PROBLEMAS DE FRACCIONES FORMULADOS POR FUTUROS PROFESORES: ALGUNAS CARACTERÍSTICAS

Preservice teacher posing fraction problems: some characteristics

García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D. y Perdomo-Díaz, J.

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presentan los resultados de un estudio sobre formulación de problemas de fracciones por parte de futuros profesores de Educación Primaria. Se analizan 52 problemas formulados por 18 futuros profesores, desde tres perspectivas: 1) plausibilidad del enunciado; 2) demanda cognitiva; y 3) significado y estructura matemática. Los resultados indican que los futuros profesores participantes en este estudio presentan un alto número de problemas plausibles, con demanda cognitiva en la categoría "aplicar", en los que predomina el significado de fracción parte-todo y operador y, mayoritariamente, de estructura aditiva. Los significados de cociente y razón, y la estructura multiplicativa son muy poco frecuentes cuando formulan problemas.

Palabras clave: *formulación de problemas, futuros profesores, fracciones.*

Abstract

This study is about posing fraction problems by future Primary Education teachers. We analyze 52 problems posed by 18 future teachers, from three perspectives: 1) plausibility of the statement; 2) cognitive demand; and 3) meaning and mathematical structure. Results indicate that the future teachers present a high number of plausible problems, in which the meaning of fraction part-whole and operator predominate and, mostly, additive structure. But, the meanings of quotient and reason, and the multiplicative structure are very rare when they pose problems.

Keywords: *problem posing, prospective teachers, fractions.*

INTRODUCCIÓN

En el currículo de Matemáticas de Educación Primaria de la ley educativa LOMLOE que se pone en funcionamiento en España el curso 2022-23 (RD 157/2022), la resolución de problemas se sitúa como uno de los cinco ejes metodológicos fundamentales para la construcción del conocimiento matemático. Se señala que esta actividad pone en marcha otros ejes, como el razonamiento, el pensamiento computacional, la representación de objetos matemáticos y la comunicación. Resolver problemas ofrece la oportunidad de combinar conceptos y procesos matemáticos, y establecer conexiones razonadas entre distintos elementos de la matemática.

Sin duda, una tarea básica del trabajo de los docentes de matemáticas es la elección de problemas adecuados para su alumnado, la cual puede hacerse, bien usando problemas ya existentes en diferentes

García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D. y Perdomo-Díaz, J. (2022). Problemas de fracciones formulados por futuros profesores: algunas características. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 295-304). SEIEM.

materiales curriculares, o bien, creando nuevos problemas o reformulando otros existentes (Crespo, 2003; Olson y Knott, 2013). Esta última actividad se ha denominado *formulación de problemas* (*invención de problemas* o *planteamiento de problemas*).

La *formulación de problemas* también puede utilizarse como una metodología de aula, proponiendo a los propios estudiantes que inventen problemas relacionados con los conceptos que están tratando (Kilpatric et al., 2001). Esto supone para el alumnado activar relaciones asociadas a los contenidos matemáticos (Crespo, 2015), y para el profesorado, valorar cómo de profundo son estas relaciones.

En la década de los 80 del siglo xx, la resolución de problemas fue un campo de una fructífera investigación en educación matemática, produciéndose importantes avances en aspectos heurísticos, afectivos, actitudinales y de metacognición (Schoenfeld, 1992; Stanic y Kilpatrick, 1988). Aunque, la formulación de problemas es un campo con menos resultados, ya existe un amplio cuerpo de investigación a nivel internacional, como se refleja en la revisión de Singer et al. (2015), y también en España (Piñeiro et al., 2019; Torregrosa et al., 2021).

Respecto al profesorado (en activo y en formación) se afirma que una escasa efectividad en la resolución de problemas puede ser un obstáculo para que los implementen con éxito en las aulas (Chapman, 2015) y, equivalentemente, con respecto a la formulación de problemas. Tanto si los futuros docentes van a generar problemas, como si van a fomentar su creación en el aula, es importante que hayan experimentado esta práctica previamente (Singer et al., 2013), sin embargo, se sabe poco acerca de cómo se produce ese proceso de formulación de problemas (Cai y Hwang, 2020). El trabajo que se presenta forma parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es evaluar y desarrollar la capacidad de los futuros profesores de Educación Primaria para plantear problemas de fracciones.

