichos sistemas de prácticas y, por tanto, derivados de ellas. Así, adoptando presupuestos antropológicos, los objetos matemáticos se consideran una construcción humana que se va construyendo y enriqueciendo a través de la actividad reflexiva.

Es claro que esta emergencia progresiva en los sujetos dará lugar a objetos personales. Sin embargo, no podemos olvidar que estas prácticas se realizan en el seno de las instituciones, donde han sido estructuradas y organizadas, y, por tanto, están mediatizadas por ellas. Esto nos lleva a considerar los objetos matemáticos desde las facetas interdependientes personal e institucional. El doble enfoque cognitivo e institucional nos parece fundamental para explicar los distintos fenómenos que se producen en la enseñanza-aprendizaje de una forma rica y realista, abordando la dimensión epistemológica, cognitiva e instruccional que podemos distinguir en todo proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En este doble sentido surgen las nociones:

❖ *Significado personal*: el sistema de prácticas personales que un sujeto pone en funcionamiento para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto matemático. (Godino y Batanero 1994, p. 341)

❖ *Significado institucional*: el sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas del que emerge el objeto matemático. (Godino y Batanero 1994, p. 340)

Esta manera de interpretar el significado desde la dualidad institucional-personal lleva a concebir la comprensión como un proceso social y no como proceso mental, interpretándola como la correspondencia entre los significados personales y los institucionales. De esta forma podemos decir que en el EOS se entiende la comprensión como una competencia que posee el alumno y diremos que un alumno comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Esta forma de entender la comprensión nos proporciona una interpretación de la no comprensión entendida, ahora, como una discrepancia entre los significados personales y los propuestos por la institución. Así, se entienden las dificultades y errores en términos de conflictos semióticos, concebidos como “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.” (Godino 2002, p. 258)

Para poder hacer operativas las definiciones anteriores, es necesario descomponer la actividad matemática en entidades primarias las cuales pueden agruparse para formar entidades más complejas: Estas entidades primarias que componen la actividad matemática son: lenguaje, conceptos-regla, propiedades, procedimientos y argumentos. Además, los objetos matemáticos se pueden considerar desde dimensiones duales dependiendo del juego de lenguaje en que participan. Esta facetas son: personal - institucional; ostensiva - no ostensiva; intensiva - extensiva; expresión - contenido; elemental - sistémica.

Las entidades primarias se organizan en entidades más complejas llamadas *configuraciones epistémicas*, si se refieren a los significados institucionales (Godino, Contreras y Font, 2006) y *configuraciones cognitivas* si se refieren a los significados personales. Están definidas como redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

Las configuraciones epistémicas nos permiten llegar a la noción de *significado global* entendido como el sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al objeto en los diversos contextos de uso, incluyendo el formal- estructural. Cada cambio significativo en algún elemento del significado producirá un nuevo tipo de tareas que activarán una parte del significado y, por tanto, una nueva configuración epistémica. Todas estas configuraciones y sus relaciones darán lugar al significado global.

3. CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE REFERENCIA

Un paso previo e imprescindible respecto al análisis del significado institucional del objeto matemático integral definida es el proceso de identificación de los componentes de dicho significado, lo que en el EOS se llama *análisis epistémico*. Estas componentes pueden ser determinadas de diferentes formas: mediante el análisis de textos producidos por las instituciones, o de la observación de las prácticas... Estimamos que el estudio del desarrollo evolutivo del objeto integral definida permite determinar las distintas situaciones que originaron el nacimiento de este objeto matemático, los diferentes conflictos que provocaron su evolución, las diversas maneras de hacer dependiendo de los recursos o medios existentes en la época. Como ejemplo, podemos citar el gran cambio que supuso la aparición del álgebra; las grandes dificultades para soslayar el infinito o el interés por una buena fundamentación matemática. Éstas son cuestiones que van provocando nuevos modos de hacer y cambios en el significado de la integral hasta llegar al estado actual.

Todo lo anterior nos permite ver la integral definida con una perspectiva general. Los modos de hacer de cada momento histórico nos aportan las distintas componentes del significado y cómo han ido evolucionando, lo que junto con el estudio de las formas en que se superaron los conflictos surgidos nos ha permitido tener una amplia visión del sentido actual de la integral definida, sus distintas componentes y algunos conflictos inherentes a ella. En definitiva, aproximarnos al significado global con una visión amplia que nos permite analizar la situación actual, desde una posición crítica, que es la que creemos más oportuna. Este estudio histórico se ha realizado en un trabajo más amplio de Memoria de tesis que se está elaborando y que no podemos exponer aquí por cuestiones de espacio.

Este estudio de la evolución histórica unido a los resultados obtenidos en diferentes trabajos de investigación a los que hemos tenido acceso y nuestra propia labor como docentes, nos ha permitido establecer las configuraciones epistémicas que formarán el significado global de la integral definida. Este significado global podremos compararlo con los significados institucionales (PAU y apuntes de clase) y con los personales a través de un cuestionario.

Para determinar una configuración epistémica nos parece fundamental el tipo de situación problema que resuelve ya que estimamos que movilizará unos determinados elementos de significados distintivos y por tanto un significado parcial. Además, no diferenciar entre ellos o no movilizarlos en los diferentes momentos que se suceden en la resolución de situaciones-problema complejas lleva a conflictos semióticos. Es claro que en cada una de ellas se podrán utilizar varios métodos de cálculo integral que han surgido a lo largo del desarrollo de la noción y que sólo nos han parecido determinantes de otra configuración epistémica si sobrepasan su función de elementos necesarios para el cálculo.

En este recorrido histórico podemos destacar, en los orígenes de la integral definida, dos tipos de situaciones objeto de estudio. Por una parte, en la época de los griegos, el interés se centraba en cuestiones geométricas principalmente. Calculan áreas, longitudes de arco y volúmenes. Por otra parte, en la época medieval se aborda el estudio del cambio y del movimiento, las matemáticas se muestran como un instrumento privilegiado del conocimiento de fenómenos naturales. A la vez el movimiento y el tiempo se mostraban como una eficaz herramienta para trabajar con cuestiones infinitesimales intuitivamente. Estas dos formas de ver la integral definida perduraron a lo largo de la historia y estuvieron presentes en la invención del cálculo por parte de Newton y Leibniz. Newton, con la idea de resolver los problemas de fundamentación intenta eliminar los infinitamente pequeños considerando las cantidades como

engendradas por un aumento continuo, variando a lo largo del tiempo, esto es, considera la noción de movimiento como central. Por su parte, Leibniz considera la integral interpretando las áreas y volúmenes como sumas de rectángulos y cilindros a la vez que introduce la diferencial que será un eficaz instrumento para trabajar con cuestiones infinitesimales.

Así, como asegura Labraña (2001), que hay dos tipologías de problemas de integración que “*responde a dos percepciones psicológicamente diferentes. Una estática, una densidad: densidad, presión (fuerza/superficie) intensidad de campo (cantidad de flujo/superficie), ... que se conecta fácilmente con la idea de suma de todas las pequeñas cantidades $f(x)/dx$, que constituyen la integral definida. Otra dinámica, una tasa de variación instantánea: velocidad, tasa de crecimiento de una población, ingreso marginal (ingreso/producción),...que permite conectar con la idea de antiderivación*” (p. 290) Esta doble tipología es la base de dos configuraciones epistémicas: la *configuración epistémica geométrica* y la *configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio*.

También hemos observado en el desarrollo histórico dos cambios importantes: la introducción del álgebra que permite nuevos métodos de cálculo y la generalización de las situaciones, y otro que se produce en el momento en que se establecen la derivación y la integración como procesos inversos apareciendo resultados como el teorema fundamental del cálculo. Este hecho aporta un nuevo significado a la integral, lo que consideramos otra configuración que es la *configuración epistémica como inversa de la derivada*.

El desarrollo de las ciencias necesita el avance de las matemáticas y, a la vez, ha sido el gran motor en diversos momentos. Sin embargo, la matemática aplicada debe estar bien fundamentada para poder continuar su avance. Se hace necesario buscar métodos heurísticos que produzcan nuevos resultados pero también cuestionar los propios fundamentos para generalizar las nociones y los resultados, y avanzar resolviendo las nuevas cuestiones que van surgiendo. Hemos encontrado esta cuestión a lo largo de toda la historia pero nos parece que produce significados diferentes en dos momentos bien distintos. Por una parte en el momento en que Cauchy establece el límite como noción central del cálculo infinitesimal lo que proporciona una nueva manera de interpretar la integral, lo que nos da la *configuración epistémica como aproximación al límite*. Las diferentes ampliaciones del campo de funciones integrables realizadas por Riemann y Darboux que no cambian significativamente este significado. Por otra parte, la necesidad de ampliar el campo de funciones integrables obliga nuevamente a un cambio importante cuestionando las nociones de medida, generalizándolas y obteniendo un nuevo significado de integral, la integral de Lebesgue, que determina otra nueva configuración epistémica, *configuración epistémica generalizada*.

Estas configuraciones que podemos denominar históricas han dado lugar a las configuraciones epistémicas actuales, que son las que utilizaremos en este trabajo como significado global de la integral definida. En primer lugar, la integral definida aparece en la determinación del área bajo una curva y el eje de abscisas. Los cálculos de longitudes, áreas y volúmenes asociados hacen referencia a un contexto geométrico totalmente estático, ausente de movimiento. Históricamente, podemos considerar que Leibnitz es su principal valedor. Denominamos por “*Configuración Epistémica Geométrica (CE-geo)*” a este uso, masivo hoy en día en los procesos de estudio de las matemáticas y que ha sido ampliamente investigado. Turégano (1994) propone la integral como medio para la introducción al Análisis, tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas y basándose en la definición geométrica de integral presentada

por Lebesgue en 1928. Para ello, Turégano justifica cómo la visualización a través del ordenador dota de significado al concepto.

En una línea similar, Azcárate, Casadevall, Casellas, Bosch (1996) realizan una propuesta didáctica para presentar el concepto de integral definida a partir del concepto de área y su cálculo mediante un método de aproximaciones, combinando lo gráfico, lo numérico y lo algebraico por medio del uso de la tecnología (calculadoras u ordenador), en este caso, sin embargo, basada en la integral de Cauchy-Riemann. En esta misma línea Camacho y Depool (2003) presentan un programa de utilidades basado en un programa de cálculo simbólico para estudiar el área bajo una curva y el eje de abscisas desde una perspectiva gráfica y numérica, cuyo objetivo es desarrollar el concepto para introducir, posteriormente, el cálculo algorítmico.

Azcárate et al. (1996) afirman que los alumnos no reconocen cuándo el cálculo de una magnitud requiere una integración en situaciones más allá de áreas y quizás determinados volúmenes. Por este motivo, nos parece importante el trabajo de Wenzelburger (1993) que presenta una propuesta didáctica para la introducción de la integral definida tomando como punto de partida preconceptos de la *idea fundamental del Cálculo*. “Esta idea fundamental del Cálculo Integral es la determinación de *resultados o efectos de cambios o procesos*. Mientras que en el Cálculo Diferencial nos interesa el cambio instantáneo de una magnitud, usamos el Cálculo Integral para determinar los resultados totales de estos procesos de cambio” (pp. 110–111).

Así, consideramos todos aquellos casos en que la integral es necesaria para resolver situaciones de otras ciencias: la Física, la Probabilidad, la Biología, etc., esto es, asociada a procesos no estáticos, de una realidad cambiante, siendo el flujo de tiempo uno de los aspectos cruciales. Newton puede ser considerado el gran propulsor de este significado. Todo ello nos lleva a establecer la “*Configuración Epistémica Resultado de un proceso de cambio (CE-rpc)*”.

Una tercera configuración proviene de la relación original entre derivada e integral que se puede asociar a los trabajos de Newton y Leibnitz. El conjunto de funciones integrables es cada vez más extenso (condiciones cada vez menos restrictivas), en este caso tenemos la “*Configuración Epistémica Inversa de la derivada (CE-invderiv)*”.

Por último, la cuarta “*Configuración Epistémica es la de Aproximación al límite (CE-aproxlim)*”, directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dio lugar a una nueva definición de integral definida.

Dado el nivel introductorio de la integral definida en 2º de bachillerato en el que la normativa marca la integral de Cauchy-Riemann como la utilizada no consideraremos la integral de Lebesgue en este trabajo.

En la tabla siguiente se hace una descripción de estas cuatro configuraciones según las entidades primarias introducidas.

Entidades	Configuraciones			
	CE-geo	CE-rpc	CE-invderiv	CE-aproxlim
Situaciones	Situaciones intramatemáticas: cálculo de áreas y volúmenes	Situaciones extramatemáticas: modelización.	Situaciones intramatemáticas ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función	Situaciones intramatemáticas: cálculo de áreas por procedimientos de paso al límite.
Lenguaje	Gráfico,	Gráfico,	Gráfico y	Gráfico y

	algebraico y numérico.	algebraico y numérico.	algebraico	numérico
<i>Conceptos-regla</i>	Integral como área de la región entre la gráfica de una función en un intervalo cerrado y el eje de abscisas	Variación de una magnitud en el tiempo. La integral modeliza el cambio total acumulado	Inversión integral derivada	Número real acotado para toda pareja de sumas inferior y superior asociadas a una partición de $[a, b]$
<i>Propiedades</i>	Regla de Barrow Métodos de integración	Regla de Barrow Métodos de integración	Teorema fundamental del cálculo integral.	Límite de las sumas inferiores y superiores, coinciden y es el área.
<i>Procedimientos</i>	Cálculo de puntos de corte. Representación gráfica de la función. Cálculo de las integrales definidas. Valor absoluto Asignación de un valor al área o volumen.	Modelizar la situación a través de la integral definida. Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow. Interpretación del resultado.	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada	Dada una función o figura, realizar una partición y calcular una aproximación de su área, realizar mejores aproximaciones e identificar el área con el límite.
<i>Argumentos</i>	Retórica y heurística	Retórica y heurística	Retóricas	Heurísticas

Tabla 1. Configuraciones epistémicas asociadas a la integral definida

En el bachillerato se emplea gran parte del tiempo para rutinizar las reglas de integración. Así, una parte importante del significado implementado está exclusivamente dedicado al manejo de estas reglas. Por ello en ocasiones sólo se evalúa si el alumno sabe aplicar los métodos explicados. Todo esto da lugar a otra configuración epistémica escolar fruto de la trasposición didáctica: *Configuración Epistémica Algebraica (CE-alg)*. Las entidades primarias asociadas a esta configuración se muestran en la tabla 2:

<i>Entidades</i>	CE-alg.
<i>Situaciones</i>	Calcular el valor de una integral
<i>Lenguaje</i>	Algebraico, numérico
<i>Conceptos-regla</i>	Dada una integral definida aplicar el método oportuno para calcular su valor.
<i>Propiedades</i>	La integración y la derivación son operaciones inversas
<i>Procedimientos</i>	Tabla de integrales inmediatas Métodos de integración Regla de Barrow
<i>Argumentos</i>	Heurística
<i>Situaciones</i>	La integral carece de significado.

Tabla 2. Configuración epistémica algebraica

Se puede asociar *a priori* conflictos de significado a estas configuraciones. Así, ligados a la CE-geo podemos destacar la inadecuada concepción “área de la integral” ligada al “área como contexto”, que lleva a considerar que la necesidad de que la integral definida debe ser positiva (Bezuidenhout y Olivier, 2000). En la misma línea, Turégano (1994) clasifica las imágenes de los estudiantes asociadas al concepto de integral definida en *primitiva* (la integral es una fórmula), *operativa* (la integral es un área y no consideran el signo) y *descriptiva*. Además, Schneider (1988) pone de manifiesto que los estudiantes recuerdan las reglas, pero no saben por qué son áreas o volúmenes, hecho debido a la identificación abusiva de la integral con un área geométrica descontextualizada.

En relación con esto último, Labraña (2001) observa que en los libros de texto se citan muy pocos contextos de aplicación. Por su parte, Tall (1991) aporta datos experimentales que apoyan la tesis según la cual los estudiantes son incapaces de reconocer la integral en situaciones donde no aparece explícitamente. Este hecho, unido a que la variación de una función cuando no depende del tiempo, es considerado por Schneider (1988) como un conflicto de significado en relación con la CE-RPC.

Los conflictos de CE-invderiv han sido vinculados ampliamente a la relación derivada-integral. Berry y Nyman (2003), al estudiar las conexiones entre el gráfico de una función derivada y la de la original, observan la limitada visión del concepto de función que tienen los estudiantes, hecho que determina una dependencia casi radical con las fórmulas algebraicas. Por su parte, Bezuidenhout y Olivier (2000) consideran que el error más frecuente proviene de confundir la función con la función integral. Por su parte, Labraña (2001) obtiene que la reciprocidad derivada-integral es difícilmente asimilada por los estudiantes, aún cuando hayan recibido una instrucción específica y sean capaces de mostrar un conocimiento teórico de la misma.

Por último, para la CE-aproxlim nos encontramos con los diversos conflictos asociados a la noción de límite. Orton (1983) observa cómo los estudiantes aceptan afirmaciones del tipo “se aproxima más y más, pero no es el área exacta”, pero son incapaces de aceptar que el límite del proceso de aproximación al área sea el valor “exacto” de dicha área. Estos resultados son corroborados por Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic, (2001). Por su parte, Schneider (1988) estudia lo que denomina el obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones que surge al elegir indivisibles como elementos intuitivos.

4. LA INTEGRAL DEFINIDA EN LAS PAU

En las *orientaciones* que publica cada año la comisión de las PAU encontramos varias cuestiones especialmente interesantes comparando las configuraciones epistémicas que aparecen con las establecidas en el significado global. Por una parte, se enfatiza notablemente CE-geo pues, en primer lugar, incluso se identifica la integral con el área: “*Conocer la noción de función integral (o función área)*”, y en segundo lugar, aunque hay una pequeña referencia a CE-aproxlim: “*Conocer la interpretación geométrica de la integral definida de una función (el área como límite de sumas superiores e inferiores)*”, se le asigna un papel secundario pues la propone como una interpretación de la integral como área nuevamente. La CE-invderiv también se propone, ya que se incluye el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow. Sin embargo está totalmente ausente CE-rpc.

Respecto a los significados que emanan de *las propias pruebas*, hemos considerado el periodo de 1999 a 2008. Cada año se elaboran 6 pruebas dobles (cada una consta de dos partes, Ay B, para que el estudiante elija una de ellas) De éstas se escogen dos pruebas cada año, una para la convocatoria de junio y otra para la de septiembre. Con ello hemos

analizado inicialmente 120 pruebas detectando si se plantea alguna cuestión sobre la integral definida y, en este caso, la configuración epistémica presente, esto es, qué configuración es necesario conocer y utilizar para resolver la cuestión planteada. Teniendo en cuenta que en 26 pruebas no aparece ninguna cuestión sobre la integral definida y que en cuatro pruebas aparecen dos situaciones de dicha noción, se han considerado 98 situaciones en total. En ellas se han clasificado las configuraciones epistémicas encontradas, con lo que hemos obtenido la distribución que se refleja en la tabla 3 y donde el total de configuraciones es 101 porque en tres situaciones es necesario utilizar 2 configuraciones.

No hay Integral Definida		26
Integral Definida	CE-alg	33
	CE-geo	65
	CE-invderiv	3
		101

Tabla 3. Configuraciones epistémicas en las PAU

Con respecto a estas 98 situaciones, observamos que sólo aparecen 3 configuraciones epistémicas olvidando, no solamente las dos que deja de lado el documento de orientación, sino también la de aproximación al límite. Destaca notablemente CE-geo pues de las 101 configuraciones utilizadas, 65 corresponden a dicha configuración, esto es un 64'36%, mientras que CE-invderiv solamente aparece en tres casos (2'46%) Todo lo anterior, está en la línea marcada en las orientaciones que enfatizan notablemente CE-geo en detrimento de las otras configuraciones. Nos ha llamado la atención el 32'67% (33 de 101) de la configuración epistémica algebraica. Éste es, según nuestro punto de vista, un porcentaje muy alto para una configuración que se basa en métodos de cálculo algorítmico, esto es, con estas situaciones sólo se puede evaluar la capacidad del estudiante para aplicar un método algorítmico, lo que puede potenciar la algoritmización del cálculo integral señalada por diferentes autores. Este fenómeno es aún más claro si observamos que de las 26 pruebas donde no se requiere integral definida en 22 se requiere la integral indefinida como método algorítmico nada más. Así de las 120 pruebas estudiadas en 55 casos (45'83%) se evalúa la aplicación de un método.

En este análisis de las CE en las PAU nos ha surgido, también, la necesidad de especificar los modos en que se presentan las dos configuraciones epistémicas que más aparecen: la algebraica y la geométrica. Esto se debe a que hemos observado fuertes regularidades que nos parece interesante destacar y analizar. En lo que respecta a CE-alg hay dos tipos de situaciones propuestas, aquella en la que se pide el cálculo de una integral definida directamente (la hemos llamado “directa”) y otro tipo de situaciones en las que utiliza dicha configuración en la resolución de una cuestión (la hemos llamado de “aplicación”) De igual forma para CE-geo, hay situaciones en las que se pide directamente calcular un área mientras que en otras se aplica para resolver la situación. A continuación hemos seleccionado un ejemplo de cada uno de los casos considerados para clarificarlos. Además, hemos añadido un caso de la CE-invderiv que además involucra la configuración epistémica geométrica.

- CE-alg Directa (Selectividad 2005) se pide expresamente el cálculo de una integral definida

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^0 \text{Ln}(2+x) dx$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

- CE-alg Aplicación (Selectividad 2008) El cálculo de la integral es necesario para resolver la situación. No hay ninguna otra configuración de la integral involucrada, pero, a diferencia de la anterior, este cálculo se utiliza en la resolución de la situación, así, el estudiante, no sólo debe conocer un método de cálculo para resolver correctamente esta cuestión, sino que debe decidir cuándo aplicarlo.
-

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Se sabe que f tiene un máximo local en $x = 1$, que el punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4}$. Calcula a , b , c y d .

- CE-geo Directa (Selectividad 2008) Se pide explícitamente que calcule el área entre dos curvas, aplicación directa de un método de cálculo que no garantiza la comprensión de la integral definida como un área.
-

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Dadas las funciones $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

- CE-geo Aplicación (Selectividad 2007) aunque también debe de calcular un área entre dos curvas no basta sólo con aplicar lo que sería un método de cálculo de áreas como en el caso anterior, es necesaria alguna interpretación de la integral o del resultado de dicha integral.
-

Ejercicio 2.- [2'5 puntos]

Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

- CE-invderiv (Selectividad 2002) en la que también se pone en juego CE-geo. Corresponde a uno de los pocos casos donde es necesario utilizar dos configuraciones epistémicas.

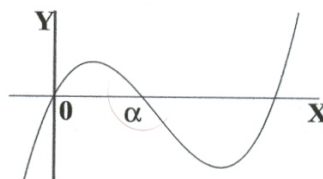
Ejercicio 1. Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

(a) [1'5 puntos] Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

i) $F(\alpha) = 0$.

ii) $F'(\alpha) = 0$.

iii) F es creciente en $(0, \alpha)$.



(b) [1 punto] Calcula $F(1)$ siendo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$.

Figura 1. Ejemplos de configuraciones epistémicas en las PAU

Con esta nueva distinción la tabla anterior aparece ahora de la siguiente manera:

No hay Integral Definida			26
Integral Definida	CE-alg	Directa	28
		Aplicación	5
	CE-geo	Directa	56
		Aplicación	9
	CE-invderiv		3
			101

Tabla 4. Configuraciones epistémicas en las PAU

Nota: CE-geo aparece en otros cuatro casos pues está compartida en 4 ejercicios

Observamos, en esta nueva tabla, que en la mayoría de los casos donde aparece la CE-alg es directa, en 28 de los 33 casos (84'85%), esto es, se pide a los alumnos aplicar un método algorítmico exclusivamente. Algo similar sucede en CE-geo donde el 86'15% de los 65 casos en que se debe utilizar esta configuración está dedicado al cálculo directo de un área, lo que puede convertirlo en un método para resolver un tipo de situaciones que aparecen frecuentemente en las PAU.

Una cuestión que también nos parece interesante resaltar en este estudio de las PAU es el hecho de que solamente en 3 situaciones de las 98 analizadas, sea necesario utilizar dos configuraciones epistémicas, como es el ejemplo expuesto. Apenas se trabaja, por tanto la coordinación entre las diferentes configuraciones con lo que el estudiante no obtendrá la flexibilidad de pasar de un significado de la integral a otro. Dado lo expuesto hasta ahora, consideramos que dicho estudiante tenderá a reconocer la integral o como un área geométrica descontextualizada o como un método algorítmico, sin ser capaz de unir las diferentes configuraciones y, por ello, obteniendo un significado de la integral muy limitado.

Además, del estudio se desprende, observando los ejemplos representativos, que el registro que se utiliza es el algebraico, no utilizándose el registro geométrico, numérico u otro tipo de medios como programas de cálculo simbólico, calculadoras gráficas,... por lo que tampoco hay cambios de registro. Así, no se tiene en cuenta la hipótesis de

que “aprender un objeto matemático significa saber coordinar los distintos sistemas de representación semiótico del mismo” (Duval, 2000) en esta misma línea Azcárate y otros (96) señala que “la adquisición de flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos (gráfico, numérico y algebraico) de los conceptos del cálculo diferencial e integral es un paso necesario para la introducción posterior del cálculo formal y asegura una sólida base para enfrentarse con los conceptos y los métodos cada vez más abstractos que se construirán a partir de aquí” (p.17)

A modo de resumen, podemos afirmar que la integral definida tiene una importancia notable pues aparece, en los últimos 10 años, en el 81'7% de los casos. La CE más solicitada es la geométrica (64'36% de los casos) generalmente de forma directa, esto es, solicitando explícitamente el área bajo la curva o el área entre dos curvas y utilizando el registro algebraico habitualmente. En segundo lugar, la CE más solicitada es la algebraica, esto es, cálculo algorítmico, generalmente de forma directa también. Además, podemos observar que son muy pocos los casos donde son necesarias dos CE, con lo que no se trabaja la coordinación entre ellas, y que el registro más utilizado es el algebraico.

Tras analizar el significado que emana de las PAU, nos proponemos estudiar el efecto que éstas tienen en lo que el profesor efectivamente hace en clase como paso previo al estudio de los significados personales de los alumnos. Para determinar dichos significados personales realizamos un cuestionario que pasamos a cuatro grupos distintos de tres centros diferentes de la provincia de Jaén. De cada grupo recogimos los apuntes de un alumno/a que el profesor determinó atendiendo a que, consideraba que, recogía más fielmente lo realizado en clase. Por ello estimamos que dichos apuntes nos pueden dar una buena aproximación del significado implementado en cada grupo.

Hemos clasificado las situaciones que se han trabajado en cada grupo, según la clasificación hecha para las PAU, obteniendo los resultados que se muestran en la tabla siguiente:

		GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C	GRUPO D
CE-geo	Directa	11	14	34	16
	Aplicación	2	0	1	0
	Otras	0	3	0	0
CE-invderiv		5	4	2	2
CE-aproxlim		0	0	0	0
CE-rpc		0	0	0	0
CE-alg	Directa	6	4	7	4
	Aplicación	2	1	0	0
	Otras	0	1	0	0

Tabla 5. Configuraciones epistémicas en los apuntes de clase

Observamos que nuevamente la CE-geo es la más utilizada en los ejercicios seguida de la algebraica, ambas de forma directa principalmente. Hay, además, una ausencia total de las configuraciones CE-aproxlim y CE-rpc. La coincidencia con lo encontrado en las PAU nos indica que éstas son una verdadera *restricción institucional*.

Una de las consecuencias didácticas de estos comportamientos institucionales es que el alumno que se enfrenta posteriormente a materias de tipo científico en la universidad, donde debe utilizar las 4 CE de la integral definida y aplicarla a situaciones en las que interviene el movimiento, necesariamente tendrá dificultades, pues solo conoce la configuración geométrica, que es estática. Además, de los cuatro sistemas de representación semiótica correspondientes a la integral definida, el estudiante prácticamente ha trabajado uno solo. En el caso de la integral definida, difícilmente pueden coordinarse los diversos registros de representación si no se conocen, por lo que un alumno tiene un deficitario conocimiento de la integral definida que le puede convertirse en un grave conflicto semiótico en estudios posteriores.

