



CRONOGRAMA Y RESÚMENES DE LAS SESIONES DE LOS GRUPOS DE
INVESTIGACIÓN “PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO” E “HISTORIA
DE LAS MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

XXI SEIEM-ZARAGOZA

2017

Jueves 7 de septiembre. AULA 1.11		
Hora	Título	Autores
15:00-15:10	El significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales	Cristina Ayala-Altamirano Marta Molina González
15:10-15:15	<i>Discusión</i>	
15:15-15:25	Manifestación del pensamiento funcional según niveles de generalización y a través de estímulos del profesor	Jason de Jesús Ureña Alpízar Marta Molina González Rafael Ramírez Uclés
15:25-15:30	<i>Discusión</i>	
15:30-15:40	Tareas para diagnosticar el pensamiento lógico cardinal en escolares de 3 a 7 años	Catalina María Fernández Escalona
15:40-15:45	<i>Discusión</i>	
15:45-15:55	Interpretaciones de las variables de una relación funcional de alumnos de 4º de primaria	Aurora del Río Cabeza Rafael Ramírez Uclés Antonio Moreno Verdejo Marta Molina González
15:55-16:00	<i>Discusión</i>	
16:00-16:10	Errores y dificultades de suma y resta con números enteros tras primera experiencia como profesor novel	Carlos Veneroni Coto Juan Antonio Prieto Sánchez
16:10-16:15	<i>Discusión</i>	
16:15-16:25	Marco teórico de la tesis doctoral "Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza"	Mónica Arnal Palacián Francisco Javier Claros Mellado María Teresa Sánchez Compañía Miguel Ángel Baeza Alba
16:25-16:30	<i>Discusión</i>	



Viernes 8 de septiembre. AULA 1.11		
Hora	Título	Autores
17:30-17:40	Resolución de tareas de comparación de fracciones por estudiantes de primaria y secundaria: El fenómeno Natural Number Bias	Juan Manuel González Forte Ceneida Fernández Verdú
17:40-17:45	<i>Discusión</i>	
17:45-17:55	El proceso de generalización de estudiantes de 6° de Educación Primaria: dificultades, ayudas y efectos	Diana Hidalgo Moncada María C. Cañadas Santiago
17:55-18:00	<i>Discusión</i>	
18:00-18:10	Marco Teórico para la tesis “Algoritmos y Scratch: Una forma de trabajar el Pensamiento Matemático Avanzado”	Miguel Ángel Baeza Alba Francisco Javier Claros Mellado María Teresa Sánchez Compañía Mónica Arnal Palacián
18:10-18:15	<i>Discusión</i>	
18:15-18:25	Acciones que ayudan a alumnos de segundo de Educación Primaria cuando incurren en errores en una tarea de pensamiento funcional	Rodolfo Morales Merino María C. Cañadas Santiago
18:25-18:30	<i>Discusión</i>	
18:30-18:45	Presentación libro ACTAS-2017	Antonio Codina Sánchez
18:45-19:00	Información del grupo PNA	Antonio Codina Sánchez

Resúmenes

A continuación se muestran los resúmenes de las contribuciones tal y como han sido enviadas por los autores:

Jueves 8 de septiembre		
Hora	Título	Autores
15:00-15:10	El significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales	Cristina Ayala-Altamirano Marta Molina González
15:10-15:15	Discusión	
<i>Palabras clave:</i> Early Algebra, Pensamiento algebraico, Pensamiento funcional, simbolismo algebraico, variables		

Esta investigación es parte de un experimento de enseñanza sobre el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria en el marco de la propuesta Early Algebra. Partimos de la consideración, compartida con otros autores, de que el pensamiento funcional es un importante punto de entrada al pensamiento algebraico. En este trabajo nos centramos en analizar los significados que estudiantes de tercer curso de primaria otorgan a las letras en la resolución de problemas en contextos funcionales. Nuestros objetivos son describir la evolución de los significados que los estudiantes asocian a las letras y las interacciones docentes que contribuyen a ampliar o cambiar las ideas sobre las letras de quienes fueron parte de la muestra.