MARCO TEÓRICO

Los resultados de investigaciones indican que la formación inicial de los docentes influye en la habilidad para la creación de problemas y, muchas veces, estos no son de una alta calidad matemática (Cai et al., 2015). Se ha encontrado que los futuros docentes hacen mejores propuestas de problemas cuando se les da información previa, por ejemplo, a partir de imágenes o de datos numéricos (Crespo, 2003; Leung y Silver, 1997). También se ha observado que los futuros docentes tienen más éxito cuando reformulan problemas ya dados, que cuando deben plantearlos sin información previa (Stickles, 2011). Estos resultados nos han llevado a plantear en esta investigación una propuesta de estudio en la que los futuros docentes planteen problemas con información previa.

En otra línea, un resultado reiterado en diferentes estudios es que la capacidad para crear problemas, tanto para el profesorado de primaria como de secundaria, está condicionada por su comprensión de los conceptos matemáticos implicados en la tarea (Isik y Kar, 2012; Ma, 1999). Para el caso de las fracciones, objeto de estudio de este trabajo, Ma (1999) realizó una comparación entre profesores de primaria de China y EEUU sobre su capacidad para crear problemas de división de fracciones. Concluyó que los profesores de EEUU fueron incapaces de producir problemas apropiados y mostraron concepciones inadecuadas de las fracciones, mientras que los de China plantearon al menos un problema basado en diferentes conceptos de fracción. En su estudio con futuros profesores de primaria, Xie y Masingila (2017) resaltaron las dificultades, tanto para resolver como para proponer problemas con fracciones que asociaron a una falta de experiencia en la formulación de problemas y con una escasa comprensión de las fracciones y sus operaciones. Por último, Kilic (2015) realizó un estudio con 90 futuros profesores de primaria en el que les propuso crear problemas usando las fracciones ½ y/o ¾, concluyendo que los problemas que inventaron fueron, principalmente, de suma y multiplicación, y en contextos simbólicos, más que contextualizados. Los resultados poco exitosos de los futuros docentes en la formulación de problemas de fracciones pueden atribuirse a que muchas veces presentan mejores habilidades procedimentales (algoritmos y reglas) que de comprensión de los significados y tienen dificultades para usar, de manera efectiva, representaciones adecuadas (Lee, 2017).

Hay diferentes características que influyen en la formulación de los problemas y que se han utilizado para analizar la calidad y riqueza de los mismos (Crespo, 2015; Leavy y Hourigan, 2020; Grundmeier, 2015). En este trabajo nos centramos en los significados que subyacen a los conceptos, la estructura matemática, la demanda cognitiva y la plausibilidad de los problemas creados. En lo que sigue detallamos estos aspectos para el caso de las fracciones.

Para la creación de problemas de fracciones, los futuros docentes deben tener una comprensión conceptual del significado de fracción. Los significados asociados al concepto de fracción son los siguientes (Behr et al., 1993):

- *Parte-todo:* se da en situaciones en las que un todo (continuo o discreto), se divide en partes equivalentes. El todo es designado como la unidad y la fracción expresa la relación que existe entre el número de partes y el número total de partes en que ha sido dividido el todo.
- *Medida:* consiste en utilizar una fracción unitaria repetidamente para averiguar la distancia desde un punto inicial. Por ejemplo, hacer corresponder ¾ con la distancia de 3 veces ¼-unidades desde un punto de partida.
- *Cociente:* se da en fenómenos asociados con la operación de dividir un número natural por otro, estableciendo una acción de reparto.
- *Razón:* las fracciones son un índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades, otorgándose entonces un significado de razón a la fracción.
- *Operador:* la fracción es interpretada como algo que actúa y modifica una situación, es decir, asume un papel transformador realizando una operación de multiplicación o división.

Desde el punto de la estructura matemática, los problemas de fracciones que se plantean pueden hacer referencia: al *concepto* (describir una situación que se exprese mediante una fracción); al *orden* (ordenar fracciones de menor a mayor o viceversa); a lo *aditivo* (suma o resta de fracciones); a lo *multiplicativo* (multiplicar o dividir fracciones); o bien, combinaciones de las estructuras anteriores.

Por su parte, el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) establece niveles de demanda cognitiva que gradúan la dificultad ante la resolución de las tareas matemáticas (Mullis et al., 2021): *conocer,* identificar conceptos y reproducir procedimientos (por ejemplo, ordenar unas fracciones dadas); *aplicar*, utilizar el conocimiento y los conceptos y determinar la estrategia a seguir para la resolución de problemas (por ejemplo, plantear un problema en un contexto cotidiano); *razonar*, realizar acciones más allá de la resolución de problemas con razonamientos, conclusiones e inferencias sobre el proceso o resultados (por ejemplo, pedir la justificación a la respuesta dada a un problema). Estos niveles de demanda cognitiva se utilizarán en el análisis de los datos de esta investigación.

Por último, para valorar la adecuación de los problemas formulados, tendremos en cuenta la clasificación de Grundmeier (2015), quien distingue entre problema: *no plausible*, si contiene afirmaciones no válidas y no resoluble, aun cuando se añada más información; *plausible sin información suficiente*, si puede resolverse aunque el enunciado sobreentiende (o no hace explícita) parte de la información; *plausible con información suficiente de una o varias tareas matemáticas*, según el número de pasos para su resolución.

OBJETIVO Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo queremos conocer la capacidad de los futuros docentes para crear problemas de fracciones con coherencia matemática, analizando las siguientes características: plausibilidad, demanda cognitiva, significado y estructura matemática. Nos planteamos las siguientes preguntas de investigación respecto a los problemas que plantean:

1. ¿Qué características presentan en relación con la plausibilidad y demanda cognitiva?
2. ¿Qué significados y estructura matemática asocian a las fracciones?

METODOLOGÍA

Presentamos los resultados de un estudio realizado con 18 estudiantes de cuarto curso del Grado en Maestro en Educación Primaria, que respondieron a una prueba escrita con tres actividades en las que debían plantear problemas de fracciones. Los futuros profesores, a punto de finalizar su formación matemática y didáctica del Grado, completaron el cuestionario en una sesión de clase de una hora y media. Por cuestiones de extensión del documento, presentamos los resultados a la primera actividad del cuestionario, cuyo enunciado se indica a continuación.

> ***Actividad 1.*** *Formula tres problemas, de diferente dificultad, en los que aparezcan los números 1/4 y 3/8. Cada uno de estos números puede ser un dato o una solución. Puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto...).*

En total se analizaron 52 respuestas (ya que dos estudiantes sólo escribieron dos enunciados de problemas en vez de tres) y se ha seguido una metodología cualitativa, en la que se han establecido categorías de respuestas.

Para el análisis de los problemas planteados por los futuros maestros se han utilizado las categorías de análisis descritas en la tabla 1. No se analizan los problemas no plausibles o que no están relacionados con fracciones.

Tabla 1. Categorías de análisis de los problemas formulados.

Características	Categorías
Plausibilidad	*P-1:* Problema con información insuficiente para su resolución *P-2:* Problema con información suficiente, que plantea una única tarea matemática *P-3:* Problema con información suficiente, que plantea varias tareas matemáticas
Demanda Cognitiva	*Conocer, Aplicar, Razonar*
Significados	*Parte-Todo, Medida, Cociente, Razón, Operador*
Estructura	*Concepto, Orden, Aditiva, Multiplicativa, Combinada (anteriores)*

ANÁLISIS DE RESULTADOS

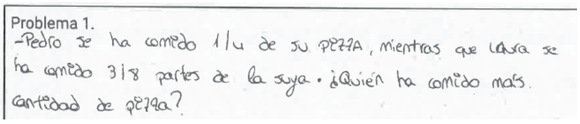
Los 18 futuros profesores plantearon un total de 52 problemas a partir del enunciado de la actividad 1, anteriormente citada. De estos, tres problemas fueron *no plausibles*, dado que contenían errores matemáticos que impedían su resolución; y seis problemas no trabajan las fracciones. Por tanto, las categorías de la tabla 1 se aplicaron a un total de 43 problemas plausibles de fracciones (tabla 2).

Tabla 2. Análisis de la plausibilidad de los problemas planteados por futuros profesores.

Plausibilidad	***Demanda Cognitiva***			***Cantidad (%)***
	Conocer	*Aplicar*	*Razonar*	
P-1 – Información insuficiente	1	14	-	15 (34.9)
P-2 – Tarea matemática única	3	12	-	15 (34.9)
P-3 – Multitarea matemática	1	12	-	13 (30.2)
Total	5	36	-	43

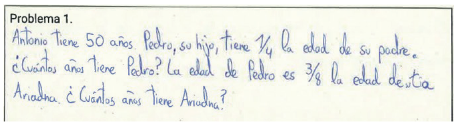
Los resultados muestran que, casi un 35% de los problemas no explicitan u omiten parte de la información necesaria para poder abordar su resolución. Entre ellos encontramos muchos problemas que no ponen de manifiesto en su enunciado que las fracciones utilizadas representan partes de una misma cantidad o figura. Un ejemplo de esto lo encontramos en la figura 1, donde el problema clasificado como P-1, no explicita que ambas fracciones provienen de pizzas iguales, dato que resulta fundamental en el trabajo con ellas. El resto de problemas propuestos sí presentaba información suficiente para su resolución. La principal diferencia entre estos estaba en el número de tareas matemáticas necesarias para resolverlos. Los resultados muestran que hubo, aproximadamente, el mismo porcentaje de problemas que involucran una sola tarea matemática (34.9%) o más de una (30.2%). Un ejemplo de problema clasificado como P-3, puede verse en la figura 2, donde se muestra un enunciado que incluye dos preguntas con tareas diferentes. En la primera pregunta se debe buscar la parte de un total y en la segunda, una vez conocida la parte, se pide averiguar el total.

Cuando pasamos a estudiar la demanda cognitiva de los problemas planteados (tabla 2) observamos que mayoritariamente son de la categoría *aplicar* (88.4%), y ninguno de los problemas está en la categoría *razonar*, cuya demanda cognitiva es más avanzada. Cabe destacar también que los problemas de demanda cognitiva *aplicar* se reparten de forma equilibrada entre las distintas categorías de plausibilidad.


Problema 1.
-Pedro se ha comido 1/4 de su PIZZA, mientras que Laura se ha comido 3/8 partes de la suya. ¿Quién ha comido más cantidad de pizza?

Pedro se ha comido ¼ de su pizza, mientras que Laura ha comido 3/8 de la suya. ¿Quién ha comido más cantidad de pizza?

Figura 1. P-1 (Alumno-215). Demanda: *aplicar*.


Problema 1.
Antonio tiene 50 años. Pedro, su hijo, tiene 1/4 la edad de su padre. ¿Cuántos años tiene Pedro? La edad de Pedro es 3/8 la edad de su tía Ariadna. ¿Cuántos años tiene Ariadna?

Antonio tiene 50 años. Pedro, su hijo, tiene ¼ la edad de su padre. ¿Cuántos años tiene Pedro? La edad de Pedro es 3/8 la edad de su tía Amalia. ¿Cuántos años tiene Amalia?

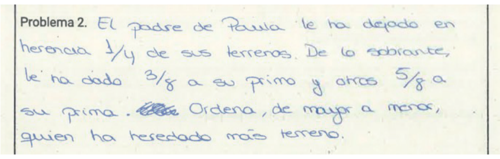
Figura 2. P-3 (Alumno-210) Demanda: *aplicar*.

En cuanto al análisis del significado que presenta la fracción en el problema planteado (tabla 3) encontramos que en la mayor parte de los enunciados utilizan los significados *parte-todo* (34.9%) y *operador* (41.9%). Mientras que, son muy escasos los ejemplos de problemas con el significado de *medida, cociente*, de *razón* o combinaciones de varios significados (*Otro*). Además, en el significado *parte-todo* observamos que la mayoría de dichos problemas sobreentienden u omiten parte de la información necesaria cuando trabajan con fracciones (P-1). Frecuentemente no indican que los tamaños de las partes son iguales. Mientras que, en los problemas que se resuelven con más de una tarea matemática, el significado que más aparece es el de *operador*.

Tabla 3. Significado de la fracción en los problemas planteados por futuros profesores.

Significados	**Plausibilidad**			**Demanda Cognitiva**		**Cantidad (%)**
	P-1	*P-2*	*P-3*	*Conocer*	*Aplicar*	
Parte-todo	9	5	1	1	14	15 (34.9)
Medida	-	-	3	-	3	3 (7)
Cociente	1	1	-	1	1	2 (4.6)
Razón	-	1	-	-	1	1 (2.3)
Operador	5	6	7	-	18	18 (41.9)
Otro	-	2	2	3	1	4 (9.3)
Cantidad %	15 34.9	15 34.9	13 30.2	5 11.6	38 88.4	43

A modo de ejemplo, el problema de la figura 3 presenta un problema con los significados de *parte-todo* y *operador*. Además, su resolución requiere más de una tarea matemática (P-3): calcular lo sobrante y ordenar las fracciones.


