

¿ESTA ECUACIÓN DESCRIBE ESTA SITUACIÓN? EXPLORANDO EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA¹

Does this equation describe this situation? Exploring the algebraic thinking of elementary students

López Centella, E.^a, Slezáková, J.^b y Jirotková, D.^b

^a Universidad de Granada (España), ^b Charles University (República Checa)

Resumen

En este estudio cualitativo exploramos la comprensión conceptual y semántica de las ecuaciones lineales básicas de alumnado de educación primaria recién iniciado en su resolución. Analizamos las respuestas individuales de 38 estudiantes de quinto curso de un colegio público checo a una tarea escrita consistente en justificar si la ecuación $5+2x=13$ describe algebraicamente cada una de 5 situaciones contextualizadas. Basándonos en la Teoría Fundamentada, proporcionamos un sistema de categorías de las estrategias empleadas por el alumnado para resolver la tarea. A partir del análisis de las mismas constatamos: (a) sus habilidades para interiorizar hechos matemáticos veraces sobre ecuaciones, (b) la variedad, no sistematización y adaptación de sus estrategias a cada situación, y (c) la dependencia de la estrategia de la forma en que la situación es presentada.

Palabras clave: pensamiento algebraico, ecuaciones, estrategias, educación primaria

Abstract

In this qualitative research we explore the conceptual and semantic understanding of basic linear equations of elementary school students recently introduced to solving equations. We analyse the individual answers of 38 grade five students in a Czech public primary school to a paper-based task consisting in justifying whether the equation $5+2x=13$ describes each one of 5 contextualized situations. Under a Grounded Theory approach, we provide a system of categories of the students' strategies. In particular, our findings show: (a) students' abilities to internalize true mathematical facts on equations, (b) the variety, no systematization and adaptation of their strategies to each situation, (c) the dependency of the strategy on the way in which the situation is presented.

Keywords: algebraic thinking, equations, strategies, primary education, early algebra

INTRODUCCIÓN

Desde hace algunos años, los currículos de matemáticas de educación primaria de numerosos países han comenzado a enriquecerse con actividades algebraicas, de acuerdo con las recomendaciones de organizaciones internacionales de Educación Matemática (NCTM, 2000) y las evidencias y conclusiones de múltiples trabajos de investigación sobre *early algebra* (Kaput, 1999). Este enriquecimiento algebraico de los planes de estudios en matemáticas tiene entre sus principales objetivos favorecer al alumnado su transición de la aritmética —clásico núcleo de las matemáticas elementales— al álgebra —típicamente abordada en la educación secundaria—. La familiarización con las nociones de variable y cantidad indeterminada o desconocida, el establecimiento de

¹ Investigación parcialmente financiada por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada. Esperanza López Centella agradece sinceramente el apoyo del grupo de investigación FQM-193 “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”, así como la cálida hospitalidad de los miembros del Katedra Matematiky a Didaktiky Matematiky de la Univerzita Karlova en Praga durante su visita en 2019 en la que parte de este estudio fue realizado.

López Centella, E., Slezáková, J. y Jirotková, D. (2021). ¿Esta ecuación describe esta situación? Explorando el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 393 – 400). Valencia: SEIEM.

relaciones de dependencia entre variables, el desarrollo del pensamiento funcional, la representación de la información en diferentes sistemas y su transferencia de uno a otro, la simbolización y el uso de notaciones significativas son parte de estas actividades algebraicas. Por incitar la práctica integrada de estas actividades destaca, en particular, el trabajo con ecuaciones.

En el contexto de una tarea que involucra una ecuación lineal y cinco situaciones contextualizadas presentada a estudiantes de quinto curso de primaria, los objetivos de esta investigación son:

- Explorar las habilidades de los estudiantes para decidir y razonar si la ecuación dada resulta una transcripción algebraica de cada situación particular;
- Describir las estrategias empleadas por los estudiantes para abordar esta cuestión.