Las letras como símbolos algebraicos tienen múltiples significados: números generalizados, cantidades que varían, incógnitas, parámetros u objetos arbitrarios en una estructura. Por tanto, es necesario dar a los estudiantes la oportunidad de participar en experiencias de aprendizaje variadas que les ayuden a generar significados amplios y ricos.

Investigaciones anteriores evidencian las dificultades que enfrentan estudiantes de secundaria al resolver situaciones problemas en las que están involucradas las letras como símbolos algebraicos y atribuyen su causa a la edad y a la etapa de desarrollo en la que se encuentran estos. Sin embargo, nuestros resultados demuestran que las causas expuestas pueden ser rebatidas y dan cuenta de los múltiples significados que los estudiantes de primaria le pueden asignar a las letras, que por ejemplo van, desde la negación de la posibilidad de utilizar letras en contextos matemáticos, su uso asociándoles valores fijos que se otorgan siguiendo alguna lógica como el orden en el alfabeto o asignados de manera aleatoria, hasta su uso como variables cuyos valores dependen de la situación problema presentada. Estos resultados coinciden con otras investigaciones que caracterizan el pensamiento algebraico de los estudiantes de primaria en contextos funcionales y complementan estos resultados previos al informar de cómo las intervenciones docentes permiten que los estudiantes puedan cuestionarse sus ideas previas, involucrarse en las tareas propuestas y otorgar múltiples significados a las letras. Esta investigación contribuye a ratificar que las dificultades que manifiestan

los estudiantes se pueden atribuir más estrechamente a la falta de experiencias que implican cantidades que varían y con el uso de la notación, más que a las limitaciones de desarrollo de los estudiantes.

Jueves 8 de septiembre		
Hora	Título	Autores
15:15-15:25	Manifestación del pensamiento funcional según niveles de generalización y a través de estímulos del profesor	Jason de Jesús Ureña Alpízar Marta Molina González Rafael Ramírez Uclés
15:25-15:30	Discusión	
Palabras clave: pensamiento funcional, relación funcional, generalización, estímulos		

Presentamos un estudio descriptivo y exploratorio sobre el pensamiento funcional de estudiantes de cuarto de educación primaria, que se enmarca en un experimento de enseñanza.

En este contexto, actualmente nuevas investigaciones se están llevando a cabo respecto a las capacidades matemáticas que los niños poseen y la forma en que las manifiestan. Específicamente en álgebra investigadores han mostrado que los estudiantes desde edades tempranas tienen la capacidad de pensar con ideas algebraicas y, en consecuencia, la introducción del álgebra no tiene que postergarse a la educación secundaria, sino que desde antes ese potencial puede ser aprovechado.

Curricularmente en diversos países, incluido España, se considera incluir actividades asociadas al pensamiento funcional desde los primeros años escolares. Se reconoce la importancia del pensamiento funcional como vehículo para establecimiento de generalizaciones y de relaciones entre cantidades que varían, la identificación de patrones y el reconocimiento de leyes que describen los datos.

La generalización es considerada parte importante de la matemática y como la raíz del álgebra, de ahí que su fomento se puede apreciar como vía de aprendizaje y de adquisición de conocimientos prácticos al estudiante. Un factor que actúa en el proceso de construcción de generalizaciones por parte de los estudiantes es la forma en que el docente interviene en ese proceso, ya que su mediación y los estímulos que efectúa influyen en los resultados que obtienen los estudiantes.

En nuestro estudio el objetivo principal es determinar los niveles de generalización que alcanzan estudiantes de primaria al resolver problemas que involucran el reconocimiento de una relación funcional considerándose los estímulos que el profesor lleva a cabo. En este estudio participan ocho estudiantes de cuarto curso de un colegio de educación primaria. En el contexto de una entrevista individual semiestructurada, se les propuso resolver un problema cuya estructura es inductiva y en el cual subyace una relación funcional.

Para el análisis de los datos establecemos categorías que distinguen niveles de generalización y tipos de estímulos del profesor investigador. Los resultados informan sobre la capacidad de los estudiantes de reconocimiento de estructuras implícitas en relaciones funcionales y de los diversos niveles de generalización que alcanzan, así como de la relación de ambos con la intervención del docente.

