

UN ESTUDIO SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA BASADO EN DOS TEORÍAS: APOE Y EOSⁱ

A study of the students' understanding of implicit differentiation based on two theories: APOS and OSA

Borji, V.^a, Sánchez, A.^b, Font, V.^b y Garcés, W.^b

^aFerdowsi University of Mashhad, ^bUniversidad de Barcelona

Resumen

El objetivo de este trabajo es caracterizar la comprensión de estudiantes universitarios al resolver ejercicios de derivación implícita, en términos de los niveles (intra, inter y trans) de desarrollo del esquema de derivación implícita, incorporando herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico. 25 estudiantes del primer curso de Cálculo de una universidad de Irán participaron resolviendo ejercicios de derivación implícita que se analizaron con constructos de la teoría APOE y del Enfoque Ontosemiótico. La mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para desarrollar las construcciones mentales y el trabajo práctico necesario para resolver la tarea, en particular las construcciones mentales necesarias para derivar funciones compuestas en las que la función interior incluye la variable y , lo cual hace que la mayoría de los participantes se sitúen en los niveles intra e inter de desarrollo del esquema de derivación implícita.

Palabras clave: derivación implícita, niveles de desarrollo de esquema, configuración epistémica

Abstract

The aim of this study is to characterize the university students' understanding to solve tasks related to implicit differentiation, in terms of the levels (intra, inter and trans) of development of the implicit differentiation schema, using theoretical tools from the Ontosemiotic Approach. 25 students of the first course of Calculus from a university in Iran participated solving exercises of implicit differentiation that were analyzed with theoretical constructs from the APOS theory and from the Ontosemiotic Approach. Most of the students in our sample had major problems in developing mental constructions and doing practical work needed to solve the task, particularly those mental constructions that must be made to differentiate the composition functions where the inner function includes y . This makes that most of the participants are placed at the intra and inter levels of development of the implicit differentiation schema.

Keywords: implicit differentiation, levels of development of schema, epistemic configuration

INTRODUCCIÓN

En cálculo, la técnica de *derivación implícita* se usa para derivar funciones definidas implícitamente. Esta técnica se estudia, habitualmente, en los cursos de Cálculo I (Cálculo de una variable) en la universidad. Un ejemplo es el libro *Calculus* de Stewart (2010) que sirve de referencia en muchas universidades de Estados Unidos y otros países (Park, 2016). La derivación implícita también se utiliza para derivar funciones implícitas en diversas variables en Cálculo II y otras asignaturas donde se enseñan ecuaciones diferenciales y en las asignaturas de matemáticas del ciclo básico de muchas ingenierías. A pesar de la importancia de la derivación implícita y de la abundancia de investigaciones en el área de educación matemática sobre la derivada, hay pocas que se dediquen específicamente a esta técnica.

Diversas investigaciones (Badillo, Azcárate y Font, 2011; Font, Trigueros, Badillo y Rubio, 2016; Fuentealba, Sánchez-Matamoros, Badillo y Trigueros, 2017; Mackie, y Court, 2002; Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios, y Breda, 2018; Tall, 2013; Tiwari, 2007) sobre aprendizaje y enseñanza de Cálculo han revelado la complejidad de los objetos matemáticos fundamentales en esta área de las matemáticas (derivadas, integrales, etc.) y la necesidad de enseñar diferentes significados parciales de estos objetos y conectarlos entre sí para su comprensión. Dos de estos enfoques que intentan caracterizar esta complejidad son la teoría APOE y el Enfoque Ontosemiótico (EOS). En el APOE (Fuentealba, et al., 2017), el tipo de comprensión que permite relacionar diferentes significados parciales de un objeto matemático se caracteriza en términos de tematización del esquema y niveles (intra, inter y trans) de desarrollo del esquema. Por esta razón, y dado que hay poca investigación sobre la derivación implícita a nivel internacional, particularmente en Irán, nuestro objetivo es investigar la comprensión de los estudiantes iraníes para resolver tareas usando esta técnica de derivación, caracterizando el esquema de los estudiantes en términos de niveles (intra, inter y trans) de desarrollo del esquema para la derivación implícita. Para ello, en este estudio, la forma de entender la comprensión del APOE se complementa con el uso de herramientas teóricas del EOS, para caracterizar mejor la actividad matemática realizada por el estudiante y poder inferir su comprensión de la tarea. Se incorporan herramientas del EOS porque consideramos, de acuerdo con Font et al. (2016), que un *networking* entre APOE y EOS proporciona herramientas para explicar mejor las dificultades asociadas con el aprendizaje de conceptos específicos.

