

CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS DE CONVERSIÓN ENTRE REPRESENTACIONES DE INTERVALOS DE LA RECTA REAL PROPUESTAS EN LIBROS DE TEXTO

Characteristics of the conversion tasks among representations of intervals of the real line proposed in textbooks

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

Resumen

Los intervalos de la recta real tienen un papel relevante en el aprendizaje de diversos contenidos matemáticos. Sin embargo, apenas se ha investigado sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje y, en particular, los de sus representaciones. Se presentan los resultados de un análisis de las tareas propuestas en libros de texto que solicitan convertir un intervalo de un sistema de representación a otro. La muestra está compuesta por 25 libros de 4º de ESO y 1º de Bachillerato de LOE y LOMCE. Se han detectado algunos comportamientos globales que pueden comprometer la riqueza y variedad de oportunidades de aprendizaje de las conversiones provistas por los libros, como la frecuencia de aparición muy desigual entre unas conversiones y otras, la falta de consideración del registro verbal y el abuso de expresiones algebraicas y verbales que promuevan conversiones por congruencia.

Palabras clave: *intervalos de la recta real, conversión entre representaciones, libros de texto*

Abstract

Intervals of the real line play an important role in the learning of several mathematical concepts. However, hardly any research about their teaching and learning processes has been done, either about their representations. The results of the analysis of the conversion tasks among representations of intervals proposed in textbooks are set out. The sample consists of 25 textbooks of grades 10 and 11 related to LOE and LOMCE. Global tendencies which can affect the richness and variety of learning opportunities of conversions given by textbooks have been detected, such as big differences of the frequency of each conversion, the lack of conversions involving the verbal representation and the abuse of algebraic and verbal expressions which promotes congruent conversions.

Keywords: *intervals of the real line, conversions among representations, textbooks*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Los intervalos son uno de los subconjuntos más importantes de los números reales, ya sean acotados o no acotados (estos últimos también llamados semirrectas), al ser necesarios para desarrollar acciones como, por ejemplo, resolver inecuaciones o estudiar y expresar propiedades de funciones, a nivel global o local. El estudio de estos subconjuntos es considerado por el currículo español en 4º de ESO y 1º de Bachillerato (Grados 10 y 11), siendo necesario conocer su significado, así como conocer y dominar sus diferentes formas de expresión y representación.

Uno de los procesos matemáticos clave en el desarrollo de la comprensión y aprendizaje de los objetos matemáticos es el de representar (Goldin, 2002). En él se incluye la realización de conversiones y coordinaciones de objetos matemáticos entre diferentes sistemas de representación como un aspecto relevante para evidenciar la comprensión de los mismos (Duval, 1999, 2006). Este proceso de representación toma especial relevancia en el aprendizaje de los números reales, como explican Rico, Castro y Romero (2000). Es posible encontrar estudios relacionados con la representación de números

reales en la recta real (Montoro, Cifuentes, Salva y Bianchi, 2017; Rico et al., 2000; Scaglia y Coriat, 2003), pero hay una práctica ausencia de investigaciones centradas en los intervalos, acotados o no acotados, como se indica en Pecharromán, Arce y Conejo (2019).

Entre esos antecedentes, Pecharromán, Arce, Conejo y Ortega (2018) realizan un estudio teórico de las conversiones entre diferentes representaciones de intervalos. Pecharromán et al. (2019) analizan las estrategias de conversión entre representaciones de intervalos no acotados utilizadas por estudiantes de 4º de ESO y 1º de Bachillerato. Se presenta aquí una investigación complementaria a las anteriores, centrada en los libros de texto (en adelante, LT) que, como muestra la revisión de Fan, Zhu y Miao (2013), sigue siendo un recurso muy influyente en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los objetivos de esta investigación son detectar las características de las tareas de conversión de intervalos entre sistemas de representación propuestas por una muestra de LT de 4º de ESO y 1º de Bachillerato y valorar y discutir esas características en términos de la riqueza y variedad de las oportunidades de aprendizaje de las conversiones que proveen.

MARCO TEÓRICO

Se parte de considerar los objetos matemáticos como propios de un dominio conceptual (Rico, 2009), que no tienen existencia material pero que sí pueden ser percibidos y producidos por la razón. Los signos que permiten hacer presentes los objetos matemáticos y comunicar ideas sobre ellos suelen denominarse *representaciones* (Castro y Castro, 1997), dotándose de sentido en sistemas compartidos de significados y relaciones (Rico, 2009). Goldin (2002) distingue dos nociones de significado en un sistema de representación: una *sintáctica*, que refiere únicamente a los signos y elementos propios del sistema semiótico; y una *semántica*, en la que el significado es inherente a los objetos.