Jueves 8 de septiembre		
Hora	Título	Autores
15:30-15:40	Tareas para diagnosticar el pensamiento lógico cardinal en escolares de 3 a 7 años	Catalina María Fernández Escalona
15:40-15:45	<i>Discusión</i>	

Palabras clave: Número cardinal; diagnosis; pensamiento lógico matemático; Educación Infantil

Se presenta una batería de tareas para diagnosticar el pensamiento lógico del número cardinal en escolares de 3 a 7 años. Pretendemos dar a conocer unas escalas de medida que diagnostiquen a los escolares según distintas edades.

La diagnosis en escolares de 3 a 7 años se realizará según períodos de seis meses y atendiendo a una tarea tipo que conlleva el esquema lógico matemático de número cardinal. Para cada período de edad hay una tarea, en todas ellas, dado un conjunto, el escolar debe dar respuesta a la pregunta “¿cuántos hay?”, y recíprocamente, dado un número el niño/a debe determinar un conjunto cuyo cardinal sea el número dado. En los períodos de edad de 3 y 4 años se considera estrategia evolucionada el conteo. En los períodos correspondientes a los 3 años, los números que aparecen en las tareas no pasan de 5, en el primer período de 4 años no pasan de 10, en el segundo llegan hasta 20, son números correspondientes a la segunda decena. Para 5 y 6 años la estrategia más evolucionada es el recuento progresivo. En el primer período de 5 años los números no pasan de 10, en el segundo período hasta 20. Para 6 años, primero con números hasta 50 y después cualquier número hasta 100.

Para cada período de edad, la tarea correspondiente consta de una situación inicial que el niño o niña debe resolver. A través del estudio de la estrategia usada en su resolución se realiza la diagnosis. Si la estrategia es evolucionada se pasa la tarea correspondiente al siguiente período de edad para evaluar la edad real en relación al conocimiento cardinal del escolar. Si el alumno/a no es capaz de resolver esa situación inicial se hace un análisis de los errores y a través de ello se decide el período de edad anterior adecuado, presentándole la tarea correspondiente a ese período, entonces, si el niño o niña es capaz de realizar correctamente la situación inicial de la tarea correspondiente a ese período, se analiza la estrategia que ha seguido para la resolución y a través de ella se realiza la diagnosis.

Jueves 8 de septiembre		
Hora	Título	Autores
15:45-15:55	Interpretaciones de las variables de una relación funcional de alumnos de 4º de primaria	Aurora del Río Cabeza Rafael Ramírez Uclés Antonio Moreno Verdejo Marta Molina González
15:55-16:00	Discusión	
Palabras clave: Early algebra, Generalización, pensamiento algebraico, pensamiento funcional, variables		

En el marco de la propuesta de innovación curricular y línea de investigación conocida como Early Algebra (Molina, 2009), estamos desarrollando un proyecto de investigación que indaga en el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria de diferentes cursos. Entendemos el pensamiento funcional como un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y sus elementos (Cañadas y Molina, 2016).

En esta comunicación presentamos la interpretación que hacen de las letras un grupo de alumnos de 4º de primaria a la hora de resolver dos tareas que involucran una relación funcional lineal. Las letras aparecerán representando a las variables dependiente e independiente de una función lineal del tipo $y=ax+b$.

Para el análisis de las respuestas de los alumnos nos basaremos en las categorías de análisis establecidas por Molina, Ambrose y del Río (en prensa). En dicho trabajo previo, se analiza el significado que alumnos de 1º y 3º de primaria dan a las letras cuando son utilizadas para representar una cantidad indeterminada variable en una relación funcional. Los alumnos interpretan las letras como variables, como representación de números concretos y como etiquetas. En este trabajo, además de las categorías mencionadas, surgen nuevas interpretaciones de las letras, entre ellas la letra como dígito de un número.

Nuestros resultados completan estudios previos, como el anteriormente señalado u referentes a escolares de otros países, como el trabajo de Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens y Sawrey (2015) o el de Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner (2015), que permiten contrastar los significados o la comprensión que tienen los alumnos de primaria de las letras como representaciones de variables en una relación funcional.

