

POTENCIALIDADES Y RETOS DEL USO DE LA REALIDAD VIRTUAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Potentials and challenges of the use of virtual reality for geometry education

Romero Albaladejo, I. M.

Universidad de Almería

Resumen

La realidad virtual tiene actualmente el potencial de producir transformaciones significativas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Los estudios realizados hasta el momento constatan las mejoras que produce el uso de esta tecnología en la motivación y la confianza en el aprendizaje, la visualización, las habilidades espaciales y el compromiso interactivo de los estudiantes. No obstante, hay una demanda de estudios empíricos sobre su integración efectiva en las aulas y su repercusión a nivel curricular. En esta línea, en el equipo de investigación sobre el software de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR venimos llevando a cabo experimentos de enseñanza en diversos niveles educativos, bajo el paradigma de la Investigación de Diseño. En esta ponencia exponemos los principales beneficios obtenidos, los retos afrontados y las líneas de trabajo futuro.

Palabras clave: *geometría, NeoTrie, realidad virtual, realidad virtual inmersiva.*

Abstract

Virtual reality currently has the potential to produce significant transformations in the teaching and learning of geometry. Studies so far have shown improvements in motivation and confidence in learning, visualization, spatial skills, and interactive engagement of students through the use of this technology. However, there is a demand for empirical studies on its effective integration in the classroom and its impact on the curriculum. Along this line, the research team on the immersive virtual reality software NeoTrie VR has been conducting teaching experiments at various educational levels, under the paradigm of Design Research. In this paper we present the main benefits obtained, the challenges faced and the lines of future work.

Keywords: *geometry, NeoTrie, immersive virtual reality, virtual reality.*

INTRODUCCIÓN

En el siglo XXI, la incorporación de recursos tecnológicos en la enseñanza se considera necesaria en una sociedad de nativos digitales. Las posibilidades educativas que se crean con la implementación de las tecnologías digitales en las clases deben dar lugar a innovaciones metodológicas que representen una transformación del paradigma educativo tradicional. En particular, tecnologías como la realidad aumentada y la realidad virtual tienen el potencial, no solo de complementar, sino de generar cambios significativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría (Moral-Sánchez y Siller, 2022). De acuerdo con Dindyal (2015), la enseñanza de esta materia debería ir más allá de presentar a los escolares una disciplina centrada en el etiquetado y la clasificación de formas; debería tener un enfoque más dinámico y transformativo, desarrollando el sentido espacial y la capacidad de crear en los escolares; sobre todo, teniendo en cuenta estos son capaces de sobrepasar las expectativas curriculares, si tienen oportunidades adecuadas para hacerlo (Moss et al., 2015). Para ello, la enseñanza debe cubrir un rango variado de aproximaciones, incluyendo el juego. Los sistemas de geometría dinámica en 3D han generado importantes expectativas en este sentido. En opinión de Ng y Sinclair (2018), al posibilitar el hacer matemáticas en el espacio tridimensional, dichos sistemas pueden transformar una tradición de dos milenios de dibujar bidimensionalmente en la arena, el papel y las pantallas.

A principio de siglo, Presmeg (2006) indicaba la necesidad acuciante de aumentar el uso y poder de la visualización espacial en la educación matemática y de disponer de herramientas para ello. Según Cevikbas et al. (2023), los entornos virtuales pueden utilizarse para visualizar objetos y estructuras geométricas de una forma más inmersiva, realista e interactiva, permitiendo explorar, representar y manipular formas y figuras en tres dimensiones. Esta oportunidad puede ayudar especialmente al alumnado a mejorar sus habilidades de razonamiento espacial y profundizar en su comprensión de los conceptos geométricos. Además, desde el punto de vista pedagógico, las actividades llevadas a cabo en entornos virtuales hacen el aprendizaje más atractivo y aumentan la participación activa de los estudiantes, lo cual incrementa su motivación y les lleva a querer continuar expandiendo su conocimiento (Moral-Sánchez y Siller, 2022).

Ante un panorama tan prometedor, autores como Cevikbas et al. (2023) y Dilling y Sommer (2022) reclaman la necesidad de estudiar las posibles ventajas e inconvenientes de las tecnologías de realidad virtual en el aprendizaje de las matemáticas a partir de estudios empíricos. Esto contribuirá a garantizar que los recientes avances y tendencias de la investigación, así como el éxito de la aplicación de estas tecnologías, se guíen por evidencias y no por especulaciones que pueden dar lugar a exageraciones.

Este trabajo consta de dos partes. En la primera, describimos diferentes tipos de realidad virtual, revisamos los estudios sobre su inclusión en la educación matemática y geométrica, y exponemos los principales beneficios y limitaciones detectados en la literatura hasta el momento actual. En una segunda parte, presentamos la experiencia de nuestro grupo de investigación con el software de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR (en adelante, Neotrie).

TIPOS DE REALIDAD VIRTUAL

La realidad virtual supone un cambio cualitativo con respecto a otras tecnologías, como la televisión o la pantalla de un ordenador, ya que produce representaciones altamente realistas y permite a las personas interactuar con objetos virtuales. Dentro de las tecnologías de realidad virtual, podemos distinguir distintos grados de interacción con la realidad y la virtualidad, en un abanico que va desde la Realidad Aumentada (RA) a la Realidad Virtual Inmersiva (RVI). Mientras que las tecnologías de RA superponen información virtual al mundo real y permiten a los usuarios interactuar con contenidos tanto reales como virtuales, las tecnologías de RV transportan al usuario a un entorno virtual con el objetivo de sumergirlo completamente en ese (Milgram y Kishino, 1994). Para el usuario, la diferencia radica en el nivel de inmersión: en la RA, la perspectiva del usuario sigue siendo principalmente la del mundo real, que observa desde un móvil o tableta, mientras que en la RV, el usuario está totalmente inmerso en un entorno virtual. La realidad mixta (RM) combina ambos tipos, permitiendo al usuario interactuar con objetos virtuales en su entorno real.

Además, hay que tener en cuenta el nivel de interactividad, que mide el grado de implicación del usuario con el entorno virtual, el cual suele lograrse mediante el uso de sensores y dispositivos de entrada, como teclados o joysticks. Rodríguez (2022a) propone una serie de niveles basados en el grado de interacción del individuo con los objetos virtuales, considerando una figura geométrica o cualquiera de sus elementos, como un vértice, y la manera de agarrar y manipular el objeto:

- Un vértice en el plano visto en una pantalla 2D y una mano con el ratón seleccionando y moviendo el punto. Todos los SGD (software de geometría dinámica) 2D suelen funcionar de esta manera.
- Un vértice en el espacio visto en una pantalla 2D y una mano con el ratón seleccionando y moviendo el punto, no se sabe bien en qué dirección. La mayoría de software de diseño 3D, como Blender, Autocad, etc. incorpora 3 vectores ortogonales que indican las direcciones a las que se pueden mover los vértices, o se puede utilizar una tecla del teclado para establecer la dirección deseada.

