

LA INVESTIGACIÓN SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA DESDE LA TEORÍA DE LA COMOGNICIÓN

Research on the teaching and learning of geometry from the theory of commognition

Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

Resumen

Este trabajo muestra el potencial de la teoría de la comognición como marco teórico para la investigación en educación matemática ya que tiene un amplio ámbito de aplicación. Se describen inicialmente las ideas teóricas básicas de esta teoría. Después se muestra un ejemplo de cómo se hacen operativas dichas ideas teóricas en una investigación sobre geometría y se muestran las relaciones de esta teoría con los niveles de razonamiento de van Hiele. Además, se muestran algunas investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría con la teoría de la comognición como marco teórico. Finalmente se hacen algunas propuestas que miran hacia adelante.

Palabras clave: *conflicto comognitivo, discurso, geometría, prácticas matemáticas, teoría de la comognición.*

Abstract

This work highlights the potential of commognition theory as a theoretical framework for research in mathematics education due to its wide scope of application. The basic theoretical concepts of this theory are initially outlined. Subsequently, an example illustrating how these theoretical concepts are put into practice in geometry research is provided, along with the connections of this theory to van Hiele's levels of reasoning. Furthermore, various studies on teaching and learning geometry using commognition theory as a theoretical framework are presented. Finally, some prospective suggestions are put forward.

Keywords: *commognitive conflict, discourse, geometry, mathematical practices, theory of commognition.*

INTRODUCCIÓN

La relevancia de la teoría de la comognición (también denominada aproximación comognitiva) en la investigación en educación matemática se pone de manifiesto en los números especiales de algunas revistas, tanto de educación matemática (por ejemplo, The Journal Mathematical Behavior publicó en 2022, con artículos desde 2020, un número especial “Advances in Commognitive Research”) como de educación (The International Journal of Educational Research publicó en 2012 un número especial “Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research”) que utilizan esta teoría como referente teórico.

La teoría de la comognición considera el aprendizaje como llegar a ser participante en prácticas propias de una determinada comunidad, el estudiante tiene una participación de iniciación (newcomer) y se pretende que alcance una participación similar a la de un experto (full participant) (Sfard, 1998).

Sfard (2008) caracteriza los discursos como diferentes tipos de comunicación caracterizados por sus objetos, tipos de mediadores y las reglas que siguen los participantes. Esta caracterización incluye muchos tipos de discursos, sin embargo, Sfard (2007, 2008) se centra en el discurso matemático, que

tiene sus propios objetos matemáticos e identifica las características propias de este discurso. En el discurso matemático un objeto matemático es un par <significante, árbol de realizaciones>, el *árbol de realizaciones* (tree of realizations) es el conjunto organizado de sus realizaciones, es decir, de objetos perceptualmente accesibles. Un ejemplo de objeto matemático es el significante función, junto con las realizaciones, expresión algebraica, gráfica, tabla de valores, etc. (Tabach y Nachlieli, 2015).

Cooper (2014) propone una interpretación del modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) (Ball et al., 2008) desde la teoría de la comognición e introduce el discurso matemático para la enseñanza (MDT por sus siglas en inglés) diferenciando el discurso matemático y el discurso pedagógico matemático, que requiere adaptar las características del discurso matemático al discurso pedagógico. Diferentes investigadores (Gallego-Sánchez et al., 2022; Heyd-Metzuyanim y Shabtay, 2019; Toscano et al., 2019; Viirman, 2015) han utilizado la teoría de la comognición para caracterizar el discurso pedagógico de estudiantes para maestro, maestros y profesores de diferentes niveles educativos. En concreto, Gallego-Sánchez et al. (2022) identificaron rutinas pedagógicas de profesores de Bachillerato, Heyd-Metzuyanim y Shabtay (2019) analizaron los tipos de discursos pedagógicos de maestros de escuela elemental, Toscano et al. (2019) caracterizaron el discurso didáctico-matemático de estudiantes para maestro de Educación Primaria y Viirman (2015) clasificó diferentes rutinas en el discurso pedagógico de profesores universitarios.

La teoría de la comognición ha sido ampliamente utilizada para el estudio de prácticas matemáticas (las maneras en la que los matemáticos producen conocimiento matemático, es decir, producen “hechos matemáticos”), por ejemplo, para modelar (Shahbar y Tabach 2023; Viirman y Nardi 2019), para definir (Fernández-León et al. 2021; Tabach y Nachlieli, 2015) y para probar (Kontorovich y Liu, 2023; Shinno y Fujita, 2022). Además, esta teoría se puede articular con otros marcos teóricos, tanto socioculturales (Morgan y Sfard, 2016) como cognitivos (Wang y Kinzel, 2014) proporcionando un análisis más profundo de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por tanto, podemos concluir que la teoría de la comognición es una teoría con un amplio ámbito de aplicación ya que permite investigar sobre discurso matemático (estudiantes y estudiantes para profesor) y sobre el discurso pedagógico (profesores y estudiantes para profesor) en diferentes niveles educativos y sobre las prácticas matemáticas.

A continuación, se describen las ideas teóricas básicas de la teoría de la comognición, mostrando cómo han evolucionado algunas de ellas. Seguidamente se revisan investigaciones desarrolladas utilizando la teoría de la comognición con contenido matemático en contexto geométrico que muestran cómo se hacen operativas las ideas teóricas y algunos resultados obtenidos. Finalmente, se hacen varias propuestas de futuro que plantean algunos desafíos a la teoría de la comognición. y se señalan algunas limitaciones.

TEORÍA DE LA COMOGNICIÓN

Comognición es un término acuñado por Sfard (2008) a partir de la combinación de los términos comunicación y cognición con la idea de que el pensamiento es visto como la versión individualizada de la comunicación interpersonal, es decir, el pensamiento es la comunicación con uno mismo.

La teoría de la comognición (para abreviar, comognición,) con su visión participacionista considera el aprendizaje como el proceso de individualización de lo colectivo, es decir, como llegar a ser participante en el discurso de una comunidad, y específicamente en matemáticas llegar a participar en el discurso matemático (cada vez más avanzado). Además, se considera un proceso complementario del anterior, la colectivización de lo individual. Lo relevante en esta teoría son los cambios, qué cambia y los cambios en las formas de actuar de las personas (las maneras de “hacer” modeladas, prácticas), tanto individualmente como colectivamente (Sfard, 2007).