Referencias

- Brizuela, B. M., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. & Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation/Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología*, 36(1), 138-165.
- Brizuela B. M., Blanton, M. Sawrey, K., Newman-Owens A. y Gardiner A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34-63.

- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.
- Molina, M., Ambrose, R. y del Rio, A. (en prensa). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer.

Jueves 8 de septiembre		
Hora	Título	Autores
16:00-16:10	Errores y dificultades de suma y resta con números enteros tras primera experiencia como profesor novel	Carlos Veneroni Coto Juan Antonio Prieto Sánchez
16:10-16:15	Discusión	
Palabras clave: Novel; Enteros; Secundaria; Errores; Negativos		

En este trabajo pretendemos analizar, como profesor novel del primer ciclo de ESO en un centro concertado, la dificultad de transmitir a mi alumnado la suma y resta de números enteros. Hemos evidenciado una importante diferencia entre el alumnado del 1er curso, cuando tienen un primer contacto auténtico con los números negativos, con los del 2º curso, que, aunque mantienen errores y dificultades similares, se nota una mejora en resultados a la hora de trabajar con ellos.

Cuando el alumnado opera directamente de manera abstracta, difícil de entender por tener el carácter esquemático y poco concreto, sin contextualización sin darle significado a la operación, observamos la mayoría de errores, teniendo gran dificultad en llegar a entender que existe el “menos que nada” (Cid, 2000). Sin embargo, todo o casi todo cobra sentido cuando contextualizamos las operaciones, le damos sentido a bajo el mar, ascensores y sótanos, y para mi experiencia docente, destaco sobre todo el “tengo y debo” (Becerra, Buitrago, Calderón, Gómez, Cañadas & Gómez, 2012). Para la próxima experiencia sobre números enteros experimentaré, como docente novel, la combinación de expresar operaciones que puedan carecer de sentido, típica lista de operaciones para realizar una tras otra, dándole un sentido propio, buscando ejemplos de la vida real y contextualizándolas. El no uso de la recta real, como recomiendan la mayoría de autores, ya que no dieron resultados esperados. La falta de experiencia, hace que intentemos usar todo lo que conocemos, pero sin hilo conductor, algo a tener en cuenta en próximas experiencias.

La primera prueba escrita, como docente en el centro, fue sobre números enteros. Se entiende que todo está explicado, pero cuando ves los resultados y los diferentes errores que cometen, eres consciente del poco grado de asimilación adquirido. Aunque como dato curioso, la resolución de problemas siempre es la mayor dificultad y donde peores resultados matemáticos obtienen los alumnos, puede que en este caso sea nuestro mayor

apoyo, para lograr la comprensión y asimilación de las operaciones (suma y resta) de números negativos (Bruno, 2000). El alumnado casi siempre da el resultado en positivo, siendo en la mayoría de casos el valor absoluto del número correcto, pero no el signo. Cuando corregía y les preguntaba sobre el debo y el tengo, solían dar correctamente el resultado, sin embargo, si hablábamos de temperatura, de gente que sube y baja de un autobús, de años antes y después de Cristo o subir o bajar pisos de un ascensor, el número de errores disminuía, sirviendo de apoyo para asimilar luego la regla de signos.

Es por eso que, a la hora de introducir las operaciones con números enteros, tras una primera experiencia, deberemos tener en cuenta, a priori, qué conocen nuestros alumnos, sus destrezas y dificultades en las operaciones con números naturales y como crecer a partir de ahí, cosa que no hice en la primera experiencia, di por hecho que manejaban perfectamente las operaciones con números naturales y que les sería sencillo asimilar las operaciones con números enteros. Una vez analizado los errores cometidos por el alumnado en ese primer examen, se dejará atrás la introducción del tema de manera abstracta y se hará de manera contextualizada desde el primer momento, con casos de la vida cotidiana, para luego poder hacer cualquier tipo de operación, una vez asimilado el concepto de resultados negativos en las operaciones con números enteros.

Terminaremos categorizando errores y dificultades detectadas en las pruebas escritas, así como un análisis de cómo poder evitarlas, para próximas actuaciones en el aula.

