

APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR: PRÁTICAS DE NATUREZA EXPLORATÓRIA COM SUPORTE DA TECNOLOGIA

Learning mathematics in Higher Education: Practices of an exploratory nature supported by technology

Henriques, A.

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Resumo

A aprendizagem da matemática depende das práticas pedagógicas adotadas, em particular a natureza das tarefas e o modo como são implementadas em sala de aula. Nesta comunicação são apresentados estudos, realizados em Portugal e no Brasil, baseados em experiências de ensino que contemplam uma abordagem exploratória com integração da tecnologia, visando contribuir para o debate sobre práticas para o ensino e a aprendizagem da matemática a nível universitário, focado em: qual o potencial das tarefas exploratórias para promover o raciocínio matemático dos estudantes; como o ensino exploratório permite desenvolver a compreensão de conceitos matemáticos; e qual o contributo da tecnologia para uma aprendizagem com compreensão. Os resultados destes estudos mostram repercussões positivas na aprendizagem dos estudantes, e estimulam a reflexão sobre como o ensino exploratório responde aos desafios e necessidades atuais.

Palavras chave: aprendizagem da matemática, educação superior, ensino exploratório, recursos tecnológicos.

Abstract

The learning of mathematics depends on the pedagogical practices adopted, in particular the nature of the tasks and the way they are implemented in the classroom. This communication presents studies, carried out in Portugal and Brazil, based on teaching experiences that include an exploratory approach with the integration of technology, aiming to contribute to the debate on practices for teaching and learning mathematics at university level, focused on: what is the potential of exploratory tasks to promote students' mathematical reasoning; how exploratory teaching provide the development of mathematical concepts understanding; and what is the contribution of technology to learning with understanding. The results of these studies show positive repercussions on students learning, and stimulate reflection on how exploratory teaching approach responds to current challenges and needs.

Keywords: mathematics learning, higher education, exploratory teaching, technological resources

INTRODUÇÃO

Os conceitos matemáticos abordados no ensino superior revestem-se de grande complexidade, exigindo uma aprendizagem com compreensão, que é uma competência que tem que ser adquirida

pelos estudantes mas que não surge naturalmente, depende das práticas pedagógicas adotadas, em particular a natureza das tarefas e o modo como são implementadas em sala de aula. No entanto, uma das causas das taxas de reprovação nas disciplinas de introdução ao Cálculo de muitos cursos de Matemática no ensino superior é a utilização de um método predominantemente centrado na exposição dos conteúdos e sem a interação dos estudantes, em que os conceitos matemáticos são transmitidos como verdades inquestionáveis e sem torná-los significativos para os estudantes (CBMS, 2012; Garzella, 2013). Este contexto é frequentemente motivo de questionamento dos estudantes sobre a importância desses conteúdos para a sua formação e prática.

A atual preocupação dos professores de cursos superiores com o ensino e aprendizagem da Matemática, não só focada no insucesso e abandono escolar mas, sobretudo, no que se prevê ser o futuro deste ensino, incluindo contextos educacionais que facilitem um desenvolvimento profissional, é um fenómeno universal e devido a recentes mudanças sociais, pedagógicas e curriculares e ao rápido desenvolvimento tecnológico, que têm afetado o referido ensino. Existe, desta forma, uma convicção de que o foco do processo de ensino-aprendizagem já não pode ser a transmissão de conhecimentos estabelecidos, de definições e procedimentos de cálculo. É necessário encarar o processo de ensino e aprendizagem segundo uma nova perspetiva, repensando os métodos didáticos que tornem os estudantes confiantes nas suas habilidades matemáticas, permitam aprender por si novos conteúdos, e proporcionem aprendizagens significativas que os apoiem a desenvolver um conjunto vasto de competências requeridas para desempenhar, com eficiência, funções na sociedade atual. Em particular, o desenvolvimento do raciocínio e comunicação matemática, e de uma profunda compreensão dos conceitos e princípios matemáticos (Saxe, K. & Braddy, 2015; Small, 2008).

Esta preocupação tem-se refletido num significativo aumento da investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática a nível universitário (Artigue, 2016), permitindo criar conhecimento que possa ajudar a estruturar e melhorar contextos educativos para ultrapassar os problemas relacionados com a aprendizagem dos estudantes com compreensão e as inúmeras dificuldades vividas por eles. Neste contexto, a importância do ensino exploratório (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012) tem sido salientado na investigação (Henriques, 2012; Fonseca & Henriques, 2018).

Atendendo ao exposto, esta comunicação visa contribuir para o necessário debate sobre práticas adequadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática a nível universitário, partilhando ideias, embora possam ser parciais e específicas, de pesquisas realizadas sobre educação matemática no ensino superior e o que permitiram alcançar visando responder aos desafios e necessidades mencionados para o futuro deste ensino. Com este objetivo apresento e reflito sobre estudos desenvolvidos em Portugal e Brasil, no decorrer da minha experiência de investigadora e professora universitária, que contemplam contextos educativos envolvendo uma abordagem de ensino exploratório (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012) e o uso integrado da tecnologia. Estes aspectos são valiosos no auxílio do ensino e aprendizagem em disciplinas universitárias (e.g. Análise Numérica e Cálculo), em que o estudante assume um papel ativo como corresponsável nesse processo.

Em particular, os estudos apresentados pretendem responder às seguintes questões:

- Qual o potencial das tarefas de exploração para promover o raciocínio matemático dos estudantes?
- Como a abordagem de ensino exploratório permite que os estudantes desenvolvem a compreensão de vários conceitos e procedimentos matemáticos?
- Qual o contributo da tecnologia para uma aprendizagem com compreensão?

As secções seguintes integram orientações teóricas de temas essenciais à fundamentação das experiências de ensino dos estudos apresentados, que visam caracterizar as abordagens de ensino ativas para promover a aprendizagem da Matemática dos estudantes, com compreensão. São também

apresentados resultados do trabalho realizado por estudantes nas atividades exploratórias contempladas nos estudos, evidenciando o seu contributo para a sua aprendizagem, particularmente o raciocínio matemático e a compreensão de conceitos matemáticos que foram capazes de alcançar. E finalmente as conclusões, que contemplam uma reflexão sobre as abordagens pedagógicas e uma apreciação dos resultados dos estudos, identificando o potencial para o ensino e aprendizagem dos estudantes universitários.