5. SIGNIFICADOS PERSONALES

Nuestro objetivo es determinar la influencia de estas restricciones detectadas en los significados construidos por los alumnos, esto es, no planteamos evaluar los significados personales de los alumnos respecto de la noción de integral definida. Con este objetivo se diseñó un cuestionario para pasarlo a los estudiantes una vez finalizada la instrucción. Como paso previo a la elaboración del cuestionario definitivo, se elaboró un cuestionario piloto, el cual consta de diez ítems. Este cuestionario piloto tiene varios objetivos. Por una parte, analizar la eficacia de la herramienta para el análisis de los significados personales, buscando puntos conflictivos. Además, confrontar el análisis a priori, buscando mejorar el cuestionario definitivo. Fue aplicado a 16 estudiantes de dos centros diferentes de la provincia de Jaén durante el curso 2002-03, una vez terminada la instrucción.

Para su elaboración se tuvieron en cuenta las aportaciones de diferentes trabajos de investigación y de expertos que han validado el cuestionario, libros de texto de 2º de Bachillerato y las PAU de los últimos años.

Posteriormente se realizó el cuestionario definitivo teniendo en cuenta, además de lo anterior, lo obtenido en el cuestionario piloto. Éste consta de 8 ítems y se pasó a 48 alumnos de 2º de Bachillerato de tres centros de Jaén y de cuatro profesores distintos.

De cada cuestión (en ambos cuestionarios) se realizó un análisis a priori considerando y explicitando los objetivos perseguidos (tanto generales como específicos), los significados institucionales de referencia o las configuraciones epistémicas presentes en dicha cuestión, las distintas entidades primarias explicitando no sólo las necesarias para resolver la cuestión sino también las que un alumno podría utilizar en la resolución; y los posibles conflictos semióticos mostrados en la resolución. En este caso de los conflictos semióticos distinguimos entre conflictos semióticos asociados a la integral definida y otros no asociados a esta noción debido a que observamos en el cuestionario piloto diversos errores debidos a conflictos semióticos asociados a otros objetos matemáticos.

A continuación se muestra dos ejemplos de cuestiones del cuestionario piloto y definitivo. Las hemos elegido como representativas debido a la variedad que presentan, principalmente. En el primer caso exponemos una cuestión que se modificó para el cuestionario definitivo y en la que la mayor información la aporta la entidad primaria “propiedades”. La segunda cuestión, que ha sido expuesta en Ordóñez y Contreras (2007), no apareció en el cuestionario piloto, surgió de la necesidad que encontramos de clarificar los conocimientos de los alumnos en un problema de aplicación de la integral definida. Además, en esta segunda cuestión la entidad que más información nos aporta son las acciones, por lo que evidencia la variedad de nuestro análisis.

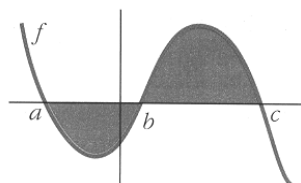
EJEMPLO1 (Cuestión 2 del cuestionario piloto)

De las siguientes expresiones:

$$a) \int_a^c f(x)dx \quad b) \left| \int_a^c f(x)dx \right| \quad c) \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad d) -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Determina cuál, o cuáles de ellas, nos dan el área limitada por la gráfica de f y el eje de las abscisas. Debes justificar extensamente el por qué de la aceptación, o rechazo, de cada uno de los apartados.

(Esta cuestión está tomada de Colera y otros, 2001, p. 400)



En esta cuestión son especialmente relevantes las propiedades y los conflictos semióticos que se deducen de ellas. En cuanto a los resultados hemos obtenido que el 25%, que muestra en sus respuestas lo que denominamos la propiedad falsa PF3:

$$\left| \int_a^c f(x)dx \right| = \left| \int_a^b f(x)dx \right| + \left| \int_b^c f(x)dx \right|,$$

corresponde a aquellos estudiantes que responden

que b) es cierta por este motivo y muestran una importante confusión pues estiman que para calcular el total basta con calcular cada trozo y sumarlo, lo que les puede llevar a no distinguir entre integral y área.

Por otra parte, el 12,5% de estudiantes tiene la propiedad falsa PF2 (“basta tomar el valor absoluto de la integral definida para obtener el área”) lo que refleja la confusión total entre integral y área. También PF4 “basta tener en cuenta los puntos de corte para que la expresión integral nos dé el área pedida” aparece en un 12,5%. Por último, el 6,3%, muestra la PF1 (“la integral definida da directamente al área”)

Dado que los estudiantes que responden con cualquiera de las propiedades falsas presentan “desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por el estudiante y la institución” todos ellos tienen un conflicto semiótico. Así, podemos decir que las propiedades falsas conducen directamente a conflictos semióticos, con lo que hay 9 estudiantes, el 52,25%, en este caso. Además, hay dos casos, un 12,5%, de estudiantes que muestran conflictos semióticos debidos a la integral definida, no determinados en el análisis a priori que son tomar las áreas fuera de los intervalos.

Por último, un caso, el 6,3%, que corresponde a un conflicto semiótico asociado a la noción de opuesto y cuya respuesta se ilustra en la imagen siguiente:

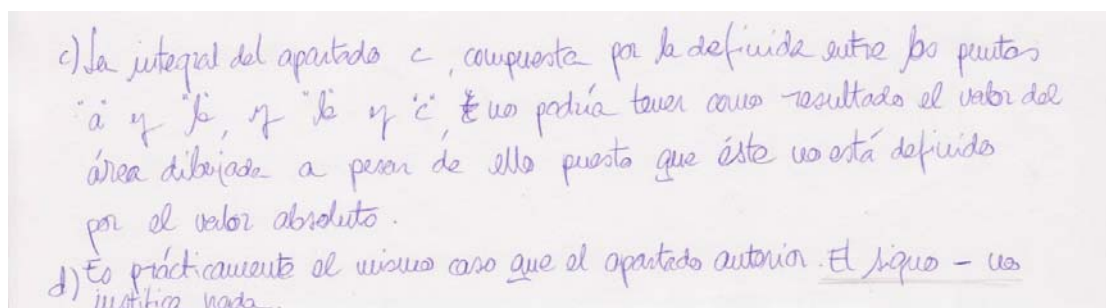


Figura 2. Ejemplo de conflicto semiótico

No parece especialmente importante este conflicto, sin embargo, hemos de señalar que en el cuestionario definitivo tuvo mayor incidencia como muestra la tabla de recogida de datos de esta misma cuestión en el cuestionario definitivo.

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	comp. opuesto	11	22,9	22,9	22,9
	comp. valor abs.	4	8,3	8,3	31,3
	no presenta	29	60,4	60,4	91,7
	comp. opuesto y v. abs.	4	8,3	8,3	100,0
	Total	48	100,0	100,0	

Tabla 6: Otros conflictos semióticos.

En el cuestionario definitivo se mejoró esta cuestión añadiéndole el apartado a) que aparece para determinar de forma más concreta a qué se debe el error, esto es, cuál es conocimiento que muestra el estudiante que responde mal esta cuestión utilizando PF3. Por tanto, esta cuestión ahora aparece de la siguiente forma:

$$a) \left| \int_a^b f(x)dx \right| + \left| \int_b^c f(x)dx \right| \quad b) \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad c) \left| \int_a^c f(x)dx \right|$$

$$d) - \int_a^b f(x)dx \int_b^c f(x)dx \quad e) \int_a^c f(x)dx$$

En la tabla siguiente se muestra la clasificación que hemos realizado de las respuestas de los cuestionarios siendo el número el asignado a cada alumno y la letra el grupo al que pertenecía.

	Lenguaje	Argumentaciones	Concepto y Prop.	Acciones	Errores debidos a C. Semióticos	Errores no debidos a C. Semióticos
1A	Natural	Retórica	CR _{área}	Las especificadas		
4A	Natural	Retórica	CR _{área} , PF2 y PF3	Las especificadas	Los propios de PF2 y PF3	Concepto de opuesto
7B	Natural	Retórica	CR _{área} , PF1.	Las especificadas	El propio de PF1.	Concepto de valor absoluto y concepto de opuesto
18B	Natural	Retórica	CR _{área} y PF1	Las especificadas	El propio de PF1	

Tabla 7. Análisis de las respuestas al cuestionario

La imagen siguiente corresponde al alumno 7B que muestra una confusión entre integral y área (PF1: “la integral definida da directamente al área”) y además el conflicto semiótico del opuesto y del valor absoluto que son conflictos asociados a dichas nociones.

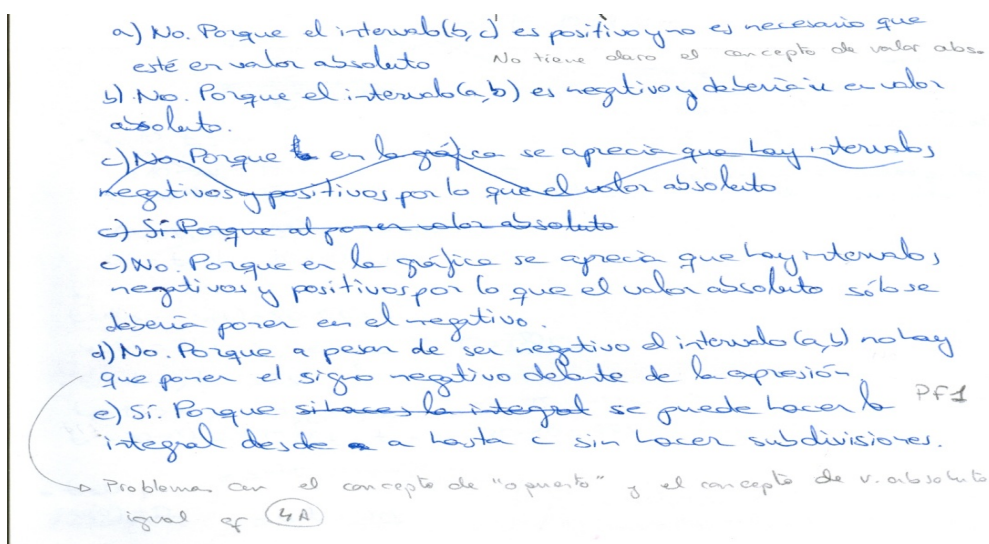


Figura 2. Ejemplo de conflicto semiótico

La siguiente tabla muestra los resultados de las entidades conceptos y propiedades de esta cuestión en el cuestionario definitivo

Tabla 8. Frecuencia de conceptos regla y propiedades

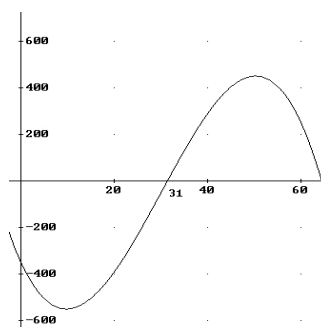
Conceptos y proposiciones					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CRárea	20	41,7	41,7	41,7
	CRárea y PF1	3	6,3	6,3	47,9
	CRárea y PF2	1	2,1	2,1	50,0
	CRárea y PF3	2	4,2	4,2	54,2
	CRárea y PF4	4	8,3	8,3	62,5
	CRárea y PF5	8	16,7	16,7	79,2
	CRárea y PF2, PF3	5	10,4	10,4	89,6
	CRárea y PF3, PF4	1	2,1	2,1	91,7
	CRárea, PF3 y PF5	1	2,1	2,1	93,8
	CRárea y PF2, PF3, PF5	3	6,3	6,3	100,0
	Total	48	100,0	100,0	

EJEMPLO 2 (Cuestión 8 del cuestionario definitivo)

La cuestión que mostramos a continuación corresponde al cuestionario definitivo. Se pretende clarificar CE-rpc (resultado de un proceso de cambio), observando si el alumno distingue entre integral definida y área.

Por los datos iniciales se estima que las ganancias/pérdidas, en miles de euros, de una pequeña empresa dedicada a la fabricación y comercialización del turrón se ajustan, durante los 60 días que dura la campaña de Navidad, a la función $f(x) = -0,03x^3 + 2,7x^2 - 44x - 350$, cuya gráfica es la representada en la figura. ¿Cuál será el resultado de esta campaña de Navidad?

Se propone una situación relacionada con las razones de cambios continuos. En ella la función toma valores positivos y negativos pero el resultado obtenido es negativo. En esta cuestión la mayor información la obtenemos de la entidad primaria "acciones". El análisis a priori muestra las distintas posibilidades: **e.1)** Lenguaje natural → Gráfica → Cálculo de la integral → Interpretación. **e.2)** Lenguaje natural → Gráfica → Descomposición en dos integrales



→ Cálculo de las integrales → Diferencia de ambas → Interpretación. Ausencia de concepto-regla CR_{rpc} o anulación de CR_{área}. **e.3)** Lenguaje natural → analítico (cálculo de $f(60)$) → Interpretación **e.4)** Lenguaje natural → Gráfica → Cálculo de la integral → valor absoluto → Interpretación.

En el análisis de los datos obtenemos que dejan en blanco esta cuestión 6 de los 48 estudiantes (12'5%). Era la última pregunta no parece una cuestión difícil, aunque solamente la contestan bien 6 de los 42 (14%). Además, 54'8% (23 de 42) de los que hacen la cuestión utilizan el lenguaje analítico solamente y 28 de 42 (66'7%) no realizan ningún tipo de argumentación: la mayoría de los estudiantes no explica sus razonamientos, solamente hacen cálculos algebraicos. Por otra parte, 29 estudiantes (69'1%) utilizan solamente CR_{área} frente a 9 (21,4%) que utiliza sólo CR_{rpc}; y, por último, 24 (57'1%) aborda el ejercicio a través de la secuencia 2, esto es, utilizando dos áreas de las que hace la diferencia.

En cuanto a los conflictos semióticos, 28 (64'3%) presenta PF3 (integral=área), PF4 (resultado positivo aparece en 11 (26'2%) de los que contestan, CS_{vab} (es necesario poner el valor absoluto) aparece en 9 estudiantes (21,4%) CS_{lim} (cambia los límites de integración para que la figura sea ostensiblemente cerrada) solo se detecta en 3 (7,1%). Todo esto nos lleva a concluir que hay una identificación de la integral definida con el área lo que puede suponer un importante obstáculo en problemas donde deba utilizarse la CE-rpc.

Por último señalar que 10 alumnos (23,8%) tienen errores de cálculo numérico o integral, lo que nos ha llamado la atención nos ha llamado la atención debido al nivel educativo que analizamos (2º de Bachillerato de Ciencias) y que la función es un polinomio de grado 3 y que se les debía calculadora.

6. CONSECUENCIAS Y APORTACIONES

En este trabajo podemos observar la potencia que tiene la determinación de las configuraciones epistémicas ya que al tener las diferentes componentes del significado de un objeto matemático, un significado de referencia, podemos comparar los diferentes significados: de la normativa vigente, de pruebas de evaluación externa, de libros de texto,... Así es posible la determinación de sesgos, restricciones,... en los significados de una determinada institución de referencia. Además, en cuanto a la componente personal, permite analizar los significados personales determinando dificultades, errores asociados a un objeto matemático a través de la noción de conflicto semiótico, así como, mediante la comparación de los significados personales con los significados implementados determinar la influencia de estos últimos en la enseñanza-aprendizaje de un objeto matemático.

En lo que se refiere a nuestro objeto de estudio, la integral definida, hemos determinado el significado que emana de las PAU, observando que hay sesgos importantes y renuncias a determinados significados, modos, lenguajes,... Podemos concluir tanto del análisis de las PAU como de los ejercicios realizados por el profesor en clase, que se usa principalmente la determinación directa del área entre dos curvas, utilizando métodos puramente algebraicos, que hay una ausencia de la idea de límite subyacente y de las aplicaciones de la integral a otros contextos, así como, de coordinación entre los diferentes significados, lo que provoca que se obtenga un significado parcial como han mostrado diferentes autores ya citados anteriormente.

Por último, a través de algunas cuestiones del cuestionario pasado a los estudiantes, ha sido posible determinar la influencia de estos sesgos en la enseñanza-aprendizaje de la integral que podemos resumir en los siguientes: confusión entre integral y área que les

lleva a tener dificultades para interpretar el área de recintos positivos y negativo, resultados negativos...; deficiencias en el significado de la integral como “acumulación”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AZCÁRATE, C.; CASADEVALL, M., CASELLAS, E.; BOSCH, D. (1996), *Cálculo diferencial e integral*, Madrid, Síntesis.
- BERRY, J. S.; NYMAN, M. A. (2003) Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior* 22, pp 481-497
- BEZUIDENHOUT, J. y OLIVIER, A. (2000) Student's conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2 pp. 2-73, 2-80.
- CAMACHO, M. y DEPOOL, R. (2003) Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (PCS) Derive, *Educación Matemática*. Vol. 15 (3) pp.119-140
- COLERA, J.; OLIVEIRA, M.J.; GARCÍA, R. (2001), *Matemáticas II*, Madrid: Anaya.
- CONTRERAS, A., FONT, V., LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2005), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 25(2), 151-186.
- CZARNOCHA, B.; LOCH, S.; PRABHU, V.; y VIDAKOVIC, D. (2001). The Concept of definite integral: coordination of two schemas. In M. Van den Heuvel-Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education*. (pp. 12 – 17) Utrecht: Freudenthal Institute.
- DUVAL, R. (2000), Basic Issues for Research in Mathematics Education (Plenary Address). En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (tome I)*. (pp. 55-69) Hiroshima (Japan): Hiroshima University.
- GODINO, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22 (2/3), 237–284.
- Godino, J.D. (2003), Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, pp. 1-318.
- GODINO, J.D.; BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325–355.
- GODINO, J.D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39–88.
- GODINO, J.D., BATANERO, C. y FONT, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet en: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm*
- LABRAÑA, A. (2001), *Avaliacion das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral*, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.
- ORDÓÑEZ, L., CONTRERAS, A. (2007) “Significados personales y conflictos semióticos de los estudiantes en el aprendizaje de la integral definida” XIII Jornadas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Granada. Universidad de Granada

- ORTON, A. (1983). Students' Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1–18.
- SCHNEIDER, M. (1988), Des objets mentaux “aire” et “volume” au calcul des primitives, Tesis Doctoral, Universidad Católica de Lovaina.
- TALL, D. (1991). Intuition and rigour: de role of visualization in the calculus. En Zimmermann e Cunnighman (eds). *Visualization in Mathematics*, pp. 105-119.
- TURÉGANO, P. (1994). Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal, tesis doctoral. Universitat de València, Facultat de Ciències Matemàtiques, Departament de Didàctica de la Matemàtica.
- WENZELBURGER, E. (1993) Introducción de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral-una propuesta didáctica *Educación matemática* Vol. 5 nº 3, pp. 93-123.

UNA PROPUESTA DE DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PARA LA INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Francisco José Boigues Planes*

Resumen

Mostramos una propuesta de comprensión de la noción integral definida en el contexto específico de estudiantes de ingenierías relacionadas con Ciencias de la naturaleza. Siguiendo la teoría APOS, presentamos una descomposición genética de la integral que concibe la integral como el límite de una sucesión de sumas de Riemann. Los resultados destacan la necesidad de intensificar las construcciones que favorezcan las relaciones entre Sucesión, Límite y Suma de Riemann, así como fomentar las relaciones que comportan un registro analítico. Finalizamos con la propuesta de otra descomposición genética que pensamos que puede ayudar a mejorar el diseño de la instrucción para este tipo de estudiantes.

Palabras clave: APOS, descomposición genética, comprensión e integral.

Abstract

We show a proposal for comprehensive understanding of the notion of definite integral in the specific context of engineering students related to the natural sciences. Following the APOS theory we present a genetic decomposition of the definite integral conceived as the limit of a sequence of Riemann sums. The results highlight the need to strengthen the structures which promote the relationship between Succession, Limit and Riemann sum, and promote relations involving an analytical record. We conclude with the proposal of another genetic decomposition which, we believe, can help to improve the design of the instruction for such students.

Keywords: APOS, decomposition genetics, understanding and integral definite.

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La dificultad de muchos estudiantes universitarios en la comprensión de las nociones básicas del Cálculo ha sido el punto de partida en muchas investigaciones en el campo de la educación matemática. De todas maneras, desde diferentes ámbitos se está reclamando una mayor atención a la construcción del conocimiento matemático por parte de individuos que ven en las matemáticas una herramienta (service mathematics) para estudiar otras disciplinas científicas (Artigue, Batanero y Kent, 2007). Actualmente, son bastantes las teorías de marcado carácter constructivista (Harel, Selden, y Selden, 2006) que están aportando elementos teóricos que faciliten una construcción sólida del conocimiento matemático que vaya más allá de la mera manipulación algorítmica. Además, en algunos de esos marcos teóricos consideran que los asistentes matemáticos (CAS) pueden ofrecer un nuevo espacio de enseñanza que facilite la comprensión en matemáticas. De todas maneras, pensamos que para diseñar actividades de enseñanza eficaces con un CAS (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006) es necesario realizar un análisis cognitivo previo de las nociones matemáticas implicadas.

* Universidad Politécnica de Valencia

La integral es una de esas nociones nucleares en el cálculo, fundamento de muchas otras y que es imprescindible en múltiples campos de las ciencias. Son varios los trabajos que describen las dificultades de los estudiantes en asociar significados a la integral que vayan más allá de la mera manipulación algorítmica. De ahí, que hallamos elegido esta noción como base de nuestra investigación.

Vamos a referir varias investigaciones realizadas en torno al tópico de la integral. Para Orton (1983), Eisenberg y Dreyfus (1991) es importante comprender la integral como el límite de unas sumas y no como la diferencia de los valores que toma una primitiva en los extremos de los intervalos. Mundy (1984) destaca la carencia que tienen muchos estudiantes en asociar la integral con los aspectos gráficos de área. Por otra parte, Ferrini-Mundy y Guardard (1992) mostraron cómo estudiantes que practicaron ejercicios rutinarios de manipulación algebraica durante la enseñanza secundaria tuvieron dificultades para un desarrollo conceptual durante sus estudios universitarios. Turégano (1993) destaca la importancia de la génesis histórica de la integral para poder construir de manera sólida dicho concepto. Camacho y Depool (2003) en su trabajo concluyen que el manejo de los registros analítico y gráfico y los procesos de interferencia pueden ayudar a que los estudiantes doten de significado al concepto de integral.

Toda esta situación nos ha llevado a plantearnos, desde una vertiente cognitiva, como aprenden los estudiantes la noción de la integral, ¿Cual es el desarrollo que experimenta la construcción de su conocimiento matemático? ¿Cuales son las principales dificultades y obstáculos que se encuentran cuando aprenden la integral? De esta manera podremos plantear una propuesta de cognición (descomposición genética) para la integral, que nos permita diseñar actividades con un CAS que conduzcan a aprendizajes eficaces, es decir, acciones que conduzcan a aprendizajes que estudiantes y profesores consideren útiles en el desarrollo de su aprendizaje matemático.

2. MARCO TEÓRICO

El Modelo APOS

La teoría APOS es un intento de explicar la comprensión de las nociones matemáticas avanzadas (Dubinsky, 1991) utilizando los mecanismos de la abstracción reflexiva de Piaget. APOS, con raíces claramente constructivistas, concibe la comprensión como un proceso de creación por parte de los estudiantes de elementos cognitivos que son caracterizados como acciones, procesos y objetos (Asiala et al., 1996). Las acciones son construcciones cognitivas asociados a manipulaciones algorítmicas, que son vistas como algo externo al individuo que manipula. Los procesos son interiorizaciones de las acciones y, por tanto, suponen un mayor nivel de generalización ya que podemos considerar dichas acciones sin tener que realizarlas en el momento. Los objetos son procesos concebidos como un todo acabado y, consecuentemente, pueden ser considerados como acciones en otros niveles (Dörfler, 2002).

La complejidad de las nociones matemáticas, en especial, aquellas que son básicas en el estudio del Cálculo, como por ejemplo la integral definida, conlleva que los constructos cognitivos asociados al concepto suelen estar organizados formando un esquema. Los esquemas serían un conjunto de elementos cognitivos, y de relaciones entre ellos, asociados a un concepto matemático, que un individuo evoca en la resolución de determinados problemas (Clark et al., 1997; Trigueros, 2005). La teoría APOS, en concordancia con las ideas de Von Glasersfeld (1995), concibe la comprensión como un proceso continuo, en el que el desarrollo de un determinado esquema seguiría una serie de etapas. Partiendo de la noción de triada en el desarrollo de un esquema, introducida

por Piaget y García (1983), APOS plantea tres etapas en la comprensión de un concepto (Clark, 1997; McDonald, Mathews y Strobel, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006)): intra, inter y trans. En la etapa intra se van perfilando los diferentes elementos del esquema pero sin completarlos. En la etapa inter los elementos ya están completos y se van perfilando algunas de las relaciones entre ellos. Y, finalmente, en la etapa trans aparecen todos los elementos y relaciones del esquema y se forma propiamente la construcción de objetos cognitivos.

Además, cualquier investigación que utilice el marco teórico APOS y tenga por objeto analizar la construcción de conceptos matemáticos requiere una propuesta de esquema del concepto que se espera que el individuo desarrolle. Es lo que en APOS se denomina descomposición genética del concepto (Cooley et al., 2007). Lógicamente, dicha descomposición debe estar caracterizada mediante las nociones de acción, proceso y objeto, así como con las posibles relaciones entre ellos.

La teoría Fuzzy

Frente a la lógica clásica, en la que las proposiciones admiten dos valores de verdad: verdadero o falso, nos encontramos con las lógicas multievaluadas que admiten más valores de verdad. Este tipo de lógicas permiten un mejor acercamiento a determinados fenómenos reales que están caracterizados por lo impreciso. El análisis de hechos tales como la contaminación acústica, o la claridad en los colores de una fotografía o la comprensión de un determinado concepto matemático pensamos que se pueden realizar mejor desde una lógica multievaluada. La lógica fuzzy, difusa o borrosa, es una lógica multivaluada que nos permite formalizar mejor el análisis asociado a la incertidumbre. Los elementos básicos de la lógica fuzzy lo constituyen los conjuntos fuzzy. Zadeh (1965) introdujo el concepto de conjunto fuzzy, que transformó la mayoría de las ramas de la ciencia y de la ingeniería, incluida la matemática. Esta noción introduce la idea de “borrosidad” a la pertenencia de un conjunto. De esta manera, se modelizan muchos fenómenos reales en los que los objetos no tienen un criterio totalmente definido de pertenencia. Dado un universo de discurso X definido como un espacio de objetos (dominio), un conjunto fuzzy A de X , $A = \{x \in X, \mu_A(x)\}$, es un conjunto de pares ordenados, formados por cada elemento genérico $x \in X$ y su grado de pertenencia al conjunto, $\mu_A(x)$. El grado de pertenencia se establece mediante una aplicación $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$, llamada función característica o función de pertenencia.

Uno de los primeros campos, como consecuencia de la aplicación de la lógica fuzzy, que aparece en Matemáticas es el de la topología fuzzy (Chang, 1967). Entre los problemas más interesantes que ha planteado la topología fuzzy destaca el de obtener una noción adecuada de espacio métrico fuzzy. Recordemos que el concepto de espacio métrico se basa, a su vez, en la noción de distancia entre puntos; pero en muchas situaciones reales dicha distancia no puede determinarse con exactitud. En este trabajo usaremos la definición de espacio métrico fuzzy propuesta por George y Veeramani (1994), la cual constituye una generalización más completa de la anterior.

Una de las consecuencias a la definición anterior es que todo espacio métrico clásico X , por ejemplo $\mathbb{R}^n$, asociado con la métrica euclídea d , entonces la función $F_d : (x, y, t) : X \times X \times]0, +\infty[\rightarrow [0,1]$ definida por

$$F_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

es una métrica fuzzy sobre X , que se denomina métrica fuzzy estándar inducida por la métrica d . La métrica o distancia fuzzy, F_d , puede interpretarse como una valoración de

la distancia $d(x, y)$ en términos cualitativos. Si, x e y cumplen que $d(x, y) = 0$ se tiene que $F_d = 1$ lo que se interpreta como “cercanía extrema”, o identidad de los indiscernibles, mientras que, a medida que $d(x, y)$ se hace grande, F_d se va acercando a cero, es decir se tiende a la “extrema lejanía”, valor que se alcanza en el límite cuando $d(x, y)$ tiende a $+\infty$, sea cual sea el valor de $t > 0$. El significado de t puede asociarse a la idea de una valoración subjetiva de la distancia dependiendo del contexto. Así pues, t sería un parámetro contextual al que se le asigna uno u otro valor según un criterio de valoración asociado a la experiencia. Por lo tanto, t sería el parámetro que permite considerar la incertidumbre que caracteriza el contexto del análisis.