Referencias

- Becerra, O. J., Buitrago, M. R., Calderón, S. C., Gómez, R. A., Cañadas, M. C. & Gómez, P. (2012). Adición y sustracción de números enteros. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1890/>
- Bruno, A. (2000). Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. Universidad de la Laguna, 119-130.
- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, *Boletín del SI-IDM*, 10.

Jueves 8 de septiembre		
Hora	Título	Autores
16:15-16:25	Marco teórico de la tesis doctoral "Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza"	Mónica Arnal Palacián Francisco Javier Claros Mellado María Teresa Sánchez Compañía Miguel Ángel Baeza Alba
16:25-16:30	Discusión	
Palabras clave: Fenomenología. Sistemas de representación. Pensamiento Matemático Avanzado. Teoría APOS		

En este documento se presenta el marco teórico de la tesis doctoral titulada "Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza". La investigación se fundamenta en los cuatro pilares siguientes: la fenomenología (según Freudenthal (1983), los sistemas de representación (véase Janvier (1987) y Rico (2009), el pensamiento matemático avanzado (Tall (1991) y Vinner (1991)) y la teoría APOS (Dubinsky et al. (2005)).

Cuando hablamos de fenomenología lo hacemos como componente de su análisis didáctico en el sentido de Freudenthal (1983), el cual da el nombre de "fenomenología" a su método de análisis de los contenidos matemáticos, en el que parte de la contraposición entre "fenómeno" y "noúmeno". Esta reflexión filosófica entre los objetos construidos en conceptos serán los "noúmenos" y las situaciones que estos objetos matemáticos organizan serán los "fenómenos".

Los fenómenos caracterizados pueden presentarse en los diferentes sistemas de representación: verbal, gráfico, simbólico y tabular. Para Janvier (1987) y Rico (2009), todo concepto matemático requiere de una variedad de representaciones para su captación, comprensión y estructuración, necesitando el establecimiento de relaciones entre distintos sistemas de representación. Estos sistemas de representación enfatizan algunas propiedades del concepto y dificultan otras.

El límite infinito queda enmarcado dentro del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) al requerir para su aprendizaje una capacidad lógica abstracta e intervenir el proceso de abstracción, formalización, representación y definición. Todos estos elementos son aspectos del desarrollo cognitivo, propios de dicho tipo de pensamiento. Siguiendo a Tall (1991), profundizamos en el desarrollo cognitivo presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados con el cálculo infinitesimal. Además, Tall señaló varios conceptos que debían situarse por su dificultad dentro del PMA, entre ellos el límite y el infinito.

El último pilar en el que se fundamenta el marco teórico de este trabajo es la teoría APOS. En las últimas décadas, la teoría APOS, intenta establecer los requerimientos para encapsular un proceso sin fin como objeto cognitivo sobre el cual se pueden aplicar nuevas acciones. Esta teoría, según Weller et al. (2004), puede proporcionar una explicación de cómo las personas conciben el infinito. Este es el primer paso hacia el

desarrollo de estrategias pedagógicas destinadas a ayudar a los estudiantes a comprender y aplicar los tipos de transformaciones necesarias para la solución de varios problemas que involucran el concepto de límite infinito.

Referencias

- Dubinsky et al. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS analysis: Part 2. *Studies in Mathematics*, 60, 253-266
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Dordrech: Reidel Publishing Company.
- Janvier, C. (ed.) (1987) Problems of representations in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrech: Kluwer.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer. p. 65-81.
- Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonad, M, Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notice of the AMS*, 51, 741-750.