Castro y Castro (1997) distinguen dos grandes grupos de sistemas o de registros de representación, el gráfico, que usa representaciones continuas de tipo figurativo, y los simbólicos, que utilizan representaciones discretas de caracteres alfanuméricos. Aquí se considerará el *registro gráfico* (G), en el que los intervalos se representan como segmentos o semirrectas de la recta real numérica y, entre los sistemas simbólicos, distinguiremos entre el *registro verbal* (V), que hace uso de caracteres propios del lenguaje natural; el *registro algebraico* (A), que contiene algún carácter que representa una variable que se mueve en un conjunto; y el *registro numérico* (N). La Figura 1 muestra un ejemplo de intervalo acotado y de no acotado en estos cuatro registros.

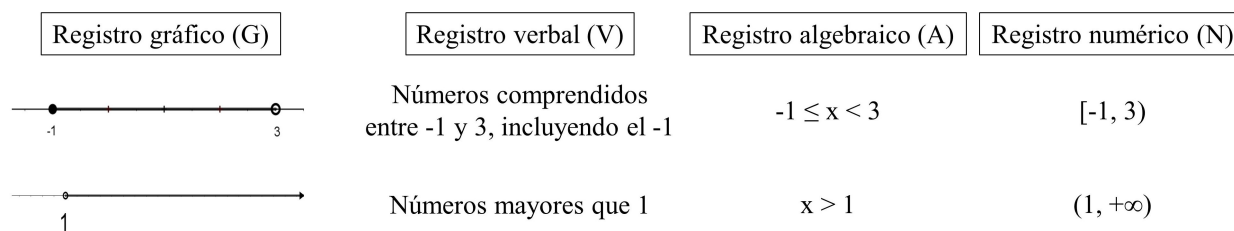


Figura 1. Ejemplo de intervalo acotado y de no acotado en los cuatro registros considerados

Coincidimos con Duval (1999) en que el aprendizaje y la comprensión de un concepto matemático está muy ligado a dominar sus representaciones en diferentes registros, coordinar estas y distinguir entre representante y objeto representado. Sobre las representaciones pueden desarrollarse acciones como el reconocimiento de un objeto o sus componentes en un sistema, la transformación dentro de un sistema, la conversión del objeto de un sistema de representación a otro y la coordinación (conversión bidireccional) entre representaciones en diferentes sistemas (Duval, 2006). El umbral de comprensión de un concepto matemático se sitúa en la coordinación espontánea y sin contradicciones de al menos dos de sus sistemas de representación (Duval, 2006).

En particular, nuestro foco está en las conversiones de intervalos de uno a otro de los cuatro registros comentados, como paso previo para las coordinaciones. La docencia sobre intervalos en Secundaria debe proveer de suficientes *oportunidades de aprendizaje* de las diferentes conversiones, entendidas

como situaciones que permitan a los alumnos reorganizar su estructura conceptual o cambiar su conocimiento o concepciones sobre estas conversiones (adaptado de Morera, 2013). Denotaremos las conversiones con las iniciales de los registros involucrados y una flecha que va del registro de salida al de llegada (por ejemplo, $V \rightarrow N$ es una conversión del registro verbal al numérico).

Para Duval (1999), un aspecto clave que marca la dificultad de una conversión es la congruencia entre las representaciones del registro de salida y el de llegada. La congruencia entre dos representaciones se define a partir del grado de correspondencia entre las unidades significantes que constituyen una y otra representación (Duval, 1999). Uno de los criterios que determinan la congruencia es el *orden de aprehensión entre las unidades significantes*, que se cumple cuando las unidades significantes asociadas al mismo significado en uno y otro registro se presentan en el mismo orden en ambas representaciones. Por ejemplo, para las representaciones gráfica y algebraica del intervalo no acotado de la Figura 1, este criterio no se cumple ya que en “ $x > 1$ ” no se mantiene el orden de presentación de los elementos de la recta real, aspecto que sí se cumpliría si se escribiera el intervalo como “ $1 < x$ ”. El hecho de que en un registro existan varias representaciones distintas del mismo objeto es destacada por Pecharromán et al. (2018); en el registro algebraico, con el uso posible de la desigualdad en ambos sentidos, y en el verbal, con el uso de mayores, menores u otras fórmulas. La representación escogida puede afectar al cumplimiento del criterio sobre el orden de aprehensión y, por ende, a la congruencia.