- Un vértice en una pantalla táctil para seleccionarlo y moverlo con el dedo. Así se utiliza en los teléfonos móviles y tabletas actuales en RA; por ejemplo, GeoGebra-AR. Ahora bien, no es fácil mover un punto (u objeto) en el espacio. Esto se resuelve en la RV inmersiva usando cascos HMD con controladores de mano. El software de realidad mixta GeoGebra MR y otros sistemas de RV, como la serie HTC Vive, Windows Mixed Reality, Oculus Rift/S/Quest, utilizan los botones laterales, de modo que cuando te acercas a un objeto y aprietas la mano, parece que lo estás sujetando, y puedes moverlo cómodamente.
- Un vértice en una escena de RV que puedes tocar con tus manos virtuales. Neotrie utiliza controladores, que el jugador ve como manos que permiten agarrar el vértice (u objeto) y moverlo en la dirección deseada, que coincide exactamente con la dirección real del espacio.
- Mayores niveles de interacción: la consecución de una interacción casi real con los objetos virtuales se está desarrollando con dispositivos como guantes hápticos. Es de suponer que su precisión irá mejorando cada vez más, aunque la posibilidad de tener mandos en las manos para pulsar diferentes botones podría ser ahora mismo la más adecuada para la geometría dinámica en RV.

La dificultad de la RA actual para la enseñanza de la geometría es que el arrastre o manipulación de los puntos se sigue haciendo sobre una pantalla, antes con el ratón sobre la pantalla del ordenador y ahora con el dedo sobre la pantalla de un dispositivo móvil. Esta dificultad se supera con los sistemas de RV de alta calidad, que facilitan la interacción directa con los objetos 3D, gracias a sus controladores manuales. Los programas informáticos RVI generan nuevos métodos de aprendizaje en los que, mediante una interacción dinámica, intervienen los sentidos táctil (motor), visual y auditivo. Esta posibilidad de proporcionar un espacio en el que los alumnos de todos los niveles podrían utilizar sus manos para actuar directamente sobre objetos matemáticos, sin necesidad de mediar intuiciones a través de ecuaciones, sistemas de símbolos, teclados o clics de ratón ha llevado a algunos autores a pensar que nos encontramos al inicio de una nueva revolución en el ámbito educativo, la llamada "Revolución Kinestésica" (Rodríguez et al., 2021).

Las expectativas generadas por los potenciales beneficios de la aplicación de la realidad virtual al campo de la educación en general y de la educación matemática han atraído una atención considerable en los últimos años. A continuación, presentamos una panorámica de cómo estas tecnologías se han ido incorporando a la educación matemática y, en particular, a la enseñanza de la geometría, a través de estudios empíricos y sus resultados.

INFLUENCIA DE LA REALIDAD VIRTUAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA GEOMETRÍA

Los primeros trabajos sobre el uso de realidad virtual para la enseñanza de las matemáticas, centrados en la geometría, aparecen a finales del pasado siglo y primera década del siglo XXI (Cross y Hanson, 1994; Kaufmann et al., 2000; Yeh y Nason, 2004; Kauffmann, 2009; Song y Lee, 2002). Desde entonces, la cantidad de estudios sobre el tema ha ido creciendo y en los últimos años han aparecido revisiones sistemáticas de la literatura, como las realizadas por Ahmad y Junaini (2020) y por Palanci y Turan (2021), que informan sobre las mejoras que produce el uso de RA en la motivación y la confianza en el aprendizaje, la visualización, las habilidades espaciales y el compromiso interactivo. Sin embargo, también revelan problemas asociados de carácter técnico y de costes, así como dificultades para comprender conceptos matemáticos visualmente.

La revisión realizada por Cevikvas et al (2023) sobre el uso de RA y RV en el aprendizaje de las matemáticas publicados en revistas indexadas en WoS y SCOPUS constata que la investigación se centra en gran medida en la geometría (53% de los 59 trabajos analizados). El álgebra es la segunda área más estudiada (22% de los estudios), seguida de una mezcla de algunos dominios (por ejemplo, geometría, álgebra y cálculo) (6% del total). El análisis muestra un aumento de las publicaciones

sobre el tema a partir de 2018, lo que denota el considerable interés de los investigadores y el hecho de que las aplicaciones de las tecnologías RA/RV en el panorama educativo han proliferado en los últimos años. Las tecnologías de RA se utilizaron con mucha más frecuencia que las de RV en contextos educativos (80% frente al 15% de los estudios revisados, abarcando el 5% ambas tecnologías). Los autores aducen diversas razones: que los sistemas de RV son complejos y tienen un coste relativamente elevado, por lo que pueden resultar prohibitivos para muchas instituciones educativas; que el desarrollo de aplicaciones de RV requiere considerables conocimientos técnicos; que las tecnologías de RA, disponibles desde dispositivos móviles, tienden a ser más accesibles que las de RV; y, por último, que hay una falta de conocimiento de los posibles beneficios y aplicaciones de la RV.

En los 59 trabajos incluidos en la revisión de Cevikbas et al. (2023) están representados 25 países, siendo Asia y Europa aquellos con más autores contribuyendo a este campo de estudio (45% y 33%, respectivamente). España ocupa un lugar destacado, con un 28% aproximadamente de los autores europeos y 7 trabajos analizados: 2 en álgebra y cálculo, y el resto en geometría, en diversos niveles educativos, tanto con RA (Flores-Bascuñana et al., 2019; Pozo-Sánchez, 2021) como con RV (Cangas et al., 2019; Rodríguez et al., 2021) y RA/RV/RM (Cabero-Almenara et al., 2021). En los simposios de la SEIEM, podemos encontrar también algunas aportaciones con RA (Sua et al., 2021), RV (Chavil-Montenegro et al., 2021; Moral-Sánchez et al., 2022) y RA/RV/RM (Rotger et al., 2021).

La mayor parte de los trabajos revisados por Cevikbas et al. (2023) se ubican en los niveles de primaria y secundaria y todos ellos aportan pruebas relativas a los efectos favorables de la tecnología de RA/RV en el aprendizaje. Como se apunta en las revisiones precedentes, los beneficios socioemocionales son los más frecuentes, junto con la mejora de las habilidades visuoespaciales de los estudiantes y el aumento de su compromiso con el aprendizaje. Así, un número significativo de los estudios considerados señalaron que la RA y la RV aumentaban el interés, la motivación de los estudiantes por aprender y la curiosidad por las matemáticas. Otra característica destacada de estas tecnologías es su capacidad para proporcionar a los usuarios experiencias de aprendizaje interactivas y dinámicas que, a su vez, fomentan la interacción social entre ellos. Varios estudios han indicado que la RA/RV representa una buena oportunidad para que los estudiantes mejoren sus habilidades de pensamiento visual y favorece el desarrollo de sus capacidades espaciales. Además, según los estudios revisados, mediante el uso de la RA/RV, los estudiantes se vuelven más independientes y autónomos en sus procesos de aprendizaje de las matemáticas.

No obstante, también hay estudios que no obtienen diferencias significativas o resultados concluyentes sobre el uso de RV (Carbonell-Carrera y Saorín, 2017; Dünser et al., 2006); Kang et al., 2020; Seabra y Santos, 2013). Ello nos lleva a plantear la cuestión metodológica, ya que, si bien Kang et al. (2020) no obtuvieron diferencias significativas en una prueba específica de conocimientos entre el grupo control y el experimental utilizando un recurso de RVI, los propios estudiantes afirmaban que había mejorado su capacidad para imaginar los conceptos asociados. Dünser et al. (2006) observaron resultados interesantes sobre el entrenamiento de habilidades espaciales mediante el uso de RA que no se vieron reflejados en los instrumentos de recogida de datos empleados en el estudio. También Morales y Codina (2020) constataron que los buenos resultados de aprendizaje detectados en las sesiones con el software de RVI Neotrie no fueron reflejados en la misma medida en el postest. En su revisión, Cevikbas et al. (2023) encontraron una prevalencia de métodos de investigación cuantitativos con tamaños de muestra pequeños. Los autores plantean la necesidad de estudios a gran escala que puedan ayudar a visualizar el panorama general en términos del impacto de las tecnologías RA/RV en el aprendizaje; no obstante, el reclutamiento de muestras más grandes puede ser un reto debido a los costes y los desafíos logísticos asociados a la implementación de tecnologías de RA/RV en entornos educativos, especialmente en el caso de estas últimas. Otra vía sería la de estudios de investigación cualitativa en profundidad que faciliten un examen exhaustivo de este impacto.

