UN ANÁLISIS ONTO-SEMIÓTICO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN[1]

An onto-semiotic analysis of mathematical activity in the modelling process

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G.

Universitat de Barcelona

Resumen

El objetivo es analizar el proceso de modelización matemática para resolver un problema, utilizando el modelo de análisis de la actividad matemática propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico (EOS), y así complementar el realizado por un modelo específico de análisis del proceso de modelización. Para ello, primero se reproduce un problema y el proceso de modelización que permite darle una respuesta, según el ciclo propuesto desde la perspectiva cognitiva. Luego, se analiza el mismo problema utilizando el modelo propuesto por el EOS para analizar la complejidad de la actividad que subyace a las diferentes fases del ciclo desde la perspectiva cognitiva. Por último, se concluye que, el análisis apoyado en las herramientas que provee el EOS, precisa, desvela elementos implícitos, diferencia e ilustra con detalles la estructura y funcionamiento de las fases del ciclo de modelización matemática desde la perspectiva cognitiva.

Palabras clave: *análisis de la actividad matemática, enfoque Onto-Semiótico, modelización matemática*

Abstract

The aim of this work is to analyse the mathematical modelling process to solve a problem, using the mathematical activity analysis model proposed by the Onto-Semiotic Approach (OSA), and thus complement the one carried out by a specific analysis model of the modelling process. To do this, firstly a problem and the modelling process that allows to give an answer to it are reproduced, according to the cycle proposed from the cognitive perspective. Then, the same problem is analysed using the model proposed by the OSA to analyse the complexity of the activity that underlies the different phases of the cycle from the cognitive perspective. Finally, it is concluded that the analysis supported by the tools provided by the OSA specifies, reveals implicit elements, differentiates, and illustrates in detail the structure and operation of the phases of the mathematical modelling cycle from the cognitive perspective.

Keywords: *analysis of mathematical activity, mathematical modelling, Onto-Semiotic approach*

INTRODUCCIÓN

Una de las cuestiones que más ha interesado a la investigación en el área de la Educación Matemática es la de generar modelos de análisis de la actividad matemática. Los investigadores que se han interesado por esta cuestión se pueden dividir en dos grandes grupos: los que han propuesto modelos generales para el análisis de la actividad matemática, y los que han optado por considerar un tipo específico de actividad matemática, como la resolución de problemas (Liljedahl y Santos-Trigo, 2019), o la modelización. A su vez, cada uno de estos grupos también se pueden subdividir en otros, de acuerdo con los constructos teóricos que empleen: en el caso de la actividad matemática general, se tienen los modelos de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002), de la Antropológica

[1] Estudio realizado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 72200458 (Chile), y del proyecto de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367 – 375). Valencia: SEIEM.

de lo Didáctico (Chevallard, 1992), del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), entre otros; y para el caso de la actividad matemática específica de la modelización, se han reportado estudios sobre las diferentes maneras en que se han estructurado los ciclos (véase Borromeo Ferri, 2006) y las perspectivas sobre este proceso (véase Abassian, Safi, Bush y Bostic, 2020).

Dada esta variedad de miradas sobre el análisis de la actividad matemática, resulta relevante preguntarse ¿qué puede aportar una mirada desde un modelo general de análisis de la actividad matemática al análisis de una actividad matemática específica como la modelización? Para responderla, se ha seleccionado un modelo específico de análisis de la actividad matemática de la modelización, y un modelo general de análisis de la actividad matemática, los que se han utilizado para analizar el mismo proceso de modelización matemática. Más en concreto, se utilizan las herramientas del Enfoque Onto-Semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007, 2019) para analizar la complejidad de la actividad matemática que subyace a la generación de un modelo y, en términos generales, al proceso de modelización matemática, considerando para este último el ciclo propuesto por Borromeo Ferri (2007a) desde la perspectiva cognitiva. La elección de ambos referentes teóricos se justifica en la experticia de los autores en su uso, ya que dos investigadores tienen experiencia en el uso del ciclo de modelización mencionado (el primer y tercer autor), y dos la tienen de manera sustancial en la utilización del Enfoque Onto-Semiótico (el segundo y tercer autor).

Dado que hay un consenso sobre la necesaria inclusión de la modelización en los currículos educativos (Blum, 2011; Kaiser, 2014), se considera que la mirada desde un marco teórico general es relevante para una mejor comprensión de la actividad matemática movilizada durante este proceso.

La estructura de esta comunicación es la siguiente: después de esta introducción, se presentan brevemente los dos referentes teóricos mencionados anteriormente y, a continuación, se explica en la metodología que primero se reproduce un problema del mundo real y el proceso de modelización que permite darle una respuesta, según el ciclo propuesto desde la perspectiva cognitiva, para luego hacer el análisis de este mismo problema utilizando el modelo propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico para analizar la complejidad de la actividad que subyace a la generación de un modelo y del proceso de modelización en general. Por último, se comparan los dos análisis y se presentan las conclusiones.

REFERENTES TEÓRICOS

En este apartado se describen los referentes teóricos considerados para este estudio.

Ciclo de modelización matemática desde una perspectiva cognitiva

El ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva –propuesto por Borromeo Ferri (2007a) y que, a su vez, toma como referente el desarrollado por Blum y Leiß (2007a)– explica el proceso que permite una transición entre una situación del mundo real y su descripción en términos matemáticos, como lo muestra la Figura 1. Este ciclo se eligió, entre otras razones, por el alto impacto que tiene en estos momentos en la comunidad interesada en la investigación sobre modelización en el ámbito educativo.

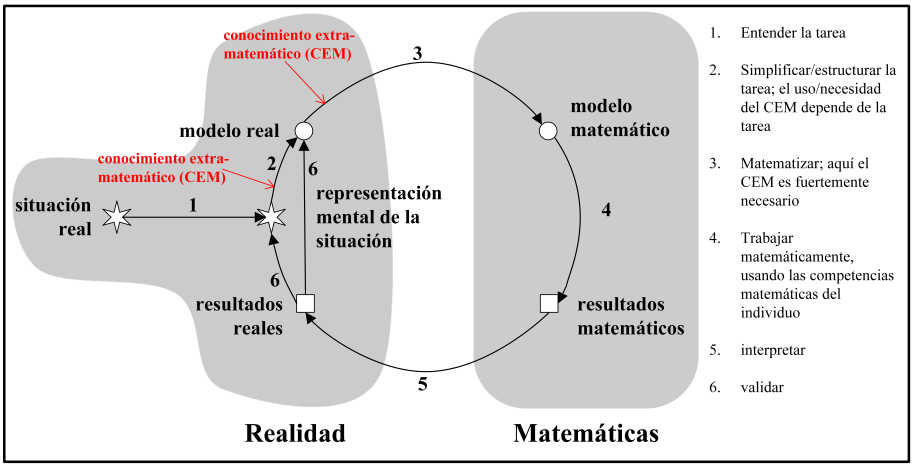

Figura 1. Ciclo de modelización matemática desde la perspectiva cognitiva.
Adaptado desde Borromeo Ferri (2018, p. 15)