Dado un espacio métrico, $X \subset \mathbb{R}^n$, si consideramos un elemento arbitrario, pero fijo, $x_0 \in X$ y fijamos un valor $t > 0$, entonces, a partir de la función deducida de la métrica fuzzy

$$\mu(x) = F_d(x_0, x, t) = \frac{t}{t + d(x_0, x)}$$

otorgando a dicha función el significado de función de pertenencia, podemos construir un conjunto fuzzy, $A = \{x \in X, \mu(x)\}$.

3. LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA INTEGRAL

Para fijar nuestra propuesta de descomposición hemos tenido en cuenta, por una parte el significado institucional de la integral, mediante la revisión de libros de texto de matemáticas clásicos en la Ingeniería o en Ciencias, y por otra el estudio de otras propuestas de descomposiciones genéticas de la integral.

Revisión de libros de texto

Para la selección de lo que hemos llamado libros de texto clásicos (Finney, 1987; Larson, 1989; Haseussler, 1997, Neuhauser, 2004), hemos considerado aquellos que suponemos que han tenido una gran difusión por lo que les hemos exigido que se hallan efectuado tres ediciones, al menos, y que por supuesto vayan dirigidos de manera explícita a estudiantes de ingeniería.

Las categorías de análisis de estos textos se han centrado en el análisis epistemológico y en el didáctico-cognitivo (Contreras et al. 2003). El análisis epistemológico que hemos efectuado consiste en caracterizar el tipo de significado histórico que asocian a la integral que hemos condensado en los siguientes apartados:

- Integral de Newton-Leibniz, esto es la que pone el acento en la integración como proceso inverso de la derivación.
- Integral de Cauchy que considera la integral como el límite de unas sumas de áreas de rectángulos elementales.
- Integral de Riemann con un enfoque claramente topológico donde se tratan elementos como supremo e ínfimo de las sumas de Darboux.

En cambio en cuanto al análisis didáctico-cognitivo, habrá que determinar si hay una definición formal o intuitiva, el tipo de registro semiótico y también los diferentes tipos de ejercicios ligados a la definición de integral introducida.

De la revisión realizada podemos sacar las siguientes conclusiones. En mayoría de los libros de textos, introducen la integral desde la perspectiva de Cauchy (límite de una sumas que tienden a infinito), aunque después formalizan la integral desde el enfoque de Riemann. De todas maneras, si analizamos los ejemplos de integral que acompañan a su definición, en seguida nos damos cuenta que en todos, usan una función continua generalmente un polinomio, definen una partición del intervalo en función de n ,

calculan las correspondientes sumas de Riemann, sumas que se transforman en formas polinómicas y finalmente calculan el límite cuando n tiende a infinito. En definitiva, a la hora de mostrar con un ejemplo la definición de la integral, utilizan el enfoque que uso Cauchy al definir su noción de integral. En algunos textos, identifican la integral con la regla de Barrow, y trabajan con registros sobre todo analíticos, donde lo más importante en el manejo de la integral sería la manipulación algorítmica.

Otras propuestas de descomposición genética de la integral

Tal como hemos adelantado introduciremos la única propuesta de descomposición genética de la integral definida de la cual tenemos constancia. En el trabajo “The Concept of Definite Integral: Coordination of Two Schemas” (Czarnocha et al., 2001) aparece de manera explícita y detallada una descomposición genética, que fue usada para diseñar una experiencia llevada a cabo con estudiantes universitarios y obtener datos cuyo análisis permitiera analizar la comprensión de la integral definida. Estos autores dieron una descomposición preliminar en la que la consideraron como la composición de dos construcciones diferentes: (1) la geométrica, basada en el principio de exhaustión y (2) la numérica, convergencia de sucesiones infinitas. En esta descomposición genética se asume que los estudiantes deben tener una comprensión a nivel de objeto de las nociones de función y de partición, además se fija un desarrollo de las sumas de Riemann siguiendo la forma usual de acción-proceso-objeto. Y se finaliza, asumiendo que los estudiantes deben aplicar el esquema de límite para hallar un número que será el valor de la integral.

CUADRO 1: DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA INICIAL DE LA INTEGRAL DEFINIDA POR CZARNOCHA Y OTROS

1. La noción de función a nivel de objeto.
2. 2.a La noción de partición a nivel de objeto.
2.b Comprender a nivel de objeto la noción de sucesión.
3. La acción sobre una función y una partición de construir una suma de Riemann.
4. La noción de suma de Riemann a nivel de proceso.
5. La noción de suma de Riemann a nivel de objeto, vía encapsulación de 4.
 - Variaciones de la suma (derecha, izquierda, punto medio).
 - Dependencia sobre n .
6. Acciones con la suma de Riemann: comparar con una área a nivel gráfico y mediante aproximaciones.
7. Proceso de sumas de Riemann, interiorización de 6.
8. Aplicar el esquema de límite para obtener un número.
9. Tener un esquema de límite de una sucesión que tenga en cuenta la distancia entre término y límite y tener una noción de distancia.
10. Esquema de la suma de Riemann.
11. Coordinación entre el esquema de suma de Riemann y el esquema de límite.

4. NUESTRA PROPUESTA DE DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

Nuestra propuesta de descomposición consiste en mantener como noción básica de la integral el límite de una sucesión de sumas de Riemann, dando un enfoque más próximo a la definición de Cauchy que a la de Riemann. De ahí que, fijemos como elementos de

la descomposición de la integral los objetos: sucesión, límite y sumas de Riemann y las relaciones entre sucesión y sumas de Riemann y entre sucesión y límite. En concreto, la Suma de Riemann formaría un esquema con los elementos recogidos en la descomposición de Czarnocha, diferenciando los elementos gráficos de los numéricos. También, incorporaríamos un esquema de la noción de Partición, antes de su incorporación como objeto tematizado al esquema de Suma de Riemann.

Consecuentemente en nuestra propuesta aparece una descomposición muy parecida a la de Czarnocha, pero sin reducirla a una mera enumeración de ítems, más bien planteamos un esquema de tipo anidado. La propuesta está recogida en el cuadro 2 y establecemos tres esquemas en la descomposición genética: el esquema de partición denotado por A, el esquema de Suma de Riemann denotado por B y el esquema considerado como específico de la integral definida que lo denotamos como C. Cada esquema constaba de sus elementos propios y de interrelaciones entre ellos. Además cada esquema formaba parte como un elemento propio del esquema siguiente. En la primera columna de la tabla introducimos la abreviatura de cada elemento, diferenciando elemento cognitivo (A_i o B_i o C_i) de una relación (R_iA). Las letras A, B y C nos servirán para identificar a que esquema pertenecen los elementos.

CUADRO 2: NUESTRA PROPUESTA DE DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

<u>ESQUEMA DE LA INTEGRAL DEFINIDA</u>	
<u>ESQUEMA A:</u> Partición de un intervalo $[a, b]$	
A.0	Esquema tematizado de intervalo en la recta real.
A.1	Gráficamente se tendría la acción de dividir un segmento en varias partes.
A.2	Analíticamente tendríamos la acción de mostrar un conjunto de valores ordenados, cuyo primer elemento coincidiría con a y el último con b .
A.3	Interiorización en un proceso de la noción de partición.
R1A	$\{A0RA1, A0RA2\}$ vía definición de partición.
R2A	$\{A1 R A2\}$ vía identidad de nociones.
<u>ESQUEMA B:</u> Sumas de Riemann para una función continua $f(x)$ en un intervalo real $[a, b]$	
B.01	Esquema tematizado de área de una superficie.
B.02	Esquema tematizado de función real de variable real.
B.03= A	Esquema tematizado de partición.
B.1	Gráficamente se tendría la acción de construir los rectángulos cuyas bases serían los subintervalos definidos por la partición y cuyas alturas serían las imágenes, por $f(x)$, de un punto según un criterio (el máximo, el mínimo, etc.) y delimitar sus áreas.
B.2	Analíticamente, se tendría la acción de hallar un número que coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.
B.3	La interiorización de las acciones llevará a una comprensión de la noción de suma de Riemann a nivel de proceso.
R1B	$\{B1RB2\}$ vía identidad de nociones.
<u>ESQUEMA C:</u> La integral definida como el límite a una sucesión de Sumas de Riemann.	
C1	Esquema tematizado de sucesión.
C2	Esquema tematizado de límite de una sucesión.

C3=B	Esquema tematizado de suma de Riemann.
R1C	{C1 R C3} vía construcción de una sucesión de sumas de Riemann.
R2C	{C2 R C3} vía límite de una sucesión de sumas de Riemann.

5. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de la investigación llevada a cabo es aportar información sobre aspectos de la comprensión de la integral definida y su desarrollo en el contexto específico de estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza que ven en las matemáticas una herramienta (“service mathematics”). Dicho objetivo se ha concretado en las siguientes CUESTIONES de investigación:

- ¿Podemos caracterizar niveles de desarrollo de la comprensión de la integral definida?
- ¿Se puede medir “el grado de pertenencia” a uno de esos niveles de desarrollo por parte de los estudiantes?

Para ello pretendemos identificar las diferentes construcciones cognitivas, fijadas en la descomposición genética, que los estudiantes han puesto en juego mientras resuelven una serie de cuestiones relacionadas con la integral definida. Y como consecuencia revisar la propuesta de descomposición genética de la integral para aportar información para el diseño de la instrucción.

6. METODOLOGIA DURANTE LA FASE EXPERIMENTAL

Participantes

En la investigación han participado 187 estudiantes matriculados en primer curso de escuelas de ingeniería que estaban relacionadas con el medio ambiente o el medio rural. Todos estaban matriculados en el primer curso de sus estudios, y cubrieron el tópico de la integral definida antes de pasarles el cuestionario para la recogida de los datos destinado a la elaboración de nuestra investigación. Además, relizaron unas prácticas de laboratorio computacional en las que se trabajaba con un CAS (Derive o MatLab). Los estudiantes se seleccionaron en tres cursos diferentes 04-05, 05-06 y 06-07. Los del curso 04-05 sirvieron para diseñar el cuestionario definitivo, que se les paso a los restantes grupos de estudiantes. A continuación se especifica en el cuadro 3 el tipo y número de estudiantes que han participado en la investigación.

CUADRO 3: ALUMNOS PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN

PARTICIPANTES			
TIPO DE GRUPO	Nº DE ESTUDIANTES	ESTUDIOS	ÉPOCA
GRUPOS PILOTO (CURSO 04/05)			
Grupo 1 (grupo piloto)	35	Ingeniería Técnica Forestal	Diciembre 2004
Grupo 2 (grupo piloto)	33	I.T. Agrícolas Explotaciones Agropecuarias.	Abril de 2005
PARTICIPANTES (CURSO 05/06 Y 06/07)			
Grupo 3	44	I.T. Agrícola Industrias Alimentarias	Enero de 2006
Grupo 4	46	Licenciatura Medio Ambiente	Abril de 2006
Grupo 5	29	I.T. Agrícolas Hortofruticultura	Noviembre de 2006

Instrumentos de recogida de datos

La obtención de datos se desarrollo en varias fases. En la primera fase se diseño y aplico un cuestionario piloto (grupo 1), cuyo análisis centrado sobre todo en algunos

elementos psicométricos, ayudó a mejorar la redacción del cuestionario y a disminuir el grado de dificultad de los ítems. Más tarde (grupo 2) se volvió a pasar el cuestionario reelaborado, y a partir sobre todo de un análisis cualitativo se pasó a construir el cuestionario definitivo de recogida de datos.

El cuestionario definitivo tenía tres bloques claramente diferenciadas. En el primero, que comprendía las dos primeras preguntas, se buscaba determinar los diferentes elementos y relaciones del esquema de partición que los estudiantes ponían en juego a la hora de resolver las cuestiones. En el segundo bloque, formada por dos cuestiones, se busca ver elementos del esquema de suma de Riemann, y el tercero los elementos del esquema de integral definida. Algunas de las preguntas del cuestionario procedían de investigaciones realizadas (Rasslan y Tall 2002) en torno a la integral definida.

BLOQUE I: PARTICIONES

La idea intuitiva de partición del intervalo $[a, b]$ es dividir el intervalo en otros de menor amplitud, no necesariamente iguales. Dar una partición, formalmente, sería dar un conjunto de números ordenados que empiece en un extremo del intervalo originario (a) y acabe en el otro (b).

Q.1 Dado el intervalo $[1,3]$ forma una partición que lo divida en 4 subintervalos de igual longitud.

Q.2 Sea un intervalo $I = [a, b]$, sea P una partición de I que lo divida en n partes iguales, y sea Q otra partición de I que lo divida en $n+1$ partes iguales. Luego se cumple:

A>> Los subintervalos de P son de mayor amplitud que los de Q .

B>> Los subintervalos de P son de menor amplitud que los de Q .

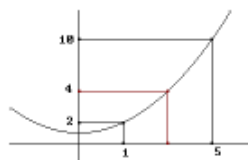
C>> Los subintervalos de P son de igual amplitud que los de Q .

D>> No se pueden comparar al ser intervalos generales.

BLOQUE II: SUMAS DE RIEMANN

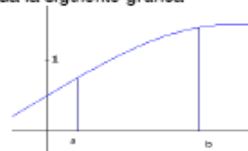
Dada una partición y una función $f(x)$, se define la Suma de Riemann como la suma de las áreas de los rectángulos de base la amplitud de los subintervalos generados por la partición y altura la imagen de un valor de cada subintervalo.

Q.3 Supongamos una función con la siguiente gráfica



calcula la Suma de Riemann tomando una partición del intervalo $[1, 5]$ que lo divida en dos partes iguales y eligiendo el extremo inferior de cada intervalo para evaluar las alturas.

Q.4 Dada la siguiente gráfica



Sea S_n la suma de Riemann para una partición de $[a, b]$ con n subintervalos, eligiendo el extremo superior de cada uno de ellos para evaluar las alturas. Luego:

A>> $S_n >$ Área encerrada entre la curva y el eje OX en $[a, b]$.

B>> $S_n <$ Área encerrada entre la curva y el eje OX en $[a, b]$.

C>> $S_n =$ Área encerrada entre la curva y el eje OX en $[a, b]$.

D>> S_n y el Área encerrada entre la curva y OX en $[a, b]$ no se pueden comparar por las expresiones no concretas de las nociones matemáticas.

BLOQUE II: UN ESQUEMA DE INTEGRAL

Q.5 Con la gráfica anterior, hallamos las Sumas de Riemann S_n para una partición de $[a, b]$, con n subintervalos, pero eligiendo el extremo inferior de cada uno de ellos para evaluar las alturas. Dado S_n se puede calcular para $n=1, n=2, \dots$ se tiene que

A>> S_n es una sucesión DECRECIENTE pues al aumentar n disminuye S_n

B>> S_n es una sucesión NO ACOTADA pues sobrepasa cualquier cantidad que se fije.

C>> S_n sería una sucesión CONVERGENTE pues a medida en que n aumenta nos acercaríamos a un determinado valor.

D>> Mientras no concretamos una expresión para la función y para el intervalo no podemos afirmar nada respecto a S_n

Q.6 Define la noción de integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

A>> $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$.

B>> El límite de una suma de términos $f(x)$ h , siendo h una expresión que tiende a cero a medida que el número de sumandos crece.

C>> Es la operación contraria a la derivada.

D>> Ninguna de las anteriores corresponde a la definición de integral.

CUADRO 4: CUESTIONARIO DEFINITIVO.

El objetivo de la segunda fase (curso 05-06 y curso 06/07) fue aplicar el cuestionario definitivo elaborado y realizar las entrevistas. En la selección de los entrevistados comenzamos con un análisis “dicotómico” de las respuestas al cuestionario que permitió clasificar a los estudiantes en grupos con un cierto grado de homogeneidad en la comprensión de la integral definida. Los estudiantes fueron distribuidos en tres grupos: Nivel bajo con puntuación menor o igual a 2; Nivel medio, puntuación entre dos y cuatro y nivel alto mayor de cuatro puntos. La identificación de los grupos de estudiantes con una comprensión “homogénea” permitió la selección de una muestra de estudiantes para las entrevistas que cubriera un espectro amplio en la comprensión de la

integral. La tabla I muestra el número de estudiantes en cada nivel y entre paréntesis los elegidos para las entrevistas.

TABLA I: DISTRIBUCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO

<i>Nivel Bajo</i> <i>0 ≤ puntos ≤ 2</i>	<i>Nivel Medio</i> <i>3 ≤ puntos ≤ 4</i>	<i>Nivel Alto</i> <i>5 ≤ puntos ≤ 6</i>
88 (23)	23 (9)	19 (8)

Metodología en el proceso de análisis de los datos

El análisis mediante técnicas fuzzy se centró, inicialmente, en identificar los elementos y relaciones de la descomposición genética que los estudiantes establecían durante la resolución de las cuestiones; y en asociar a cada elemento un grado de adquisición. Dicho grado se midió mediante una escala ordinal (Carlson, 1998), que va desde el 0 al 4, atendiendo a las respuestas y al tipo de justificación que se empleó en las entrevistas. Los criterios usados para asignar el grado de adquisición fueron los siguientes:

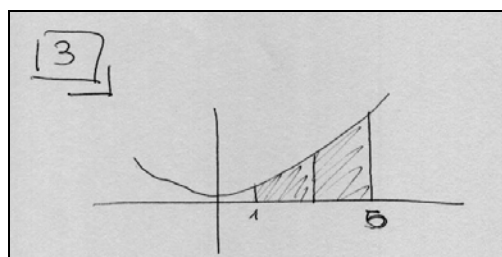
- Grado 0: respuestas en blanco o con elementos que no tienen que ver con el esquema.
- Grado 1: respuestas erróneas, pero que usan elementos del esquema.
- Grado 2: inicialmente la respuesta es incorrecta pero, con indicaciones y aclaraciones, se llega al uso esperado del elemento del esquema.
- Grado 3: respuesta correcta, pero se necesita indicaciones para una justificación clara.
- Grado 4: respuesta correcta y justificación clara.

El siguiente ejemplo describe como se asignó, a partir de las respuestas y lo transcrito de las entrevistas, un grado de adquisición de un elemento del esquema. El elemento B1 suponía gráficamente la acción de construir rectángulos cuyas bases fuesen los subintervalos definidos por la partición y cuyas alturas las imágenes de un punto según un determinado criterio (el máximo, el mínimo, etc.), y la delimitación gráfica del área total.

- Asignamos como grado cero si en la respuesta no se es capaz de dibujar nada razonable relacionado con los rectángulos, como por ejemplo confundir área con sumas de Riemann (ver gráfico I).

GRÁFICO I

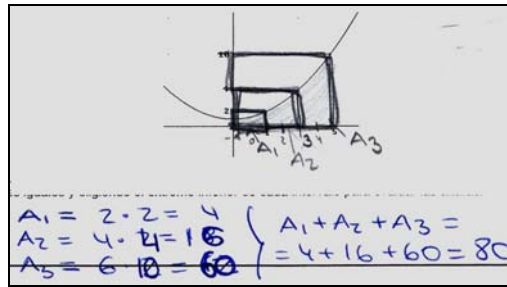
Ejemplo de respuesta con grado 0 de adquisición



- Asignamos un grado uno si confunden los rectángulos a construir (ver gráfico II)

GRÁFICO II

Ejemplo de respuesta con grado 1 de adquisición



- Asignamos un grado 2 si llegan al resultado después de indicaciones y con algunos errores e indecisiones. Observemos la siguiente transcripción de una entrevista a un alumno:

E: No contestaste a esta cuestión ¿Conoce lo qué es una suma de Riemann?

A: *Tengo una idea pero no se realizar los cálculos*

E: Forma gráficamente la suma de Riemann.

A: *sería el intervalo de 1 a 5, por ejemplo, la curva de aquí a aquí*

E: Lee lo que es la suma de Riemann

A: *la suma de rectángulos, es decir, este rectángulo más este*

E: Bien por los rectángulos, pero lo del extremo superior para formar alturas ¿Qué?

A: *ya entiendo*

E: Tomas uno solo?

A: *No, habría más (ver gráfico III)*

E: Y como calcular el área

A: *No lo se.*

E: Sabes cual es el área de un rectángulo

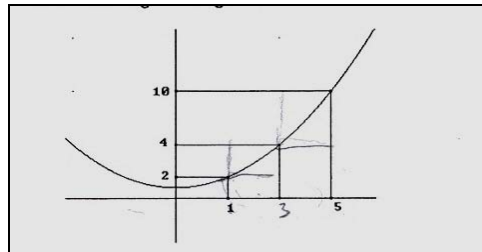
A: *si base por altura.*

E: ¿Y cual es el problema?

A: *la base valdría dos y la altura dos, y por tanto cuatro y este otro 2x4 que es ocho.*

GRÁFICO III

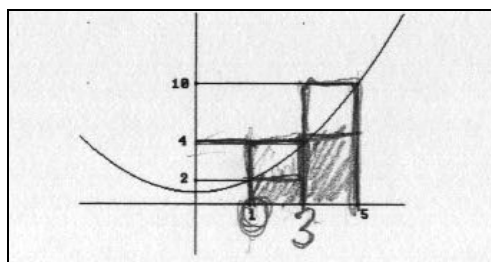
Ejemplo de respuesta con grado 2 de adquisición



- Asignamos un grado 3 si representan correctamente las sumas de Riemann, pero necesitan alguna indicación para que dibujen correctamente las alturas de los rectángulos (ver gráfico IV)

GRÁFICO IV

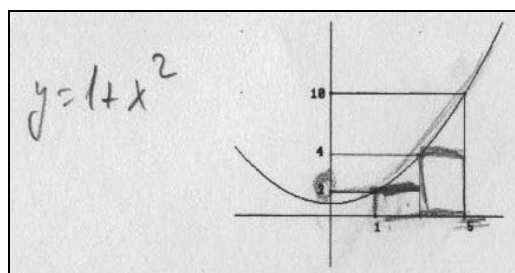
Ejemplo de respuesta con grado 3 de adquisición



- Asignamos un grado de desarrollo 4 si dibujan correctamente las sumas de Riemann (ver gráfica V)

GRÁFICO V

Ejemplo de respuesta con grado 4 de adquisición



Una vez asignado un grado de adquisición a cada elemento del esquema se transformaba en un grado de desarrollo, para formar conjuntos fuzzy, atendiendo a la siguiente tabla:

TABLA II

TRANSFORMACIÓN DEL GRADO DE ADQUISICIÓN A GRADO DE DESARROLLO

Grado de Adquisición	0	1	2	3	4
Grado de desarrollo	0	0,25	0,50	0,75	1

Después de esta primera fase del análisis fuzzy, tenemos asignados unos grados de adquisición a cada elemento del esquema, es decir, cada individuo, tiene un conjunto de valores comprendidos entre 0 y 1, o lo que es lo mismo, un vector de R^n , siendo n el número de elementos de su esquema de la integral (S). Por lo tanto, podemos utilizar la métrica clásica (euclidiana) para medir la distancia o grado de cercanía o similitud entre los resultados de dos estudiantes:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

En una segunda fase del análisis fuzzy debemos elegir un estudiante (x_0) que nos permita hallar la distancia que exista dicho estudiante y cualquier otro alumno. En nuestro caso optaremos como x_0 aquel estudiante, ideal, que hubiera obtenido puntuación 1 en todos los elementos del esquema, pues creemos que es la referencia idónea para medir el grado de desarrollo de un estudiante en un determinado esquema. La función que nos determina el nivel de comprensión del esquema S está definida por:

$$\mu(x) = F_d(x_0, x, t) = \frac{t}{t + d(x_0, x)}$$

y que es una función que depende del parámetro t . En el estudio que hemos llevado a cabo, se han seguido una serie de pasos para determinar el valor de t y, posteriormente, el nivel de adquisición por parte de los alumnos del esquema de la integral definida.

En un primer paso, determinamos el valor de t que nos permitirá medir el nivel de pertenencia al conjunto fuzzy “los alumnos han adquirido el esquema de partición (A)”. Para ello hemos supuesto que un alumno, Q, con todo cero en todos los elementos de su esquema, excepto en el elemento (AO) que corresponde a un prerrequisito, debe tener un grado de pertenencia inferior o igual a 0’25. De donde deduciremos el valor de t .

$$d(Q, x_0) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow$$

$$\mu(Q) = F_d(Q, x_0, t) = \frac{t}{t+2} \leq 0.25 \rightarrow t_A \leq 0.6666667014$$

En un segundo paso, determinaremos el valor del parámetro t el grado de pertenencia al siguiente conjunto fuzzy “los alumnos han adquirido el esquema de suma de Riemann (B)”. Dado que en este esquema hemos asignado la máxima valoración para los dos elementos primeros (B01 y B02) que consideramos prerrequisitos, podemos establecer que un individuo con puntuación $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ significaría que posee los elementos considerados prerrequisitos necesarios pero ha sido incapaz de construir ningún otro elemento del esquema, luego también se puede considerar que tiene un nivel de comprensión de inferior o igual a 0.25 y, por tanto

$$d(Q, I) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2}$$

$$= \sqrt{5} \rightarrow F(Q, t) = \frac{t}{t + \sqrt{5}} \leq 0.25 \rightarrow t_B \leq 0.7453559$$

tomaremos, para simplificar $t_B = 0.74$.

Finalmente, para establecer un grado de adquisición al esquema de la integral definida (esquema C), también debemos hallar un valor de t . Puesto que a todos los alumnos analizados se les ha asignado, en los elementos previos C1 y C2, un grado de comprensión completo, para un alumno cuyas puntuaciones fuesen $(1, 1, 0, 0, 0)$ podríamos afirmar que no tiene un nivel de comprensión mínimo del esquema de la integral definida (C), es decir, se le debería asignar un grado de comprensión igual o por debajo de 0.25. Consecuentemente tenemos que:

$$\frac{t}{t + \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2}} = \frac{t}{t + \sqrt{3}} < 0.25 \rightarrow t_C < 0.57746$$

tomaremos, para simplificar, $t_C = 0.577$.

Una vez determinados los valores de t pasaríamos a medir el nivel de comprensión global correspondiente a todos y cada uno de los esquemas anteriores, considerando un valor común de $t = \min\{t_A, t_B, t_C\}$. Una vez determinado el valor de t , usaremos la función $\mu(x)$ para hallar el grado de desarrollo del esquema A (Partición de un intervalo). Este grado nos servirá a su vez para hallar el grado de desarrollo del esquema B (suma de Riemann), que a su vez nos permitirá calcular el grado de desarrollo del esquema C (Integral definida).

7. ANALISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

A continuación, presentamos en una tabla (III) los resultados del análisis fuzzy realizado al grupo de 40 estudiantes entrevistados en la investigación. En la primera columna (AL), introducimos un número identificativo de cada estudiante. Los datos comienzan con el primer esquema (A= partición). Las columnas (A0, A1, A2, A3 y A1R) muestran el grado de desarrollo de los diferentes elementos cognitivos y relaciones de este esquema. Seguidamente se muestra la valoración fuzzy, $\mu(x)$, realizada para el esquema A. Se completa la tabla calculando la medida fuzzy para los otros esquemas de la descomposición genética (B= Sumas de Riemann para una función continua en un intervalo real; C= la integral como el límite de una sucesión de

Riemman).