Por otra parte, Won et al. (2023) recomiendan que los futuros estudios empíricos reconozcan los enfoques teóricos y las teorías del aprendizaje a la hora de diseñar y evaluar el aprendizaje con RVI. Además, detectan que los estudios con este tipo de tecnología son en su mayor parte trabajos experimentales y de desarrollo, en lugar de aplicarse regularmente en la enseñanza real. Cevikbas et al. (2023) señalan, por otra parte, la falta de estudios sobre la efectividad de la RV para mejorar la competencia matemática del alumnado y sus habilidades para resolver problemas. Entre las razones que frenan la incorporación de estas tecnologías al currículo de forma regular, dichos autores señalan inconvenientes relacionados con: deficiencias técnicas (infraestructura deficiente, falta de dispositivos y software) y fallos tecnológicos (problemas de conexión a Internet, problemas audiovisuales); dificultades de accesibilidad para todo el alumnado relacionados con el coste de los dispositivos y de los largos tiempos de uso que estos requieren para los estudiantes individualmente; así como posibles problemas de salud relacionados con el elevado tiempo que se pasa frente a la pantalla y el pequeño tamaño de las pantallas de los dispositivos móviles, en el caso de la RA, y en el caso de la RVI, mareos o problemas de visión mediante gafas virtuales. Todo esto lo tienen en cuenta los profesores, que ven con precaución la gran inversión de esfuerzo que han de realizar para incorporar esta tecnología a sus aulas.

Sin embargo, a medida que las tecnologías de RV sigan evolucionando y se hagan más asequibles, es probable que aumente su uso con fines educativos. De ahí la pertinencia de intervenciones en las aulas de matemáticas que aborden el tema de forma sistemática y estén basadas en la investigación, con objeto de proporcionar directrices y ejemplos de las mejoras prácticas. En la segunda parte de este trabajo, exponemos cómo venimos realizando la investigación sobre el desarrollo y uso en las aulas del software de RVI Neotrie por parte del grupo de investigación al que pertenezco, en la Universidad de Almería. A continuación, presentamos el software y sus características; los interrogantes que guían nuestra investigación; los planteamientos metodológicos comunes y las particularidades de los distintos estudios realizados; los resultados obtenidos, los retos afrontados y las líneas de trabajo futuras.

NEOTRIE

Neotrie VR es un SGD 3D de RVI para la enseñanza y aprendizaje de la geometría que se está desarrollando en la Universidad de Almería desde 2017 y en el que participamos un equipo multidisciplinar que integra matemáticos, programadores, especialistas en Educación Matemática y docentes de primaria y secundaria. Paralelamente al desarrollo del software, hemos venido realizando trabajos sobre su implementación en aulas reales en diversos niveles educativos y con distintos tópicos geométricos. (Más información en <https://www2.ual.es/neotrie/>).

La principal característica de Neotrie, que lo destaca de otros softwares similares, es la de poder crear y manipular figuras geométricas directamente con las manos virtuales. Las acciones básicas de Neotrie se realizan pulsando un botón de un mando físico. Al hacerlo, aparece un menú de acciones, que se activan cuando el usuario pasa por encima de las manos virtuales (Figura 1a). Estas acciones incluyen: crear vértices (puntos), aristas, caras, modificar su posición en el espacio, borrar elementos de las figuras, realizar anotaciones 3D, extruir figuras, trasladar y rotar formas en su conjunto, o visualizar la información básica de cada forma construida, así como el número de vértices, aristas, caras, longitudes, áreas, volúmenes, etc.

Además, Neotrie contiene una diversidad de herramientas (Figura 1b), las cuales se han desarrollado conjuntamente entre los equipos de investigación y de desarrollo para que sean intuitivas, fáciles y coherentes, tanto en su significado matemático como en la experiencia del usuario, de forma que:

- Todas las herramientas y formas creadas pueden sujetarse con las manos virtuales para moverlas hacia donde el usuario desee.
- Cada herramienta dispone de un vídeo con instrucciones de uso.

- Todas las formas y sus elementos pueden colorearse.
- Algunas herramientas están codificadas por colores, lo que hace su uso más intuitivo.
- Las herramientas están optimizadas en función de los gestos naturales realizados con las manos. Por ejemplo, el arrastre simultáneo con ambas manos produce una transformación homotética de la forma que se está arrastrando, incluso puede uno adentrarse en la figura agrandada y explorarla desde el interior. La opción de unión permite al usuario hacer formas más complejas a partir de otras simplemente juntando dos vértices cualesquiera de la misma.
- Algunas formas dependen de los parámetros que se visualizan y pueden ser modificadas virtualmente tocando el menú de botones de estas herramientas, como es el caso de las herramientas de rotación, deslizador o interpolador entre dos puntos.

Figura 1a. Menú de acciones básicas

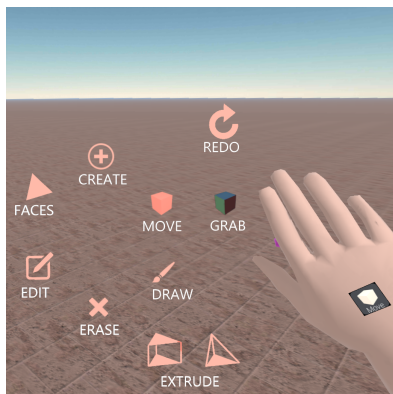
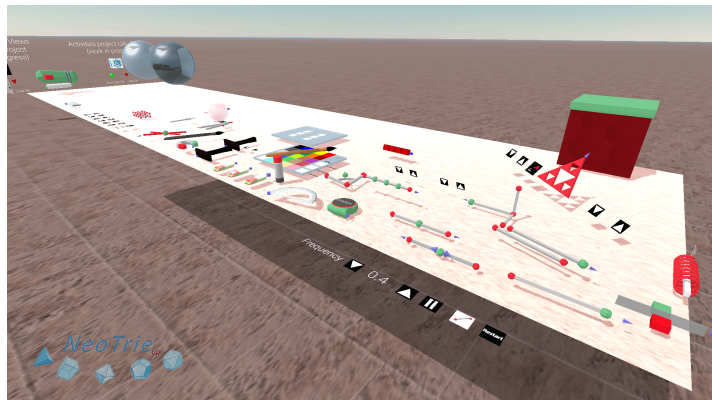


Figura 1b. Mesa de herramientas



Algunas de las herramientas diseñadas en Neotrie son comunes a todos los SGD, pero se han adaptado a 3D, y otras se han desarrollado específicamente a partir de la evaluación sistemática del software ofrecida por docentes e investigadores. Así, por ejemplo, entre las herramientas comunes de los SGD 2D y 3D, se encuentran las de dibujo clásicas, como un pincel y una paleta de colores, un sello para copiar y pegar, una goma de borrar para eliminar formas enteras, herramientas de rotación, reflexión, puntos medios, líneas paralelas, transportador de ángulos y cinta métrica. Dado el entorno tridimensional, algunas de las herramientas tienen características diferentes de las que se encuentran normalmente en un SGD-2D. Por ejemplo, la herramienta de intersección muestra el punto de intersección de dos líneas rectas cuando se encuentran o los dos puntos más cercanos si se cruzan. Otra de las principales características de los SGD es que ofrecen herramientas de trazado y movimiento automático, especialmente útiles para observar loci geométricos. En este caso, Neotrie permite al usuario ver el trazado de los objetos cuando se arrastran o cuando se incorpora movimiento. Además, existe una herramienta de etiquetado que añade información sobre los elementos de las formas y todos los datos se actualizan dinámicamente cuando el alumno modifica la posición de estos elementos; para ello, las coordenadas y las ecuaciones se basan en un sistema de coordenadas cartesianas móviles.

