

EXPLORAÇÃO DE TAREFAS GEOMÉTRICAS NA PROMOÇÃO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO - ANÁLISE DE PRÁTICAS DE INVESTIGAÇÃO

The exploration of geometric tasks in the promotion of geometric reasoning - Analysis of research practices

Neto, T. B.^a, Breda, A.^b y Encarnação, A.^c

^{a, c} CIDTFF—Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores,

^b Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro - Portugal

Resumo

Atualmente o tópico de geometria faz parte de todos os currículos de escolaridade e assume um papel fundamental na promoção do raciocínio matemático, em especial do raciocínio geométrico. No âmbito do raciocínio geométrico tem vindo a ser desenvolvida investigação, segundo diferentes perspetivas teóricas. O objetivo deste trabalho é ilustrar como a combinação e integração de perspetivas teóricas, no âmbito do raciocínio geométrico, podem promover a caracterização da visualização e do raciocínio espacial de futuros professores de matemática. Assim, no presente trabalho propõe-se um modelo de análise dos argumentos apresentados por estudantes, futuros professores de matemática. A análise realizada mostra que a integração de perspetivas teóricas permitiu a identificação de características de raciocínio visual-espacial, as quais são mais consentâneas com um raciocínio perceptual e menos com um raciocínio de natureza dedutivo.

Palavras chave: *didáctica, tarefas geométricas, desenvolvimento do raciocínio geométrico, enfoque ontossemiótico.*

Abstract

The topic of geometry is currently part of all school curricula and plays a fundamental role in promoting mathematical reasoning, especially geometric reasoning. Research has been carried out into geometric reasoning from different theoretical perspectives. The aim of this paper is to illustrate how the combination and integration of theoretical perspectives on geometric reasoning can promote the characterisation of visualisation and spatial reasoning in future math's teachers. This paper therefore proposes a model for analysing the arguments presented by students who are future math's teachers. The analysis carried out shows that the integration of theoretical perspectives has allowed us to identify visual-spatial reasoning characteristics that are more in line with perceptual reasoning and less with deductive reasoning.

Keywords: *didactics, geometric tasks, development of geometric reasoning, ontosemiotic approach.*

INTRODUÇÃO

Nesta comunicação pretende-se analisar práticas de investigação que tiveram como foco a promoção do raciocínio geométrico, em especial o raciocínio visual espacial. O raciocínio visual-espacial está explicitamente envolvido no estudo da geometria e por esta razão vários autores (e.g., Sinclair & Bruce 2015) defendem dar mais ênfase à geometria nos currículos. Em Portugal, a geometria tem um espaço de destaque nos currículos do ensino básico e é estudada no tópico “Geometria e Medida”, enfatizando-se o desenvolvimento da capacidade de visualização (MEC, 2018).

Segundo Prediger et al. (2008) a diversidade de perspetivas teóricas de educação matemática constitui um bom recurso, no entanto a comunidade científica deve adotar estratégias e métodos para estabelecer ligação entre as várias teorias, no sentido de favorecer um maior entendimento dos objetos

de estudo. Estes autores descrevem três estratégias de trabalho para estabelecer ligações entre duas ou mais teorias, a saber: compreender as várias teorias e tornar a informação sobre elas compreensível, contrastando e comparando; combinar e coordenar; sintetizar e integrar localmente.

O objetivo deste trabalho é ilustrar como a combinação e integração de perspetivas teóricas, no âmbito do raciocínio geométrico, podem promover a caracterização da visualização e do raciocínio espacial de futuros professores de matemática. Para isso formulou-se a seguinte questão de investigação: De que forma a integração da perspetiva teórica do Enfoque Ontossemióticos (EOS) e da perspetiva teórica do Desenvolvimento do Raciocínio Geométrico (DRG) apoiou a análise de práticas de raciocínio visual-espacial de futuros professores? Tendo por base as perspetivas teóricas referidas, e utilizadas em trabalhos de investigação com o foco no raciocínio geométrico, procedeu-se à análise e discussão de uma das questões que fizeram parte de um questionário sobre o raciocínio visual - espacial aplicado a futuros professores angolanos.

De seguida, e numa primeira parte, apresentam-se aspetos das perspetivas teóricas que estiveram na base de trabalhos de investigação, o EOS e a DRG, comparando-as e integrando-as. Seguem-se exemplos de um estudo empírico envolvendo futuros professores, e com o foco na promoção do raciocínio visual-espacial, os resultados obtidos nessa investigação e, finalmente, a ligação/integração de aspetos das perspetivas teóricas para uma compreensão do foco de estudo.