ANTECEDENTES

Existen diversos trabajos de investigación en pensamiento algebraico centrados en el análisis epistemológico del trabajo escolar con ecuaciones y la exploración de las actuaciones de los estudiantes al trabajar con distintos tipos de ecuaciones, tratando de discernir de esta manera una demarcación entre la aritmética y el álgebra. Herscovics y Linchevski (1994) señalan la existencia de una *brecha cognitiva* entre la aritmética y el álgebra que caracterizan como *la incapacidad de los estudiantes para operar espontáneamente con o sobre una incógnita*. Gallardo (2000) afirma que hay un *corte didáctico* entre la aritmética y el álgebra descrito como un cambio de trabajar con una incógnita a un solo lado del signo igual de una ecuación (de forma que deshacer la operación en cuestión es suficiente para conocer su valor) a lidiar con ecuaciones donde la incógnita aparece en ambos lados y por tanto se ha de operar con ella. Filloy y Rojano (1989) sugieren los términos *ecuaciones aritméticas* y *ecuaciones algebraicas* para referirse a estos dos tipos de ecuaciones. Balacheff (2001) entiende que el cambio de una interpretación aritmética a una interpretación algebraica de la igualdad corresponde a un cambio de énfasis en la validación de la solución del problema: desde un *control pragmático*, donde la solución se valida aritméticamente con referencia al contexto inicial del problema; a un *control teórico*, donde la solución se valida con referencia a principios matemáticos. Con respecto a la formulación de ecuaciones a partir de información verbal, Herscovics (1989) reconoce las traducciones *sintácticas* y *semánticas* como procedimientos diferentes, refiriéndose las primeras a la traducción directa de palabras clave a símbolos, y las segundas al intento de expresar el significado del problema. Diversas investigaciones (Rosnick y Clement, 1980; Ventura-Campos, Ferrando, Arnau y González-Calero, 2018) reportan que la traducción sintáctica a menudo da lugar al llamado *error de inversión* entre los estudiantes, aunque algunos autores (MacGregor y Stacey, 1993) difieren en este punto. Hoch y Dreyfus (2004) afirman que cualquier expresión algebraica (por ejemplo, una ecuación) representa una estructura algebraica. Su “aparición o forma externa revela, o si es necesario, puede transformarse para revelar, un orden interno. El orden interno está determinado por las relaciones entre las cantidades y las operaciones que son las partes componentes de la estructura” (p. 50). En este trabajo nos referiremos a estas nociones como *estructura externa* y *estructura interna*. Asimismo, entendemos que una ecuación describe algebraicamente una situación si existe una relación de correspondencia entre los términos de la ecuación y un conjunto de elementos de la situación de forma que la igualdad establecida entre las relaciones de los términos de la ecuación también se cumple entre los correspondientes elementos de la situación.

Brizuela y Schliemann (2014) exploran cómo estudiantes de diez años pueden llegar a entender las reglas sintácticas del álgebra sobre la base de su comprensión de las relaciones entre cantidades en el trabajo con ecuaciones. Varios autores (Figueira-Sampaio, Ferreira dos Santos y Arantes Carrijo, 2009; Bonilla y Rojano, 2012; Otten, van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis, y Heinze; 2019) exploran el aprendizaje de la resolución de ecuaciones por escolares a través del uso de modelos concretos (balanza virtual, móvil colgante, etc.), reportando logros significativos en la transferencia de las acciones y estrategias (reestructuración, aislamiento y sustitución) del lenguaje de signos del

modelo a las acciones del sistema de signos del álgebra, así como una mejor comprensión de las propiedades de la igualdad. Nührenbörger y Schwarzkopf (2016) estudian los procesos de razonamiento matemático de las ecuaciones con escolares mediante estructuras de cálculo con términos faltantes, consiguiendo el desarrollo de un concepto flexible de la igualdad matemática.

MÉTODO

Realizamos una investigación cualitativa, descriptiva y exploratoria (Erickson, 1986), basada en un experimento en el aula.