Después de esta introducción donde se explica la relevancia y el objetivo de la investigación, en la siguiente sección se hace un breve resumen de las dos teorías consideradas. En la tercera sección se explica la metodología, que básicamente consiste en aplicar las herramientas teóricas de ambos enfoques y su manera de analizar la actividad matemática en las producciones de los alumnos. A continuación, se presentan los resultados, utilizando los niveles de desarrollo del esquema de derivación implícita y destacando para cada nivel los objetos que intervienen en la actividad matemática, desde el punto de vista del EOS. Finalmente, se explican algunas conclusiones.

MARCO TEÓRICO

En este apartado explicamos brevemente los marcos teóricos que utilizamos, APOE y EOS. También se incluye una revisión de algunas investigaciones sobre derivación.

Teoría APOE

APOE es un acrónimo de las iniciales de los términos: acciones, procesos, objetos y esquemas, que son las construcciones mentales que, según esta teoría, un sujeto realiza para construir conceptos matemáticos. Una *acción* es una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo y se lleva a cabo como reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a realizar. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede interiorizarse en un *proceso*, que es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos al individuo, de forma que el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos. Los *objetos* se pueden construir cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como un *objeto*. En este caso, el proceso se ha encapsulado en un objeto. Procesos y objetos se relacionan en virtud de que los primeros actúan sobre los segundos. Una colección de procesos y objetos puede ser organizada de una manera estructurada para formar *esquemas* (Asiala et al., 1996). Un esquema para un determinado concepto matemático es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas conectados de manera consciente o inconsciente en un marco coherente en la mente del sujeto. La propuesta teórica de APOE permite delimitar y describir el camino hacia la construcción de un concepto matemático en la mente de un sujeto.

El desarrollo de esquemas se puede explicar en tres fases (Piaget y García, 1983), conocidas como la “tríada”: intra, inter y trans. En la etapa intra, se construyen relaciones internas del objeto o fenómeno. Las explicaciones en este nivel son locales y particulares. En este nivel el estudiante se concentra en una acción repetitiva o una operación, pero no tiene la capacidad para relacionar la acción con el sistema de condiciones a través del cual puede extender sus aplicaciones e incluirlas en un sistema de transformaciones interdependientes. Posteriormente, en la etapa inter, el individuo construye relaciones entre los objetos y fenómenos de conocimiento. En el nivel inter, los estudiantes usan, comparan y reflexionan sobre ideas que ellos tienen aisladas y esto los lleva a construir relaciones y transformaciones. En este nivel los estudiantes pueden establecer relaciones y pueden deducir de una operación inicial, una vez la tienen comprendida, otras operaciones que están implicadas o que pueden coordinarse con operaciones similares. Este proceso lleva a los estudiantes a un grupo de sistemas utilizando un método que incluye nuevas transformaciones. Y, finalmente, en la etapa trans, las relaciones construidas adquieren mayor coherencia y se estructuran las relaciones de la etapa anterior. En el nivel trans, el estudiante reflexiona sobre estas coordinaciones y relaciones desarrollando nuevas estructuras. A través de las síntesis de las transformaciones en el nivel trans, el estudiante construye y tiene conciencia de que el esquema está completo, y puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles anteriores (Baker, Cooley y Trigueros, 2000).

La teoría APOE incluye, como parte de su aplicación a la investigación, un modelo general que describe una posible manera de construir el concepto. Este modelo hipotético se llama *Descomposición Genética* (DG) e incluye un análisis teórico de las acciones, procesos, objetos y esquemas que un estudiante construiría para aprender un concepto matemático concreto. Se utiliza para el diseño de investigaciones y métodos de enseñanza.

El Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El EOS describe la actividad matemática desde un punto de vista institucional y personal. En esta teoría, es importante considerar los objetos implicados en dicha actividad y las relaciones semióticas entre ellos (Font, Godino y Gallardo, 2013). En el EOS, la actividad matemática se puede modelizar en términos de configuraciones de objetos primarios y procesos que aparecen durante la práctica. Una práctica matemática se considera una secuencia de acciones, controladas por reglas institucionales, orientadas hacia un objetivo (generalmente, resolver un problema). En esta teoría, la palabra “objeto” se utiliza en un amplio sentido para referirse a cualquier cosa que sea susceptible de considerarse una entidad que es, de alguna manera, incluida en una práctica matemática y puede reconocerse como una unidad. Por ejemplo, en una práctica de resolución de un problema, podemos describir el uso de diferentes lenguajes (gráfico, simbólico...). Estos lenguajes son la parte ostensiva de un conjunto de definiciones, procedimientos y proposiciones que intervienen en la argumentación y justificación de la solución del problema. Los seis objetos matemáticos primarios son los problemas, el lenguaje, las definiciones, los procedimientos, las proposiciones y los argumentos. Al interconectarse, forman configuraciones de objetos primarios.

Estas herramientas del EOS permiten un análisis de la actividad matemática en el cual, primero, se efectúa el análisis temporal de las prácticas matemáticas realizadas para resolver un determinado problema, luego se analiza la configuración de objetos primarios que intervienen (lo cual muestra los elementos o partes de esta actividad matemática) y después se vuelve a hacer un análisis en términos de procesos que completa el análisis de las prácticas (e informa de la dinámica temporal).

Revisión de la literatura

Algunas investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes con la derivada ofrecen resultados sobre los errores y obstáculos para comprender esta noción, describen las construcciones mentales de los estudiantes e incluyen sugerencias didácticas en relación a la derivada. Pese a los numerosos estudios sobre la comprensión de la derivada, la investigación sobre derivación implícita es escasa.

La regla de la cadena es el concepto subyacente en la derivación implícita. Clark et al. (1997) informan de que algunos estudiantes no son capaces de usar la regla de la cadena en los problemas de derivación implícita. Explican que este problema se debe a la falta de comprensión o errores en la comprensión de la composición de funciones.

En algunas investigaciones realizadas usando como marco teórico el APOE se ha utilizado la tríada (intra, inter y trans) para estudiar la comprensión de los estudiantes de los diferentes conceptos de Cálculo, en particular la derivada. Badillo et al. (2011) estudiaron el nivel de comprensión de la relación entre $f'(a)$ y $f'(x)$ con profesores. Clark et al. (1997) utilizaron la tríada para interpretar las fases de comprensión del esquema de la regla de la cadena. Baker et al. (2000) introdujeron la interacción de dos esquemas. Trigueros y Martínez-Planell (2010) aplicaron la tríada a la comprensión de la gráfica de funciones de dos variables.

Actualmente en Educación Matemática, hay una tendencia a relacionar diferentes teorías. En particular, las posibles conexiones entre APOE y EOS son foco de interés recientemente, lo cual está asociado a una aparente necesidad en el desarrollo del APOE de contribuciones de teorías semióticas (Font, Montiel, Vidakovic y Wilhelmi, 2011; Font et al., 2016). En particular, Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez (2018) usaron la tríada, conjuntamente con nociones del EOS, para describir la comprensión de los estudiantes dado un problema gráfico de derivadas. Borji y Font (2019) también la usaron, conjuntamente con nociones del EOS, para el estudio de la comprensión de la derivación por partes. Fuentealba et al. (2017) utilizaron la teoría APOE, la tríada y una herramienta llamada configuración del concepto de derivada (que es una noción familiar a la noción de configuración epistémica del EOS y de las funciones semióticas entre sus elementos) para focalizarse en el análisis de las respuestas de los estudiantes a una secuencia de tareas sobre las derivadas sucesivas. Siguiendo esta línea, en este trabajo, analizamos la comprensión de los estudiantes al resolver tareas relacionadas con la derivación implícita, con la tríada de niveles de desarrollo del esquema y con uso de herramientas del EOS. Utilizaremos dos lentes: APOE y EOS.

METODOLOGÍA

En esta sección se describen las fases de investigación, el análisis a priori con herramientas del EOS de la tarea y, siguiendo la teoría APOE, la descomposición genética de la derivada implícita.

Participantes

En esta investigación participaron voluntariamente 25 estudiantes del primer curso de Cálculo de una universidad iraní.

