FORMAS DE RESPONDER SOBRE LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA

Primary and secondary school students' ways of answering about rational number density

González-Forte, J. M.[a], Fernández, C. [a], Van Hoof, J. [b] y Van Dooren, W.[b]

[a]Universidad de Alicante, [b]KU Leuven

Resumen

La densidad de los números racionales es considerada un dominio en el que persiste el sesgo del número natural en mayor medida. El objetivo de este estudio es identificar diferentes formas de responder sobre la densidad de los números racionales en estudiantes de educación primaria y secundaria. Extendemos estudios previos al llevar a cabo un estudio transversal desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO realizando un análisis inductivo de las respuestas de los estudiantes. Los participantes fueron 953 estudiantes desde 5º de primaria hasta 4º de ESO que resolvieron dos tipos de ítems: (i) determinar la cantidad de números que hay entre dos números racionales dados, y (ii) escribir un número entre dos números racionales dados. Los resultados evidencian al sesgo del número natural como principal origen de las dificultades. Además, se han identificado formas de responder intermedias en la comprensión del concepto de densidad.

Palabras clave: *números racionales, sesgo del número natural, densidad, educación primaria y secundaria*

Abstract

The density of rational numbers is considered the most difficult domain in which the natural number bias persists. The objective of this study is to identify primary and secondary school students' ways of answering about density. We extent previous research by conducting a cross-sectional study from 5th grade of primary school to 4th grade of secondary school and by analysing inductively students' responses. Participants were 953 students from 5th grade of primary school to 4th grade of secondary school and they solved two types of items: (i) determining the number of numbers between two given rational numbers, and (ii) writing a number between two given rational numbers. Results show that the natural number bias is the main reason of students' difficulties Moreover, students' intermediate ways of answering in density understanding have been identified.

Keywords: *rational numbers, natural number bias, density, primary and secondary school*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Los estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso los universitarios, tienen dificultades con la comprensión del número racional (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984; Cramer, Post y delMas, 2002; Siegler y Lortie-Forgues, 2015). Una de las principales razones que explican estas dificultades es el uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando se trabaja con los números racionales –sesgo del número natural (*natural number bias*) (Ni y Zhou, 2005; Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015). Es decir, algunos estudiantes suponen, implícita o explícitamente, que las propiedades de los números naturales pueden aplicarse a los números racionales. La literatura acerca de este fenómeno ha considerado tres dominios donde las

González-Forte, J. M., Fernández C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2021). Formas de responder sobre la densidad de los números racionales de estudiantes de primaria y secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 319 – 326). Valencia: SEIEM.

propiedades de los números racionales difieren de las propiedades de los números naturales: las operaciones aritméticas, la densidad y la magnitud (Gómez y Dartnell, 2019; González-Forte, Fernández y Llinares, 2018; McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen y Lehtinen, 2015). En la presente investigación nos centraremos en el dominio de la densidad, considerado como el dominio en el que en mayor medida persiste el sesgo del número natural (McMullen et al., 2015; Smith, Solomon y Carey, 2005).

El conjunto de los números naturales es discreto, ya que entre dos números naturales hay un número finito (posiblemente cero) de números. Por el contrario, el conjunto de los números racionales es denso, ya que hay un número infinito de números entre dos números racionales (Smith et al., 2005). Sin embargo, comprender este aspecto de los números racionales es una tarea compleja para los estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso para los estudiantes universitarios (Tirosh, Fischbein, Graeber y Wilson, 1999; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004; Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren, 2015). Los estudiantes creen que entre dos números racionales "pseudo-consecutivos" no hay números, o hay un número finito de números. Por ejemplo, los estudiantes pueden pensar que entre las fracciones "pseudo-consecutivas" 5/7 y 6/7 no hay números, o que entre 1/2 y 1/4 solo se encuentra el número 1/3 (Merenluoto y Lehtinen, 2004; Tirosh et al., 1999). En números decimales, los estudiantes creen que entre los números decimales "pseudo-consecutivos" 0.59 y 0.60 no es posible encontrar otros números, o que entre 1.22 y 1.24 solo se encuentra el número 1.23 (Broitman, Itzcovich y Quaranta, 2003; Moss y Case, 1999).

Vamvakoussi y Vosniadou (2004, 2010) trataron de identificar diferencias en la comprensión de la densidad de los números racionales en estudiantes de educación secundaria. Para ello, propusieron como hipótesis varios patrones de respuesta de estudiantes (perfiles hipotéticos) e identificaron respuestas de los estudiantes para estos perfiles hipotéticos mediante entrevistas (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004) o mediante tests (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010). Estos perfiles fueron: (i) estudiantes que consideraron que no hay ningún número entre dos números racionales pseudo-consecutivos; (ii) estudiantes que consideraron que hay un número finito de números entre dos números racionales pseudo-consecutivos; (iii) estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números entre dos números decimales, pero un número finito de números entre dos fracciones, y viceversa; (iv) estudiantes que no consideraron que puede haber números decimales entre dos fracciones, y viceversa; (v) estudiantes que consideraron correctamente que hay un número infinito de números entre dos números racionales, independientemente de su representación simbólica (fracción o número decimal). Sin embargo, estos estudios presentan algunas limitaciones. En primer lugar, al no realizar un análisis inductivo de las respuestas de los estudiantes, no se identificó a ningún estudiante o solo a unos pocos para algunos de estos perfiles hipotéticos; y, por el contrario, obtuvieron algunos patrones de respuesta de estudiantes que diferían de los perfiles hipotéticos. En segundo lugar, en estos estudios se ha preguntado a los estudiantes que determinen cuántos números hay entre dos números racionales dados, mediante ítems de elección múltiple (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010), o ítems de elección múltiple y de respuesta abierta (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). Sin embargo, no se han utilizado ítems en los que los estudiantes tengan que escribir un número entre dos números racionales dados.

El objetivo de este estudio es identificar diferentes formas de responder sobre la densidad de los números racionales en estudiantes de educación primaria y secundaria. En este sentido, extendemos la investigación existente al realizar un estudio transversal desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO, realizando un análisis inductivo de sus respuestas. Además, incluimos dos tipos diferentes de ítems: (i) determinar la cantidad de números que hay entre dos números racionales dados, y (ii) escribir un número entre dos números racionales dados.

MÉTODO

Los participantes fueron 953 estudiantes de 5º de primaria (n = 115), 6º de primaria (n = 139), 1º de ESO (n = 162), 2º de ESO (n = 173), 3º de ESO (n = 174) y 4º de ESO (n = 190), pertenecientes a cinco centros de educación primaria y cinco centros de educación secundaria.

Los participantes respondieron a un cuestionario con nueve ítems adaptado del RNST (*Rational Number Sense Test*), diseñado y validado por Van Hoof et al. (2015).

Los nueve ítems eran de dos tipos. Seis ítems eran de determinar la cantidad de números que hay entre dos números racionales dados (ítems de determinar la cantidad de números) y tres ítems eran de escribir un número entre dos números racionales (ítems de escribir un número). De los seis ítems de determinar la cantidad de números, tres ítems eran con fracciones y tres con números decimales (Tabla 1). La pregunta que se les hacía a los estudiantes en estos ítems era: *¿Cuántos números hay entre…?*

Tabla 1. Ítems de determinar la cantidad de números

Ítems con fracciones	**Características**	**Ítems con decimales**	**Características**
2/5 y 3/5	Fracciones pseudo-consecutivas	1.42 y 1.43	Números decimales pseudo-consecutivos
2/5 y 4/5	Fracciones no pseudo-consecutivas con mismo denominador	1.9 y 1.40	Números decimales no pseudo-consecutivos
5/9 y 5/6	Fracciones no pseudo-consecutivas con mismo numerador	2.3 y 2.6	Números decimales no pseudo-consecutivos

De los ítems de escribir un número, dos ítems eran con fracciones pseudo-consecutivas (1/3 y 2/3, y 1/8 y 1/9) y un ítem era con números decimales pseudo-consecutivos (3.49 y 3.50). La diferencia entre los dos ítems con fracciones es que en 1/3 y 2/3 ambas fracciones tienen el mismo denominador, y en 1/8 y 1/9 ambas fracciones tienen el mismo numerador. La pregunta en estos ítems era: *A continuación, puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe "imposible"*.

Se realizaron ocho versiones distintas del cuestionario, en las que se variaba de forma aleatoria el orden de los ítems. No se limitó el tiempo de resolución, ya que esto podría incentivar una respuesta basada en el conocimiento del número natural. No estaba permitido el empleo de calculadoras ni dispositivos móviles que facilitaran la resolución de los ítems.