TABLA III

RESULTADOS DEFINITIVOS PARA LA MEDIDA FUZZY CORRESPONDIENTE AL ESQUEMA DE LA INTEGRAL

AL.	ESQUEMA A (Partición de un intervalo)						ESQUEMA B (Suma de Riemann)								ESQUEMA C (Integral definida)					
	A0	A1	A2	A3	R1A	A	B01	B02	B03=A	B1	B2	B3	R1B	B	C1	C2	C3=B	R1C	R2C	C
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0	0,25	0	0,25	1	1	0,25	0	0,24	0,28
2	1	0,5	0,75	0,75	1	0,48	1	1	0,48	0,75	0,5	0,75	0,5	0,38	1	1	0,38	0,25	0	0,29
3	1	1	0,75	0,5	0,75	0,48	1	1	0,48	0,75	0,5	1	0	0,31	1	1	0,31	0,75	0	0,32
4	1	1	0,5	1	0,75	0,5	1	1	0,50	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
5	1	1	0,25	0,75	0,5	0,38	1	1	0,38	1	0,25	0,25	0,25	0,28	1	1	0,28	0	0	0,26
6	1	1	0,75	1	1	0,7	1	1	0,70	0,25	0	0,25	0	0,24	1	1	0,24	0	0	0,26
7	1	1	0,75	0,25	0,75	0,41	1	1	0,41	0,25	0	0,25	0	0,23	1	1	0,23	0,25	0	0,28
8	1	1	0,75	0,25	0,75	0,41	1	1	0,41	0,25	0	0,25	0	0,23	1	1	0,23	0,25	0	0,28
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	0,5	0,5	0,5	0,5	0,36	1	1	0,36	0,75	0	0,32
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	0	1	0	0,29	1	1	0,29	0,5	0	0,30
11	1	1	0,75	1	0,75	0,62	1	1	0,62	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
12	1	0,75	0,25	0,25	0,5	0,32	1	1	0,32	0	0	0,25	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	0,5	0,5	0,5	0	0,3	1	1	0,30	0	0	0,27
14	1	0,75	0,5	1	0,75	0,48	1	1	0,48	0,5	0,5	0,75	0	0,3	1	1	0,30	0	0	0,27
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1	1	1	1	1	1,00	0,75	0	0,36
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00
17	1	1	1	1	0,75	0,7	1	1	0,70	0,5	0,5	0,25	0,25	0,3	1	1	0,30	0	0	0,27
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	0	0,75	0,5	0,33	1	1	0,33	0,5	0	0,30
19	1	1	0,75	0,75	0,75	0,57	1	1	0,57	0,5	0,5	0,5	0,25	0,32	1	1	0,32	0,25	0	0,29
20	1	1	0,75	0,25	0,75	0,41	1	1	0,41	0	0	0	0	0,21	1	1	0,21	0	0	0,26
21	1	1	0,25	0,25	0	0,28	1	1	0,28	0,5	0	0,5	0	0,25	1	1	0,25	0,25	0	0,28
22	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	1	0,75	0,5	0,75	0,48	1	1	0,48	0,25	0,25	0,33
23	1	0,75	0,5	0	1	0,33	1	1	0,33	0	0	0	0	0,21	1	1	0,21	0	0	0,26
24	1	0,5	0	0	0	0,24	1	1	0,24	0	0	0	0	0,21	1	1	0,21	0	0	0,26
25	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
26	1	0,5	1	1	1	0,53	1	1	0,53	0,5	0,25	0,75	0	0,28	1	1	0,28	0	0	0,26
27	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	1	1	0,75	0,25	0,42	1	1	0,42	1	0	0,33
28	1	1	1	0,75	1	0,70	1	1	0,70	0,75	0,75	0,75	0,75	0,49	1	1	0,49	0,75	0,5	0,43
29	1	1	1	1	0,75	0,70	1	1	0,70	1	1	0,75	1	0,59	1	1	0,59	1	0,25	0,40
30	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	0	0,36
31	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	1	0,75	0,75	0,62	1	1	0,62	1	0,5	0,48
33	1	1	0,75	1	0,25	0,42	1	1	0,42	0,5	0	0	0,25	0,24	1	1	0,24	0	0,25	0,28
34	1	0,75	0,75	0,25	0,5	0,37	1	1	0,37	0,25	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0,25	0,28
35	1	0,75	1	0,75	0,75	0,57	1	1	0,57	0,75	0,5	0,75	0,75	0,42	1	1	0,42	0,75	0,75	0,46
36	1	0,75	1	1	1	0,7	1	1	0,70	0,75	0,75	0,75	0,75	0,49	1	1	0,49	1	1	0,53
37	1	0,75	1	0,25	0,75	0,41	1	1	0,41	0,25	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0,25	0,28
38	1	0,75	1	0,75	0,75	0,57	1	1	0,57	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0,5	0,29
39	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,37	1	1	0,37	1	1	0,75	0,75	0,43	1	1	0,43	0,75	0,5	0,42
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1	0,5	0,43	1	1	0,43	0,5	0,25	0,35
SUMA=	40	37,3	30,5	27	25,8	26,60	40	40	26,60	21,5	14,8	18,5	11,75	14,7	40	40	14,69	13,5	6,49	13,2
Medio=	1	0,93	0,76	0,68	0,65	0,67	1	1	0,67	0,54	0,37	0,46	0,29	0,37	1	1	0,37	0,34	0,16	0,33

Discusión de los resultados del esquema de partición (A)

Si nos fijamos en la suma de los valores de los diferentes elementos de este primer esquema A, observamos que la relación es la que obtiene un valor fuzzy medio (0'65) menor lo cual es lógico dado que es previsible que para establecer relaciones entre elementos se ha de tener una comprensión suficiente de dichos elementos. Dejando aparte esta valoración, el total correspondiente a la columna A3 que mide a un proceso es menor que los correspondientes a las columnas A1 y A2 que son acciones. Esto nos puede sugerir que la mera repetición de acciones no resulta suficiente para lograr la comprensión de un proceso asociado a ellas. Además, la acción de tipo gráfico (A1) alcanza la valoración media fuzzy mayor (0'93).

En cuanto al análisis global de este esquema A nos apoyamos en la siguiente hipótesis previa: un estudiante para alcanzar un grado mínimo de comprensión en la noción de partición (A) debe alcanzar una puntuación $x = (1, 0,5, 0,5, 0,5, 0,5)$, es decir, un grado de adquisición completa en el prerrequisito y suficiente en el grado de adquisición del resto de elementos del esquema, y por tanto tendría un grado de pertenencia a este esquema de

$$\mu(y) = F_d(y, x_0, 0.57) = \frac{0.57}{0.57 + \sqrt{(1-1)^2 + 4 \cdot (1-0.5)^2}} = 0.363$$

Hecha esta consideración, los resultados nos indican que existen cuatro estudiantes que no llegan a un desarrollo suficiente del esquema partición. Teniendo como mayor dificultad, manejar la noción de partición a nivel de proceso. En cambio, los restantes 36 estudiantes (90%), obtiene un grado de desarrollo suficiente para la noción de partición, incluso 14 alumnos han alcanzado la puntuación máxima, 1 punto. En definitiva, la gran mayoría de los estudiantes analizados estarían en condiciones de seguir adquiriendo los restantes elementos del esquema de la integral.

Discusión de los resultados del esquema de sumas de Riemann (B)

Volvemos a tener en la relación (R1B) el elemento con menor valoración fuzzy medio (0.29), lo cual estaría en concordancia con los resultados del esquema anterior. Por otro lado, vemos que el elemento B1 (suma de Riemann a nivel gráfico) ha obtenido mayor valoración fuzzy que el B2 (suma de Riemann a nivel analítico), es decir, el grupo analizado se mueve mejor a nivel gráfico que a nivel analítico. Esto también se puede constatar, si nos fijamos en las sumas del B3, que aunque es un elemento que implica una comprensión a nivel de proceso, el razonamiento seguido por los estudiantes ha sido sobre todo a nivel gráfico.

En cuanto al análisis global, contemplamos las siguientes hipótesis: un estudiante con la siguiente valoración $y = (1, 1, 0.36, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$, tendría un grado de pertenencia a este esquema de

$$\mu(y) = F_d(y, x_0, 0.57) = \frac{0.57}{0.57 + \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0.36)^2 + 4 \cdot (1-0.5)^2}} = 0.324$$

y admitiremos que dicho alumno poseerá una comprensión suficiente del esquema de suma de Riemann. La situación en cuanto a la comprensión de este concepto es totalmente diferente al de esquema de partición. 17 alumnos obtienen un grado de desarrollo en este esquema inferior a 0,254 puntos y por tanto con una comprensión claramente insuficiente. Y sólo 15 estudiantes alcanzan los 0,33 puntos o lo superan, es decir, adquieren un nivel suficiente de comprensión para este esquema. Resultados que manifiestan un conocimiento significativamente inferior de este esquema respecto al anterior.

Discusión de los resultados del esquema de partición (C)

En cambio para poseer un nivel suficiente en este esquema el alumno tendría que tener una valoración del tipo $y = (1, 1, 0.33, 0.5, 0.5)$, es decir, significaría que comprende la noción de Sumas de Riemann y ha sido capaz de establecer las relaciones previstas, es decir, crear una sucesión de sumas de Riemann y ver en el límite la solución al problema del área. Esto implicaría un grado de comprensión

$$\mu(y) = F_d(y, x_0, 0.57) = \frac{0.57}{0.57 + \sqrt{2 \cdot (1-1)^2 + (1-0.33)^2 + 2 \cdot (1-0.5)^2}} = 0.368$$

Como era de prever el nivel de desarrollo sigue una tendencia negativa. En este caso, sólo seis estudiantes superan 0.36 puntos. Unos resultados que son coherentes con la composición del esquema ya que sus elementos son relaciones que se establecen con los objetos del esquema anterior de sumas de Riemann, los cuales no habían sido adecuadamente adquiridos en la mayoría de los casos. De las dos relaciones previstas en

este caso, la que se refiere a la construcción de sucesiones con las sumas de Riemann ha obtenido una valoración superior a la de aplicar el concepto de límite a las sumas de Riemann. Analizando las respuestas hemos observado que hay estudiantes capaces de construir relaciones entre las sumas de Riemann y las sucesiones, aunque sea a nivel de listado de números (*seqlist*) y a nivel gráfico que puede ser suficiente para establecer ciertos significados institucionales. Además, nos hemos encontrado con un grupo de respuestas que introducen el límite, pero sin aclaraciones respecto al porqué de su uso. Detrás de ellas, se puede encontrar un esquema de límite donde se resalta la concepción de dicho concepto como una acción. Aunque también es cierto que hemos encontrado estudiantes que utilizan el límite como la operación necesaria para pasar de unos cálculos aproximados al cálculo exacto del área.

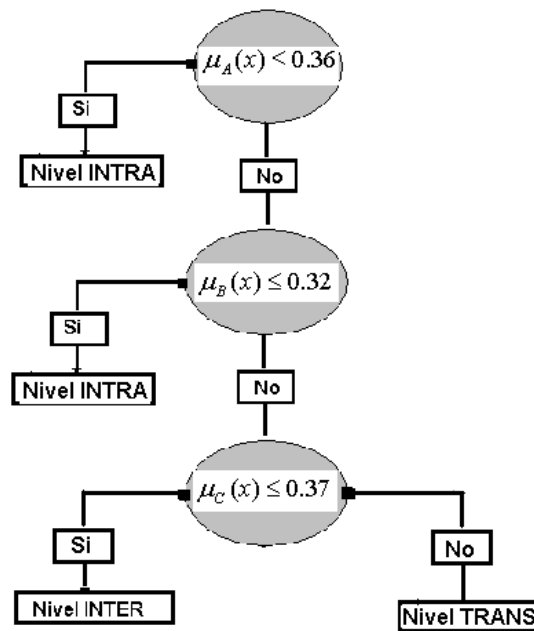
8. CONCLUSIONES

En primer lugar destacaríamos que la propuesta metodológica basada en la utilización de la lógica y, más en concreto, de la métrica fuzzy, permite analizar, también desde una vertiente cuantitativa, un aspecto, en principio difuso y sometido a muchas incertidumbres, como es el estudio y valoración del nivel de desarrollo en la comprensión de un esquema a lo largo de sus etapas. La metodología propuesta permite introducir en el sistema consideraciones subjetivas (niveles de exigencia) a través del cálculo del parámetro t , lo cual constituye una herramienta fundamental a la hora de hacer valoraciones del nivel de adquisición de un concepto, teniendo en cuenta, incluso, elementos contextuales o “percepciones” provenientes de la experiencia personal.

Respecto a las construcciones cognitivas realizadas por estos alumnos, se observa unos mejores niveles de desarrollo cuando están relacionadas con aspectos gráficos. Aunque puede ser suficiente para que adquieran los significados institucionales requeridos, pensamos que no por ello se debe obviar la importancia de adquirir aquellos elementos de tipo analítico que recoge el esquema de la integral; ya que pueden ser esenciales para que los alumnos vean la integral como una noción básica para entender otras nociones de su campo de estudio tales como la relación entre integral y temperatura media o, centros de masa, volúmenes, etc.

También hemos podido comprobar que aquellos elementos del esquema que supongan acciones han sido más fáciles de adquirir que aquellos otros que supongan procesos. De alguna manera, estos resultados refuerzan aquellos aspectos teóricos de APOS que indican que los procesos no solo son consecuencia de la repetición de acciones sino que además deben tener un determinado grado de interiorización, que suele adquirirse a través de la reflexión de las acciones realizadas. De ahí que en el diseño de metodologías de aprendizaje, se deben incluir o ampliar las actividades que permitan mejorar la comprensión de los procesos. En este aspecto, los asistentes matemáticos pueden ayudar por una parte a realizar tareas que impliquen acciones que con la correspondientes interiorización conduzcan a una mejora en la comprensión a nivel de proceso.

Atendiendo las hipótesis realizadas en la sección de resultados resumidos en el siguiente esquema



Nos encontramos con estudiantes que estarían en una fase de construir o bien el esquema de partición o el de suma de Riemann, y por tanto en el nivel *INTRA*. En cambio, observamos otros que fueron capaces de construir dichos elementos pero no lograron establecer las dos relaciones, especialmente la de establecer el límite como paso del valor aproximado del área al valor exacto, y por tanto estarían en el nivel *INTER*. Por ultimo, observamos otros estudiantes que fueron capaces de construir todos los elementos del esquema y por tanto manifiestan estar en el nivel *TRANS*.

Finalmente, en relación a la descomposición genética que hemos fijado para la integral pensamos que se corresponde a la exigencia propia de los estudios de ingeniería relacionados con el medio ambiente y las ciencias de la naturaleza, como se puede comprobar en el análisis de libros de textos realizado. De todas maneras, pensamos que se deberían reforzar la formalización de la integral, reforzando los aspectos algebraicos. Luego nuestra propuesta definitiva para la descomposición genética de la integral quedaría de la siguiente manera:

CUADRO 5:

PROPUESTA DE DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN FUNCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.

ESQUEMA DE LA INTEGRAL DEFINIDA	
A. Partición de un intervalo $[a, b]$	
A.0	Esquematizado de intervalo en la recta real.
A.1	Gráficamente se tendría la acción de dividir un segmento en varias partes.
A.2	Númericamente, dado un valor n , tendríamos la acción de mostrar un conjunto de valores ordenados, cuyo primer elemento coincidiría con a y el último con b todos con la misma amplitud $h = (b-a)/n$.
A.3	Interiorización en un proceso de la noción de partición.
R.A.	identificación la expresión $P = \{x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \dots, x_n = b\}$ como partición de un intervalo
B. Sumas de Riemann para una función continua $f(x)$ en un intervalo real $[a, b]$ y con una partición	
B.01	Esquematizado de área de una superficie.
B.02	Esquematizado de función real de variable real.
B.03=A	Esquematizado de partición.
B.1	Gráficamente, se tendría la acción de construir los rectángulos cuyas bases serían los subintervalos definidos por la partición y cuyas alturas serían las imágenes, por $f(x)$, de un punto según un criterio (el máximo, el mínimo, etc.), y delimitar sus áreas.
B.2	Númericamente, se tendría la acción de hallar un número que coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.
B.3	La interiorización de las acciones llevará a una comprensión de la noción de suma de Riemann a nivel de proceso.
R.B.	identificación la expresión $f(x_1) \cdot h + f(x_2) \cdot h + \dots + f(x_n) \cdot h$ como la suma de Riemann de una función $f(x)$ y la partición P .
C.- Definir la integral definida como la aplicación del esquema límite a una sucesión de sumas de Riemann.	
C1	Esquematizado de sucesión.
C2	Esquematizado de límite de una sucesión, que incluya el paso de un proceso de acercamiento al valor exacto.
C3=B	Esquematizado de suma de Riemann
R1C	{C1 R C3} vía construcción de una sucesión de sumas de Riemann
R2C	{C2 R C3} vía límite de una sucesión de sumas de Riemann

9. IMPLICACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

El modelo teórico APOS sobre comprensión de nociones matemática avanzadas asume que es necesario a partir de los resultados de la investigación introducir mejoras en las propuestas que se hagan de la descomposición genética analizadas, que en este caso podrían ir por la línea de mejorar las construcciones de tipo analítico. La metodología usada para diseñar nuestra descomposición genética de la integral se podría extender a otros conceptos matemáticos, tanto a los directamente relacionados con nuestro esquema, sucesión, límite como a otras nociones básicas del cálculo, como podrían ser las de derivada, ecuaciones diferenciales, integral indefinida, series, etc.

Por otro lado creemos que el uso de la métrica Fuzzy, el aspecto más novedoso de nuestra metodología de investigación, permite una valoración cuantitativa que también se puede utilizar en la evaluación de la comprensión de otros conceptos matemáticos. Además, habría que ver si este tipo de métrica permitiría clasificar a los estudiantes

según su nivel de adquisición de una noción, lo que posibilitaría a los profesores diseñar actividades diferentes para cada uno de los niveles.

Otra de las herramientas que ha sido importante a la hora de realizar nuestro estudio ha sido la utilización de asistentes matemáticos, en concreto Derive. Sería interesante dado que la métrica Fuzzy nos aporta una puntuación global aplicar técnicas estadísticas del tipo ANOVA, para ver hasta que punto el uso de dichos asistentes mejora la comprensión de los elementos de nuestro esquema de integral o de cualquier otro que se diseñase en el futuro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARTIGUE, M., BATANERO, C., y KENT, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post secondary level. In Fr. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on Mathematics Teaching and learning* (pp. 1011-1045). Charlotte, NC: IAP - Information Age Publishing.
- ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D.J., DUBINSKY, E., MATHEWS, D. y THOMAS, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate Mathematics Education. CBMS issues in mathematics Education*, 6, 1-32.
- CAMACHO, M. y DEPOOL, R. (2003b). Using Derive to understand the concept of definite integral. *International journal for Mathematics Teaching and Learning*, 5, 1-16.
- CARLSON, M.P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 3, 114-162.
- CLARK, J. M., CORDERO, F., COTRILL, J., CZARNOCHA, B., DEVRIES, D., TOLIAS, G. y VIDAKOVIC, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. *Journal of mathematical Behavior*, 14(4), 345-364.
- CHANG, C.L. (1967). Fuzzy topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24, 182-190.
- CONTRERAS y colaboradores (2003). *Análisis de manuales de 1º y 2º de bachillerato, en cuanto a los conceptos básicos del Calculo infinitesimal derivada e integral, bajo la perspectiva de los obstáculos epistemológicos. Proyecto de investigación*. Jaen: Instituto de Estudios Gienenses.
- CZARNOCHA, B., LOCH, S., PRABHU, V., y VIDAKOVIC, D., (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. En Maria van den Heuvel-Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the XXV Conference of the P.M.E.* (pp. 297-304). Utrecht: Freudenthal Institute.
- DREYFUS, T. y EISENBERG, T. (1986). On visual versus analytical thinking in Mathematica. *Proceedings of the Xth Conference of the P.M.E.* (pp. 153-158). London, UK.
- DÖRFLER, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(4), 337-350.
- DUBINSKY, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- FERRARA, F., PRATT, D., ROBUTTI, O. (2006). The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp.237-274). Rotterdam/ Taipei: Sense Publishers
- FERRINI-MUNDY, J. y Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrates. En E. Dubinsky y J. Kaput (Eds)

- Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, MMA Notes 33 (pp. 31-45). Washington, DC: MMA.
- GEORGE, A. y VEERAMANI, P.V. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64, 395-399.
- HAREL, H., SELDEN, A. y SELDEN, J. (2006). Advanced mathematical thinking. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 147-172). Rotterdam/ Taipei: Sense Publishers.
- HASEUSSLER E. y PAUL, R. (1997). *Matemáticas para economía, ciencias sociales y de la vida* (8ª ed.). Mexico: Prentice Hall.
- LARSON, R. E. y HOSTETLER, R. (1989). *Cálculo y geometría analítica* (3a ed.). Madrid: Mc Graw Hill.
- Mc DONALD, M. A., MATHEWS, D. y STROBEL, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV, CBMS Issues in Mathematics education* (vol. 8, 77-102). Providence, RI: American Mathematical Society.
- MUNDY, J. (1984). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En A. Bell, B. Low, y J. Kilpatrick (Eds.), *Theory Research and Practice in Mathematics Education. Proceedings, ICME 5* (pp. 170-182). Nottingham: Shell Centre.
- NEUHAUSER, C. (2004). *Matemáticas para Ciencias* (2ª. ed.). Madrid: Prentice Hall.
- ORTON, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.
- PIAGET, J. y GARCÍA R. (1983/1989). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Madrid: Siglo veintiuno editores.
- RASSLAN, S. y TALL, D. (2002). Definitions and imagens for the Definite Integral Concept. En Cockburn y Nardi (Eds.), *Proceedings of the XXVI annual of the PME*, (Vol. 4, pp. 89-96). Norwich.
- SÁNCHEZ-MATAMOROS G., GARCÍA M. y LLINARES S. (2006a). El desarrollo de un esquema de la Derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- THOMAS, G. B. y FINNEY, R. L. (1987). *Cálculo con geometría analítica* (6ª ed.). México: Addison-Wesley.
- TRIGUEROS, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.
- TURÉGANO, P. (1993). *De la noción de área a su definición*. Cuenca: Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.
- VON GLASERSFELD, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Washington, DC: Falmer.
- ZADEH, L. A. (1965), Fuzzy sets. *Inform. Control*, 8, 338-353.

LA INTEGRAL DE RIEMANN. INTERPRETACIÓN DE LOS ERRORES DE APROXIMACIÓN UTILIZANDO UN CAS¹

Matías Camacho Marín *
Ramón Depool Rivero **
Martín Socas Robayna ***

Resumen

En este trabajo se presenta una investigación que se desarrolló con estudiantes de primer curso universitario con el objetivo general de analizar las dificultades que poseen los estudiantes a la hora de comprender algunos conceptos fundamentales de las Matemáticas tales como error de aproximación, cota del error, valores exactos y aproximados. Elegimos para ello, el concepto de integral de Riemann y desarrollamos con los estudiantes un conjunto de sesiones usando el Computer Algebra System (CAS) *DERIVE* como herramienta para facilitar la comprensión de tales conceptos.

Palabras clave: Enseñanza y aprendizaje de la Integral Definida, cotas del error, Programas de Cálculo Simbólico (PCS)

Abstract

In this work we present results from a research study whose aim was to analyze first year university students' approaches to comprehend mathematical concepts that involve approximation errors, error bounds, and exact, and approximate values during the study of Riemann integration. To this end, students used Computer Algebra System (CAS) *DERIVE* as a tool to facilitate the comprehension of such concepts.

Keywords: Teaching and learning Definite Integral, error bounds, Computer Algebra System (CAS)

1. INTRODUCCIÓN

Una forma de introducir el concepto de integral definida, consiste en el uso del problema de aproximación del área limitada por una curva con el eje OX. Depool (2004), en su Tesis Doctoral, realizó una investigación en la que la secuencia de enseñanza utilizada se desarrolló en esos términos, utilizando para ello un Programa de Utilidades diseñado a tal efecto haciendo uso del CAS (Computer Algebra System) *DERIVE* (véase Camacho, Depool y Santos, 2005 y 2010), potenciando ese sentido de aproximación al cálculo del área limitada por una curva con el eje OX, haciendo uso de diferentes métodos tales como el de rectángulos (inferiores, superiores y punto medio),

¹ Una versión preliminar de este trabajo fue presentada por sus autores en la Poster Session del 11 ICME celebrado en Monterrey en el año 2008.

* Universidad de La Laguna. Islas Canarias. España

** Unexpo. Venezuela

*** Universidad de La Laguna. Islas Canarias. España

trapecios y parábolas (Simpson). Los resultados obtenidos, mostraron la necesidad de plantear a los estudiantes un análisis específico de los errores de las aproximaciones que se obtenían por estos métodos. Para la investigación que vamos a presentar, se utilizaron una serie de actividades diseñadas de tal manera que los estudiantes debían estimar cotas del error de aproximación utilizando procedimientos gráficos, numéricos y algebraicos.

La comparación y análisis de los procedimientos utilizados por los estudiantes, permitió discutir varios aspectos relevantes del concepto de error de aproximación de la Integral Definida que se presentarán en lo que sigue.

En la investigación que presentamos, nos hemos propuesto como objetivos:

- Determinar las dificultades y errores que se observan en las actuaciones de los estudiantes al construir el concepto del error de aproximación de la Integral Definida
- Establecer la competencia de los estudiantes en la construcción del concepto del error de aproximación de la Integral Definida.
- Determinar las contribuciones del software *Derive* en la construcción del concepto del error de aproximación para el cálculo del área bajo una curva, de una función cuya primitiva no puede ser obtenida por medio de métodos elementales.

Para su desarrollo, se realizó un experimento de enseñanza guiado por una conjetura:

“el proceso de construcción del conocimiento del error de aproximación en la integral definida mejora cuando se usa la tecnología como instrumento en la resolución de las situaciones problemáticas planteadas”. Se videograbaron varias sesiones y se desarrolló una interacción directa con los estudiantes para indagar las diferentes concepciones que tienen sobre el trabajo que realizaron.

2. MARCO CONCEPTUAL

Diferentes investigaciones han mostrado que el uso de un CAS ofrece a los estudiantes la oportunidad de representar información y establecer relaciones para resolver los problemas, en términos de aproximaciones visuales, numéricas y algebraicas (Blume y Heid, 2008, Ruthven, 2002) y en nuestro trabajo, se examinará el proceso de construcción del conocimiento que evidencian los estudiantes cuando transforman el artefacto (el software *Derive*) en un instrumento para la resolución de problemas (véase: Artigue, 2002; Trouche, 2005), en términos de propiedades y significado, conectando y relacionando distintas representaciones y operaciones que aparecen mientras resuelven los mismos.

Nuestro marco conceptual se sustenta principalmente en las consideraciones de los modelos de competencia (cognitivo, formal y de enseñanza), que como es sabido, este campo ha generado en Didáctica de las Matemáticas diferentes aproximaciones, es decir, en este campo de investigación se distinguen diversas formas de estudiar las situaciones problemáticas de naturaleza didáctico matemática.

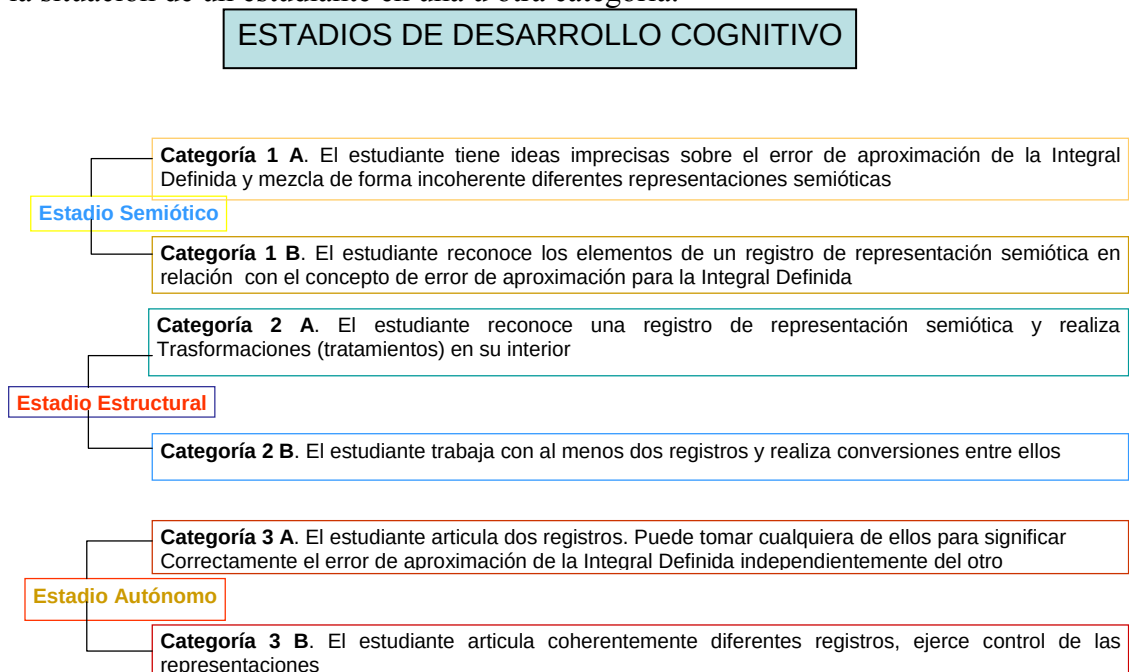
Mostraremos a continuación un modelo de competencia cognitivo adaptado del de Socas (2007) y derivado del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), el cual nos permitió estudiar la comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de error de aproximación a la Integral Definida. Si se tiene en cuenta que uno de los objetivos de la Teoría ELOS consiste en elaborar modelos teóricos y prácticos (Modelos de Competencia), a partir del análisis empírico, que aporten los supuestos básicos que permitan interpretar fenómenos específicos que se dan en Educación Matemática, es por lo que esta adaptación nos resulta útil para el desarrollo de nuestra investigación. Socas (2007) estableció que un modelo de competencia cognitivo se refiere al aspecto formal

del campo conceptual tanto a sus aspectos conceptuales y fenomenológicos como a sus aspectos cognitivos, es decir, simularía los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado.

