

PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS POR ESTUDIANTES QUE RESUELVEN DE MANERA EXITOSA TAREAS QUE INVOLUCRAN EL ÁREA DE FIGURAS PLANAS¹

Procedures used by students who successfully solve tasks involving the area of flat figures

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio pretende caracterizar los procedimientos utilizados por un grupo de estudiantes de secundaria que resuelve de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. Se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos utilizados en la resolución de dos tareas de área. Los resultados indican que los estudiantes que tienen éxito en la resolución de las tareas utilizan procedimientos que admiten aproximaciones geométricas y numéricas del área. Así, los procedimientos de naturaleza geométrica pueden ayudar a los estudiantes a justificar mejor lo que hacen y porqué lo hacen, además de determinar, en parte, el éxito en la resolución de tareas más complejas.

Palabras clave: *medida del área, procedimientos geométricos, procedimientos numéricos*

Abstract

This study aims to characterize the procedures used by a group of students when successfully solving area measurement tasks. Written justifications and procedures used in the resolution of two area measurement tasks are analyzed. The results indicate that students who are successful in solving the tasks use procedures that admit both geometric and numerical approximations of area. Thus, procedures of a geometric nature may help students to better justify what they do and why they do it, in addition to determining, in part, success in solving more complex tasks.

Keywords: *area measurement, geometric procedures, numeric procedures*

INTRODUCCIÓN

En las matemáticas escolares existen conceptos que incorporan procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos. Algunos de estos conceptos son los vinculados a los procesos de medición (Hirstein, 1981). En el caso particular del área, ésta puede servir como un modelo de base para introducir, por ejemplo, la multiplicación de números naturales (Hirstein, Lamb y Osborn, 1978); o las fracciones (Freudenthal, 1983). El área, además, se relaciona con el análisis de las formas geométricas que se pretenden medir y, admite un tratamiento numérico y/o algebraico mediante el uso de fórmulas de cálculo.

Diversos estudios (Duoady y Perrin-Glorian, 1989; Kamii y Kysh, 2006; Tan-Sisman y Aksu, 2009) han reportado que una gran cantidad de estudiantes de los primeros cursos de Educación secundaria, presentan dificultades y errores al momento de resolver problemas de cálculo de áreas, los que pueden estar relacionados con una comprensión limitada de los conceptos que subyacen al uso de fórmulas. En este contexto, el objetivo de este estudio es caracterizar los procedimientos utilizados

¹ Estudio financiado por EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER, GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR y ANID PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032. Este trabajo se ha realizado en el marco del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 205 – 212). Valencia: SEIEM.

por un grupo de estudiantes de 13-14 años que resuelven de manera exitosa tareas de área de figuras planas.

MARCO TEÓRICO

Medida del área

Algunos autores enfatizan que la enseñanza y construcción del concepto de área, y sus procesos de medición, implican el aprendizaje y construcción de diversos elementos. Sarama y Clements (2009) advierten que, la medida del área implica el aprendizaje y la coordinación de diferentes conceptos, por ejemplo, el área como atributo; la unidad de medida; la estructuración espacial; la partición equitativa; la conservación; la acumulación y aditividad; y, la transitividad. Duoady y Perrin-Glorian (1989) se interesan por la diversidad de procedimientos que son necesarios en la enseñanza del área. Al respecto, estos autores señalan que, un aprendizaje comprensivo de los procesos de medición de áreas requiere, primero, de un tratamiento cualitativo con privilegio de procedimientos geométricos, y luego, de un tratamiento cuantitativo con privilegio de procedimientos numéricos. De manera similar, Olmo, Moreno y Gil (1989) insisten en que la fórmula debe ser presentada a los estudiantes como un último paso, a fin de lograr resultados similares a los que se pueden obtener por medios más espontáneos y laboriosos relacionados con acciones de corte, movimiento y pegado de superficies.