Entre las especificidades para SGD-3D, Neotrie dispone de ciertas herramientas para hacer actividades en un espacio tridimensional. La herramienta "imán" realiza movimientos seguidos de una rotación para colocar la forma en la posición correcta en las acciones de unión; esto es muy útil a la hora de realizar mosaicos, teselaciones 3D o fractales. Un sistema de vistas permite visualizar la planta, alzado y perfil de los objetos geométricos. La herramienta "escáner" muestra la proyección de una forma en cualquier dirección, así como la sección de la misma con el plano. También una calculadora gráfica 3D hace posible representar curvas y superficies paramétricas.

Por otra parte, Neotrie permite realizar actividades STEAM. Además de las formas geométricas geométricas 3D, es posible insertar objetos 3D en formatos STL u OBJ, importados de programas de

diseño 3D. Pueden añadirse imágenes y vídeos manipulables, por ejemplo, personalizando los escenarios con imágenes de 360°. Una cámara permite al profesor cambiar entre las vistas en primera y tercera persona, así como elegir la opción estereoscópica en ambas vistas. La ventaja que encontramos al trabajar en una pizarra 3D en RV es que el jugador (con la cámara en primera persona) puede girar la cabeza para tener rápidamente distintas perspectivas de la figura, lo que ayuda a recrear mentalmente la figura en el resto de los espectadores. La cámara en tercera persona muestra una vista fija de nosotros, representados por nuestro avatar, trabajando en la escena de RV. Se pueden hacer gestos "en el aire", señalar o servir de apoyo en algún razonamiento espacial, etc. Esta cámara también se puede mover para mostrar perspectivas diferentes. Desde el punto de vista del profesor, esta herramienta es muy útil para explicar conceptos y razonamientos en 3D.

Con todas estas características, vemos que Neotrie se sitúa en un nivel alto, cercano a la realidad, dentro de la escala presentada en el segundo apartado.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Una vez expuesta la potencialidad del software NeoTrie VR para la enseñanza de la geometría, y teniendo a los desarrolladores de un recurso tan atractivo en la Universidad de Almería, nuestro grupo de investigación e innovación en la didáctica de la geometría se plantea las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿Cómo introducir Neotrie en aulas reales?
- ¿Qué contenidos son apropiados para aprovechar su potencial y hacer una contribución relevante a las demandas curriculares actuales?
- ¿Cómo diseñar actividades con una demanda cognitiva apropiada para el alumnado? ¿Qué marcos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría, y de la matemática en general, pueden informar el diseño de las actividades y la evaluación de su implementación?
- ¿Qué resultados se consiguen?
- ¿Qué aportaciones podemos realizar desde la práctica educativa para la mejora del software?

METODOLOGÍA

Estamos de acuerdo con Martín-Gutiérrez et al. (2017) en que la forma en que se usen los recursos tecnológicos tiene influencia en los resultados de aprendizaje. Es posible hacer uso de la tecnología de RVI visualizando de forma pasiva, siguiendo simplemente un conjunto de instrucciones, o bien a través de la inmersión y la interactividad. Esta última forma de utilización constituye la piedra angular de este recurso y requiere de un andamiaje pedagógico para diseñar escenarios virtuales que saquen el máximo partido al aprendizaje.

La Investigación de Diseño (Prediger et al., 2015; Molina, 2021) es especialmente apropiada para este propósito. Dadas nuestras circunstancias particulares, este paradigma ofrece un marco ideal para la colaboración entre los ingenieros diseñadores del software, los investigadores universitarios y los centros de enseñanza, de manera que puedan explorarse una variedad de diseños, tanto de herramientas como de las actividades, e ir ajustando el software y las tareas de acuerdo con las necesidades reales de la práctica educativa. De esta forma, podemos generar conocimiento acerca de en qué contextos, de qué manera y en qué medida funcionan las innovaciones tecnológicas, así como dar razones para ello. Ello permite un desarrollo continuo gracias a la interrelación entre desarrolladores, profesores, investigadores y usuarios, los cuales permanecen en comunicación tanto durante la ejecución del experimento educativo como en los posteriores análisis retrospectivos de las experiencias.

Así pues, consideramos por una parte el desarrollo y diseño de Neotrie, utilizando la metodología de Investigación de Diseño desde la perspectiva de la Ingeniería de Software (Özyurt y Özyurt, 2019).

Y, por otra parte, la experimentación y evaluación de los hallazgos obtenidos en diversos experimentos de enseñanza, dentro del marco de la Investigación de Diseño educativa, llevados a cabo en aulas reales (Confrey y Lachance, 2012). A través de un proceso de investigación sistemático, flexible y colaborativo llevado a cabo en ciclos de diseño-desarrollo-implementación-análisis, se puede conseguir una mejora paulatina del fenómeno en su globalidad. Nuestro equipo de trabajo multidisciplinar está formado por la spin-off "Virtual Dor" y sus ingenieros de software, un matemático especializado en geometría y topología, y tres investigadores en Educación Matemática. Los usuarios son los propios investigadores en sus clases de universidad, junto a cinco profesores y sus alumnos de Educación Primaria y Secundaria. En lo que sigue, dada la audiencia a la que va dirigida esta ponencia, nos centramos en la descripción y el análisis de los experimentos de enseñanza llevados a cabo por el equipo.

EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA CON NEOTRIE

Coincidimos con Guss et al. (2022) en que las oportunidades para aprender matemáticas se maximizan cuando las prácticas con tecnología se diseñan teniendo en cuenta contenidos matemáticos fundamentales, centrándose en el pensamiento y el aprendizaje de los estudiantes, y guiados por el conocimiento generado por la investigación, en nuestro caso sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Desde que comenzamos nuestra andadura, en el año 2019, hemos implementado un total de 8 experimentos de enseñanza, que abarcan diferentes niveles educativos: 2 estudios en educación primaria (Morales y Codina, 2020; Morales et al., 2023; Romero et al., 2023); 3 estudios en educación secundaria (Chavil-Montenegro et al., 2021; Moral-Sánchez et al., 2023; Sorroche et al., 2023); y 3 en universidad: 1 en la titulación de Maestro (Codina et al., 2022) y 2 en la titulación de Matemáticas (Rodríguez, 2022a; Rodríguez, 2022b). Además, se han realizado diseños experimentales piloto, aprovechando ferias de ciencia, semanas culturales en institutos, campus tecnológicos, etc. Los tópicos tratados se refieren a contenidos curriculares fundamentales en geometría que presentan dificultades relacionadas con la tridimensionalidad (estudio de características y propiedades de los poliedros, cálculo de volúmenes y superficies, álgebra lineal y topología algebraica), junto con un contenido no incluido en el currículo español, pero con posibilidades interesantes para trabajar competencias exigidas actualmente: los fractales.