El Modelo de Competencia Cognitivo quedó establecido a partir de tres componentes principales:

- Los estadios de desarrollo cognitivo a partir de los sistemas de representación. A saber, el estadio semiótico, el estructural y el autónomo.
- La teoría de Duval (1993) sobre los registros de representación semiótica y el funcionamiento cognitivo del pensamiento.
- Las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas

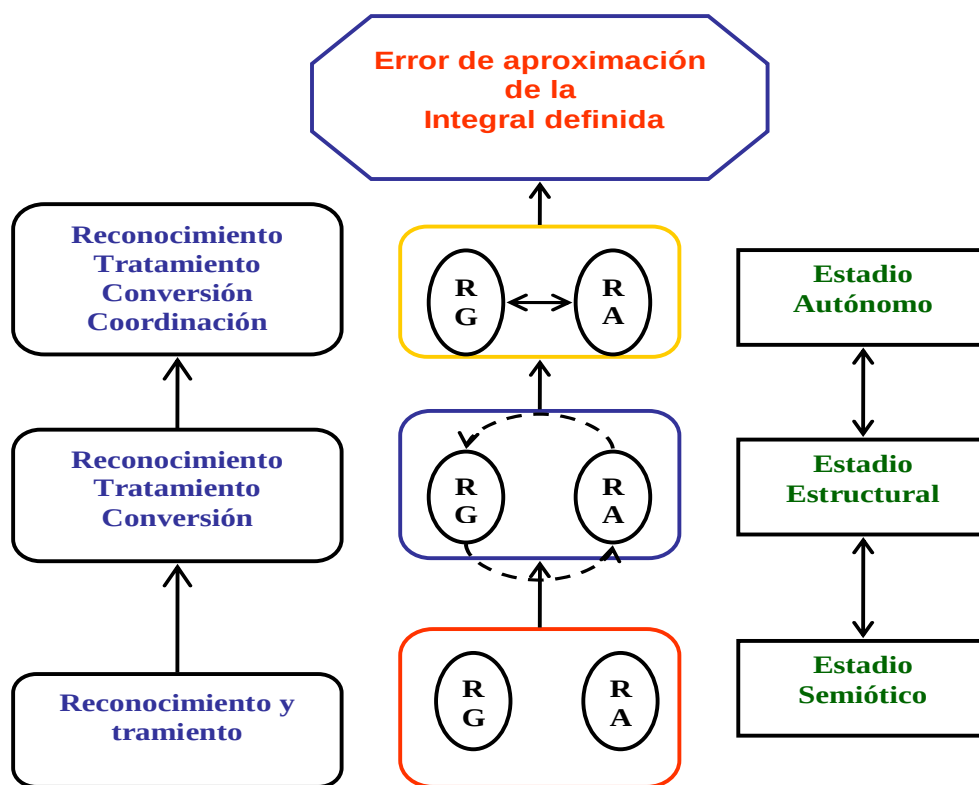
En el Cuadro 1, se presentan los diferentes estadios de desarrollo cognitivo que se consideran en el modelo de competencia, estableciéndose dos categorías diferentes para cada estadio. Para cada categoría se presentan también los descriptores que determinan la situación de un estudiante en una u otra categoría.



Cuadro 1. *Los diferentes estadios y categorías del modelo de competencia.*

En el siguiente esquema se presentan en orden creciente las diferentes acciones en el modelo de competencia cognitivo de la teoría ELOS que incorpora términos de la Teoría de Duval (Duval, 1993) sobre los Sistemas Semióticos de Representación y que ahora se desarrollan en cada uno de los estadios (reconocimiento de un registro de representación, tratamiento dentro del mismo registro, conversión entre registros de representación y coordinación de varios registros de representación).

En la columna del centro, se observa que estamos trabajando fundamentalmente con el Registro Gráfico (RG) y el Registro Algebraico (RA). Se muestran en sentido ascendente la relación de los estadios y las acciones que debe realizar el estudiante que le permiten pasar de un estadio a otro.



3. METODOLOGÍA

La investigación se realizó en la UNEXPO de Barquisimeto (Venezuela) con un grupo de estudiantes que cursaban el primer curso de la carrera de Ingeniería Industrial. La materia que cursaban durante el trabajo de investigación que desarrollamos era la asignatura Cálculo 2, en cuyo programa se incluyen los siguientes temas: Cálculo integral, Sucesiones, Series, Vectores en el espacio y Superficies. Al grupo seleccionado se le propuso una serie de actividades complementarias fuera del horario de clases en un Laboratorio de Computación y como complemento a los contenidos presentados en el aula.

Participantes:

Para la investigación se seleccionaron 7 estudiantes (Lisangel, Juan, Vesmar, Víctor, Leonardo, José y Jessica) de un grupo de 45 de un curso regular de Cálculo 2 de la Escuela de Ingeniería Industrial de la UNEXPO de Barquisimeto (Venezuela). Previo a la experiencia definitiva se hizo un estudio exploratorio que permitió la elección de los 7 estudiantes en base a la asistencia, disponibilidad, interés y desempeño (rendimiento medio). Tres estudiantes repetían la materia y los otros cuatro eran de nuevo ingreso.

Desarrollo de la investigación:

El experimento de enseñanza se realizó en quince sesiones, con dos propósitos claramente diferenciados. La primera parte se desarrolló en seis sesiones en las que se trataron los conocimientos previos necesarios para el manejo del Programa de Utilidades con el *DERIVE*. Los estudiantes, trabajando de manera individual con su ordenador y ayudado por el profesor-investigador, fueron desarrollando el Módulo Instruccional utilizado por Depool (2004) en su Tesis Doctoral (véase también Camacho, Depool y Socas, 2005 y Camacho, Depool y Santos-Trigo, 2010), en el que se presentaban algunas nociones elementales del uso de *Derive*, representaciones de funciones, Derivadas e Integrales. El profesor investigador explicó y discutió con los estudiantes el manejo del programa de utilidades (PU) en el que se aproximaba de manera gráfica y numérica el área bajo una curva mediante el uso de figuras simples (rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos).

En la segunda parte, se realizó la investigación que en este trabajo se presenta. Una vez que los estudiantes lograron, de manera general, recordar algunos de los contenidos del curso de Cálculo 1 y se aproximaron al concepto de integral mediante el PU, se procedió a plantear una tarea (cálculo de la integral) que ocupó las sesiones siguientes, pidiéndole a los estudiantes que calculasen las diferentes aproximaciones del valor de la Integral Definida en el intervalo correspondiente, utilizando rectángulos superiores e inferiores. Posteriormente la tarea solicitaba que calculasen los errores de las aproximaciones obtenidas. Conviene señalar que la función utilizada no tenía primitiva y el valor que el software devolvía era un valor aproximado. Seguidamente, se orientó durante las siguientes 7 sesiones hacia un debate y discusión dirigidos al establecimiento de cotas de los errores cometidos al calcular el valor aproximado de la integral mediante esos dos métodos, con el objetivo de tratar de precisar el significado y determinar las dificultades que encontraban en interpretar el error de aproximación. Se les instó, posteriormente, a que establecieran otras cotas de error utilizando rectángulos en el punto medio, trapecios y trapecios parabólicos (Simpson) con el uso de fórmulas de acotación que aparecen en los libros de texto, con la finalidad, en primer lugar de optimizar la aproximación del valor de la Integral Definida, y, en segundo lugar, comparar el procedimiento inicial con el procedimiento que habitualmente se utiliza en los cursos de Cálculo. Se emplearon, como hemos indicado, nueve sesiones de trabajo para esta segunda parte centradas en el estudio de los errores de aproximación y el análisis de cotas para los errores.

En resumen, la parte correspondiente al estudio del concepto de error aproximación del valor de la Integral Definida es la parte del experimento de enseñanza que analizaremos, haciendo uso de la videograbación de las sesiones.

4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

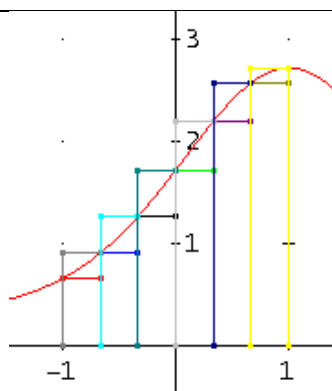
La Tarea propuesta fue:

Desde el primer momento, la mayoría de los estudiantes actúan utilizando el Programa de Utilidades (PU) para hacer las representaciones gráficas de la función y sus aproximaciones.

Calcular

$$\int_{-1}^1 e^{\cos(x-1)} dx$$

y mostrar la relación de las aproximaciones obtenidas utilizando 6 rectángulos inferiores y 6 rectángulos superiores con el valor exacto de la integral



Otras actuaciones tienen que ver con la optimización del valor de la integral se observa cuando consideran que una estimación del error (E) consiste en *restarle la aproximación con rectángulos superiores (RS) la aproximación con rectángulos inferiores (RI) y dividirlo entre dos* $E = (RS - RI)/2$, concluyendo que el valor de la integral (VI) estará acotado por

$$RI + E < VI < RS - E$$

En el caso de la estudiante Vesmar, presenta un resultado numérico calculado directamente con *Derive*, que es el valor que ella considera como el valor exacto (ya hemos indicado con anterioridad que el valor de esa integral no se puede obtener por métodos elementales, por lo que *DERIVE* presenta un valor aproximado de la integral. Esta estudiante explicita que *toda integral debe tener un valor exacto*, lo que resulta ser una dificultad importante para poder interpretar el concepto de error y cota de error.

Esta idea resultó ser interesante, pero no es correcta dado que dependerá de la concavidad de la función. Cuando se tiene una recta el valor de la integral será igual. Esta dificultad llevó a los estudiantes a considerar esta posibilidad durante varias de las sesiones.

En el caso del establecimiento de la cota del error obtenida mediante la diferencia entre RS y RI, fueron dadas por Lisangel y Juan. Por ejemplo, Lisangel, estudiando la gráfica antes presentada se da cuenta de que *las imágenes intermedias de los extremos de cada subintervalo se repiten, en tanto que la primera y la última no, dado que todos tienen la*

misma longitud de la base (Δx), llega a establecer la fórmula para una cota del error, así queda: $RS - RI = Me = \Delta x(f(b) - f(a))$

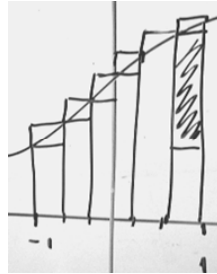


Fig. 1 Representación de Lisangel

Por su parte Juan muestra una interpretación gráfica, en la que mueve los rectángulos que se forman entre las aproximaciones y construye uno nuevo, que utiliza para justificar la fórmula que determina la cota del error.

En otras intervenciones estos dos estudiantes amplían sus resultados para incluir los errores que se generan con las aproximaciones RS y RI, y lo muestran gráficamente, por ejemplo, el caso de Juan se recoge en la Fig. 2.

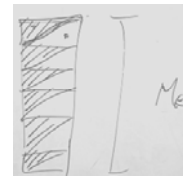


Fig. 2. Representación de Juan

Las aportaciones de Lisangel y Juan, modificaron la idea que tenían los estudiantes en relación al cálculo del error mediante la diferencia media y permitió que los estudiantes se plantearan otras formas de presentar la acotación del valor de la integral.

En la octava sesión los estudiantes calcularon las cotas para rectángulos superiores e inferiores, y con punto medio, trapecios y con la regla de Simpson, haciendo uso de las diferentes derivadas. Utilizaron *Derive* para representar la primera, segunda y cuarta derivada de la función y estimar las diferentes cotas del error para la integral en el intervalo $[-1,1]$. Las representaciones gráficas fueron esenciales para el cálculo:

En el caso de los rectángulos superiores e inferiores (k es la cota de la derivada primera) se determina

$$|E| \leq \frac{k(b-a)^2}{2n} = \frac{1,45(1-(-1))^2}{2 \cdot 6} \approx 0,4833$$

Para rectángulos en el punto medio (k es la cota de la derivada segunda) se obtiene

$$|E| \leq \frac{k(b-a)^3}{24n^2} = \frac{|-2,71828|(1-(-1))^3}{24 \cdot 6^2} \approx 0,02511$$

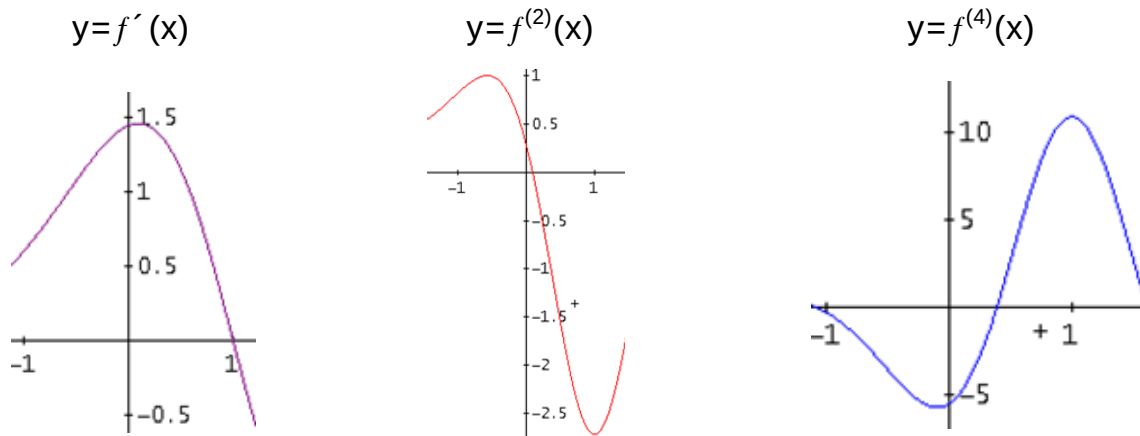
Para el método de los trapecios (k es la cota para la derivada segunda), se expresa

$$|E| \leq \frac{k(b-a)^3}{12n^2} = \frac{|-2,71828|(1-(-1))^3}{12 \cdot 6^2} \approx 0,05034$$

Y finalmente para el método de Simpson (k es la cota de la derivada cuarta) se formula

$$|E| \leq \frac{k(b-a)^5}{180n^4} = \frac{10,8731(1-(-1))^5}{180 \cdot 6^4} \approx 0,000497$$

Los estudiantes representan correctamente las gráficas correspondientes de las derivadas primera, segunda y cuarta, respectivamente.

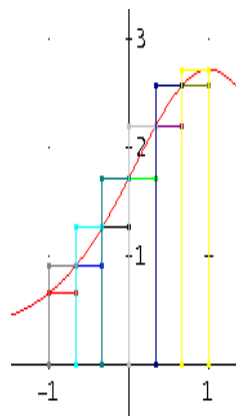


Por ejemplo Juan, utilizando rectángulos superiores e inferiores, establece la desigualdad siguiente y señala que el método resulta útil para acotar la integral, pero poco exacto por el valor grande que da la estimación con la diferencia de las de las aproximaciones en relación con los valores obtenidos sumando áreas de rectángulos.

$$R_l = R_s - \Delta x(f(b) - f(a)) \leq \int_{-1}^1 e^{\cos(x-1)} dx \leq R_l + \Delta x(f(b) - f(a))$$

esto es,

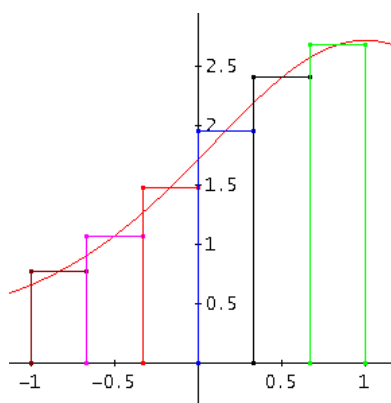
$$3,1 \leq \int_{-1}^1 e^{\cos(x-1)} dx \leq 3,79$$



En el caso de Jessica, ésta se refiere a la aproximación con rectángulos inferiores y utilizando la fórmula de acotación siguiente:

pero es incapaz de establecer relaciones entre lo que significa error, cota del error y valor exacto de la integral, lo que nos evidencia que posee dificultades para establecer relaciones entre conceptos y que su comprensión del concepto de error de aproximación es muy limitada.

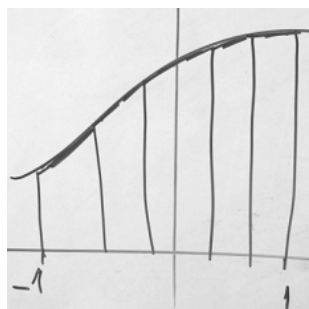
Otro estudiante, Leonardo se refiere a la aproximación con rectángulos punto en el medio. Representa con *DERIVE* una figura y plantea una desigualdad errónea. Se muestra que, por una parte posee errores en el planteamiento de la desigualdad y una escasa comprensión del concepto de error de aproximación.



$$\left(3,4571 \pm 0,02516 \leq \int_{-1}^1 e^{\cos(x-1)} dx\right)$$

El estudiante Víctor se refiere a la aproximación de la integral usando trapecios. Representa la figura obtenida y plantea una desigualdad. Señala que considerando la gráfica, *la aproximación siempre estará por debajo*. Se observa que la representación gráfica influye notablemente en su razonamiento y no se plantea la posibilidad de que el lado de los trapecios también pudiesen estar sobre la curva, dependiendo de la concavidad de la misma. Consideramos que su comprensión es muy limitada.

Vesmar plantea la aproximación utilizando la regla de Simpson. Representa una figura en la pizarra y plantea una desigualdad. Indica que la aproximación estará siempre por debajo. Al igual que Víctor se observa que el razonamiento está muy influenciado por la representación gráfica. Consideramos también, que muestra una escasa comprensión del concepto de error de aproximación.



$$S_6 + |E_S| \leq VR = \int_{-1}^1 e^{\cos(x-1)} dx$$

Fig. 3. Representación de Vesmar

En Lisangel encontramos que usa en un primer momento la cota

$$|E| \leq \Delta x(f(b) - f(a)) \approx \frac{1}{3}(2,718282 - 0,595834) \approx 0,686232, \text{ y}$$

a continuación refiere a la aproximación con trapezios. Determina haciendo uso de *DERIVE* la representación gráfica y presenta la siguiente desigualdad.

$$A_p - C \leq \int_{-1}^1 e^{\cos(x-1)} dx \leq A_p + C$$

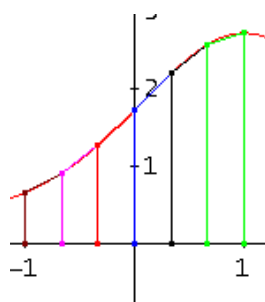


Fig. 4. Representación de Lisangel

Al preguntarle si la desigualdad se puede utilizar para cualquier tipo de aproximación señala

“sí, porque tenemos una aproximación y la cota, sabemos que si a la aproximación le restamos la cota nos da un número menor que la aproximación, y, si a la aproximación le sumamos la cota nos da un número mayor que la aproximación. Entonces en valor de la integral se va a mover entre este valor menor y este mayor”.

Se observa que tiene una buena comprensión del concepto y es capaz de extrapolar resultados que deduce de otras situaciones, creando nuevos conocimientos.

Para el análisis de la información, se utilizaron unas tablas, donde se registraron sesión a sesión los elementos característicos que pudieron ser observados durante las diferentes actuaciones de los estudiantes (véase Anexo).

La Tabla 1 muestra en síntesis de las características de los estudiantes que nos han permitida clasificar a dos estudiantes (Lisangel y Juan) en el estadio autónomo, otros dos en el estadio semiótico (José y Jessica) y los otros tres en el estadio estructural (Vesmar, Víctor y Leonardo).

Estudiantes	Estadio	Características
Lisangel y Juan	Autónomo	Utilizan varios registros de representación, logrando conversiones entre ellos y son capaces de producir nuevos conocimientos a partir de manejo de los registros, que utilizan posteriormente para explicar sus nuevas situaciones.
Vesmar, Victor y Leonardo	Estructural	Utilizan varios registros de representación, teniendo dificultades para realizar conversiones entre ellos, basan sus razonamientos en lo conocimientos establecidos por los estudiantes que se encuentran en el estadio autónomo.
José y Jessica	Semiótico	Tienden a utilizar un registro de representación, tiene problemas para exponer sus ideas y se sienten confundidos ante nuevas situaciones.

Tabla 1. Caracterización de los estudiantes según su actuación

72

5. CONCLUSIONES

Del análisis realizado, podemos concluir que algunos estudiantes tienden a realizar tratamientos en un solo registro y muestran dificultades para construir otro a partir del que tienen, así como también a realizar conversiones entre ellos, presentan dificultades para exponer sus razonamientos basados en el tratamiento del registro que manejan. Los estudiantes que alcanzan mayor éxito en la resolución de la tarea son los que logran superar esta dificultad y en su razonamiento muestran indicios del uso de varios registros y logran realizar conversiones coordinadas entre ellos.

Hemos observado otro tipo de dificultades radica en el hecho de algunos estudiantes no son capaces de diferenciar el error de aproximación y la cota de error, tendiendo en algunos momentos considerarlos con el mismo significado. Se observó además, que desde el momento en que logran superar esa dificultad, son capaces no sólo de diferenciar los términos sino a utilizarlos para establecer expresiones numéricas-algebraicas y representaciones gráficas que les permiten acotar el valor de la integral, utilizando diversos tipos de aproximación; incluso mediante el estudio de las diferentes cotas del error, cuál de las aproximaciones pudiese dar un valor más aproximado.

En cuanto a los errores que cometen los estudiantes, hemos observado que muchos de ellos provienen de cálculos operativos pero las dificultades que hemos observado promovieron, de manera general una cantidad importante de estos errores.

Del análisis del mapa de actuaciones (Diagrama 2) se puede observar, de una parte, que la trayectoria no es ascendente en cuanto a los estadios y categorías, un estudiante puede subir y bajar de estadio, debido a las dificultades y errores cometidos. En el momento que el estudiante logra superar la deficiencia tiende a cambiar de estadio. Los estudiantes que hemos considerado que poseen un mayor grado de comprensión del concepto, logran permanecer en la mayoría de sus intervenciones en los estadios estructural y autónomo, en cambio los menos exitosos se encuentran por general en el estadio semiótico.

En cuanto al uso de software *Derive*, hemos podido observar que ha contribuido a la construcción del concepto de error de aproximación del valor de la Integral Definida, puesto que disponer de dicho software ha facilitado la elaboración de diversos registros, tanto gráficos como numéricos, que les han facilitado el planteamiento, por parte de los estudiantes, alternativas diversas que los han conducido, en líneas generales a generar respuestas a situaciones planteadas.

Nota: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación EDU 2008-05254 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Plan Nacional I+D+i del Gobierno de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARTIGUE, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and of dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- BLUME, G.; HEID, K. (2008). *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics Vol. 2*. IAP-NCTM. USA.
- CAMACHO, M., DEPOOL, R. y Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of DERIVE software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 35-67.
- CAMACHO, M.; DEPOOL, R.; Santos-Trigo, M. (2005). La comprensión del concepto de área e integral definida en un entorno computacional. Perfiles de actuación. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, VI. 21-46.

- DEPOOL, R. (2004) *La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS)*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna. ISBN 84-7756-594-5
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- RUTHVEN, K. (2002). Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3). 275-291.
- SOCAS, M. (2007). Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores (Eds). *Investigación en Educación Matemática, XI. Tenerife*, 19-52.
- TROUCHE, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environment. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument*, 137-162. New York, NY: Springer.

ANEXO

<i>Lisangel</i>				
<i>Ses.</i>	<i>Dificultades</i>	<i>Errores</i>	<i>Registros</i>	<i>Estadio</i>
1	Da una interpretación de la Integral con solo el registro gráfico muestra que tienen una idea parcial del concepto	Ninguno	RG	ES1B
2	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
3	Plantea que el valor de la integral se puede optimizar aplicado la fórmula. $\frac{\text{RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X}(-1, 1, 6) - \text{RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X}(-1, 1, 6)}{2} + \text{RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X}(-1, 1, 6)$ Conveniente para optimizar, pero inconveniente para acotar la integral.	Ninguno	RG-RAN	EE2B
4	No se percató que el valor RS-RI es una cota de error. Dificultades para definir la cota	Ninguno	RAN	EE2A
	No logra ubicar correctamente el error en relación a la cota.	Considera que el error es mayor a la cota y expresa Margen mayor $\geq \text{error} \geq \text{cota}$	RAN	ES1A
5	Interpreta equivocadamente el significado del error de aproximación	Cree que el error de aproximación está entre la cota de error y el valor de RS-RI	RAN	EE2A
6	La idea que tiene del error se limita al siempre hecho de que es la diferencia entre el valor de la integral y su aproximación	Ninguno	RAN	ES1B
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2A
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EA3B
7	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EA3A
8	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Considera que cota de error de aproximación no pueden ser iguales	Ninguno	RAN	EE2A
9	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EA3B

<i>Juan</i>				
<i>Ses.</i>	<i>Dificultades</i>	<i>Errores</i>	<i>Registros</i>	<i>Estadio</i>
1	Da una interpretación de la Integral con solo el registro gráfico muestra que tienen una idea parcial del concepto	Ninguno	RG	ES1B
2	Participación no relevante			
3	Plantea optimizar el valor de la integral utilizando la fórmula $\frac{RS - RI}{2} + RI$, buena idea para optimizar el valor, pero inconveniente para acotar el valor de la integral	Ninguno	RG-RAN	EE2B
4	Ninguna	Ninguno	RAN	EE2A
5	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2A
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
6	La idea que tiene del error se limita al siempre hecho de que es la diferencia entre el valor de la integral y su aproximación	Ninguno	RAN	ES1B
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2A
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EA3B
7	Interpreta equivocadamente el RG	Considera equivocadamente que una porción del rectángulo que se utiliza para establecer que el valor RS-RI es el error de aproximación	RG	ES1B
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2A
8	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
9	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EA3B

<i>Vesmar</i>				
<i>Ses.</i>	<i>Dificultades</i>	<i>Errores</i>	<i>Registros</i>	<i>Estadio</i>
1	La idea que tiene de la Integral es que tiene un valor exacto	Considera la aproximación de la Integral dada por Derive como el valor exacto	RG-RAN	EE2A
2	Participación no relevante			
3	Plantea que se puede aproximar el valor de la integral con $\frac{MRI - MRS}{2} + MRI$, buena idea para optimizar el valor, pero no muy adecuada para acotar el valor de la integral	Razonamiento similar al anterior	RG-RAN	EE2A
4	Considera que error de aproximación solo es la diferencia media entre las imágenes de la función	Considera el error de aproximación como una aproximación del valor de la Integral	RAN	ES1B
	No diferencia entre cota de error y el valor RS-RI	Cree que el valor RS-RI acota la cota del error de aproximación de la Integral	RG-RAN	EE2A
5	Ninguna	Ninguno	RG	EE2A
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2A
	Confunde aproximación con el valor RS-RI	Considera que el valor RS-RI y aproximación son iguales	RG-RAN	ES1B
6	La idea que tiene del error se limita al siempre hecho de que es la diferencia entre el valor de la integral y su aproximación	Ninguno	RAN	ES1B
	Considera la cota de error como un valor que delimita el error de aproximación	Ninguno	RAN	EE2A
	No se percata que para calcular el valor del margen de error debe multiplicar la diferencia de las imágenes por la longitud de la base de los rectángulos	Ninguno	RG-RAN	EE2A
7	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2A
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EA3A
8	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Ninguna	Ninguno	RAN	EE2B
9	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2A

<i>Víctor</i>				
<i>Ses.</i>	<i>Dificultades</i>	<i>Errores</i>	<i>Registros</i>	<i>Estadio</i>
1	Da una interpretación de la Integral con solo el registro gráfico muestra que tienen una idea parcial del concepto	Ninguno	RG	ES1B
2	Es el mismo comportamiento anterior	Ninguno	RG-RAN	EE2B
3	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
4	Ninguna	Ninguno	RG	EE2A
5	Participación no relevante			
6	La idea que tiene del error se limita al siempre hecho de que es la diferencia entre el valor de la integral y su aproximación	Ninguno	RAN	ES1B
7	Participación no relevante			
8	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Se limita a explicar el significado del error utilizando la desigualdad cota-error	Ninguno	RAN	ES1B
9	El RG influye notablemente en su razonamiento a tal punto que se plantea otras acotaciones diferentes a las que observa en la gráfica	Ninguno	RG-RAN	EE2A

Leonardo				
Ses.	Dificultades	Errores	Registros	Estadio
1	Da una interpretación de la Integral con solo el registro gráfico muestra que tienen una idea parcial del concepto	Ninguno	RG	ES1B
2	Es el mismo comportamiento anterior	Ninguno	RG	EE2B
3	Participación no relevante			
4	Poca claridad en el razonamiento	Ninguno	RG-RAN	EE2A
	Considera que existen varios márgenes de error entre dos aproximaciones. Aunque establece que el error es menor o igual a la cota	Cree que hay dos cotas para el error. Expresa $Co.m.m \leq E \leq Co.M.m$	RAN	EE2A
5	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2A
6	Imprecisión en el razonamiento	Confunde error con aproximación	RAN	ES1A
	El cometer errores operativos en los cálculos le confunde	Comete errores operativos en el establecimiento de la fórmula por la diferencia RS-RI	RG-RAN	EE2A
7	Participación no relevante			
8	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Se limita a explicar el significado del error con la desigualdad cota-error	Ninguno	RAN	ES1B
9	No tiene claro el significado de cota y error respecto al valor de la Integral	Plantea una desigualdad errada que no le permite interpretar el significado de aproximación, cota y error	RG-RAN	ES1B

José				
Ses.	Dificultades	Errores	Registros	Estadio
1	Da una interpretación de la Integral con solo el registro gráfico muestra que tienen una idea parcial del concepto	Ninguno	RG	ES1B
2	Tratamiento inadecuado de RG y RAN	Considera que el valor de la integral es la suma de las áreas de los rectángulos entre las aproximaciones con rectángulos inferiores y superiores	RG-RAN	E1SA
3	Aunque plantea una acotación de la integral con $RI + E < A < RS - E$, no está claro si diferencia cota de error y error de aproximación	Ninguno	RG-RAN	EE2A
4	No diferencia entre cota de error y aproximación	Confunde cota de error con aproximación	RAN	ES1A
5	Expresa que requiere el valor de la Integral para calcular el error	Considera que la forma de calcular el error es teniendo el valor de la Integral	RAN	ES1A
6	No entiende el significado del error	Ninguno	RAN	ES1A
	Imprecisión en el razonamiento	Ninguno	RAN	ES1B
7	Participación no relevante			
8	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Manifiesta imposibilidad de considerar que el error y la cota puedan ser iguales	Considera que el error y la cota no pueden ser iguales	RAN	ES1B
9	Inasistente			

<i>Jessica</i>				
<i>Ses.</i>	<i>Dificultades</i>	<i>Errores</i>	<i>Registros</i>	<i>Estadio</i>
1	Da una interpretación de la Integral con solo el registro gráfico muestra que tienen una idea parcial del concepto	Ninguno	RG	ES1B
2	Participación no relevante			
3	Razonamiento similar al anterior	Ninguno	RG	ES1B
4	No diferencia entre cota y error e imprecisión en su razonamiento	Considera que cota y error son iguales	RG	ES1A
	Considera que margen y cota son diferentes	Considera que margen y cota son diferentes	RAN	ES1B
5	Participación no relevante			
6	La idea que tiene del error se limita al siempre hecho de que es la diferencia entre el valor de la integral y su aproximación	Ninguno	RAN	ES1B
7	Participación no relevante			
8	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Ninguna	Ninguno	RG-RAN	EE2B
	Se limita a explicar el significado del error utilizando la desigualdad error- cota	Ninguno	RAN	ES1B
9	No logra relacionar error, cota y aproximación con el valor de la Integral	Ninguno	RAN	ES1B

COMUNICACIONES

COMPRENSIÓN VISUAL Y CONCEPTO DE INTEGRAL EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA.

