

RESPUESTAS NUMÉRICAS RAZONABLES EN ALUMNADO DE SECUNDARIA

Reasonable numerical answers in secondary students

Fariña, M., Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta un estudio sobre cómo alumnado de secundaria evalúa las soluciones a tareas numéricas observando si son o no razonables. Para ello, se ha realizado un análisis cualitativo con ocho estudiantes en dos entrevistas, antes y después de una instrucción de aula, en la que se implementó una secuencia de actividades que fomentaba el uso de estrategias para valorar la razonabilidad de las respuestas numéricas. Las estrategias trabajadas en la instrucción de aula fueron: estimación numérica, estimación gráfica y adecuación al contexto. En las entrevistas se concluye que los estudiantes mostraron argumentos para evaluar las respuestas antes de la instrucción de aula, si bien algunos mejoraron y ampliaron sus estrategias después de la instrucción hacia otras más efectivas.

Palabras clave: Razonabilidad, sentido numérico, estimación numérica, representación gráfica.

Abstract

A study is presented on how secondary students evaluate solutions to numerical tasks observing if they are or not reasonable. To do this, a qualitative analysis with eight students was carried out in two interviews, before and after a classroom instruction, in which a sequence of activities was implemented that encouraged the use of strategies to assess the reasonableness of numerical responses. The strategies worked in the classroom instruction were: numerical estimation, graphic estimation and adaptation to the context. In the interviews it is concluded that the students showed arguments to evaluate the answers before the classroom instruction, although some students improved and expanded their strategies after the instruction towards other more effective ones.

Keywords: Reasonableness, number sense, number estimation, graphic representation.

INTRODUCCIÓN

El sentido numérico se define como una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible (Swoder, 1992). Diferentes autores han establecido componentes del sentido numérico con el fin de hacerlo operativo, tanto a nivel curricular como de investigación (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 1989; McIntosh, Reys y Reys, 1992). Aunque dichas componentes suelen aparecer desglosadas con diferente nivel de detalle, se establecen las siguientes: a) comprender el significado de los números; b) reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números; c) usar puntos de referencia; d) usar representaciones de los números y las operaciones; e) identificar el efecto relativo de las operaciones; f) establecer relaciones entre las operaciones; g) hacer uso de las propiedades de las operaciones para facilitar un cálculo numérico; h) estimar el resultado de operaciones; comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; i) ser consciente de que existen múltiples estrategias; j) reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable. Estas componentes no son independientes y aparecen combinadas en respuestas a una misma actividad numérica.

Este trabajo está dedicado a la última de las componentes enumeradas, es decir, a la *razonabilidad numérica de la solución*, lo que denominamos de manera abreviada, *razonabilidad numérica*.

La razonabilidad numérica de la solución se sitúa en la última de las fases sobre la resolución de problemas señaladas por Pólya (1945): a) comprensión del problema, b) elaboración de un plan, c) ejecución del plan y d) verificar el resultado. Sin embargo, esta componente del sentido numérico no tiene que estar necesariamente asociada a la resolución de un problema, ya que puede aplicarse a cualquier ejercicio o cálculo. Por ejemplo, un estudiante que obtenga como resultado de la operación $600 \times 0,4$ el número 2400 (error habitual en este cálculo) puede valorar que su respuesta no es razonable, argumentando que no debe ser un número mayor que 300, puesto que 0,4 está próximo a 0,5, entonces $600 \times 0,5 = 600 \times \frac{1}{2} = 300$. Y de esta forma podría autocorregirse. Para que esto se produzca, el estudiante tiene que estar habituado a reflexionar sobre el resultado que obtiene en sus tareas numéricas, por sencillas que estas puedan ser.