Viernes 9 de septiembre		
Hora	Título	Autores
17:30-17:40	Resolución de tareas de comparación de fracciones por estudiantes de primaria y secundaria: El fenómeno Natural Number Bias	Juan Manuel González Forte Ceneida Fernández Verdú
17:40-17:45	<i>Discusión</i>	

Palabras clave: números racionales, fracciones, natural number bias, comparación de fracciones

Las investigaciones han mostrado las dificultades que tienen los estudiantes de primaria y secundaria en la comprensión de diferentes aspectos de los números racionales, y en especial de las fracciones. Estas dificultades pueden tener diferentes causas, sin embargo, en los últimos años se está analizando con más detalles las dificultades vinculadas a una aplicación inapropiada de las propiedades de los números naturales al dominio de los números racionales, conocido como el fenómeno *natural number bias* (para ver revisión, Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015). Esta línea de investigación se apoya en la idea de que la comprensión de los números naturales puede interferir en la comprensión de los números racionales, ya que los estudiantes implícita o explícitamente asumen que las características de los números naturales se dan también en los números racionales. El conocimiento de los números naturales puede facilitar la resolución a los estudiantes cuando las tareas con números racionales son compatibles con este conocimiento, pero genera dificultades cuando los números racionales se comportan de manera diferente a los números naturales. Este fenómeno está siendo estudiado en cuatro dominios: la magnitud, las operaciones, las distintas formas de representación y la densidad.

Nuestro estudio se enmarca en esta línea de investigación y se centra en el dominio magnitud. El objetivo es examinar las dificultades que tienen alumnos españoles de educación primaria y secundaria cuando comparan fracciones, tratando de identificar si las causas de las dificultades son debidas al fenómeno *Natural Number Bias*.

Los participantes fueron 438 estudiantes de primaria y secundaria. El instrumento un cuestionario formado por cuatro tareas de comparación de fracciones en las que se tuvo en cuenta dos variables: la compatibilidad con la ordenación de los números naturales y la distancia existente entre numerador y denominador. En cada una de las tareas, los estudiantes tenían que seleccionar la fracción mayor y responder a la pregunta de por qué habían considerado que la fracción seleccionada era la mayor. Se ha realizado un análisis cuantitativo examinando la influencia de las dos variables consideradas en el diseño del cuestionario en el nivel de éxito de los estudiantes y un análisis cualitativo, examinando los razonamientos empleados.

Los resultados obtenidos muestran la persistencia de este fenómeno a lo largo de educación primaria y secundaria ya que los estudiantes tuvieron mayor nivel de éxito en las tareas de comparación que eran compatibles con las propiedades de los números naturales que en las de comparación que no eran compatibles.

Referencia

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, 37, 1-4.

Viernes 9 de septiembre		
Hora	Título	Autores
17:45-17:55	El proceso de generalización de estudiantes de 6° de Educación Primaria: dificultades, ayudas y efectos	Diana Hidalgo Moncada María C. Cañadas Santiago
17:55-18:00	Discusión	
Palabras clave: Pensamiento funcional, generalización, dificultades, ayudas, efectos.		

En los últimos años diversos investigadores han centrado su interés en estudiar el pensamiento funcional que evidencian estudiantes de Educación Primaria. Han indagado en aspectos como las relaciones funcionales, la generalización, las estrategias o representaciones de los estudiantes entre otros aspectos. Hasta ahora la mayor parte de los trabajos abordan lo que hacen los estudiantes. Consideramos que son igualmente importantes las actuaciones del docente y el resultado que producen. Warren (2006) indica que determinadas acciones de los docentes ayudan a los estudiantes a identificar la generalización y a expresarla como regla y como expresión mediante simbolismo algebraico. Carraher, Martínez y Schliemann (2008) observan que la intervención del profesor ayuda a los estudiantes a interpretar un problema en términos de relación entre variables.

Nuestro objetivo general de investigación es describir el proceso de generalización que llevan a cabo 8 estudiantes de sexto de Educación Primaria en una tarea funcional de configuraciones puntuales, considerando el papel del docente. El estudio sigue un enfoque cualitativo de naturaleza descriptiva. Dentro de la generalización, nos centramos en las dificultades de los estudiantes ante las preguntas del docente que pretenden guiarlo hacia la generalización, las ayudas que proporciona el docente ante esas dificultades, los efectos que producen esas ayudas en la generalización de los estudiantes y el tipo de generalización que logran.

La recogida de datos se realizó a través de una tarea planteada durante una entrevista individual semiestructurada.