Fases

La investigación comprendió las siguientes fases: primero, planteamos las preguntas con algunas funciones implícitas y se pedía a los estudiantes que buscaran y' por derivación implícita. Segundo, hicimos un análisis a priori de la actividad matemática, siguiendo la metodología del análisis onto-semiótico (Pino-Fan, Godino y Font, 2018), que consiste en identificar las prácticas matemáticas y luego considerar los objetos matemáticos primarios activados en ellas. Tercero, hicimos una descomposición genética (DG) basada en la teoría APOE. Nuestra DG describe las construcciones mentales que se necesitarían cuando los estudiantes utilizan los objetos primarios descritos en la segunda fase para resolver ese tipo de tareas. Cuarto, analizamos las evidencias de los estudiantes para determinar las prácticas, los objetos y construcciones mentales de la DG y asignamos a cada estudiante un nivel de desarrollo (intra, inter o trans) del esquema de derivación implícita.

La tarea

En este documento analizaremos una de las tareas propuestas a los estudiantes:

Encuentra y' por derivación implícita.

$$\text{a) } x^3 + y^4 = 10, \quad \text{b) } x^2 + y^2 + xy^3 = 0, \quad \text{c) } x^4 + x^3y^2 + \cos(xy) = 0$$

Una mirada desde el EOS: Configuración epistémica (CE) de objetos primarios

A continuación, hacemos un análisis a priori de la actividad matemática para resolver la tarea en términos de prácticas y objetos primarios utilizados.

Práctica: 1) Leer la tarea. 2) Encontrar y' para las funciones implícitas.

Configuración epistémica de objetos primarios:

Problema: La tarea propuesta (hallar tres derivadas).

Lenguajes: a) Verbal: función explícita, función implícita, derivada, derivación implícita; b) simbólico: expresiones simbólicas con $x, y, \cos, =, y'$.

Conceptos/definiciones: Función, derivada, función implícita, derivación implícita, producto de funciones, composición de funciones.

Procedimientos:

Pr0: Usar la tabla de derivadas de las funciones elementales y cómo aplicarlas.

Pr1: Derivar a ambos lados de la ecuación implícita respecto a x utilizando la regla del producto y la regla de la cadena.

Pr2: Encontrar y' a partir de la ecuación que resulta al aplicar Pr1, utilizando métodos algebraicos.

Proposiciones:

- 1) Fórmulas de las derivadas de las funciones elementales.
- 2) Reglas de cálculo algebraico (factorización, factor común,...).
- 3) Regla del producto: Si las funciones f y g son diferenciables en x , entonces su producto $f \cdot g$ también lo es, y $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
- 4) Regla de la cadena: Si la función g es diferenciable en x y la función f es diferenciable en $g(x)$, entonces la función compuesta $H = f \circ g$ es diferenciable en x y su derivada viene dada por: $H'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Argumentos: Los argumentos a los tres apartados son muy similares, sigue solo el del apartado c):

La respuesta a la tarea 1.c) es $y' = \frac{-4x^3 - 3x^2y^2 + y \cdot \sin(xy)}{2x^3y - x \cdot \sin(xy)}$. La razón que justifica esta respuesta es

la correcta aplicación de las reglas de derivación, como se explica a continuación: El primer término, x^4 , solo incluye x , así que su derivada es $4x^3$. El segundo término x^3y^2 es un producto de x^3 y y^2 , así que utilizamos la regla del producto. La derivada de x^3 es $3x^2$, y y^2 es la composición de la función x^2 con la función y . Para encontrar la derivada de y^2 , derivamos la segunda función x^2 —esto es $2x$ — y sustituimos la primera función y en ella —por tanto, $2y$ —, entonces lo multiplicamos por la derivada de la función interior —es decir, y' —, el resultado es $2yy'$. Utilizando la regla del producto, la derivada de x^3y^2 es $3x^2y^2 + x^3(2yy')$. El último término, $\cos(xy)$, es la composición de la función exterior $\cos(x)$ y función interior xy . Para encontrar su derivada, derivamos la función exterior y sustituimos la función interior en ella, después multiplicamos por la derivada de la función interior. Así, la derivada de $\cos(xy)$ es $-\sin(xy) \cdot (y+xy')$. Hasta este punto, tenemos el resultado $4x^3 + 3x^2y^2 + x^3(2yy') - \sin(xy) \cdot (y+xy') = 0$. Aplicamos reglas de transformación de las expresiones algebraicas a esta ecuación para encontrar y' , que es $\frac{-4x^3 - 3x^2y^2 + y \cdot \sin(xy)}{2x^3y - x \cdot \sin(xy)}$.