En términos de lo descrito por Borromeo Ferri (2018), la *situación real* es entendida como un problema tomado desde la realidad, y que se puede representar en forma escrita (enunciado textual), audiovisual (imágenes, video), o una mezcla de ambos (enunciado con texto e imágenes). La *representación mental de la situación* se genera a partir de la comprensión de la tarea, de la reconstrucción mental del problema, y de las asociaciones que haga el individuo con respecto al problema propuesto. Para obtener un *modelo real*, se debe simplificar y estructurar la imagen mental que el individuo se ha formado sobre el problema, pudiendo incluir representaciones externas (esquemas, figuras, etc.). Como en un problema de modelización no siempre se entrega la totalidad de los datos necesarios para su resolución, el *conocimiento extra-matemático* del individuo juega un rol importante al momento de trabajar con la información que se tiene, añadiendo, de acuerdo a su experiencia personal, consideraciones adicionales al contexto de la situación. El *modelo matemático* toma en cuenta los objetos matemáticos que permiten explicar *la situación real* presentada (Abassian et al., 2020), y será el producto de la matematización (traducción al lenguaje matemático) del *modelo real* y de las aportaciones del *conocimiento extra-matemático* del individuo. A partir del trabajo matemático con el *modelo matemático*, es que se obtienen *resultados matemáticos* que, después de ser interpretados en el contexto de la situación, permitirán obtener *resultados reales*. Finalmente, la validación de los *resultados reales*, es decir, la comparación de la triada *resultados reales* ↔ *representación mental de la situación* ↔ *modelo real*, debe conducir a una respuesta adecuada al problema.

Enfoque Onto-Semiótico

En el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) se considera que la actividad matemática tiene como finalidad la resolución de problemas. Como resultado de un proceso de problematización, el sujeto, o la institución, asume la tarea de resolver un problema (propuesto por otro o creado por él mismo), realizando prácticas matemáticas para ello. Para la realización de estas prácticas matemáticas y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita, además del problema (por ejemplo, un problema cuya resolución implique plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), poner en funcionamiento otros objetos matemáticos. En efecto, en la resolución es necesario el uso de *lenguajes* (verbales, simbólicos, etc.), los cuales son la parte ostensiva de una serie de *definiciones*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de los *argumentos* que permiten resolver el problema. En consecuencia, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una *configuración de objetos primarios* (Font, Godino y Gallardo, 2013).

En el EOS, la noción de *juego de lenguaje* ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan las maneras de estar y de existir de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes maneras de 'estar participando', las cuales se agrupan en facetas o dimensiones duales: personal-institucional, extensivo-intensivo, unitario-sistémico, ostensivo-no ostensivo y expresión-contenido (véase en Font et al., 2013).

La resolución de problemas se realiza mediante la articulación de secuencias de prácticas. Tales secuencias de prácticas tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, …) y argumentación. Por otra parte, las dualidades (o maneras de estar participando los objetos primarios en la actividad matemática) dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización/concreción – idealización/abstracción; expresión/representación – significación.

Esta lista de procesos derivada de la tipología de objetos primarios y facetas duales usadas como herramientas de análisis de la actividad matemáticas en el EOS, si bien contempla algunos de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática, no pretende incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son *hiper* o *mega* procesos (Godino et al., 2019), puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

En el EOS (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009) se considera que, tanto las prácticas matemáticas como el proceso de instrucción, están regulados, entre otras, por normas epistémicas (regulan las prácticas y contenidos matemáticos en correspondencia con el discurso matemático que es posible desarrollar en una institución), normas mediacionales (regulan los recursos –temporales o artefactos– utilizados en las prácticas), normas interaccionales (regulan los modos de interacción entre las personas involucradas en la práctica o proceso instructivo matemático), normas ecológicas (aspectos externos –directrices curriculares, políticas educativas– que condicionan las prácticas en el aula). En este trabajo nos centramos en las normas epistémicas, en particular las meta-matemáticas, que regulan las prácticas realizadas en un proceso de modelización, las cuales implican un proceso que se inicia con una situación real y termina con la validación de la solución.

METODOLOGÍA

Este estudio, de corte teórico-reflexivo, pretende comparar el análisis de la actividad matemática desde el lente de los referentes teóricos mencionados. Para ello, se utilizó una metodología que tiene un aire de familia con la que se emplea para el *networking de teorías* (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone, 2016). En una primera fase, los autores se explicaron mutuamente los dos referentes teóricos para tener un buen conocimiento de ambos. Un segundo paso fue seleccionar una tarea de modelización para ser analizada, en este caso, el problema *Balas de paja* (*Bale of straw*), propuesto por Blum y Leiß (2007b), el cual solicita calcular la altura de una montaña de balas de paja a través de una imagen, y que ha sido utilizado por Borromeo Ferri (2018) para ejemplificar su ciclo de modelización. Precisamente, el hecho de que sea un ejemplo paradigmático para ilustrar este ciclo, fue el principal argumento para su selección y análisis en este estudio.

En la Figura 2 se presenta el problema *Balas de paja*, y en la Tabla 1 se describe la ejemplificación del ciclo de modelización desde la perspectiva cognitiva. En la segunda columna se describen los

procesos mentales y las acciones que realiza el sujeto en las diferentes fases del ciclo (primera columna) para resolver el problema.

Figura 2. Problema *Balas de paja*.
Adaptado desde Borromeo Ferri (2007b, p. 2084)

Tabla 1. Resolución del problema desde el ciclo de modelización.
Adaptado desde Borromeo Ferri (2018)

Fases del ciclo	Procesos mentales y acciones para la resolución del problema
Situación real	Representación del problema a través de la imagen.
Representación mental de la situación	– Pensar en momentos relacionados al verano y a experiencias propias con balas de paja (*conocimiento extra-matemático*). – Entender que se debe determinar la altura de la montaña de balas de paja.
Modelo real	– Pensar en círculos en vez de balas de paja. – Dibujar la situación. – Simplificar a la mujer como un segmento. – Suponer que la altura de la mujer es de 1,7 metros*.
Modelo matemático	– Modelo matemático 1: adición múltiple de la altura de la mujer. – Modelo matemático 2: utilizar el teorema de Pitágoras.
Resultados matemáticos	El resultado del *modelo matemático* sería aproximadamente 7 metros.
Resultados reales	La altura de la montaña de balas de paja es de 7 metros.

* Un elemento del *conocimiento extra-matemático* a tener en consideración es que este problema fue aplicado originalmente a estudiantes en el contexto alemán, lo que da sentido a la estimación de la altura de la mujer en 1,7 m.

En el tercer paso, los autores resolvieron el problema para tener un protocolo detallado de las dos resoluciones que se documentan en Borromeo Ferri (2018) descritos esquemáticamente en la Tabla 1: el procedimiento de estimación de medidas, y el teorema de Pitágoras. En el cuarto paso, se analizó el proceso de modelización basado en el procedimiento de estimación (*modelo matemático* 1 de la Tabla 1) utilizando las herramientas del EOS, para lo cual, se desarrolló una narrativa con base en la resolución de los autores, lo que permitió identificar las prácticas, los objetos, y las normas meta-matemáticas presentes en la actividad en cuestión. Finalmente, como un quinto paso, se detalló cuál era la aportación del análisis del paso cuatro al descrito en el paso dos.

ANÁLISIS DE LA RESOLUCIÓN DESDE LA PERSPECTIVA ONTO-SEMIÓTICA

Por cuestiones de espacio, en este apartado se presenta sólo el análisis de la resolución basada en la adición múltiple de alturas (*modelo matemático* 1 de la Tabla 1). De la narrativa matemática derivada de la resolución del problema (que no se muestra por temas de espacio), se pueden distinguir las siguientes prácticas matemáticas (P) y modelos asociados (ver Figura 3): leer la tarea (P1); hacer una estimación de la estatura de la mujer (P2); hacer una comparación visual entre la estatura de la mujer y la altura de la pila, para así estimar su diámetro (P3); hacer una representación icónica de la situación (P4); calcular la parte de la altura de las filas pares que no se superpone con la altura de las filas impares, mediante una comparación visual (P5); realizar los cálculos para obtener la altura total (P6); valorar si la solución tiene sentido en el contexto del problema (P7).

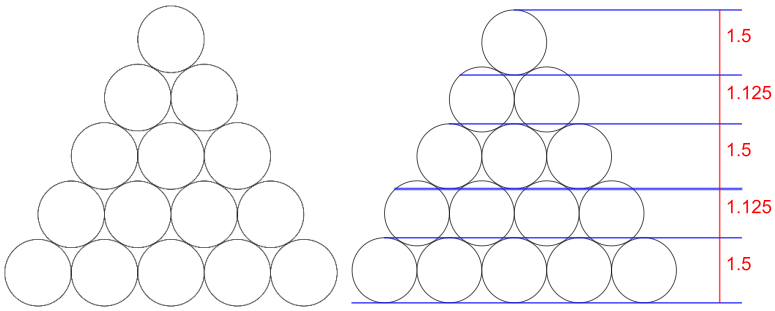

Figura 3. *Modelo real* (izquierda) y *modelo matemático* (derecha) de la situación.

En la Tabla 2 se sintetiza el análisis efectuado con las herramientas del EOS para la resolución de este problema, de acuerdo al *modelo matemático* 1, y cómo se relaciona con el ciclo de modelización matemática.

Tabla 2. Análisis onto-semiótico de la resolución del problema *Balas de paja* con el *modelo matemático* 1

Prácticas	Procesos	Objetos
		Situación real (estado)
	Situación real → Representación mental de la situación → Modelo real (P1, P2, P3)	
P1	– Significación / comprensión – Problematización	– Problema: *determinar la altura de la montaña de balas de paja*.
P2	– Subproceso de la resolución de problemas: *diseñar un plan*.	– Estimación (procedimiento) – Media aritmética (definición implícita) – Proposición matemática: *la estatura media de las mujeres alemanas es 1,7 m*.
P3	– Simplificación / idealización: *convertir a la mujer en un segmento y las balas en cilindros*.	– Comparación visual (procedimiento) – Cilindro y sus elementos (definiciones implícitas) – Propiedad monótona de la medida ($\mu(A) \leq \mu(B)$) – Proposición matemática: *el diámetro de la pila es de 1,5 m*.
		Modelo real (estado)
P4	– Representación	– Representación (Figura 3, izquierda)
	Modelo real → Modelo matemático → Resultados matemáticos (P5, P6)	
P5	– Representación	– Comparación visual de longitudes (procedimiento) – Proposición matemática: *la altura de las filas pares que se superpone con la altura de las impares es ¾ del diámetro estimado*. – Propiedad monótona de la medida. – Representación (Figura 3, derecha)
P6	– Argumentación	– Propiedad aditiva de la medida ($m[A \cup B]) = m[A] + m[B]$) – Medida indirecta (procedimiento) – Proposición: *la altura total es de 6,75 m, aprox. (tesis del argumento)*. – Argumento (razones): *dadas por el procedimiento de estimación, se tiene que:* *a) el diámetro de la pila es menor que la altura de la mujer; como la mujer mide 1,7 m, la pila mide 1,5 m, aproximadamente.* *b) la altura de las filas pares que se superponen con las impares, es aproximadamente ¾ del diámetro de la circunferencia.* *c) la altura total es la suma de las alturas de las filas impares más la altura de las filas pares*.
		Resultados matemáticos (estado)
		– Proposición matemática: *la altura de la montaña es de 6,75 m (solución)*.
	Resultados matemáticos → Resultados reales (P7)	

P7	– Subproceso de la resolución de problemas: *examinar la solución*. – Validación	– Estimación (procedimiento) – Proposición de validación: *la altura de la mujer cabe casi cuatro veces en la altura total de la montaña*. – Proposición: *el resultado obtenido (6,75 metros) es plausible en el mundo real*. – Argumento (razón): *teniendo en cuenta el resultado de la estimación (menor a 4 · 1,7 = 6,8), ya que el resultado obtenido es muy próximo al de la estimación*.
		Resultados reales (estado)
		– El resultado de la altura de la montaña es de 6,75 metros, aprox.

Del análisis anterior, también se desprenden una serie de normas epistémicas (meta-matemáticas) que rigen la actividad. Algunas de éstas son: en la P4 se considera necesario minimizar la cantidad de información, sustituyéndola por signos y figuras (principio de simplificación), y que la representación mantenga tanto la estructura de la *situación real* (representación icónica, diagrama) como la información necesaria para resolver la tarea; en la P5 se asume que el problema puede tener soluciones aproximadas y no-exactas; en la P7 se requiere que, dado un problema de contexto real, la solución obtenida debe tener sentido en el mundo real: por una parte, que los *resultados matemáticos* obtenidos puedan existir en la realidad (por ejemplo, una altura negativa se debería descartar en este contexto), y por otra, que los *resultados matemáticos* obtenidos no sean razonables, triangulando con otras informaciones del contexto (por ejemplo, una altura de 250 m o de 30 cm). Una consideración adicional con respecto a la resolución de este problema es que, dado más de un *modelo matemático* que dé *resultados matemáticos* en el mundo real –como es el caso de la resolución original de Borromeo Ferri (2018)– se debe valorar cuál de éstos es el más adecuado para dar respuesta al problema, teniendo en cuenta tanto el contexto como los aspectos matemáticos.

REFLEXIONES

Se concluye que un análisis minucioso, apoyado en las herramientas que provee el EOS, precisa e ilustra con detalles la estructura y funcionamiento del ciclo de modelización desde la perspectiva cognitiva, permitiendo desvelar y diferenciar las prácticas, los objetos (situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, y argumentos), las normas, y los procesos que están involucrados, tanto en el de construcción de un modelo –durante las fases *modelo real* → *modelo matemático* → *resultados matemáticos*– como en el conglomerado que conforma un ciclo de modelización completo.

La importancia de este análisis es que puede ayudar al diseño de propuestas didácticas para implementar la modelización en el aula. De acuerdo al análisis presentado en la Tabla 2, no se observan procesos como, por ejemplo, la generalización de patrones, lo cual se podría conseguir si se omite la especificación de que hay cinco filas, y sólo se presenta la imagen con las tres filas visibles, para que el estudiante pueda concluir el patrón de formación de las filas en la montaña. Otro proceso al que este análisis puede contribuir es al de validación, presente en la P7, donde el detalle demuestra que, independiente del resultado para la altura de la montaña (sea de 7, 8 o 9 metros), el proceso en cuestión sería el mismo, pues sólo está determinado por la verificación del método de resolución. Al identificar los objetos primarios que intervienen en la validación, en especial el procedimiento y el argumento, muestran que la razonabilidad del resultado no juega un papel determinante en dar respuesta al problema. Dado el hecho que la problematización tiene una estrecha relación con la validación de los resultados, se podría mejorar la riqueza de este último proceso a través de la modificación del contexto de la situación, por ejemplo, si se cuestionara la altura de la montaña de balas para guardarlas en un granero de ciertas dimensiones.

El análisis teórico-reflexivo presentado, sirve como antecedente para un estudio de carácter empírico, en el que se busca abarcar una mayor amplitud de problemas y resoluciones, para así analizar en

mayor profundidad la actividad matemática específica presente en el ciclo de modelización, desde el lente del EOS.

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories – An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 489-506). Berlín, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_46

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Blum, W. y Leiß, D. (2007a). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, Inglaterra: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Blum, W. y Leiß, D. (2007b). Investigating quality mathematics teaching – The DISUM project. En C. Bergsten y B. Grevholm (Eds.), *Developing and Researching Quality in Mathematics Teaching and Learning. Proceedings of MADIF 5* (pp. 3-16). Linköping, Suecia: SMDF.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/bf02655883

Borromeo Ferri, R. (2007a). Modelling problems from a cognitive perspective. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 260-270). Chichester, Inglaterra: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.260

Borromeo Ferri, R. (2007b). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantazi y C. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2080-2089). Larnaca, Chipre: University of Cyprus, ERME.

Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 4*(2), 18-24.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Trads.). Nueva York, EE.UU.: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73–112.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 91-110.

Kaiser, G. (2014). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-404). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_101

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Liljedahl, P. y Santos-Trigo, M. (Eds.). (2019). *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6