Para el análisis de los datos definimos un sistema de categorías con base en los aspectos a indagar, centrado en: preguntas planteadas, dificultades, ayudas, efectos y generalización. El sistema de categorías se basa en el marco teórico y en los antecedentes de esta investigación (e.g., Radford, 2010; Santagata, 2005; Soller, 2001). Así distinguimos diferentes dificultades, tipos de ayudas, efectos y tipos de generalización.

Los resultados muestran que los estudiantes presentaron seis tipos de dificultades, mayormente las debidas a errores de procedimiento y cuando el estudiante no responde. En cuanto a las ayudas, detectamos nueve tipos, unas relativas a acciones a realizar por el estudiante y otras a realizar por el docente. La más frecuente fue cuando el docente propone al estudiante volver a trabajar con un caso particular. De frecuencia similar son las ayudas donde el entrevistador repite la pregunta o verbaliza un argumento dado por el estudiante. Identificamos seis efectos, siendo el más frecuente el que los estudiantes reconozcan algún error pero no logren corregirlo, seguido en frecuencia por el efecto de reconocer y corregir el error. Por otro lado los resultados revelan que los estudiantes que recibieron ayudas, generalizaron con mayor frecuencia de forma factual en términos de Radford (2010) y que las ayudas en estos casos correspondieron mayormente al grupo de acciones a realizar por el docente.

Referencias

- Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40(1), 3-22.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491-508.
- Soller, A. (2001). Supporting social interaction in an intelligent collaborative learning system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 12, 40-62.
- Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377-384). Praga, República Checa: PME.

Viernes 9 de septiembre		
Hora	Título	Autores
18:00-18:10	Marco Teórico para la tesis	Miguel Ángel Baeza Alba
	“Algoritmos y Scratch: Una forma de	Francisco Javier Claros Mellado
	trabajar el Pensamiento Matemático	María Teresa Sánchez Compañía
	Avanzado”	Mónica Arnal Palacián
18:10-18:15	Discusión	
Palabras clave: Pensamiento Matemático Avanzado, APOS, Pensamiento Algorítmico, TIC.		

El presente documento ilustra el marco teórico que se va a utilizar para el desarrollo de la tesis “Algoritmos y Scratch: Una forma de trabajar el Pensamiento Matemático Avanzado”. El marco teórico se articula en torno a cuatro ejes vertebradores: el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), la teoría APOS, el Pensamiento Algorítmico y las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

El Pensamiento Matemático Avanzado (Tall, 1985; 1991) surgió en 1985, en el seno del grupo internacional Psychology of Mathematics Education. Su objetivo era investigar los procesos implicados en la construcción de conceptos que por su naturaleza y dificultad formaban parte de la matemática superior. Algunos de los procesos más importantes involucrados en el PMA son la abstracción, la generalización, la formulación de hipótesis y el pensamiento holístico. La investigación que estamos llevando a cabo pretende desarrollar una secuencia didáctica para trabajar el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo en 3º de E.S.O. En nuestra secuencia se intentará favorecer la aparición de estos elementos del PMA anteriormente mencionados.

Por otro lado, para Dubinsky (1991; 2000) las construcciones mentales de los individuos para obtener significados a problemas y situaciones matemáticas se denominan acciones, procesos, objetos y esquemas. Estas construcciones determinan las siglas en inglés APOS. Una acción es cualquier manipulación física o mental que transforma los objetos de alguna manera. La construcción de un objeto se consigue a través de la encapsulación de un proceso. Esta encapsulación se alcanza cuando el alumno es capaz de comprender todo el proceso y de realizar transformaciones en él. Un esquema es una colección de acciones, procesos y objetos relacionados entre sí. Zazkis y Campbell (1996) utilizaron este marco teórico para la comprensión del concepto de divisibilidad en estudiantes para maestro. Nuestra puesta en práctica en el aula pretende una apropiada encapsulación del concepto de Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo de dos números naturales.