Dentro del paradigma de la investigación de diseño con el que se han llevado a cabo los experimentos, estos difieren en duración y metodología didáctica, que se ha tenido que adaptar a los contextos y condiciones particulares, así como a las posibilidades de Neotrie en sus distintas etapas de desarrollo. En cualquiera de los casos, hemos pretendido explotar el potencial de Neotrie para optimizar la demanda cognitiva de las actividades propuestas al alumnado. El modelo del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak y Richard, 2014) nos ha resultado útil en este entorno tecnológico y nos ha servido como referente a fin de diseñar actividades que propicien un trabajo lo más coherente y completo posible por parte del alumnado. Para ello, según los autores, es necesario articular dos planos interconectados: el epistemológico y el cognitivo. El plano epistemológico se compone de tres polos; a saber, el referencial (que comprende las propiedades, teoremas y definiciones), representaciones (signos semióticos) y artefactos (materiales o simbólicos). El plano cognitivo consta de los procesos de visualización, construcción y prueba. Los planos se articulan mediante tres tipos de génesis: Génesis Semiótica (basada en los registros de representación semiótica, que otorga el estatus de objeto operativo matemático a los objetos tangibles); Génesis Instrumental (que hace operativos los artefactos en el proceso de construcción); y Génesis Discursiva (que da sentido a las propiedades del razonamiento matemático). En este modelo, las génesis no operan separadamente, sino que necesitan interactuar para dar sentido al trabajo matemático. Ello da lugar a los planos verticales que conectan dichas génesis: Plano de Comunicación [sem-dis] (está orientado hacia la comunicación matemática y se apoya esencialmente en las génesis semiótica y discursiva); Plano de Descubrimiento [sem-ins] (privilegia la identificación y la exploración de los objetos apoyándose en

la génesis semiótica e instrumental para desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos; y Plano de Razonamiento [ins-dis] (desarrolla el razonamiento matemático fundado en la justificación de descubrimientos, que articula la génesis instrumental y la discursiva) (Figura 2a).

Dependiendo de las circunstancias específicas de los centros de enseñanza, hemos operativizado el trabajo matemático a realizar. En aquellos casos en los que la mayor parte del alumnado no tenía acceso a las gafas y mandos, se ha trabajado fundamentalmente en el plano de Comunicación [sem-dis]. Así, por ejemplo, para los contenidos de poliedros, siguiendo la teoría de Vinner (1983), se han creado galerías de ejemplos (prototípicos y no prototípicos) y contraejemplos de distintas familias de poliedros, con objeto de posibilitar una conceptualización rica de estos objetos matemáticos, basándose en la asimilación de sus características y propiedades. Hemos de destacar la versatilidad de Neotrie para la creación de estos ejemplos y contraejemplos, algo que es muy difícil de hacer con materiales físicos. También el compartir en una pantalla grande las escenas en Neotrie ha sido importante para el trabajo en gran grupo, debido al tamaño habitual de los materiales físicos. A partir de las interacciones, se pueden editar y modificar figuras a conveniencia, según lo requieran los argumentos, conjeturas y dudas del alumnado (Figura 2b). Las respuestas de los estudiantes, tanto individuales como grupales a las cuestiones de indagación planteadas a partir de las imágenes se han registrado a través de plataformas interactivas como Wooclap, cuestionarios y grabaciones de audio.

Figura 2a. Espacios de Trabajo Matemático.

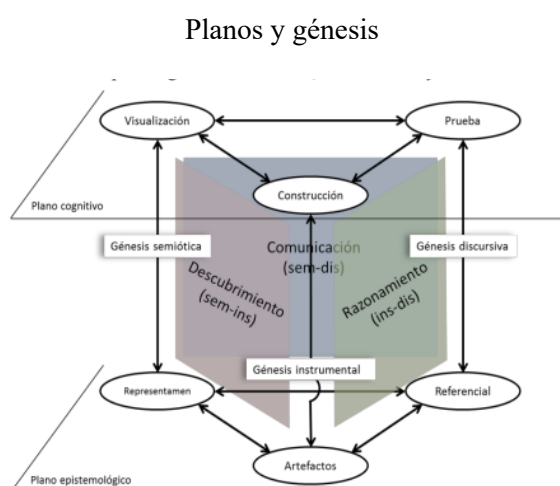
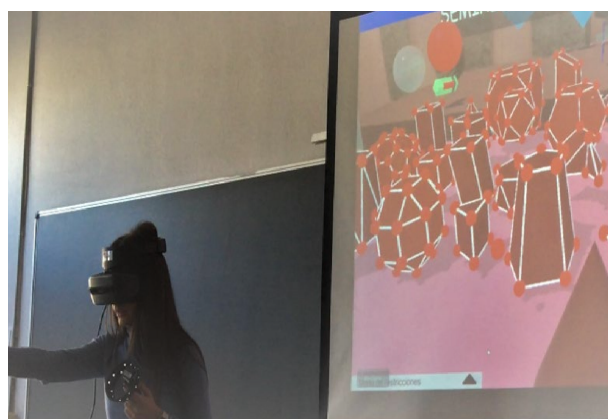


Figura 2b. Trabajo con Neotrie en el Plano de Comunicación



En experimentos en los que la mayoría del alumnado tenía acceso al recurso, trabajando en pequeños grupos, ha sido posible también trabajar la génesis instrumental, junto con los planos de Descubrimiento [sem-ins] y Razonamiento [ins-dis]. Estos experimentos necesitan de más tiempo y disponibilidad del docente-investigador para dedicar sesiones previas al manejo individual de Neotrie, algo que los alumnos asimilan con rapidez y naturalidad, así como para guiar el trabajo de los grupos de forma continua. En estas sesiones, además de recoger los protocolos para la resolución de actividades, se realizaron grabaciones en vídeo de las interacciones del alumnado. Naturalmente, estos datos son mucho más costosos de analizar. Por ejemplo, para los contenidos de fractales, Neotrie permite a los estudiantes adentrarse en la representación de objetos planos y tridimensionales en el espacio. Ello da lugar a procesos de visualización diferentes a los habituales, que implican cambios de puntos de vista, organización de las figuras en el espacio, homotecias, etc. Mediante el uso dinámico de distintos tipos de representaciones y a través de la comunicación entre los estudiantes, los grupos captan el carácter iterativo y la autosimilitud de los fractales, y logran articular estas propiedades correctamente para construir fractales bi y tridimensionales. En los fractales más sencillos, los estudiantes se centran en la génesis instrumental, en la que avanzan por ensayo y error, comunicándose entre los integrantes para optimizar el proceso. Salvo casos excepcionales, Neotrie

resulta manejable para el alumnado y el avance en dicha génesis se produce rápidamente. Los progresos en la instrumentalización permiten un trabajo de instrumentación con el software al tratar de construir fractales más complejos, como la esponja de Menger, en la que los estudiantes trabajan en los planos de Comunicación, Descubrimiento y Razonamiento para iterar el fractal, desarrollando el pensamiento estructural (copias que harán falta para pasar de una iteración a la siguiente y posiciones que ocuparán dichas copias en el espacio) y articulando los pasos para su construcción de forma sistemática. El análisis de este trabajo del alumnado ha inspirado a los investigadores e ingenieros de Neotrie a crear la herramienta fractal y diseñar secuencias de aprendizaje que aprovechen el carácter recursivo de los fractales para desarrollar el pensamiento computacional, demandado en los currículos actuales. Por otra parte, el experimento ha servido para corregir errores en el código, en lo referente al pegado de figuras, y mejorar el rendimiento del programa, dado el número elevado de datos necesarios para visualizar en realidad virtual las iteraciones de algunos fractales.