Participantes

En el estudio participaron 38 estudiantes (2 grupos de clase a cargo de la misma maestra) de 5º curso de educación primaria (10-11 años) de habilidades mixtas en Matemáticas de un colegio público en Praga. Aunque las ecuaciones se incluyen en el 2º ciclo (del 6º al 9º curso) de la educación primaria checa (VÚP, 2017, p. 34), la maestra había iniciado al alumnado participante en la formulación y resolución de ecuaciones lineales simples. Su método de enseñanza estaba parcialmente inspirado en el Método Hejný (Hejný, 2012), adoptado por el 20% de las escuelas checas. El alumnado no tenía experiencia previa en actividades como la utilizada en este estudio.

Diseño de la tarea

De acuerdo con nuestros objetivos de investigación, diseñamos y presentamos a los estudiantes la tarea de la Figura 1. Las hojas de trabajo para ellos fueron redactadas en checo, su lengua materna, en la que también escribieron sus respuestas.

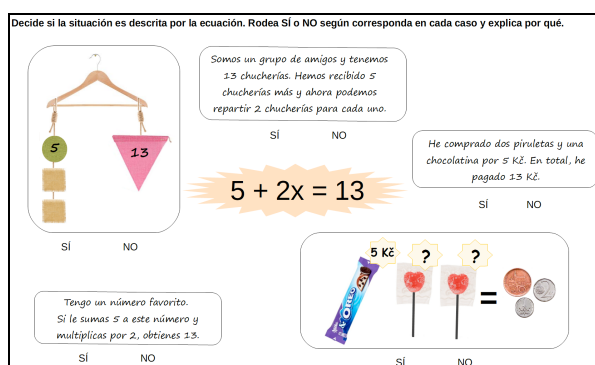


Figura 1. Versión en castellano de la hoja de trabajo presentada a los estudiantes

La Tabla 1 especifica las variables y características de la tarea consideradas en su diseño. En las cinco situaciones contextualizadas (etiquetadas según el sentido horario en la hoja de trabajo), se encuentran explícita o implícitamente en juego los mismos números (2, 5 y 13), pero ni las relaciones entre ellos ni el orden en que aparecen son iguales en todas las situaciones.

Tabla 1: Características de las situaciones de la tarea. *Ecuación racional

	Amigos	Piruletas	Monedas	Número	Peso
Representación	Verbal	Verbal	Pictórica	Verbal	Pictórica
Incógnita	Número de amigos	Precio de piruleta	Precio de piruleta	Número favorito	Peso del cuadrado
Orden aparición	13, 5, 2	2, 5, 13	5, 1,1, 13	5, 2, 13	5, 1,1, 13
Posible ecuación	$(13+5)/x=2^*$	$2x+5=13$	$5+x+x=13$	$(x+5)2=13$	$5+x+x=13$
¿Descrita?	No	Sí	Sí	No	Sí

Recogida y análisis de datos

El experimento y la recogida de datos fueron llevados a cabo en una sesión durante el tiempo habitual de clase de Matemáticas de los grupos participantes. Las hojas de trabajo fueron

administradas y entregadas a los estudiantes por la maestra con la firme instrucción de realizar la tarea individualmente y de escribir sus explicaciones con bolígrafo en la propia hoja y su reverso si era necesario. Durante su trabajo, los estudiantes no recibieron ninguna información sobre la corrección de sus respuestas o la idoneidad de sus estrategias. Al finalizar, las hojas de trabajo fueron entregadas al equipo investigador y constituyen los datos de esta investigación.

En primer lugar, consideramos como unidades de análisis las respuestas escritas de los estudiantes a las diferentes cuestiones de la tarea: selección de sí/no y explicación para cada situación presentada. En segundo lugar, transcribimos todas las respuestas y las traducimos del checo al inglés. Para garantizar el anonimato de los estudiantes asignamos a cada uno una etiqueta: S_i donde $i = 1, \dots, 38$. En tercer lugar, revisamos a fondo estos datos y los categorizamos, nombramos y describimos siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Con arreglo a nuestros objetivos, establecemos un sistema de categorías (de elaboración propia) del foco de actuación de los estudiantes y de sus estrategias, como se muestra a continuación.

Foco de actuación

- Resolución. Ignorando la ecuación dada, el estudiante intenta encontrar una solución para cada situación. Si la encuentra, rodea “Sí”. De lo contrario, rodea “No”.
- Discriminación. Teniendo en cuenta la ecuación dada, el estudiante decide, por medio de una o más estrategias, si esta describe algebraicamente cada situación. Rodea la opción según el caso.

Estrategias

- Identificación. El estudiante establece una correspondencia uno a uno entre los elementos contextuales de la situación y los elementos algebraicos de la ecuación dada.
- Resolución de ecuaciones. ▸ Operacional. El estudiante sigue el proceso estándar de resolución de la ecuación. ▸ Prueba y error. El estudiante asigna un valor a la incógnita y comprueba si la igualdad se satisface, repitiendo el proceso hasta encontrar una solución o deteniéndose después de varios intentos. ▸ Memoria y cálculo mental. El estudiante no hace anotaciones sobre su proceso de resolución, utilizando su propio registro de hechos numéricos y el cálculo mental.
- Divisibilidad. Discute la existencia de soluciones basándose en argumentos de divisibilidad.
- Comprobación de la solución. El estudiante comprueba si la solución de la ecuación dada es también una solución para la situación en cuestión.
- Comparación de ecuaciones. El estudiante formula una ecuación para la situación en cuestión y la compara, sin resolverla, con la ecuación dada.
- Comparación de soluciones. El estudiante formula una ecuación para la situación en cuestión y la resuelve, comparando su solución con la solución de la ecuación dada.
- Analogía. El estudiante reconoce la situación en cuestión como análoga a otra, copiando la respuesta provista en esta.
- Comparación de números. El estudiante compara los datos numéricos que aparecen en el enunciado/imagen de la situación en cuestión con los de la ecuación dada.

RESULTADOS

Foco de actuación

La Tabla 2 refleja la elevada participación de los estudiantes en la tarea (186 respuestas provistas de 190 potenciales). Más de la mitad de los estudiantes (20 de 38) centró su foco de actuación en la discriminación, de acuerdo con lo solicitado por la tarea, mientras que el resto de estudiantes (18) lo centró en la resolución. Restringiéndonos a los primeros, son notables las altas tasas de respuestas

correctas registradas (19, 19, 18, 17 y 17). Cabe destacar que hubo quienes deliberadamente rodearon “Sí” y “No” para la misma situación. Este es el caso de S₁₁ para la situación de Peso:

S₁₁: Sí, ya que $5+4 = 9+4 = 13$. No, ya que $5+?? = 15$ [escribe un número 5 sobre cada signo de interrogación y una flecha desde cada 5 hasta cada signo].

En virtud de su respuesta, S₁₁ obvia que el equilibrio de la percha equivale a la igualdad de las cantidades colgadas a sus lados y que, por tanto, el valor numérico de cada cuadrado *debe ser 4* (frente a *podría ser 4*). Este mismo estudiante discute de manera similar la situación de Monedas:

S₁₁: Sí, $5+2x = 13 \mid -5, 2x = 8 \mid : 2, 1x = 4$ [escribe 4 junto a cada signo de interrogación de la etiqueta del precio de cada piruleta]. No, porque el precio de la piruleta podría ser de 4,50.

El estudiante percibe la solución (4) de la ecuación lineal como una posibilidad (ya que también “podría ser 4.50”) en lugar de como el único valor que satisface la igualdad. La respuesta de S₃₇ (centrada en resolución) a la situación de Amigos también ilustra este hecho:

S₃₇: Sí: ¿cuántas personas había allí? 9 personas. No: de 1 a 8 personas.

Por otro lado, la ausencia de una pregunta explícita en los enunciados supuso un obstáculo para algunos estudiantes en la identificación de la incógnita. Este es el caso de S₁₃ en Amigos:

S₁₃: No tenemos incógnitas. No es una tarea, porque no hay preguntas que responder (todo es información).

El orden de las operaciones potencialmente importa. Resulta interesante analizar la única respuesta “Sí” (restringiendo a la discriminación como foco de actuación) en la situación de Número:

S₁₇: $5+2x = 13, 5+2x = 13 \mid -5, 2x = 8 \mid : 2, x = 4$ [resuelve la ecuación dada]. Si sumas 5 y multiplicas 2x sale 13. $13-5 = 8, 8:2 = 4$.

La estudiante resuelve la ecuación dada (obteniendo $x=4$). Para encontrar el número favorito, intenta deshacer las operaciones que, aplicadas a este número, dan 13. Reemplaza la suma por la resta y la multiplicación por la división, pero no invierte el orden de aplicación de las operaciones.

Tabla 2. Número total de respuestas de cada tipo

		Amigos	Piruletas	Monedas	Número	Peso
Resolución (18)	Sí	12	13	14	4	10
	No	4	4	3	14	6
	Sí y No	2	1	1	0	1
	Sin respuesta	0	0	0	0	1
Discriminación (20)	Sí	0	19	18	1	17
	No	19	1	0	17	2
	Sí y No	0	0	1	1	1
	Sin respuesta	1	0	1	1	0

Estrategias

La [Figura 2](#) muestra algunos ejemplos del uso de las principales estrategias identificadas en nuestro análisis de los datos. La Tabla 3 recoge las frecuencias de uso de cada estrategia de los estudiantes que centraron sus actuaciones en la discriminación (20), según lo solicitado por la tarea. Tal y como revela el número total de estrategias utilizadas en cada situación (superior a 20 en todos los casos), los estudiantes a menudo involucraron más de una estrategia en una misma respuesta. Además, existen diferencias notables en la frecuencia de uso de cada estrategia dependiendo del sistema de representación empleado para cada situación. En situaciones presentadas verbalmente, la comparación de ecuaciones junto con la comparación de soluciones y la resolución de ecuaciones fueron las estrategias más utilizadas, mientras que en situaciones presentadas pictóricamente las estrategias más frecuentes fueron la analogía y la comprobación de soluciones. En la situación de

Amigos (donde la incógnita es el número de amigos), algunos estudiantes malinterpretaron el papel del número de chucherías, comparándolo o relacionándolo con la solución (4) de la ecuación dada:

- S₁₈: $5 + \text{dos } x = \text{trece} \rightarrow x = 4, 13-5 = 8, 8:2 = 4$ [resuelve la ecuación dada]. No. Todos tendrían que obtener 4 chucherías.
- S₈: No. Esta ecuación muestra que un hombre conseguiría 4 chucherías [refiriéndose a la solución de la ecuación dada].

En la misma situación de Amigos, las respuestas de algunos estudiantes revelan cuán importante fue para ellos la estructura externa y los datos numéricos, obviando las relaciones internas:

- S₅: No. No funcionará porque debería haber 13 de alguna cosa.
- S₃₃: No. $13+5 = 18$. Esta tarea no funciona porque salen 18 chucherías, pero necesitamos 13 chucherías en total.
- S₂₃: Sí, porque 1,2 [refiriéndose a las situaciones de Amigos y Piruletas] son iguales porque los números son iguales.

En contraste, otros estudiantes refieren a propiedades matemáticas al comparar ecuaciones. En la situación de Piruletas, S₁₃ alude a la propiedad conmutativa de la suma:

- S₁₃: Sí. Esta ecuación sería $2x+5 = 13$, pero podemos cambiar 5 y $2x$ [comparándola con la ecuación $5+2x = 13$ dada en la tarea].

La interpretación y la necesidad de desambiguación de los enunciados también jugaron un papel en el desempeño de los estudiantes. Para la misma situación, S₁₀ justifica así su respuesta negativa:

- S₁₀: Yo digo que no, porque dice “dos piruletas y chocolate idénticos por 5 Kc”, así que todo lo escrito es “por 5 Kc” y luego el total cuesta 13 Kc. Es una tarea ilógica. “Mi elección”.

En la situación Peso, S₃₀ no interpreta que los números asignados a los cuadrados deban ser iguales:

- S₃₀: Sí, porque los dos números debajo de 5 pueden ser de cualquier manera, así que podría haber 2 veces 4, o 5 y 3, etc.

También destaca el uso de la misma letra para simbolizar diferentes cantidades. Es el caso de este mismo estudiante en su intento de traducción sintáctica del enunciado de Número:

- S₃₀: No, porque sería: $x+5 = x$, $x \cdot 2 = 13$ pero no es: $5+2x = 13$ y tampoco pasa que $x \cdot 2 = 13$ ya que 13 no es un divisor de dos. [En su explicación intercambia “múltiplo” por “divisor”].

Tabla 3. Frecuencias de las estrategias centradas en discriminación

	Amigos	Piruletas	Monedas	Número	Peso
Identificación	0	2	2	0	3
Resolución de la ecuación	6	6	6	4	4
Operacional	6	3	6	3	4
Ensayo y error	0	0	0	1	0
Cálculo mental	0	3	0	0	0
Divisibilidad	0	0	0	7	0
Comprobación de la solución	0	0	6	1	6
Comparación de ecuaciones	6	6	1	6	3
Comparación de soluciones	6	7	3	5	3
Analogía	2	2	9	0	4
Comparación de números	2	0	0	0	0
Total	22	23	27	23	23

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo exploramos las habilidades de los estudiantes de primaria para reconocer si una ecuación lineal describe algebraicamente diferentes situaciones contextualizadas. Nuestro estudio contribuye al conocimiento de las estrategias individuales que estudiantes de quinto curso de educación primaria emplean para razonar esta cuestión. Destacamos la gran variedad de estrategias empleadas por los estudiantes para hacer frente a esta tarea, así como las diferentes frecuencias del uso de las estrategias en función del sistema de representación de las situaciones. Ante situaciones presentadas verbalmente, estos tendieron a formular una ecuación basada en la traducción sintáctica y semántica del enunciado, para a continuación compararla con la ecuación dada. En cambio, ante situaciones presentadas pictóricamente, la tendencia fue recurrir a una analogía entre la situación en cuestión y otra situación de la tarea, proporcionando entonces la misma respuesta provista en la situación análoga. Alternativamente, en este caso, también prefirieron verificar si la solución de la ecuación dada era una solución para la situación en cuestión. Este resultado puede ser utilizado con fines didácticos. Cabe resaltar que varios estudiantes utilizaron más de una estrategia para justificar sus respuestas y que no sistematizaron sus estrategias, sino que las adaptaron a cada situación. Esto es ilustrado por el uso de argumentos de divisibilidad para discutir la situación de Número.

Las actuaciones de los estudiantes evidencian su capacidad para interiorizar verdades matemáticas sobre las ecuaciones sobre las que no habían sido explícitamente instruidos. En particular, tras el uso de las estrategias de comprobación y comparación de las soluciones están los siguientes hechos, conectados a la estructura interna de las ecuaciones: (a) Si la solución de una ecuación lineal es una solución para otra ecuación lineal, entonces estas dos ecuaciones son equivalentes; (b) si dos ecuaciones lineales tienen la misma solución, entonces son equivalentes. Esto implica el uso, consciente o no, de la unicidad de solución de las ecuaciones lineales. En contraste, la mayoría de los estudiantes que usaron la comparación de ecuaciones basaron su estrategia exclusivamente en la estructura externa de las ecuaciones. Aunque esto no les impidió obtener respuestas correctas en esta tarea, esta no es una práctica segura, ya que dos ecuaciones equivalentes pueden tener estructuras externas diferentes (e.g. $2x+5=13$ y $4x+23=2x+31$). No obstante, hubo quienes refirieron a propiedades matemáticas (como la conmutatividad de la suma) en su justificación bajo el uso de esta misma estrategia. Otra práctica que sobresale en el desempeño de los estudiantes es la frecuente revisión matemática de sus respuestas (e.g. S_{18} : 1 piruleta cuesta 4 Kc, $13-5=8$, $8:2=4$, $4+4+5$, $8+5=13$). Esta validación fue pragmática (Balacheff, 2001) la mayoría de las veces, basada en la aritmética, aunque en ocasiones también incluyó apreciaciones teóricas, basada en reglas matemáticas (ver S_{13}). Con respecto al uso de letras simbólicas, a pesar de que buena parte de los estudiantes resolvió la ecuación dada en la tarea siguiendo un proceso de resolución estándar operando con la “x”, a menudo estos mismos estudiantes obtuvieron el valor de la desconocida en algunas situaciones por métodos puramente aritméticos, sin introducir ningún símbolo para nombrarla ni operar con ella. Así, incluso cuando habían sido iniciados en el uso de estas notaciones algebraicas, todavía no estaban completamente integradas en la base de su lenguaje matemático o no sintieron la necesidad de usarlas en algunos contextos. También se observa el uso del mismo literal para representar distintas cantidades en una misma respuesta (Ayala-Altamirano y Molina, 2018). Con base en nuestros resultados y hallazgos concluimos, en consonancia con otras investigaciones (e.g., Brizuela y Schliemann, 2004), que los estudiantes de este nivel educativo están preparados para abordar actividades y tareas algebraicas que involucren implícita o explícitamente ecuaciones, sirviendo esto para estimular y enriquecer su pensamiento matemático.

Referencias

- Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2018). Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de tercero de primaria: El caso de la variable dependiente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñoz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 141-150). Gijón: SEIEM.

- Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic versus Algebra, the core of a didactical dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell and R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 249-260).
- Bonilla, M., Rojano, T. (2012). Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 145 - 152). Jaén: SEIEM.
- Brizuela, B. M., y Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations, *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33-40.
- Corbin, J., y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13(1), 3-21.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan.
- Figueira-Sampaio, A. S., Ferreira dos Santos, E. E., y Arantes Carrijo, G. (2009). A constructivist computational tool to assist in learning primary school mathematical equations. *Computers and Education* 53, 484-492.
- Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 2, 19-25.
- Hoch, M., y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the PME*, 3, pp. 49-56.
- Gallardo, A. (2000). Historical-epistemological analysis in mathematics education: Two works in didactics of algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 121-139). Dordrecht: KAP.
- Hejný, M. (2012). Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis scholae*, 6(2), 41-55.
- Hercovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, 60-86. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Herscovics, N., y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics* 27(1), 59-78.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fenema and T. A. Romberg (Eds.), *Mathematical classrooms that promote understanding*, (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- MacGregor, M., y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations, *Journal of Mathematical Education*, 24(3), 217-232.
- NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Nührenbörger, M., y Schwarzkopf, R. (2016). Processes of mathematical reasoning of equations in primary mathematics lessons. En N. Vondrová (Ed.), *Proceedings of the 9th CERME* (pp. 316-323). Prague.
- Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., y Heinze, A. (2019). Developing algebraic reasoning in primary school using a hanging mobile as a learning supportive tool, *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 615-663.
- Rosnick, P., y Clement, R. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 3(1), 3-27.
- Ventura-Campos, N., Ferrando, L. Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2018). Cambios neuronales durante la resolución de problemas verbales con error de inversión. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 668). Gijón: SEIEM.
- Výzkumný ústav pedagogický v Praze [Research Institute of Education in Prague] (2017). The Framework Educational Programme for Basic Education. Prague.