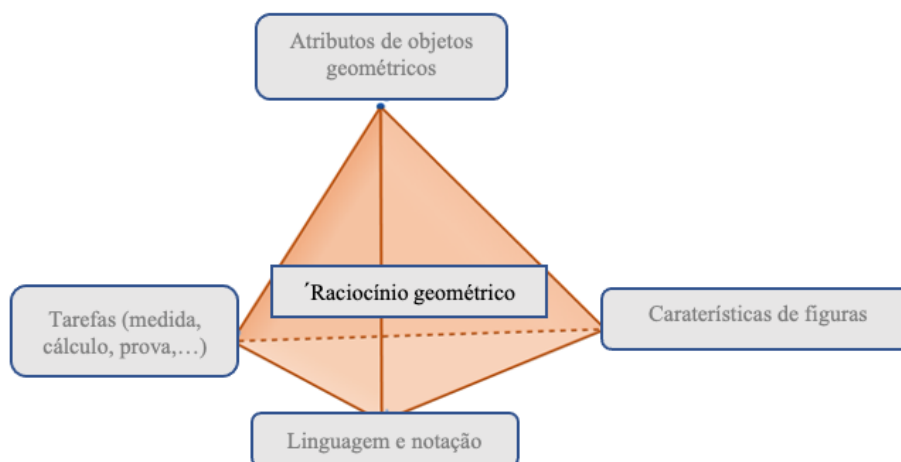
PERSPECTIVAS TEÓRICAS

O ensino e a aprendizagem da geometria têm sido objeto de numerosas investigações na Educação Matemática ao longo das últimas décadas. Sinclair et al. (2016) apresentaram, no ICME – 13, uma visão crítica da investigação realizada neste domínio, referindo-se a teorias, mais específicas, que se focam em aspetos particulares do ensino e da aprendizagem da geometria e outras mais gerais. Dentro dos exemplos de teorias específicas sobre o ensino e a aprendizagem da geometria incluem o modelo de pensamento geométrico de van Hiele (1986), a teoria de conceito de figura (e.g., Mariotti & Fischbein 1997), a teoria da apreensão de figura (Duval 1998), e ainda a teoria do espaço de trabalho geométrico (Kuzniak, 2014). Duval (2006) considera como representações semióticas as figuras geométricas, as representações gráficas, as notações algébricas e formais, o sistema de números e a linguagem corrente, as quais exibem sistemas semióticos diferentes. Os registos são os diferentes processos dessas representações e o autor classifica-os em quatro categorias de acordo com dois critérios, a saber: a elaboração de representações semióticas pode ser categorizada em representação discursiva (e.g., expressões numéricas ou algébricas, definições, descrições,...) ou representações não discursivas (e.g., figuras geométricas, gráficos ou diagramas). O segundo critério é relativo à sua substituição que pode ser efetuada usando um algoritmo (expressão numérica ou algébrica, gráficos) ou então, na maioria das vezes, uma linguagem natural. Considera, ainda, que a efetiva compreensão de objetos matemáticos requer que o estudante seja capaz de lidar com diferentes registos, que são as únicas representações tangíveis e visíveis dos objetos matemáticos.

Adler e Ronda (2015) com base nos vários quadros teóricos referidos e com a preocupação de caracterização dos baixos níveis de raciocínio geométrico que os professores, ou futuros professores, revelam nos contextos de desenvolvimento profissional, propõem um quadro teórico, no âmbito de trabalho de investigação com formação de professores, sobre a promoção do raciocínio geométrico (DRG). Este quadro teórico valoriza os seguintes aspetos: a identificação de trajetória(s) para o desenvolvimento do RG, em que a diferenciação progressiva é caracterizada e apoiada através de tarefas relevantes; o reconhecimento da interação entre diferentes representações (representação visual e/ou verbal) a partir de informação sobre as figuras geométricas em análise; a manipulação de figuras através de diferentes orientações e complexidade; o foco nas definições, propriedades geométricas com uma atenção explícita à organização das propriedades relevantes para formular argumento(s). Como consequência destas premissas, o quadro teórico proposto por estas investigadoras considera os seguintes elementos conceituais para a promoção do raciocínio

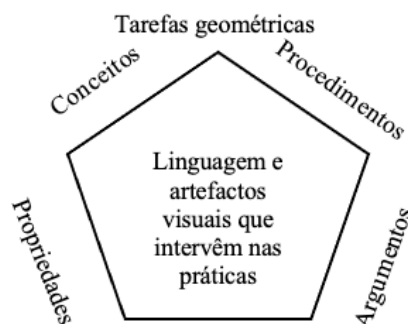
geométrico, nomeadamente: Atributos geométricos (definições, propriedades, axiomas, teoremas); Natureza e qualidade do raciocínio (definições, proposições, qualidade da argumentação); Conexão entre representação visual-verbal (relação entre aspetos visuais e verbais).