Dificultades y estrategias utilizadas por estudiantes en la medida del área

Tan-Sisman y Aksu (2009), en un estudio con 134 estudiantes de edades entre 13-15 años, evidencian que las dificultades más persistentes en los estudiantes se relacionan con el uso inadecuado de fórmulas y con comprender que el área permanece inmutable cuando una figura es dividida en partes y posteriormente reorganizada en una figura diferente. Mamona-Downs y Papadopoulos (2006), en un estudio sobre la resolución de problemas de área que involucran el corte, movimiento y pegado de figuras, evidencian que estudiantes de 12 años no toman en consideración las propiedades geométricas de las figuras para justificar sus procedimientos, sino que recurren a sus percepciones visuales y al uso de la medición.

Los estudios anteriores remarcan que un enfoque procedimental basado en el uso de fórmulas no garantiza la comprensión del concepto de área en los estudiantes, porque, entre otros aspectos, no permite explicar cómo una superficie bidimensional queda determinada por las longitudes de la misma superficie (Zacharos, 2006). Dicha dificultad puede persistir incluso en maestros en formación (Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019b; Simon y Blume, 1996). Sin embargo, si este enfoque se complementa con el estudio del análisis de las propiedades involucradas en la medición del área, se podría potenciar una comprensión más robusta (Barret, Clements y Sarama, 2017).

MÉTODO

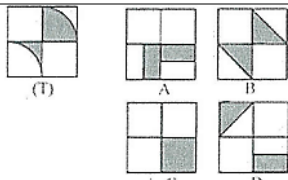
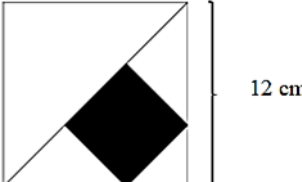
El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo. El objetivo es caracterizar los procedimientos utilizados por los estudiantes que tienen éxito en la resolución de las tareas que involucran el área de figuras planas e identificar posibles tendencias en sus resoluciones. El periodo de recogida de datos se realizó en el tercer trimestre del curso escolar 2018-2019. Los participantes fueron 83 estudiantes con edades comprendidas entre los 13-14 años, de un centro concertado de Educación Primaria y Secundaria de la provincia de Barcelona (España). Los estudiantes, como parte de su programa de estudios, habían tenido instrucción previa sobre la medición de áreas.

Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario no estructurado con siete tareas de medida y comparación de áreas de figuras planas para ser resuelto de forma anónima, individual y por escrito. Se pidió a los estudiantes justificar por escrito cada procedimiento. Para resolver las tareas, los estudiantes podían

utilizar material manipulativo que contenía recortables e instrumentos de medida (regla, escuadra, transportador). El cuestionario se estructuró de la siguiente manera: tres tareas únicamente de comparación de áreas (tareas 1, 2 y 6); y, cuatro tareas de medición de áreas (tareas 3, 4, 5 y 7). Las tareas del cuestionario se ordenan desde aquellas que admiten un tratamiento únicamente cualitativo, con uso de procedimientos geométricos, hacia aquellas que admiten un tratamiento cuantitativo, con procedimientos numéricos y geométricos de forma complementaria. De esta manera, el uso de fórmulas se incorpora de forma gradual y como último paso (Duoady y Perrin-Glorian, 1989; Olmo *et al.*, 1989). En esta comunicación, se presentan evidencias de las resoluciones a las tareas 2 y 7 del cuestionario (Tabla 1). Se selecciona una tarea que admite un tratamiento únicamente cualitativo del área (Tarea 2), y una tarea compleja que admite un tratamiento cualitativo y cuantitativo de manera complementaria (Tarea 7). En este sentido, es posible buscar evidencias de ambas aproximaciones del área y ver si existe alguna relación entre los procedimientos de resolución de las Tarea 2 y 7. Además, los procedimientos utilizados en las tareas 2 y 7, están presentes, también, en la resolución de las tareas 1, 3, 4, 5 y 6, por lo que las tareas 2 y 7 se consideran representativas del conjunto total de datos.