Además de considerar las diferentes conversiones, la docencia también debería proveer de suficientes oportunidades de aprendizaje en registros donde un intervalo admite escrituras diversas válidas. Extendiendo la noción sintáctica y semántica de Goldin (2002) en el sentido de Pecharromán et al. (2019), la variedad y riqueza de estas oportunidades de aprendizaje buscarán favorecer el desarrollo de conversiones sustentadas en un significado semántico, a partir del significado global inherente del objeto representado. Con ellas podrán superarse estrategias basadas solo en un significado sintáctico como la llamada conversión por congruencia, que genera la escritura con la traducción sintáctica concatenada de cada signo de un sistema semiótico a otro. Esta estrategia solo proporciona respuestas correctas si hay alta congruencia, y provoca muchos errores (Pecharromán et al., 2019).

Este estudio se centra en los libros de texto (LT), recurso habitual cuya presencia e influencia en los docentes llevó a Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt y Houang (2002) a situar los LT en un nivel de currículo potencialmente implementado, como mediadores entre el currículo y la instrucción real en las aulas, lo que ha situado todo lo que rodea los LT como una temática relevante de investigación (Fan et al., 2013). De los tres tipos de investigaciones sobre LT indicados por Fan et al. (2013), este estudio se encuadra dentro del tipo de análisis de los LT, sobre cómo un contenido es tratado en ellos. En particular, nos centramos en las tareas de conversión de intervalos propuestas por los LT seleccionados, analizando sus características y la variedad de oportunidades de aprendizaje de estas conversiones que son ofrecidas para su posible aprovechamiento en el contexto de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Los estudios de análisis de LT suponen un grueso importante de las investigaciones relacionadas con LT (Fan et al., 2013), pero nuestro estudio es novedoso al centrarse en el análisis de un contenido muy poco estudiado. Además, como señalan Chang, Cromley y Tran (2016), los estudios centrados en el análisis en libros de texto de las tareas ligadas a las representaciones en la rama de análisis matemático son escasos, destacando precisamente el de Chang et al. (2016) y el de Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo (2018).

MÉTODO

La muestra está formada por 25 LT de cuatro editoriales de amplio uso en España: Anaya, Edelvives, Santillana y Vicens Vives (Tabla 1). Se han considerado los LT de las dos últimas leyes educativas, LOE y LOMCE, para abarcar el análisis de las tareas de conversión de intervalos propuestas en la última década y que corresponden a los cursos y asignaturas de matemáticas en que se centra la docencia sobre intervalos: 4º de ESO (Opciones A y B en LOE, Matemáticas Aplicadas y Académicas en LOMCE) y 1º de Bachillerato (Matemáticas I y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I).

Al no disponer de las muestras completas de algunas editoriales, se realizará un análisis conjunto de las tareas de conversión de intervalos en la muestra para detectar comportamientos y tendencias globales en los planteamientos editoriales, sin pretender establecer comparaciones entre unos y otros.

Tabla 1. Libros de texto analizados de cada editorial

Anaya			Edelvives			Santillana			Vicens Vives		
Curso	Año	Ley	Curso	Año	Ley	Curso	Año	Ley	Curso	Año	Ley
4º A	2008	LOE	4º A	2008	LOE	4º A	2011	LOE	4º A	2008	LOE
4º B	2008	LOE	4º B	2008	LOE	4º B	2011	LOE	4º B	2008	LOE
1º Ci	2008	LOE	1º Ci	2008	LOE	1º Ci	2008	LOE	1º Ci	2008	LOE
1º CS	2008	LOE	4º Ap	2016	LOMCE	1º CS	2008	LOE	1º Ci	2014	LOMCE
4º Ap	2016	LOMCE	4º Ac	2016	LOMCE	1º Ci	2015	LOMCE	1º CS	2015	LOMCE
4º Ac	2016	LOMCE	1º Ci	2015	LOMCE						
1º Ci	2015	LOMCE	1º CS	2015	LOMCE						
1º CS	2015	LOMCE									

Se ha aplicado la metodología de *análisis de contenido*, “un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos” (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563), con el que se busca pasar de la descripción de los datos escritos a su interpretación y a la formulación de inferencias en base al contexto. Aquí, la unidad de análisis ha sido cada una de las tareas de conversión de intervalos encontradas en los LT, ya sean tareas cuya resolución es ilustrada por el propio LT, como tareas propuestas al alumno.