Características del discurso matemático

En la comognición las matemáticas son un tipo de discurso y los discursos matemáticos se pueden caracterizar por el uso de palabras y mediadores visuales, por las narrativas y por las rutinas. A continuación, se describen las cuatro características del discurso (Sfard 2008).

- Uso de palabras: se consideran las palabras matemáticas y no matemáticas usadas en el discurso. Por ejemplo, las palabras matemáticas cuadrado, demostración o la palabra derecho como palabra coloquial que se utiliza en lugar de recto para un sólido geométrico (por ejemplo, un prisma).

- Mediadores visuales: son los medios, objetos visibles, con los que los participantes identifican los objetos matemáticos de los que están hablando, como los gráficos o símbolos. Por ejemplo, los siguientes símbolos de una función $f(x)=3x+2$, el dibujo de un cuadrado, el gráfico de una función o el dibujo de un grafo en matemática discreta.

- Narrativas: son expresiones, escritas o habladas, que describen objetos, relaciones entre objetos o actividades con objetos. Estas narrativas se denominan narrativas asumidas (endorsed narratives) cuando son aceptadas, son verdaderas para una determinada comunidad. Cada comunidad en su discurso tiene sus propias reglas que permiten asumir o rechazar las narrativas. Por ejemplo, una comunidad puede asumir la narrativa “el triángulo isósceles es un triángulo con dos lados iguales” y otra comunidad rechazarla porque asumen “el triángulo isósceles es un triángulo con dos lados iguales y el otro desigual”. En la comunidad de los matemáticos, las definiciones y teoremas son ejemplos de narrativas asumidas.

Sfard (2007) diferencia dos tipos de narrativas, narrativas a nivel objeto, es decir, expresiones sobre objetos, por ejemplo, “un cuadrado es un polígono de cuatro lados iguales” y narrativas a nivel meta que son relatos sobre el discurso mismo, por ejemplo, “para definir un objeto matemático debemos dar un nombre y las propiedades matemáticas”.

- Rutinas: son los patrones repetitivos del discurso. Pueden identificarse observando el uso de las palabras y mediadores visuales y cómo se construyen o justifican las narrativas en un discurso (Sfard, 2007, 2008). Ejemplos de rutinas son las de definir o probar en el discurso de los matemáticos. Otro ejemplo de rutina, más concreto, puede ser la manera de demostrar que la suma de dos números naturales pares es otro número natural par, que puede ser diferente en función de la comunidad de participantes. Es decir, aunque la narrativa que se quiere asumir sea la misma, la rutina que la justifica como verdadera, convirtiéndola en una narrativa asumida, puede ser diferente en distintas comunidades (por ejemplo, estudiantes de secundaria, estudiantes para maestro o matemáticos).

La comunicación entre personas se ha definido como una actividad regulada por patrones repetitivos, reglas. Sfard (2008) distingue dos tipos de reglas: reglas a nivel objeto, relativas al comportamiento regular de los objetos y reglas meta-discursivas (también llamadas reglas a nivel meta o meta-reglas) que son formas de actuar en el discurso de los participantes, menos “visibles” que las primeras y que se identifican cuando se observa la actividad de formular y justificar las reglas a nivel de objeto. Además, estas meta-reglas evolucionan con el tiempo, a diferencia de las reglas a nivel objeto que son más estables (Sfard, 2008). Por ejemplo, la regla “la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° ” es una regla a nivel objeto y la regla “para demostrar regla anterior, es conveniente dividir el cuadrilátero en dos triángulos a lo largo de una de sus diagonales” es una meta regla (Martín-Molina et al., 2023).

Para Sfard (2008) una rutina puede conceptualizarse también como un conjunto de meta-reglas que describe una acción discursiva repetida. Se basa en la regularidad de las acciones de los participantes en el discurso, que pueden ser inferidas por los investigadores. En Sfard (2008) se diferencian dos tipos de meta-reglas en una rutina que caracterizan el cómo (how) y el cuándo (when) de la rutina. El cómo hace referencia a las meta-reglas de la rutina que determinan el procedimiento a aplicar, el cuándo se refiere a las meta-reglas que determina las condiciones en las que aplicar el procedimiento

de actuación. Por ejemplo, la rutina que se puede implementar cuando se pide calcular la suma de una serie numérica geométrica de términos positivos $\sum a_n$, consiste en comprobar que es una serie geométrica y que cumple la condición necesaria y suficiente de convergencia para estas series, lo que constituye el cuándo de la rutina y después en aplicar la fórmula o deducir la suma, que es el cómo de la rutina.

Indica Sfard (2008) que hay tres tipos de rutinas actos (deeds), rituales (rituals) y exploraciones (explorations). Las dos últimas son las que han recibido más atención. Una rutina de tipo ritual es una secuencia de acciones cuyo objetivo es crear y mantener un vínculo con otras personas, se implementa la rutina para otros y no hay libertad en el desarrollo de la acción. Los rituales están orientados al proceso. Una exploración es una rutina que cuando es implementada se produce una narrativa asumida o es justificada, está más orientada al objeto. Estas últimas son las propiamente matemáticas, pero los rituales suelen ser el inicio del proceso de aprendizaje. Las rutinas de exploración pueden ser de construcción, justificación o recordar.

Sfard (2008) señala que las rutinas de justificación son las que tienen más amplia variabilidad en los discursos matemáticos por los diferentes usos que se puede dar a la palabra “convencerse o convencer” de la verdad de una narrativa con el objetivo de asumirla como verdadera.

Esta idea teórica de rutina ha sido ampliada y reformulada en el trabajo de Lavie et al. (2019), cuestión sobre la que volveremos más adelante y que tiene algunas implicaciones de naturaleza metodológica.