Además de tener esta inclinación hacia la evaluación del resultado, los estudiantes necesitan aprender estrategias y argumentos matemáticos que le ayuden a ello, más allá de volver a efectuar el cálculo, que en ocasiones puede ser muy costoso. De hecho, McIntosh, Reys, y Reys (1992) indican que cuando se pide a los estudiantes valorar la razonabilidad de un resultado numérico su reacción, con frecuencia, es volver a realizar el cálculo o el algoritmo inicial, antes que reflexionar utilizando otros argumentos, basados en el contexto o en propiedades numéricas. En el mismo sentido, Alajmi y Reys (2010) estudiaron cómo alumnado de secundaria de Taiwán reconocían si sus respuestas eran razonables. Concluyeron que la mayoría lo hacía utilizando reglas algorítmicas, repitiendo el proceso ya realizado, sin manifestar otro tipo de habilidades que les permitiera emitir un juicio. Yang y Sianturi (2019) realizaron un estudio con alumnado de 6º grado de primaria, en el que 942 estudiantes de Hong Kong efectuaron cálculos con números decimales y se les pedía valorar lo razonable de sus respuestas. Obtuvieron que la mitad de los estudiantes ejecutaron los cálculos de forma correcta, pero de ellos, solo el 60% podía juzgar su respuesta como razonable. Y al hacerlo, mostraron errores en sus argumentos o simplemente parecían haber adivinado sus resultados, puesto que se trataba de un cuestionario de respuestas múltiples. Yang (2019) evaluó la razonabilidad numérica del alumnado en operaciones con números naturales en un estudio a 790 estudiantes de 4º grado. Encontró que solo un 25% utilizó métodos alejados de los algoritmos y un 38% cometía errores que le impedían realizar una valoración correcta del resultado.

Fomentar la razonabilidad numérica de la solución en el alumnado no suele quedar explícito en los materiales curriculares o en las secuencias de aprendizaje y queda en manos del profesorado que esta reflexión se haga. De hecho, aunque el profesorado de matemáticas lo considere útil, muchas veces se pasa por alto en el aula (Alajmi y Reys, 2007). Profesores de Taiwán de este último estudio expresaron que una respuesta es razonable “si se realizan las operaciones adecuadas, aunque un error de cálculo produzca una respuesta bastante alejada de la correcta”, y manifestaron escaso desarrollo de estrategias de razonabilidad en sus aulas. También en el estudio de Clarke, Clarke y Sullivan (2012) indicaron que muchos profesores enfatizan las explicaciones relacionadas con el conocimiento matemático, pero olvidan juzgar lo razonable de las respuestas en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Indican Yang y Siantui (2019) que la habilidad para juzgar lo razonable de las respuestas numéricas no ha sido priorizado en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y tampoco en la investigación. Los estudios realizados hasta el momento se han centrado en su evaluación a través de pruebas escritas (Alajmi y Reys, 2010), pero se conoce poco de cómo promover estrategias de aula para su desarrollo. El trabajo que se presenta forma parte de un estudio más amplio que tiene como objetivo analizar cómo influye una intervención de aula que fomenta la razonabilidad numérica de la solución en la mejora de esta habilidad en los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

A pesar de la importancia que tiene la razonabilidad numérica en la actividad matemática general, las investigaciones muestran que el alumnado de Educación Primaria y Secundaria tiene poca inclinación a realizar esta evaluación final (McIntosh, Reys, y Reys, 1992). De hecho, se ha mostrado que es una de las componentes de sentido numérico más complejas para los estudiantes (Reys y Yang 1998; Yang 2005).

Alajmi y Reys (2010) señalan que la razonabilidad numérica implica integrar las habilidades de las cinco “hebras” de la competencia matemática, desarrolladas por Kilpatrick, Swafford, y Findell (2001):

Comprensión conceptual: Tener organizado el conocimiento matemático en un todo coherente; ser capaz de representar situaciones matemáticas de diferente forma y conectarlas entre sí.

Fluidez procedimental: Saber cuándo y cómo usar los procedimientos apropiadamente; habilidad para utilizar procedimientos de forma flexible y eficiente.

Competencia estratégica: Tener una imagen mental de los componentes del problema, comprender las características claves de la situación, generar una representación matemática e ignorar las características irrelevantes.

Razonamiento adaptable: Capacidad para pensar lógicamente sobre las relaciones entre conceptos y situaciones; decidir entre diferentes alternativas.

Disposición productiva: Percibir que las matemáticas son útiles, creer que el esfuerzo constante por aprender matemáticas vale la pena y sentirse un aprendiz eficiente.