Figura 1. Elementos do raciocínio geométrico (adaptado de Adler e Ronda, 2015)



Uma outra perspetiva teórica que também valoriza a(s) trajetória(s) para o desenvolvimento do raciocínio matemático é o Enfoque Ontossemiórico do ensino e aprendizagem da matemática (EOS). Esta perspetiva, tendo igualmente por base outros quadros teóricos, foi desenvolvida por Godino e colaboradores (e.g., Godino & Batanero, 1994; Godino & Batanero 2007). Nesta perspetiva teórica é proposta a seguinte tipologia de objetos matemáticos, que poderá ser utilizada num primeiro nível de análise de práticas matemáticas, nomeadamente: Linguagem (termos, expressões, notações, gráficos,...) nos seus diversos registos (escrito, oral, gestual,...); Situações-problema (aplicações extra -matemáticas, exercícios,...); Conceitos-definições (abordados mediante definições ou descrições); Proposições (enunciados sobre conceitos,...); Procedimentos (algoritmos, operações, técnicas de cálculo,...); Argumentos (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo,...). Estes seis objetos articulam-se formando trajetórias epistémicas e promovendo trajetórias cognitivas. Num segundo nível de análise, no sentido de se proceder a uma análise mais fina, e com o foco de atenção nos argumentos, consideram-se os atributos contextuais: Pessoal/institucional; Ostensivo/não-ostensivo; Extensivo/intensivo(particular/geral); Unitário/sistémico; Expressão/conteúdo (Godino, 2007). Fernandez (2012), desenvolveu investigação sobre a visualização e o raciocínio espacial, tendo por base o EOS, e elaborou modelos que permitem analisar o papel da linguagem, dos artefactos e do pensamento visual que intervêm na resolução de tarefas geométricas. A figura 2 apresenta o referido modelo.

Figura 2. Visualização e objetos matemáticos (adaptado de Fernández, 2012)



Além deste modelo, apresenta outro modelo para um segundo nível de análise de práticas, envolvendo a visualização de objetos matemáticos e dualidades contextuais, como poderemos ver com maior

detalhe na análise de soluções de futuros professores na secção seguinte, aplicado na análise de soluções a uma tarefa específica.

Comparando e contrastando os dois modelos teóricos apresentados, seguindo a metodologia sugerida por Prediger et al. (2008), verificamos que ambos têm em comum os seguintes elementos conceituais para a promoção do raciocínio geométrico:

- Atributos geométricos (definições/conceitos, propriedades, argumentos (proposições, axiomas, teoremas);
- Qualidade da argumentação (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo);
- Conexão entre representação visual-verbal (relação entre aspetos visuais e verbais) ou seja aspetos da linguagem (termos, expressões, notações, gráficos, ...) nos seus diversos registos (escrito, oral, gestual,...);
- Características das tarefas (de medição, de visualização, de prova, ...).

No entanto no modelo para a promoção do raciocínio geométrico (DRG), não se identificam de forma explícita os elementos para um segundo nível de análise de práticas de argumentação, envolvendo aspetos da visualização de objetos geométricos e dualidades contextuais (EOS).

Na secção seguinte serão apresentados resultados e discussão de investigação empírica, segundo uma leitura das duas perspetivas teóricas apresentadas, integrando-as de forma a promover a caracterização do raciocínio visual-espacial de futuros professores de matemática.

METODOLOGIA

Aplicou-se um questionário, adaptado da investigação de Fernandez (2012) para avaliar as habilidades de visualização e raciocínio espacial de futuros professores angolanos, a frequentarem o último ano da Licenciatura, em Instituições do Ensino Superior de formação de professores, Institutos Superiores de Ciências da Educação – ISCED, em diversas províncias de Angola. Participaram no questionário 200 estudantes e o questionário foi preenchido online, no ano letivo 2021/2022. Cada questão do questionário é composta por duas sub - questões: a primeira é de escolha múltipla e a segunda envolve a justificação da escolha realizada. A análise das justificações envolveu análise de conteúdo, tendo por base dimensões da combinação e integração dos quadros teóricos referidos.