Aprender matemáticas y conflictos comognitivos

En la comognición aprender matemáticas significa cambiar el discurso, un cambio hacia un discurso cada vez más sofisticado, es decir, llegar a ser participante en el discurso matemático (parecido al de los matemáticos profesionales). Este cambio puede identificarse por cambios en alguna(s) característica(s) del discurso. Pueden diferenciarse dos tipos de aprendizaje (Sfard, 2007, 2008) según la naturaleza de los cambios del discurso, a nivel objeto y a nivel meta, caracterizados a continuación.

El aprendizaje a nivel objeto se caracteriza por una ampliación del propio discurso, es decir, ampliación del vocabulario, mediadores visuales, nuevas rutinas y la producción de nuevas narrativas asumidas sobre los objetos matemáticos. En este aprendizaje se llega a conocer mejor los objetos matemáticos existentes (Tabach y Nachlieli, 2016). Por ejemplo, sustituir la expresión $x+x+y+y$ por $2x+2y$ se considera aprendizaje a nivel objeto (Tabach y Nachlieli, 2015). Para Sfard (2020) este aprendizaje solamente exige deducir nuevas narrativas a partir de las ya asumidas. El aprendizaje a nivel meta está caracterizado por implicar cambios en la meta-reglas del discurso. Este cambio en el discurso conlleva resolver tareas ya conocidas de una forma diferente. Por ejemplo, para demostrar un teorema, pasar de demostrarlo haciendo algunos casos particulares a una demostración matemática formal-deductiva es un aprendizaje a nivel meta.

Una fuente de aprendizaje matemático en esta perspectiva son los conflictos comognitivos. Para Sfard (2007) un conflicto comognitivo surge cuando los interlocutores mantienen narrativas aparentemente contradictorias que proceden de diferentes discursos, discursos en los que el mismo significante (signifier) tiene distintos usos, o cuando se utilizan distintas reglas para justificar las narrativas. Esos discursos se denominan inconmensurables. Un ejemplo de conflicto comognitivo, este relativo al uso de palabras, es cuando ante la tarea de clasificar una figura “cuadrado” un estudiante puede usar una definición del significante rectángulo que excluya al cuadrado y otro puede usar el mismo significante, pero incluyendo al cuadrado como un caso particular de rectángulo. Otro ejemplo de conflicto comognitivo, ahora relativo al uso de diferentes reglas para justificar las narrativas, podemos encontrarlo cuando para asumir una afirmación matemática, por ejemplo, “la suma de dos números pares es otro número par” un estudiante usa la regla “usar un ejemplo particular” y otro estudiante usa la regla “usar un argumento general”.

Avanzando en la caracterización teórica: rutinas y conflictos comognitivos

Las nociones de rutina y la de conflicto comognitivo han tenido una evolución importante en la comognición.

Las rutinas han jugado un papel clave en esta teoría desde el principio ya que son los patrones repetitivos de la actividad discursiva, son esenciales en la caracterización del discurso por su papel de producción y justificación de narrativas. Lavie et al. (2019) señalan que la repetición es un aspecto esencial del aprendizaje y por este motivo el estudio las rutinas puede pasar a ser la unidad básica para el análisis del aprendizaje porque el aprendizaje puede considerarse como la rutinización de nuestras acciones. Según Lavie et al. (2019) hay dos tipos de rutinas discursivas, rituales y exploraciones. Las rutinas rituales están orientadas al proceso de obtener la solución y como se ha indicado marcan el inicio en un nuevo discurso. Las rutinas exploratorias están orientadas hacia el producto que se obtiene en ellas, es decir, cómo se construyen y justifican narrativas.

Cuando se caracteriza el aprendizaje como un proceso de rutinización de las acciones, es decir, cómo emergen y evolucionan las rutinas, el proceso de cambio de rutinas personales de tipo ritual a rutinas exploratorias pasa a ser el foco y ese proceso de cambio se denomina *proceso de desritualización* (process of de-ritualization). Este proceso de cambio es el objetivo que se pretende conseguir en la escuela, pero es lento y conlleva estados intermedios desde un extremo (rituales) al otro (exploraciones) (Lavie et al., 2019). Para identificar estos cambios se han distinguido algunas propiedades de las rutinas que permiten inferir los cambios y por tanto se convierten en indicios de aprendizaje. Estas características, traducidas por Reymundo et al. (2023), son: “flexibilidad, vinculación, aplicabilidad, justificación, autonomía de la persona que realiza la tarea y cosificación y alienación del discurso” (p. 979).

Para operativizar la idea de rutina, estas autoras introducen la idea *situación problemática* (task situation) como cualquier situación en la que una persona ve necesario actuar. Para abordar la nueva situación el aprendiz busca situaciones pasadas que son similares a la planteada (precedentes). Una rutina es un par $\langle \text{tarea (task)}, \text{procedimiento (procedure)} \rangle$ donde la tarea es la interpretación que hace el estudiante de la situación problemática y el procedimiento son las acciones que realiza el estudiante para responder a la tarea. Un ejemplo de procedimiento puede venir dado por un algoritmo, pero no necesariamente tiene que ser así. Así vistas, las rutinas son personales (estudiante) y cambiantes, evolucionan, con el tiempo, pudiendo ser inferidas por un observador externo, que puede ser un investigador.

En relación con los conflictos comognitivos hay que destacar dos aportaciones, la de Knox y Kontorovich (2023) en el discurso matemático y la de Nachlieli y Heyd-Metzuyanim (2022) en el discurso pedagógico. Knox y Kontorovich (2023) cuando realizaron una investigación sobre los números naturales pares e impares y sus propiedades sobre la suma de dos de ellos (por ejemplo, suma de dos números pares es par, etc.) con estudiantes de Educación Primaria (8-9 años) ampliaron la noción de conflicto comognitivo para incluir *choques comunicativos* (communicational clashes) y *brechas discursivas* (discursive gaps). En los choques comunicativos los interlocutores son conscientes del desacuerdo, aunque pueden no ser conscientes de cómo o por qué están en desacuerdo y en las brechas discursivas se aprecian diferencias en las características discursivas, palabras (y sus usos), mediadores, etc. Nachlieli y Heyd-Metzuyanim (2022) diseñaron una actividad de desarrollo profesional de profesores en la que el aprendizaje era el proceso de cambio en el discurso pedagógico, del discurso pedagógico ritualizado a un discurso pedagógico exploratorio. Propusieron estudiar dicho proceso mediante la identificación de conflictos comognitivos, entendidos como la presencia de narrativas no alineadas (misalignment). Estas autoras caracterizaron *cuatro niveles de explicitación de los conflictos*: conflicto comognitivo inaccesible, conflicto comognitivo explícito no reflexionado, conflicto comognitivo explícito y conflicto comognitivo reflexionado.