Tabla 1. Tareas propuestas al grupo de estudiantes

Enunciado de cada Tarea	Gráfica de las Tareas
TAREA 2: Tomando como referencia el área sombreada de la Figura (T) ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras tienen la misma cantidad de área sombreada? ¿Por qué?	 (Adaptada de Kospentaris, Spyrou y Lappas, 2011)
TAREA 7: ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm de lado? ¿por qué? ¿De cuántas maneras posibles puedes calcular el área del cuadrado negro? Explícalo.	 (Adaptada de Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019a)

Análisis

Se realiza un análisis de contenido estructurado en dos fases. En la primera fase se identifican los procedimientos utilizados por los estudiantes, clasificando sus respuestas en correctas, incorrectas y parcialmente correctas. Las respuestas parcialmente correctas presentan errores sólo en la ejecución de algún cálculo, ya sea al multiplicar o sumar valores numéricos, pero usan bien las fórmulas y muestran un uso justificado de todos los procedimientos utilizados. En la Tarea 2, se consideran parcialmente correctas las respuestas de los estudiantes que no consideran que una de las figuras (A, B, C o D) tiene un área sombreada equivalente a la de la Figura T (modelo). Las resoluciones incompletas que muestran un uso justificado de todos los procedimientos también se consideran parcialmente correctas. Se consideran exitosas las respuestas correctas y parcialmente correctas, pues en ambas se justifica lo que se hace y por qué se hace. Las resoluciones incompletas y con errores de cálculo, por un uso inadecuado de fórmulas, se consideran incorrectas. En la segunda fase se clasifican los procedimientos de las resoluciones correctas y parcialmente correctas. Para esto, se consideran las aportaciones de Duoady y Perrin-Glorian (1989) y, se definen tres tipos de procedimientos: (1) procedimientos con aproximaciones geométricas del área; (2) procedimientos con aproximaciones numéricas del área; y, (3) procedimientos con aproximaciones numéricas y

geométricas del área. A continuación, se muestran evidencias de la segunda fase de análisis y se detallan las tres tipologías de procedimientos identificadas.

1- Procedimientos que admiten aproximaciones geométricas del área: corresponden a aquellos procedimientos de naturaleza geométrica que permiten establecer relaciones de equivalencia y/o inclusión entre las áreas de las superficies que se quieren comparar. Se encuentran aquí los procedimientos de *comparación directa*, que implican superponer una superficie sobre otra para encontrar relaciones de equivalencia o inclusión (una superficie es la mitad, el doble o igual que otra). Procedimientos de *comparación indirecta*, que implican recortar o descomponer una superficie, y recomponer sus partes en una nueva forma sin superponerlas (obtener un triángulo a partir de un rectángulo y viceversa). Procedimientos de *descomposición de superficies*, que consisten en descomponer una superficie, en unidades congruentes o no, para facilitar el proceso de comparación de áreas (descomposición gráfica o mental); y, finalmente procedimientos de *estimación visual*, basada en las formas que componen la superficie (se justifica “al ojo” la equivalencia de figuras).

R1 “Todas, porque si pones las dos partes sombreadas de cada figura en un cuadrado, saldrá que está completamente pintado”.		R2 “La a, b c y d. Si sumas el área sombreada de la figura (T) saldrá que es $\frac{1}{4}$ del cuadrado. En las figuras a, b, c y d, pasa lo mismo. Todas son $\frac{1}{4}$ del cuadrado, ya que todo el rato se están sumando mitades de $\frac{1}{4}$ de cuadrado”
TAREA 2		

Figura 1. Ejemplos de resoluciones que utilizan procedimientos con aproximaciones geométricas.

En la Tarea 2 (Figura 1), los estudiantes utilizan procedimientos de descomposición de superficies; comparación indirecta; y, estimación visual. En ambas respuestas, los estudiantes advierten que en cada figura se representan mitades de $\frac{1}{4}$ del cuadrado. Así, juntan las partes de manera mental, por medio de movimientos de rotación y/o traslación, identificando, en cada caso, que la suma de las partes equivale a $\frac{1}{4}$ de cada cuadrado (R1 y R2, Tarea 2, Figura 1). En la primera respuesta (R1, Tarea 2, Figura 1), los estudiantes descomponen $\frac{1}{4}$ inferior de Figura D, para justificar que el área sombreada corresponde a una mitad de $\frac{1}{4}$ del cuadrado.