Problema 2. El padre de Paula le ha dejado en herencia 1/4 de sus terrenos. De lo sobrante, le ha dado 3/8 a su primo y otros 5/8 a su prima. Ordena, de mayor a menor, quien ha heredado más terreno.

El padre de Paula le ha dejado en herencia ¼ de sus terrenos. De lo sobrante, le ha dado 3/8 a su primo y otros 5/8 a su prima. Ordena, de mayor a menor, quién ha heredado más terreno.

Figura 3. P-3, tres tareas matemáticas (Alumno-217). Significado: *parte-todo* y *operador*. Estructuras: concepto, orden y aditiva. Demanda: *Aplicar*.

En la tabla 3, se observa que los problemas con demanda cognitiva *aplicar* se reparten de forma semejante entre el significado *parte-todo* y *operador*.

Atendiendo a la estructura utilizada en los problemas (tabla 4), observamos que *orden, aditiva* y la combinación de varias estructuras son las más frecuentes. En la figura 3 se presenta un problema que posee tres estructuras en su configuración: *concepto, orden y aditiva*. Es importante destacar que son muy pocos los problemas que utilizan la estructura *multiplicativa* de las fracciones o combinaciones de esta estructura con otras.

Observamos también que, en aquellos problemas en los que se requieren varias tareas matemáticas (P-3), predomina el uso de varias estructuras (*combinada*), siendo *concepto* y *aditiva* la combinación más frecuente (6 problemas).

Tabla 4. Clasificación según la estructura de los problemas planteados por futuros profesores.

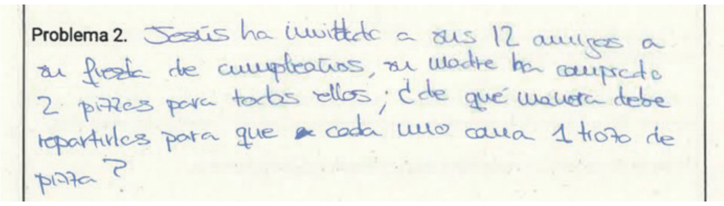
Estructura	**Plausibilidad**			**Demanda Cognitiva**		**Cantidad (%)**
	P-1	*P-2*	*P-3*	*Conocer*	*Aplicar*	
Concepto	2	5	1	2	6	8 (18.6)
Orden	5	4	1	2	8	10 (23.3)
Aditiva	6	6	2	-	14	14 (32.5)
Multiplicativa	-	-	1	-	1	1 (2.3)
Combinada	2	-	8	-	10	10 (23.3)
	15	15	13	4	39	43

Finalmente, hemos contrastado los resultados sobre el significado de fracción con la estructura matemática del problema (tabla 5). Este análisis nos muestra que los problemas con significado de *cociente* o *razón* están presentes, exclusivamente, en problemas de estructura *concepto*, en los que no se requieren operaciones para llegar a su solución.

Tabla 5. Estructura frente a significado de las fracciones.

Estructura	**Significado**						*Cantidad (%)*
	Parte-Todo	*Medida*	*Cociente*	*Razón*	*Operador*	*Otro*	
Concepto	1	-	2	1	4	-	8 (18.6)
Orden	5	-	-	-	3	2	10 (23.3)
Aditiva	9	-	-	-	5	-	14 (32.5)
Multiplicativa	-	-	-	-	-	1	1 (2.3)
Combinada	-	3	-	-	6	1	10 (23.3)
	15 (34.9)	3 (7)	2 (4.6)	1 (2.3)	18 (41.9)	4 (9.3)	43

En la figura 4, el problema formulado es de estructura concepto y significado razón. Esto es así porque para resolver el problema el estudiante deberá aplicar el significado de la fracción para realizar el reparto, pero el significado que se presenta en este problema es la comparación entre dos conjuntos (pizza y amigos) y, por tanto, debe conocer el significado de razón.



Jesús ha invitado a sus 12 amigos a su fiesta de cumpleaños, su madre ha comprado 2 pizzas para todos ellos, ¿de qué manera debe repartirlas para que cada uno coma 1 trozo de pizza?

Figura 4. Concepto-razón (A-207).

Aunque no ha sido objeto del análisis realizado, se observó que el contexto más común cuando formulan problemas se relaciona con pizzas, tartas o quesos, seguido de contextos relacionados con medidas de superficie, tiempo, peso o longitud. Lo que sugiere cierta preferencia por situaciones que guían a los estudiantes a la utilización de figuras geométricas continuas y circulares.

CONCLUSIONES

Plantear problemas pone de manifiesto qué comprenden y qué saben los futuros docentes (Xie y Masingila, 2017). En este trabajo hemos presentado el análisis de los problemas formulados por estudiantes del grado en Maestro en Educación Primaria, al término de sus estudios, en una tarea donde construyen tres problemas utilizando dos fracciones dadas.

La mayoría de los problemas analizados han sido plausibles, aunque, uno de cada tres problemas sobreentiende u omite parte de la información (por ejemplo, no indican que las partes son iguales). Los futuros docentes construyen problemas con demanda cognitiva *aplicar*, pero no formulan problemas de mayor demanda (*razonar*) en los que se fomente una reflexión sobre el proceso de resolución o sobre distintas soluciones del problema, es decir, los futuros docentes formulan problemas que no van más allá de la resolución de una operación, con o sin contexto. En relación con los significados de fracción, los futuros maestros formulan con frecuencia problemas con el significado *parte-todo* y *operador* y, escasamente, utilizan al significado de *medida*, coincidiendo con los resultados de Kilic (2015). Llama la atención que entre los problemas planteados sólo hay un problema de estructura *multiplicativa*. Algunas de las categorías ausentes, como son los significados de *cociente o razón*, o la estructura *multiplicativa*, señalan la dirección a la que puede orientarse una formación sobre formulación de problemas de fracciones, que pretenda mayor calidad matemática.

Se sabe que comprender las fracciones como *operador* mejora la comprensión de la estructura *multiplicativa* (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007), sin embargo, los resultados de este estudio muestran que la estructura *multiplicativa* no se ha utilizado en relación con ninguno de los significados.

La actividad de plantear problemas no es frecuente en la enseñanza matemática. Por tanto, será necesario promover situaciones formativas entre los futuros docentes para que desarrollen estas habilidades, y adquieran seguridad al implementarla con sus estudiantes (Ellerton, 2013). Este trabajo ha servido para identificar aspectos a desarrollar en la formación dirigida a la formulación de problemas con fracciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto ProID2021010018, del Gobierno de Canarias, cofinanciado por el Programa Operativo FEDER Canarias 2014-2020.

Referencias

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis -emphasis on the operator construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Lawrence Erlbaum Associates.

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 1-8.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai. (Eds.) *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (pp. 3-34). Springer.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Maht, Science and Technology Education, 3*(1), 10-36.

Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Crespo, S. (2015). A collection of problem-posing experiences for prospective mathematics teachers that make a difference. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai. (Eds.), *Mathematical problem posing. From research to effective practice* (pp. 493-511). Springer.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 87-101.

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer et al. (Eds), *Mathematical problem posing* (pp. 411-431). Springer.

Isik, C. y Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by pre-service elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *12*(3), 2303-2309.

Kilic, C. (2015). Analyzing pre-service primary teachers' fraction knowledge structures through problem posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1603-1619.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press.

Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: Developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*, 341-361.

Lee, M. Y. (2017). Pre-service teachers' flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(3), 327-348.

Leung, S. y Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(1), 5-24.

Ma, L. (1999). *Knnowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Erlbaum.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. y von Davier, M. (2021). TIMSS 2023 Assessment Frameworks. En I. V. S. Mullis, M. O. Martin y M. von Davier. (Eds.), *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study.

Olson, J. C. y Knott, L. (2013). When a problem is more than a teacher's question. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 27-36.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Conocimiento sobre los estudiantes como resolutores de problemas manifestado por futuros profesores de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 483-492). SEIEM.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, Nº 52*, 1-109.

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 1-7.

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (Eds.) (2015). *Mathematical problem posing. From research to effective practice.* Springer.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Macmillan.

Stanic, G. M. A. y Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving.* (1-22). NCTM.

Stickles, P. R. (2011). An analysis of secondary and middle school teachers' mathematical problem posing. *Investigations in Mathematics Learning, 3* (2), 1-34.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Resolución e invención de problemas: la estrategia de resolución con relación al problema inventado. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 595 - 602). SEIEM.

Xie, J. y Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 101-118.