NIVELES DE RESPUESTA DE ESTUDIANTES DE TEORÍA DE GRAFOS USANDO DEFINICIONES DESDE EL MODELO DE VAN HIELE[1]

Levels of response of graph theory students using definitions through the lens of the van Hiele model

González, A.[a], Gallego-Sánchez, I.[a], Puertas, M. L.[b], Gavilán-Izquierdo, J. M.[a]

[a] Universidad de Sevilla, [b] Universidad de Almería

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas de estudiantes de ingeniería informática a dos tareas que implican el uso de definiciones propias de la teoría de grafos, concretamente, las de número cromático y árbol. Estas respuestas son categorizadas desde la óptica del modelo de van Hiele con el fin de dar soporte a una propuesta teórica de extensión de este modelo al ámbito de la teoría de grafos. Obtenemos como resultado de nuestra investigación que las respuestas analizadas cubren todos los descriptores de las categorías propuestas a nivel teórico para el proceso de uso de definiciones, y que estas se adecúan a las características propias de los niveles de van Hiele.

Palabras clave: *teoría de grafos, modelo de van Hiele, procesos de razonamiento, uso de definiciones*

Abstract

In this work, we analyze the answers provided by a sample of computer engineering students to two tasks involving the use of definitions in the context of graph theory, specifically, chromatic number and tree. These answers have been categorized through the lens of the van Hiele model in order to give support to a theoretical approach of an extension of this model to the field of graph theory. Our results show that the answers provided cover all the descriptors of the theoretical categories for the process of use of definitions, and also that they fit the characteristics of the van Hiele levels.

Keywords: *graph theory, van Hiele model, processes of reasoning, use of definitions*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario es un área de investigación emergente y relevante en educación matemática (González-Regaña, Martín-Molina, Toscano, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2021). Algunos autores señalan la importancia de la matemática discreta como una rama de la matemática relativamente nueva que tiene numerosas aplicaciones tanto en matemáticas (Heinze, Anderson y Reiss, 2004) como en otras disciplinas, por ejemplo, ciencias de la computación (Kasyanov, 2001). Esta importancia de la matemática discreta hace que los investigadores hayan puesto el foco en la necesidad de desarrollar marcos teóricos que permitan realizar investigaciones didácticas sobre sus conceptos en el nivel universitario (Ouvrier-Buffet, Meyer y Modeste, 2018). Dentro del amplio campo de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta, nuestra investigación se centra en el aprendizaje de la teoría de grafos, temática sobre la cual existen pocos estudios (Hazzan y Hadar, 2005; Medová, Páleníková, Rybanský y Naštická, 2019).

---

[1] Los autores primero, segundo y cuarto son miembros del Grupo de Investigación en Educación Matemática FQM-226 de la Junta de Andalucía y la tercera autora es miembro del grupo Supercomputación-Algoritmos TIC-146 de la Junta de Andalucía.

González, A., Gallego-Sánchez, I., Puertas, M. L., Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). Niveles de respuesta de estudiantes de teoría de grafos usando definiciones desde el modelo de van Hiele. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 327 – 334). Valencia: SEIEM.

La investigación que estamos desarrollando (Gavilán y González, 2016; González, Gallego-Sánchez, Gavilán-Izquierdo y Puertas, en prensa; González y Gavilán, 2017) tiene como objetivo caracterizar niveles de aprendizaje de la teoría de grafos desde la perspectiva del modelo de van Hiele. Este modelo ha sido tradicionalmente considerado en el ámbito de la geometría (Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Sarasua, 2013), aunque también se ha extendido a otras áreas de la matemática tales como el análisis (Navarro y Pérez-Carreras, 2006; Nisawa, 2018). En grafos surge de forma natural al considerar la analogía existente entre figuras geométricas planas y grafos, pues los vértices y las aristas de los grafos pueden recordarnos a los vértices y los lados de las figuras geométricas. Además, las transformaciones que dejan invariantes a las figuras geométricas, los movimientos rígidos, son un caso particular de las que dejan invariantes a los grafos, que son aquellas transformaciones continuas que conservan las conexiones entre vértices (González et al., en prensa). Este último trabajo propone una caracterización de niveles de van Hiele en el contexto de la teoría de grafos desarrollada a través de un análisis teórico estructurado a través de cinco procesos de razonamiento: reconocimiento, uso y formulación de definiciones, clasificación y demostración. Estos procesos, originalmente propuestos por Gutiérrez y Jaime (1998) en el contexto de la geometría, han sido traducidos a la teoría de grafos para poder vertebrar dicha propuesta teórica de niveles de razonamiento.

El objetivo de esta comunicación es dar soporte empírico a la validez de los descriptores propuestos por González et al. (en prensa) para el proceso concreto de uso de definiciones, para lo cual categorizamos las respuestas de los estudiantes que han participado en el estudio según los cuatro niveles propuestos por los autores. Se trata, por lo tanto, de comprobar que estas respuestas se adaptan a las categorías esperadas y que sus características responden a las particularidades de los niveles de van Hiele.

MARCO TEÓRICO

Presentamos primeramente algunas nociones básicas de la teoría de grafos (Biggs, 2003) que vamos a utilizar en el desarrollo del presente trabajo. Un grafo es un conjunto de elementos relacionados entre sí mediante una relación binaria. Formalmente, se define un *grafo* G como un par (V, E) donde V es un conjunto cualquiera (llamado conjunto de *vértices*) y E (conjunto de *aristas*) es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V. Dos vértices que forman una arista se dice que están conectados por dicha arista o bien que son *adyacentes* y se define el *grado* de un vértice como el número de vértices adyacentes a él. Por otra parte, se dice que un grafo G' es *subgrafo* de otro grafo G si los vértices y aristas de G' están contenidos en los vértices y aristas de G, respectivamente.

Un grafo se dice *conexo* si cualquier par de vértices puede unirse mediante una secuencia de vértices adyacentes. Esta propiedad permite definir las siguientes familias de grafos: un *camino* es un grafo conexo que tiene dos vértices de grado uno y el resto de grado dos; un *ciclo* es un grafo conexo con todos sus vértices de grado dos; un *árbol* es un grafo conexo que no contiene ningún ciclo como subgrafo. Finalmente, una *coloración con k colores* de los vértices de un grafo G es una asignación de un elemento de $\{1, 2, \ldots, k\}$ (que llamamos conjunto de *colores*) a cada vértice de G, de modo que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color; el mínimo k tal que esto es posible se denomina *número cromático* de G.

El referente teórico de este trabajo es el modelo de van Hiele, cuyas características generales han sido estudiadas en numerosos trabajos (Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez y Jaime, 1988; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Mayberry, 1983). Específicamente, consideramos la particularización de este modelo al ámbito de la teoría de grafos propuesta por González et al. (en prensa) en la que se plantean cuatro niveles de razonamiento. Si bien en dicho trabajo se analizan en términos de la evolución de cada uno de los cinco procesos de razonamiento mencionados anteriormente, podemos describirlos en términos generales empezando por un primer nivel de carácter puramente visual, en el cual se percibe el grafo como un todo, pudiendo los estudiantes realizar clasificaciones exclusivas de familias de grafos, de manera que identifican, por ejemplo, los árboles y los caminos como familias disjuntas. En este nivel se manejan algunas propiedades globales (es decir, asociadas al grafo en su totalidad, como por ejemplo la conectividad) y se usa un lenguaje no matemático. En el segundo nivel, de carácter analítico, se manejan propiedades globales y locales (es decir, asociadas a subgrafos del grafo, como por ejemplo el grado) de forma aislada, pues las reglas lógicas que se pueden usar a este nivel son muy básicas (e.g., conjunción, disyunción o negación), y no permiten relacionarlas entre sí mediante deducciones lógicas. Las clasificaciones que pueden realizarse en este nivel, aunque en base a propiedades de los grafos, aún son de tipo exclusivo. El tercer nivel, de carácter preformal, supone una mejora en las habilidades lógicas suficiente para comprender y reconocer relaciones entre propiedades y para hacer razonamientos informales y clasificaciones inclusivas de familias de grafos, admitiendo ahora que los caminos están incluidos en la familia de los árboles. Finalmente, en el cuarto nivel, de carácter formal, los grafos pueden ser tratados como objetos matemáticos abstractos, pudiéndose construir razonamientos formales sobre los mismos. Estos cuatro niveles verifican las características generales del modelo de van Hiele, entre las que destacan la jerarquización y la secuencialidad.

Específicamente, con respecto al proceso de uso de definiciones, en dicha propuesta se plantea el nivel 1 como un nivel inicial en el que los estudiantes pueden utilizar definiciones que no requieren conocimientos ni habilidades en teoría de grafos, salvo la mera distinción visual de las partes más elementales del grafo: vértices y aristas. En el nivel 2, pueden usar definiciones con estructura lógica simple (e.g., que incluyan los conectores lógicos "y" u "o") siempre y cuando estén basadas en propiedades de los grafos que ya conocen. En el nivel 3 pueden utilizar cualquier definición, incluyendo a aquellas que implican un uso de relaciones lógicas más complejas (e.g., cuantificador existencial, cuantificador universal, mínimo, máximo, etc.), ya que poseen un mayor dominio de los razonamientos deductivos. Finalmente, en el nivel 4, los estudiantes adquieren una comprensión de la estructura lógica de las matemáticas que les permite aceptar que distintos términos en teoría de grafos puedan tener definiciones equivalentes.

METODOLOGÍA

Participaron en el estudio 39 estudiantes (que numeramos del 1 al 39) de un grupo de la asignatura de primer curso "Lógica y Matemática Discreta", impartida en el primer semestre. En este grupo había alumnos de distintos grados en ingeniería informática de la Universidad Politécnica de Madrid. Durante la última clase del semestre, los estudiantes respondieron a un cuestionario (instrumento de recogida de datos de nuestro estudio) cuyos resultados serían considerados para la evaluación de la asignatura y como datos para esta investigación, dando expresamente su consentimiento para este último fin. Este cuestionario, cuyas tareas podían realizarse con los conocimientos adquiridos en la asignatura, fue respondido de forma escrita e individual por cada uno de los participantes.

El cuestionario impartido contenía cinco ítems de respuesta abierta diseñados con el objeto de evaluar los procesos de uso y formulación de definiciones en teoría de grafos desde la perspectiva del modelo de van Hiele. Para ello, hemos seguido el planteamiento de Gutiérrez y Jaime (1998) a la hora de diseñar ítems para tal fin. En efecto, hemos considerado por una parte que los estudiantes tengan la oportunidad de explicitar sus razonamientos en las respuestas, y por otra que todos los niveles sean evaluados al menos por un ítem.

La metodología empleada en esta investigación es de corte cualitativo-interpretativo, de manera que analizamos las respuestas de los estudiantes asignando un nivel en función de las categorías que hemos mencionado en el marco teórico. Para ello, cada investigador analizó las respuestas en primer lugar de manera individual, para posteriormente realizar una puesta en común en la que se discutieron los casos discrepantes y llegar así a un consenso.

En esta comunicación presentamos los resultados correspondientes a dos de los ítems del cuestionario correspondientes al proceso de uso de definiciones:

Ítem 1. *Colorear los vértices de un grafo consiste en asignar un color a cada uno de ellos de manera que dos vértices unidos por una arista no tengan el mismo color. Colorea el siguiente grafo (Figura 1) usando solo 3 colores. [Nota: si no tienes lápices de colores puedes usar números para asignar a cada vértice: rojo = 1, azul = 2, verde = 3.]*

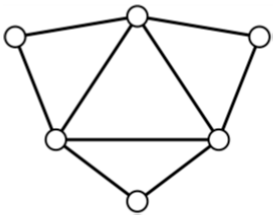

Figura 1. Grafo correspondiente al ítem 1.

El número cromático de un grafo es el mínimo número de colores necesarios para colorearlo. ¿Cuál es el número cromático del grafo dibujado justo arriba? ¿Por qué?