En el siguiente apartado se revisan investigaciones desarrolladas utilizando este marco con contenido matemático geométrico que muestran cómo se hacen operativas las ideas teóricas y algunos resultados obtenidos.

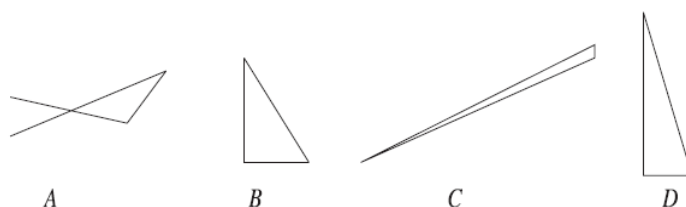
TEORÍA DE LA COMOGNICIÓN EN LA INVESTIGACION SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN GEOMETRÍA

En este apartado mostraremos algunas investigaciones realizadas en contextos geométricos utilizando la comognición. Nos centraremos en el discurso matemático. En la primera investigación sobre geometría que se muestra, Sfard (2007, 2008) da un ejemplo de cómo se operativizan las ideas teóricas de la comognición. Después se muestran otras investigaciones, que no pretende ser una revisión exhaustiva, de diferentes autores y algunos de los resultados obtenidos.

Investigación sobre aprendizaje de figuras planas operativizando las ideas teóricas

Sfard (2007, 2008) ejemplifica la operatividad de su propuesta teórica con varios ejemplos, en particular, uno de ellos es sobre figuras planas, utilizó una tarea sobre identificación de triángulos en una lámina con varias figuras (la figura 1 es una parte de la lámina, que contenía rectángulos también). Planteó a dos estudiantes (6 años) la cuestión ¿cuál de estas figuras es un triángulo? Y para ello pidió que marcaran los triángulos de la lámina.

Figura 1. Parte de lámina con triángulos (Sfard, 2007, p. 596)



Después de que dos estudiantes (6 años) señalaran los triángulos, la maestra preguntó sobre las figuras A, B, C y D, y la discusión versó esencialmente sobre si C es o no un triángulo. Una de las estudiantes decía que no lo era por su aspecto “Este no es un triángulo [señalando C]”. Añadió que “el triángulo es ancho y éste es delgado”, la otra estudiante sí lo había señalado inicialmente y luego mostró dudas sobre si era o no un triángulo.

El análisis desde la comognición permitió a Sfard (2007) señalar que cuando las estudiantes resolvieron la tarea, el acto de identificar (rutina para identificar figuras) se descompone en dos actos, reconocer la figura y nombrarla y que las estudiantes consideraron los dos actos como uno solo, identificando las figuras de manera intuitiva.

En la entrevista la maestra intenta que el procedimiento de identificación sea discursivamente explícito, primero se reconozca la figura y después se razone discursivamente el nombre que se asigne a la misma (triángulos en este caso). Esta brecha discursiva entre la maestra y las estudiantes es una manifestación de la presencia de dos discursos geométricos distintos y una oportunidad para el aprendizaje generada por el conflicto comognitivo subyacente, que se pone de manifiesto en los intentos de maestra de hacer que las estudiantes asuman su discurso.

Finalmente, si en los procedimientos discursivos para identificar figuras se ordenan los pasos siguiendo la relación de inclusión, puede llegarse a sentar las bases para las clasificaciones jerárquicas de cuadriláteros que posibilitan que una figura pueda ser a la vez un rectángulo y un cuadrado.

Sfard (2007, 2008) reflexiona sobre la discusión anterior asignándoles a las estudiantes un determinado nivel de razonamiento de van Hiele. Además, indicó que los diferentes niveles de van Hiele pueden “interpretarse” como una jerarquía de discursos geométricos inconmensurables entre sí, que difieren en el uso de palabras y mediadores, rutinas y en las narrativas. Abre Sfard (2007) la puerta a la “compatibilidad” entre ambos marcos teóricos y los beneficios para la investigación en

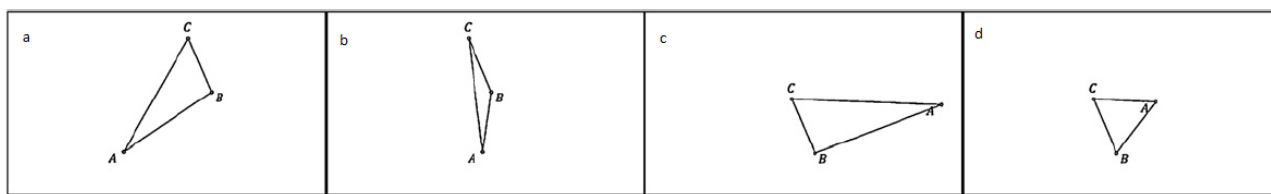
educación matemática de la combinación de ambos marcos teóricos. El análisis comognitivo del discurso permite, según Sfard (2007), obtener información sobre la transición entre niveles de razonamiento de van Hiele.

Investigaciones sobre Geometría 2D

Distintos investigadores han abordado la investigación sobre enseñanza y aprendizaje en Geometría 2D (Ben-Dor y Heyd-Metzuyanim 2021; Escudero et al., 2014; Sánchez y García, 2014; Sinclair y Moss, 2012; Wang y Kinzel, 2014).