PRÁTICAS EXPLORATÓRIAS E RECURSOS TECNOLÓGICOS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA COM COMPREENSÃO

Aprendizagem com compreensão

A aprendizagem da Matemática, com compreensão, tem ganho saliência e consenso crescente na investigação em Educação Matemática (Carpenter & Lehrer, 1999; Domingos, 2001, 2003; Fonseca & Henriques, 2018; Henriques, 2012; Simon, 2017). Para estes autores, sendo reconhecida como um objetivo essencial da Educação Matemática, a compreensão dos conceitos matemáticos deve ser um foco do processo de ensino e aprendizagem para os estudantes desenvolverem esta capacidade, caracterizada pela correlação de três dimensões (Figura 1): desenvolver significados dos conceitos; trabalhar as suas diferentes representações; e a sua mobilização na resolução de problemas que os envolvem, contrapondo-se à aprendizagem assente na aquisição de habilidades isoladas que só posteriormente desenvolve compreensão associada aos conceitos aprendidos. Quando necessário, envolve ainda a conexão de diferentes conceitos, dentro da mesma área de conhecimento ou entre outras áreas, devendo ser desenvolvida pelos estudantes desde o início do seu processo de aprendizagem.

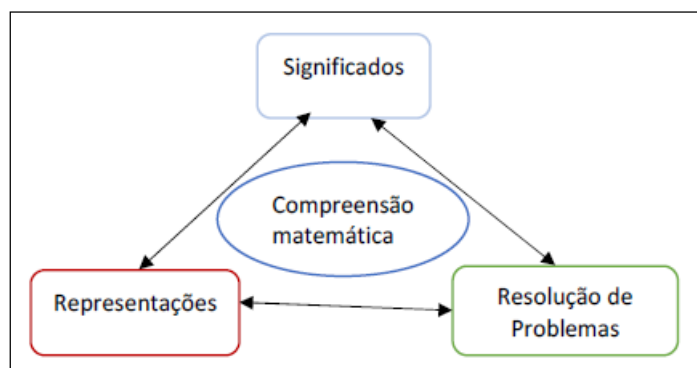


Figura 1. Modelo da compreensão matemática (Fonseca & Henriques, 2018)

Práticas exploratórias

Para desenvolver de uma forma ampla e sólida a aprendizagem com compreensão dos conceitos matemáticos é fundamental que os estudantes tenham oportunidade de realizar tarefas matemáticas significativas, que lhes permita um envolvimento maior com o que é ensinado e que os desafiem intelectualmente com o propósito de criar compreensão (Domingos, 2001; NCTM, 2000; Ponte, 2005). A literatura tem salientado que as tarefas exploratórias cumprem este papel, pois são desafiantes, de cunho aberto e focadas no raciocínio matemático dos estudantes, dando-lhes oportunidade de: (re)construir diferentes estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios, visando a descoberta autónoma da resposta e do que não é apresentado de forma explícita no seu enunciado; representar conceitos matemáticos; raciocinar matematicamente sobre ideias importantes, formulando conjecturas e discutindo-as para apresentarem justificações matemáticas

adequadas ao seu nível etário; e favorecer a reflexão e discussão de significados, buscando uma consolidação mais eficiente da aprendizagem dos estudantes (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012; Ponte, 2005, 2014).

Para além da natureza das tarefas em que os estudantes se envolvem, a forma como são realizadas na sala de aula pode influenciar e estruturar a forma como raciocinam e a visão que constroem da Matemática, incluindo a aprendizagem dos conceitos. Isso exige que o professor, no contexto de sala de aula, adote estratégias de ensino-aprendizagem com enfoques dinâmicos e construtivos, envolvendo uma abordagem de ensino exploratório (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012), centrada no trabalho dos estudantes quando se envolvem na realização de tarefas matemáticas de natureza exploratória (Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), e no uso integrado de recursos tecnológicos. Este contexto é fundamental no auxílio do ensino e aprendizagem da Matemática para os estudantes universitários, promovendo o seu raciocínio matemático e a construção de significados corretos de novos conceitos, e permitindo superar as suas possíveis dificuldades (Henriques, 2012; Fonseca & Henriques, 2018). No entanto, nas disciplinas de Matemática universitárias, estes contextos ainda têm sido pouco vivenciados (Gonçalves & Kalish, 2008; Small, 2008).

Uma aula de natureza exploratória é geralmente estruturada em três fases (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012): (i) a “introdução” da tarefa pelo professor, promovendo a adesão dos estudantes à sua realização estabelecendo conexões com a experiência anterior, e garantindo a correta interpretação da mesma e a familiarização dos estudantes com o seu contexto; (ii) a sua “exploração” autónoma, realizada pelos estudantes individualmente ou em pequenos grupos, em que o professor monitoriza este trabalho procurando garantir que todos participam de forma produtiva. E também os apoia com comentários e ou respostas às eventuais dúvidas dos estudantes, mas através de questionamento para não reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998) e para desafiá-los no processo de exploração, de forma que alcancem os objetivos de aprendizagem propostos, nomeadamente a descoberta e a construção do conhecimento; e (iii) a “discussão” coletiva das resoluções dos estudantes, seleccionadas pelo professor que assume o papel de mediador, e “síntese” das principais ideias matemáticas envolvidas na tarefa.

A realização de actividades de natureza exploratória é salientada como uma abordagem capaz de vincular os estudantes universitários a uma aprendizagem entusiástica, efectiva e eficaz, como uma forma de ultrapassar as limitações do ensino tradicional, e contribuir de forma significativa para a compreensão de novos conceitos da Análise Numérica, e para desenvolver o raciocínio matemático dos alunosestudantes, certamente mais adequada em disciplinas em que se pretende desenvolver competências diversificadas (Henriques, 2011).