Básicamente, el argumento consiste en afirmar que se han seguido correctamente las reglas de derivación y las reglas algebraicas para simplificar el resultado.

Descomposición genética

Para llevar a cabo las prácticas descritas en el apartado anterior (y activar la configuración de objetos primarios en ellas), es necesario, según el APOE, que el estudiante realice determinadas construcciones mentales. A continuación, describimos las construcciones mentales que un estudiante necesitaría realizar para aprender a resolver ejercicios de derivación implícita.

Como parte de su esquema previo de función, el estudiante: 1) ha desarrollado una construcción como proceso u objeto de las funciones explícitas e implícitas, y 2) ha desarrollado una construcción proceso u objeto de la composición de funciones. Por otra parte, como parte de su esquema de la derivada, el estudiante ha desarrollado una construcción como proceso u objeto de la derivación y sus reglas, especialmente de la regla del producto y la regla de la cadena. Para poder decir que el estudiante ha comprendido una noción matemática, es necesario que al menos haya desarrollado una construcción proceso de dicha noción.

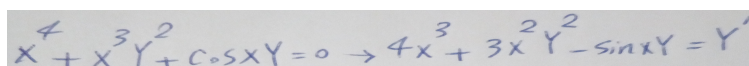
El estudiante entonces coordina los esquemas previamente contruidos de función y derivada para integrar la derivación implícita. La coordinación consiste en, primero, derivar respecto de x a ambos lados de la ecuación implícita, término a término, y después encontrar y' . Cuando el estudiante repite y reflexiona sobre esta acción, puede llegar a interiorizarla como proceso. Esta construcción mental como proceso de la derivación implícita, después, se encapsula en un objeto. Como resultado de que el estudiante establece relaciones entre estos procesos y objetos y con otros esquemas (función, derivada, ecuación, etc.) construye el esquema de derivación implícita.

RESULTADOS

Analizamos la actividad matemática en las respuestas de los estudiantes y los clasificamos en tres grupos, que se asocian con los niveles intra, inter y trans (Piaget y García, 1983) de desarrollo del esquema de derivación implícita. Primero analizamos las respuestas de los estudiantes en cada nivel basándonos en la configuración epistémica de la fase dos y después las construcciones mentales de la DG de la fase tres.

Intra: Un estudiante en este nivel deriva solo los términos formados por x . Considera y como una constante. Si un término solo tiene y , entonces el estudiante considera que su derivada es cero. Cuando los términos con x se multiplican por términos con y , entonces el estudiante no sabe utilizar correctamente la regla del producto. Deriva término a término y luego iguala el resultado a y' .

Con relación a la CE del EOS, un estudiante en este nivel entiende y puede realizar algunas partes de los procedimientos Pr0 y Pr1 y la proposición 1. Respecto a los argumentos de la CE, el estudiante en el nivel intra no puede responder a las tareas. Cabe señalar que este estudiante no puede hacer los procedimientos Pr1 y Pr2 y por esa razón no puede encontrar y' correctamente para todos los apartados de la tarea. Con relación a las construcciones mentales de la DG, como máximo, se ha desarrollado una construcción proceso de la composición de funciones, sin llegar a encapsularla como objeto. 11 estudiantes de nuestra investigación se sitúan en el nivel intra (en la Figura 1 hay un ejemplo de respuesta):



$$x + x^3 y^2 + \cos xy = 0 \rightarrow 4x^3 + 3x^2 y^2 - \sin xy = y'$$

Figura 1. Respuesta de un estudiante en el nivel intra

Inter: Un estudiante en este nivel considera y como una función de x . Utiliza adecuadamente la regla del producto para los términos que son producto de y por una función de x , pero no sabe utilizar correctamente la regla de la cadena cuando la función interior incluye y .