Sinclair y Moss (2012) investigaron cómo estudiantes de Educación Infantil (4-5 años) identificaban y clasificaban figuras planas (triángulos) en un entorno tecnológico (Sketchpad). Estas investigadoras asumen que las transformaciones de una figura por arrastre en geometría dinámica facilitan el ver cosas distintas como iguales (samimg). Hacen una interpretación de los niveles de van Hiele en términos de la comognición, considerando los niveles de razonamiento como niveles de discurso. Estas autoras estudiaron la rutina de identificación y concluyeron que para los dos primeros niveles de discurso (respectivamente, niveles 1 y 2 de van Hiele) era, esencialmente, una rutina “visual” y que cada objeto solo puede tener un nombre. En el segundo nivel de van Hiele el campo de las transformaciones que permiten llamar de la misma manera a dos cosas distintas son más amplias y se usa vocabulario geométrico (ver figura 2). Las palabras, como triángulo, se emplean ya como nombres de familias mutuamente excluyentes. Es en el tercer nivel de discurso geométrico en el que la identificación de figuras ya no se basa en las transformaciones únicamente, sino que la rutina de identificación incluye acciones discursivas utilizando la definición y las características de esta nos permite asignar un nombre a cada figura, por ejemplo, un triángulo es un polígono con tres lados conlleva el procedimiento de contar los lados del polígono. En este nivel se asume que una figura puede tener dos nombres (por ejemplo, cuadrado y rectángulo) ya que la identificación es, esencialmente, discursiva a través de las propiedades explicitadas en la definición (que son necesarias y suficientes). Desde la comognición, los discursos matemáticos descriptivos de los niveles 1 y 2 se subsumen en el discurso matemático que se tiene en el nivel 3 de van Hiele.

Figura 2. Arrastre de un triángulo escaleno en geometría dinámica. En a) triángulo inicial ABC, b) arrastre del punto A, c) arrastre del punto A para que parezca ABC rectángulo y d) arrastre del punto A para que ABC parezca equilátero (Sinclair y Moss, 2012, p. 33)



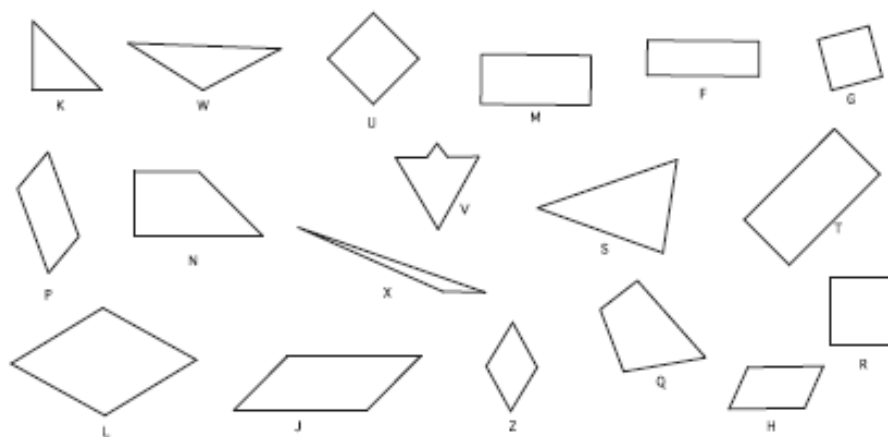
Señalan Sinclair y Moss (2012) que la transición entre los niveles 2 y 3 no es fácil de conseguir y requiere tiempo, y proponen el uso de un software de geometría dinámica (en adelante, SGD) para facilitar esta transición. Los SGD utilizan construcciones geométricas que se pueden manipular mediante arrastre de algunos elementos y se pueden observar las variaciones de la construcción y las características matemáticas que permanecen invariantes mediante el arrastre, tanto las utilizadas en la construcción de la figura como las características matemáticas que se deducen de ellas. Por ejemplo, si se construye una figura con el SGD con una recta r perpendicular a s y otra recta t perpendicular a r , entonces arrastrando cualquiera de los objetos básicos de la figura la característica de perpendicularidad de las rectas permanece, pero además se obtiene el invariante de que las rectas s y t son paralelas.

Para Sinclair y Moss (2012) la invarianza de algunas características de la figura construida con el SGD constituye un elemento facilitador del cambio, primeramente, ampliando el rango de transformaciones de los objetos (triángulo con arrastre de algún vértice) y facilitando la transición al

nivel 2 de van Hiele y posteriormente a la rutina de identificación discursiva que para el triángulo puede ser “llamamos triángulo a una figura de tipo polígono y con tres lados”. Esta rutina discursiva es indicador del nivel 3 de van Hiele. Sin embargo, en algunas situaciones puede ser necesario la colaboración de un experto (el maestro) que facilite el salto discursivo que describe la transición entre niveles de razonamiento de van Hiele. Los resultados del trabajo muestran los cambios entre discursos y que es posible que algún participante se iniciara en el nivel 3 de van Hiele, respecto al concepto de triángulo.

Wang y Kinzel, (2014) combinaron en su investigación la comognición y los niveles de van Hiele. Estudiaron algunas características discursivas, concretamente el uso de palabras y las rutinas de justificación, de estudiantes para maestro de Educación Primaria y Secundaria que estaban en el mismo nivel de van Hiele, nivel 3, en un contexto de cuadriláteros (ver figura 3) y paralelogramos. El uso de palabras permitía obtener información sobre los objetos matemáticos y las rutinas de justificación permitieron informar sobre cómo se usan las prácticas matemáticas (Wang, 2015). Esta manera de articular la perspectiva comognitiva y los niveles de van Hiele les permitió establecer similitudes y diferencias y por tanto dar detalles de los niveles de van Hiele. Concluyeron que, aunque algunos participantes estaban en el mismo nivel de van Hiele, sus discursos geométricos eran diferentes. Estos autores indican que los diferentes discursos dentro de un mismo nivel puede ser una manifestación de los distintos grados de adquisición de los niveles de van Hiele (Gutiérrez et al., 1991). González-Regaña et al. (2021) usando la comognición obtuvieron un resultado similar cuando estudiaban la práctica matemática de definir en un contexto de sólidos ya que identificaron distintas meta reglas en estudiantes para maestros de Educación Primaria que estaban en el nivel 2 de van Hiele. Esta complementariedad entre la comognición y los niveles de van Hiele, ya asumida por Sfard (2007, 2008), nos permite aceptar resultados obtenidos a partir de perspectivas diferentes (Cham et al, 2022) proporcionando una visión de más alcance y profundidad de los fenómenos educativos bajo estudio.