A través de la razonabilidad numérica, los estudiantes pueden usar y navegar entre hechos, conceptos, procedimientos, estrategias y métodos de resolución que se sitúan en las habilidades anteriores.

Según Alajmi y Reys (2007, 2010), promover la razonabilidad numérica implica reflexionar sobre la idoneidad de la respuesta desde dos criterios: (1) observar relaciones entre los números y el efecto de las operaciones (comprender la magnitud de los números, cómo se relacionan unos con otros y el efecto que producen sobre ellos las diferentes operaciones). (2) relacionar si tiene sentido en el contexto del problema (en caso de que haya un contexto de referencia). A estos dos criterios, se añade en este trabajo un tercer criterio: (3) utilizar estrategias diferentes para resolver las actividades numéricas, en concreto, representaciones gráficas, estimación numérica, magnitud de los números, relaciones entre los números y efecto de las operaciones (Alajmi, 2009).

En esta línea, se ha desarrollado un estudio con alumnado de secundaria que siguió una secuencia de aula en la que se les instruyó en estrategias útiles para evaluar lo razonable de una solución en tareas numéricas. Los objetivos de este trabajo son:

- Analizar los cambios en la valoración de la razonabilidad de las soluciones en actividades de estimación numérica y gráfica, antes y después de la instrucción de aula.
- Analizar los tipos de estrategias utilizadas para evaluar la razonabilidad de las soluciones, antes y después de la instrucción de aula.

METODOLOGÍA

El presente trabajo muestra resultados de un estudio diseñado para analizar los objetivos anteriores, realizado con estudiantes de dos aulas de segundo curso de secundaria en un centro concertado urbano de Tenerife (España). En dicho estudio se implementó una prueba escrita inicial a los cincuenta estudiantes de los dos grupos del nivel educativo. La prueba contenía 12 ítems que permitieron seleccionar a ocho estudiantes en función de sus respuestas: dos de ellos con respuestas razonables en la mayoría de las cuestiones (basadas generalmente en cálculos); cuatro con la mitad

de respuestas razonables; y dos con muy pocas respuestas razonables. A continuación, se realizó una entrevista semiestructurada a estos ocho estudiantes. En ella, realizaron actividades numéricas, partir de las cuales la entrevistadora les pidió que justificaran sus respuestas. Posteriormente, se llevó a cabo una intervención de aula que constó de siete sesiones de 50 minutos donde se trabajaron diferentes estrategias para evaluar lo razonable de una respuesta: adecuación al contexto, estimación numérica y estimación gráfica. Los contenidos numéricos abarcaron el estudio de decimales, fracciones y sus operaciones, propias del nivel educativo. Finalmente se realizó una prueba escrita a los cincuenta estudiantes y una entrevista final a los ocho estudiantes seleccionados. La entrevista se diseñó con ítems de la misma estructura que la entrevista inicial. En el presente trabajo se recogen los resultados de las respuestas a las entrevistas, inicial y final, y se destaca, a modo de ejemplo, las respuestas a dos de los ítems.

Durante toda la investigación se usó una metodología cualitativa en la que no bastaba con dar una respuesta correcta sino que nos interesábamos por sus argumentos para analizar lo razonable de dicha respuesta. En las entrevistas se estudiaron casos concretos dónde se valoró cómo argumentaba el alumnado la razonabilidad de las respuestas y qué tipo de estrategias disponían para respaldar sus argumentos.

Las entrevistas estaban formadas por cinco ítems que buscaban valorar las estrategias que usaba el alumnado para valorar respuestas razonables. Para ello se daba la solución al ítem, o se pedía elegir entre varias soluciones, preguntándoles por los argumentos para valorar la respuesta. Los ítems abarcaban el contenido numérico de decimales, fracciones y porcentajes. En cuanto a representaciones gráficas se proponían gráficos de sectores circulares, recta numérica, barra y rectángulos para la multiplicación de decimales. Las estructuras de los ítems de las dos entrevistas se corresponden con las siguientes:

Ítem 1: Elegir entre varios gráficos de sectores circulares cuál representaba una situación real dada.

Ítem 2: Elegir entre varias, una estimación razonable como respuesta a una operación de fracciones, sin utilizar cálculos exactos.