O raciocínio matemático descreve uma capacidade cognitiva crítica envolvendo um conjunto de processos complexos, que incluem experimentações, formulação de conjecturas, generalização e justificação, através dos quais novos conhecimentos são obtidos a partir de conhecimentos prévios (Mata-pereira & Ponte, 2018). A capacidade de raciocinar matematicamente é, assim, fundamental para os estudantes alcançarem uma aprendizagem conceitual da Matemática, com compreensão, que tem ganho atenção e consenso crescente em resultados de investigações em Educação Matemática (Carpenter & Lehrer, 1999; Domingos, 2001, 2003; Fonseca & Henriques, 2018; Henriques, 2012; Simon, 2017).

Neste contexto, as representações matemáticas são também enfatizadas como elemento central no ensino e aprendizagem com compreensão de conceitos, por serem a base de toda a comunicação em Matemática (Duval, 2006), e pela visualização em Matemática ser reconhecida como fundamental nessa aprendizagem por estimular a intuição e suportar o raciocínio matemático (Arcavi, 2003). A visualização é considerada uma atividade cognitiva do estudante que o permite estabelecer conexões entre as suas imagens ou representações mentais e as experiências externas sobre um conceito

matemático, apoiadas em registos visuais, com o fim de representar, comunicar, interpretar e desenvolver novos conhecimentos sobre este conceito (Arcavi, 2003; Kidron & Tall, 2015).

Recursos tecnológicos

Tall (2003) aponta para a existência de evidências de que o uso de recursos tecnológicos proporciona uma melhor compreensão conceitual dos estudantes e ajuda-os na resolução de problemas, se comparado com os estudantes que tendem a utilizar processos de resolução mais processuais, em aulas tradicionais. Contudo, também revela que a tecnologia usada de forma inadequada geralmente não traz resultado significativo ao ensino dos conceitos, sendo necessário que o seu uso seja feito de maneira planeada e integrada com o currículo e a didática em sala de aula. Em particular, o ensino de conceitos matemáticos com recurso a tarefas exploratórias integrando o uso de software de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, tem recebido bastante atenção nas pesquisas em Educação Matemática, pelas vantagens em viabilizar um ambiente de aprendizagem rico e eficaz, em que as estratégias didáticas permitem aos estudantes ultrapassar as suas dificuldades e alcançar aprendizagens mais efetivas (Leung, 2017).

Reconhecendo os contributos do GeoGebra para a aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos, alguns estudos têm vindo a considerá-lo como recurso no ensino e aprendizagem dos conceitos do Cálculo, confirmando algumas potencialidades no seu uso (Aydos, 2015; Dikovic, 2009; Slavícková, 2013, Fonseca & Henriques, 2018). A multiplicidade de recursos do GeoGebra favorece a criação de applets com construções geométricas dinâmicas do conceito, contendo pequenos controles para os seus parâmetros que, ao serem manipulados pelo estudante, produzem movimentos e transformações planas e/ou espaciais que lhes poderão ser úteis à compreensão desse conceito (Dikovic, 2009; Ocal, 2017). Por exemplo, os recursos que permitem o esboço de gráficos de diversas classes de funções, favorecem a criação de representações geométricas dinâmicas do conceito de limite, possibilitando que os estudantes, ao explorá-las, formulem conjecturas, as testem experimentalmente e tentem comprová-las, favorecendo assim a abstração sobre este conceito e maior compreensão das suas propriedades (Dikovic, 2009). A aprendizagem destes conceitos, com compreensão, é necessária para que os estudantes avancem, no seu percurso escolar, para uma aprendizagem mais formal e rigorosa do Cálculo (Cottrill, Nichols, Schwingendorf, Thomas & Vidakovic, 1996; Sealey, Deshler & Hazen, 2014).

EXPERIÊNCIAS DE ENSINO QUE CONTEMPLAM UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA COM INTEGRAÇÃO DA TECNOLOGIA

Os estudos a seguir descritos, que visam apoiar esta comunicação com foco em práticas adequadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática a nível universitário, foram realizados como investigações orientadas para a preparação e experimentação de contextos de ensino que contemplam uma abordagem exploratória com integração da tecnologia.

A aprendizagem da Análise Numérica num contexto de ensino exploratório

Visando compreender o processo de aprendizagem da Análise Numérica e do raciocínio matemático de estudantes universitários portugueses que frequentava esta disciplina, centrado em actividades de exploração, o estudo de Henriques (2011) recorreu a uma experiência de ensino na qual foram usadas tarefas exploratórias, com recurso à calculadora gráfica, para abordar diversos conceitos dos tópicos programáticos. Neste texto destaco, em particular, o trabalho dos estudantes na exploração da tarefa “Equacionando” (Fig. 1). Esta tarefa é um ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de métodos numéricos para resolver equações não lineares, visando envolver os estudantes em: Construir e interpretar tabelas e gráficos relativos a funções não lineares; Calcular a raiz de uma equação não linear; Deduzir métodos de resolução de equações não lineares; e Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre equações não lineares.

Os resultados apresentados resultam de uma análise qualitativa dos dados recolhidos, com base em exemplos de resoluções escritas da tarefa pelos estudantes, que evidenciam aprendizagens significativas ao nível de conceitos e procedimentos que servem de base para abordar os métodos de resolução de equações não lineares e como ultrapassam as dificuldades e compreendem esses conceitos. E também permite discutir o modo como os estudantes tiram vantagem do trabalho realizado em torno das representações e o seu contributo para a emergência do raciocínio matemático.

- Q1. Considere a função $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$. Como resolve a equação $f(x) = 0$?
- Q2. Observe a seguinte sequência de intervalos de valores reais contendo a raiz de f ,
 $[1.000, 2.000][1.000, 1.500][1.250, 1.500][1.250, 1.375][1.250, 1.313][1.281, 1.313]$
- a) Qual será o próximo elemento da sequência? Explique como chegou a essa conclusão.
- b) Será possível encontrar uma regra geral para construir qualquer elemento da sequência apresentada?