A partir de los objetivos y marco teórico descritos, se ha elaborado un instrumento *ad hoc* de análisis y codificación de los datos brutos de los LT. Las variables de análisis consideradas son: enunciado de la tarea y lenguaje usado para solicitar la conversión, tipo de intervalo (acotado, no acotado...), número del extremo inferior y superior del intervalo (si los hay), inclusión de los extremos en el intervalo, registro de salida y de llegada de la conversión, conversión solicitada, escritura del intervalo seleccionada cuando el registro de salida es el verbal o el algebraico y efecto de esa escritura en la congruencia de la conversión. Ilustramos el análisis con un ejemplo de tarea mostrada en la Figura 2.

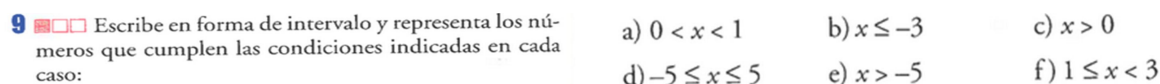


Figura 2. Tareas de conversión de intervalos extraídas del LT de 4º de ESO Opción A de ANAYA en LOE (Colera, Martínez, Gaztelu y Oliveira, 2008, p. 60)

Esta actividad consta de seis apartados y el enunciado solicita dos conversiones, por lo que hay 12 tareas de conversión en ella. Ilustramos el análisis para el apartado a). El enunciado usa “en forma de intervalo” para referirse al registro numérico y “representa” para referirse al gráfico. El intervalo es acotado. El extremo inferior es 0 y el superior es 1, ninguno incluido en el intervalo. El registro de salida es el algebraico, y los de llegada son el numérico y el gráfico, siendo las conversiones A→N y A→G. Por último, la expresión “ $0 < x < 1$ ” hace uso del signo “ $<$ ” y el orden de lectura sigue el orden numérico y el de la recta real, lo que aumenta la congruencia de las dos conversiones propuestas.

Tras el análisis de cada tarea por los dos autores, estos compartieron su codificación discutiendo los casos no coincidentes hasta llegar a un consenso. Tras esto, se analizaron los resultados en cada variable y en la interrelación de unas con otras buscando describir cómo son las tareas de conversión solicitadas en la muestra de LT e interpretar los resultados en términos de las características de las representaciones y las oportunidades de aprendizaje de las conversiones provistas por los LT.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se han encontrado 1082 conversiones, de las que 568 (un 52,50%) son intervalos acotados, 501 (un 46,30%) son semirrectas y en 13 se pide representar el conjunto de los números reales (enunciado

como $(-\infty, \infty)$ o “Todos los números reales”). Los 568 intervalos acotados se distribuyen de forma más o menos uniforme entre cerrados, abiertos, semiabiertos por la derecha y por la izquierda.

En el análisis de los enunciados se ha observado que ninguna de las editoriales utiliza la denominación de los registros indicada en el marco teórico, sino que se refieren a ellas de diversas maneras. Para solicitar una conversión con llegada en el registro algebraico, los LT suelen solicitar que se escriba como desigualdad, en forma de conjunto, de forma simbólica, o indicando que se defina el intervalo. Si es al registro gráfico, se suele pedir que se representen los intervalos o que se marquen en la recta real. Si la llegada es al registro verbal, se pide que se describan los intervalos. Por último, para solicitar la llegada al registro numérico se han localizado algunas tareas que piden que se escriba en notación matemática pero la mayoría pide que se escriba en forma de intervalos o semirrectas. Esta identificación de la palabra intervalo (o semirrecta) con el registro numérico parece indicar que para algunas editoriales de LT únicamente son intervalos si se expresan en este registro, cuando en realidad el intervalo es el concepto (subconjunto de la recta real), que puede expresarse en diferentes registros.

Conversiones entre representaciones de intervalos solicitadas en las actividades

En cada una de las 1082 tareas se ha analizado el registro de salida (escritura del intervalo dada), el registro de llegada solicitado y, juntando ambos datos, la conversión requerida. La Tabla 2 recoge la frecuencia de aparición de cada conversión (entre paréntesis las frecuencias correspondientes a cada curso, 4º ESO + 1º Bachillerato), y las frecuencias totales de cada registro de salida y de llegada.