Figura 3. Lámina de cuadriláteros (Wang y Kinzel, 2014, p. 292)



Ben-Dor y Heyd-Metzuyanin (2021) investigaron, en un contexto de geometría plana la transición de pares de estudiantes de Educación Secundaria desde meta-reglas conocidas a otras nuevas. Concretamente, estos autores examinaron los cambios entre las rutinas configurales y las rutinas deductivas utilizadas por alumnos (14-15 años) que ya habían estudiado justificaciones deductivas. Sus resultados muestran que el discurso deductivo no reemplaza el discurso configural, sino que lo que se produce es que ambos terminan formando un único discurso que subsume los dos discursos citados, y que los estudiantes fluctúan entre ambos discursos. La propuesta de indagar cambios de meta reglas puede dar lugar al estudio de transiciones de forma general, siendo esta investigación un ejemplo. Si se consideran los niveles de van Hiele, podemos considerar que la transición entre niveles de van Hiele se puede caracterizar mediante la comognición.

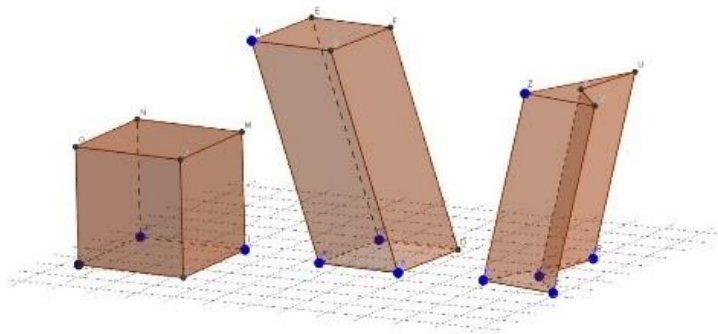
El estudio de algunos paralelogramos (cuadrado, rectángulo y rombo) fue el contexto en el que diferentes investigadores (Escudero et al., 2014; Sánchez y García, 2014) caracterizaron el aprendizaje de la práctica matemática de definir de grupos de estudiantes de enseñanza no obligatoria. Por un lado, Escudero et al. (2014), con estudiantes de Bachillerato y estudiantes para maestro de Educación Primaria como participantes, caracterizaron los diferentes tipos de cambios en el discurso matemático, el aprendizaje, a través de las características discursivas, especialmente, narrativas asumidas y las rutinas. Estos investigadores identificaron las rutinas que posibilitaban los cambios en las narrativas asumidas por los grupos de estudiantes. Por ejemplo, identificaron que para que se cambie de construir definiciones con un listado de características matemáticas a definiciones con un listado mínimo de características matemáticas puede requerir una rutina que identifique propiedades implicativas ($p \rightarrow q$) entre las características de los objetos. El alcance de la investigación permitió identificar desde grupos que definían etiquetando los paralelogramos hasta grupos que construyeron definiciones minimales o que asumían la existencia de definiciones equivalentes para un mismo objeto matemático. Esta investigación pone de manifiesto que en el proceso de aprendizaje de la práctica de definir hay dos objetos de estudio, el primero los paralelogramos y el segundo sus definiciones.

Por otro lado, Sánchez y García (2014) se centraron en las definiciones como productos de la práctica matemática de definir. Los participantes fueron estudiantes para maestro (que habían completado, al menos, un curso de matemáticas). Consideran estas autoras que en el discurso matemático coloquial de los estudiantes coexisten dos discursos, el discurso que considera las matemáticas como materia escolar (normas sociomatemáticas) y el discurso matemático (normas matemáticas). A partir de esta premisa, identificaron cinco conflictos comognitivos a partir de las diferencias entre normas sociomatemáticas y normas matemáticas que están en dos discursos presentes. Por ejemplo, uno de los conflictos comognitivos identificados fue entre la norma matemática que establece que una definición debe ser minimal (condiciones necesarias y suficientes) y la norma sociomatemática que señala que cuando resuelves una tarea matemática, cuanto más escribas mejor lo haces.

Investigaciones sobre Geometría 3D

Algunas investigaciones con la comognición como marco teórico han sido desarrolladas en geometría 3D. El estudio de la práctica matemática de definir ha sido foco de varias investigaciones (Fernández-León et al., 2021; González-Regaña et al. 2021; Ropero Quintero y Zubietta Badillo, 2023) generalmente en un contexto de poliedros o prismas. Concretamente, Fernández-León et al. (2021) y González-Regaña et al (2021) han estudiado el discurso de estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando responden cuestiones sobre construir y seleccionar definiciones de prismas (ver figura 4). Caracterizaron las rutinas para construir definiciones (Fernández-León et al., 2021) e identificaron conflictos comognitivos (González-Regaña et al., 2021). Entre sus resultados se puede destacar, entre otros, que incluyen información cuantitativa (número de caras, aristas y vértices) en las definiciones, las definiciones son de naturaleza estructural (definen mediante propiedades matemáticas) y los participantes mostraron dificultades para dar otra definición de un cuerpo geométrico. Además, en este mismo contexto geométrico, Martín-Molina et al. (2019) compararon el discurso matemático de los estudiantes para maestro con el esperado por sus formadores, sus resultados muestran que a la hora de describir, definir y seleccionar la mejor definición de algunos sólidos se identifican diferencias entre el discurso matemático de los estudiantes y lo que sus formadores esperaban de ellos, lo que puso de manifiesto el aprendizaje pretendido.

Figura 4. Cuerpos geométricos (Gavilán-Izquierdo et al., 2019, p. 142)



También Ropero Quintero y Zubieta Badillo (2023) investigaron sobre la práctica de definir poliedros de estudiantes de Educación Secundaria (13-15 años) y analizaron el discurso matemático de una pareja de estudiantes. Identificaron el uso de palabras coloquiales y de palabras ambiguas como lado para referirse a las aristas de los sólidos. Este aspecto de usar palabras o recurrir a geometría 2D cuando los estudiantes tienen dificultades en geometría 3D, es una característica del discurso sobre sólidos identificada por otros investigadores (González-Regaña, 2021). Además, Ropero Quintero y Zubieta Badillo, (2023) concluyen que la práctica de definir consiste, esencialmente, en describir propiedades, indicando que eso llevó a “caracterizar las narrativas que identificamos en el discurso de los estudiantes como narrativas meramente descriptivas” ((Ropero Quintero y Zubieta Badillo, 2023p. 837). Las definiciones propuestas por los participantes en su investigación “contienen condiciones necesarias, pero no suficientes” (Ropero Quintero y Zubieta Badillo, 2023, p. 842).