Respecto a la CE del EOS, un estudiante en este nivel entiende y puede hacer los procedimientos Pr0, algunas partes de Pr1 y Pr2, utiliza las proposiciones 1, 2, 3, y puede utilizar la proposición 4 cuando la función interior incluye solo x y no y . El hecho de que el estudiante no sepa aplicar la

proposición 4 cuando la función interior incluye y , le impide obtener la solución correcta. En cuanto a los argumentos de la CE necesarios para resolver la tarea, el estudiante en este nivel solo puede derivar correctamente los términos que incluyen solo x y los términos que incluyen un producto de y por una función de x . Con relación a las construcciones mentales de la DG, básicamente el estudiante no ha desarrollado una construcción objeto de la regla de la cadena. 9 estudiantes de nuestra muestra se sitúan en el nivel inter (en la Figura 2 hay un ejemplo de respuesta de este nivel):

$$4x^3 + 3x^2y + 2y^3 - y \cos(xy) = 0 \Rightarrow y' = \frac{-4x^3 - 2xy^2 + y \cos(xy)}{2x^3}$$

Figura 2. Respuesta de un estudiante en el nivel inter

Trans: Un estudiante en este nivel puede usar correctamente tanto la regla del producto como la regla de la cadena para derivar todos los términos de una función implícita. Sabe generalizar su conocimiento para calcular y'' en una función implícita. Ha desarrollado todas las construcciones mentales de la DG.

Con relación a la CE del EOS, un estudiante en el nivel trans puede calcular y' a partir de una ecuación implícita porque sabe activar todos los objetos primarios de la CE y utilizarlos correctamente en el proceso de resolución de un ejercicio. 5 estudiantes de nuestra investigación están en el nivel trans. Con relación a las construcciones mentales de la DG, básicamente el estudiante ha desarrollado todas las construcciones mentales (en la Figura 3 hay un ejemplo de respuesta de este nivel):

$$4x^3 + 3x^2y + 2y^3 - \sin(xy) \cdot (y + y'x) = 0$$

$$y'(2y^3 - x \sin(xy)) = -4x^3 - 3x^2y^2 + y \sin(xy)$$

$$y' = \frac{-4x^3 - 3x^2y^2 + y \sin(xy)}{2y^3 - x \sin(xy)}$$

Figura 3. Respuesta de un estudiante en el nivel trans

CONCLUSIONES

Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes de nuestra investigación tuvieron problemas para desarrollar las construcciones mentales y hacer el trabajo práctico necesario para resolver las tareas, particularmente aquellas construcciones mentales que hay que hacer para derivar las funciones compuestas cuando la función interior incluye y , por lo que la mayoría de ellos están en los niveles intra o inter de desarrollo del esquema de derivación implícita.

Una de las limitaciones del estudio es que se trabaja la derivación implícita solo con funciones de una variable. Como señalamos al principio, la derivación implícita también tiene un papel importante en los cursos de cálculo en diversas variables. Para analizar mejor la comprensión que tienen los alumnos de esta noción, se podrían incluir ejercicios donde trabajen con funciones implícitas en diversas variables. Por otra parte, la descomposición genética que aquí presentamos está sujeta a modificaciones. La ampliación de la investigación con la posibilidad de entrevistar a los estudiantes probablemente permitiría definir mejor la transición entre las construcciones mentales como acción, proceso y objeto que desarrollan los alumnos.

Referencias

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In *Research in Collegiate mathematics education II*. CBMS issues in mathematics education (Vol. 6, pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, 29(2), 191-206.

- Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.
- Borji, V., y Font, V. (2019). Exploring Students' Understanding of Integration by Parts: A Combined Use of APOS and OSA. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology*, 15(7), em1721
- Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., y Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(6), 2301-2315.
- Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., et al. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.
- Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.
- Font, V., Montiel, M., Vidakovic, D. y Wilhelmi, M. R. (2011). Analysis of dimensional analogy by means of different theoretical perspectives. En R. Nata (Ed.), *Progress in Education* (pp.39-76). New York, USA: Nova Science Publishers.
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107-122.
- Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., y Trigueros, M. (2017). Thematisation of derivative schema in university students: Nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International journal of mathematical education in science and technology*, 48(3), 374-392.
- Mackie, D., y Court, S. (2002). Using Computer Algebra to Encourage a Deep Learning Approach to Calculus. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Retrieved from in <http://users.math.uoc.gr/~ictm2/>
- Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 91(3), 395-421.
- Piaget, J., y Garcia, R. (1983). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press.
- Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 16(6) 16, 1091-1113.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 21(1), 63-94.
- Stewart, J. (2010). *Calculus*. Mason, OH: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge University Press.
- Tiwari, T. K. (2007). Computer Graphics as an Instructional Aid in an Introductory Differential Calculus Course. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 2(1), 32-48.
- Trigueros M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19.

ⁱ Estudio realizado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).