Las respuestas de los estudiantes a los dos tipos de ítems fueron analizadas de manera inductiva por cuatro investigadores, con el objetivo de identificar categorías según su naturaleza. En primer lugar, cuatro investigadores analizaron una muestra de las respuestas generando categorías. Estas categorías fueron discutidas hasta llegar a un consenso. Posteriormente, se analizaron el resto de respuestas. Las categorías obtenidas muestran diferentes formas de responder sobre el concepto de densidad. Se identificaron siete categorías para los ítems de determinar la cantidad de números y seis categorías para los ítems de escribir un número. En la sección de resultados se muestran estas categorías.

RESULTADOS

En primer lugar, se muestran las categorías identificadas (formas de responder) para cada uno de los dos tipos de ítems. En segundo lugar, se muestra la evolución de las diferentes formas de responder identificadas desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.

Formas de responder identificadas

Para los ítems de determinar la cantidad de números, se identificaron siete categorías (formas de responder):

- Respuestas en las que se escribía que hay un número infinito de números entre los dos dados (categoría *correcto,* Figura 1).

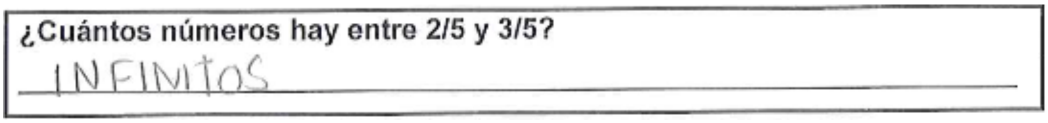
¿Cuántos números hay entre 2/5 y 3/5?
INFINITOS

Figura 1. Respuesta de un estudiante de 6º de primaria

- Respuestas en las que se calculaba la diferencia entre los dos números dados (categoría *diferencia*). El estudiante de la Figura 2 da como resultado la diferencia entre 2.3 y 2.6.

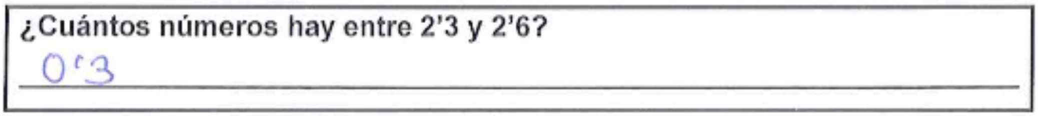
¿Cuántos números hay entre 2'3 y 2'6?
0'3

Figura 2. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

- Respuestas en las que se respondía que no hay números entre dos números pseudo-consecutivos y entre dos números no pseudo-consecutivos se daba una lista finita de números pseudo-consecutivos (categoría *sesgo*). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 3 escribe "ninguno" para los números 1.42 y 1.43 (pseudo-consecutivos) y 2.4 y 2.5 para los números 2.3 y 2.6 (no pseudo-consecutivos).

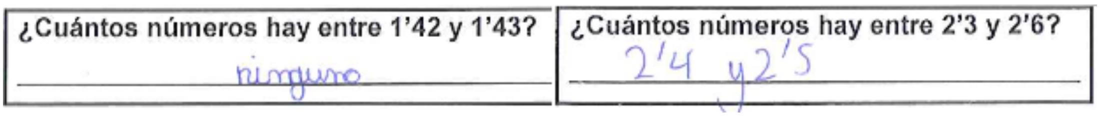
¿Cuántos números hay entre 1'42 y 1'43?
ninguno
¿Cuántos números hay entre 2'3 y 2'6?
2'4 y 2'5

Figura 3. Respuestas de un estudiante de 2º de ESO

- Respuestas en las que se daba una lista finita de números pseudo-consecutivos entre los números dados, después de añadir un decimal a los números decimales o después de añadir un decimal en el numerador de las fracciones, o se decía la cantidad de números de estas listas (categoría *finita consecutiva*). El estudiante de la Figura 4 añade un decimal en el numerador de la fracción 2/5 y forma "una lista finita de números pseudo-consecutivos".

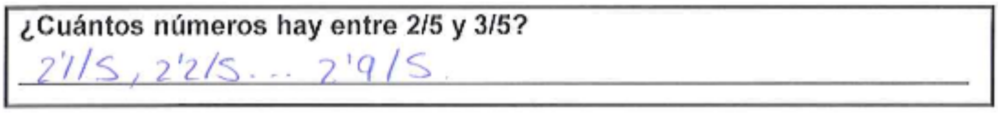
¿Cuántos números hay entre 2/5 y 3/5?
2'1/5, 2'2/5... 2'9/5.

Figura 4. Respuesta de un estudiante de 4º de ESO

- Respuestas en las que se especificaban otros números incluidos entre los números dados (categoría *finita*). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 5 responde 1/2 entre 2/5 y 3/5.

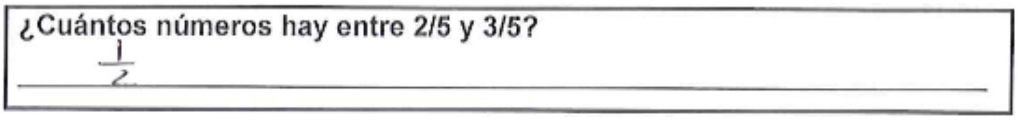
¿Cuántos números hay entre 2/5 y 3/5?
1/2

Figura 5. Respuesta de un estudiante de 4º de ESO

Finalmente, se identificaron respuestas en las que se especificaban otros números no incluidos entre los números dados (categoría *resto*) y respuestas en blanco (categoría *blanco*).

Para los ítems de escribir un número identificamos seis categorías:

- Respuestas en las que se escribía correctamente un número entre los dos números dados (categoría *correcto*). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 6 escribe 2/17 entre 1/8 y 1/9.

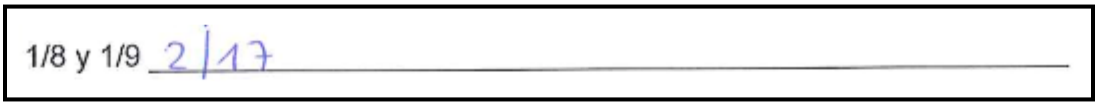

Figura 6. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

- Respuestas en las que se escribía que era imposible encontrar un número (categoría *sesgo*). El estudiante de la Figura 7 escribe “imposible” entre 3.49 y 3.50.

Figura 7. Respuesta de un estudiante de 4º de ESO

- Respuestas en las que se consideró que hay otros números, pero usaron una idea errónea de fracción “siguiente” (categoría *consecutiva*). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 8 considera que la siguiente fracción de 1/3 es 1/4.

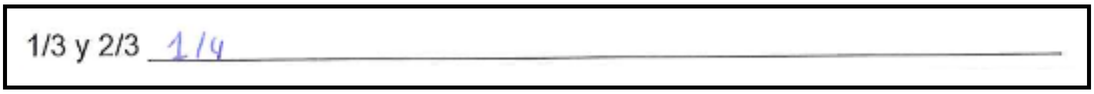

Figura 8. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

- Respuestas en las que se calculó la diferencia entre los dos números dados (categoría *diferencia*). El estudiante de la Figura 9 da como resultado la diferencia entre 3.49 y 3.50.

Figura 9. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

Finalmente, se identificaron respuestas de estudiantes en las que se escribió un número no incluido entre los números dados (categoría *resto*) y respuestas en blanco (categoría *blanco*).

Evolución de las formas de responder

La Figura 10 muestra el porcentaje de uso de las formas de responder identificadas en los ítems de determinar la cantidad de números, desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.

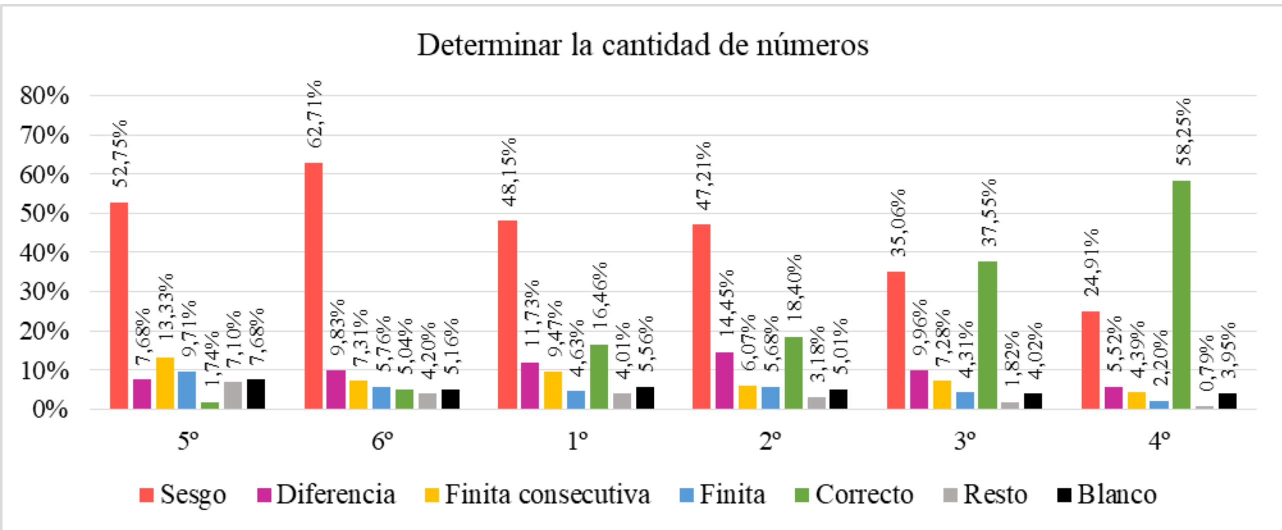

Figura 10. Porcentaje de empleo de cada categoría en los ítems de determinar la cantidad de números

Aunque la categoría *sesgo* aumentó desde 5º hasta 6º curso, decreció a lo largo de los cursos de secundaria. Este resultado muestra que alrededor de un 25% de las respuestas de los estudiantes de

4º de ESO todavía se centraban en el conocimiento del número natural. El descenso de la categoría *sesgo* corresponde con un aumento de la categoría *correcto*, que alcanza casi un 60% en 4º de ESO. Además, las categorías *finita consecutiva* y *finita* disminuyeron con los cursos y la categoría *diferencia* aumentó ligeramente hasta 2º de la ESO, disminuyendo después hasta 4º curso.

La Figura 11 muestra el porcentaje de uso de las formas de responder identificadas en los ítems de escribir un número, desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO. Al igual que en los ítems de determinar la cantidad de números, el porcentaje de la categoría *sesgo* aumentó desde 5º de primaria hasta 6º de primaria, y luego decreció a lo largo de los cursos, pero sin desaparecer en 4º de ESO; por lo que la influencia del conocimiento del número natural no desapareció en los últimos cursos de la educación secundaria. El decrecimiento de esta categoría se corresponde con un aumento de la categoría *correcto*, la cual aparece en un 10% en 5º de primaria, y alcanza un 50% en 4º de ESO. La categoría *consecutiva* decrece desde 5º de primaria hasta 4º de ESO y el uso de la categoría *diferencia* es menor que en los ítems de determinar la cantidad de números.

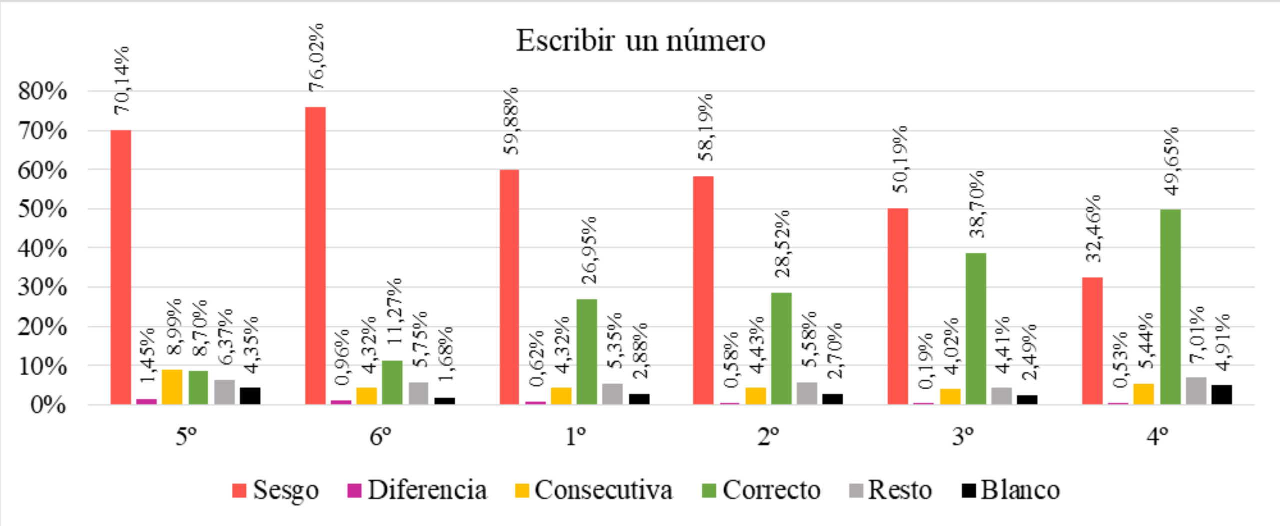

Figura 11. Porcentaje de empleo de cada categoría en los ítems de escribir un número

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta investigación tiene como objetivo identificar diferentes formas de responder sobre la densidad de los números racionales de estudiantes de primaria y secundaria. Los resultados obtenidos muestran que el sesgo del número natural, basado en la creencia de que el conjunto de los números racionales es discreto como los números naturales (categoría *sesgo*), está presente en ambos tipos de ítems a lo largo de todos los cursos. Es decir, los estudiantes creen que entre dos números racionales "pseudo-consecutivos" no hay números, y que entre dos números racionales no "pseudo-conscutivos" hay un número finito de números (Broitman et al., 2003; Merenluoto y Lehtinen, 2004; Moss y Case, 1999; Tirosh et al., 1999). Aunque el porcentaje de esta respuesta disminuye a lo largo de los cursos, todavía se observa en estudiantes de 4º de ESO (un 25% en ítems de determinar la cantidad de números y un 30% en ítems de escribir un número).

La disminución del sesgo del número natural se corresponde con un aumento de las respuestas correctas (categoría *correcto*). Es decir, estudiantes que consideraron que hay infinitos números entre dos números racionales dados, y que escribieron correctamente un número entre dos números racionales pseudo-consecutivos. El porcentaje de este tipo de respuestas fue muy bajo en 5º y 6º de primaria, y aunque su uso fue mayor a lo largo de los cursos, en 4º de ESO únicamente se observó en un 60% de las respuestas en ítems de determinar la cantidad de números y en un 50% en ítems de escribir un número. Por lo tanto, comprender la densidad de los números racionales es una tarea compleja para estudiantes de educación primaria y secundaria (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004; Van Hoof et al., 2015). Comparando el porcentaje de respuestas correctas en ambos tipos de ítems, se observa mayor porcentaje de respuestas correctas en ítems de escribir un número que en ítems de determinar la cantidad de números (excepto en 4º de ESO). Esto puede deberse a que ser capaz de escribir un número entre dos números racionales pseudo-consecutivos no implica saber que hay infinitos números entre ambos, sino que un paso previo puede ser considerar que hay una cantidad finita de números (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 2010).

Por otra parte, desde el análisis inductivo se han identificado respuestas de estudiantes que pueden determinar formas de responder intermedias en la comprensión de la densidad de los números racionales. En los ítems de determinar la cantidad de números se han identificado las categorías *finita consecutiva* y *finita.* Las categorías *finita consecutiva* y *finita* muestran respuestas de estudiantes en las que no se consideró que entre dos números decimales pseudo-consecutivos o dos fracciones pseudo-consecutivas no hay números, pero sí un número finito de números. Es decir, este tipo de respuesta muestra que los alumnos identifican que hay otros números, pero todavía no consideran que hay infinitos (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 2010). En los ítems de escribir un número se ha obtenido la categoría *consecutiva*. Esta categoría muestra a estudiantes que identificaron números entre dos fracciones pseudo-consecutivas, pero se centraron en una idea incorrecta de "siguiente número".

Los resultados obtenidos en este estudio tienen implicaciones para la enseñanza. En primer lugar, se ha observado que el sesgo del número natural está presente en estudiantes de los últimos cursos de educación secundaria. Por lo tanto, los docentes de educación primaria y secundaria deben ser conscientes de este sesgo e intentar dar sentido al concepto de densidad desde los primeros pasos en la instrucción del número racional. En segundo lugar, las diferentes respuestas de estudiantes identificadas en este estudio han mostrado diferentes formas incorrectas de responder sobre la estructura densa de los números racionales antes de llegar a su comprensión. Esta información podría ser útil no solo para los docentes de primaria y secundaria que están enseñando los números racionales sino también para los programas de formación de maestros y profesores.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135) y con el apoyo de la Universidad de Alicante (UAFPU2018-035).

Referencias

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. y Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

Broitman, C., Itzcovich, H. y Quaranta, M. E. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 5-26.

Cramer, K., Post, T. y delMas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144.

Gómez, D. M. y Dartnell, P. (2019). Middle schoolers' biases and strategies in a fraction comparison task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(6), 1233-1250.

González-Forte, J. M., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). Gijón: SEIEM.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. y Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, *37*, 14-20.

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, *14*(5), 519-534.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.

Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Siegler, R. S. y Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909-918.

Smith, C. L., Solomon, G. E. y Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51*(2), 101-140.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O. y Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Retrieved May 05, 2005 from http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 39-56.