MIRANDO HACIA ADELANTE

A continuación, teniendo en cuenta la comognición, se plantean algunas líneas de investigación en las que la investigación matemática en geometría puede ampliarse o aportar ideas.

Antonini et al. (2020), en una investigación sobre el concepto de función en Educación Secundaria con tecnología, proponen nuevas ideas teóricas que extienden las propuestas por Sfard (2008). En concreto, proponen considerar un nuevo tipo de mediador, el mediador dinámico interactivo (DIM por sus siglas en inglés, dynamic interactive mediator) como un mediador manipulable por el usuario y dinámico en el sentido de que cambia con el tiempo, un ejemplo pueden ser las construcciones realizadas con GeoGebra, manipulables mediante arrastre de algunos objetos (puntos, rectas, etc.). En un contexto geométrico sobre definir sólidos (tipos de prismas cuadrangulares), González-Regaña et al. (2021) analizando el discurso de estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando construyen y seleccionan definiciones, proporcionaron a los participantes mediadores visuales de dos tipos, en una construcción de GeoGebra (figura para algunos grupos de participantes) y modelos físicos de los sólidos para otros. Se puede plantear cómo afectan estos mediadores y si su presencia facilita el aprendizaje.

Indican Antonini et al. (2020) que los DIM pueden jugar un papel de interlocutor en el discurso y establecerse un discurso. La comunicación entre el estudiante y el software está condicionada por las reglas del software. En un SGD (por ejemplo, GeoGebra) las repuestas del interlocutor DIM a las acciones del resolutor hacen explícitas las propiedades matemáticas que se han usado en la construcción o que se deducen de dichas propiedades, aunque estas respuestas pueden no ser identificadas por el estudiante.

Aviram et al. (2023) analizando el discurso de estudiantes de Educación Secundaria que están aprendiendo álgebra en un entorno tecnológico, concretamente en hoja de cálculo, sugirieron dos nuevos tipos de rutinas, rutina discursiva computacional (computer-discursive routine) y rutina computacional compuesta (compounded-computer routine). La primera es una rutina que mediante la acción del estudiante realiza un procedimiento y la segunda se compone de una rutina discursiva computacional y una rutina discursiva.

En general, la inclusión de DIM y las rutinas computacionales abre una línea de investigación que no solo afecta a los mediadores y realizaciones, sino también a las palabras matemáticas que se incorporan al discurso matemático (por ejemplo, “arrastre”) y a las formas de producción y justificación de narrativas. Como indican Aviram et al. (2023) el potencial de la comognición se ha puesto de manifiesto en el estudio de los procesos de aprendizaje en entornos no computacionales, en entornos computacionales hay menos estudios, salvo algunas excepciones y se necesita avanzar en esta línea.

Otras líneas de investigación con perspectiva de futuro y que suponen un desafío son la teoría de grafos y la topología. El aprendizaje de la teoría de grafos se está investigando a través de los niveles de van Hiele (González, Gallego-Sánchez et al., 2022; González, Manero et al. 2023), lo que pone de manifiesto el potencial de este marco teórico para aplicarse fuera de la geometría. La propuesta de niveles de van Hiele para la teoría de grafos se basa en primer lugar en los parecidos entre las representaciones pictóricas de los grafos y las figuras planas, pues en ambas hay vértices y aristas y en la existencia de transformaciones que tienen invariantes (González et al., 2020) en geometría y grafos. Además, se están realizando investigaciones que emplean la comognición (Gavilán-Izquierdo et al., 2023) y se empiezan a buscar formas de articular los niveles de van Hiele y la comognición para caracterizar la transición entre niveles de van Hiele mediante la identificación de conflictos comognitivos.

La investigación en enseñanza y aprendizaje de la topología es muy reciente, salvo alguna excepción (Kontorovich, 2021) y están dándose algunos pasos en esta línea de investigación mediante el uso de la comognición como marco teórico (Kontorovich y Greenwood, 2022).

Limitaciones

Terminamos este trabajo con algunas limitaciones de la comognición que han sido señalados en la revisión del número especial del The Journal of Mathematical Behavior sobre esta teoría. Sinclair (2022) en sus comentarios de dicha revisión sobre la comognición indica que un inconveniente es su crecimiento, por ejemplo, en número de conceptos, lo que la hace crecer en complejidad y por tanto puede llegar a ser difícil de comprender y puede ser una barrera para los que quieren iniciarse en la investigación comognitiva. Además, indica, que la comunicación es algo más que lenguaje escrito y verbal, aunque en el número especial este tipo de discurso es el más frecuente. Finalmente, Sinclair (2022) reconoce que para promover la investigación usando esta teoría de la comognición es recomendable explicitar en las investigaciones las razones que motivan su elección.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el Proyecto PID2022-139079NB-I00 financiado por MICIU /AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER/UE. A las investigadoras de la Universidad de Sevilla Aurora Fernández León, Inés Gallego Sánchez y Verónica Martín Molina por sus comentarios y sugerencias.