Fig. 1. enunciado da tarefa “Equacionando”

Algumas tendências. Na primeira questão é proposta a resolução (não analítica) de uma equação não linear para a qual os estudantes ainda não têm procedimentos disponíveis, pretendendo analisar que estratégias utilizam e/ou constroem e a que conhecimentos anteriores de Matemática recorrem. Esta questão constitui um exemplo de possibilidade de utilização da calculadora como meio auxiliar não só de cálculo, mas também de visualização da informação disponibilizada. A segunda questão envolve uma sequência de intervalos que tem uma lei de formação implícita mas que é inequívoca pelas condições dadas. Constitui o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização dos métodos numéricos para resolução de equações não lineares. Em particular, pretende iniciar a discussão sobre o método da bissecção, levando os estudantes a deduzi-lo e a compreender a fundamentação desse procedimento. Esta questão, de natureza mais aberta, desafia os estudantes a descrever o próximo intervalo da sequência e a estabelecer uma generalização para o processo de formação dessa sequência, criando procedimentos (algoritmos) de resolução de equações não lineares com base na identificação de padrões e regularidades que permitam realizar generalizações.

A exploração desta tarefa inicia-se com a leitura individual do enunciado, pelos estudantes, e depois iniciam o trabalho em pares, onde discutindo com os colegas tentam encontrar estratégias para responder às questões. Os estudantes privilegiam a manipulação algébrica para encontrar a solução da equação apresentada, tentando simplificar a expressão de modo a isolar a variável, sem se aperceberem da sua não linearidade e de não ter resolução analítica, pelo que não são bem sucedidos nas suas tentativas de resolução como clarifica Luís: “Não consegui isolar totalmente a variável x de modo a obter um valor para esta variável”. Esta opção parece estar relacionada com as suas experiências escolares em que a manipulação algébrica é a estratégia habitualmente utilizada para resolver equações, como Gonçalo explica: “tentámos resolver como antigamente [refere-se à resolução analítica através de manipulação algébrica] mas não conseguimos chegar a nenhum valor”.

Ao verificar que esta estratégia não resulta, os estudantes direccionam a sua atenção na procura de estratégias de resolução e, como esperado, optam por uma resolução aproximada da equação a partir da representação gráfica, recorrendo à máquina de calcular, mostrando competência no seu uso e diferentes estratégias (Fig. 2):

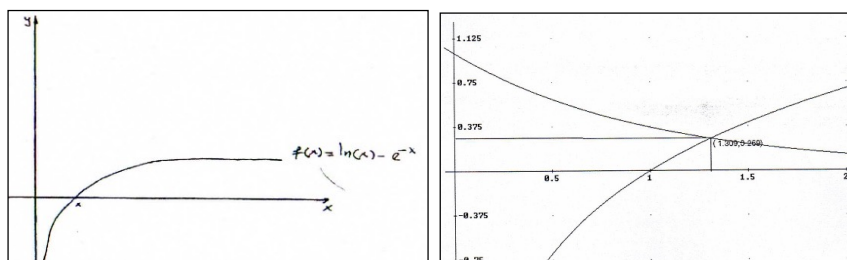


Fig. 2. Exemplos de estratégias na resolução gráfica da equação (Luís e Gonçalo)

A primeira, mais imediata, em que os estudantes inserem na máquina de calcular a expressão do membro não nulo da equação e procuram o ponto de intersecção do seu gráfico com o eixo dos xx . A outra estratégia compreende uma fase inicial de manipulação algébrica, em que os estudantes transformam a equação inicial numa igualdade entre duas funções, cujas expressões inserem na máquina de calcular, para depois procurarem o ponto de intersecção dos seus gráficos.

Em qualquer das estratégias os estudantes interpretam correctamente o gráfico apresentado e descrevem e justificam o processo de obtenção da solução, usando a linguagem natural, dando significado à solução ao manipular conceitos e adicionar informações através de conexões com conhecimento previo, e revelam facilidade em realizar conversões entre a representação algébrica e gráfica das funções:

Dada a função $f(x)$, os seus zeros são as raízes da equação $f(x)=0$. Sendo assim, os zeros da função são as abcissas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo dos xx . (Luís)

Ao igualarmos a nossa função $f(x) = \ln(x) - e-x$ a zero, temos que $\ln(x) = e-x$. O valor que procuramos trata-se do x para o qual as duas funções são iguais. Então fizemos o traçado do gráfico das duas funções para ver qual o valor de x no qual se dava a intersecção. (Gonçalo)

Na questão seguinte, durante a realização do trabalho de grupo, os estudantes procuram regularidades e tentam identificar padrões na observação da sequência de intervalos apresentados. Para isso recorrem a diversos esquemas, usados como ferramentas de registo e compreensão sobre propriedades dos elementos da sequência, ajudando-os a focarem-se no raciocínio. Por exemplo, Gonçalo utiliza símbolos de mais e menos para indicar as alterações ocorridas na referida sequência e organiza a informação em forma de tabela:

Tentámos encontrar um padrão e perceber o que estava a acontecer em concreto de intervalo para intervalo. Observamos que quando ocorriam alterações no extremo superior, se tratava deste ser reduzido, no caso do extremo inferior, se ocorresse alteração, estes seriam aumentados.

1	-	[1.000	2.000]	-
2	-	[1.000	1.500]	+
3	-	[1.250	1.500]	-
4	-	[1.250	1.375]	- (...)

As representações facilitaram um proceso indutivo de raciocínio que conduz os estudantes à formulação de uma conjectura baseada na identificação, correta, do padrão dos extremos dos intervalos e de diminuição da sua amplitude. Depois de identificado o padrão, os estudantes utilizam a linguagem natural para apresentar as suas conjecturas sobre o modo de formação dos elementos da sequência, explicando: “Apercebemo-nos que o valor da amplitude do intervalo seguinte é sempre metade da amplitude do intervalo anterior. Depois apercebemo-nos que o valor a somar ou a subtrair era sempre metade do valor do intervalo anterior” (Gonçalo).

