RESOLUCIONES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA EN FORMACIÓN A UN PROBLEMA DE FINAL ABIERTO

Solutions of secondary mathematics teachers in training to an open-ended problem

de-Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J. y Sosa-Martín, D.

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre las resoluciones de futuros profesores de Matemáticas a un problema de final abierto donde debían encontrar rectas con dos puntos de intersección a una parábola dada. El análisis se centra, principalmente, en dos aspectos de las resoluciones. Por un lado, se estudió la estrategia elegida para su resolución: si intentaban encontrar condiciones generales para todas las rectas solución posibles o si, por el contrario, intentaban encontrar soluciones de rectas particulares. Por otro lado, se analizó si hacían uso de la representación gráfica de la parábola o si solo incluían representaciones algebraicas en todo el proceso. Los principales resultados muestran que la mayoría de los participantes obtiene soluciones particulares y, para ello, se apoya en la representación gráfica de la parábola, presentando dificultades para encontrar una expresión general para las rectas solución del problema.

Palabras clave: *resolución de problemas, problema de final abierto, formación docente.*

Abstract

This paper presents a study on the solutions of future Mathematics teachers to an open-ended problem. They had to find lines with two intersection points to a given parabola. The analysis focuses on two aspects of the resolutions. On the one hand, the strategy chosen: if they tried to find general conditions for all the possible solution lines or if, on the contrary, they tried to find solutions of particular lines. On the other hand, we analysed if they used the graphical representation of the parabola or if they only included algebraic representations. The main results show that most of the participants obtain particular solutions, and, for this, they rely on the graphic representation of the parabola. They also show that they present difficulties in finding a general expression for the lines that are solutions of the problem.

Keywords: *problem solving, open-ended problem, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas (RP) es un aspecto fundamental tanto de la enseñanza de las matemáticas como de su aprendizaje (Liljedahl y Santos-Trigo, 2019), tanto que "se considera que la actividad matemática tiene como finalidad la RP" (Ledezma et al., 2021, p. 369). Es por ello que debería tener un papel relevante en la educación (Cai y Lester, 2010), tanto en la formación del alumnado como en la

de-Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J. y Sosa-Martín, D. (2022). Resoluciones de profesores de matemáticas de secundaria en formación a un problema de final abierto. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 229-237). SEIEM.

formación de los docentes. Entre las actividades que desarrollan cada día los docentes en el aula se incluyen plantear problemas matemáticos para un objetivo específico, explicar y justificar las estrategias de resolución y seleccionar las representaciones apropiadas, todo ello para mejorar la comprensión matemática y la capacidad de razonamiento de su alumnado (Koellner et al., 2007). Es importante, por tanto, que los profesores conozcan y comprendan en profundidad los conceptos matemáticos que enseñan y sean capaces de aplicarlos a sus tareas de enseñanza (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

Silver et al. (2005) sostienen que los estudiantes pueden aprender más resolviendo un problema de maneras diferentes que resolviendo problemas diferentes con una sola estrategia. En particular, afirman que resolver problemas con múltiples soluciones otorga al alumnado una variedad de representaciones y estrategias de resolución que les proporcionará una mayor destreza en futuras situaciones de RP. Consideran también que el uso de problemas con múltiples soluciones contribuye a mejorar el nexo entre un problema y los conocimientos que el alumnado debe poseer para resolverlo, fortaleciendo la movilización y la conexión de conceptos relacionados. Otros estudios sobre problemas abiertos muestran que, además, este tipo de tareas ayudan a mejorar la comprensión matemática, la argumentación y las habilidades para la toma de decisiones (Chan y Clarke, 2017).

Esta investigación se centra en la resolución de problemas de final abierto, es decir, aquellos problemas que admiten infinitas soluciones y múltiples procesos de resolución (Chan y Clarke, 2017). Como actividades que contribuyen al desarrollo matemático, los problemas de final abierto deben pertenecer, tanto a la enseñanza de las matemáticas a nivel escolar, como a los programas de formación de futuros docentes. Ferrando et al. (2017) obtuvieron en su investigación que profesores de Matemáticas de Educación Secundaria, tras participar en un curso de formación, daban mayor importancia a la incorporación de problemas de final abierto en sus prácticas habituales de aula. Y Sánchez et al. (2019) concluyeron en su estudio que un 23% de futuros profesores de Matemáticas en formación consideraban que proponer problemas de final abierto puede contribuir a promover la creatividad y el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, una de las herramientas utilizadas por los docentes para trabajar problemas en el aula son los libros de texto y, sin embargo, el número de tareas de final abierto que se plantean en ellos es mínimo (Vargas et al., 2018).

En este contexto, se llevó a cabo una actividad de resolución de problemas de final abierto en la que participaron 16 futuros profesores de Matemáticas de Secundaria. El objetivo de esta investigación es analizar las estrategias de resolución seleccionadas, así como el tipo de soluciones que obtienen y las representaciones utilizadas para llegar a ellas. Más concretamente, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué estrategia de resolución siguen y qué tipo de soluciones presentan los futuros docentes?
- ¿Qué tipo de representaciones utilizan para resolver el problema?

La primera pregunta de investigación tiene que ver con el carácter abierto del problema, pues los problemas de final abierto permiten que cada persona aborde el problema desde una variedad más amplia de estrategias y se plantee distintas soluciones.

En la segunda pregunta nos centramos en las representaciones utilizadas por los futuros docentes para alcanzar las soluciones que presentan: representación gráfica y representación algebraica. La representación es una herramienta útil tanto para comunicar información como para comprender la información recibida (NCTM, 2000). El uso de distintas representaciones hace más efectivo el aprendizaje de las matemáticas, por lo que los estudiantes deberían ser capaces de aprender a resolver problemas mediante el uso de una variedad de representaciones (Stylianou, 2011), usándolas para organizar y comunicar las ideas matemáticas necesarias en la RP (NCTM, 2000).

MARCO CONCEPTUAL

En las últimas décadas la RP se ha convertido en una de las principales líneas de investigación en educación matemática (p. ej., Felmer et al., 2019; Liljedahl et al., 2016), lo que ha generado una diversidad de significados para el término resolución de problemas. En la actualidad, existe consenso en definirla como una tarea de la que no se conoce una forma directa de resolverla (Schoenfeld, 1992) pero que genera un interés de encontrar su solución (Szetela y Nicol, 1992). Además, debe tener el potencial de generar un desafío intelectual al resolutor (Cai y Lester, 2010) pero, al mismo tiempo, hacerle sentir capaz de afrontarla (Felmer y Perdomo-Díaz, 2016).

A través de la RP se desarrolla el pensamiento matemático (Schoenfeld, 1992), se promueven habilidades como la capacidad de razonar y de comunicarse matemáticamente, se desarrollan los conocimientos y se estimula el aprendizaje (Cai y Lester, 2010). Por ello es esencial convertir al alumnado en resolutores de problemas competentes y eficientes, capacitados para actuar, además de en matemáticas, en otros campos como la tecnología, la ingeniería, la biología, la física o la medicina, pues cada vez más empresas buscan perfiles con estas habilidades (Chan y Clarke, 2017).

Un tipo particular de problemas son los problemas de final abierto, definidos por Chan y Clarke (2017) como aquel que admite infinitas soluciones y puede ser resuelto con una variedad de procesos. Ärlebäck (2009) añade que son problemas en los que no existe una estrategia de resolución determinada y conocida y que obliga a los resolutores a poner en juego otras habilidades y conocimientos previos, lo que permite a los resolutores trabajar según sus posibilidades, aumentando sus probabilidades de obtener, al menos, una respuesta correcta (Ochoviet, 2020). Al encontrar una solución propia se eleva su autoestima y confianza en la resolución de problemas, pues se deja atrás la perspectiva de las matemáticas como una disciplina restrictiva y rígida, donde solo existe un método de resolución y una única respuesta correcta y se transforma en una materia más flexible y que admite diversidad (Martínez et al., 2017). Zaslavsky (1995) ya proponía transformar los problemas comunes en los que hay una sola respuesta correcta en problemas de final abierto, para crear tareas ricas que fomenten nuevas dinámicas en el papel del profesor y el alumno en el aula que promuevan el aprendizaje y la eficacia en la resolución de problemas.

Al tratarse de un problema en el que interviene una función cuadrática, las representaciones utilizadas cobran importancia. El concepto de representación se ha utilizado desde los años 80 en educación matemática como todos aquellos signos o gráficos que muestran conceptos o procedimientos matemáticos (Rico, 2009). En este trabajo nos enfocaremos en dos tipos de representaciones:

- Representación gráfica. Entendida como el dibujo o esbozo de la parábola.
- Representación algebraica. Entendida como un lenguaje matemático simbólico.

METODOLOGÍA

Participantes

Este estudio se realizó con los 16 profesores en formación matriculados en la especialidad de Matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de La Laguna. La actividad de aula se llevó a cabo durante el curso académico 2019/2020 mientras los participantes cursaban la asignatura de *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. A excepción de tres Graduados en Física, el resto de los participantes eran Graduados o Licenciados en Matemáticas. Además, la mayoría había obtenido el grado ese mismo año, dos de ellos en los últimos dos años y uno en el año 2010. Se trata de un estudio cualitativo, con una perspectiva descriptiva e interpretativa, basado en estudio de casos (Creswell, 2012).

Recogida de datos

Los datos se recogieron mediante una actividad en la que los futuros profesores debían resolver un problema de final abierto. En el problema se les pedía que encontraran rectas con dos puntos de intersección con una parábola dada (figura 1).

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y = x^2 + 4x + 5$.

Figura 1. Enunciado del problema.

Dispusieron de 25 minutos para resolver el problema individualmente, con papel y lápiz, y no se les dio ninguna indicación adicional a la aportada en el enunciado del problema.

Proceso de análisis de datos

Se analizaron las 16 resoluciones individuales obtenidas durante la actividad en el aula.

El problema planteado en este trabajo admite infinitas soluciones, pero tiene la particularidad de que se pueden obtener todas esas soluciones a través de la búsqueda de las condiciones generales que definen a todas las rectas que cumplen la condición del problema. Para el análisis de las resoluciones, en primer lugar, estas se clasificaron estudiando la estrategia elegida: si intentaban encontrar las condiciones generales que verifican todas las rectas que cortan dos veces a la parábola o si intentaban encontrar rectas particulares que cortan a la parábola en dos puntos. En segundo lugar, se clasificaron las resoluciones basándonos en la representación utilizada: si realizaban la representación gráfica de la parábola o si utilizaban únicamente la representación algebraica.

A continuación, se analizaron las soluciones finales que presentaban según la estrategia utilizada. Por un lado, se clasificaron las resoluciones que intentaban encontrar las condiciones generales para todas las rectas en dos grupos: si presentaban rectas particulares o si presentaban esas condiciones generales. Por otro lado, se clasificaron las resoluciones que intentaban encontrar rectas particulares en dos grupos: si las rectas presentadas eran horizontales o si las rectas presentadas eran otro tipo de rectas no horizontales.

Con estas clasificaciones se creó una tabla de doble entrada para analizar, de forma cualitativa, la relación existente entre las dos variables analizadas.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Las resoluciones se codificaron como Rx, donde x se corresponde con un número de 1 al 16 asignado a cada resolutor de manera aleatoria.

En la tabla 1 se muestran las clasificaciones de las resoluciones atendiendo a las estrategias utilizadas, las soluciones presentadas y las representaciones utilizadas.

Tabla 1. Clasificación de las resoluciones.

	Condiciones generales		**Rectas particulares**	
		Rectas particulares	*Rectas horizontales*	*Otras rectas*
Representación gráfica	R13	R1; R15	R4; R8; R14	R10; R11; R12
Representación algebraica	R2; R6; R16	R7	R3; R9	R5

Como puede observarse en la tabla 1, son más los participantes que presentaron rectas particulares que aquellos que intentaron buscar las condiciones generales para todas las rectas. Por otro lado, en cuanto a las representaciones utilizadas para alcanzar las soluciones, puede verse que el número de futuros profesores que utiliza la representación gráfica de la parábola es ligeramente mayor que aquellos que únicamente hacen uso de la representación algebraica. Si analizamos la relación entre la estrategia elegida y la representación utilizada, vemos que la mayoría utiliza la representación gráfica de la parábola para dar rectas particulares. Y, por otro lado, que entre aquellos que intentan encontrar las condiciones generales de todas las rectas predomina el uso único de la representación algebraica.

Si nos fijamos ahora en las soluciones que presentan, vemos que de las resoluciones cuya estrategia es buscar las condiciones para todas las rectas que cortan en dos puntos, la mitad detiene el proceso de búsqueda de estas condiciones para dar soluciones particulares. En las imágenes siguientes, podemos ver un ejemplo representativo de esta situación en la que el futuro profesor R7 comienza la búsqueda de las condiciones generales para todas las rectas (figura 2) y llegado a un punto de la resolución, detiene la búsqueda de condiciones generales para las soluciones particulares (figura 3).

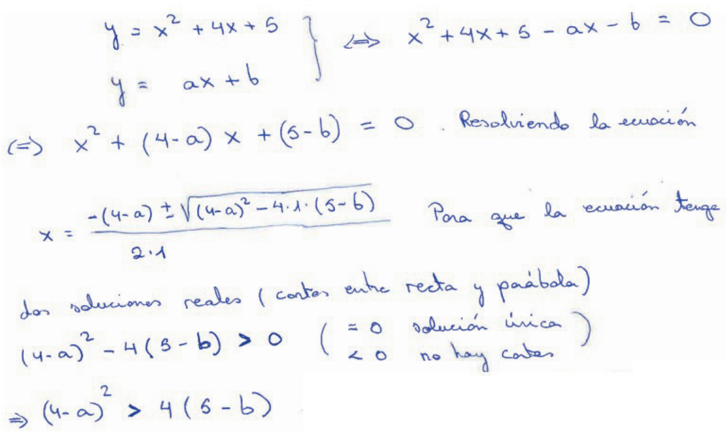

Figura 2. Resolución del futuro profesor R7.

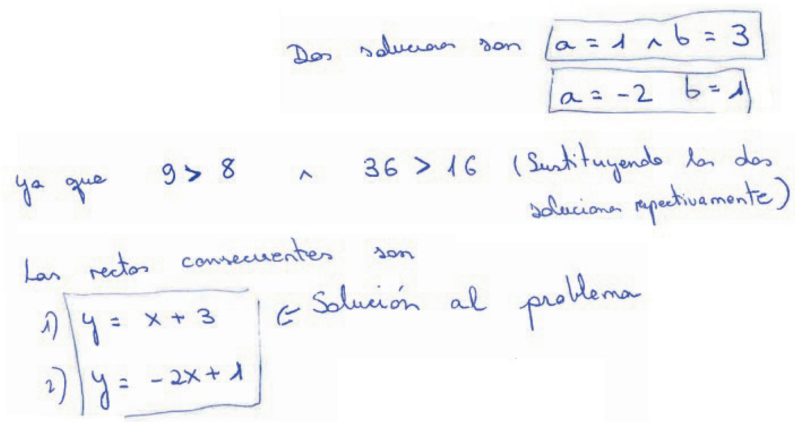

Figura 3. Solución del futuro profesor R7.

Entre las resoluciones cuya estrategia es encontrar rectas particulares, la mitad de ellas presentan como soluciones rectas horizontales por encima del vértice. En estas resoluciones encontramos resoluciones que, como la futura profesora R8, dan la expresión general (figura 4) y otras que únicamente dan rectas horizontales particulares, como, por ejemplo, la futura profesora R9 (figura 5).

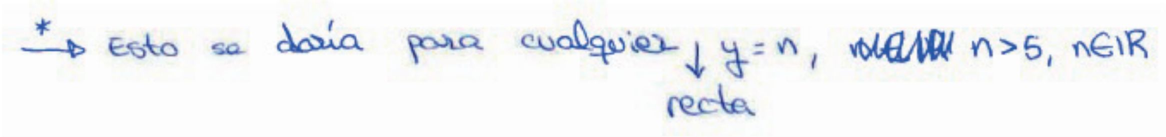

Figura 4. Solución de la futura profesora R8.

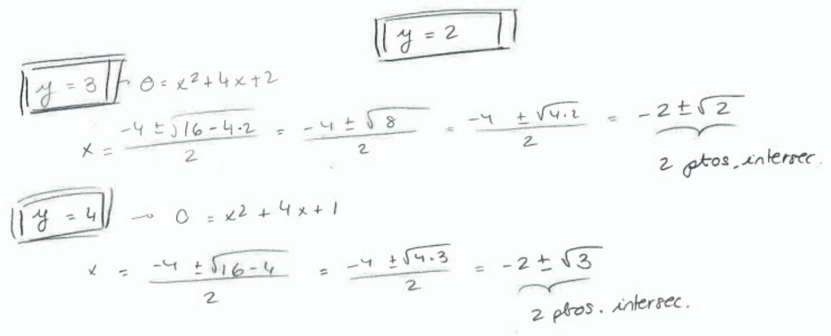

Figura 5. Solución de la futura profesora R9.

Por último, la mitad restante da como soluciones rectas particulares, pero no horizontales y, salvo una de ellas, todas lo hacen buscando rectas que pasen por dos puntos de la parábola, como vemos, por ejemplo, en la resolución de la futura profesora R12 (figura 6).

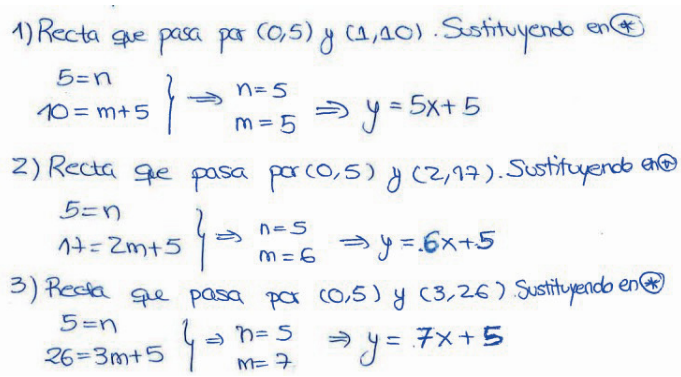

Figura 6. Resolución de la futura profesora R12.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo analizamos las resoluciones de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria a un problema de final abierto con el objetivo de dar respuesta a dos preguntas: ¿Qué estrategia de resolución siguen y qué tipo de soluciones presentan los futuros docentes? y ¿Qué tipo de representaciones utilizan para resolver el problema?

El estudio muestra dos estrategias principales de resolución: búsqueda de condiciones generales para todas las rectas y búsqueda de soluciones particulares. En lo referente al tipo de soluciones que presentan, destaca que entre los que intentan encontrar esas condiciones generales para todas las rectas, la mitad, llegados a un punto del proceso, detenían esa búsqueda y presentaban soluciones particulares. De la otra mitad que intenta continuar hasta encontrar la expresión general, ninguno llega a presentar una solución completa y correcta al problema. Tal y como comentaron los propios participantes al final de la actividad de aula, para muchos de ellos era la primera vez que se enfrentaban a la resolución de un problema de final abierto, aunque sí estaban acostumbrados a resolver problemas en los que los conocimientos implicados eran los mismos. Este hecho corrobora los resultados de Montejo-Gámez et al. (2017) en los que futuros maestros de Educación Primaria mostraron dificultades en la resolución de problemas asociadas a carencias con los procesos de resolución y no con el contenido matemático asociado. Estos resultados refuerzan también los obtenidos por Guiraldo et al. (2013), en los que futuros profesores de secundaria no conciben los problemas como tareas que representan un reto e intentan resolverlos mecanizando y repitiendo los procedimientos explicados por el profesor. Por ello, es importante introducir en la formación docente los problemas de final abierto, pues la resolución de este tipo de problemas les va a proporcionar estrategias y habilidades para poder enfrentarse a problemas no rutinarios (Silver et al., 2005) y desarrollar los conocimientos y el aprendizaje de su futuro alumnado.

En cuanto a los tipos de representaciones, se concluye que el número de participantes que utiliza la representación gráfica de la parábola es mayor que el de aquellos que solo hacen uso de la representación algebraica. En este punto, destaca la elevada cantidad de futuros profesores que representan de forma incorrecta la parábola. Más de la mitad representa erróneamente el vértice, colocándolo sobre el eje de ordenadas de manera que la parábola queda simétrica respecto al eje. Resultado que se observa también en la investigación de Díaz et al. (2015), en la que muestran que un alto porcentaje de estudiantes cometió errores en la representación de las funciones cuadráticas, uno de los más destacados relacionado con la posición del eje de la parábola.

Se plantean futuras líneas de investigación como, por ejemplo, el análisis de los errores en la búsqueda de las condiciones generales o el estudio de la función que tiene la representación gráfica de la parábola en los procesos de resolución.

Referencias

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331-364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Cai, J. y Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Problem Solving Research Brief. National Council of Teachers of Mathematics.

Chan, M. C. E. y Clarke, D. (2017). Structured affordances in the use of open-ended tasks to facilitate collaborative problem solving. *ZDM Mathematics Education 49*, 951-963. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0876-2

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Pearson Education.

Díaz, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 41*, 20-38.

Felmer, P., Liljedahl, P. y Koichu, B. (Eds). (2019). *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7

Felmer, P y Perdomo-Díaz, J. (2016). Novice Chilean Secondary Mathematics Teachers as Problem Solvers En P. Felmer et al. (Eds.). *Posing and Solving Mathematical Problems, Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_17

Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M. (2017). Diseño y evaluación de un curso de formación continua en modelización. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 227-236). SEIEM.

Guirado, A. M., Mazzitelli, C. y Maturano, C. (2013). La resolución de problemas en la formación del profesorado en ciencias: análisis de las opiniones y estrategias de los estudiantes. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 10*, 821-835. http://dx.doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2013.v10.iextra.22

Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Schneider, C., Pittman, M. E., Eiteljorg, E., Bunning, K. y Frykholm, J. (2007). The problem-solving cycle: A model to support the development of teachers' professional knowledge. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 273-303. https://doi.org/10.1080/10986060701360944

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367-375). SEIEM.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. y Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2

Liljedahl, P. y Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical problem solving*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4

Martínez, M., Araya, P. y Berger, B. (2017). Descripción del cambio del profesor de matemática desde su propia perspectiva a partir de una experiencia en torno a resolución de problemas de final abierto. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 984-1004. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a07

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347-356). Zaragoza: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Ochoviet, C. (2020). *Los problemas de final abierto Oportunidades de aprendizaje para todos*. Camus Ediciones.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2019). Análisis de las respuestas de futuros profesores a un cuestionario sobre el desarrollo de la creatividad en el aula de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 543-552). Valladolid: SEIEM.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C. y Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 287-301. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.009

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 265-280. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2

Szetela, W. y Nicol, C. (1992). Evaluating problem solving in mathematics. *Educational Leadership, 49*(8), 42-45.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 594-603). Gijón: SEIEM.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15-20.