Neste trabalho é apresentada, a título de exemplo, a análise das soluções apresentadas pelos estudantes a uma das questões do questionário.

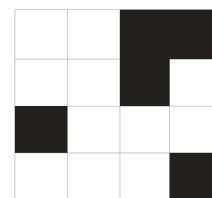
RESULTADOS

De seguida, tal como já foi referido, apresenta-se uma das questões do questionário, bem como a solução prevista.

Questão

Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário sombrear para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria? Indica abaixo quais seriam esses quadradinhos. Descreve o procedimento ou estratégia que utilizaste para chegar à tua resposta.

- a) 3; b) 1; c) 4; d) 2

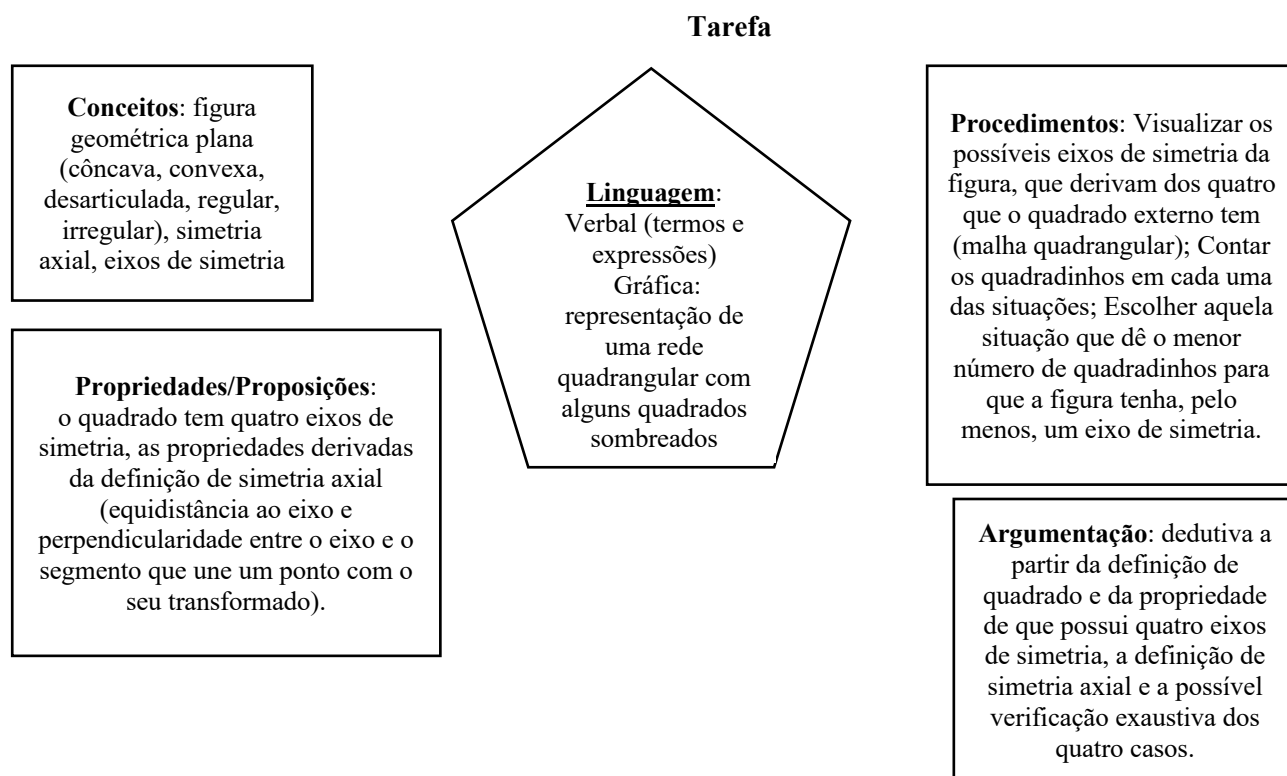


Solução prevista: Análise dos vários casos: eixos de simetria; horizontal, vertical, diagonal esquerda-direita e diagonal direita-esquerda. No caso da simetria em relação ao eixo diagonal esquerda-direita, seria necessário sombrear 2 quadradinhos, o número de quadradinhos inferiores aos outros casos. Assim,

a solução é aquela que fornece a simetria em relação ao eixo diagonal esquerda-direita considerando que se pede o número menor de quadrados a serem sombreados.