Blanca Souto Rubio*
Inés M^a Gómez- Chacón*

Resumen

En estos últimos años distintas investigaciones han puesto de manifiesto la importancia de abordar las dificultades de los estudiantes en la comprensión del concepto de integral. Algunas de estas dificultades tienen un claro origen en la coordinación entre el registro visual y el analítico. En esta comunicación se presenta un estudio con estudiantes de primero de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, evaluando la influencia del método visual para la comprensión del concepto de integral. Se describen los resultados de un cuestionario de problemas no rutinarios, tratando de identificar errores y dificultades relacionados con la comprensión visual de la integral. Por último, se sugieren aspectos clave para ser incorporados en la enseñanza explícita de la visualización en la disciplina de Análisis.

Palabras clave: Integral, Didáctica del Análisis, Representaciones, Visualización, Pensamiento Matemático Avanzado.

Abstract

In the last years, several researchers highlight the importance of tackling the students' difficulties in the concept of the understanding of the integral. Some of these difficulties have their origin in the coordination between the analytical and visual registers. In this communication we present a study carried out with first-year-students of the Mathematics Degree at the Universidad Complutense de Madrid (UCM) evaluating the influence of the visual method in the understanding of the concept of integral. The results of a non-routine questionnaire are described, in order to identify mistakes and difficulties related with the visual understanding of the integral. Finally, some key issues are suggested to be incorporated into a didactical action for the concept of integral with explicit attention to visualization.

Key words: Integral, Calculus Didactic, Representations, Visualization, Advanced Mathematical Thinking.

* Universidad Complutense de Madrid

1. INTRODUCCIÓN

Los resultados expuestos en esta comunicación forman parte de un estudio más amplio que tenía como objeto último mejorar la enseñanza del Análisis Matemático a Nivel Universitario a través de la exploración de los procesos de visualización empleados por los estudiantes. Por tanto, podemos considerar que esta investigación se engloba en el campo de la Didáctica del Análisis. Según Azcárate y Camacho (2003), hablar de la situación actual de la Didáctica del Análisis Matemático implica hacer un poco de historia y explicar el marco general en el que se inserta, esto es el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Coincidimos con estos autores cuando afirman que en la década de los 90, puede apreciarse una clara evolución desde el estudio de los errores y dificultades del alumnado hacia las investigaciones más recientes acerca del conocimiento de los estudiantes que subyace a dichas dificultades.

Nuestro estudio se centra en el concepto de integral por ser uno de los más destacados en las investigaciones (Mundy, 1987; Llorens y Santoja, 1997; González- Martín y Camacho, 2005). Estos estudios ponen de manifiesto que los estudiantes, en los primeros años de Universidad, poseen un manejo mecánico y operativo del concepto. Entre las posibles causas se señalan las grandes diferencias que existen entre la forma en que se aborda la enseñanza de la integral en Bachillerato y en la Universidad. También se destaca la falta de integración entre el concepto de área y el de integral por parte de los estudiantes, lo que conlleva a algunos de los autores reseñados a prestar especial atención a la coordinación entre el registro visual y analítico de cara a mejorar la comprensión del concepto. Estos resultados han hecho que consideremos las teorías cognitivas de registros de representación y las de visualización para analizar las dificultades de los estudiantes con el concepto de integral.

En este contexto, la pregunta de investigación que nos hemos planteado ha sido la siguiente: ¿cómo puede mejorarse la comprensión de la integral (y por tanto disminuir las dificultades y errores de este concepto) desde el punto de vista de los estudios sobre visualización? Esta cuestión se sitúa dentro de dos líneas de investigaciones emergentes apuntadas por Presmeg (2006) en su trabajo sobre investigaciones sobre visualización en educación matemática:

- Factores que hacen efectiva la visualización en matemáticas, junto con la necesidad de la visualización para los procesos de abstracción y generalización;
- Papel de las imágenes en los procesos de *encapsulación* de los objetos matemáticos.

En esta comunicación no pretendemos responder exhaustivamente a la pregunta planteada, sino que lo que nos interesa es proporcionar algunos puntos clave de reflexión de cara a elaborar una propuesta didáctica de la integral que tenga en cuenta los procesos de visualización. Para ello, trataremos de profundizar en la naturaleza del problema planteado identificando errores y dificultades relacionadas con la comprensión visual de la integral, poniendo la atención especialmente en los siguientes aspectos:

- Errores y dificultades cometidas en el registro analítico que podrían evitarse con la coordinación del registro visual.
- Errores y dificultades con el manejo del registro visual que han impedido o dificultado la resolución con éxito del problema.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Como acabamos de señalar, el propio planteamiento del problema, nos lleva a considerar el marco teórico definido por las teorías cognitivas sobre registros de representación semiótica (Duval, 1995, 1999, 2006; Hitt, 2003, 2006) que contemplan

de forma explícita el diálogo entre registros y, en particular, hablan del manejo del registro visual. Esta aproximación teórica se utiliza para explicar qué entendemos por comprensión y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Coincidimos con Duval (1995, 1999) en que no es posible acceder directamente a los objetos matemáticos a no ser a través de sus representaciones en los distintos registros de representación. De ahí que resulte tan importante el estudio de las representaciones para explicar la comprensión de los conceptos y el aprendizaje de las matemáticas. Para Duval (1999) el aprendizaje de las matemáticas consiste en construir una arquitectura cognitiva en la que debe existir una coordinación entre registros.

Basándonos en esta idea de comprensión de los conceptos y en nuestra hipótesis de la preponderancia del registro analítico en las repuestas de los estudiantes, definimos la noción de *Comprensión Visual (CV)* como aquella que se da cuando un sujeto adquiere representaciones de ese concepto en el registro visual y además, es capaz de transformarlas y convertirlas a otros registros a la hora de realizar razonamientos matemáticos. Este concepto de *Comprensión Visual* será clave para analizar las respuestas de los estudiantes desde el punto de vista de la visualización.

Por otro lado, los estudios en Educación Matemática realizadas en el campo de la visualización incorporan otras perspectivas de análisis que van más allá de la aproximación semiótica y que resultan relevantes para nuestra investigación. Entre ellos destacamos el papel de la intuición en el razonamiento matemático (De Guzmán, 1996; Arcavi, 2003; Fischbein, 2005), las diferencias individuales en la preferencia por lo visual (Presmeg, 1985, 1986, 1991, 1994, 1995, 2006); causas del rechazo y status de la visualización (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Dreyfus, 1991) que incluyen aspectos más socioculturales del uso de la visualización.

A continuación precisaremos algunos conceptos basados en estas perspectivas y que forman parte del marco teórico e interpretativo de nuestro estudio. En primer lugar, tomamos la noción de visualización definida por Arcavi (2003) en la que subrayamos la conceptualización de la misma como proceso y como producto:

“Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión” (Arcavi, 2003:217)

Otros conceptos han estado inspirados en las investigaciones sobre preferencia por lo visual y las distinciones sobre el argumento visual y no visual en matemáticas de Presmeg (ver Presmeg 1985, 1986, 1991, 1995, 2006). Siguiendo a Presmeg (2006) definimos *imagen visual* como “constructo mental empleado para representar gráficamente información visual o espacial” (Presmeg, 2006:207; traducción libre). Así mismo, un *método visual* de solución es aquel que involucra imágenes visuales, con o sin un diagrama, como una parte esencial del método de resolución, incluso en caso de que también se empleen razonamientos o métodos algebraicos. Un *método no visual* de resolución es aquel que no involucra imágenes visuales como parte esencial del método de solución. Además, inspirados por la noción de *Mathematical Visuality* (MV) de esta autora definimos *Preferencia por lo visual (PV)* como la tendencia que tiene una persona a elegir métodos visuales de resolución cuando se enfrenta a problemas que podrían ser resueltos tanto por un método visual como no visual.

Finalmente, definimos *Habilidad Visual (HV)* como la capacidad de crear, interpretar y manejar con corrección las imágenes gráficas tanto a la hora de representar y comunicar información, como en el momento de pensar y desarrollar ideas. Estas tres nociones, *Comprensión Visual*, *Preferencia por lo visual* y *Habilidad Visual*, van a desempeñar un papel fundamental a la hora de describir los procesos de visualización de los

estudiantes de primero en la resolución de problemas no rutinarios de Análisis, por lo que se tendrán en cuenta en el diseño metodológico de la investigación.

3. METODOLOGÍA

Metodología y población

El grupo de estudio está compuesto por un total de 29 estudiantes (15 mujeres y 14 hombres) de primero de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Todos los estudiantes, puesto que este es su primer año de universidad, están matriculados de la asignatura Análisis de Variable Real, asignatura en la que se imparten los conocimientos relativos a la integral.

La investigación se enmarca en un estudio de tipo cualitativo. El análisis de los datos es principalmente inductivo, ya que las categorías e interpretación se construyen a partir de la información obtenida. De acuerdo con el objetivo general del estudio el foco de investigación tiene un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Estas características forman parte –y son específicas- de la investigación cualitativa (Glaser y Strauss 1967; Latorre y otros, 1996). Para la recogida de datos se ha utilizado un cuestionario y entrevistas semiestructuradas individuales. El análisis de los datos recogidos se ha llevado a cabo a través de redes sistémicas para el cuestionario y transcripciones para las entrevistas.

Instrumentos de investigación

El cuestionario constaba de 10 problemas de Análisis Matemático no rutinarios, algunos de ellos utilizados en otras investigaciones (Mundy, 1987; Selden, Mason y Selden, 1989 y Tufte, F.W., 1988 (ambos citados en Eisenberg y Dreyfus (1991)); Llorens y Santoja, 1997). Estos problemas resultan idóneos para evaluar la *Comprensión Visual* de los conceptos ya que se caracterizan por evidenciar la actuación del estudiante en la combinación de registros. Coincidimos con Eisenberg y Dreyfus (1991) cuando afirman que:

“Cada uno de los problemas está basado en un concepto que tiene una interpretación visual, y es esto lo que hace que las/os estudiantes (y a menudo sus profesores) no puedan hacer muchos de los problemas de esta lista, ya que no han aprendido a explotar las representaciones visuales asociadas con los conceptos” (Eisenberg y Dreyfus, 1991: 26; traducción libre).

Otras características de los problemas interesantes para la investigación son que están planteados en un registro analítico, pero que admiten varios tipos de resoluciones (entre ellas una visual) o bien que fuerzan de forma explícita a utilizar el registro visual, lo que permite evaluar la *Preferencia por lo visual* y la *Habilidad Visual* así como identificar tipologías de usos y errores asociados a las imágenes.

Para el análisis del cuestionario se hizo un primer recuento atendiendo a cuatro indicadores y cuyos resultados mostraremos en la siguiente sección (ver Análisis global de resultados) y posteriormente un estudio más cualitativo a través de *redes sistémicas* (ver Respuestas de los problemas).

Las *redes sistémicas* (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) posibilitan una configuración de los datos que permite mirar todas las respuestas efectivas de los alumnos encuestados. De este modo se logra una visión de conjunto que resulta muy interesante para nuestros objetivos, poniéndose de manifiesto complejas relaciones entre los distintos elementos representados:

- Estrategias elegidas por los estudiantes y frecuencia con que aparecen:
 - o Exitosas o no
 - o Visuales o analíticas
- Tipos de representaciones que aparecen asociadas a los conceptos fundamentales

– Imágenes empleadas por los estudiantes

Los resultados obtenidos del cuestionario exigían un nivel de profundización mayor por individuo en aspectos afectivos, cognitivos y socioculturales relativos a la visualización. Para ello se realizaron entrevistas a 6 individuos representativos según la preferencia por lo visual y nivel de pensamiento avanzado.

Nº	ENUNCIADO	DESCRIPCIÓN	VISUAL
1	¿Qué está mal en el siguiente cálculo de la integral? $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big _{-1}^1 = \frac{-1}{x} \Big _{-1}^1 = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$	Dominio del concepto de integral y sus propiedades. Es no rutinario por la formulación (buscar un error y no resolver)	CV, PV
2	Calcula $\int_{-3}^3 x + 2 dx$.	Dominio en el cálculo de integrales, con la dificultad de involucrar un valor absoluto.	CV, PV, HV
3	Si f es una función impar en $[-a, a]$ calcula $\int_{-a}^a (b + (f(x))) dx$	Dominio en el cálculo de integrales, mayor grado de abstracción (función desconocida y uso de parámetros) lo que obliga a emplear razonamientos y propiedades con más generalidad que el anterior.	CV, PV, HV

Tabla : Enunciados de los problemas analizados, breve descripción y aspectos visuales que permiten evaluar.

En esta comunicación se describen los resultados de tres problemas del cuestionario que involucran el concepto de integral, completando con datos procedentes de las entrevistas. Estos problemas resultan relevantes porque obtuvieron un índice alto de respuestas y explicitan distintos aspectos del concepto. En la tabla (Tabla) el enunciado de cada problema, una breve descripción sobre la forma en que aparece el concepto de integral y algunas dificultades a priori que puede presentar para los estudiantes, y por último los aspectos de la visualización que permite evaluar.

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Análisis global de resultados

En primer lugar, para tener una visión global del conocimiento y dominio de los estudiantes del concepto de integral, realizamos un recuento de las respuestas dadas por los estudiantes atendiendo a los cuatro indicadores que especificamos a continuación. Los resultados de dicho recuento se recogen en el gráfico de la Figura .

- 1ª columna: Porcentaje de alumnos que no dejan la respuesta en blanco (Resp.)
- 2ª columna: Porcentaje de alumnos que responden de forma correcta² (Corr.)
- 3ª columna: Porcentaje alumnos que emplean un argumento visual. (AV)
- 4ª columna: Porcentaje de alumnos que realizan algún dibujo. (Dib)

² Entendiendo como respuesta correcta, aquella que obtendría la puntuación máxima desde un punto de vista institucional.

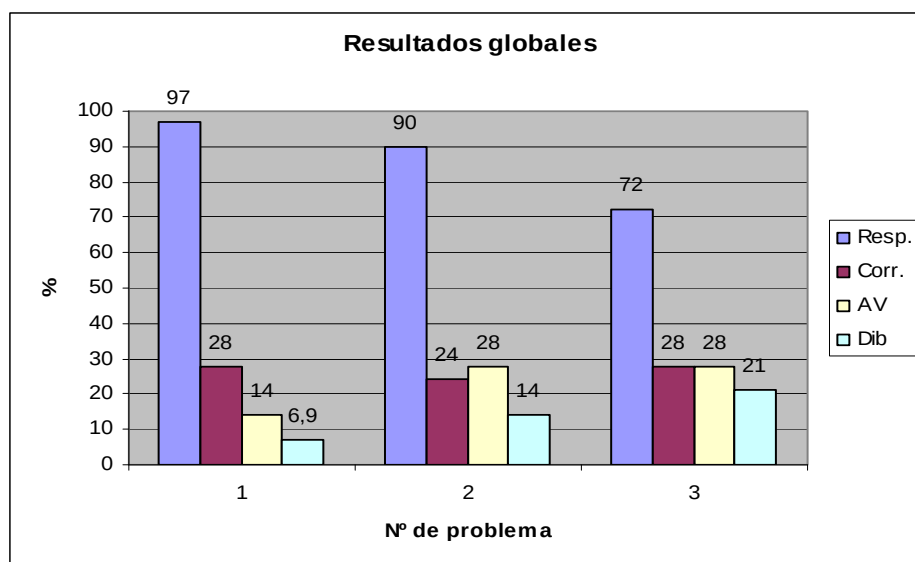


Figura : Gráfico de los resultados globales de las respuestas a los tres problemas.

Como puede observarse, para estos tres problemas, el porcentaje de intentos de respuesta es bastante elevado, no habiendo demasiadas respuestas en blanco (1ª columna). Sin embargo, este porcentaje desciende cuando sólo contamos las respuestas correctas (2ª columna), no siendo superior al 30% en el mejor de los casos. Finalmente, las dos últimas columnas se refieren al uso del registro visual, y como puede observarse es bastante limitado. En particular, la última columna mide el uso explícito de representaciones visuales, mientras que la tercera, hace referencia al uso de argumento visual, que no tiene por qué venir acompañado necesariamente de una imagen visual externa. Por tanto, la diferencia de alturas entre ambas columnas representa la existencia de un mayor uso implícito que explícito del registro visual.

Respuestas a los problemas

A continuación mostramos con más detalle las respuestas a los problemas y comentaremos aspectos relevantes en relación con los objetivos planteados.

Problema 1

Las respuestas de los estudiantes a este problema están recogidas en la red sistémica asociada (ver Figura). Como puede observarse (ver Figura), del total de 97% de los estudiantes que responden al problema, sólo un 28 % lo hace de forma correcta. Entre las respuestas incorrectas, encontramos que 7 de los 29 estudiantes responden que está bien. Tres de ellos incluso repite el mismo cálculo. El resto, también trata de realizar de nuevo el cálculo o indican cómo debería hacerse correctamente cometiendo alguno o varios de los siguientes bloqueos y errores:

- Emplear otra primitiva distinta.
- Intercambiar los signos al aplicar la regla de Barrow (en ese caso se obtiene 2, que es coherente con las propiedades de la integral).
- Tener en cuenta la constante de integración.
- Errores de cálculo.

Llamamos la atención sobre el hecho de que sólo 2 alumnos de los 29 emplea el registro gráfico de forma explícita, realizando dibujos y respondiendo correctamente. Este hecho nos indica que emplear el registro gráfico o al menos tener una idea visual de lo que está ocurriendo, resulta de gran ayuda. Sin embargo, esta interpretación visual de la integral, también da pie a algunos problemas que podrían deberse al hecho de haber aprendido esta conexión mecánicamente y no a través de la visualización de una imagen (ninguno de los dos dibuja):

- Las integrales dan áreas bajo curvas, que son siempre positivas (alumno 27³).
- Como $-1/x$ es negativo, al hacer Barrow se debe cambiar los signos (alumno 19).

De hecho el análisis detallado de la red sistémica asociada a este problema, permite observar cómo la apropiación de diversidad de representaciones de los conceptos involucrados en un problema junto con un adecuado manejo de las mismas, proporciona una buena comprensión de los conceptos así como del problema. De modo que existe mayor posibilidad de éxito en su resolución.

Este problema tiene dos conceptos en juego, por un lado el de integral definida y por otro el de función. Como hemos podido observar, la integral la identifican principalmente con procesos de cálculo de primitivas, y como es definida, con aplicar la regla de Barrow, pero sin tener en cuenta las hipótesis necesarias para ello (salvo el alumno 4). Algunos incluso recurren a la noción de integral como proceso inverso de la derivación y tratan de utilizar esta idea para calcular la primitiva (ver 10). Tan sólo los alumnos 22, 27, 28 la relacionan, a través del uso del registro visual, con el producto: área bajo una curva. Este resultado podría estar provocado por el propio enunciado, que alude directamente al “cálculo de la integral”, pero también, a una causa institucional, y es que es desde este enfoque como se introduce este concepto en el Bachillerato.

Por otro lado, el concepto de función aparece contemplado como algo global, ya sea porque forma parte de las hipótesis de algún teorema o porque consideran alguna propiedad de la función, deducida o no de imaginar su gráfica: continuidad, dominio de definición, si está acotada, etc. Aunque también hay algunos alumnos a los cuales les basta con poner la atención en el punto $x=0$, que identifican como problemático (ver 7, 17).

Esta elección del tipo de representaciones escogidas para los conceptos involucrados, determina prácticamente el éxito que se tendrá en la resolución del problema. Así puede verse cómo todos los alumnos que dan respuestas correctas o válidas, o bien se centran en la función, o bien contemplan a la integral como producto (área bajo una curva). Sin embargo, la mayoría, como hemos visto, interpreta la integral como un proceso, lo que les impide comprender qué está ocurriendo. Si a esto le añadimos los errores de cálculo que pueden cometerse en cualquier momento de dicho proceso (tanto a la hora de calcular la primitiva, como en el orden de aplicación de la regla de Barrow o en las operaciones), obtenemos la gran variedad de respuestas incorrectas que aparecen reflejadas en la red.

³ Se adjudicó un número del 1 al 29 a cada alumno que respondió al cuestionario. En la red sistémica, este número aparece en entre paréntesis junto a la respuesta dada por ese individuo. Por eso, de ahora en adelante, utilizaremos esta numeración para hacer referencia tanto a las respuestas como a los alumnos.

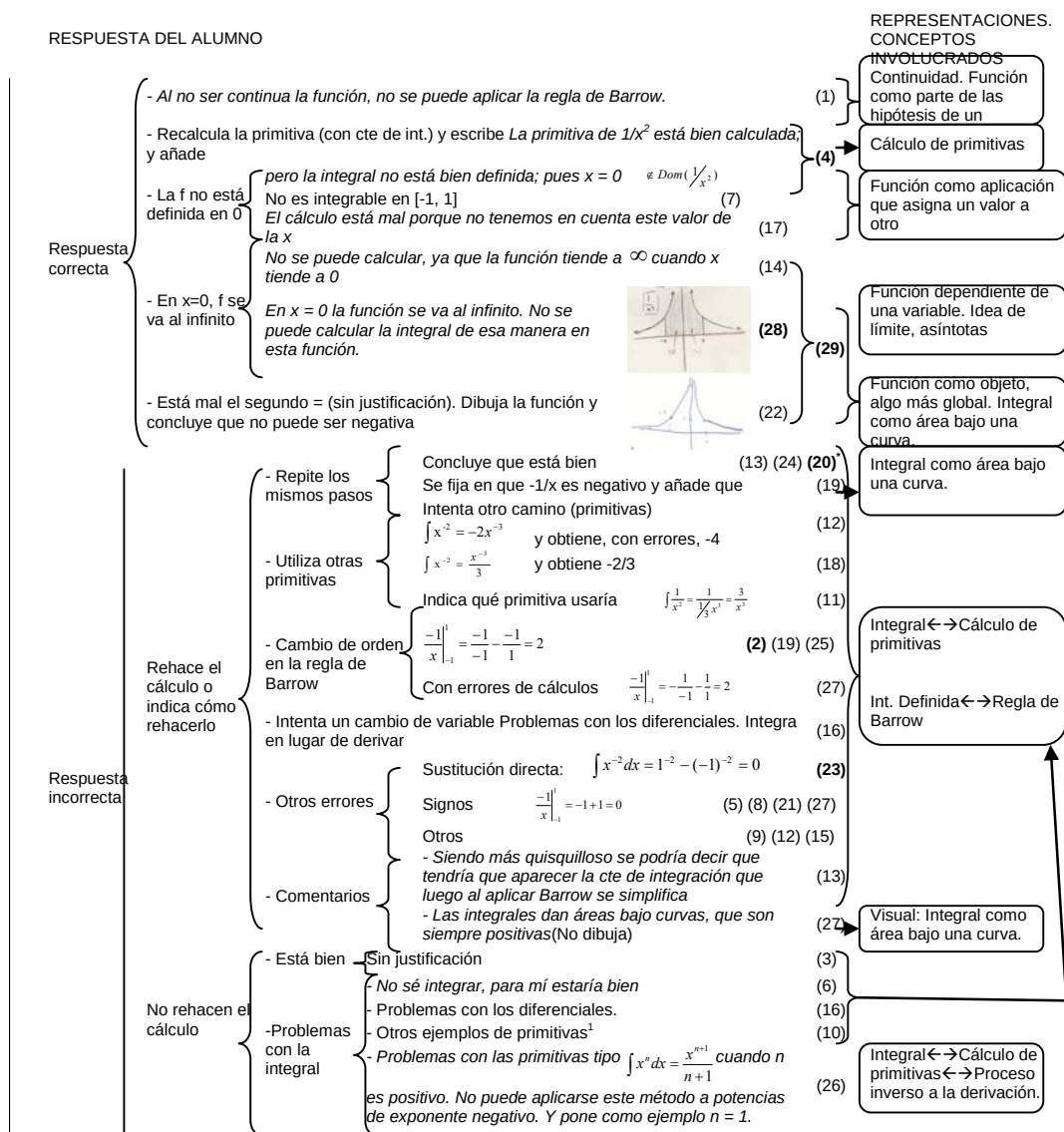


Figura : Red sistémica asociada al Problema 1

Pero además del tipo de representaciones escogidas, también es muy importante el uso que se hace de ellas. Por ejemplo, el alumno 4, es el único que pone la atención en un inicio en la integral como cálculo de primitivas y tiene éxito con la respuesta. Esto lo logra gracias a que complementa de forma flexible el cálculo de la primitiva con otro argumento sobre el dominio de definición de la función. Por otro lado, se pone de manifiesto cómo la combinación adecuada de registros lleva a una mejor comprensión de la situación del problema (ver alumnos 28, 22). Pero como señalábamos, es importante que esta coordinación entre registros no se haga de forma automática pues puede dar lugar a errores (alumnos 19 y 27). Debe acompañarse de reflexión.