2- Procedimientos que admiten aproximaciones numéricas del área: corresponden a aquellos procedimientos de naturaleza numérica que permiten asociar el área a un número que se calcula, por medio de fórmulas específicas para cuadrados, rectángulos y triángulos. Al mismo tiempo, estos procedimientos permiten establecer relaciones entre éstas figuras, con base en sus respectivas fórmulas. Se encuentran aquí los procedimientos que involucran el uso de la fórmula de *base por altura*, para cuadrados y rectángulos; y, los procedimientos que involucran el uso de la fórmula de $(base \times altura) / 2$, para triángulos.

R1 a- ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm? ¿por qué? “Podemos usar la fórmula para calcular el área del cuadrado, que es elevar el costado al cuadrado, por lo tanto, el resultado es $12^2 = 144 \text{ cm}^2$”. b- ¿De cuántas maneras posibles puedes calcular el área del cuadrado negro? Explicalo. “Medir el costado y elevar al cuadrado” $A = C^2 \rightarrow A = 5,6^2 \rightarrow A = 31,36 \text{ cm}^2$	TAREA 7
R2 b- “Con el Teorema de Pitágoras para adivinar la hipotenusa y luego dividirla en tres partes iguales, por último, calcular el área del cuadrado, lado x lado y ya estaría” $h = \sqrt{c^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{144 + 144} = \sqrt{288} = 16,97 \rightarrow 16,97 \div 3 = 5,6 \text{ cm}$ Área cuadrado = $5,6^2 = 31,36 \text{ cm}^2$	

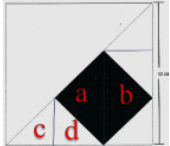
Figura 2. Ejemplos de resoluciones que utilizan procedimientos con aproximaciones numéricas del área.

En la Tarea 7 (R1a, Figura 2), los estudiantes calculan el área del cuadrado de 12 cm de lado elevando un lado al cuadrado (144 cm^2). En la respuesta R1b (Tarea 7, Figura 2), los estudiantes miden con regla uno de los lados del cuadrado negro, luego lo elevan al cuadrado obteniendo 32 cm^2 . Otros estudiantes identifican que el lado del cuadrado negro es $1/3$ de la diagonal. Así, obtienen la longitud de la diagonal del cuadrado de 12 cm de lado aplicando el teorema de Pitágoras (16, 97 cm), luego la dividen entre 3 para obtener la longitud de un lado del cuadrado negro y, posteriormente, obtienen su área usando la fórmula (R2, Tarea 7, Figura 2).

3- *Procedimientos que admiten aproximaciones geométricas y numéricas del área:* corresponden a procedimientos de naturaleza geométrica y numérica utilizados de forma conjunta. Se incluyen aquí todos los procedimientos mencionados anteriormente. Además, se encuentran procedimientos que permiten obtener el área por medio de un proceso aditivo. Por ejemplo, fraccionar la superficie en unidades congruentes alineadas en filas y columnas y, posterior recuento de unidades cuadradas (o subunidades).

R1 a- ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm? ¿por qué?
“ $A = C^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$ y si formamos cuadrados pequeños de 1 cm^2 , nos saldrían 12 filas y 12 columnas y si multiplicamos el n° de filas por el n° de columnas nos saldrían 144 cm^2 ”

b- ¿De cuántas maneras posibles puedes calcular el área del cuadrado negro? Explicalo.



“Si dibujas una de las diagonales del cuadrado puedes ver que esta representa el doble de los triángulos de su lado, y si dibujas la otra, ves que representa cuatro veces el más pequeño de todos. Si trazas la altura de los otros triángulos puedes ver que la mitad del cuadrado representa 9 triángulos... el cuadrado negro $4/9$ de la mitad. Por lo tanto, del total... $4/18$ o $2/9$ porque la otra mitad también la dividí en 9 partes”

“Puedes hacer $\frac{2}{9}$ de $12^2 = \frac{2}{9} \times 144 = \frac{288}{9} = 32 \text{ cm}^2$ ”

“Con la medida de los lados del cuadrado y haciendo Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado y dividirla en tres para encontrar el lado del cuadrado negro”

“Midiendo el lado del cuadrado. $A = 5,6^2 \rightarrow A = 31,36 \text{ cm}^2$ ”

“El lado del cuadrado está compuesto por tres triángulos pequeños, por lo tanto, cada lado mide $4 \text{ cm} \rightarrow \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}^2$. Como el cuadrado es cuatro veces este $\rightarrow 8 \text{ cm}^2 \times 4 = 32 \text{ cm}^2$ ”.