Durante o trabalho de grupo, os estudantes verificam a validade da regra de formação, procedendo à sua experimentação apenas para os elementos da sequência apresentada no enunciado. Para a generalização da regra, e uma vez que a mesma não pode ser representada por uma expressão algébrica única, os estudantes, a trabalhar em grupo, apresentam a lei de formação dos intervalos na forma algorítmica, usando um misto de linguagem natural e simbólica, como nos seguintes exemplos:

A partir do que foi dito anteriormente, podemos definir a seguinte regra:

Se $x - \max > (f(x) = 0)$, então o intervalo seguinte será $[\min, x - \max]$ ou $[x + \min, \max]$ se e só se $x - \max < (f(x) = 0)$ (Luís)

Como regra geral e tomando em conta o modo como chegamos ao intervalo seguinte, temos o intervalo $[a, b]$ com $vméd = (a+b)/2$. Fazemos os seguintes passos:

1.º Encontrar o valor médio $vméd = (a+b)/2$

2.º Encontrar $f(vméd)$

Se $f(vméd) > 0$ então ficamos com o intervalo seguinte $[a, vméd]$

Se $f(vméd) < 0$ então ficamos com o intervalo seguinte $[vméd, b]$. (Gonçalo)

A validação e justificação de estratégias foram foco de aprofundamento na discussão da tarefa, por estes processos estarem pouco presentes na exploração desta questão, sendo necessário chamar a atenção da turma para uma leitura atenta do enunciado e para os levar a testarem as suas conjecturas com base nas novas condições (a raiz da equação pertencer sempre ao intervalo) e a identificarem alguns erros possíveis na sua formulação. No entanto, são notórias algumas tentativas de as justificar, recorrendo a teoremas matemáticos. Gonçalo faz uma descrição, em linguagem natural, do modo de formação dos intervalos da sequência com base em algumas propriedades e teoremas matemáticos seus conhecidos, nomeadamente o Teorema de Bolzano e os seus corolários: “Como a função é contínua, e como $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, apenas tínhamos que manter os extremos com estes sinais para que o próximo intervalo contivesse também o zero. Sendo $vméd$ sempre extremo, bastava ver o sinal de $f(vméd)$ ”.

No final desta tarefa, os estudantes são desafiados a resolver uma outra equação não linear mas que está contextualizada num problema:

A velocidade de lançamento de um míssil a partir de um submarino é calculada através da fórmula $v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$, onde v é a velocidade de lançamento na vertical, u é a velocidade de saída do combustível relativamente ao míssil, m_0 é a massa inicial do míssil ($t = 0$), q é a taxa de consumo do combustível, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade. Sabendo que $u = 2200 \text{ m/s}$, $m_0 = 160000 \text{ Kg}$ e $q = 2680 \text{ Kg/s}$, ao fim de quanto tempo é atingida a velocidade de 1000 m/s ?

É interessante observar que os estudantes foram capazes de fazer escolhas apropriadas de representações gráficas e com facilidade interpretaram o problema, identificando os dados e a questão e classificando-o como sendo a resolução de uma equação não linear. Os estudantes respondem ao problema, revelando empenho na utilização dos conceitos e métodos que foram adquiridos recentemente para desenvolverem as suas estratégias. É o caso de alguns que apresentam um erro associado à solução encontrada, em forma de intervalo, considerando que o valor encontrado não é exacto, e depois de resolverem o problema, procuram estratégias alternativas para a sua resolução e optam por utilizar o algoritmo que deduzem na questão anterior desta tarefa. Este tipo de tentativas revela, igualmente, uma tendência para que os estudantes evoluam na compreensão dos processos de resolução de problemas, como é natural, à medida que vão adquirindo mais experiência.

A aprendizagem da taxa de variação instantânea com recurso ao Geogebra.

O conceito de taxa de variação instantânea de uma função destaca-se como fundamental para a aprendizagem do Cálculo. No entanto, os estudantes universitários têm revelado muitas dificuldades e incompreensões na aprendizagem deste conceito. Algumas das mais comuns são: i) incompreensões do declive da reta tangente como a aproximação convergente do declive da reta secante, do papel do quociente diferencial $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e do limite quando $h \rightarrow 0$ na expressão algébrica da taxa de variação instantânea; ii) incapacidade de tradução do declive da reta tangente pela taxa de variação instantânea, e iii) fragilidade algébrica na aplicação da taxa de variação instantânea para resolver problemas que a envolve (Biza & Zachariades, 2010; Sahin et al., 2015). Estas dificuldades podem

estar relacionadas com problemas no ensino da taxa de variação instantânea aos estudantes, que considera, predominantemente, a memorização e execução de procedimentos ao invés da sua compreensão relacional (Sahin et al 2015). Por isso, alguns autores sugerem que o ensino da taxa de variação instantânea seja enriquecido com explorações de suas diferentes representações (verbal, algébrica e geométrica) associada ao declive da reta tangente, que encaminhe os estudantes à sua aplicação na resolução de problemas, e integre o uso de tecnologia digitais (Ocal, 2017; Orts et al., 2016).

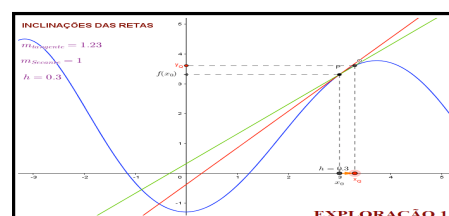
Atendendo a este contexto, o estudo de Fonseca e Henriques (2018) foi realizado com base numa experiência de ensino seguindo uma abordagem exploratória, integrando o uso do GeoGebra, com estudantes brasileiros que frequentavam a disciplina de Pré-Cálculo, visando a aprendizagem do conceito de limite. Nesta comunicação, dou destaque à resolução de duas tarefas exploratórias da experiência de ensino (T_12 e T_14) que visam promover a aprendizagem da taxa de variação instantânea de uma função. Estas tarefas foram construídas com base em aspetos referidos na literatura que se constituem como objetivos de aprendizagem da taxa de variação instantânea, num curso de introdução ao Cálculo, nomeadamente: i) reconhecer que declive da reta tangente é obtido pelo aproximação convergente do declive da reta secante; ii) reconhecer que o declive da reta tangente é expresso algebricamente pela taxa de variação instantânea da função, ou seja, $m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; iii) reconhecer que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo é nulo e traduzi-lo pela equação $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ e iv) aplicar os conhecimentos sobre taxa de variação instantânea na resolução de problemas que a envolve (Ocal, 2017; Sahin et al., 2015).