Ítem 3: Usar la recta numérica para comprobar lo razonable de una respuesta a un problema de fracciones contextualizado.

Ítem 4: Usar la gráfica de barra de rectángulo para expresar porcentajes y estimar respuestas razonables.

Ítem 5: Elegir entre cuatro opciones, la representación gráfica que representa el área de un rectángulo cuyos lados miden un número decimal, en un problema contextualizado.

En el análisis de las entrevistas se tuvo en cuenta la última respuesta razonable del estudiante no basada en cálculos, puesto que hubo estudiantes que en la última entrevista priorizaron el uso de estrategias de estimación al cálculo, señalando éste como último recurso. Tras el análisis de la entrevista por la investigadora principal, se consensuaron los resultados con la otra investigadora, definiendo dos categorías principales de análisis, en función de los objetivos planteados:

1) Tipo de respuesta: Razonable; No razonable.

2) Tipo de estrategia utilizada: Estimación gráfica; Estimación numérica; Cálculos basados en reglas y algoritmos; Otras respuesta de difícil clasificación.

RESULTADOS

En la Tabla 1 se recogen las estrategias del alumnado y las respuestas razonables en cada ítem, en la entrevista inicial y final. Observando los resultados de la última columna podemos ver que los estudiantes, de manera general, respondieron de forma dispar en la entrevista inicial y final respecto a la elección de una respuesta razonable o su justificación.

Tabla 1. Número de respuestas razonables y tipos de estrategias en la entrevista inicial y final

		Estrategias								Respuestas Razonables
		Estimación Numérica		Estimación Gráfica		Algoritmos		Otras		
		R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	
Ítem 1	Entrevista Inicial	1	0	5	0	0	1	0	1	6
	Entrevista Final	0	0	7	0	0	0	0	1	7
Ítem 2	Entrevista Inicial	1	0	1	1	0	3	0	2	2
	Entrevista Final	1	0	3	1	0	2	0	1	4
Ítem 3	Entrevista Inicial	0	0	3	2	0	3	0	0	3
	Entrevista Final	0	0	5	0	0	3	0	0	5
Ítem 4	Entrevista Inicial	0	0	0	0	6	1	1*	0	7
	Entrevista Final	0	0	2	3	1	1	1*	0	4
Ítem 5	Entrevista Inicial	0	0	6	0	1	1	0	0	7
	Entrevista Final	0	0	7	0	0	0	0	1	7

R:Razonable, NR: No razonable
 * El estudiante utiliza una combinación de las tres estrategias

Como se aprecia en la tabla, los ítems 1 y 5 obtuvieron muy buenos resultados en cuanto a la evaluación de respuestas razonables en ambas entrevistas. El ítem 1, en que se mostraban diagramas de sectores circulares en contexto, nos permite ver que el alumnado está acostumbrado a trabajar con este tipo de actividades. Cabe destacar que en la entrevista final se recurre más a la estimación gráfica como estrategia para evaluar la razonabilidad de la respuesta. En el ítem 5, pese a que la estrategia usada mayoritariamente fue la estimación gráfica en ambas entrevistas, es importante señalar que en la entrevista inicial el alumnado no disponía de suficientes argumentos para defender la elección de su respuesta razonable, mientras que en la entrevista final comprendía mejor la representación gráfica trabajada y pudo dar argumentos que sustentaran su elección.

Llama la atención el ítem 4 por ser en el que se obtiene un menor número de respuestas razonables en la entrevista final que en la inicial. Este resultado se debe a que el alumnado intentó alejarse del uso de algoritmos para estimar gráficamente. No obstante, la estimación gráfica que ofreció fue poco precisa y fuera del rango que se había establecido como correcto. Aún así, se debe valorar positivamente este cambio en la predisposición a usar estimaciones gráficas en detrimento del uso de algoritmos.

Se debe remarcar que solo un estudiante fue incapaz de mejorar durante este trabajo en la evaluación de la razonabilidad numérica, no asimilando estrategias diferentes al uso de algoritmos que no dominaba. La principal dificultad para este estudiante residió en su bajo nivel matemático, que le dificultaba aplicar nuevas estrategias puesto que no dominaba los aspectos conceptuales necesarios.

Los ítems 2 y 3 se analizan con más detalle en lo que sigue.

Ejemplos del ítem 2

En la Figura 1 se muestran los enunciados de este ítem en cada entrevista. El alumnado debe elegir la respuesta más razonable entre las diferentes opciones, intentando no realizar un cálculo exacto. En las respuestas al ítem 2 (Tabla 1) se puede apreciar que en la entrevista inicial hay más estudiantes

que optan por justificar realizando cálculos exactos (Figura 2), mientras que en la entrevista final aparecen argumentos basados en gráficos (Figura 3). Las respuestas categorizadas como “Otros” se refieren a aquellas en las que el alumnado establece relaciones erróneas como, por ejemplo, “*porque al tener denominadores bastante grandes, pues creo que el resultado sería mayor que $\frac{1}{2}$ o 1*”.

Entrevista Previa	Entrevista Posterior
En clase, algunos estudiantes están corrigiendo su tarea. Redondea el nombre de la persona que parece tener la respuesta correcta. Luego, explica por qué piensas que esa respuesta es correcta. $\frac{10}{11} + \frac{11}{12} = ?$ a) María dice que su respuesta es aproximadamente $\frac{1}{2}$. b) Jesús dice que su respuesta es mayor que $\frac{5}{2}$. c) Lucía dice que su respuesta es cercana a 2	En clase, algunos estudiantes están corrigiendo su tarea. Redondea el nombre de la persona que parece tener la respuesta correcta. Luego, explica por qué piensas que esa respuesta es correcta. $\frac{7}{15} + \frac{5}{12} = ?$ a) María dice que su respuesta es aproximadamente $\frac{1}{2}$. b) Pablo dice que su respuesta es cercana a 1. c) Juan dice que su respuesta es aproximadamente $\frac{3}{2}$.

Figura 1. Enunciados del ítem 2

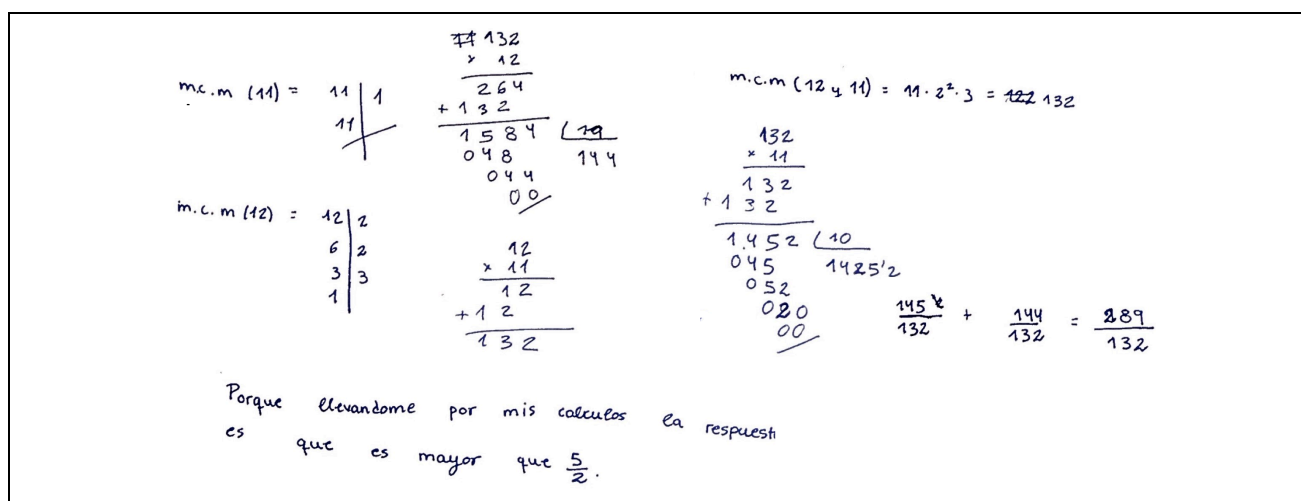


Figura 2. Ejemplo de Respuesta No Razonable con estrategia de Cálculo (entrevista inicial, ítem 2)