Segundo a perspectiva teórica EOS apresenta-se de seguida a configuração de objetos e processos envolvidos na solução, considerando em primeiro lugar as relações primárias envolvidas (um primeiro nível de análise).

Figura 2. Visualização e objetos matemáticos (adaptado de Fernández, 2012)



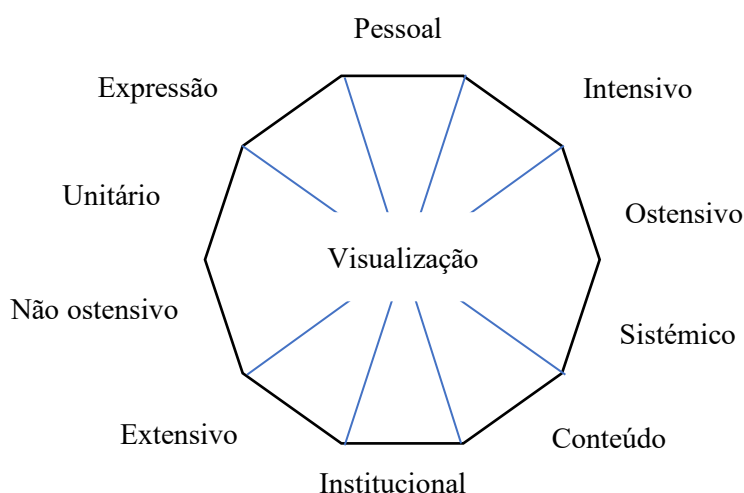
Sobre as relações primárias, de acordo com a figura 2, podemos considerar níveis de desempenho, que nos permitam melhor caracterizar o desenvolvimento do pensamento geométrico, como vamos ver a seguir.

Mas antes, e ainda sobre a solução à questão referida, temos os elementos apresentados na figura 3 e que permitem um segundo nível de análise (objetos geométricos e dualidades contextuais), com o foco de atenção na visualização.

Dualidades contextuais: Extensivo/intensivo (particular/geral); A noção de eixo de simetria é uma generalidade que se deve particularizar neste caso para os eixos de simetria de um quadrado, especificamente para os do quadrado externo que forma a grade; Unitário/sistémico: O sistema formado pelos três conjuntos de quadradinhos marcados na grade quadrangular é considerado como parte de uma única figura. No entanto, para obter uma figura com pelo menos um eixo de simetria pode trabalhar-se com essas partes separadamente, tendo em conta que elas fazem parte de um todo; resolver a questão pode requerer decompor em quatro sub-problemas correspondentes a cada um dos eixos de simetria do quadrado; Designação/designado (expressão/conteúdo): A expressão "menor número" força o sujeito a considerar todas as possibilidades de simetrização de uma figura em relação aos quatro eixos de simetria da malha quadrada e a expressão "pelo menos um eixo" significa que se pode ter que analisar mais de um eixo de simetria para obter o número mínimo de quadradinhos a sombrear (esta expressão não modifica a solução do problema, mas pode criar dificuldades na interpretação da questão para um aluno); Ostensivo - não ostensivo: a questão exige uma resposta não ostensiva, considerando que o questionário foi preenchido online, o que exige a mobilização das capacidades conceptuais, processuais, proposicionais, nas suas facetas não ostensiva e pessoal, o

sujeito recorrerá a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, gestos interiorizados, etc.). No entanto o sujeito pode mobilizar uma resposta com base na marcação, em construção auxiliar, do sombreado de dois quadrados em falta; Pessoal – institucional: Entre os processos interpretativos que um sujeito deve mobilizar para resolver esta questão, destacamos as suas conceções do que significa a simetria axial, bem como a consideração desta figura disjunta como uma única figura, o que representa uma generalização do que é habitualmente interpretado como "figura" (figura ligada).

Figura 3. Visualização, objetos geométricos e dualidades contextuais (adaptado de Fernández, 2012)



Takker et al. (2022) com o objetivo de identificar níveis do desenvolvimento do raciocínio geométrico (DRG) de futuros professores, propõem um quadro teórico de análise, envolvendo diferentes níveis para diferenciação dos aspetos do desenvolvimento do raciocínio geométrico, já referidos anteriormente. Adaptando a proposta destas investigadoras e de Fernández (2012), considerou-se diferentes níveis do DRG, utilizando os elementos referenciados na figura 1 e figura 2, para análise dos argumentos apresentados nas soluções da questão, que se apresentam na tabela seguinte, a tabela 1.