Tabla 2. Frecuencia de aparición de cada registro y cada conversión en los LT

		Registro de llegada				Total
		<i>A</i>	<i>G</i>	<i>N</i>	<i>V</i>	
Registro de salida	<i>A</i>	**	148 (95+53)	228 (135+93)	0 (0+0)	376 (230+146)
	<i>G</i>	43 (27+16)	**	46 (30+16)	16 (0+16)	105 (57+48)
	<i>N</i>	133 (71+62)	210 (111+99)	**	37 (12+25)	380 (194+186)
	<i>V</i>	47 (12+35)	72 (34+38)	102 (52+50)	**	221 (98+123)
Total		223 (110+113)	430 (240+190)	376 (217+159)	53 (12+41)	1082 (579+503)

En la Tabla 2 se observa que los dos registros de salida más utilizados son el numérico, en 380 conversiones (35,12% del total), y el algebraico, en 376 (34,75%). En menor medida son usados el registro verbal, en 221 ocasiones (un 20,43%) y el registro gráfico, mucho menos frecuente (solo 105 veces, un 9,70%). En los LT analizados no se proporciona un número equilibrado de oportunidades de aprendizaje para leer y detectar las características de los intervalos dados en diferentes registros. En particular, las oportunidades para el registro gráfico como registro de salida son escasas, resultado coincidente con el de Vargas et al. (2018) en el análisis de tareas sobre la derivada en LT. Esto podría deberse a aspectos de edición (restricciones para incluir imágenes, o necesidad de más espacio para incluir este registro) o a considerar menos necesario o importante un aprendizaje adecuado de la lectura gráfica de intervalos y de sus características en la recta real en comparación con otros registros.

Atendiendo a la frecuencia del registro de llegada en las tareas, los datos evidencian una mayor aparición de los registros gráfico (430 veces, un 39,74%) y numérico (376 veces, un 34,75%), una aparición moderada del registro algebraico (223 veces, un 20,60%) y una muy escasa del registro verbal, solo en 53 casos, que representan un 4,90% del total. La distribución presenta diferencias muy importantes, por lo que tampoco se proveen las mismas oportunidades de aprendizaje de la escritura de los intervalos en los cuatro registros considerados. Destaca la gran presencia de los registros numérico y, sobre todo, gráfico. Esto último contrasta con el comportamiento general observado en los registros de salida, lo que podría interpretarse como una posible compensación o mostrar una consideración mucho mayor de la importancia del aprendizaje de la escritura gráfica de intervalos en la recta real frente a su lectura. Por el contrario, el registro verbal apenas tiene presencia como registro de llegada, y solo se ha detectado en una de las editoriales seleccionadas. Esto podría mostrar que los

editores creen menos necesario el aprendizaje de la escritura verbal de intervalos o reflejar una falta de consideración de este registro como registro de llegada en la propia presentación del concepto.

Además, el amplio rango de frecuencias con la que se solicita cada una de las 12 conversiones posibles, que van desde la no aparición de la conversión $A \rightarrow V$ hasta las 228 veces que se demanda una conversión $A \rightarrow N$, pone de manifiesto la muy desigual provisión de oportunidades de aprendizaje de las conversiones entre diferentes registros en los LT analizados. Además de $A \rightarrow N$ (21,07%), destaca por su asiduidad la conversión $N \rightarrow G$, presente 210 veces (19,41%). Las conversiones $A \rightarrow G$ y $N \rightarrow A$ también aparecen en un porcentaje superior al 10% del total.

En los registros algebraico y verbal hay varias escrituras válidas de cada intervalo, acotado o no acotado. En Pecharromán et al. (2019) detectamos la mayor dificultad de los alumnos para realizar correctamente tareas de conversión de semirrectas con llegada en estos dos registros. El análisis de las tareas propuestas por los LT evidencia que, salvo la conversión $N \rightarrow A$, el resto de las conversiones con llegada en los registros algebraico o verbal tienen una reducida presencia (inferior en todos los casos al 5% del total). Así, los LT analizados no aportan las suficientes oportunidades de aprendizaje de estas conversiones y más teniendo en cuenta su mayor dificultad para los aprendices. La posición de los LT como mediadores del currículo realmente implementado en las aulas que indican Valverde et al. (2002) puede hacer que, en algunos casos, esa insuficiencia de oportunidades de aprendizaje en los LT se traslade a las aulas y contribuir también a explicar estas mayores dificultades del alumnado.

En los 12 LT de 4º de ESO de la muestra hemos encontrado 579 tareas de conversión, con una media de 48,25 tareas por LT; en los 13 LT de 1º de Bachillerato el número de tareas es de 503, con una media de 38,69 tareas por LT. Este hecho puede evidenciar un comportamiento global de mayor importancia a las conversiones entre intervalos en 4º de ESO que en 1º de Bachillerato, donde parece tratarse más como un contenido de repaso, en el tema inicial el curso y con una cantidad menor de tareas de conversión propuestas. La comparativa de las frecuencias por curso para cada conversión (Tabla 2) muestra algunas pequeñas diferencias entre cursos, como una mayor presencia del registro algebraico como registro de salida en 4º de ESO, de la conversión $A \rightarrow G$ en este mismo curso y del registro verbal en 1º de Bachillerato.

Congruencia de las conversiones demandadas en los registros algebraico y verbal

Al analizar enunciados de tareas de conversión de intervalos, únicamente disponemos de la escritura de cada intervalo en el registro de salida propuesta por el LT. Reflejaremos los resultados del análisis de la escritura del intervalo dada en cada registro de salida en términos de su efecto en la congruencia de la conversión solicitada. En los registros numérico y gráfico hay una única escritura válida, salvo cambio en el modo de escribir alguna unidad significativa (por ejemplo, escribir un corchete invertido en lugar de un paréntesis en el registro numérico), variabilidad que no se ha detectado en la muestra de LT analizada. Así, analizaremos estos posibles efectos en los registros algebraico y verbal.

Para el registro algebraico, una escritura que hace uso de los signos “<” o “≤” permite conversiones *con mayor congruencia*, al coincidir el orden de lectura de la expresión con el de escritura en el registro numérico y de ubicación en la recta real. Por el contrario, “>” o “≥” dan lugar a conversiones *con menor congruencia*. En el registro verbal, las expresiones que permiten conversiones de semirrectas con mayor congruencia hacen uso de palabras como “menores que” o “menores o iguales que” y, en los intervalos acotados, aluden a los extremos en orden creciente, al coincidir con el orden de escritura en el registro numérico y de ubicación en la recta real. Si se usa “mayores que” o “mayores o iguales que” en semirrectas, o se alude a los extremos en un orden distinto al de la recta real en intervalos acotados, la expresión dará lugar a conversiones con menor congruencia. La Tabla 3 recoge los datos de conversiones con salida en los registros algebraico y verbal, según el tipo de intervalo y el posible efecto de la escritura seleccionada en la congruencia de la conversión. Se recogen en “Otras escrituras” las formas verbales “Todos los números reales” y “Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos”.

Tabla 3. Frecuencia de escritura en los registros algebraico y verbal según su efecto en la congruencia

Tipo de intervalo	Registro algebraico		Registro verbal		
	<i>Mayor congruencia</i>	<i>Menor congruencia</i>	<i>Mayor congruencia</i>	<i>Menor congruencia</i>	<i>Otras escrituras</i>
<i>Intervalo acotado</i>	204	2	80	9	9
<i>Intervalo no acotado por izda.</i>	64	2	60	0	0
<i>Intervalo no acotado por dcha.</i>	26	78	12	47	0
<i>Todos los números reales</i>	0	0	0	0	4
Total	294	82	152	56	13

La Tabla 3 pone de manifiesto que, para los registros de salida algebraico y verbal, los LT tienden a proporcionar escrituras que permitan conversiones con mayor congruencia: un 78,19% en el registro algebraico y un 68,78% en el registro verbal. El número de oportunidades de aprendizaje provistas para conversiones con menor congruencia es bajo, lo cual es una limitación de los LT al ser las conversiones con mayor dificultad (Duval, 1999) y las que favorecen la generación de conversiones basadas en un significado semántico y no solo sintáctico (Goldin, 2002; Pecharromán et al., 2019).