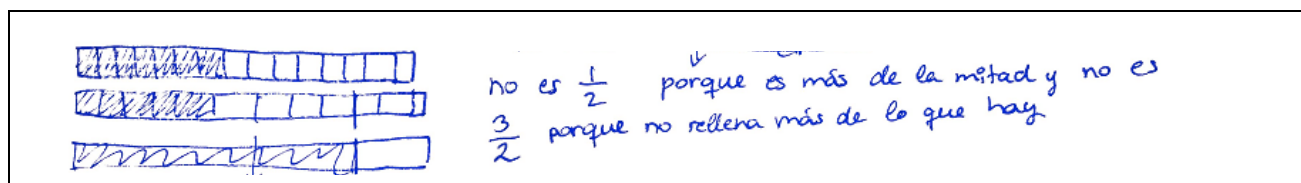


Figura 3. Ejemplo de Respuesta Razonable con Estimación Gráfica (entrevista final, ítem 2)

Ejemplos del ítem 3

En la Figura 4 se muestran los enunciados del ítem 3 en cada entrevista. El alumnado debe valorar si la respuesta dada es razonable o no. Para ello, se le sugiere que utilice la recta numérica para hacer una estimación gráfica.

Como se puede apreciar en la tabla 1, el hecho de aparecer la recta numérica dibujada propicia su uso entre el alumnado.

Entrevista Previa	Entrevista Posterior
Mario se está preparando para correr una carrera de 5km. Un día de entrenamiento, corre $\frac{1}{3}$ del total antes de parar a descansar. Luego, corre $\frac{2}{5}$ de la distancia que le queda para acabar el recorrido y termina el entrenamiento del día. Mario dice que ha corrido 4km, aproximadamente. ¿Crees que está en lo cierto? Ayúdate de la recta numérica para justificar tu respuesta. 	Ana se está preparando para correr una maratón de 3 km. Un día de entrenamiento, corre $\frac{1}{5}$ del total antes de parar a descansar. Luego, corre $\frac{2}{3}$ de la distancia que le queda para acabar el recorrido y termina el entrenamiento del día. ¿Cuántos metros ha corrido aproximadamente ese día en total? Puedes ayudarte de la recta numérica para estimar el resultado. 

Figura 4. Enunciados del ítem 3

Las respuestas no razonables usando estimación gráfica de la entrevista inicial se deben a una incomprensión del enunciado cuando dice “de lo que le queda” y la consiguiente estimación incorrecta en la recta (Figura 5).

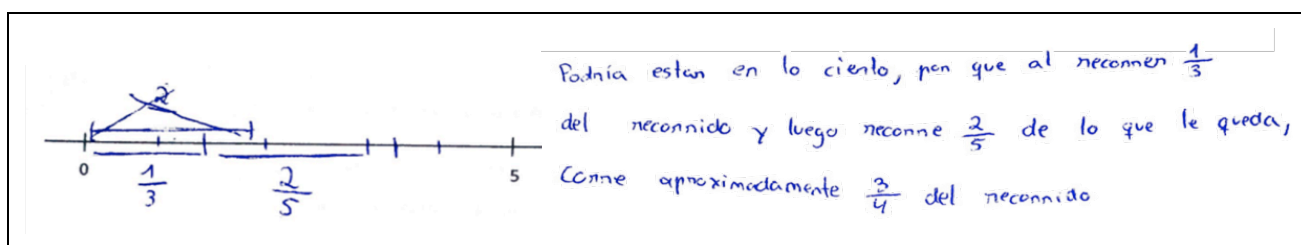


Figura 5. Ejemplo de respuesta No Razonable con Estimación Gráfica (entrevista inicial, ítem 3)

En la entrevista final se observan mejoras respecto a las justificaciones razonables. En la Figura 6 se muestra la respuesta de un estudiante que razonó con dos representaciones gráficas diferentes.