Referencias

- Antonini, S., Baccaglini-Frank, A. y Lisarelli, G. (2020). From experiences in a dynamic environment to written narratives on functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6(1), 1–29. <https://doi.org/10.1007/s40751-019-00054-3>
- Aviram, A., Tabach, M. y Heyd-Metzuyanim, E. (2023). Algebraic discourse development in a spreadsheet environment and discursive-computer routines. En M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel y M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 59-66). PME.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/002248710832455>

- Ben-Dor, N. y Heyd-Metzuyanim, E. (2021). Standing on each other's shoulders: A case of coalescence between geometric discourses in peer interaction. *The Journal of Mathematical Behavior*, 64, Artículo 100900. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100900>
- Chan, M. C. E., Moate, J. y the Social Unit of Learning project team. (2022). Learning research in a laboratory classroom: A reflection on complementarity and commensurability among multiple analytical accounts. *ZDM Mathematics Education*, 54(2), 317–329. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01330-0>
- Cooper, J. (2014). Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of 38th International Group for the Psychology of Mathematics Education and 36th Psychology of Mathematics Education-North America* (Vol. 2, pp. 337-344). PME.
- Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 7-32. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1711>
- Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V. y Toscano, R. (2021). Identifying routines in the discourse of undergraduate students when defining. *Mathematics Education Research Journal*, 33(2), 301-319. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00301-1>
- Gallego-Sánchez, I., González, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2022). Analyzing pedagogical routines in the upper secondary school teacher's discourse using the commognitive approach. *International Journal of Instruction*, 15(3), 291-306. <https://doi.org/10.29333/iji.2022.15316a>
- Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2019). Cómo construyen definiciones matemáticas los estudiantes para maestro: Una aproximación sociocultural. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 133–153). Ediciones Universidad de Salamanca.
- González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Puertas, M. L. (2021). Characterizing levels of reasoning in graph theory. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(8), Artículo em1990. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11020>
- González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Puertas, M. L. (2022). Analizando perfiles de reconocimiento en teoría de grafos. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(3), 87-107. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3402>
- González, A., Manero, V., Arnal-Bailera, A., y Puertas M.L. (2022). Proof levels of graph theory students under the lens of the Van Hiele model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Publicación anticipada en línea. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2113467>
- González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(1), 81-97. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039>
- Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237–251. <https://doi.org/10.2307/749076>
- Heyd-Metzuyanim, E. y Shabtay, G. (2019). Narratives of 'good' instruction: Teachers' identities as drawing on exploration vs. acquisition pedagogical discourses. *ZDM Mathematics Education*, 51(3), 541–554. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-01019-3>
- Knox, J. y Kontorovich, I. (2023). Growing research groves to visualize young students' learning in small groups. *Mathematics Education Research Journal*, 35(2), 401-425. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00422-0>
- Kontorovich, I. (2021). Minding mathematicians' discourses in investigations of their feedback on students' proofs: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10035-2>

- Kontorovich, I. y Greenwood, S. (2022). Mathematics learning through a progressive transformation of a proof: A case from a topology classroom. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of Research in Mathematics Education* (pp. 2437 - 2444). Free University of Bozen-Bolzano, Italy y ERME.
- Kontorovich, I. y Liu, N. Q. (2023). Students leverage struggles with proof to script fictional dialogues about the rules of proving. En S. Cook, B. Katz y D. Moore-Russo (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 118-126). SIGMAA on RUME.
- Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 153–176. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4>
- Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2020). Differences between how undergraduate students define geometric solids and what their lecturers expect from them through the lens of the theory of commognition. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(12), Artículo em1917. <https://doi.org/10.29333/ejmste/9159>
- Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. y González-Regaña, A. J. (2023). Characterising pre-service primary school teachers' discursive activity when defining. *International Journal of Instruction*, 16(3), 117-130. <https://doi.org/10.29333/iji.2023.1637a>
- Morgan, C. y Sfard, A. (2016). Investigating changes in high-stakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Mathematics Education*, 18(2), 92–119. <https://doi.org/10.1080/14794802.2016.1176596>
- Nachlieli, T. y Heyd-Metzuyanim, E. (2022). Commognitive conflicts as a learning mechanism towards explorative pedagogical discourse. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(3), 347-369. <https://doi.org/10.1007/s10857-021-09495-3>
- Reymundo, C., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Martín-Molina, V. (2023). Relación entre el conocimiento matemático y conocimiento didáctico de las matemáticas de maestros de educación primaria en formación cuando realizan tareas sobre fracciones. En M. Sánchez-Moreno y J. López-Yañez (Eds.), *Construir comunidad en la escuela* (pp. 977-984). Narcea, S. A. de Ediciones.
- Ropero Quintero, D. A. y Zubieta Badillo, G. (2023). Definiendo familias de poliedros: Un estudio con estudiantes de secundaria. *Bolema*, 37(76), 823-848. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a21>
- Sánchez, V. y García, M. (2014). Socio-mathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 305–320. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9516-0>
- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13. <https://doi.org/10.2307/1176193>
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 567–615. <https://doi.org/10.1080/10508400701525253>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2020). Commognition. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100031
- Sfard, A. (2023). Taming fantastic beasts of mathematics: Struggling with incommensurability. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9(3), 572–604. <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00156-7>
- Shahbar, J. A. y Tabach, M. (2023). Tracing the emergence of modelling routines during model-eliciting activities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(6), 963-981. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1978571>

- Shinno, Y. y Fujita T. (2022). Characterizing how and when a way of proving develops in a primary mathematics classroom: A commognitive approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(12), 3326-3351. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1941365>
- Sinclair, N. (2022). A cumulative, coherent and convincing theory that is also seductive, singular and selective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67, Artículo 100983. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100983>
- Sinclair, N. y Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 28-44. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.009>
- Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards definition mediated identification: The case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 163-187. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0>
- Tabach, M. y Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: Prologue. *Educational Studies in Mathematics*, 91(3), 299-306 <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9638-7>
- Toscano, R., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Sánchez, V. (2019). A study of pre-service primary teachers' discourse when solving didactic-mathematical tasks. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(11), em1762. <https://doi.org/10.29333/ejmste/108631>
- Viirman, O. (2015) Explanation, motivation and question posing routines in university mathematics teachers' pedagogical discourse: A commognitive analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(8), 1165-1181. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1034206>
- Viirman, O. y Nardi, E. (2019). Negotiating different disciplinary discourses: Biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 233-252. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9861-0>
- Wang, S. (2015). *Discourse perspective of geometric thoughts*. Springer Spektrum.
- Wang, S. y Kinzel, K. (2014). How do they know it is a parallelogram? Analysing geometric discourse at van Hiele level 3. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 288-305. <https://doi.org/10.1080/14794802.2014.933711>