Si atendemos al desglose por tipo de intervalo, se detecta otro comportamiento global relevante. En los registros algebraico y verbal, las escrituras que dan lugar a conversiones con más congruencia se concentran en intervalos acotados (como los apartados a, d y f en la Figura 2) y en intervalos no acotados por la izquierda (apartado b en la Figura 2), mientras que las de conversiones con menor congruencia se concentran en intervalos no acotados por la derecha (apartados c y e en la Figura 2). Es decir, cada tipo de intervalo tiende a escribirse siempre de un mismo modo, proveyendo los LT de oportunidades de aprendizaje suficientes para estos modos, pero siendo muy anecdótica la presencia de otras escrituras que facilitarían un aprendizaje más completo de los registros algebraico y verbal para leer y escribir intervalos. En general, los LT tienden a escribir las semirrectas utilizando lo que en Pecharromán et al. (2018) llamábamos orden lingüístico, presentando en primer lugar el elemento genérico del intervalo (“x” o “los números”). Los LT parecen preferir escrituras como $x > 0$ (como en el apartado c de la Figura 2) en lugar de $0 < x$. Ese comportamiento se amplía en el registro verbal a los intervalos acotados, usando en casi todos los casos expresiones del tipo “Números menores (mayores) que...” o “Números comprendidos entre...”. Es cierto que en el registro verbal estas escrituras empezando por los constituyentes del intervalo (núcleo del sintagma) son más naturales, y parece aplicarse ese criterio a la escritura algebraica, quizá teniendo presente la amplia congruencia entre los registros algebraico y verbal al traducir expresiones entre ellos (Pecharromán et al., 2018).

CONCLUSIONES Y PROPUESTA DE LÍNEAS FUTURAS

Los resultados muestran una desequilibrada presencia de oportunidades de aprendizaje de las diversas conversiones y de la lectura y escritura de intervalos en los diferentes registros. Este desequilibrio también se ha detectado en otros estudios, como Chang et al. (2016) para el caso de funciones. Como indican Chang et al. (2016), sería deseable una presencia similar de todas las conversiones, al ser todas importantes para desarrollar la comprensión del concepto (Duval, 2006). Añadimos que debería ser mayor el número de oportunidades de aprendizaje en las conversiones que pueden provocar más dificultades, como aquellas con menor congruencia (Duval, 1999) o aquellas con llegada en los registros algebraico y verbal (Pecharromán et al., 2019). Sin embargo, en ambos casos el comportamiento global que hemos detectado en la muestra analizada ha sido el contrario. Además, en varios LT se asocia indebidamente el nombre de intervalo solo al registro numérico. Por todo ello, además de desarrollar más estudios sobre el aprendizaje de los intervalos, es necesario transferir estos resultados a los editores de los LT para que los tengan presentes en la generación de contenido, así como conocer los criterios que han seguido al configurar el tratamiento del concepto en sus libros.

Una continuación natural de este estudio es completar la muestra de LT, incluso con otras editoriales, para poder realizar un análisis comparativo entre editoriales donde, además de analizar las tareas de

conversión, se analice la presentación del concepto y el modo en que tratan el aprendizaje de los diferentes registros y conversiones. En este sentido, también se propone como línea futura analizar en los LT las aplicaciones de los intervalos en contenidos posteriores de álgebra o funciones, puesto que la selección de las oportunidades de aprendizaje provistas de los registros y conversiones puede relacionarse con su necesidad de aplicación posterior.

Referencias

- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Chang, B. L., Cromley, J. G. y Tran, N. (2016). Coordinating multiple representations in a Reform Calculus Textbook. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 1475-1497.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres, UK: Routledge.
- Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I. y Oliveira, M. J. (2008). *Matemáticas 4. Opción A*. Madrid: Anaya.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45, 633-646.
- Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Montoro, V., Cifuentes, M., Salva, N. y Bianchi, M. J. (2017). Estudiantes pensando en la recta numérica. *Infancia y Aprendizaje*, 40(2), 302-342.
- Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Tesis doctoral no publicada. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Pecharromán, C., Arce, M. y Conejo, L. (2019). Estrategias y errores de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(3), 169-187.
- Pecharromán, C., Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2018). Metodología teórica para analizar la congruencia entre representaciones de objetos matemáticos: el caso de los intervalos no acotados de la recta real. *Educación Matemática*, 30(3), 184-210.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En J. A. Beltrán, V. Bermejo, L. F. Pérez, M. D. Prieto, D. Vence y R. González (Eds.), *Intervención psicopedagógica y currículum escolar* (pp. 153-182). Madrid: Pirámide.
- Scaglia, S. y Coriat, M. (2003). Dos conflictos al representar números reales en la recta. *La Gaceta de la RSME*, 6(1), 131-168.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 594-603). Gijón: SEIEM.