Tabela 1. Níveis do DRG (adaptado de Takker et al., 2022 e Fernández, 2012)

Atributos geométricos (Níveis)	Natureza da argumentação (Níveis)	Linguagem (Níveis)
1: Há indícios de que domina o conceito de simetria	1: Argumentação não válida	1: Transposição entre a representação visual-visual
2: Domina o conceito de eixo de simetria	2: Argumentação não válida por ter posicionado o eixo de simetria numa posição convencional (vertical ou horizontal)	2: Transposição entre a representação visual-verbal
3: Identifica um eixo de simetria que conduz a uma resposta incorreta	3: Argumentação válida incompleta:	3: Transposição entre o visual- gráfica-verbal
4: Identifica o eixo que conduz à resposta correta	4: Argumentação válida e completa	

Fonte: Trabalho de doutoramento em Curso de Abel da Encarnação, sob orientação de Teresa B. Neto e Ana Breda

Apresentam-se a seguir alguns exemplos, com indicação do número do respondente ao questionário, cuja análise foi realizada tendo em conta a tabela 1.

Para proceder a uma análise mais fina da natureza e qualidade da argumentação, vai recorrer-se à análise dos atributos geométricos envolvidos e suas dualidades contextuais (cf. Figura 3).

Exemplos e análise

Exemplos de resposta correta, mas com argumentação válida incompleta

1. #48: Pinte o segundo quadrado da penúltima linha e o primeiro da última linha.

O estudante selecionou a opção de resposta correta. Revela que domina o conceito de eixo de simetria, no entanto apresenta uma argumentação válida incompleta, referindo o sombreamento de dois quadradinhos em falta, não refere a simetria em relação ao eixo diagonal esquerda-direita considerando que se pede o número menor de quadrados a serem sombreados. Observa-se uma transposição do visual – gráfica - verbal, pois refere que pintou (numa malha quadrangular) os quadrados em falta para dar resposta ao solicitado. Apesar da argumentação envolver uma resposta não ostensiva, considerando que o questionário foi preenchido online, o estudante refere que recorreu à pintura de quadradinhos, deduzindo-se que fez uma réplica da figura para apoiar o raciocínio, tendo necessidade de recorrer ao ostensivo.

Nível: 1,3,3

2. #90: Sombremos apenas os últimos dois quadradinhos da diagonal secundária.

O estudante selecionou a opção de resposta correta e apresenta uma argumentação parcialmente válida, identificando o eixo que conduz à resposta correta e justifica a resposta fazendo uma transposição do visual para o verbal. Sobre a dualidade contextual (particular/geral), a noção de eixo de simetria é uma generalidade, mas que nesta resposta o estudante particularizou, neste caso, para o eixo de simetria (diagonal secundária). Não há indícios de que tenha utilizado uma réplica da figura como apoio, o que nos leva a induzir de que a argumentação apresentada não recorreu ao ostensivo.

Nível: 4,3,2

Exemplos de resposta correta, mas com argumentação não válida

De seguida temos dois exemplos de resposta correta, mas com argumentação não válida.

1. #63: Uma figura tem eixo de simetria quando tem pelo menos uma linha que divide a figura em par.

O respondente apesar de ter escolhido a opção de resposta correta, apresenta uma argumentação que não justifica a resposta que selecionou. Não identifica nenhum atributo geométrico relevante, porém há indícios de que domina o conceito de simetria. À luz da dualidade pessoal – institucional, destaca-se a conceção do estudante do que significa o conceito de simetria axial, associando a “uma linha que divide a figura em par”. Não há indícios de que tenha recorrido a construção de figura (ostensivo) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 1,1,2

2. #145: Precisamos apenas sombrear dois quadradinhos, isto é, os da lateral esquerda.

Um outro exemplo em que o respondente apesar de selecionar, igualmente, a opção de resposta correta, apresentou uma argumentação que não justifica a resposta selecionada. Há indícios de que identifica o eixo que conduz à resposta correta, fazendo uma transposição do visual para o verbal. A análise da argumentação, recorrendo às dualidades contextuais, permite induzir sobre a dualidade particular/geral, que o estudante tem a noção de eixo de simetria, e que particularizou neste caso. Recorreu a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, para os eixos de simetria de um quadrado) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 4,1,2

Exemplos de resposta incorreta e com argumentação não válida

Apresentamos a seguir quatro exemplos ilustrativos de resposta incorreta e com argumentação não válida, selecionados aleatoriamente.