RESULTADOS

Dado que nuestros experimentos se han realizado a pequeña escala, con un grupo-clase a lo sumo, la mayoría de los resultados obtenidos son de tipo cualitativo. No obstante, en algunos de los estudios se ha contrastado con grupos control, bien con clases paralelas que no habían utilizado Neotrie (Codina et al. 2022) o con grupos de estudiantes dentro de una misma clase que habían tendido un uso más reducido de Neotrie (Moral-Sánchez et al., 2023). En cualquiera de los casos, los resultados han sido positivos y se han obtenido beneficios que se resumen a continuación.

En el plano de comunicación (visual-discursivo), el alumnado de nuestros experimentos ha desarrollado habilidades de observación y reconocimiento de formas geométricas, permitiendo el paso de una visualización icónica de las figuras a una visualización no icónica, como objetos matemáticos cuyas partes pueden ser deconstruidas y sus elementos esenciales discriminados para formular caracterizaciones y clasificaciones de los distintos tipos de polígonos y poliedros. También los alumnos han desarrollado habilidades comunicativas, aprendiendo de forma natural y no memorística vocabulario geométrico. Este vocabulario, muchas veces “informal”, ha venido acompañado de lenguaje corporal, incluyendo el contacto físico, para expresarse y lograr ser entendidos por los compañeros a la hora de describir figuras y relaciones espaciales. De esta forma, tanto el alumnado de primaria y secundaria como los maestros en formación han construido imágenes ricas de los conceptos tratados, coordinadas con sus caracterizaciones y definiciones. En el caso de los futuros docentes, es importante que hayan sido expuestos a esta forma de trabajo y a la potencialidad de los recursos tecnológicos para llevarlo a cabo. Asimismo, nuestros estudios realizados con material manipulativo han mostrado la complementariedad de ambos recursos (Romero et al., 2023) y, en ocasiones, la superioridad de la RVI a la hora de desarrollar habilidades espaciales (Moral-Sánchez et al., 2023). En el nivel universitario, se ha tratado la complementariedad de Neotrie con otros recursos tecnológicos, como GeoGebra, con resultados más matizados en este caso (Rodríguez, 2022a).

En el Plano de Descubrimiento (Visual-Instrumental), Neotrie ha abierto las puertas al alumnado de un aprendizaje inductivo de contenidos geométricos importantes que no suelen tratarse habitualmente en los niveles básicos, como las simetrías de los sólidos, los fractales, los cuadriláteros en figuras tridimensionales, o los problemas de optimización de superficies en ortoedros. El tener acceso a distintos puntos de vista de las figuras, por medio del vuelo, las proyecciones o las secciones, les ha permitido familiarizarse con la estructura de los cuerpos geométricos. Gracias al manejo intuitivo del recurso, a la motivación del alumnado y a la facilidad con que ellos utilizan estas tecnologías, han podido representar y transformar figuras planas y espaciales, a través de herramientas como la extrusión, las reflexiones, el uso de las escalas o las iteraciones, descubriendo así distintas propiedades de dichas figuras. Es interesante comprobar la facilidad del alumnado más joven para realizar una génesis instrumental con naturalidad, incluso cuando se producían problemas técnicos, a

los que proponían soluciones propias indagando en los modos de uso de Neotrie y utilizando métodos alternativos para hacer una misma construcción.

En el Plano de Razonamiento (Instrumental-Discursivo), los estudiantes han afrontado retos cognitivos como la conceptualización de figuras geométricas bi y tridimensionales a partir de sus propiedades, incluyendo los fractales, o la optimización de superficies para un volumen dado. Apoyándose en las construcciones con Neotrie, a veces complementadas con materiales manipulativos, han practicado la formulación y comprobación de conjeturas; la justificación; la inducción de patrones y fórmulas; la distinción entre dimensiones y las relaciones entre ellas; el razonamiento por analogía entre dos y tres dimensiones (nociones de paralelismo, perpendicularidad, simetría); etc. Todo ello ha fomentado, además, el desarrollo de aptitudes de autorregulación de su aprendizaje, en colaboración con los compañeros y con la guía del profesorado solo cuando era considerado necesario.

A nivel socioafectivo, los experimentos realizados confirman los beneficios motivacionales y de interacción social de otros estudios. En nuestro caso, especialmente con el alumnado más joven, se ha logrado capitalizar el entusiasmo y la motivación iniciales en un interés genuino, concentración y esfuerzo adicional para explorar y resolver problemas de geometría, de modo que pudieran lograrse los objetivos cognitivos y curriculares planteados. El hecho de que profesores e investigadores hayan sido capaces de idear diferentes estrategias de colaboración para implicar a todo el alumnado en la generación de conocimiento, con un dispositivo en el que sólo una persona a la vez tiene acceso a la realidad virtual inmersiva, es otro logro notable. En el terreno de las interacciones, la incorporación de Neotrie se ha revelado como un agente mediador para que estudiantes con ritmos y necesidades diversas se impliquen en la resolución de las tareas. El papel de los docentes regulando la cantidad y duración de las intervenciones, ofreciendo oportunidades a todos para exponer sus ideas, solicitando el consenso en las respuestas, etc. ha sido fundamental y les ha permitido abordar competencias sociales relacionadas con el trabajo en equipo y el respeto a otras opiniones.

Por último, hemos de destacar la función esencial del profesorado participante en los experimentos como agentes creativos en el diseño y gestión de dinámicas con Neotrie, a menudo gamificadas, utilizando un enfoque inductivo para resolver problemas y tareas más o menos desafiantes. Ahora bien, es importante resaltar que el profesorado integrante del equipo es especial en cuanto a su aptitud y actitud para la innovación en las aulas de matemáticas y el manejo de recursos tecnológicos, así como en su disposición para colaborar con los diseñadores del software, implementar y ajustar sobre la marcha las actividades diseñadas, y colaborar en los procesos de investigación llevados a cabo.

RETOS, LÍNEAS ABIERTAS Y CONCLUSIÓN

En el terreno de la innovación, al principio de nuestra andadura, el equipo de investigación se planteó cómo introducir en aulas reales el software de RVI Neotrie, aprovechando al máximo su potencial para contribuir a las demandas curriculares actuales de la enseñanza de la geometría. Al diseñar e implementar los experimentos de enseñanza presentados, hemos tenido que hacer frente a retos diversos. En primer lugar, destinar un buen número de sesiones a trabajar tópicos a los que se suele dedicar poco tiempo en las clases de primaria y secundaria, como los que tienen que ver con geometría tridimensional, o con temas como los fractales y los problemas de optimización, los cuales, si bien atienden a competencias demandadas en los currículos actuales, no forman parte de los contenidos habituales de esos niveles en nuestro país. Los problemas técnicos y logísticos han supuesto otro consumo de tiempo y energía. En efecto, para emitir lo que el jugador está viendo dentro de Neotrie a tabletas u ordenadores que no sean de juego es necesario ampliar el ancho de banda disponible en las escuelas. Para crear una red Wi-Fi local mejor que la proporcionada por el centro educativo, los profesores han probado varias opciones, incluyendo la de usar teléfonos móviles particulares. Aún así, la puesta en marcha de los equipos y los apagones que obstruyen el flujo de las actividades sigue siendo un problema importante. Por otra parte, debido al carácter individual de la experiencia

inmersiva, los docentes han dedicado tiempo extra a enseñar al alumnado el manejo de Neotrie. Toda esta inversión se amortizaría haciendo un uso más regular de Neotrie en las clases de geometría; algo posible (Cangas et al., 2019), pero difícil para docentes ya sobrecargados por tareas administrativas y sin tiempo reconocido para la innovación. Además, estos docentes han mostrado su implicación al informar de los problemas del programa a los desarrolladores y contribuir con sus necesidades e intereses al desarrollo de Neotrie, así como al recoger datos durante las implementaciones y colaborar con el equipo investigador en su análisis y difusión de resultados.