TAREA 7



Figura 3. Ejemplos de resoluciones que utilizan procedimientos con aproximaciones geométricas y numéricas del área.

En la Tarea 7 (R1a, Figura 3), los estudiantes obtienen el área del cuadrado de 12 cm de lado elevando los 12 cm al cuadrado. Además, utilizan el procedimiento de fraccionado de la superficie en unidades congruentes, ya que, dividen el cuadrado en 12 filas y 12 columnas compuestas por cuadrados de 1cm de lado. Así, obtienen el área por medio de un proceso aditivo y multiplicativo. En R1b (Tarea 7, Figura 3), los estudiantes recurren al uso de fórmulas. Miden el lado del cuadrado negro con regla y elevan ese valor al cuadrado. Además, utilizan el teorema de Pitágoras para obtener la longitud de la diagonal del cuadrado de 12 cm de lado. Luego dividen la diagonal entre tres y usan la fórmula del área. Por otro lado, los estudiantes descomponen el cuadrado negro en dos triángulos congruentes (ej. triángulos a y b) y, obtienen el área de dicho cuadrado al sumar las áreas de los dos triángulos. También, descomponen el cuadrado de 12 cm de lado en 18 triángulos iguales (ej. triángulos c y d) y obtienen el área del cuadrado negro estableciendo la proporción que éste ocupa respecto del total, 4 triángulos de 18. Este procedimiento les permite obtener el área del cuadrado negro calculando $2/9$ de 144.

RESULTADOS

El procedimiento más utilizado en la Tarea 2 es la *comparación indirecta por recorte o descomposición*. En la Tarea 7, es la *medición de longitudes y el uso de fórmulas*. En la Tabla 2 se presentan los procedimientos geométricos y numéricos utilizados por los estudiantes. En la Tabla 3 se detalla la frecuencia de estudiantes que usa cada procedimiento. Se toman en consideración resoluciones correctas y parcialmente correctas, ya que, como se indicó anteriormente corresponden a las resoluciones consideradas exitosas. De esta manera, se consideran 35 resoluciones, es decir, 35 estudiantes. Los números en **negrita** indican los estudiantes que utilizan, de forma complementaria, procedimientos con aproximaciones geométricas y numéricas del área. Los números subrayados, aquellos estudiantes que utilizan más de un tipo de procedimiento con aproximaciones geométricas del área. El resto de números, aquellos estudiantes que utilizan sólo un tipo de procedimiento.

Tabla 2. Procedimientos vinculados a cada aproximación del área.

Aproximación del área	Tipo de procedimientos (P)
(1) Geométrica	(P1.1) Comparación indirecta por recorte y/o descomposición
	(P1.2) Comparación directa por superposición
	(P1.3) Descomposición de superficies
	(P1.4) Estimación visual basada en las formas en que componen la superficie (triángulos pequeños y medianos)
(2) Numérica	(2.1) Fraccionado de la superficie en unidades congruentes (cuadrados y/o triángulos) y posterior recuento de unidades que cubren la superficie.
	(2.2) Medición de longitudes y uso de cálculos para medir áreas (fórmulas, teorema de Pitágoras)

En la Tarea 2, los estudiantes 29, 35 y 62 usan dos procedimientos con aproximaciones geométricas del área, para identificar que todas las figuras presentadas tienen un área sombreada equivalente a la del modelo dado. En la Tarea 7, los estudiantes 3, 13, 14, 24, 28, 29, 45 y 62 utilizan de forma complementaria procedimientos con aproximaciones geométricas y numéricas del área. Los estudiantes 29 y 62 hacen un uso complementario de procedimientos más diversos. Por ejemplo, el estudiante 29 utiliza, además de cálculos y fórmulas, el procedimiento de fraccionado de la superficie en unidades congruentes y posterior recuento de unidades estructuradas en filas y columnas (R1b, Tarea 7, Figura 3). Precisamente los estudiantes 29 y 62 justifican la equivalencia de áreas en la Tarea 2 (Figura 1) por medio de procedimientos geométricos diversos. En este sentido, el uso justificado de procedimientos con aproximaciones geométricas del área podría ser un indicador de éxito para la resolución de tareas más complejas, como es el caso de la Tarea 7, ya que, permite justificar de mejor manera el uso de cálculos y fórmulas (Tarea 7, Figura 3).

Tabla 3. Estudiantes que utilizan cada tipo de procedimiento

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de procedimientos y justificaciones proporcionadas por los estudiantes sugiere una tendencia generalizada a asociar el área con el uso de cálculos y fórmulas. Sin embargo, cuando el uso de fórmulas se complementa con el uso de procedimientos con aproximaciones geométricas, las resoluciones de los estudiantes son más robustas, ya que justifican mejor lo que hacen (Barret, Clements y Sarama, 2017). En este sentido, es preciso que los estudiantes, antes de comenzar a utilizar fórmulas, se relacionen con un tratamiento cualitativo del área y con procedimientos diversos y laboriosos, como el corte, movimiento y pegado de superficies (Duoady y Perrin-

		<i>Tareas</i>									
		TAREA 2					TAREA 7				
		C		PC			C		PC		
Con aproximaciones geométricas	P1.1	2, 3, 8, 10, 11, 15, 16, 62									
		14, 29, 21, 23, 24, 25,									
		30, 35, 28, 32, 34, 38,									
		50, 57, 39, 46, 47, 49,									
		62		51, 52, 53, 61							
	P1.2									62	
	P1.3	29, 35, 28					3, 13, 14, 24, 28, 29,			51, 52	
		62					45, 62				
	P1.4	17		13, 36, 45, 54						38	
Con aproximaciones numéricas	P2.1									29	
	P2.2						2, 3, 8, 10, 11, 13, 14,		38, 46,		
							15, 16, 17, 21, 23, 24,		47, 49,		
							25, 28, 29, 30, 32, 34,		51, 52,		
							35, 36, 39, 45, 50, 57,		53, 54		
							61, 62				
Total				35					35		

Glorian, 1989; Olmo *et al.*, 1989).

En general, los estudiantes que resuelven de manera exitosa la Tarea 2, también tienen éxito en la Tarea 7, por lo que es posible que las destrezas en el uso de procedimientos con aproximaciones geométricas puedan ser un indicador de éxito en la resolución de tareas más complejas. Es probable que los diferentes procedimientos con aproximaciones geométricas actúen como un puente para utilizar de mejor manera los procedimientos de naturaleza numérica, pues permiten justificar el uso de fórmulas con base en la coordinación de conceptos que proponen Sarama y Clements (2009). Esto podría tener implicaciones en el tratamiento que dan los maestros de primaria al uso justificado, y a la relación, de los procedimientos con aproximaciones geométricas y numéricas del área. Así, resulta relevante la incorporación de tareas que incentiven el uso justificado de procedimientos con ambas aproximaciones del área, a fin de que los futuros maestros puedan diseñar y secuenciar tareas de forma estratégica.

Referencias

- Barrett, J. E., Clements, D. H. y Sarama, J. (Eds.). (2017). *Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume*. National Council of Teachers of Mathematics, Incorporated.
- Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019a). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, 15(1).

- Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019b). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Douady, R. y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-424.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Hirstein, J. (1981). The second national assessment in mathematics: Area and volume. *The Mathematics Teacher*, 74(9), 704-708.
- Hirstein, J., Lamb, C. y Osborn, A. (1978). Student misconceptions about area measure, *Arithmetic Teacher* 25(6), 10-16.
- Kamii, C. y Kysh, J. (2006). The difficulty of „length×with”: Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105-115.
- Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127.
- Mamona-Downs, J. y Papadopoulos, I. (2006, Julio). The problem-solving element in young students' work related to the concept of area. In *Proceedings of the 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128).
- Olmo, M., Moreno, M. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- Simon, M. y Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 3-31.
- Tan-Sisman, G. y Aksu, M. (2009). Seventh grade students success on the topics of area and perimeter. *Elementary Education Online*, 8(1), 243-253.
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224-239.