#26: Partindo do quadradinho no canto direito inferior e subindo obliquamente, obtemos um único eixo de simetria.

O respondente selecionou uma resposta incorreta e apresentou uma argumentação não válida. Identifica um eixo de simetria que conduz a uma resposta incorreta, justificando a resposta através de uma argumentação não válida, fazendo uma transposição do visual para o verbal. A análise da argumentação, recorrendo às dualidades contextuais, permite induzir sobre o unitário/sistêmico, que o estudante trabalhou com partes da figura separadamente, mas não parece ter tido em conta que elas fazem parte de um todo, não considerou os vários eixos de simetria da figura vista como um todo (uma malha quadrada). Recorreu a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, para os eixos de simetria de um quadrado) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 3,1,2

#81: Fiz um desenho idêntico, dividindo a figura por 2.

O respondente selecionou uma resposta incorreta e apresenta uma argumentação não coerente tendo em consideração o solicitado nesta questão. Identifica um eixo de simetria que conduz a uma resposta incorreta, justificando a resposta através de uma argumentação não válida por ter posicionado o eixo de simetria numa posição convencional (vertical ou horizontal), fazendo uma transposição do visual para o verbal. O estudante refere que recorreu a um desenho, deduzindo-se que fez uma réplica da figura para apoiar o raciocínio, tendo necessidade de recorrer ao ostensivo.

Nível: 3,2,3

#59: Para achar o eixo de simetria de uma figura é necessário que as figuras estejam em lados opostos.

O estudante selecionou uma resposta incorreta e apresenta uma argumentação não válida. Domina o conceito de eixo de simetria, justificando a resposta através de uma argumentação não válida, fazendo uma transposição do visual para o verbal. À luz da dualidade pessoal – institucional, destaca-se a concepção do estudante do que significa o conceito de simetria axial, associando o conceito de figuras simétricas, em relação a um eixo de simetria, estarem em “lados opostos”. Não há indícios de que tenha recorrido a construção de figura (ostensivo) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 2,1,2

#70: Utilizei conhecimentos de Geometria. O eixo de simetria é uma linha que divide uma figura em duas partes simétricas, isto é, como se fossem o objeto e a sua imagem refletida num espelho.

Mais um exemplo em que o respondente escolheu uma resposta incorreta, tendo apresentado uma argumentação não válida. Domina o conceito de eixo de simetria, justificando a resposta através de uma argumentação não válida. À luz da dualidade pessoal – institucional, o estudante associa o conceito de simetria axial à reflexão de um objeto num espelho. Recorreu a elementos linguísticos ostensivos (objeto, imagem, espelho)) e fez uma transposição do visual para o verbal.

Nível: 2,2,2

A tabela seguinte apresenta a frequência absoluta e percentagem dos níveis de DRG dos estudantes, futuros professores, que apresentaram respostas que se conseguiram classificar dentro dos indicadores definidas na tabela 1, ou seja 89 em 200 participantes no estudo. Registaram-se 111 respostas que

não permitiram uma classificação dentro dos indicadores definidos na tabela 1, ou apresentaram uma argumentação não entendível.

Tabela 2. Níveis de DRG de futuros professores

	1,1(3),2(3)	2,1(2),2	3,1(2),2(3)	4,1(3),2
Frequência absoluta	60	7	17	5
Percentagem (%)	67,42	7,87	19,1	5,62

Da análise feita na tabela 2 verifica-se que das 89 argumentações apresentadas, podemos concluir o seguinte:

- 67,42% apresentaram uma argumentação não válida, no entanto houve indícios do domínio do conceito de simetria. Observou-se uma transposição entre representações visual – gráfica-verbal; A análise da argumentação, recorrendo às dualidades contextuais, permite induzir sobre a dualidade particular/geral, que os estudantes têm a noção de eixo de simetria, e que particularizam neste caso concreto. Observa-se uma transposição do visual – gráfica - verbal, pois referem que pintaram (numa malha quadrangular) os quadrados em falta para dar resposta ao solicitado ou recorreram a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, para os eixos de simetria de um quadrado) e fazem uma transposição do visual para o verbal.
- 19,1% identificaram um eixo de simetria que conduziu a uma resposta incorreta, com argumentação não válida por terem posicionado o eixo de simetria numa posição convencional (vertical ou horizontal), houve o recurso a representações entre o visual – gráfica-verbal; A análise da argumentação, recorrendo às dualidades contextuais, permite induzir sobre o unitário/sistémico, que o estudante trabalhou com partes da figura separadamente, mas não parece ter tido em conta que elas fazem parte de um todo, não considerou os vários eixos de simetria da figura vista como um todo (uma malha quadrada). Recorreu a elementos linguísticos não ostensivos (imagens mentais, para os eixos de simetria de um quadrado) ou ostensivo (recurso a desenho, deduzindo-se que fez uma réplica da figura para apoiar o raciocínio), fez uma transposição do visual para o verbal ou visual- gráfica – verbal.
- 7,87% evidenciaram o domínio do conceito de eixo de simetria, mas a argumentação apresentada foi não válida, utilizando a transposição entre o visual – gráfica-verbal;
- 5,62% identificaram o eixo que conduz à resposta correta, não justificando a resposta selecionada e/ou justificando a resposta através de uma argumentação válida, incompleta, fazendo uma transposição do visual-verbal.

Através da leitura e análise da tabela 1 e da tabela 2, podemos induzir que os estudantes inquiridos demonstraram muitas fragilidades ao nível do desenvolvimento do raciocínio geométrico. O que sustenta a urgência de se ponderar a formação na área da geometria, nos Institutos Superiores de Ciências da Educação – ISCED, no sentido de alterar esta situação.

CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma análise de soluções apresentadas por futuros professores de matemática, perante uma tarefa de simetria de reflexão, integrando duas perspetivas teóricas (EOS e DRG). Com essa ligação pretende-se uma melhor compreensão sobre o raciocínio visual-espacial de futuros professores de matemática, bem como identificar níveis de RG. Para isso formulou-se a seguinte questão de investigação: De que forma a ligação entre a perspetiva teórica do Enfoque Ontossemióticos (EOS) e as características do Desenvolvimento do Raciocínio Geométrico (DRG),

promove o entendimento da argumentação de futuros professores, quando confrontados com uma tarefa geométrica, envolvendo o conceito de simetria de reflexão?

Uma primeira análise, ao nível das relações primárias envolvidas na visualização e objetos geométricos, integrando elementos conceituais do EOS e DGR, permitiu concluir que os estudantes inquiridos revelaram níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico que refletem fragilidades que deverão ser mitigadas, através de formação consistente e que tenha em consideração os elementos: atributos geométricos; natureza da argumentação e linguagem (ter em conta as diferentes representações semióticas usadas). A análise dos objetos geométricos e dualidades contextuais, envolvidos nos argumentos apresentados pelos estudantes, futuros professores, apontam para características de raciocínio perceptual (objeto geométrico ostensivo, particularização, conceção pessoal de atributos geométricos,...) e não de um raciocínio dedutivo. Na análise realizada, dos argumentos específicos apresentados, foi necessário ter em conta as diferentes representações semióticas usadas.

Em trabalho futuro será aconselhável, após momentos de formação, avaliar o impacto dessa formação na promoção do raciocínio geométrico, na linha do trabalho realizado por Takker et al. (2022), em que identificaram, após uma formação específica com futuros professores, uma promoção dos níveis do raciocínio geométrico.

Referencias

- Adler, J. y Ronda, E. (2015). A Framework for Describing Mathematics Discourse in Instruction and Interpreting Differences in Teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 19(3), 237–254. <https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1089677>
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI study* (pp. 37–52). Kluwer.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5–53.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Fernández, T. (2012). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. [Thesis, Facultad de Ciências da Educação]. Repositório Institucional da Universidade de Granada https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernandez_tesis.pdf
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127–135.
- Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática para o Ensino Básico*. Ministério de Educação e Ciência: Lisboa, Portugal.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbals, A. y Arzarello, F. (2008), “Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework”, *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 165–178. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-008-0086-z>
- Kuzniak, A. (2018). Thinking About the Teaching of Geometry Through the Lens of the Theory of Geometric Working Spaces. In: P. Herbst et al. (eds) *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME-13 Monographs* (pp. 5 – 21). Springer.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 691–719. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education*, 51(3), 319–329.

Takker, S., Ratnayake, I. y Adler, J. (2022). Framework for analysing secondary mathematics teachers' development of geometric reasoning. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 83-90). PME.