Problema 2

Este problema es respondido por el 90% de los estudiantes, aunque sólo el 24% tiene éxito en su resolución. En este caso, y como previmos en el análisis a priori del problema, se observa cómo el hecho de tener que separar la integral en trozos ha dado lugar a diversas dificultades (ver Anexo: Red sistémica asociada al Problema 2):

- Problemas con la propiedad $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

- o No se separa en trozos
- o Se calcula un solo trozo
- o Se consideran dos trozos

integración

- en los que varía la función que se integra, pero no el intervalo de integración
 - se separa en $x=0$
 - se calculan bien por separado, pero no se suman al final.
- Errores de cálculo:
- o Primitivas
 - o Regla de Barrow
 - o Al operar.

Respecto al registro visual, a pesar de no estar presente en el enunciado, se hace notar una mayor presencia que en el anterior en las resoluciones de los estudiantes, principalmente en aquellos que responden con éxito al problema: de 7 alumnos que lo usan, 5 resuelven bien el problema (a pesar de que uno de ellos realiza un dibujo incorrecto) y 2 responden con errores (aunque las respuestas son coherentes y se observa comprensión del problema).

Si se analiza el uso de las imágenes visuales empleadas en la resolución de este problema, se puede observar una circunstancia relevante a la hora de comprender mejor el manejo del registro visual. En ocasiones, una misma imagen puede ser utilizada de dos modos muy diferentes. Por ejemplo, si comparamos la respuesta del alumno 18 o el 7, con las del 28 o el 22, observamos que todos realizan prácticamente la misma imagen (con o sin cuadraditos), pero sin embargo juegan un papel muy diferente en la resolución del problema.

Si observamos la Tabla , en la primera fila puede verse que el argumento es analítico y la imagen parece haberse empleado o bien para hacerse una idea global de la situación (Figura : Respuesta del alumno 18) o bien para comprobar (Figura), mientras que en la segunda fila (Figura , Figura), la imagen es clave en el argumento. Tanto que si prescindimos de ella, éste carecería de sentido. Esta distinción de funciones de la misma imagen ya la encontrábamos en la teoría de Duval, cuando habla de las imágenes icónicas y las compara con las visualizaciones (Duval, 1999). Basándonos en esa idea, las hemos denominado *función ilustrativa* y *heurística* de las imágenes, respectivamente.

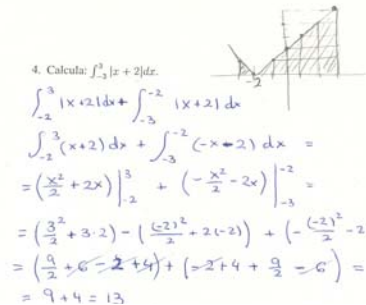
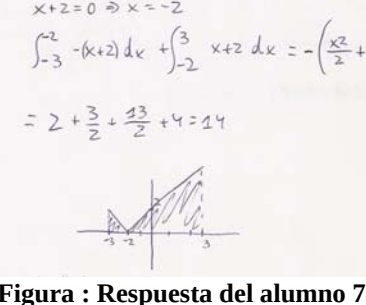
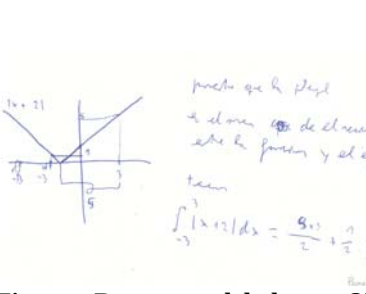
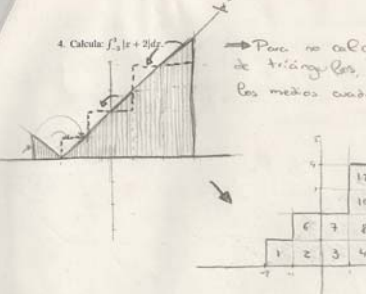
Función ilustrativa	 4. Calcular: $\int_{-3}^3 x+2 dx$. $\int_{-3}^3 x+2 dx = \int_{-3}^{-2} -(x+2) dx + \int_{-2}^3 (x+2) dx$ $= \int_{-3}^{-2} (-x-2) dx + \int_{-2}^3 (x+2) dx =$ $= \left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right) \Big _{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big _{-2}^3 =$ $= \left(-\frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{9}{2} - 6\right) + \left(\frac{9}{2} + 6\right) - \left(\frac{4}{2} + 4\right) =$ $= \left(-2 - 4\right) - \left(-4.5 - 6\right) + \left(4.5 + 6\right) - \left(2 + 4\right) =$ $= (-6) - (-10.5) + 10.5 - 6 = 9 = 9$ Figura : Respuesta del alumno 18	$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ $\int_{-3}^{-2} -(x+2) dx + \int_{-2}^3 (x+2) dx = -\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big _{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big _{-2}^3 =$ $= 2 + \frac{3}{2} + \frac{13}{2} + 4 = 14$  Figura : Respuesta del alumno 7
Función heurística	 Figura : Respuesta del alumno 22	 Figura : Respuesta del alumno 28

Tabla : Función ilustrativa y heurística de las imágenes en las respuestas al Problema 2

En esta línea, de ejemplos de uso ilustrativo de las imágenes, también podemos estudiar el caso de la alumna 21, quien emplea el registro visual para realizar un dibujo con errores desde el punto de vista institucional, que no tienen ninguna repercusión sobre la respuesta correcta al problema. Esta observación corrobora las realizadas por otras investigaciones. En particular, Llorens y Santoja (1997) afirman que “el alumno está prefiriendo el contexto algebraico-formal al visual-geométrico, simplemente porque no los ha integrado”.

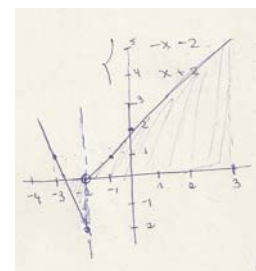


Figura : Respuesta de la alumna 21 al Problema 2

Problema 3

En este problema, al aumentar el grado de abstracción del problema, aumenta la dificultad y se requiere una mayor comprensión de los conceptos involucrados: función impar e integral definida. Además resulta muy recomendable poseer una visión global de lo que está ocurriendo. El hecho de que se diga que la f es impar, está incitando al uso del registro visual, o al menos a la combinación de registros, ya que podría haberse enunciado, como se hace en el problema 2.9, que la función cumple que $f(-x)=-f(x)$. Sin embargo, el paso por el registro visual no es estrictamente necesario para resolver el problema, es opcional.

La estrategia seguida por la mayoría de los estudiantes, 12 de 29, es la siguiente, que es eminentemente analítica:

$$\int_{-a}^a (b + (f(x))) dx = \int_{-a}^a b dx + \int_{-a}^a f(x) dx = bx \Big|_{-a}^a + 0 = 2ab$$

Pero sólo a la mitad (6 de 12) les sirve para dar la respuesta correcta. El resto de estrategias seguidas consisten o bien en separar el intervalo de integración en el 0, o bien son de carácter más abstracto, dando lugar a errores lógicos. Por ejemplo, un estudiante (13) trata de razonar probando que f par implica f' impar, y de ahí concluye que F es par. Es decir, prueba una implicación, pero luego la utiliza en sentido contrario.

En menor número están las que utilizan como base el registro visual. Veremos alguna de ellas más adelante.

Entre los errores, dificultades y bloqueos encontrados al razonar analíticamente de forma operativa destacamos:

- Problemas con la definición de función impar
 - o No saberla o no saberle sacar partido.
 - o Confundirla con la de par
 - o Definición sólo puntual en los extremos
 - o Utilizar explícita o implícitamente: $f(x)+b$ impar
- Problemas con la integral definida:
 - o Cálculo: similares a los de los problemas anteriores.
 - o Propiedades:
 - Aditiva: bloqueo si no se aplica al principio.
 - Sacar constantes que suman fuera de integral
 - No cambio de signo al cambiar los extremos de integración o al hacer cambios de variables.
- Errores simbólicos:
 - o Problemas con la notación (nombres de parámetros)
 - o Problemas con el símbolo de integral, empleado para referirse a la primitiva)

$$\int_a^b (f(x))dx = \int f(a) - \int f(b)$$

En este problema se pone de manifiesto la influencia del tipo de enunciado para el análisis de los resultados. El carácter abstracto con que se plantea ha añadido, a las dificultades propias del cálculo de integrales, nuevos obstáculos relacionados con la utilización de argumentos más generales. Además, en este caso, el concepto de integral aparece muy interrelacionado con el concepto de función impar, que también presenta dificultades de comprensión, lo que ha influido de forma negativa en las respuestas.

Por otro lado, nuestras expectativas de encontrar un mayor uso del registro visual fueron satisfechas, lo que da pie a poder hacer otra observación en torno a este registro. En particular, nos sorprendió la respuesta que mostramos a continuación (ver Figura), que es completamente visual, y no habíamos contemplado en el análisis a priori del problema.

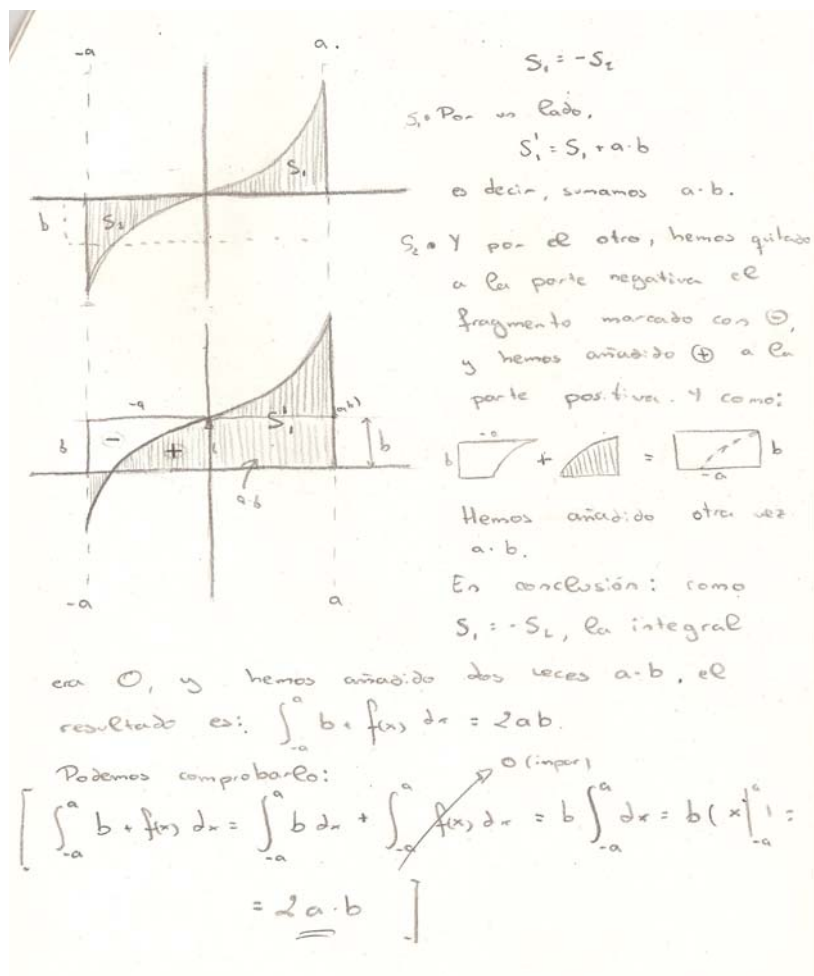


Figura : Respuesta al problema 3 del alumno 28

Esta resolución pone de manifiesto la dificultad cognitiva propia del uso del registro visual, ya señalada por Eisenberg y Dreyfus (1991) como una de las tres causas para el rechazo de la visualización. La respuesta analítica, que en este caso aparece al final como comprobación, sigue un proceso lineal en el que se suceden ciertas operaciones que, realizadas con corrección, acaban dando como resultado $2ab$.

En el caso visual, es necesario contemplar el proceso desde una perspectiva global. Deben tenerse en cuenta mayor número de conceptos y relaciones de forma simultánea: requiere de la interpretación visual de la integral como área y de las funciones impares como simétricas respecto al origen, debe recordarse que sumar una cantidad constante a una función es trasladarla a lo largo del eje (este concepto no aparece en el argumento analítico) y, finalmente, son precisas ciertas transformaciones del tipo de “cortar” y “pegar” áreas, teniendo en cuenta sus signos. Obviamente, en ambos casos, el resultado es el mismo. Sin embargo, cada tipo de argumento nos conduce a ver el problema de distinta manera.

Con este ejemplo, queremos remarcar el tipo de comprensión tan diferente que nos proporciona cada registro, y lo conveniente que resulta combinarlos. Si logramos que nuestros estudiantes dominen ambos tipos de razonamiento, estaremos contribuyendo a que posean una mayor comprensión de los objetos y relaciones matemáticas.

5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Los resultados mostrados en esta comunicación en torno a las dificultades con el concepto de integral confirman los datos obtenidos por otras investigaciones citadas en la introducción: Mundy, 1987; Llorens y Santoja, 1997; González-Martín y Camacho,

2005. De forma específica destacamos las dificultades originadas por el manejo operativo y analítico de la integral, que se manifiesta principalmente a través de la identificación de “integral” con “primitiva” y de “integral definida” con la regla de Barrow, dando lugar a numerosos errores de cálculo. Salvo en ciertas excepciones individuales, esta situación viene acompañada de una falta de integración entre el concepto de integral y el de área y por tanto de una clara falta de comprensión visual de la integral, paso que consideramos imprescindible para alcanzar una verdadera comprensión del concepto.

Como resultados de este estudio respecto a la visualización se destaca:

- *El papel de las representaciones en la comprensión de los conceptos:* el análisis de la red sistémica asociada al Problema 1 permite concluir que la apropiación de diversidad de representaciones de los conceptos involucrados junto con la coordinación flexible entre el registro analítico y el visual, conducen a un mayor éxito en la resolución de problemas no rutinarios, lo que este caso asociamos con poseer una mayor comprensión visual del problema. Además, el análisis de las respuestas dadas al Problema 3 pone de manifiesto que deben tenerse en cuenta la existencia de fuertes interrelaciones no sólo entre distintas representaciones de un concepto (en un mismo registro o entre distintos registros) si no también entre los distintos conceptos involucrados en el problema.

- *Sobre el manejo del registro visual:* el registro visual presenta dificultades y sutilezas sobre las que vale la pena reflexionar y que conviene explicitar, pues de lo contrario, se pueden inducir errores en los estudiantes (ver respuestas de los alumnos 19 y 27 en el Problema 1). Rescatamos dos de estas particularidades del registro visual aparecidas en el análisis de los resultados mostrados:

- o *Función ilustrativa vs heurística de las imágenes:* una misma imagen puede desempeñar funciones muy distintas dentro de la resolución de un problema. En el análisis del Problema 2, veíamos cómo de hecho la misma imagen puede pasar de ser una mera ilustración que acompaña al razonamiento analítico (función ilustrativa) a ser la base del razonamiento (función heurística).

- o *Dificultades cognitivas vs comprensión global:* el análisis de la respuesta del alumno 28 al Problema 3 puso de relieve que el argumento visual es más difícil cognitivamente que el analítico, pues requiere movilizar mayor número de conceptos y además no es lineal. Sin embargo proporciona mayor comprensión a través de la visión global del problema.

Así, podemos caracterizar una enseñanza explícita en visualización del concepto de integral, como aquella que fomente la comprensión visual de este concepto teniendo en cuenta los aspectos anteriormente expuestos. Hacemos notar que aunque éstos puedan ser manejados de forma natural por el matemático experto, no es así para la mayoría de estudiantes.

En particular, nos parece especialmente interesante continuar la reflexión en torno a cómo lograr que las imágenes contribuyan a dar una visión global a los estudiantes de la situación matemática a la que se enfrentan. Las investigaciones normalmente se centran en estudiar la coordinación entre registros que, si bien es una condición necesaria para el aprendizaje de las matemáticas, no es suficiente para lograr la comprensión visual de los conceptos. Se muestra necesario el dominio de una visión global u holística por parte del estudiante. Una línea de avance a explorar en futuros estudios es cómo lograr que los estudiantes adquieran esta visión global necesaria para la comprensión de la integral a través de una enseñanza explícita de visualización de este concepto.

Agradecimientos: La realización de este trabajo ha sido posible gracias a la financiación de la Beca AP2007- 00866 y la Cátedra Miguel de Guzmán de la UCM.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARCAVI, A. (2003): "The role of visual representations in the learning of mathematics", *Educational Studies in Mathematics*. 52(3). 215-24.
- AZCÁRATE, C y CAMACHO, M. (2003): "Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. X(2). 135-149.
- BLISS, J.; MONK, M. y OGBORN, J. (1983): *Qualitative data analysis for educational research. A guide to users of systemic networks*. Croom Helm, London.
- DREYFUS, T. (1991): "On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education", *Proceedings of the 15th PME International Conference*. I. F. Furinghetti (Ed.), 33-48.
- DUVAL, R (1995): *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchatel, Peter Lang. (Traducción al castellano por VEGA RESTREPO, M. (1999): *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, GEM. Cali. Colombia)
- DUVAL, R. (1999): "Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning". *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, I.F. Hitt y M. Santos (Eds.), 3-26.
- DUVAL, R. (2006): "A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics", *Educational Studies in Mathematics* 61. 103–131
- EISENBERG, T. y DREYFUS, T. (1991): "On the reluctance to visualize in mathematics". *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes n. 19. W. Zimmernann, W. y Cunningham (Eds.) Washington, D.C, 25-37.
- FISCHBEIN, E. (1987): *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- GLASER, R. Y STRAUSS, A. (1967): *The discover of grounder theory: strategies for qualitative research*. New York: Aldine Publishing.
- GONZÁLEZ- MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2005): "Sobre la comprensión en estudiantes de Matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores". *Enseñanza de las ciencias*, 23 (1). 81-96.
- GUZMÁN, M. de (1996): *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Ediciones Pirámide, S. A.
- HITT, F. (2003): "Le caractère fonctionnel des représentations". *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*. 8. Strasbourg, 255-271.
- HITT, F. (2006): "Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of limit". *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*. 11. IREM de Strasbourg, 251-267.
- LATORRE, A. et al. (1996): *Bases metodológicas de la investigación cualitativa*. Barcelona, Editorial GR92.
- LLORENS, J. L. y SANTOJA, F. J. (1997): "Una interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral". *Divulgaciones Matemáticas*. 5, (1(2)). 61-76
- MUNDY, J. (1987): "Analysis of Errors of First Year Calculus Students, en *Theory, Research and Practice in Mathematics Education*, Bell, A., Low, B. y Kilpatrick, J. (Eds.), *Proceedings ICME 5*, 170-172 .

- PRESMEG, N. C. (1985): *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation*. Cambridge University, England. Unpublished Ph.D. dissertation
- PRESMEG, N. C. (1986): "Visualisation and mathematical giftedness". *Educational Studies in Mathematics*. 17(3). 297-311.
- PRESMEG, N. C. (1991): "Classroom Aspects which Influence Use of Visual Imagery in High School Mathematics". *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Assisi, June 29 - July 4, 1991. 3. F. Furinghetti (Ed.), 191-198
- PRESMEG, N. C. Y. BERGSTEN, C. (1995): "Preference for visual methods: an international study" *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3. Recife, Brazil: PME. L. Meira & D. Carraher (Eds), 58-65.
- PRESMEG, N. C. (2006): "Research on visualization in learning and teaching mathematics". *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. PME 1976-2006*. Ed. Sense Publishers, 205-235.

LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DESDE LA PERSPECTIVA DEL EOS

Ángel Contreras de la Fuente*

Teresa Balcaza Bautista**

Resumen

La optimización matemática constituye una temática que es tratada de modo diseminado en la enseñanza secundaria. En el Currículo actual de enseñanza aparece principalmente como aplicación del cálculo diferencial, sin que se considere un estudio riguroso de este tópico matemático. En este trabajo se plantea un problema de investigación orientado al estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje de la optimización matemática en estudiantes de educación secundaria, enmarcado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). Se presenta una recopilación de investigaciones didácticas relacionadas con la optimización matemática, se plantean los objetivos de la investigación y se expone la metodología a seguir desde el Enfoque Ontosemiótico.

Palabras clave; Optimización, enseñanza, aprendizaje, educación secundaria, enfoque ontosemiótico.

Abstract

Mathematical optimization is a subject with a widespread treatment in secondary education. In the current educational curriculum mathematical optimization appears mainly as an application of differential calculus, and a rigorous study of this mathematical topic has not been considered so far. This paper sets out a problem-oriented research to the study of the teaching and learning of mathematical optimization in high school students, using the ontosemiotic approach to cognition and mathematical instruction (OACMI) as the main reference point. A compilation of teaching research related to mathematical optimization, the research objectives, and the methodology to be followed from the ontosemiotic approach are introduced.

Keywords: optimization, teaching, learning, secondary education, ontosemiotic approach.

1. INTRODUCCIÓN

Desde mi experiencia como profesora de estudiantes de secundaria, considero que la optimización constituye una temática que es tratada de modo diseminado tanto en la etapa de la Enseñanza Secundaria Obligatoria como en la etapa de Bachiller, y no es considerada como un tópico matemático con entidad propia. En el Currículo actual de enseñanza aparece principalmente como aplicación del Cálculo Diferencial sin que se considere un estudio riguroso de la misma. Como indica Malaspina (2009), son numerosos los problemas de optimización a los que nos enfrentamos en la vida cotidiana y para abordarlos utilizamos los criterios que nos da nuestra experiencia y formación, aunque no necesariamente encontremos la solución óptima. Consideramos que sería necesario para la enseñanza de las matemáticas, la inclusión de la optimización desde la enseñanza primaria y secundaria ya que constituyen una

* Universidad de Jaén. España.

** IES Vera Cruz de Begíjar (Jaén). España.

herramienta fundamental para abordar con éxito múltiples situaciones de la vida cotidiana y además puede ser aplicada a diversas ciencias y campos del conocimiento.

El trabajo que a continuación se presenta consta de las siguientes partes: presentación del problema de investigación, resumen de los antecedentes del problema, el marco teórico que se utilizará en la investigación (Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática), los objetivos de la investigación y la metodología que se seguirá en la investigación.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El problema de investigación se plantea en torno a la enseñanza y aprendizaje de la optimización en estudiantes de educación secundaria. Esta investigación se enmarca en un programa de investigación del área de la didáctica de las matemáticas, bajo el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

Con este marco teórico las preguntas fundamentales que se van a tratar de responder son las siguientes:

¿Cuáles son los significados institucionales de la optimización en estudiantes de educación secundaria?

¿Cuáles son los significados personales de la optimización en estudiantes de educación secundaria, en cuanto a las situaciones-problema que se plantean en el proceso de instrucción, los lenguajes que se utilizan, los tratamientos y conversiones entre los mismos y las argumentaciones que los alumnos realizan?

¿Que consecuencias tiene el trabajo cooperativo entre los estudiantes en el aprendizaje del tema de optimización?

¿Cuál es la idoneidad didáctica desde los ejes: epistémico, cognitivo, interaccional y mediacional del proceso de instrucción de la optimización matemática en secundaria?

Teniendo en cuenta los ejes de investigación que se proponen en el EOS (foco, fin, generalizabilidad y nivel de análisis) (Godino, Batanero y Font, 2007), las categorías de cada eje que se van a tratar son las siguientes:

- 1) Foco: epistémico (significados institucionales), cognitivo (significados personales), mediacional (recursos materiales y temporales) e interaccional (interacción entre significados institucionales y personales).
- 2) Fin: descripción de los significados, procesos y factores, explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje y los efectos de los factores intervinientes.
- 3) Generalizabilidad exploratoria, ya que no se pretende generalizar a otros contextos o poblaciones.
- 4) Nivel de análisis temático ya que se estudian hechos y fenómenos ligados al estudio de una unidad temática en un nivel educativo determinado.

3. ANTECEDENTES

Son numerosas las ocasiones en las que tenemos que abordar situaciones relacionadas con problemas de optimización; por ejemplo, tratamos de buscar el mejor camino para ir de un lugar a otro, procuramos hacer la mejor elección en la compra, buscamos la mejor financiación de nuestra hipoteca o elegir el mejor lugar cuando vamos al cine. Es evidente que cuando nos enfrentamos a este tipo situaciones que no usamos la matemática formalizada y rigurosa para encontrar la mejor solución, pero sí utilizamos los criterios que nos da nuestra experiencia y formación.

En el Currículo actual que rige nuestro Sistema Educativo, aparecen contenidos relacionados con la optimización en todos los niveles, como ejemplos encontramos el máximo común divisor y mínimo común múltiplo en primaria, extremos relativos y

absolutos abordados como aplicaciones de las gráficas de las funciones en la E.S.O. y en Bachiller se introducen los problemas de optimización como aplicaciones del Cálculo Diferencial utilizando principalmente el concepto de derivada de una función. Destacar como un primer análisis que la optimización aparece como aplicación de otros contenidos como son las funciones o el cálculo diferencial.

4. EVOLUCIÓN HISTÓRICA

Desde una perspectiva histórica, como señala Malaspina (2009), la problemática sobre optimización ha formado parte de la matemática desde la antigüedad. A continuación se exponen algunos hechos históricos que ponen de manifiesto la importancia de este tipo de problemas a lo largo de la historia.

Para comenzar, en los tratados griegos de la antigüedad, en la obra de Apolonio (262-190 a. C.) sobre Secciones Cónicas, se recoge en el Libro V el estudio de los segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. Otra prueba histórica que muestra la presencia de las ideas de máximo es la obra de Pappus de Alejandría, *Colección Matemática*, se recoge fragmentos de una obra sobre figuras isométricas escritas por Zenodoro (180 a.C.) donde afirma que de todas las figuras sólidas con la misma superficie, la esfera es la que tiene un volumen máximo.

Mencionar las destacadas contribuciones que han aportado a lo largo de la historia para crear el análisis infinitesimal distintos personajes como Eudoxo, Arquímedes, Kepler, Cavalieri, Torricelli y Fermat. Es en el siglo XVII con el desarrollo del Cálculo Diferencial cuando se resuelven problemas de optimización de una manera más generalizada. Destacar a matemáticos de esta época como Fermat que inventó métodos ingeniosos para obtener valores máximos y mínimos y las significativas aportaciones de Newton y Leibnitz. Con el uso de las derivadas para resolver problemas de optimización se amplía las aplicaciones de las matemáticas en diversos campos de la ciencia y la tecnología.

En el siglo XVIII, gracias a las aportaciones de científicos como Lagrange y Euler se crea el cálculo de variaciones, teoría que permite resolver problemas considerando la obtención de funciones que optimizan funcionales. A partir de esta teoría se obtienen modelos de optimización dinámica que en el siglo XX se aplican en diversas áreas del conocimiento como en economía.

Otra aportación a la problemática de la optimización aparece a mitad del siglo XX al desarrollarse la programación lineal gracias a los trabajos de Dantzig (algoritmo del simplex), Kantorovich y Koopmans. Esta teoría está siendo utilizada actualmente para optimizar la gestión de recursos y ayudar en la toma de decisiones en numerosos campos. Los problemas que considera la programación lineal tienen como objetivo seleccionar el valor de ciertas variables de decisión (inversiones que hay que realizar, volúmenes de existencias que hay que planificar, niveles de existencias que hay que alcanzar...) para optimizar una función que depende de decisiones tomadas (rendimiento esperado, provecho total, coste incurrido,...) respetando un conjunto de limitaciones impuestas (presupuesto disponible, nivel de riesgo tolerable, satisfacción de la demanda, recursos utilizables,...). (Crama, Y. (2005)). Gracias a las contribuciones hechas a la programación lineal, pronto se desarrolla la programación no lineal con trabajos aportados por científicos destacados como Kuhn, Tucker y Neumann entre otros. Actualmente, es un campo muy amplio de las matemáticas con múltiples aplicaciones en diversos campos. Destacar la influencia que ha tenido el avance de los sistemas informáticos sobre los progresos que se están consiguiendo actualmente en la programación tanto lineal como no lineal, fundamentalmente aplicables en la reducción de los tiempos de cálculo en los procesos de cálculo.

5. LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

A continuación se presenta una serie de investigaciones didácticas relacionadas con problemas de investigación.

En Villers C. (1997), se pone de manifiesto que uno de los principales objetivos de las matemáticas en enseñanza secundaria es el de adquirir destrezas para abordar situaciones de la vida real y entre ella destaca la capacidad para tomar decisiones. Considera que la optimización es un tópico matemático necesario para que los alumnos adquieran tal destreza. Sin embargo, observa que la optimización no aparece en los programas educativos hasta los últimos años y este contenido es tratado de una manera muy imprecisa. Este hecho contradice una de las orientaciones recogidas en un trabajo publicado en el año 1980 titulado "*Commentaires du programme de mathématique pour les trois cycles*" perteneciente al marco de la reforma pedagógica de l'Enseignement primaire.

Se afirma que es posible tratar situaciones de optimización en los primeros años de las matemáticas escolares y que ello conlleva varias ventajas, como por ejemplo, dotar a las matemáticas de un carácter más realista ya que la optimización permite acercar al alumno a las matemáticas utilizando experiencias de su entorno.

Propone una serie de problemas específicos que podrían ser introducidos en secundaria. Dichos problemas están relacionados con la búsqueda de valores extremos en la geometría y son resueltos mediante métodos algebraicos.

En Moreno S. et al (2004), se pone en evidencia que la enseñanza de las matemáticas que se da de una manera prescriptiva, rutinaria y ajena al entorno del estudiante, conduce a interpretaciones falsas alrededor de los conceptos matemáticos. Se manifiesta que actualmente se enseña con una mayor carga operativa en deterioro de la parte conceptual. En base a un estudio realizado a estudiantes de maestría e ingeniería de primer año y a profesores, se pone de relieve que debido a una interpretación errónea que los estudiantes hacen de los conceptos de optimización, cuando se les propone resolver problemas no rutinarios proporcionan respuestas que contradicen la solución intuitiva del problema planteado.

Tal como viene recogido en el Currículo, en la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. (R. D. 1631/2006)

Los siguientes artículos se centran en educación secundaria y hacen una propuesta específica de un método para resolver problemas de optimización como es el uso de la calculadora gráfica.

En Lowther M. (1999), se expone una experiencia relacionada con optimización realizada con alumnos de secundaria. Se propone la resolución del siguiente problema: encontrar el máximo volumen que puede tener una caja que se forme a partir de un folio, cortando las esquinas y doblándolas.

Para enfrentarse a esta cuestión, se les facilita a los alumnos una hoja para que construyan la caja, escogiendo cada uno de ellos unas dimensiones concretas. El profesor recoge la siguiente información de todos los alumnos: el par de números: longitud del lado y el volumen que genera, y la introduce en la base de datos de la calculadora científica TI-83. Para la interpretación conjunta de los datos, se utiliza el método gráfico escogiendo para representarlos una parábola, lo que conlleva a la conclusión de utilizar el método algebraico para obtener la solución óptima. En la

resolución de este problema se utilizan tres métodos: numérico, gráfico y algebraico y además los alumnos prueban físicamente los volúmenes que generan sus cajas, lo que añade otra dimensión a la asimilación de los estudiantes de la solución.

Se destaca la segunda parte de la actividad en la que se proponen a los alumnos que expliquen y enseñen a sus padres la experiencia realizada en clase. Consideramos que es un elemento interesante para la reflexión didáctica: la comunicación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. *Aula*. (no.10) pp. 137-152. (Revista, España)

En Camacho M. et al (2001), se presenta una clasificación de los tipos de problemas que aparecen en los libros de texto y se desarrollan algunas sugerencias didácticas para su resolución utilizando como recurso la calculadora gráfica TI-92.

El estudio de los enunciados de los problemas que aparecen en los libros de texto lleva a encontrar similitud entre ellos. Se establecen siete clases de problemas: problemas de números, de ángulos, del nadador, de inscribir/circunscribir unas figuras a otras, de construcción de figuras minimizando el coste del material, de cálculo de la distancia de puntos a funciones y de la valla. Se considera que al plantear la mayoría de los problemas se llega a una situación de carácter numérico-funcional o de carácter geométrico. Por lo que bastaría con que el alumno adquiriera la destreza de resolver estos tipos de problemas, traduzca el resto de enunciados a uno de estos tipos e interprete la solución obtenida.

Para ilustrar el uso de la calculadora gráfica se resuelven en este trabajo dos problemas específicos en la que se combinan tres tipos de representaciones: numérico, gráfico y algebraico.

Una de las ventajas que plantean del uso de esta calculadora en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas de este tipo, es que permite a los alumnos trabajar con distintos tipos de representación (numérico, gráfico y algebraico) lo que conlleva a enriquecer el planteamiento y el razonamiento en la resolución de los problemas. Además, se aportan resultados de diversas investigaciones que concluyen que los estudiantes que usan calculadoras gráficas para resolver problemas obtienen una mayor comprensión conceptual que los que desarrollan el aprendizaje de forma tradicional.

En Driscoll, P. and Kobylski, G. (2002) se tratan reflexiones didácticas sobre la intuición y la optimización no lineal enfocadas a nivel universitario. Se propone el uso del software MAPLE como recurso para emplear en la resolución de problemas de optimización. Se desarrolla una experiencia que puede ser utilizada como una actividad de motivación en la cual los alumnos expresen sus ideas previas, experimenten e investiguen. Además permite poner de manifiesto la necesidad de buscar nuevas estrategias para resolver la situación que se les plantea.

En Campos M.A. et al (1999), se presentan resultados sobre representación matemática de estudiantes pre-universitarios en un proceso de resolución de un problema de optimización.

En el desarrollo del trabajo se destaca la importancia de la representación y manipulación simbólica como procesos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas.

Se define el concepto de representación como las formas en que percibimos, imaginamos y categorizamos la realidad y nuestras propias construcciones, y las usamos para describirla, explicarla o ilustrarla (Campos, 1997). Un concepto o situación matemática se puede describir con muchos modos de representación, por tanto, para

conocerlo es necesario el intercambio entre las representaciones mediante un proceso de traducción entre los componentes de éstas.

En este trabajo se estudia cuáles son las representaciones que los alumnos utilizan para resolver un problema específico. Observar que los alumnos antes de realizar la prueba que se les propone ya habían cursado álgebra, geometría analítica y euclídea, y habían utilizado métodos algebraicos, gráficos y funciones. El enunciado del problema considerado era el siguiente: Se tienen diez hilos de 30 cm. cada uno. Se anudan de manera que todos tengan la misma longitud ya doblados. ¿Cuáles son las medidas de la base y altura de un rectángulo que se puede formar, de tal manera que se obtenga el área máxima?

Al analizar las respuestas de las pruebas realizadas por los alumnos se encontró una gran diversidad de formas de resolución, pero se identificó un enfoque común, el cual requiere sólo algunas representaciones de procedimiento aritmético o algebraico. Se pone en evidencia la carencia de transformaciones necesarias para pasar de una visión algorítmica de carácter aritmético a una perspectiva en donde se dé tratamiento al problema con base en el concepto de función, esencial para matemáticas avanzadas.

En Contreras A., Luque L. y Ordóñez L. (2004) se realiza el análisis de un problema de optimización desde la teoría del juego de contextos (Douady, 1991) y utilizando las traducciones entre registros de representación semiótica (Duval, 2000). Entre las conclusiones se destaca que para enseñar un contenido matemático ha de contextualizarse en diversas situaciones de enseñanza y, paralelamente, organizar una dinámica de tratamientos intraregistros y la coordinación interregistros, para aportar un significado al concepto de que se trate.

En Malaspina, U.V. (2008) se realiza un análisis de la intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización desde el EOS. Mediante un estudio realizado a alumnos universitarios se llega a las siguientes conclusiones:

- Existe una intuición optimizadora y la existencia de eficiencias en el uso del lenguaje formalizado, procedimientos, proposiciones y argumentos.
- Se analizan los problemas de optimización en educación secundaria en Perú y propone problemas para que sean introducidos en la educación básica.

6. MARCO TEÓRICO

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)

Para abordar la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la optimización en secundaria hay que considerar un complejo proceso en el que están implicados diversos elementos didácticos. Hay que acudir a un enfoque unificado de los fenómenos didácticos (epistémicos, cognitivos e instruccionales), para lo cual es necesario asumir presupuestos ecológicos, sistémicos, ontológicos y semióticos (Godino, 2006). Consideramos que un enfoque teórico que corresponde a estos planteamientos desde la perspectiva de la educación matemática, lo constituye el marco teórico denominado “Enfoque ontosemiótico de la cognición matemática” (EOS), (Godino, 2002). Este marco teórico ha sido desarrollado, entre otros, por Godino, Font y Batanero y las investigaciones realizadas en el marco de dicho enfoque han sido publicadas en prestigiosas revistas de investigación en didáctica de las matemáticas de América y de Europa (Font, V., 2007; Font, V. y Contreras, A. 2008; Font y Godino, 2007; Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R., 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Font y Wilhelmi, 2006).

A continuación, se presenta una síntesis de las herramientas básicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS), ensamblando o resumiendo párrafos y figuras tomados de diversos artículos de la amplia literatura

desarrollada principalmente por J. D. Godino, C. Batanero, y V. Font. Nuestras referencias fundamentales serán Godino (2003); Godino Batanero y Font (2007); Font (2007); Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006); y D'Amore y Godino (2007).

Conceptos básicos

El punto de partida del EOS es formular una ontología de objetos matemáticos que considere la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente estructurado. Partiendo de este triple aspecto de la matemática se considera objeto matemático a cualquier entidad referida en el discurso matemático, todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas.

Se considera como práctica matemática a toda actuación o expresión realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución.

Significados personales e institucionales de los objetos

En el estudio de las matemáticas se consideran los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto ante situaciones problemáticas. El sistema de prácticas manifestado por un sujeto individual se define como significado personal y el compartido en el seno una institución se define como significado institucional. Teniendo en cuenta la realidad en la planificación de un proceso de instrucción sobre un objeto matemático se puede considerar la siguiente clasificación:

Con relación a los significados institucionales podemos tener en cuenta los siguientes tipos:

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia del objeto matemático. Se trata de delimitar lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas.
- Pretendido: sistema de prácticas que se planifica para un determinado objeto matemático para el desarrollo de un cierto proceso instruccional.
- Implementado: el sistema de prácticas, operativas y discursivas, que realmente se efectúa en el aula.
- Evaluado: sistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes de los alumnos.

Respecto de los significados personales se proponen lo tipos:

- Global: la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

Aquella parte del significado personal declarado en disconformidad con el significado institucional evaluado, constituye el conjunto de errores de aprendizaje.

El proceso de instrucción modificará los significados personales del alumno por lo que interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

En la parte central de la figura 1 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la

comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

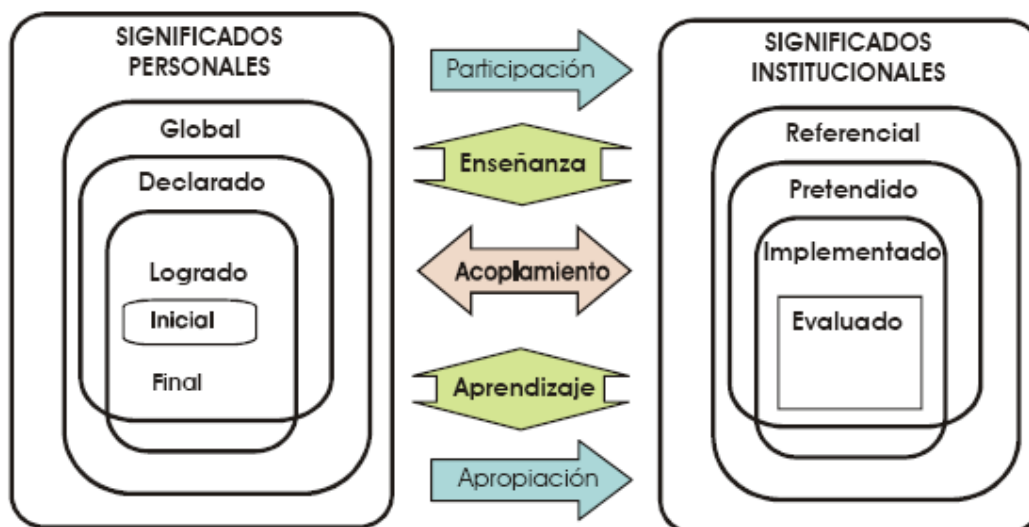


Figura 1: Tipos de Significados personales e institucionales.

Objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas

De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos. Si los sistemas de prácticas provienen de una institución se consideran objetos institucionales y tal noción de emergencia se relaciona con los procesos de comunicación, simbolización y regulación. Si por el contrario los sistemas de prácticas de los que emergen los conceptos corresponden a una persona se consideran objetos personales y están relacionados con procesos como interiorización, condensación y reificación.

De entre los objetos matemáticos que se ponen en juego en la actividad matemática se consideran los siguientes como entidades primarias:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).

Observar que esta clasificación no es una cuestión absoluta, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.)

Configuración de objetos

Para analizar la actividad matemática la noción de sistema de prácticas anteriormente definida es útil en un análisis de tipo macrodidáctico, en concreto cuando se comparan las formas que adoptan los conocimientos matemáticos en distintas instituciones, contextos o juegos de lenguaje. Pero para un análisis mas fino es conveniente utilizar las entidades primarias anteriormente referidas. En cada actividad estos objetos estarán

relacionados entre sí, estableciendo configuraciones. Por tanto, se definen las configuraciones como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Dependiendo del tipo de redes de objetos se diferencian configuraciones epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Para describir los conocimientos matemáticos se proponen como herramientas teóricas los sistemas de prácticas y las configuraciones. La constitución de estos objetos y relaciones (configuraciones), tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, considerándose éstas como secuencias de prácticas.

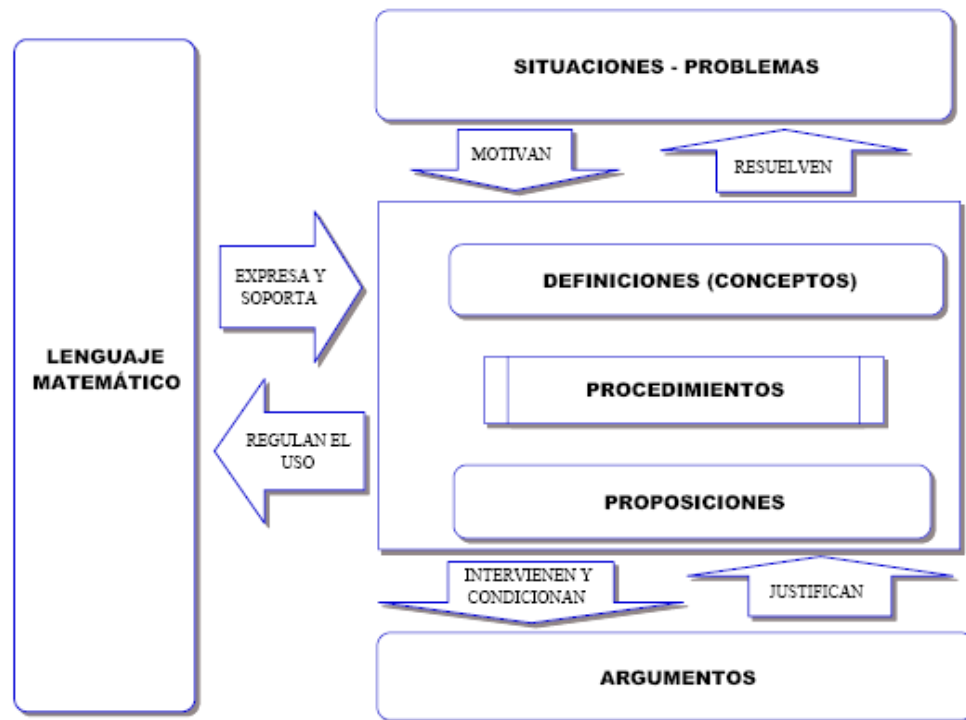


Figura 2: Componentes y relaciones en una configuración epistémica

Facetas duales

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales:

- Personal – institucional. (individual-social) Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales”
- Ostensivo – no ostensivo. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos matemáticos tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos,...). Ésta es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático: “La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica” (Otte, 2003, p.187)

- Unitario – sistémico. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.
- Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo). Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular y una clase más general. La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005).
- Expresión – contenido: Los objetos matemáticos son entidades que se relacionan entre sí, dicha relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.
Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental (un objeto usa u otro u otros como instrumento), y estructural (dos o mas objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos).
- Las funciones semióticas son un instrumento que facilita el estudio conjunto de la manipulación de ostensivos matemáticos, y del pensamiento que le acompaña, característico de las prácticas matemáticas.

El esquema siguiente se muestra las diferentes nociones teóricas que se han descrito anteriormente.

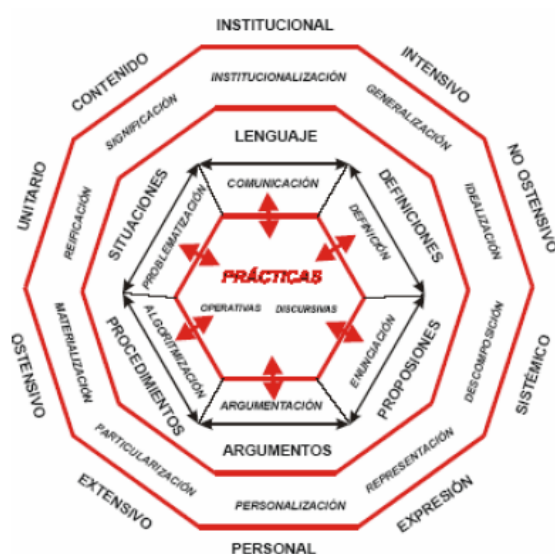


Figura 3: Modelo ontosemiótico de los objetos y procesos matemáticos

La actividad matemática tiene un papel central y es modelizada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales. Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo que nos lleva a los procesos de la figura 3.

Comprensión

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Font, 2001b y Godino, Batanero y Font, 2007). El posicionamiento del EOS se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente.

Por otra parte, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como expresión o contenido.

Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos.

El modelo teórico sobre la cognición matemática que ha sido expuesto puede ser aplicado otros campos del saber, en particular a los saberes didácticos.

La enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático se puede modelizar como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos: epistémico (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones del alumno), mediacional (recursos materiales y temporales), cognitivo (significados personales) y emocional (sentimientos y afectos), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales.

La unidad primaria de análisis didáctico es la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un contenido matemático, y usando recursos materiales. Por tanto, el proceso de instrucción se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

Una configuración didáctica lleva asociada una configuración epistémica, esto es, una tarea, los procedimientos requeridos para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones. Asociada a una configuración epistémica habrá una configuración instruccional constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego en una tarea matemática. Para describir los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se utilizan las configuraciones cognitivas, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica.

Idoneidad didáctica

La didáctica como área de conocimiento tiene que comprometerse con la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para abordar este componente normativo se desarrolla la noción de idoneidad didáctica de procesos de instrucción matemática. (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

- Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como

la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

- Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar las dificultades potenciales de los alumnos (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad emocional, grado de implicación (interés, motivación,...) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Para conseguir una idoneidad didáctica alta hay que lograr un equilibrio entre todas ellas. Los criterios de idoneidad didáctica permiten elaborar un programa de investigación orientado a describir, comprender y orientar la mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

7. OBJETIVOS

1. Estudiar y extraer a priori los significados institucionales de la optimización a nivel de educación secundaria.
2. Estudiar los significados personales a nivel de Bachillerato según las entidades primarias de las situaciones-problema y lenguajes utilizados, así como los tratamientos y conversiones que se realizan entre lenguajes.
3. Analizar libros de texto de secundaria aplicando el análisis a priori anterior, a fin de detectar el significado de referencia escolar y el significado pretendido.
4. Analizar procesos de estudio de la optimización en el nivel de secundaria del significado institucional implementado a fin de extraer consecuencias didácticas para su enseñanza.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, analizando la idoneidad epistémica, cognitiva e interaccional.

8. METODOLOGÍA

Según el enfoque metodológico presentado en Godino, Batanero y Font (2007), las investigaciones desarrolladas dentro del Enfoque Ontosemiótico deben combinar diversos métodos y técnicas según las distintas facetas de la investigación, dependiendo del problema abordado en las mismas. Por tanto, se han de combinar el estudio documental en la componente epistemológica con diversas técnicas y enfoques en las partes experimentales, tanto cognitivas e instruccionales.

Para el primer objetivo de tipo teórico la metodología consistirá, básicamente, en un análisis de fuentes documentales, adoptando la doctoranda una posición personal sobre las diferentes fuentes que será refinada mediante un proceso de triangulación de expertos. El objetivo de esta triangulación es impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales. El primer análisis realizado por la

doctoranda se someterá primero a la opinión de los directores de tesis, después se contará con la opinión, como mínimo, de otro especialista en el enfoque ontosemiótico. El resultado esperado es que la optimización se puede organizar en varias configuraciones epistémicas que expresan la progresiva ampliación de los sistemas de prácticas matemáticas asociados a la noción de optimización, desde planteamientos implícitos/intuitivos (protomatemáticos), hasta la formalización más general.

Para conseguir el segundo y tercer objetivo, el marco teórico del enfoque ontosemiótico nos proporciona los principales instrumentos teóricos (niveles de análisis didáctico, significados personales e institucionales, objetos primarios, configuraciones epistémicas, trayectorias didácticas, dimensión normativa y metanormativa,...). La metodología para el segundo y tercer objetivo consistirá básicamente en poner en funcionamiento algunos de dichos instrumentos teóricos en un escenario de investigación real: el análisis de los libros de texto seleccionados en nuestra investigación y el análisis de los apuntes de los estudiantes correspondientes a cuatro procesos de instrucción. El resultado esperado es determinar primero cómo las configuraciones epistémicas que, en cierta manera, resumen el desarrollo del “objeto optimización” (objetivo 1) se han transpuesto a los libros de texto. En concreto, se trata de determinar las configuraciones epistémicas de los libros de texto y su relación con las encontradas al estudiar la evolución histórica de la noción de optimización. El segundo resultado esperado es determinar las configuraciones epistémicas efectivamente implementadas y su relación con las encontradas en los libros de texto y en el estudio histórico y epistemológico de la noción de optimización. Se realizará un segundo proceso de triangulación de expertos. El primer análisis realizado por la doctoranda se someterá primero a la opinión de los directores de tesis, después se contará con la opinión, como mínimo, de otro especialista en el enfoque ontosemiótico. Mediante el segundo y tercer objetivo esperamos conseguir la *observación de fenómenos*. Es decir, la metodología de investigación utilizada para conseguir estos dos objetivos básicamente consiste en la aplicación de un determinado marco teórico (el EOS) al estudio de una determinada situación con el objetivo de llegar a documentar un determinado fenómeno. Para ello hay que elaborar instrumentos para recoger la información, obtener resultados, analizar los resultados utilizando el marco teórico, etc. También esperamos poder dar alguna explicación de los fenómenos observados.

Para el cuarto objetivo la metodología consistirá en el diseño e implementación de un proceso de instrucción en el que se presente una innovación con relación a la secuencia habitual (primero se introducen las derivadas y después se presenta la resolución de los problemas de optimización como una aplicación del cálculo diferencial). Después se determinarán los significados personales declarados y logrados de los alumnos mediante cuestionarios elaborados ad hoc.

Con relación a la metodología usada para determinar los significados personales hay dos cuestiones relevantes, la primera tiene que ver con la selección de los cuestionarios y la segunda con el tipo de análisis que se hace de las respuestas de los alumnos.

El significado institucional de referencia del objeto “optimización” es complejo, como mostrará el análisis que se realizará en el objetivo uno. Por ello, para evaluar el significado personal declarado y logrado de los alumnos, es necesario disponer de un cuestionario que sea idóneo desde el punto de vista del contenido que se pregunta a los alumnos. Esta idoneidad se consigue determinando previamente un significado de referencia para el objeto matemático “optimización” que nos permita construir un cuestionario que sea representativo de dicho significado (objetivo 1)

En el EOS para analizar las producciones matemáticas de los alumnos se analizan primero las prácticas matemáticas y después los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. En el caso que nos ocupa, las prácticas que realiza el alumno es la lectura del texto de cada uno de los problemas y la producción de un texto como respuesta. Por otra parte, teniendo en cuenta que se trata de una prueba puntual, no entraremos en profundidad en el análisis de procesos.

La muestra participante estará integrada por los alumnos de bachillerato que participaran en el proceso de instrucción. El cuestionario se pasará al finalizar el proceso de estudio y su análisis se completará con otros instrumentos (diario del profesor, cuaderno de los alumnos, etc.).

Una demanda que se hace actualmente a la Didáctica de las Matemáticas es “guiar la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas”, lo cual conlleva desarrollar “métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. Se trata de realizar una meta-acción (la valoración) que recae sobre acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). En consecuencia, ha de considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc. En definitiva, son necesarios criterios de idoneidad que permitan contestar a la pregunta genérica, “¿Sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora de los procesos de instrucción matemática? (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009)

Desde esta perspectiva la investigación en Didáctica de las Matemáticas se ha de interesar por, (1) caracterizar estos criterios de calidad y (2) realizar investigaciones concretas en las que se aplique dichos criterios con el objetivo de valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje y poder proponer acciones encaminadas a su mejora en futuras implementaciones. Esta perspectiva nos lleva a experiencias de innovaciones adaptadas a los contextos locales que, además, deben contar con la implicación del profesorado.

En esta investigación la metodología que utilizaremos para el quinto objetivo será la aplicación, al proceso de instrucción implementado, de la propuesta de criterios de idoneidad formulada por el Enfoque Ontosemiótica de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

9. FASES DEL ESTUDIO

1. Estudio epistemológico de la evolución de los máximos y mínimos a lo largo de la historia buscando poder determinar unas configuraciones de sus significados. (aquí se utilizarán documentos históricos franceses, el Urbaneja, el libro de D’hommbres, etc.).

2. Estudio de los significados de máximos y mínimos en bachillerato (relacionados con los del punto 1) en cuanto a las situaciones, lenguajes, tratamientos conversiones entre ellos y argumentaciones empleadas, extrayendo el significado pretendido. Esto se hará en los libros de texto de bachillerato utilizados en los centros en los que se haga la investigación. Se elegirán cuatro centros por razones de que éstos facilitan la colaboración en la investigación.

3. Analizar los apuntes de estudiantes muy buenos de las clases de los centros colaboradores para detectar el significado implementado, todo ello en cuanto a las situaciones planteadas, los lenguajes utilizados, los tratamientos y conversiones entre ellos y las argumentaciones seguidas.

4. Realizar una experiencia en el aula con el Cabri sobre la tangente y los máximos y mínimos (similar a lo que hay en el artículo de Unión), a fin de detectar las argumentaciones de los alumnos implicados en el estudio.
5. Extraer los significados personales de los estudiantes mediante cuestionarios elaborados.
6. Analizar las idoneidades epistémica, cognitiva y mediacional del proceso de estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAMACHO, M., et al. (2001): “Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92”, *Aula*. 10. 137-152.
- CONTRERAS, A. LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2004): “Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo”, *Educación Matemática*. 16 (1). 59-87.
- CRAMA, Y. (2005): « Trente ans de recherche operationnelle et d'optimisation mathematique », *Mathematique et Pedagogie*. 153. 23-39.
- DRISCOLL, P. and KOBYSKI, G. (2002). “A method for developing student intuition in nonlinear optimization”, *PRIMUS*. 12(3). 277-286.
- GODINO, J. D. (2002). “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22. 237-284.
- GODINO, J.D.; BATANERO, C. y FONT, V. (2006). “Una agenda de investigación en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática”. Documento interno. Universidad de Granada.
- GONZÁLEZ, M.T. (2004) “Los problemas de optimización en la enseñanza secundaria de España durante el siglo XX” *Proyecto de investigación financiado por la Junta de Castilla y León*
- LOWTHER, M. (1999) “Optimization: A Project in Mathematics and Communication”, *The Mathematics Teacher*. 92(9). 764-812.
- MALASPINA, U. (2008) *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*, Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú
- VILLERS, C. (1997) “Optimisation des les premieres annees du secondaire”, *Mathematique et Pedagogie*. 112. 31-43.