

NEOTRIE VR COMO ESPACIO DE TRABAJO PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA FRACTAL

NeoTrie VR as a mathematical working space to introduce fractal geometry

Chavil-Montenegro, D. Y.^a, Rodríguez-Blancas, J. L.^b y Romero-Albaladejo, I.^b

^a Universidad Nacional Tecnológica de Lima Sur, ^b Universidad de Almería

Resumen

Se presenta una investigación sobre el aprendizaje de la geometría fractal usando el software de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR. El objetivo es enseñar este contenido a través de la construcción de distintos fractales, enfatizando el reconocimiento de dos de sus principales características: autosimilitud y carácter iterativo. Se sigue un esquema de investigación de orientación cualitativa y de tipo descriptivo, con una muestra de tres grupos integrados por 4 estudiantes de 1º de ESO. A partir de los resultados se evidencia la activación de las tres génesis: visual, instrumental y discursiva, así como de los tres planos verticales del modelo del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que lleva a la comprensión del objeto matemático en cuestión por parte de los estudiantes.

Palabras clave: *realidad virtual, geometría fractal, Espacio de Trabajo Matemático, Educación Secundaria*

Abstract

A research on the learning of fractal geometry using the immersive virtual reality software NeoTrie VR is presented. The objective is to teach this content through the construction of different fractals, emphasizing the recognition of two of its main characteristics: self-similarity and iterative nature. A qualitative and descriptive research scheme is followed, with a sample of three groups made up of four students 12-13 years old. The results show the activation of the three genesis: visual, instrumental and discursive, as well as the three vertical planes of the Mathematical Work Space (ETM) model, which leads to the students' understanding of the mathematical object at stake.

Keywords: *virtual reality, fractal geometry, Mathematical Working Space, Secondary Education*

INTRODUCCIÓN

La geometría fractal, cuyo auge empezó en el año 1975 de la mano de Benoît Mandelbrot (1924-2010), ha sido y es una geometría muy fructífera para tratar multitud de conocimientos tanto en el campo de las matemáticas como en los de otras ciencias; por ejemplo, en la economía, en la medicina y en las telecomunicaciones (Mandelbrot, 2013). Dicha geometría no es ajena a la euclidiana, pues utiliza algunos conceptos de ella, a la vez que fomenta el pensamiento estructural, a través de la identificación y el empleo de patrones de forma recursiva.

A pesar de la importancia y del impacto de la geometría fractal, sorprende la escasez de literatura acerca del tema (Sinclair et al, 2016). La mayoría de los artículos publicados se refieren a experiencias de innovación y hay algunos sobre investigación en niveles de educación superior (Chen et al., 2015; Karakus, 2015). Este último autor utiliza cuestionarios para explorar las definiciones y las imágenes conceptuales del concepto de fractal en estudiantes de diferentes regiones de Turquía, país en el que

la geometría fractal está siendo introducida a nivel curricular. Entre sus conclusiones, destaca que los estudiantes tienen dificultades para comprender el concepto de fractal y la mitad de los estudiantes fallaron en dibujar fractales en forma correcta y precisa, al no tener en cuenta la autosimilitud. También afirma que, debido a que los fractales tienen una estructura infinita, es difícil generarlos solo con actividades de papel y lápiz. Por esta razón, avanza como línea futura la investigación sobre el efecto del uso de la tecnología en la comprensión de los fractales por parte de los estudiantes.

En la actualidad, existen numerosas investigaciones que analizan la utilidad de los entornos de geometría dinámica plana (EGD2d) para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. La aparición de programas de geometría dinámica tridimensional como GeoGebra 3D o Cabri 3D amplía el campo de aplicación de los EGD al estudio de la geometría espacial (Gutiérrez, Jaime y Alba, 2014). NeoTrie VR es un nuevo software de geometría dinámica de realidad virtual inmersiva, desarrollado en la Universidad de Almería, que permite al usuario crear, manipular e interactuar con objetos geométricos y modelos 3D en general. Por otro lado, las últimas versiones del software incluyen funciones que permiten al profesorado diseñar y generar actividades fácilmente. La introducción de NeoTrie VR en el aula posibilita educar la percepción espacial, a través del descubrimiento y la inducción, al poder acceder amigablemente a conceptos y procedimientos relevantes en geometría, de forma más ágil que con instrumentos tradicionales. Véase por ejemplo (Cangas, Morgan y Rodríguez, 2019) y la página web <http://www2.ual.es/neotrie> para ampliar información.

El objetivo de la presente investigación es describir el trabajo matemático que realizan los estudiantes en el proceso de construcción de fractales planos y espaciales con NeoTrie VR, haciendo hincapié en el carácter iterativo y la propiedad de autosimilitud. Para ello, utilizamos el modelo de los Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), que describimos brevemente a continuación.

MARCO TEÓRICO

El modelo del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), constituye un entorno organizado mediante dos planos interconectados: el epistemológico y el cognitivo (Kuzniak y Richard, 2014). El plano epistemológico se compone de tres polos; a saber, el referencial (que comprende las propiedades, teoremas y definiciones), representamen (signos semióticos) y artefactos (materiales o simbólicos). El plano cognitivo consta de los procesos de visualización, construcción y prueba. Ambos planos deben ser articulados para asegurar un trabajo matemático coherente y completo. Los planos se articulan mediante tres tipos de génesis: Génesis Semiótica (basada en los registros de representación semiótica, que otorga el estatus de objeto operativo matemático a los objetos tangibles); Génesis Instrumental (que hace operativos los artefactos en el proceso de construcción); y Génesis Discursiva (que da sentido a las propiedades del razonamiento matemático).

En este modelo, las génesis no operan separadamente, sino que necesitan interactuar para dar sentido al trabajo matemático. Ello da lugar a los planos verticales que conectan dichas génesis: Plano de Comunicación [sem-dis] (está orientado hacia la comunicación matemática y se apoya esencialmente en las génesis semiótica y discursiva); Plano de Descubrimiento [sem-ins] (privilegia la identificación y la exploración de los objetos apoyándose en la génesis semiótica e instrumental para desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos; y Plano de Razonamiento [ins-dis] (desarrolla el razonamiento matemático fundado en la justificación de descubrimientos, que articula la génesis instrumental y la discursiva).

CONTEXTO Y METODOLOGÍA

La actividad se desarrolló en el centro público IES El Parador de la provincia de Almería, en el curso de 1º de E.S.O. Se elaboraron 4 sesiones de aprendizaje sobre los fractales. En las 2 primeras, el primer autor introdujo la noción de fractal a la clase; en la 3ª y 4ª sesiones, 3 grupos de 4 estudiantes, seleccionados por su interés en el tema, hicieron uso de NeoTrie en pequeños grupos para construir fractales (triángulo de Sierpinski y alfombra de Sierpinski en la 3ª sesión, y tetraedro de Sierpinski y esponja de Menger en la 4ª). Estos estudiantes no tenían experiencia previa en el uso del software. Los investigadores les presentaron las principales herramientas y les mostraron representaciones planas de los fractales que tenían que construir. A partir de ese momento, dejaron autonomía a los estudiantes para colaborar entre ellos e intercambiar los controles de forma natural, mientras se limitaban a tomar datos y solventar dudas y contingencias técnicas.

En esta comunicación, se presenta el trabajo realizado por 3 grupos de 4 estudiantes cada uno. La metodología empleada es de tipo descriptivo, con una orientación cualitativa pues se utiliza la observación directa y la grabación en vídeo para la recogida de información. Los vídeos fueron analizados siguiendo el modelo analítico propuesto por Powell, Francisco y Maher (2003). A continuación, se resumen los resultados procedentes del análisis.

RESULTADOS

En primer lugar, presentamos una descripción general del trabajo observado en los tres planos verticales. A continuación, detallamos este trabajo para cada uno de los fractales considerados en el estudio: triángulo, alfombra y tetraedro de Sierpinski, y esponja de Menger (Figuras 1, 2, 3 y 4), respectivamente.

Plano Comunicación [sem-dis]. En este plano se persigue que pasen de la imagen icónica de un fractal a su visualización como objeto matemático, reconociendo la existencia de un patrón de construcción, así como de la autosimilitud. Para la construcción de los fractales planos (triángulo y alfombra de Sierpinski), a los grupos se les presentaron imágenes de las tres primeras iteraciones. Para la construcción del tetraedro de Sierpinski y de la esponja de Menger, adicionalmente a las imágenes planas de las 3 primeras iteraciones, se les entregaron modelos físicos de los fractales (hasta la iteración 2). El objetivo era que los integrantes de los grupos debatieran la estrategia que debían seguir en la construcción de dichas iteraciones a través de NeoTrie. Al tiempo que debatían, solían hacer dibujos en la pizarra donde esbozaban dichas estrategias. Una vez que un integrante del grupo tomaba los mandos y trabajaba con la representación en la realidad virtual inmersiva, los demás hacían uso del resto de las representaciones disponibles para colaborar en la construcción.

Plano Descubrimiento [Sem-Ins]. A través de este plano, se busca que los estudiantes exploren y descubran en NeoTrie la existencia del patrón de construcción de cada fractal y la autosimilitud entre las partes con el todo, ayudándose de las representaciones planas y/o modelos físicos proporcionados. Cuando los estudiantes se sumergieron en el entorno de la realidad virtual, empezaron a explorar las distintas herramientas que les ofrecía NeoTrie. Para obtener la iteración 0 de cada fractal, usaron el comando de voz del software para invocar las correspondientes figuras básicas en la escena (triángulo, cuadrado, tetraedro y cubo). Para obtener la iteración n , realizaron el número correspondiente de copias de la iteración $n-1$, y usaron las manos virtuales para mover y unir las copias. Además de las herramientas de copiar y pegar, conforme los estudiantes exploraban NeoTrie, descubrieron otras, como la de rotación, que usaron para colocar las piezas verticalmente, y llevaron a cabo operaciones como la de homotecia para cambiar el tamaño de una figura. Por otro lado, el modo “vuelo” les permitió tomar perspectiva para ver las construcciones completas. En todo este proceso, tuvieron en cuenta el carácter iterativo y la autosimilitud de los fractales. Llama la atención el hecho de que, de forma espontánea, los estudiantes se informaban unos a otros de los fallos y los

problemas que habían tenido al utilizar el software para que los demás lo hicieran correctamente cuando llegaba su turno.

Plano Razonamiento [ins-dis]. Su fin es desarrollar el razonamiento sobre la estructura de los fractales, fundado en los descubrimientos que llevaban a cabo al intentar construirlos mediante el uso de NeoTrie. Todos los integrantes de los grupos trabajaron con NeoTrie en las distintas construcciones de las iteraciones de los fractales programados para esta actividad. Durante el proceso, se observó una sinergia entre los integrantes de los grupos con respecto al que estaba haciendo uso de NeoTrie. Los estudiantes que observaban las acciones del compañero que lo estaba usando, intentaban guiarlo mediante palabras, movimientos corporales e incluso contactos físicos, con la finalidad de que rectificara o encaminara la construcción, conforme al carácter iterativo y a la propiedad de autosimilitud de los fractales.

A continuación, indicamos en las tablas 1, 2, 3 y 4 algunas especificidades encontradas en el trabajo en los 3 planos para cada uno de los fractales considerados.

Tabla 1. Planos verticales del ETM del Triángulo de Sierpinski

Triángulo de Sierpinski
Tiempo de construcción promedio: 11 minutos
Plano Comunicación [sem-dis]
A partir de la representación gráfica, los estudiantes detectan el patrón iterativo. Se ponen de acuerdo para que uno de ellos comience a construirlo con NeoTrie, y se intercambian el rol de constructor de modo natural, a lo largo del proceso. Se observa una comunicación fluida entre el compañero que usa NeoTrie y los que observan su actuación, a través del monitor del ordenador portátil. Logran comunicarse en un lenguaje verbal y gestual afín a ellos sobre la manera de construir la iteración 0 y de la iteración n a partir de la iteración $n-1$ (Figura 1a). También se ayudan a la hora de solucionar problemas, como los que se exponen en los otros dos planos.
Plano Descubrimiento [sem-ins]
Usando NeoTrie construyen de la iteración 0 hasta la iteración 4. La representación gráfica les permite detectar fácilmente la existencia de un patrón y la herramienta de copiado les posibilita construir las sucesivas iteraciones. En general, tienen más dificultades con el uso del software, puesto que acaban de comenzar, que con la comprensión de la estructura del fractal, aunque también aparecen problemas como el que se expone en el plano de Razonamiento. La mayoría de estudiantes usan reiteradamente la homotecia en distintas fases de las iteraciones, lo que implica que las figuras no encajan al momento de unirlas (esto ocurre también en la alfombra de Sierpinski (Figura 2b). Corrigen la construcción, ya sea borrando partes de las figuras o volviendo a construirlas. Aún no son diestros en el manejo de las herramientas de NeoTrie, pero ganan experiencia fácilmente, conforme avanzan en la construcción.
Plano Razonamiento [ins-dis]
A pesar de tener las copias necesarias de la iteración $n-1$, algunos estudiantes tienen problemas en juntar las copias para construir la iteración siguiente. Por ejemplo, para la construcción de la iteración 2, un integrante del grupo 3 empieza a unir copias de la iteración 0 en la iteración 1, con la finalidad de construir la iteración 2, cuando lo ideal es hacer copias de la iteración 1 para proceder a unirlas. Incluso las une mal, sin respetar la propiedad de autosimilitud del fractal. Los otros integrantes del grupo se dan cuenta del error y se lo advierten. La alumna que estaba en los mandos reconoce que no se acordaba como era la iteración 2, evidenciando que había tratado de memorizar la forma de las figuras vistas de forma icónica (Figura 1b). Sus compañeros la guían para que rectifique su construcción, explicándole cómo proceder para que cumpla la autosimilitud. La estudiante genera entonces las copias de la iteración 2 y las une de forma correcta, logrando construir adecuadamente las iteraciones 3 y 4 (Figuras 1c, 1d).

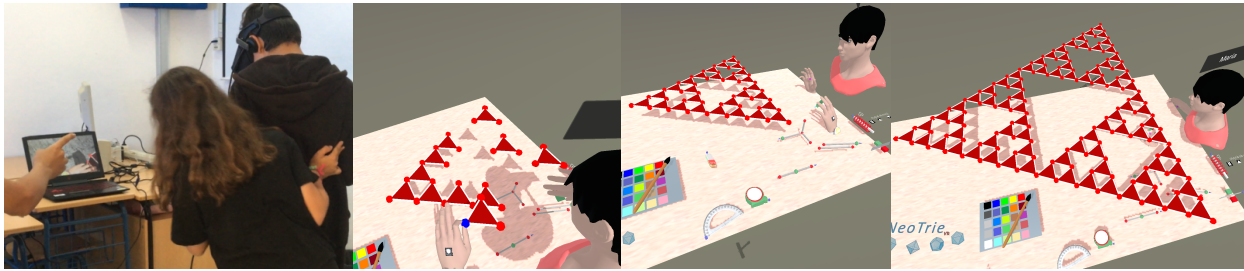


Figura 1: a) Ayudándose en la construcción. b) Construcción sin tener en cuenta el carácter iterativo. c) Vista de la iteración 3. d) Vista de la iteración 4.

Tabla 2. Planos verticales del ETM de la Alfombra de Sierpinski

Alfombra de Sierpinski
Tiempo de construcción promedio: 12 minutos
Plano Comunicación [sem-dis]
La comunicación es activa entre los integrantes de los grupos. A partir de las representaciones gráficas iniciales, los estudiantes averiguan la cantidad de copias que necesitan en cada iteración y cómo tienen que agruparlas (Figura 2a). Durante la construcción del fractal, se apoyan cuando observan errores y comunican, mediante un lenguaje verbal y gestual afín a ellos, la manera de corregirlos. Por ejemplo, un estudiante dice al que lleva los mandos: “Ponlo en paralelo”, “¿Qué es paralelo?” El primer estudiante dice: “Así”, poniéndose a su lado.
Plano Descubrimiento [sem-ins]
Por la experiencia obtenida en la construcción del fractal anterior, se hacen más diestros en el uso de las herramientas que ofrece NeoTrie. Algunos estudiantes tienen dificultades con la visualización de figuras planas dentro del espacio, en la realidad inmersiva. Para intentar solucionarlo, en el grupo 3 utilizan la herramienta de rotación. Teniendo las copias necesarias de la iteración 0 para la construcción de la iteración 1, la estudiante que lleva los mandos intenta girarlas para colocarlas en vertical, pero sus compañeros le advierten de que no encajarán bien (Figura 2b). Ante ello, borra las copias sin rotar para luego generar las copias necesarias de la iteración 0 rotada, y sobre ella, procede a unirlas y construye así la iteración 1, con lo que muestra una buena instrumentalización de NeoTrie.
Plano Razonamiento [ins-dis]
Los estudiantes no tienen problemas en la construcción de las iteraciones 0 y 1. Para la construcción de la iteración 3, todos los grupos saben la cantidad de copias que tienen que hacer de la iteración 2 y las generan. Cuando unen esas copias, empiezan a tener problemas de orientación, pues la iteración 3 se hace muy grande y empiezan a desorientarse (Figura 2c). Para superar el problema de la desorientación, y para una mejor perspectiva de lo que están construyendo, activan el modo vuelo, y es partir de allí, que ven los espacios que les falta completar y los completan fácilmente. De esta forma, muestran el dominio del carácter iterativo y la autosimilitud del fractal (Figura 2c).

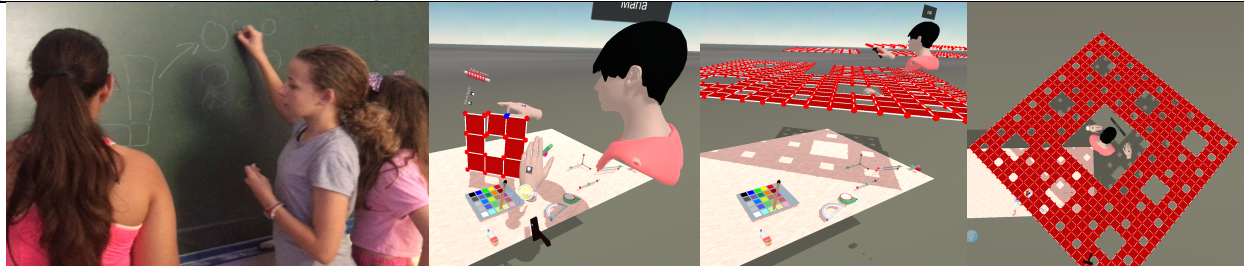


Figura 2: a) Comunicación previa a la construcción en NeoTrie. b) Las piezas no encajan bien si no se aplica la misma rotación a todas ellas. c) Dificultad al construir la iteración 4. d) Vuelo para obtener una mejor visión de la figura.

Tabla 3. Planos verticales del ETM del Tetraedro de Sierpinski

Tetraedro de Sierpinski
Tiempo de construcción promedio: 10 minutos
Plano Comunicación [sem-dis]
Además de las representaciones planas, los estudiantes disponen de un modelo tridimensional de la iteración 2 del tetraedro de Sierpinski (Figura 2a). A partir de estas representaciones, los estudiantes empiezan a

reconocer la iteración 0 y la cantidad de copias que tienen que generar para la construcción de la iteración siguiente. Parecen reconocer el patrón de construcción. El reto es entonces hacer las sucesivas iteraciones con NeoTrie. La comunicación sigue siendo activa entre los integrantes de los grupos en todo momento. Se apoyan cuando observan algún error y comunican, mediante un lenguaje natural afín a ellos (por ejemplo: “ese ponlo atrás”), la manera de corregirlos.

Plano Descubrimiento [sem-ins]

Con la experiencia ganada anteriormente en la génesis instrumental, generan la iteración 0 (un tetraedro), hacen las copias necesarias para la iteración 1 y las juntan correctamente. No obstante, en el grupo 1, el estudiante que realiza la construcción tiene dudas sobre dónde colocar la cuarta copia de la iteración 0, ya que hasta ahora se había trabajado con fractales planos y piensa que es suficiente con construir un triángulo de Sierpinski a base de tetraedros. Nuevamente, hubo estudiantes que aplicaron homotecias (reducción del tamaño), pero esta vez no a una copia de la iteración 0, sino a la unión de tres copias de la iteración 0 (faltaba una cuarta copia) (Figura 3b); ello les obligó a reconstruir la iteración 1, pero esta vez sin aplicar homotecias.

Plano Razonamiento [ins-dis]

Una vez ganado el manejo de las homotecias (necesarias para visualizar las iteraciones superiores del fractal), la construcción de la iteración 2 se hace rápidamente, pues los estudiantes generan la cantidad necesaria de copias de la iteración 1 y saben cómo conectarlas. Evidencian, de nuevo, el dominio del carácter iterativo y la autosimilitud, esta vez en un fractal de tres dimensiones.

La construcción de la iteración 3 es casi igual de rápida que la iteración 2 para grupos 2 y 3. En esta etapa, una integrante del grupo 1 aún tiene dificultades en usar NeoTrie, pero con la ayuda de sus compañeros que le indican lo que tenía que borrar o agregar o cómo usar una determinada herramienta, logra construir la iteración 3 (Figura 3c). Finalmente, la construcción de la iteración 4 transcurre sin problemas en todos los grupos (Figura 3d).

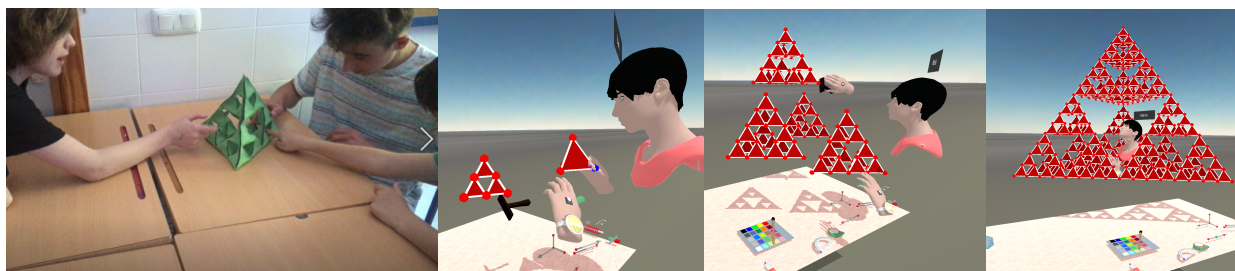


Figura 3: a) Reconocimiento del patrón con el modelo físico. b) 3 tetraedros unidos pero de diferente tamaño que el cuarto. c) Copias de la iteración 2 antes de unir las. d) Imagen de la iteración 4.

Tabla 4. Planos verticales del ETM de la Esponja de Menger

Esponja de Menger
Tiempo de construcción promedio: 20 minutos
Plano Comunicación [sem-dis]
Al igual que en el tetraedro de Sierpinski, a la actividad con representaciones planas, se le suma un modelo físico de la iteración 2 de la esponja de Menger (Figura 4a). En un principio, los grupos parecen tener claro la cantidad de copias necesarias en cada iteración y cómo agrupar dichas copias. No obstante, al construir la iteración 1, incurrir en el error de hacerlo como si fuera la iteración 1 de la alfombra de Sierpinski, pero con cubos. Es decir, construyen la parte frontal de la esponja de Menger y creen que ya tienen la primera iteración del fractal. Es necesaria la intervención del instructor para poner en duda a los escolares sobre la bondad de su construcción. Entonces, ayudándose del modelo físico, los estudiantes advierten que les faltan aún muchos elementos. A partir de ahí, intentan construir lo faltante haciendo copias de la parte frontal para posteriormente rotarlas con el fin de obtener las paredes laterales, el piso y el techo, pero se dan cuenta de que la estrategia no es adecuada (Figura 4b).
Plano Descubrimiento [sem-ins]
Una vez que los grupos se dan cuenta de que no están haciendo apropiadamente la iteración 1, intentan otras estrategias de construcción. Por ejemplo, el grupo 2 procede a construir la iteración 1 aprovechando las dos copias de la parte frontal y colocando copias de la iteración 0 en los lugares apropiados, completando esta iteración correctamente (Figura 4c).

Plano Razonamiento [ins-dis]

Aprendida la lección de la iteración 1, los grupos proceden a construir la iteración 2, de la cual generan el número adecuado de copias. Solo el grupo 3 logra conseguir el objetivo (Figura 4d), pues el software empezó a fallar en el trabajo de los demás grupos por problemas en el algoritmo de pegado de figuras, que posteriormente solventaron los desarrolladores. Aún así, los grupos muestran un buen progreso del pensamiento estructural, con la correcta aplicación de la recursividad y la autosimilitud en un fractal tridimensional bastante más complejo que el anterior (dos grupos completan la primera iteración y otro la segunda).

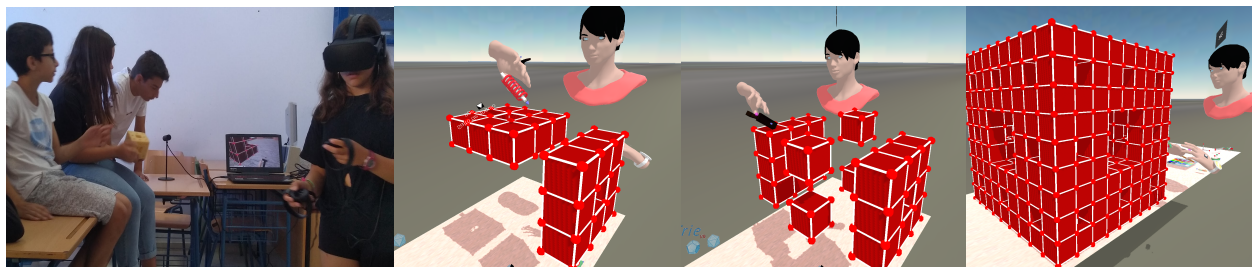


Figura 4: a) Colaboración manejando distintas representaciones. b) Intento fallido copiando y rotando la parte frontal. c) Descubrimiento de una estrategia acertada. d) 2ª iteración completada.

Discusión y conclusiones

A partir de la descripción del trabajo matemático realizado por 3 grupos de estudiantes de Secundaria al construir en realidad virtual 4 fractales, 2 de ellos tridimensionales, hemos detectado que, en términos generales:

- Mediante el uso de NeoTrie, los estudiantes trascienden las representaciones planas de objetos geométricos, tanto planos como tridimensionales, y se adentran en la representación de objetos planos y tridimensionales en el espacio. Ello da lugar a procesos de visualización diferentes a los habituales, que implican rotaciones, cambios de puntos de vista, homotecias, etc. Mediante el uso de distintos tipos de representaciones y mediante la comunicación entre los estudiantes, los grupos captan el carácter iterativo y la autosimilitud de los fractales, y logran articular estas propiedades correctamente para construir los 4 fractales propuestos.
- En los fractales más sencillos, los estudiantes captan la estructura del fractal a partir de las representaciones gráficas de las primeras iteraciones y son capaces de construir más iteraciones en la realidad virtual. En los primeros fractales, se centran en la génesis instrumental, en la que avanzan por ensayo y error, comunicándose entre los integrantes para optimizar el proceso. Salvo casos excepcionales, NeoTrie resulta manejable para los estudiantes y el avance en dicha génesis se produce rápidamente.
- Los progresos en la instrumentalización permiten un trabajo de instrumentación con el software al tratar de construir fractales más complejos, como la esponja de Menger. En este caso, no es suficiente la representación gráfica del fractal. El modelo físico ayuda a entender y plasmar en realidad virtual la estructura del fractal, que se dispone en el espacio tridimensional. A partir de aquí, algunos estudiantes logran construir una iteración más en el espacio virtual. Ello pone de manifiesto un razonamiento de tipo inductivo y un progreso en el pensamiento estructural, que no se suele trabajar en el currículo habitual y que actualmente cobra cada vez más relevancia.

El modelo de los ETM permite describir el trabajo matemático que realizan los estudiantes, el cual denota una activación de los planos epistemológico y cognitivo del concepto de fractal, así como la articulación entre ellos mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva, y los planos de Comunicación, Descubrimiento y Razonamiento (Kuzniak y Richard, 2014). El software de realidad

virtual NeoTrie VR ha propiciado una génesis instrumental activa, alrededor de la cual se ha vertebrado el trabajo matemático de los estudiantes, mostrando así el potencial de este software para promover nuevos modos de aprendizaje de la geometría tanto espacial como plana, desde el punto de vista espacial.

Puesto que los resultados obtenidos son a nivel grupal, sería interesante indagar sobre el grado de aprovechamiento de la actividad en los estudiantes individuales. También adaptar este trabajo para clases completas, ampliando las actividades con otros aspectos accesibles a este nivel, como cálculos de longitud, área o volumen de las primeras iteraciones, así como promover la creación de nuevos fractales.

Por último, cabe mencionar que nuestro estudio ha servido para corregir errores en el código, en lo referente al pegado de figuras, y mejorar el rendimiento del programa, dado el número elevado de datos necesarios para visualizar en realidad virtual iteraciones de algunos fractales.

Referencias

- Cangas D., Morga G. y Rodríguez J.L. (2019). Geometric teaching experience with NeoTrie VR. *Psychology, Society, & Education*, 11 (3), pp. 355-366.
- Chen, S., Herron, S., Lyle, J., Mohn, R., Mudzimiri, R. y Tian, H. (2015). *Assessing awareness, interest, and knowledge of fractal geometry among secondary mathematics teachers in the United States and China* (ProQuest Dissertations Publishing).
- Gutiérrez, A., Jaime, A. y Alba, F. J (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. Gonzales, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM. Disponible en <https://core.ac.uk/download/pdf/33252522.pdf>
- Karakus, F. (2015). Investigation into How 8th Grade Students Define Fractals. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 15(3), pp. 825-836.
- Kuzniak, A. (2011). "L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses". *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4), 5-15. Disponible en <http://reime.org/articulos/1704I/201400d1/>
- Mandelbrot, B. (2013). *Fractals and chaos: the Mandelbrot set and beyond*. Springer Science & Business Media.
- Powell, A. B., Francisco, J. M. y Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, 22(4), 405-435.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME13 survey team report. *ZDM: Mathematics Education*, 48(5), 691-719.