Por lo que respecta a la investigación, hemos tenido en cuenta cuestiones pendientes en la agenda, como la de basar nuestras propuestas en marcos teóricos para la didáctica de la geometría, describir cómo la RVI puede ser adoptada en el currículo para dar respuesta a las demandas actuales, e informar de los aprendizajes que se logran en entornos reales a través de su uso (Cevikbas et al., 2023; Won et al., 2023). No obstante, reconocemos que los resultados cuantitativos obtenidos se refieren a muestras pequeñas y que los datos cualitativos no se refieren a individuos, sino a grupos de estudiantes, y son aún preliminares. Es en los estudios cualitativos en profundidad, también demandados por la agenda investigadora, donde radica nuestro mayor potencial. Especialmente interesante es el análisis de las grabaciones de vídeo, ya que los trabajos escritos tienen limitaciones a la hora de capturar el flujo de procesos cognitivos, comunicativos, afectivos y de manejo del recurso. Hay muchas cosas que vemos en nuestro contacto continuado con la práctica, pero que son costosas de informar con el rigor y la sistemática que la comunidad académica demanda. Por otra parte, la utilización de marcos apropiados para el análisis de los datos obtenidos permitirá sacar a la luz aspectos que nos pasan desapercibidos.

En cuanto al desarrollo de Neotrie, desde sus inicios, tanto el software, diseñado con el programa Unity para videojuegos y entornos 3D, como el hardware requerido han ido transformándose para adaptarse más y mejor a las necesidades de los usuarios particulares y de los centros educativos. En sus comienzos, era necesario contar con un equipo de realidad virtual (como htc Vive u Oculus Rift S) conectado a un ordenador con tarjeta gráfica potente, típica de videojuegos. Dichos equipos incluían sensores de posicionamiento y controladores para interactuar con el mundo virtual. El software también contaba con un sistema de reconocimiento de voz que permitía a los usuarios invocar formas geométricas nombrándolas en voz alta, dentro de un escenario que reproducía un templo griego. En la actualidad, el escenario se ha simplificado y se ha prescindido de la función de voz para adaptar el programa a Meta Quest 2/3, un sistema de RV autónomo (es decir, sin ordenador de juego ni cables), más asequible para las escuelas, pero no exento de problemas, como hemos señalado anteriormente. Se está desarrollando un modo multijugador, que permite a varios usuarios trabajar en la misma escena virtual, favoreciendo la interacción y aprendizaje colaborativo entre el alumnado. El juego ya dispone de cajas de actividades variadas de distintos temas y niveles educativos, con sus respectivas guías en la web del software, acompañadas de vídeos de ayuda. El avance es significativo, pero quedan retos muy interesantes todavía por delante, como la de adaptar el juego a las recién llegadas Meta Quest 3, con la posibilidad de realidad mixta en color, y con la mejorada versión de seguimiento de manos. El poder importar ficheros de GeoGebra es también un plan muy atractivo a desarrollar en los próximos meses, ofreciendo a los usuarios de GeoGebra sumergir sus actividades en realidad virtual.

Queremos concluir este trabajo llamando la atención sobre el hecho de que, desde los comienzos de la realidad virtual en la década de los 90, las expectativas suscitadas han estado por debajo de la aceptación del gran público y de su repercusión a nivel educativo. En lo que toca a la enseñanza de la geometría, una materia a priori tan susceptible de beneficiarse de esta tecnología, también se avanza a un ritmo más lento de lo que podría esperarse. En efecto, los desarrollos tecnológicos en RV cambian rápidamente, tanto en lo que se refiere a hardware como a software, lo cual mantiene ocupados a investigadores y desarrolladores, que se ven forzados a adaptarse a los cambios. También los docentes pioneros se ven afectados por esta transformación continua, teniendo que sortear los problemas derivados dentro de instituciones educativas cuyas condiciones no favorecen la agilidad

necesaria para adaptarse al dinamismo de este tipo de tecnologías. A ello hay que sumar que los tiempos de la investigación son aún más lentos que los de la innovación educativa. En estas condiciones, la obtención de resultados fiables sobre la repercusión del uso de RV, y en particular de la RVI, en la mejora y la transformación de la enseñanza y aprendizaje de la geometría se ve ralentizada, ya que es necesario basarse en resultados empíricos de su integración en las aulas. Coincidimos con Won et al (2023) en que los avances realizados hasta el momento, sin duda prometedores, necesitan alcanzar un mayor nivel de madurez. Para contribuir a lograrlo, nuestro equipo trabaja en la dirección recomendada por Cevikbas et al (2023): tratando de desarrollar sistemas de software de RV asequibles, accesibles y fáciles de usar, diseñados específicamente para facilitar el aprendizaje de la geometría, en colaboración estrecha entre desarrolladores y educadores matemáticos. Asimismo, en la línea indicada por dichos autores, animamos y damos apoyo a docentes para colaborar y compartir con la comunidad sus mejores prácticas. Paralelamente, como investigadores, hacemos partícipe a la comunidad académica de los avances obtenidos.

Referencias

- Ahmad, N. y Junaini, S. (2020). Augmented reality for learning mathematics: A systematic literature review. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, 15(16), 106-122. <https://doi.org/10.3991/ijet.v15i16.14961>
- Cabero-Almenara, J., Barroso-Osuna, J. y Martínez-Roig, R. (2021). Mixed, augmented and virtual, reality applied to the teaching of mathematics for architects. *Applied Sciences*, 11(15), 7125. <https://doi.org/10.3390/app11157125>
- Cangas, D., Morga, G. y Rodríguez, J. L. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR. *Psychology, Society & Education*, 11(3), 355-366. <https://doi.org/10.25115/psye.v11i3.2270>
- Carbonell-Carrera, C. y Saorín, J. L. (2017). Geospatial Google Street View with virtual reality: A motivational approach for spatial training education. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 6(9), 261. <https://doi.org/10.3390/ijgi6090261>
- Cevikbas, M., Bulut, N. y Kaiser, G. (2023). Exploring the benefits and drawbacks of AR and VR technologies for learners of mathematics: Recent developments. *Systems*, 11(5), 244. <https://doi.org/10.3390/systems11050244>
- Codina, A., García, M. M., Romero, I. M. y Lupiáñez, J. L. (2022). Poliedros con el software de realidad virtual inmersiva NeotrieVR, una experiencia con maestros en formación. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado* (25)3, 1-14. <https://doi.org/10.6018/reifop.531841>
- Confrey, J. y Lachance, A. (2012). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Routledge.
- Cross, R. A. y Hanson, A. J. (1994). Virtual reality performance for virtual geometry. En *Proceedings Visualization'94* (pp.156-163). IEEE. <https://doi.org/10.1109/visual.1994.346324>
- Chavil-Montenegro, D. Y., Rodríguez-Blancas, J. L. y Romero-Albaladejo, I. (2021). NeoTrie VR como espacio de trabajo para la introducción de la geometría fractal. En P. D. Diago, D. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 221-228). SEIEM.
- Dilling, F. y Sommer, J. (2022). Virtual reality in mathematics education: design of an application for multiview projections. En U. Jankvist, R. Elicer, A. Clark-Wilson y H. Weigand (Eds.), *Proceedings of the 15th international conference on technology in mathematics teaching* (pp. 263-270). Danish School of Education.
- Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 519-529. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0700-9>