Ítem 2. *Dadas las siguientes definiciones: árbol (grafo conexo y sin ciclos), arbusto (grafo tal que dos vértices cualesquiera están conectados por un único camino), seto (grafo conexo con n vértices y n-1 aristas). Dibuja un ejemplo para cada una de ellas. ¿Qué relación(es) existen entre las tres definiciones?*

Las definiciones que incluyen estos ítems son de distinta complejidad. Concretamente, la definición de coloración del primer ítem no requiere de conocimientos sobre grafos para usarla correctamente (más allá de distinguir visualmente vértices y aristas), con lo cual esta parte de este ítem puede ser respondida correctamente por estudiantes de nivel 1. Sin embargo, la definición de número cromático es una definición más compleja, pues aparece la palabra “mínimo”. Entonces, para responder de forma correcta a esta segunda parte hay que justificar, por un lado, que se puede colorear el grafo con 3 colores, pues así ha podido hacerse en el apartado anterior, y por otro, que no se puede colorear con menos. Para esto último, es necesario razonar que, como el grafo contiene ciclos de orden 3, cuyo número cromático es 3, el grafo dado debe tener un número cromático igual o superior. Así, las respuestas de nivel 2 se remiten a un uso aislado de propiedades, sin muestra alguna de relaciones entre las mismas, mientras que las de nivel 3 contienen al menos parte de los argumentos que hemos mencionado, mostrando un manejo de la lógica propio de este nivel. Por tanto, las respuestas al primer ítem permiten evaluar los niveles 1, 2 y 3 en el uso de definiciones. (Notar que este ítem no evalúa el nivel 4, pues en él no aparecen definiciones equivalentes, cuya aceptación permite reconocer razonamientos de este nivel).

En el segundo ítem aparecen tres definiciones equivalentes de árbol, dos de ellas etiquetadas con nombres arbitrarios escogidos por los investigadores (arbusto y seto), de manera que los estudiantes no sepan de entrada que estas caracterizan a la misma familia. Las definiciones de árbol y seto tienen estructura lógica simple, pues contienen propiedades de grafos unidas por la conjunción lógica “y”, por lo que se espera que los estudiantes de nivel 2 sean capaces de hallar ejemplos de estos. En contraste, la definición de arbusto es más compleja, pues contiene un cuantificador universal y un cuantificador de existencia única, por lo que se espera que suponga una dificultad para los estudiantes de nivel 2 pero no para los de nivel 3, que tienen habilidades lógicas para comprender esta definición. Sin embargo, estas destrezas no son suficientes para responder correctamente a la última pregunta, sobre la relación entre las definiciones, lo que nos permitirá saber si los estudiantes detectan la equivalencia entre las mismas, característica de nivel 4. Así, el segundo ítem permite discriminar entre los niveles 2, 3 y 4 en las respuestas. (Notar que este ítem no evalúa el nivel 1, pues las definiciones empleadas requieren del conocimiento de ciertas propiedades de los grafos).

RESULTADOS

En el primer ítem hemos obtenido respuestas de todos los niveles esperados. Por ejemplo, el estudiante 30 realiza una coloración correcta del grafo, pero afirma que “su número cromático es 1 porque puede colorearse con un color”. Así, el alumno muestra nivel 1 en este ítem porque es capaz de realizar una tarea que no requiere de conocimientos sobre teoría de grafos, pero después da una justificación que no demuestra ningún tipo de habilidad lógica ni uso de propiedades de grafos. Solo muestra comprensión de la tarea concreta de colorear con 3 colores, pero no ha sabido usar esa definición para comprender la de número cromático.

El estudiante 27 da una respuesta de nivel 2 a este ítem, pues realiza correctamente la primera parte y en la segunda justifica que el número cromático es 3 porque “no puede colorearse con un número menor de colores puesto que tiene algunos vértices de grado 4”. Muestra nivel 2 porque es capaz de usar propiedades matemáticas para justificar su respuesta, pues es cierto que el grafo posee vértices de grado 4, pero no muestra capacidad para relacionarlas entre sí. De hecho, el grado máximo de los vértices de un grafo no sirve para acotar inferiormente el número cromático, sino superiormente.

El estudiante 15, que también colorea correctamente el grafo, en la segunda parte hace alusión solamente a la necesidad de usar 3 colores: “El número cromático es 3. El grafo lo puedes dividir en subgrafos (ciclos) de forma que quedan triángulos; en un triángulo el número cromático mínimo es 3”. Ubicamos esta respuesta en el nivel 3 porque, aunque el estudiante no alude a la condición suficiente (o sea, que puede colorearse con 3 colores como acaba de comprobar) y tiene alguna imprecisión (“número cromático mínimo”), muestra que la colorabilidad es una característica hereditaria de los grafos (i.e., el número cromático de un grafo es mayor o igual que el de cualquiera de sus subgrafos), lo cual supone una destreza lógica característica de este nivel.

En la segunda pregunta, sobre la noción de árbol, también hemos obtenido respuestas de todos los niveles que esperábamos. Un ejemplo de respuesta de nivel 2 fue dada por el estudiante 23, que solo da ejemplos correctos de árbol y seto pero no de arbusto. Además, proporciona una justificación muy elemental para relacionar las definiciones, pues dice que “árboles y setos no tienen ciclos. Los tres son conexos”. Así, alude a propiedades que aparecen textualmente en las definiciones, salvo en el caso de la conectividad de los arbustos, que es inmediata de ver aunque en ella no aparezca explícitamente el término “conexo”.

Una respuesta de nivel 3 es dada por el estudiante 13 (ver Figura 2), que realiza correctamente los tres ejemplos, mostrando así comprensión de las tres definiciones. Además, para relacionar estos tres conceptos, realiza correctamente una inclusión de clases, lo cual supone un uso considerable de la lógica que caracteriza a este nivel.

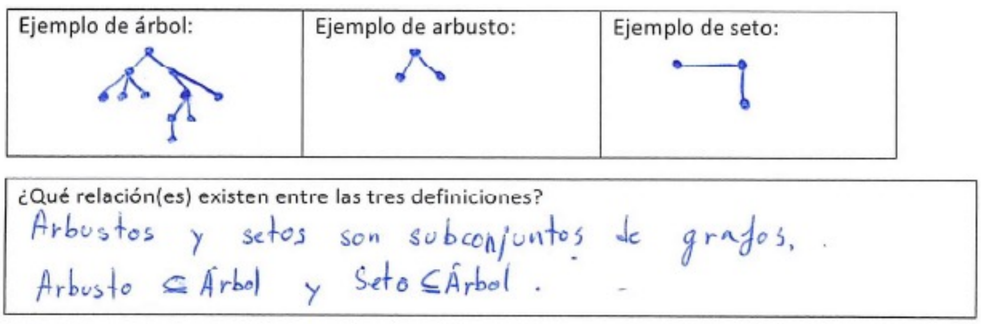

Figura 2. Respuesta de nivel 3 para el ítem 2.

Finalmente, el estudiante 38 (ver Figura 3), proporciona la respuesta que demuestra el mayor grado de comprensión posible para este ítem, pues además de dar tres ejemplos correctos, afirma que “las tres definiciones son equivalentes". Así, ubicamos este tipo de respuestas en el nivel 4 por mostrar que acepta que un concepto puede definirse de distintas formas.

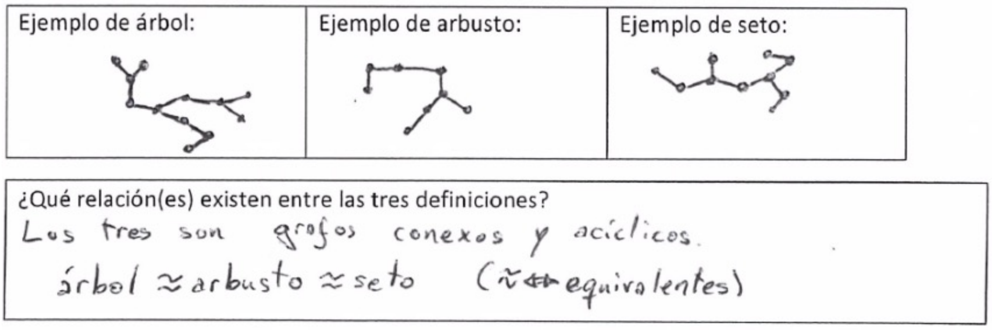

Figura 3. Respuesta de nivel 4 para el ítem 2.

Los resultados obtenidos en cada ítem aparecen reflejados en la Tabla 1. Notamos además que el 77% de los alumnos obtuvieron en ambos ítems o bien el mismo nivel (46%) o bien una diferencia de un solo nivel (31%).

Tabla 1. Resultados obtenidos en cada ítem.

	Número de estudiantes (Porcentaje)	
	Ítem 1	Ítem 2
Sin clasificar	1 (3%)	4 (10%)
Nivel 1	4 (10%)	__
Nivel 2	22 (56%)	19 (49%)
Nivel 3	12 (31%)	12 (31%)
Nivel 4	__	4 (10%)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las categorías de respuestas obtenidas en este trabajo atienden a la jerarquización y secuencialidad que caracteriza a los niveles, pues reflejan que el nivel n supone una sofisticación en el razonamiento matemático del nivel n-1, además de que un estudiante no puede tener nivel n sin la capacidad de razonamiento del nivel n-1 (Jaime y Gutiérrez, 1990). En efecto, en ambos ítems, las categorías de respuestas de cada nivel han sido construidas añadiendo nuevos descriptores de habilidades a los de la categoría correspondiente al nivel anterior. Además, las categorías han sido definidas no solo a partir de las habilidades que muestran los alumnos, sino también a la vista de sus dificultades, tal y como se caracterizan los niveles van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998). Por tanto, estos hechos suponen un factor de validación del instrumento que hemos diseñado.

Por otra parte, hemos podido comprobar que todas las categorías de respuestas esperadas para ambos ítems han tenido soporte empírico, pues hemos hallado distintos ejemplos por cada categoría entre las respuestas de los estudiantes. Efectivamente, el análisis del ítem 1 ha revelado respuestas de nivel 1, en los casos donde solo se manejan definiciones que no demandan más que la mera distinción visual entre vértices y aristas, pero sin manifestar comprensión de propiedades matemáticas de los grafos. Igualmente, hemos registrado respuestas de nivel 2 mediante ambos ítems, en los casos en los que los estudiantes muestran comprensión de definiciones formuladas a partir de conectores lógicos elementales, como la conjunción y la disyunción, pero sin ser capaces de establecer relaciones entre las mismas. También, ambos ítems han dado lugar a respuestas de nivel 3, en las que hemos encontrado estudiantes capaces de manejar definiciones más complejas, que requieren de la comprensión de expresiones lógicas menos elementales, como por ejemplo el cuantificador existencial único. Finalmente, el ítem 2 ha mostrado a una minoría de estudiantes capaces de aceptar que una misma noción puede tener definiciones equivalentes. Estos hechos permiten dar una primera validación a los descriptores propuestos por González et al. (en prensa) para el proceso de uso de definiciones en teoría de grafos, cumpliendo con el objetivo que planteamos en esta comunicación. Más aun, hemos obtenido descriptores de los niveles para los contenidos específicos de cada ítem (i.e., número cromático y árbol), lo cual nos permite refinar la propuesta general, como ya se ha realizado con contenidos específicos de geometría (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990).

Respecto a la proximidad observada en los niveles de las respuestas de un mismo estudiante a ambos ítems, notamos que nuestros resultados muestran discrepancias similares a las que han sido observadas en otros trabajos. Por ejemplo, estudios clásicos sobre este modelo en el ámbito de la geometría (Gutiérrez y Jaime, 1988; Mayberry, 1983) revelan discrepancias entre los niveles de respuesta según el concepto por el que se le pregunte al estudiante. Aunque esto podría parecer una contradicción con los planteamientos del modelo de van Hiele, Gutiérrez y Jaime (1988) señalan que ello podría deberse a que los estudiantes, especialmente de niveles 1, 2 y 3, tienen una visión local fragmentada de las matemáticas que inhibe su transferencia de conocimientos y habilidades de razonamiento de un área de la matemática a otra.

Por tanto, al haber cubierto todos los descriptores esperados y no haber encontrado ninguna disonancia con el modelo teórico (González et al., en prensa), no sería necesario por el momento la modificación de los descriptores propuestos inicialmente. Para ello, es preciso destacar limitaciones de este trabajo, como por ejemplo la graduación de las categorías empleadas para analizar las respuestas de los estudiantes. Aunque nos han permitido alcanzar nuestro objetivo, hemos detectado distintas respuestas a una tarea que muestran un mismo nivel pero distinta calidad en los razonamientos. Esta limitación podría superarse considerando una metodología que incluyera otros parámetros además de los niveles de van Hiele, como por ejemplo el método de cálculo de los grados de adquisición (Gutiérrez et al., 1991), que considera aspectos como la corrección y la completitud de las respuestas. Dicho método, que ha sido empleado en distintas investigaciones, como por ejemplo la de Sarasua (2013), proporciona una ponderación del porcentaje de adquisición de cada uno de los niveles que posee el estudiante. Así, el uso de esta metodología serviría también para analizar el resto de los ítems del cuestionario, superando así otra de las limitaciones de este trabajo, como son el número de tareas analizadas y la restricción a un único proceso. Ello nos permitiría obtener perfiles de razonamiento de los estudiantes en el uso y formulación de definiciones y, además, profundizar en las discrepancias de los niveles obtenidos en cada respuesta mediante alguna medida de consenso, como la que propone Mayberry (1983) para analizar la dispersión de la asignación de niveles de razonamiento según el contenido matemático involucrado.

Referencias

Biggs, N. L. (2003). *Discrete mathematics* (2ª ed.). Oxford University Press.

Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (1), 31–48.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3). Reston, VA: N.C.T.M.

Gavilán-Izquierdo, J. M. y González, A. (2016). Investigación sobre el concepto de grafo a través del modelo de Van Hiele. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 597). Málaga, España: SEIEM.

González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M y Puertas, M. L. (en prensa). Characterizing the Cognitive Development of Graph Theory Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education.* Aceptado para su publicación.

González, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2017). Analizando el reconocimiento de grafos a través del modelo de Van Hiele. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 286–293). Madrid, España: FESPM.

González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81–97.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1988). Globality versus locality of the van Hiele levels of geometric reasoning. *Unpublished manuscript*. Valencia, España: Universitat de Valencia.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning problems in Mathematics, 20*(2/3), 27–46.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics* Education*, 22*(3), 237–251.

Hazzan, O. y Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 24*(3), 255–272.

Heinze, A., Anderson, I. y Reiss, K. (2004). Discrete mathematics and proof in the high school. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36***,** 44–45.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295–384). Sevilla, España: Alfar.

Kasyanov, V. N. (2001). Graph applications in programming. *Programming and Computer Software, 27*, 146–164.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for research in mathematics education, 14*(1), 58–69.

Medová, J., Páleníková, K., Rybanský, Ľ. y Naštická, Z. (2019). Undergraduate students' solutions of modeling problems in algorithmic graph theory. *Mathematics*, *7*(7), 572.

Navarro, M. A. y Pérez-Carreras, P. (2006). Constructing a concept image of convergence of sequences in the van Hiele framework. *CBMS Issues in Mathematics Education, 13*, 61–98.

Nisawa, Y. (2018). Applying Van Hiele's Levels to basic research on the difficulty factors behind understanding functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(2), 61-65.

Ouvrier-Buffet, C., Meyer, A. y Modeste, S. (2018). Discrete mathematics at university level. Interfacing mathematics, computer science and arithmetic. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N.M Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 255–264). Kristiansand, Noruega: University of Agder e INDRUM.

Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 43–65). Bilbao, España: SEIEM.