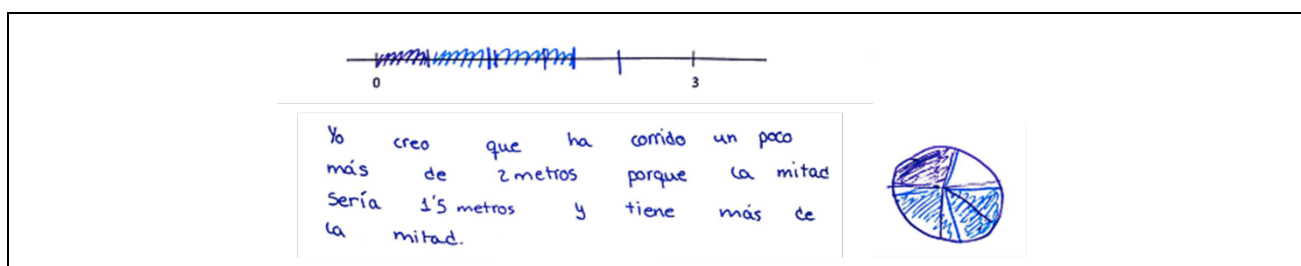


Figura 6. Ejemplo de respuesta Razonable con Estimación Gráfica (entrevista final, ítem 3)

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio no mostraron un cambio importante en todo el alumnado participante en cuanto a la valoración de las respuestas numéricas, antes y después de la instrucción de aula. Sin embargo, se observó una mayor disposición a utilizar diferentes estrategias. Incluso aunque la estrategia no variara respecto a la inicial, debido a las características de los enunciados de los ítems, los estudiantes manifestaron más seguridad en sus explicaciones.

Otro aspecto importante que se observa en las entrevistas, tanto inicial como final, es que cuando se da la oportunidad a los estudiantes de dar razonamientos para evaluar las respuestas numéricas, muchas veces afloran sus conceptos erróneos, que de otra manera quedan ocultos, hecho ya indicado por Van Dooren, et al. (2003) y Yang (2019). Se ha observado que valorar la razonabilidad de una solución implica tener una adecuada comprensión conceptual de los números. Este resultado coincide con Almeida y Bruno (2017), quienes indican que existe un perfil de estudiantes que manifiestan estrategias inadecuadas de sentido numérico debido a sus debilidades matemáticas de

tipo conceptual, lo cual no les permite desarrollar otras “hebras” de la competencia matemática (Kilpatrick, et al., 2011). Indica Yang (2019) que los libros de texto y los profesores en el aula deberían promover ejercicios relacionados con la valoración de los resultados de cálculo. En lo experimentado en este estudio, aunque el desarrollo de estrategias gráficas y de estimación se ha mostrado útil para evaluar la razonabilidad numérica de la solución, esto requiere un trabajo de aula prolongado en el tiempo.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado con el Proyecto de investigación del Ministerio de Economía y Competitividad. Madrid. España. EDU2017-84276-R.

Referencias

- Alajmi, A. H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 263-283.
- Alajmi, A., Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 77-94
- Alajmi, A., Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 117-139.
- Almeida, R. y Bruno, A. (2017). Establishing profiles on the use of number sense. *Redimat*, 6(1), 56-84.
- Clarke, D. M., Clarke D. J., y Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(3), 28-32
- Grayer, M. (2009). Reasonable or not? A Study of the Use of Teacher Questioning to Promote Reasonable Mathematical Answers from Sixth Grade Students. *Action Research Projects*, paper 70, University of Nebraska.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC. National Academy Press
- McIntosh, A., Reys, B.J., y Reys, R. E. (1992). *A proposed framework for examining basic number sense. For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton (NJ), USA: Princeton University Press.
- Reys, B. J. (1991). *Developing number sense in the middle grades: Addenda series, grades 5-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Reys, B. J., y Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 225-237.
- Siegler, R. S., y Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. En J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp 197-212). Boca Ratan, FL: CRC Press.
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En Grouws, D. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 245-275. MacMillan Publishing Company. New York.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 113138.
- Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 31(3), pp. 317-333.
- Yang, D. C. (2019). Performance of fourth graders when judging the reasonableness of a computational result. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 197-215.
- Yang, D. C., y Huang, F. Y. (2004). Relations among computational performance, pictorial representation, symbolic representation and number sense of sixth-grade student in Taiwan. *Educational Studies*, 30(4), 373-389.
- Yang, D. C., y Sianturi, I. A. J. (2019). Six grade students' performance, misconceptions, and confidence when judging the reasonableness of computer results. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(8), 1519-1540.