Os estudantes resolveram estas tarefas trabalhando em pares, após terem sido conduzidos à aprendizagem das noções intuitivas, do cálculo algébrico e da definição formal do conceito de limite. Também foram construídas três applets no GeoGebra para serem exploradas pelos estudantes na resolução dessas tarefas, visando conduzi-los à experimentação, visualização e descoberta da taxa de variação instantânea, como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função.

Na tarefa T_12, os estudantes precisaram realizar simulações dinâmicas, numa applet do GeoGebra, de reta secante $r_S = \overrightarrow{PQ}$ que converge para a reta tangente r_T ao gráfico de uma função f no ponto $P(x_0, f(x_0))$, a fim de deduzir que o declive da referida reta tangente (m_T) é expresso algebricamente pela taxa de variação instantânea da função. Verifica-se que todos os pares dos estudantes reconheceram corretamente que o declive da reta tangente (m_T) é obtido pela aproximação convergente do declive da reta secante (m_S). A partir da visualização das explorações realizadas no GeoGebra os estudantes concluíram que o valor de m_S alcança o valor de m_T , sendo $h \rightarrow 0$ o recurso que garante essa convergência, tal como exemplificado no diálogo de Gil e Maria e sua exploração na applet ao resolver a Q_7 T_12: “Quando esse valor existe, o declive da reta tangente é alcançado (atingido) pela aproximação dos declives das retas secantes? Porquê?”

Gil: Olha aqui! Pela direita ... Pela esquerda ... Tá vendo? [arrasta o ponto x_Q fazendo $Q \rightarrow P$ e observa $r_S \rightarrow r_T$ e $m_S \rightarrow m_T$ – **Exploração 1**].

Maria: Mas o que acontece com os declives m_S e m_T das retas?



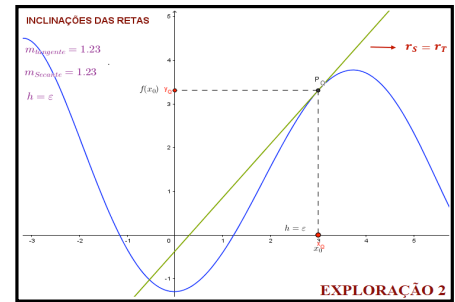
Gil: O valor do declive da reta secante vai se aproximar do valor do declive da tangente, conforme o ponto Q fica mais próximo do ponto P .

Maria: Ok! [...] O declive da reta tangente é alcançado pela aproximação dos declives da reta secante? [Lê a Q_7T_{12}]. Sim! [faz $r_S \rightarrow r_T$ e observa que $h = \varepsilon$ e $m_S = m_T$ – **Exploração 2**]

Gil: Sim! Porque a diferença entre os valores de m vai ser muito pequena [...] [visualiza convergência dos valores de m_T e m_S].

Maria: Sim, pois o h está tendendo a zero.

Gil: O h é justamente isso. Olha ali [visualiza $h = \varepsilon$ e $r_S \rightarrow r_T$ na *applet*]. O h tende a zero.

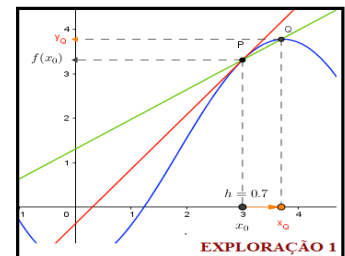


Deste diálogo é possível inferir que a visualização simultânea das convergências $r_S \rightarrow r_T$, $Q \rightarrow P$ e $h \rightarrow 0$, e da igualdade numérica $m_S \rightarrow m_T$, resultados de explorações realizadas na *applet* do GeoGebra, permitiram os estudantes reconhecerem que o declive da reta tangente é obtido pela aproximação convergente dos declives das retas secantes. E também há evidência de que as simulações no GeoGebra ajudaram alguns dos estudantes a desenvolverem experimentações e generalizações algébricas das coordenadas do ponto Q e do declive m_T , permitindo-lhes expressar as coordenadas de $Q(x_0+h, f(x_0+h))$ e $m_T = \lim_{h \rightarrow 0} m_S$, e correlacionar esses conhecimentos para deduzir, de forma autónoma, que o declive da reta tangente é expresso algebricamente pela taxa de variação instantânea da função, $m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Tal é observado no diálogo entre Eliseu e Vítor ao responder a Q_6T_{12} : “Escreva uma expressão algébrica (em função de x_0 e h) que represente o valor do declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x_0 . Explique porque é que essa expressão realmente atende ao que é pedido nesta questão.”

Eliseu: Ele quer saber as coordenadas de Q em função de x_0 e h . Esse ponto aqui vai ser sempre $x_0 + h$ [indica a coordenada x_Q]

Vítor: Sim, $x - x_0 = h$. Aqui no eixo Ox é $x_0 + h$ e no eixo Oy é $f(x_0 + h)$. O ponto P é $(x_0, f(x_0))$, certo? [...]

Eliseu: Certo! $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ [...] Achar a expressão algébrica de m_T em função de x_0 e h [Lê a Q_6T_{12}]. Volta lá e clica pela direita de novo [Vítor arrasta x_Q fazendo $h \rightarrow 0$] [...]



Vítor: [faz $Q \rightarrow P$ e visualiza $h \rightarrow 0$, $r_S \rightarrow r_T$ e $m_S = m_T$] Acho que entendi. Tipo, vai ser esse $m_S = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ e como r_T é alcançada [pela aproximação de r_S], faz

$$h \rightarrow 0 \text{ para chegar a esse limite } m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

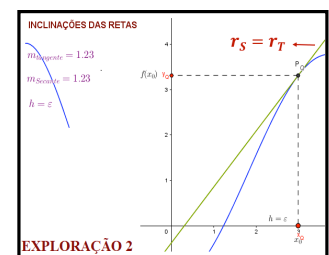
Eliseu: Calma aí, Vítor, como é essa história aí?