- Dünser, A., Steinbügl, K., Kaufmann, H. y Glück, J. (2006). Virtual and Augmented Reality as Spatial Ability Training Tools. En M. Billinghamurst (Ed.), *Proceedings of the 7th ACM SIGCHI New Zealand Chapter's International Conference on Computer-Human Interaction: Design Centered HCI* (pp. 125-132). Christchurch, New Zealand. <https://doi.org/10.1145/1152760.1152776>
- Flores-Bascuñana, M., Diago, P. D., Villena-Taranilla, R. y Yáñez, D. F. (2019). On augmented reality for the learning of 3D-geometric contents: A preliminary exploratory study with 6-grade primary
- Guss, S. S., Clements, D. H. y Sarama, J. H. (2022). High-Quality early math: Learning and teaching with trajectories and technologies. En A. L. Betts, y K. P. Thai (Eds.), *Handbook of research on innovative approaches to early childhood development and school readiness* (pp. 349-373). IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-7998-8649-5.ch015>
- Kang, K., Kushnarev, S., Pin, W. W., Ortiz, O. y Shihang, J. C. (2020). Impact of virtual reality on the visualization of partial derivatives in a multivariable calculus class. *IEEE Access*, 8, 58940-58947. <https://doi.org/10.1109/access.2020.2982972>
- Kaufmann, H., Schmalstieg, D. y Wagner, M. (2000). Construct3D: a virtual reality application for mathematics and geometry education. *Education and information technologies*, 5, 263-276. <https://doi.org/10.1109/vr.2006.48>
- Kaufmann, H. (2009). Virtual Environments for Mathematics and Geometry Education. *Themes in science and technology education*, 2, 131-152.
- Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *RELIME*, 17(4), 5-15. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Martín-Gutiérrez, J., Mora, C. E., Añorbe-Díaz, B. y González-Marrero, A. (2017). Virtual technologies trends in education. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education*, 13(2), 469-486. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00626a>
- Milgram, P. y Kishino, F. (1994). A taxonomy of mixed reality visual displays. *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, 77(12), 1321-1329.
- Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: Un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.
- Moral-Sánchez, S. N. y Siller, H. S. (2022). Learning Geometry by Using Virtual Reality. *Proceedings of the Singapore National Academy of Science*, 16(01), 61-70. <https://doi.org/10.1142/s2591722622400051>
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, M. T. y Romero-Albaladejo, I. M. (2022). Estrategias de ludificación para el desarrollo de la motivación intrínseca en geometría. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 619). SEIEM.
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, M. T. y Romero-Albaladejo, I. (2023). Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 41(1), 125-147. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442>
- Morales, C. S. y Codina, A. (2020). Cognición y metacognición en geometría con realidad virtual utilizando NeoTrie VR. En E. Castro-Rodriguez, E. Castro, P. Flores y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Enrique Castro* (pp. 157-178). Octaedro. <https://doi.org/10.36006/09094>
- Morales, C. S., Codina, A. y Romero, I. (2023). Cuadriláteros con el software 3D NeoTrie VR de realidad virtual inmersiva. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 101, 65-74.
- Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S. y Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *ZDM*, 47, 377-390. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0679-2>

- Ng, O.L. y Sinclair, N. (2018). Drawing in space: Doing mathematics with 3D pens. En L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach y C. Vale. (Eds), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education: Tools, topics and trends* (pp. 301-313). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_16
- Özyurt, Ö. y Özyurt, H. (2019). Implementation of Design-Based Research in Software Engineering Education: A Case of Final Project Course. *Journal of Computer and Education Research*, 7(14), 213-227. <https://doi.org/10.18009/jcer.557913>
- Palanci, A. y Turan, Z. (2021). How does the use of the augmented reality technology in mathematics education affect learning processes?: a systematic review. *International Journal of Curriculum and Instructional Studies (IJOCIS)*, 11(1), 89-110. <https://doi.org/10.31704/ijocis.2021.005>
- Pozo-Sánchez, S., Lopez-Belmonte, J., Moreno-Guerrero, A. J. y Fuentes-Cabrera, A. (2021). Effectiveness of flipped learning and augmented reality in the new educational normality of the Covid-19 era. *Texto Livre*, 14(2), e34260. <https://doi.org/10.35699/1983-3652.2021.34260>
- Prediger, S., Gravemeijer, K. y Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM*, 47, 877-891. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3>
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009
- Rodríguez, J. L., Romero, I. y Codina, A. (2021). The influence of NeoTrie VR's immersive virtual reality on the teaching and learning of geometry. *Mathematics*, 9(19), 2411. <https://doi.org/10.3390/math9192411>
- Rodríguez, J. L. (2022a). Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching. En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 343-363). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_15
- Rodríguez, J. L. (2022b). Using virtual reality to teach linear algebra with a focus on affine geometry. En W.C. Yang, M. Majewski, D.B. Meade y W.K. Ho (Eds.), *Proceedings of the ATCM 2022*, (pp. 218-230).
- Rotger, L., Ribera, J. M. y Cuadrado, M. L. (2021). Visualizando la tercera dimensión desde diferentes realidades. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 673). SEIEM.
- Romero, I., Rodríguez-Martínez, J. A. y Rodríguez, J. L. (2023). Optimizing the surface of orthohedra with virtual reality in primary school. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(9), em2325. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13508>
- Seabra, R. D. y Santos, E. T. (2013). Developing the spatial visualization ability with a virtual reality tool for teaching descriptive geometry: A brazilian experience. *Journal for geometry and graphics*, 17(1), 101-117.
- Song, K. S. y Lee, W. Y. (2002). A virtual reality application for geometry classes. *Journal of Computer Assisted Learning*, 18(2), 149-156. <https://doi.org/10.1046/j.0266-4909.2001.00222.x>
- Sorroche, P., Romero, I. y García, M. M. (2023). Geometría en realidad virtual: Una situación de aprendizaje para el segundo ciclo de secundaria. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (102), 33-40.
- Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3D y realidad aumentada: alineando puntos en el espacio. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579-586). SEIEM.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305. <https://doi.org/10.1080/0020739830140305>

- Won, M., Ungu, D. A. K., Matovu, H., Treagust, D. F., Tsai, C. C., Park, J., Mocerino, M. y Tasker, R. (2023). Diverse approaches to learning with immersive Virtual Reality identified from a systematic review. *Computers & Education*, 195, 104701. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104701>
- Yeh, A. y Nason, R. (2004). Knowledge Building of 3D Geometry Concepts and Processes within aVirtual Reality Learning Environment. En L. Cantoni y C. McLoughlin (Eds.), *Proceedings of ED-MEDIA 2004* (pp. 2175-2182). Association for the Advancement of Computing in Education.