En el desarrollo de nuestra secuencia didáctica, se hará uso de la herramienta tecnológica Scratch. Es por esto que el Pensamiento Algorítmico y las TIC adquieren gran importancia. Según Joyanes (2003), el pensamiento algorítmico ayuda a los estudiantes a pasar de un problema a un programa o itinerario de su solución, esto es, a una solución como una secuencia finita y determinística de pasos. Esto implica la

capacidad de definir y enunciar con claridad un problema, descomponerlo en subproblemas más pequeños y manejables y describir la solución en un conjunto de pasos bien definidos. Debido a las características que tiene el lenguaje de programación Scratch, creemos que satisface ciertas condiciones didácticas que permiten desarrollar el Pensamiento Algorítmico en alumnos de Secundaria. Carralero (2011) señala como funcionalidad importante el hecho de manejar la programación implícita en Scratch para trabajar un contenido de primaria y secundaria. Es decir, propone no trabajar la programación directamente, sino elegir un concepto y diseñar qué elementos de la programación son necesarios para llegar a definir este concepto.

Referencias

- Carralero, N. (2011). Scratch. Programación fácil para primaria y secundaria. *Revista digital sociedad de la Información*, 29, 1-10.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), 47-70.
- Joyanes, L. (2003). *Fundamentos de Programación: Algoritmos y Estructuras de Datos*. Tercera Edición, McGraw-Hill Interamericana.
- Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 49-53.
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Springer Netherlands.
- Zazkis, R., Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), 540-563.

Viernes 9 de septiembre		
Hora	Título	Autores
18:15-18:25	Acciones que ayudan a alumnos de segundo de Educación Primaria cuando incurren en errores en una tarea de pensamiento funcional	1º Rodolfo Morales Merino 2º María C. Cañadas Santiago
18:25-18:30	Discusión	
Palabras clave: ayudas, educación primaria, pensamiento funcional, relaciones funcionales, generalización.		

La investigación previa sobre pensamiento funcional se ha centrado principalmente en elementos relativos a lo que hacen los estudiantes de Educación Primaria al resolver problemas que involucran funciones tales como: estrategias de resolución, relaciones funcionales (correspondencia y covariación), sistemas de representación o generalización (p. ej., Blanton y Kaput, 2004; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). En cambio, es escasa la literatura sobre las acciones de los docentes para ayudar a los estudiantes cuando manifiestan errores y dificultades. Warren (2006) presenta una

aproximación de acciones docentes que ayudan a los estudiantes a centrarse en la covariación y la generalización de estudiantes de 10 años. Santagata (2005) destaca la importancia del rol del docente cuando los alumnos incurren en errores.

Indagamos en la línea de investigación centrada en las acciones que proponen los docentes para ayudar a sus estudiantes cuando resuelven problemas en el contexto funcional; específicamente, en las acciones que ayudan a los estudiantes a identificar relaciones funcionales (covariación y correspondencia) y su generalización tras incurrir en errores o dificultades. Asumimos los errores como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en quien lo manifiesta (Socas, 1997), y como una oportunidad para el aprendizaje. El docente puede ayudar a que el estudiante complete ese esquema inadecuado o le ayude a que comprenda por sí mismo aquello que no está bien (Lupiañez y Rico, 2015).

En este trabajo nos centramos en estudiantes de los primeros cursos (6-7 años), con el siguiente objetivo: describir las acciones que el docente realiza para ayudar al estudiante cuando este incurre en un error en la tarea de pensamiento funcional.

Un entrevistador ejerció de docente durante unas semanas en clase realizó entrevistas individuales a ocho estudiantes de 6-7 años de un colegio de Granada. Las entrevistas se grabaron. Realizamos un análisis mixto de los datos que combina lo cualitativo y cuantitativo con base en nuestro objetivo.

Durante la entrevista el entrevistador-docente propuso a los estudiantes un problema que involucra la función $y=x+5$ dentro de un contexto familiar para el estudiante y con material manipulativo.

Presentamos un análisis preliminar de los datos para dar respuesta al objetivo de investigación.

Se espera que los resultados contribuyan tanto al ámbito investigador como docente en el contexto funcional que se desarrolla.

Referencias

- Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Cañadas, M., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103.
- Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid: Pirámide.
- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491-508.



Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377-384). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague.

Viernes 9 de septiembre		
Hora	Título	Autores
18:30-18:45	Presentación libro ACTAS	Antonio Codina Sánchez
18:45-19:00	Información del grupo PNA	Antonio Codina Sánchez