Vítor: Para a gente achar o declive dessa aqui que se movimenta [indica a r_S na *applet*] é essa aqui [indica na folha de resposta $m_S = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$], ok?

Eliseu: Sim.

Vítor: E agora para a gente achar a inclinação de r_T , que é parado, basta pegar esse que se movimenta

$$\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \right], \text{ substituir as coordenadas de } Q(x_0+h, f(x_0+h)) \text{ e vai ter } m_T. \text{ Aí fica } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$



Salienta-se ainda que o momento de discussão coletiva da tarefa, em que o professor usou a *applet* do GeoGebra para realizar simulações dinâmicas da aproximação da secante à reta tangente e conduziu

o diálogo com os estudantes com questionamentos, a fim de que eles compreendessem que o declive da reta tangente (m_T) é obtido pela convergência do declive da reta secante (m_S), ou seja, $m_T = \lim_{h \rightarrow 0} m_S$, contribuíram para que alguns estudantes ultrapassassem dificuldades que encontraram na aprendizagem da taxa de variação instantânea. Os estudantes quando não conseguem realizar procedimentos algébricos para calcular o limite, $m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ recorrem frequentemente às explorações das applets do GeoGebra, para construir gráficos de funções, realizar simulações dinâmicas e/ou testes experimentais, permitindo-lhes resolver problema graficamente (T_12) e/ ou delinear a estratégia para a sua resolução algébrica (T_14).

Após essa experiência, a aprendizagem da taxa de variação instantânea foi retomada na tarefa T_14 em que os estudantes foram conduzidos no processo de modelação da confecção de uma caixa de formato paralelepípedo. Eles realizaram explorações dinâmicas na planificação e formato tridimensional da caixa, acompanhadas de simulações das medidas de suas dimensões e volume, na *applet* do GeoGebra, e conseguiram mobilizar conhecimentos sobre a taxa de variação instantânea para resolver um problema de otimização, que consistia em determinar as dimensões da caixa de volume máximo. Neste processo apresentaram facilidade em traduzir a expressão algébrica da função V que modela o volume da caixa, conforme se comprova no excerto “Isso aqui é 10 menos x daqui, e menos x daqui. Ou seja $10 - 2x$. Isto daqui também é $10 - 2x$ ” (Miriam) e “Então fica $(10 - 2x) \cdot x \cdot (10 - 2x)$... Então ficou $V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$ ” (Fátima). Desta forma, conclui-se que as experimentações das dimensões da caixa na *applet* do GeoGebra, permitiram esses estudantes generalizarem as medidas da caixa em função de x e traduzir a expressão algébrica da função V que modela o seu volume.

CONCLUSÕES

Através destes estudos tentei partilhar algumas das minhas experiências no campo da educação matemática no ensino superior, na última década. Organizei as conclusões baseadas na reflexão sobre este campo da investigação, convencida que pode ajudar a compreender e apreciar os resultados, identificando os pontos fortes para o futuro ensino. E tentei tornar claro os avanços substanciais que foram feitos do ponto de vista teórico e empírico.

Nestes estudos, os estudantes foram desafiados a realizar tarefas de natureza diferente das que estão habituados nas aulas de Matemática do ensino superior, que os estimularam a experimentar diversos processos característicos do raciocínio matemático, como a procura de regularidades, formulação e teste de conjecturas, generalização e justificação.

Os resultados dos estudos apresentados sugerem que a realização de tarefas exploratórias com o uso integrado de recursos tecnológicos pode ser usada no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos de Cálculo e Análise Numérica, no ensino superior, para conduzir a uma aprendizagem com compreensão dos mesmos. Este tipo de estratégia didática contribuiu para uma participação mais ativa dos estudantes na realização das tarefas e para promover aprendizagens mais efetivas sobre os conceitos matemáticos e a sua aplicação na resolução de problemas.

O trabalho colaborativo entre os estudantes, a partir da resolução das tarefas exploratórias integrando a calculadora ou o GeoGebra, a descentralização do ambiente de exposição de conteúdos no quadro e o incentivo, os desafios e as explicações do professor, em geral, ajudaram os estudantes a consolidar as aprendizagens e a realização de novas descobertas. Também as interações entre os estudantes (pares ou trio) que permitiu a partilha e discussão de seus conhecimentos, e a verbalização de seus raciocínios na realização, teste, validação ou refutação de hipóteses e na aplicação dos conceitos aprendidos para resolver problemas, favoreceram o desenvolvimento de um ambiente no qual pudessem aprender a trabalhar cooperativamente, favorecendo o trabalho investigativo. Para além

disso, essas interações proporcionaram ao estudante um ambiente em que ele pôde analisar as suas ideias e, quando questionado, justificá-las, contribuindo assim para a identificação dos seus erros apresentados no momento da resolução das tarefas ou reforço da sua aprendizagem. tal como atesta Leung (2017).

É possível inferir que o uso do GeoGebra contribui para a criação de um ambiente de aprendizagem rico e promotor de aprendizagens significativas. Esses resultados permitem concluir que os três elementos evidenciadores das potencialidades do GeoGebra, nomeadamente, visualização, conexões entre representações e processos de raciocínio matemático, se revelam adequados para analisar o papel deste software na aprendizagem da taxa de variação instantânea de uma função.

Da análise dos resultados destaca-se, como aspecto significativo, a variedade de representações que os estudantes são capazes de utilizar, associadas às diferentes funções que desempenham na exploração das tarefas de investigação propostas. Os estudantes têm tendência para privilegiar a representação algébrica na exploração das tarefas de investigação. Mesmo quando conhecem e têm à sua disposição outras representações que permitem abordagens mais eficientes, optam por usar manipulação algébrica para deduzir regras ou para encontrar soluções. De forma geral, os estudantes usam a representação gráfica para obter soluções, explicar raciocínios e verificar resultados observando um aumento gradual do recurso à representação gráfica para analisar e desenvolver compreensão sobre a informação disponibilizada no enunciado, como suporte e ilustração de raciocínios e para confirmar resultados obtidos através de outras formas de representação. No final da experiência de ensino os estudantes são ainda capazes de planear e seleccionar as suas estratégias com base na análise de gráficos e, deste modo, a representação gráfica passa a ter um papel importante na justificação dos seus raciocínios e das soluções encontradas.

Finalmente, os resultados destes estudos evidenciam o potencial das tarefas de exploração para promover o raciocínio matemático dos estudantes, desenvolvendo a sua compreensão de vários processos que caracterizam a atividade matemática, permitindo-lhes trabalhar e familiarizarem-se com diferentes formas de representação e construir conhecimento de conceitos e procedimentos da disciplina. Sugerem, igualmente, que este tipo de tarefas podem ser usadas com sucesso, nos cursos de ensino superior, nomeadamente em domínios da Análise Numérica e do Cálculo. No entanto, alguns aspetos devem ser aferidos de forma a introduzir melhoramentos.

Em relação às atividades propostas, saliento a necessidade de algum cuidado na elaboração e/ou seleção das tarefas. Estas devem ser suficientemente ricas para permitirem explorações e investigações que conduzam os estudantes a desenvolver capacidades de raciocínio, a aumentar ou reorganizar os seus conhecimentos e a uma verdadeira compreensão de novos conceitos. Uma vez criadas, é ainda de considerar possíveis alterações às tarefas, de forma a adaptá-las em função do tempo disponível para a sua realização, dos conceitos ou conteúdos programáticos que se pretende abordar e dos processos matemáticos cuja utilização se pretende fomentar.

Os estudantes, de forma geral, têm a ideia pré-concebida de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas ou conclusões. A evolução para uma postura realmente investigativa é um processo demorado e deve ser objecto de um trabalho sistemático por parte do professor, voltado para a promoção de certos processos matemáticos menos considerados pelos estudantes. Para isso é necessário proporcionar aos estudantes um contacto mais frequente com este tipo de actividades, onde experimentem vários processos de resolução não normativos e encontrem varias soluções igualmente correctas, onde a discussão em grupo é promovida e pode ser altamente proveitosa e onde a calculadora ou o Geogebra, entre outros recursos, pode desempenhar um papel para lá do mero instrumento de cálculo. As discussões finais das tarefas, em grande grupo, revelaram-se momentos cruciais para o trabalho investigativo dos estudantes. Mais do que apresentar resultados, estes momentos deverão servir para desafiar os estudantes a prolongar a investigação.

Referencias

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.
- Artigue, M. (2016). Mathematics education Research at University Level: Achievements and Challenges. In E. Nardi, C. Winslow, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 1st Conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 11–27). Montpellier, France: INDRUM.
- Aydos, M. (2015). *The impact of teaching mathematics with geogebra on the conceptual understanding of limits and continuity: the case of turkish gifted and talented students*. Dissertação de Mestrado, Universidade Ankara, Turquia.
- Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Conference Board of the Mathematical Sciences – CBMS (2012). *The mathematical education of teachers ii*. Providence, RI and Washington, DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.
- Cottrill, J., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996) Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of mathematical behavior*, 15, 167-192.
- Dikovic, L. (2009). Examining continuity/discontinuity of a function by using geogebra. *Teaching Mathematics and Computer Science* 7(2), 241-257.
- Domingos, A. (2001). Contextos escolares que favorecem o pensamento matemático avançado. In D. Moreira et al. (Eds.). *Matemática e comunidades: A diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática. Anais do Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE* (pp. 113-122). Consolação: SEM-SPCE.
- Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A Matemática no início do superior*. Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal.
- Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61, 103-131.
- Fonseca, V., & Henriques, A. C. (2018). Compreensão da definição formal de limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. *Bolema* 32(62), 1030-1049.
- Garzella, F. (2013). *A disciplina de cálculo i: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.
- Gonçalves, S. & Kalish, A. (2008). Método Expositivo. *OPDES*, 1. <http://ndsim.esec.pt/pagina/opdes/brochuras/01.pdf> em 3/11/08.
- Henriques, A. C. (2011). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Henriques, A. C. (2012). O raciocínio matemático na exploração de atividades de investigação: Um estudo com alunos universitários. *Quadrante*, 21(2), 139-163.
- Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, 88(1), 183-199. DOI 10.1007/s10649-014-9567-x.
- Leung, A. (2017). Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom. In A. Leung & A. Baccaglioni-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls* (pp. 3–16). Cham: Springer.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2018). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32(62), 781-801. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02>

- Menezes, L., Canavarro, A. P., & Oliveira, H. (2012). Teacher practice in an inquiry-based mathematics classroom. *Hellenic Mathematical Society-International Journal for Mathematics in Education*, 14, 357-362.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ocal, M. (2017). The effect of geogebra on students' conceptual and procedural knowledge: The case of applications of derivative. *Higher Education Studies*, 7(2), 67-78. <https://doi.org/10.5539/hes.v7n2p67>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. (2014). Formação do professor de matemática: perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 343-360). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Saxe, K. & Braddy, L. (2015). *A Common Vision for Undergraduate Mathematical Sciences Programs in 2025*. Available in <https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/CommonVisionFinal.pdf>.
- Sealey, V., Deshler, J., & Hazen, K. (2014). Strengthening student understanding of mathematical language through verbal and written representations of the intermediate value theorem. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 24(2), 175-190. <https://doi.org/10.1080/10511970.2013.858282>
- Slavícková, M. (2013). Changes in teaching of calculus at the university level. In. *Acta Didactica Universitatis Comenianae, Mathematics*, 13, 33-45.
- Simon, M. (2017). Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, 94, 117-137. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9728-1>
- Small, D. (2008). *An urgent call to improve traditional college algebra programs*. Available in <https://www.maa.org/an-urgent-call-to-improve-traditional-college-algebra-programs>.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Tall, D. O. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L. M. Carvalho and L. C. Guimarães, *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil.