LOS CORPÚSCULOS PITAGÓRICOS PARA MEDIR LONGITUDES FINITAS

Pythagorean corpuscles for measuring finite lengths

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T.

Universidad de Salamanca

Resumen

En este trabajo se aborda la formación inicial de futuros docentes de matemáticas de educación secundaria sobre la medida de longitudes finitas mediante el método empleado en la escuela pitagórica. Tras un minucioso análisis histórico se ha diseñado una ingeniería didáctica con el fin de utilizar la historia del cálculo para lograr una formación más profunda de los futuros docentes. Esto ha permitido abordar aspectos como la descomposición infinita de un segmento y el concepto de magnitud infinitamente pequeña en el caso de que dicha longitud sea un número irracional. Las conclusiones indican que, aunque inicialmente los sujetos no barajaron el uso de procesos infinitos, cuando se enfrentaron a la medición de longitudes irracionales se logra una mirada crítica a los procesos usados por los pitagóricos.

Palabras clave: *formación, historia, ingeniería didáctica, medida.*

Abstract

This paper deals with the initial training of future secondary school mathematics teachers about the measurement of finite lengths using the method employed in the Pythagorean school. After a thorough historical analysis, a didactic engineering was designed with the aim of using the history of calculus to achieve a more in-depth training of future teachers. This has made possible to deal with aspects such as the infinite decomposition of a segment and the concept of infinitely small magnitude in the case where this length is an irrational number. The conclusions indicate that, although initially the subjects did not consider the use of infinite processes, when they were confronted with the measurement of irrational lengths, they took a critical look at the processes used by the Pythagoreans.

Keywords: *training, history, didactical engineering, measurement.*

INTRODUCCIÓN

Investigaciones previas (Ma, 1999; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) señalan la necesidad de que los docentes de matemáticas tengan un conocimiento profundo de las mismas. Esto implica que no sólo deben conocer las matemáticas, sino que tienen que tener conocimiento sobre su origen, cambios y desarrollo (Kim, 2013). Es decir, el profesor debe "demostrar conocimiento sobre el desarrollo histórico de los tópicos" (NCATE, 2003, p. 4). Kline (1978) pone de manifiesto que debemos tener en cuenta los procedimientos utilizados y las dificultades que se encontraron los matemáticos a la hora de definir los conceptos matemáticos tal como actualmente los conocemos. El estudio de la historia nos permitirá

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T.(2022). Los corpúsculos pitagóricos para medir longitudes finitas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 259-267). SEIEM.

conocer los problemas e ideas que dieron lugar a los diferentes conceptos, profundizando en aquellos aspectos que bajo una fórmula perfectamente formulada pasan inadvertidos. A su vez, se potenciará el carácter social y cultural de la matemática, pues saldrán a la luz las diferentes ideas surgidas para resolver un problema, los fenómenos físicos o sociales que las explican, además del marco espacial y temporal en que aparecieron. En definitiva, su evolución temporal permitirá a los docentes evitar una transmisión de conocimientos cerrada, estereotipada y como una verdad absoluta, donde se impone el estilo deductivo, el cual oculta la verdadera construcción original del concepto a tratar (Maza, 1994).

Esta comunicación forma parte de un estudio más amplio centrado en la construcción del concepto de integral a lo largo de la historia y su aplicación en el aula. En ella se pretende comprobar si la historia de la matemática permite completar y fortalecer los saberes de los futuros docentes de matemáticas y si, a través de ella, salen a la luz aspectos inherentes al cálculo integral que se esconden bajo un cálculo mecánico carente, en muchos casos, de significado. En concreto, en esta comunicación el objetivo es diseñar tareas relativas a los procesos de medición de los pitagóricos a través de corpúsculos y analizar si los futuros docentes son conscientes de la ineficacia de estos procesos cuando se trata de longitudes irracionales. Estas tareas involucrarán, por lo tanto, aspectos como: la aceptación del concepto de infinito, la aparición de segmentos que necesitan una descomposición infinita y, en consecuencia, aparición de magnitudes con desarrollo continuo, trabajar razonamientos infinitesimales, uso de unidades de medida infinitamente pequeñas y entender la longitud/área como suma de corpúsculos.

Por lo tanto, la pregunta de investigación a la que se pretender responder es:

¿Los procesos utilizados por la escuela pitagórica para la medición de longitudes/áreas se pueden usar como una herramienta para el diseño de tareas de forma que los futuros docentes comprendan las limitaciones de dichos procesos y la necesidad de desarrollar nuevas herramientas matemáticas?

ANTECEDENTES

Dos son los aspectos centrales en esta investigación. Por un lado, recurrir a la historia de la matemática como fuente de ideas para la construcción de los conceptos matemáticos que le permitan dotarles de sentido y, por tanto, una necesidad en la formación de futuros docentes. Y por otro, las dificultades que entraña la comprensión del concepto de integral.

En relación con el primero de los puntos anteriores, González (2004) afirma que mediante la historia de la matemática el profesor llega a una comprensión más profunda de los problemas matemáticos y de los elementos que de ellos se derivan. Además, tal y como se testimonia en Gil (1993) permite revelar y volver a descubrir conocimientos que se transmiten ya elaborados. Ho (2008), Panasuk y Horton (2012) analizaron si los profesores de matemáticas utilizan la historia de las matemáticas para enriquecer los conceptos y desarrollos expuestos. Concluyeron que la mayoría de los docentes no la emplean. Sus razones varían entre falta de conocimiento de la historia de la matemática, la falta de recursos para poder aplicarla, la falta de tiempo y la falta de concordancia entre los desarrollos históricos y las exigencias curriculares actuales.

En cuanto al concepto de integral, diversas investigaciones (Artigue, 2001; Orton, 1983 y 1984) han dado cuenta de la dificultad que entraña dicho concepto en relación con su aprendizaje. Estas dificultades están ligadas a la conceptualización del límite de una función (Tall y Rashidi Razali, 1993), a la notación, a los métodos procedimentales para el cálculo de integrales que ocultan los aspectos conceptuales y el significado de dichos procesos o el uso de representaciones que permiten una imagen adecuada del concepto (Fiangga, 2018). En este sentido, los corpúsculos pitagóricos nos ayudarán a mejorar la visión infinitesimal y, por tanto, nos permitirá entender de manera completa el concepto de partición del intervalo.

En las enseñanzas del cálculo integral se tiende a las explicaciones mecánicas y dogmáticas (Artigue, 1995), las cuales no solo esconden todo proceso de construcción, sino que ensanchan la brecha entre la parte conceptual y la parte algorítmica del cálculo (Muñoz, 2000). Se expone el cálculo integral mediante la integral de Riemann, la cual es transmitida como un concepto completo y acabado, alejándola de su significado geométrico, aspecto que dificulta la comprensión completa del concepto de cantidad infinitamente pequeña (Schneider-Gilot, 1987).

Algunos investigadores (Doorman y van Maanen, 2008; Katz, 1993) han abordado la enseñanza del cálculo en general y del cálculo integral, en particular, para estudiantes de diferentes niveles educativos a través de la historia con el fin de que superen las dificultades anteriormente mencionadas. En esta investigación abordamos el uso de la historia para la formación de futuros docentes de matemáticas de educación secundaria. Para iniciarla se realizó inicialmente un estudio pormenorizado de la historia, lo que nos permitió identificar ciertos momentos clave en la evolución del concepto de integral. Por otro lado, para comprobar los conocimientos de futuros docentes acerca de la historia del cálculo integral, se pasó, en el año 2021, un cuestionario a futuros docentes (Esteve-Blasco y González-Astudillo, 2021). Las respuestas testimoniaron cierto pensamiento infinitesimal, algunas dificultades en la construcción y significado del concepto y una gran dependencia en la regla de Barrow para resolver tareas sobre el cálculo de áreas. Tanto el estudio histórico realizado como los resultados de este cuestionario fueron el punto de partida para abordar la presente investigación.

METODOLOGÍA

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo, ya que está orientada a comprobar si las tareas diseñadas sobre los procesos de medición pitagóricos han cumplido los objetivos para los cuales fueron diseñadas. Se recurrió a una ingeniería didáctica, la cual se centra en modelar las situaciones de enseñanza, para así permitir una elaboración y gestión controlada (Artigue, 1995). Como metodología de investigación, se caracteriza por seguir un esquema experimental en el cual destacamos las siguientes fases: concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Su validación es interna, es decir, basada en la confrontación entre un análisis a priori y uno a posteriori. Su pretensión no es solamente el comprender los procesos de investigación-acción, sino también la definición de variables de control para controlar los fenómenos didácticos resultantes.

En el caso de esta investigación se ha estructurado en cuatro etapas bien diferenciadas:

- Análisis preliminar: Donde se realizó estudio pormenorizado de la historia y evolución del concepto de integral, lo que permitió establecer cuatro hitos en su desarrollo hasta que alcanzó en cierta forma el concepto. A continuación se indican brevemente cada uno de estos hitos:
  1- La noción de divisibilidad del espacio desarrollada en Grecia, que involucra los primeros acercamientos al concepto de infinito (potencial) y definición del método de exhausción; primer método general para calcular áreas curvas.
  2- Durante el medievo matemático aparece una prematura idea de infinitesimal, se considera un área barrida por perpendiculares con cierta intensidad y por ende figuras geométricas compuestas por colecciones de líneas (indivisibles) tratando de encontrar la razón entre ellas.
  3- Las cuadraturas del XVII se convierten en técnicas generales para calcular áreas sin la necesidad de establecer una congruencia con figuras conocidas lo que implica el paso a un indivisible dinámico.

4- Las fluxiones y diferencias constituyen el primer puente entre cuadraturas y tangentes, base del Teorema Fundamental del Cálculo lo que permite definir la integración como anti-diferenciación.

En la presente comunicación nos centraremos en el primero de estos hitos, y más concretamente en los procesos de medición pitagóricos para abordar la divisibilidad del espacio. En la escuela pitagórica todo estaba formado por números y sus razones finitas (Kline, 2000). Podemos decir que dotaron a su matemática de una estructura corpuscular, es decir, cada segmento se podía construir con un número finito de átomos (Dalcín y Olave, 2012).

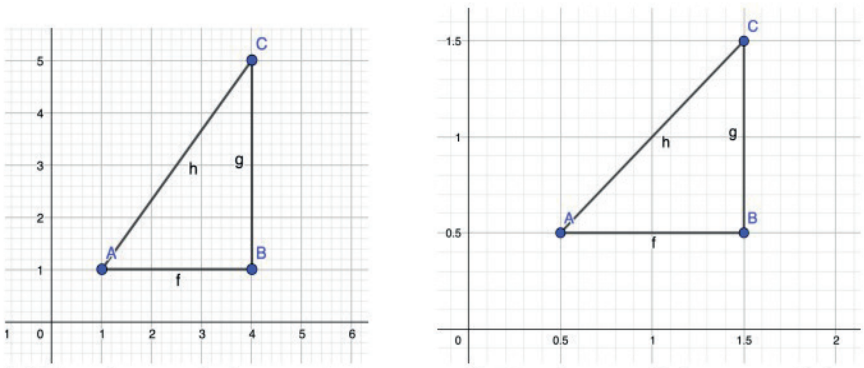
- Análisis a priori: Donde se realizó un análisis predictivo de la investigación y se describió de forma detallada la ingeniería a realizar. Se diseñaron las tareas, se definieron los recursos necesarios para llevarlas a cabo y se marcaron los objetivos que con ellas se pretendían alcanzar. Las dos primeras tareas (figuras 1 y 2) que se presentaron y cuyos resultados se tratan en la presente comunicación fueron las siguientes:

Actividad 1.1. Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

«Todo segmento real de longitud finita aceptará una descomposición corpuscular».

Figura 1. Enunciado de la actividad 1.

Actividad 1.2. Descompón corpuscularmente los 3 lados de los triángulos de las figuras 2a y 2b. ¿En qué caso la descomposición de los catetos vale para la hipotenusa? ¿Por qué? ¿Existen segmentos inmedibles?



(a) Triangulo rectángulo de catetos 3 y 4.

(b) Triangulo rectángulo de catetos unidad.

Figura 2. Enunciado de la actividad 2.

Los objetivos de estas tareas fueron:

- Tomar conciencia de que el cálculo de áreas y volúmenes no nace con la integral de Riemann.
- Analizar, mediante problemas clásicos, las diferentes percepciones sobre la divisibilidad del espacio y del tiempo (analogías con las particiones del intervalo).
- Acercarse, de una manera informal, a la idea de convergencia, aspecto clave en la definición del concepto de integral.
- Potenciar en los estudiantes el pensamiento infinitesimal, el cual será clave para entender plenamente como se construyó y, por lo tanto, para darle mayor sentido al concepto de integral.

- Experimentación: Etapa correspondiente a la formación de los futuros docentes y a la recogida de datos. Las dos primeras tareas, junto con otras tres relacionadas con el método de exhausción, se realizaron a lo largo de una sesión de dos horas el día 17 de enero de 2022 con once estudiantes del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la especialidad de matemáticas. Inicialmente se realizó una presentación de las ideas de la escuela pitagórica en gran grupo donde se les indicó que para los componentes de esa escuela todo estaba formado por números y que en sus procesos de medición utilizaban una estructura corpuscular, es decir, cada segmento se dividía en un número finito y entero de corpúsculos. Posteriormente, los estudiantes formaron 4 grupos para discutir las tareas: 1 grupo de 4 personas, 1 grupo de 3 personas y 2 grupos de 2 personas. La recogida de los datos se realizó por medio de grabaciones de audio y vídeo de la presentación en gran grupo (para lo que se solicitó previamente su autorización) y de la discusión en pequeños grupos en relación con las tareas. También se recogieron las producciones escritas de los estudiantes.
- Análisis a posteriori: Última fase de la de la investigación donde se analizaron los datos obtenidos confrontándolos con los objetivos establecidos en el análisis a priori. Las intervenciones orales de los estudiantes fueron codificadas asignando a cada actividad una A seguida un número, una G junto con el número del grupo del que formaba parte y una L junto con un número final correspondiente a la línea en la que aparece dicha intervención. Este análisis se presenta en la sección de resultados.

RESULTADOS

Dada la extensión limitada de este documento, para organizar los resultados no diferenciaremos los resultados por grupos, sino que los expondremos al confrontar las respuestas de los diferentes grupos con los objetivos marcados a priori.

Tal como estaban diseñadas las actividades, los alumnos debían razonar, primeramente, si todo segmento real de longitud finita aceptaría una descomposición corpuscular y seguidamente, tratar de descomponer corpuscularmente dos triángulos, uno de catetos 3 y 4 e hipotenusa 5 y otro de catetos unitarios y, por tanto, hipotenusa raíz de 2.

Inicialmente, los estudiantes asumieron que el radio del corpúsculo podía ser irracional y, por lo tanto, cualquier segmento, al ser de longitud finita, siempre aceptaría una descomposición corpuscular finita.

> Si tienes un segmento finito, siempre vas a poder meter bolitas y que lo completen. (A1G2L14)
>
> Si el segmento es de longitud π también puedes dividirlo cogiendo la unidad adecuada. Un segmento de longitud π es un segmento de longitud π y siempre lo puedes dividir en un medio cogiendo la unidad adecuada. (A1G1L5)
>
> Pues yo creo que es verdadero también. Porque dice aquí que cada segmento, cada área y por extensión cada figura n-dimensional se podría construir con un número finito y entero de átomos. Entonces un segmento real también. (A1G4L4)

Al aceptar plenamente que pueden construir corpúsculos de radio irracional, no aparece la problemática de una posible descomposición infinita, ni tampoco aparece el concepto de desarrollo continuo (figura 3). Para ellos todo segmento finito, sea de la longitud que sea (racional o irracional) se va a poder descomponer con un número finito de corpúsculos, de radio adecuado. Incluso se llega a plantear la hipótesis de hacer un único corpúsculo de diámetro, el propio segmento.

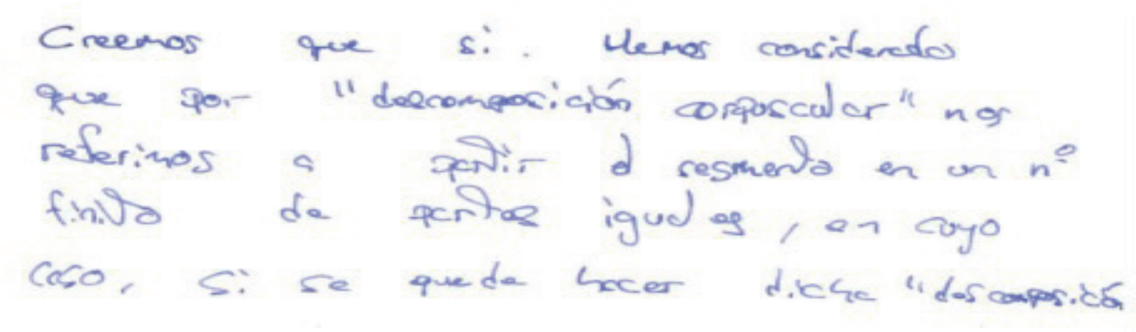

Creemos que sí. Hemos considerado
que por "descomposición corpuscular" nos
referimos a partir el segmento en un nº
finito de partes iguales, en cuyo
caso, sí se puede hacer dicha "descomposició

Figura 3. Producción escrita del grupo1.

Los estudiantes parece que tienen claro que todo segmento real de longitud finita acepta una descomposición corpuscular y que, por lo tanto, siempre será medible como suma de corpúsculos. Bajo esta visión afrontan la segunda actividad, en la cual deberán descomponer la diagonal de un triángulo rectángulo con la misma estructura corpuscular que han utilizado en sus catetos. El primer triángulo, tiene todas sus longitudes racionales, por lo que no les conduce a contradicciones.

> Por tanto, aplicando Pitágoras, la diagonal vale 5 y se puede descomponer en 5 unidades. (A2G2L31)
>
> Claro, esto quiere decir que mide 5 corpúsculos de diámetro 1. (A2G2L32)
>
> Sí, mira aquí (figura 2a) lo puedes descomponer en bolas de diámetro 1, porque este lado es 3, este es 4 y la hipotenusa es 5. Efectivamente, puedes hacer bolas de diámetro 1. (A2G3L8)

Los alumnos descomponen los segmentos con un número finito de corpúsculos percibiendo la longitud como una agregación de corpúsculos. Su visión es clara, cuando tenemos una longitud racional, el segmento siempre aceptará una descomposición corpuscular exacta (radio racional) y, por tanto, la suma de sus corpúsculos nos dará su longitud.

Es el segundo de los triángulos donde la longitud de la hipotenusa es un número irracional donde aparecen las primeras contradicciones con su pensamiento finito.

> Pero con este (raíz de 2) tienes un número infinito de corpúsculos. Salvo que el corpúsculo mida raíz de 2. (A2G2L44)
>
> El b) no se puede porque no forma un número entero. (A2G4L25)
>
> Raíz de 2 es distinto de x por un número entero. (A2G3L13)

Se empieza a abandonar su pensamiento finito en favor pensamiento infinito, en el cual se aceptan segmentos con una descomposición infinita de corpúsculos.

> Pero tienes que contar infinitas veces para llegar al resultado. (A2G2L64)
>
> No llegas al resultado exacto, siempre tienes que perder información. (A2G2L65)

Esto supone que se ha despertado la mirada crítica acerca de los procedimientos de medición pitagóricos. Se ha comprendido que si el segmento tiene longitud irracional, con un planteamiento pitagórico, solo vamos a poder aproximar su longitud, nunca alcanzaremos su exactitud, ya que el número irracional no se puede construir como razón de números enteros. Se plantean una posible descomposición infinitamente pequeña de un segmento.

> Yo creo que este (hipotenusa del triángulo unitario) sería inmedible porque no se puede construir con un número entero y finito de átomos. (A2G4L1)

Bueno a no ser que el corpúsculo que sea lo suficientemente pequeño.(A2G4L16)

Esto conduce a la necesidad de plantearse nuevos métodos de medición, los cuales puedan abordar la problemática irracional y en consecuencia se cuestiona claramente los procesos de medición pitagóricos. Existirán segmentos que no se podrán medir de manera exacta y, por tanto, existirán segmentos que bajo la perspectiva pitagórica serán inmedibles.

Figura 4. Producción escrita del grupo 2.

Es cuando se enfrentan a longitudes irracionales cuando se evidencia el abandono de un pensamiento finito para empezar a abrazar un pensamiento infinito, en el cual se aceptan segmentos con una descomposición infinita de corpúsculos (figura 4).

Pero con este (raíz de 2) tienes un número infinito de corpúsculos. (A2G2L44)

No existe un entero (nº de corpúsculos) que sea eso (raíz de 2). (A2G3L19)

Se evidencia un pensamiento infinitesimal en términos de particiones o descomposiciones infinitamente pequeñas. Se argumenta que raíz de 2 puede aceptar un número infinito de corpúsculos y, por lo tanto, se entrevé una visión en términos de particiones infinitas de un intervalo. Aparece el infinito en sus razonamientos y, como resultado, el concepto de desarrollo continuo, concepto esencial para entender la integral como agregación infinitamente pequeña de rectángulos. Se testimonia un razonamiento en términos de descomposición infinita, pues se ha aceptado que la finitud de un segmento no implica una finitud en la descomposición y se advierten procesos infinitos asociados a segmentos de longitud finita.

CONCLUSIONES

Las actividades diseñadas han permitido alcanzar los objetivos propuestos. Se ha conseguido despertar la mirada crítica acerca de los procedimientos de medición pitagóricos. Se ha comprendido que, si el segmento tiene longitud irracional, con un planteamiento pitagórico, solo vamos a poder aproximar su longitud. Por lo tanto, se ha comprobado la ineficacia de los procesos de medición pitagóricos cuando nos enfrentamos a longitudes con desarrollo numéricamente continuo, es decir, a longitudes irracionales. Se ha evidenciado un pensamiento infinitesimal en términos de particiones o descomposiciones infinitamente pequeñas. Aparece el infinito en los razonamientos y, no únicamente como un ente abstracto, sino que se advierten procesos infinitos asociados a un segmento de longitud finita. Se acepta plenamente el concepto de magnitud con desarrollo continuo. Se testimonia una visión constructivista de la matemática, puesto que los estudiantes experimentan y construyen ideas a través de desarrollos históricos. Por último, se observa una concepción de longitud como agregación de entes, en este caso corpúsculos, la cual, favorecerá la comprensión completa del concepto de integral.

En respuesta a la pregunta de investigación planteada, se ha utilizado la historia del cálculo integral como una herramienta para el diseño de tareas que contribuyeran a una comprensión más completa (Ma, 1999) de los conceptos involucrados, en este caso la división en corpúsculos de segmentos finitos. A través del estudio de los procesos de medición pitagóricos se ha fortalecido un pensamiento infinitesimal necesario para comprender el cálculo integral. Se han trabajado los conceptos de partición infinita de un intervalo y de longitud como suma de entes (corpúsculos). En definitiva, se ha establecido, sin emplear ningún tipo de formalismo, las primeras asociaciones entre longitud y su suma infinita.

Referencias

Artique, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp.207-220). Kluwer Academic Publishers.

Castro, A. y Li, W. (2014). Exploring the mathematical knowledge needed for teaching teachers. *Journal of teacher education, 65*(4), 303-314.

Dalcín, M. y Olave, M. (2012). *Gente en obra. Historia interactiva de los orígenes de la matemática.* Montevideo: Ediciones Palíndromo.

D'Amore, B. (2004). El papel de la epistemología en la formación de profesores de matemáticas en la escuela secundaria. Épsilon, *60*, 413-434.

Doorman, M. y van Maanen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian senior mathematics journal, 22*(2), 4-14.

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T. (2021). Conocimiento de los futuros docentes sobre la historia de la integral definida. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 648). SEIEM.

Fiangga, S. (2018). Using historical perspective in designing discovery learning on Integral for undergraduate students. En *IOP Conference series: materials science and engineering, 296*(1), 012042. IOP Publishing.

Galadí, A. y Enríquez, D. (1997). La trigonometría del almagesto. Una aplicación didáctica de la historia de la ciencia. *Revista de didáctica de las matemáticas, 4*(13), 115-120.

Gil, D. (1993). Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *11*(2), 197-212.

González, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

Goodwin, D. M. (2007). *Exploring the relationship between high school teacher mathematics history knowledge and their images of mathematics.* University of Massachusetts Lowell.

Ho, W. K (2008). *Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore.* Paper presented at the 1st RICE. Raffles Junior College.

Katz, V. J. (1993) Using the history of calculus to teach calculus. *Science & Education, 2*(3)*,* 243-9.

Kim, Y. (2013). *Teaching mathematical knowledge for teaching: curriculum and challenges.* [Tesis doctoral, Universidad de Michigan].

Kline, M. (1978). *El Fracaso de la Matemática Moderna*. Siglo xxi.

Kline, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo xxi.

Lupiáñez, J. L. (2002). Reflexiones Didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Suma*, *40*, 59-63.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers understanding of fundamental mathematics in China and in the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.

Maza, C. (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: un análisis. *Suma*, *17*, 17-26.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Relime 3* (2), 131-170.

National Council for the Accreditation of Teacher Education (2003). *Program standards: programs for initial preparation of mathematics teacher*. N.C.T.M..

Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational studies in mathematics, 14*(1), 1-18.

Panasuk, R. M. y Horton, L. B. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints*? International electronic journal of mathematics education, 7*(1), 3-20.

Tall, D. y Rashidi Razali, M. (1993) Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *International. Journal of mathematics education, science and technology, 24*, 209-222

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Horsori.

Scheider-Gilot. (1988). *Des objects mentaux aire et volumen au calcul des primitives*. [Tesis Doctoral, Université Catholique de Louvain].

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers.