

GESTIÓN DE NORMAS QUE REGULAN EL PASO DE LA CONJETURA AL TEOREMA EN UN CURSO DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Management of the norms governing the transition from conjecture to theorem in a course on the geometry of space

Molina, O.^a, Font, V.^b, Pino-Fan, L.^c

^aUniversidad Pedagógica Nacional (Colombia), ^bUniversidad de Barcelona (España), ^cUniversidad de Los Lagos (Chile)

Resumen

Nos preguntamos: ¿cómo el profesor promueve la instalación de normas que regularon el proceso mediante el cual una “conjetura se convierte en teorema” en un curso de geometría llevado a cabo en un aula de indagación basada en la argumentación? Usando herramientas del Enfoque Ontosemiótico y el Modelo de Toulmin para la argumentación, analizamos sesiones de clase en las que estudiantes abordaron problemas de conjeturación y demostraron conjeturas, y el profesor dirigió puestas en común. Describimos acciones y procedimientos recurrentes que implican el uso de argumentos abductivos o analógicos, y que apuntan a la generación y cumplimiento de normas que regulan el proceso en el que ciertas conjeturas se convierten en teoremas. Describimos también acciones de gestión del profesor para promover tales acciones y procedimientos.

Palabras clave: *normas, procedimientos y acciones que involucran argumentos informales, acciones de gestión, proceso “conjetura se convierte en teorema”, geometría 3D*

Abstract

In this paper, we asked: How did the teacher encourage the instauration of norms about statement-becomes-theorem process in geometry course conducted in an argumentation - based inquiry classroom? Using elements of the didactical analysis proposed by Onto-Semiotic Approach (OSA) and Toulmin’s Model for argumentation, we analyze episodes of different class sessions when student addressed a conjecturing-problem and teacher managed whole class activities. Recurrence actions and procedures that involve informal arguments (abductive, analogical) and aiming at the fulfilment of certain norms relative to statement-becomes-theorem process are presented. Teacher’s management actions to promote such actions and procedures are described.

Keywords: *norms, actions and procedures that involve informal arguments, management actions, statement-becomes-theorem process, 3D geometry*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

En nuestro estudio, grupos de estudiantes abordan problemas de conjeturación en los que deben usar un Entorno de la Geometría Dinámica (EGD). Este tipo de problemas pide explícitamente establecer una conjetura que exprese las relaciones de dependencia entre los elementos o propiedades de los objetos involucrados en la situación luego de realizar exploraciones (Baccaglioni-Frank & Mariotti, 2010). El desarrollo de prácticas en aulas con estas características requiere que la actividad se focalice en la producción de los estudiantes, y que profesores y estudiantes construyan colectivamente normas (sociales y sociomatemáticas) que regulen y apoyen estas prácticas (Yackel & Cobb, 1996). Ejemplos de normas sociales son: (i) escuchar activamente, tomar riesgos intelectuales (es decir, compartir ideas incompletas) y construir sobre las ideas de los demás (Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2015); (ii) dar solución a una tarea es responsabilidad de los estudiantes; la autoría del descubrimiento debe ser mencionada por el profesor o los compañeros para motivar a los estudian-

tes (Assis, Godino, & Frade, 2012). Ejemplos de normas sociomatemáticas son: (i) investigar en matemáticas implica resolver problemas de manera creativa; los argumentos deben basarse en propiedades de objetos matemáticos (Partanen & Kaasila, 2014); las tareas sugeridas por el profesor deben conducir a la exploración o a la formulación de conjeturas (Assis, Godino, & Frade, 2012).

Son menos usuales estudios sobre la gestión que ejecuta un profesor para promover la instalación de normas. En sus estudios, Yackel y colegas precisan que la gestión del profesor consiste en guiar o redirigir las conversaciones entre los estudiantes con preguntas que susciten argumentos y proporcionar elementos de un argumento que se omiten o están implícitos –datos o garantías– (Yackel & Cobb, 1996; Yackel, 2002). Makar, Bakker, & Ben-Zvi (2015) son más precisos, indicando que las estrategias del profesor incluyen: usar carteles mostrando expectativas, recordar las normas frecuentemente, resaltar acciones ejemplares de los estudiantes, modelar expectativas con sus actos, y proveer tarea que promuevan prácticas que deben ser reguladas por las normas.

Aunque varios estudios sobre aulas de este tipo coinciden en ciertas normas, no hay muchos estudios que ilustren prácticas o procedimientos específicos que un profesor se propone instalar durante el proceso en que una conjetura se convierte en teorema en cursos de geometría 3D, más aún en contextos universitarios (Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017). La información recogida para el estudio permite inferir que: (i) existen prácticas y procedimientos concretos que apuntan al establecimiento de normas, (ii) la profesora lleva a cabo acciones deliberadas de gestión para promoverlas, y (iii) argumentos no deductivos (analógicos o abductivos) está relacionados con estos aspectos.

La pregunta de investigación que guía el estudio es: ¿cómo el profesor promueve la instalación de normas que regularon el proceso mediante el cual una “conjetura se convierte en teorema” en un curso de geometría llevado a cabo en un aula de indagación basada en la argumentación? Consideramos que la instalación de una norma se promueve si se especifican y ejecutan con frecuencia algunas prácticas y procedimientos destinados al cumplimiento de la norma. Por lo tanto, dicha pregunta puede especificarse en las siguientes: ¿qué prácticas y procedimientos recurrentes fomentó el profesor para promover el cumplimiento de estas normas y cómo lo hizo? ¿Cómo se relacionaron diferentes tipos de argumentos con las posibles acciones recurrentes? Abordarlas, nos permitió proporcionar aspectos (procedimientos y acciones de gestión) sobre normas de un aula de investigación basada en la argumentación; en este sentido, ilustrar nuevos elementos sobre *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos* (Font, Breda, Giacomone, & Godino, 2018) al respecto.

MARCO DE REFERENCIA

Siguiendo el Enfoque Ontosemiótico (EOS), asumimos que una *práctica matemática* es un conjunto de ejecuciones (acciones) para resolver problemas matemáticos, y comunicar, validar o generalizar soluciones. La resolución de un problema requiere una actividad matemática caracterizada por objetos y procesos (Godino, Batanero y Font, 2019). En el presente trabajo nos interesan dos tipos de objetos, los procedimientos (conjunto de pasos a seguir -si se quiere, formulación verbal u oral de ese conjunto de pasos-) y los argumentos (nuestra postura al respecto se presentará más adelante), particularmente cuando emergen del proceso (entendido como secuencia de prácticas) en el que una conjetura se convierte en teorema. La conceptualización de los constructos *proceso*, *práctica* y *procedimiento* implica un vínculo natural entre estos: un *proceso* es un conjunto de prácticas y una *práctica* es un conjunto de ejecuciones (acciones) cuando se sigue un *procedimiento*; una acción es la ejecución de un paso del procedimiento. En algunas aulas, a veces se formula un procedimiento estandarizado y emerge la práctica asociada (los pasos son ejecutados); en otras, la práctica emerge sin que el procedimiento asociado haya sido formulado, aun cuando estas hayan sido recurrentes.

Tanto las prácticas matemáticas como el proceso de instrucción están regulados por normas (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009): Normas epistémicas (o sociomatemáticas, regulan las prácticas y contenidos matemáticos en correspondencia con el discurso matemático que es posible desarrollar en una institución), normas mediacionales (regulan los recursos -temporales o artefactos-

utilizados en las prácticas), normas interaccionales (o sociales, regulan los modos de interacción entre las personas involucradas en la práctica o proceso instructivo), normas ecológicas (aspectos externos -directrices curriculares, políticas educativas- que condicionan prácticas en el aula). Es necesario aclarar que asumimos que las normas regulan una práctica cuando las acciones que la constituyen apuntan al cumplimiento de esas normas. Nos centramos en los tipos de normas que regulan las prácticas en el aula que implican un proceso de enunciado convertido en teorema; para este caso, las prácticas, los procedimientos y otras normas, surgen en dos situaciones concretas en las que se produce este proceso: cuando se aborda un problema con el EGD y cuando se demuestra la conjetura enunciada como solución. En la Tabla 1 de la sección de Metodología se ofrecen ejemplos de normas tipificadas, las cuales regulan procedimientos que a su vez regulan prácticas.

Argumento y argumentación

Dado que nos proponemos ilustrar la forma en que diferentes tipos de argumentos se relacionan con asuntos normativos, es conveniente especificar una conceptualización al respecto. Existe un acuerdo en considerar la argumentación como un proceso llevado a cabo por un individuo o un grupo para convencer a otros de una posición adoptada (aceptación o rechazo) con respecto a una determinada aserción o acción (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016). El argumento es el producto de este proceso (Molina, Pino-Fan, & Font, 2019). Utilizamos el Modelo básico de Toulmin (Toulmin, 2003) para hacer operativa esta conceptualización en una situación específica (e.g., hacer una prueba o resolver un problema de conjeturación). En este modelo, un argumento incluye tres elementos: la afirmación del orador (A), el conjunto de datos (D) que respaldan la afirmación A, y la garantía (G) o la regla de inferencia, que relaciona los datos con la afirmación. El modelo es útil para especificar diferentes tipos de argumentos según la forma en que se relacionan los tres elementos (Pedemonte, 2007): La deducción es la inferencia de A a partir de un D y una G conocidos. La abducción es la inferencia de D a partir de un hecho observado A que permite aplicar una G evocada o descubierta que justifica el paso de D a A. La inducción es la inferencia de una G a partir de algunos casos de D en los que se observa un patrón de regularidad A. La analogía parte de dos dominios S (un dominio conocido) y O (un dominio menos conocido) que son comparables mediante la proposición p' es a q' como p es a q (G). Sean los datos (D): p, q en S y p', q' en O; p', q' respectivamente comparables con p, q y una relación entre p, q $[R(p, q)]$ válida en S. Entonces $[R(p', q')]$ puede inferirse como posiblemente válida en O (A). En la Figura 1 se muestran diagramas para cada tipo de argumento usando el Modelo de Toulmin. Los rectángulos de línea gruesa indican lo que se infiere; los de líneas discontinuas indican que la inferencia es probable.

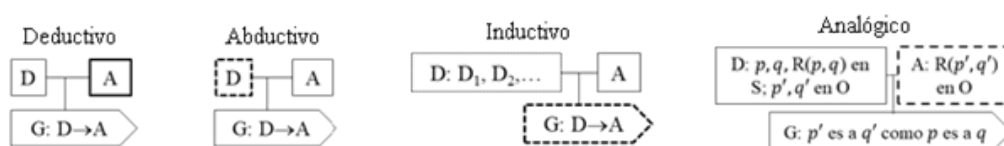


Figura 1. Diagramas para cada tipo de argumento

Con lo anterior, tenemos un contexto para conceptualizar sobre *teorema* y *demostración*. Un *teorema* es un conjunto de tres elementos: enunciado, demostración y sistema teórico (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997). Una *demostración* es un tipo de argumento, compuesto por uno o varios argumentos deductivos conectados lógicamente y cuyas garantías son elementos de un sistema teórico (Stylianides, Stylianides y Weber, 2017).

METODOLOGÍA

El estudio de caso se centra en un curso de geometría euclidiana en 2D y 3D que se imparte en un programa de formación de profesores en Colombia. Este curso fue seleccionado porque la profesora está particularmente interesada en promover en el aula la argumentación. Normas de este curso (características de aula de investigación basada en la argumentación) son: i) Se utilizan problemas de conjeturación para promover la actividad y el contenido matemático. (ii) Los alumnos deben abor-

dar los problemas en pequeños grupos (3-4 alumnos) utilizando Entornos de Geometría Dinámica –EGD– (Cabri 3D). Los grupos (10 en total, cada uno de tres estudiantes) siempre fueron constituidos por los mismos alumnos; esto les permitió la oportunidad de conocerse de tal manera que su comportamiento fue relativamente estable a lo largo del curso. (iii) Los estudiantes deben describir y compartir sus producciones. (iv) Los estudiantes deben argumentar las conjeturas propuestas como solución al problema. (v) El profesor es responsable de validar e institucionalizar producciones de los estudiantes luego de un proceso de discusión y decantación. Vale decir que la mayoría de los estudiantes tenían experiencia previa con aulas de estas características pues habían tomado el curso de Geometría 2D con la misma profesora.

Para la obtención de la información se utilizaron dos técnicas: la observación no participante (26 sesiones, cada una de dos horas) a fin de acercarse a la información en un ambiente natural (Kelly & Lesh, 2000) y entrevistas semiestructuradas a la profesora y estudiantes para completar información. La primera de estas técnicas se realizó con apoyo de tres cámaras de video (una dirigida a la profesora, otra que tomaba toda el aula, y una centrada en grupos cuya producción se consideraba relevante). Para este reporte se toman como datos la transcripción de cuatro episodios de tres sesiones diferentes de clase (descripciones breves de estos se presentan en la primera parte de la sección de resultados) y las respuestas de la profesora a la entrevista. Fueron escogidos por cuanto ilustran suficientemente cómo ciertas acciones de los estudiantes, no esperadas por la profesora, fueron legitimadas por ella y convertidas en prácticas recurrentes; todo como consecuencia de procurar cumplir con ciertas normas del curso. Los datos fueron analizados de forma descriptiva e interpretativa con base en los elementos del análisis didáctico propuesto por el EOS (Font, Planas, & Godino, 2010), con énfasis en los análisis normativo e interaccional, necesarios para identificar normas y la gestión del profesor. Respecto a esto último, adicionalmente se tuvieron en cuenta las acciones propuesta por Makar, Bakker, & Ben-Zvi (2015). El Modelo de Toulmin (Toulmin, 2003) se usó para tipificar argumentos de la actividad matemática que tomó lugar en los episodios.

Como ejemplo, la Tabla 1 presenta normas (y su correspondiente procedimiento) de la situación *resolver problemas* del proceso *conjetura se convierte en teorema*, que habrían sido instaladas en el curso anterior y que serán consideradas en este escrito (otras se presentan en la ponencia). Estas fueron mencionadas por la profesora en la primera entrevista. Lo clasificado como procedimiento fue explicitado así por la profesora, en correspondencia tácita con nuestra conceptualización.

Tabla 1. Ejemplos de normas y procedimiento del curso de Geometría 2D

Norma media-cional	N1: El EGD debe ser usado como un entorno de exploración que permita resolver problemas de conjeturación.
Norma epistémica	N2: La(s) solución(es) de los problemas abiertos de conjeturación debe(n) ser enunciada(s) como una proposición condicional (llamada conjetura).
Procedimiento asociado	
1. Identificar las condiciones y la pregunta dados en el enunciado del problema	
2. Usar el EGD para construir los objetos dados en las condiciones del problema.	
3. Usar el EGD para hacer exploraciones que permitan responder la pregunta.	
4. Formular conjeturas que expongan soluciones al problema.	
5. Verificar la solución realizando una construcción que corresponda al antecedente de la conjetura y constataando empíricamente que este conduce a su consecuente.	
6. Si la conjetura es incorrecta como resultado de la verificación repetir los pasos 3-5.	
7. Hacer un reporte escrito de las producciones (procedimiento de construcción, exploración, conjetura).	

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Cuatro episodios y una entrevista son los datos de este reporte. A continuación, estos son descritos:

Episodio 1. Sesión 16 de Clase: La profesora planteó un problema de congruencia de triángulos que puede ser abordado en la geometría 2D y 3D. Utilizamos la actividad de un grupo de estudiantes

(Armando, Juan, Valentín) como dato. Su producción ilustra acciones que especifican pasos del procedimiento presentado en la Tabla 1. El enunciado del problema es el siguiente: Dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ congruentes. ¿Es posible determinar un punto E tal que $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ son congruentes?

Episodio 2. Sesión 17 de Clase. Adriana (de otro grupo) y Armando compartieron sus soluciones. La profesora legitima sus acciones las cuales involucran argumentos abductivos y analógicos. Se institucionalizan las conjeturas-solución (Conjetura 1ⁱ: Dados $\overline{AB}, \overline{CD} \subset \alpha$, α un plano, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}} = \{E\}$, entonces $\triangle CDE \cong \triangle ABE$. Conjetura 2: Dados $\overline{AB}, \overline{CD}$ no coplanares, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}} = m$, y $E \in m$, entonces $\triangle CDE \cong \triangle ABE$).

Episodio 3. Sesión 17 de Clase. Las demostraciones de las conjeturas son elaboradas entre estudiantes y profesora. Ella legitima acciones que involucran argumentos abductivos y analógicos que contribuyen en el proceso de la elaboración de las demostraciones respectivas.

Episodio 4. Sesión 21 de Clase. La profesora planteó otro problema (Dados cuatro puntos no coplanares. ¿Es posible determinar un punto E para que sea equidistante de los puntos dados?). Su expectativa era que los estudiantes hicieran acciones como las de la sesión 17. Varios grupos lo hicieron.

Entrevista 2. Al final del curso, la profesora fue entrevistada. Para este reporte, nos centramos en asuntos ocurridos en las sesiones 16 y 17. Dos de las preguntas fueron: (i) ¿Por qué es importante el estudio del objeto "plano mediador"? y (ii) ¿Cuáles acciones de gestión realiza para ayudar a los estudiantes a desarrollar prácticas recurrentes que apunten al cumplimiento de normas como las identificadas en los episodios? El propósito de la pregunta (i) fue determinar si la profesora quiso incentivar una analogía mediante la comparación de "mediatriz" con "plano mediador"; el de la (ii) fue determinar su nivel de conciencia de las acciones de gestión.

A continuación, Ilustramos con detalle lo sucedido en los dos primeros episodios y la entrevista.

Episodio 1. Actividad matemática grupo Armando-Juan-Valentín

Armando aborda el problema en el dominio de Geometría 3D ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ alabeados). En correspondencia con la norma de *usar EGD*, le pide a Juan (quien está a cargo del manejo de Cabri 3D) construir el plano perpendicular a los $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ por su punto medio (objeto que no había sido introducido en el curso) y hacer la intersección de esos planos. Dice que él piensa que "un punto en la recta de intersección de esos planos podría equidistar de los extremos de los segmentos". En correspondencia con la norma de *reportar la producción*, Valentín hace un reporte con el procedimiento de construcción propuesto y una conjetura como la número 2. Este reporte fue entregado a la profesora.

Mientras los reportes eran entregados a la profesora y los grupos dejaban el salón, Valentín le pregunta a Armando cómo se le había ocurrido esa idea de solución. Armando dice que "[...] primero lo hice en el plano [$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ coplanares] y usé las mediatrices de los segmentos AC y BD ... que se intersecan en E ". En correspondencia con la norma del curso *proveer argumentos formales*, estos estudiantes producen dos argumentos deductivos para validar esta solución: Armando dice " E es equidistante [de A y C , y B y D] por [definición de] mediatriz" y Valentín dice: "Y entonces, nosotros tenemos los triángulos congruentes por [el teorema de congruencia] Lado-Lado-Lado". La Figura 1 muestra tales argumentos usando el Modelo de Toulmin.

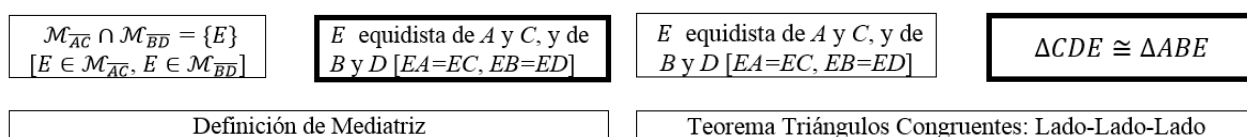


Figura 1. Argumentos deductivos para validar $\triangle CDE \cong \triangle ABE$

El primer autor de este reporte le replantea a Armando la pregunta hecha por Valentín, con el propósito de precisar porqué la ocurrencia de su idea. Él dijo:

Armando: Porque yo tomé el curso de Cálculo en Varias Variables y allí el profesor nos dijo que el plano es al espacio como la recta es al plano. Entonces, la idea de usar el plano perpendicular se me ocurrió... mmm... en lugar de usar mediatriz, usamos esos planos.

Considerando la respuesta de Armando, identificamos el uso de la analogía *el plano es al espacio como la recta al plano* para resolver el problema en geometría 3D. Basados en ella, el supone que el plano perpendicular al segmento por su punto medio (plano mediador) resuelve el problema en el 3D como la mediatriz lo resuelve en el 2D. Un argumento por analogía fue producido tácitamente (Figura 2), algo que la profesora no esperaba. Consideramos que la acción de Armando sugiere una complementación al paso 3 del procedimiento relativo a N1 y N2, a saber:

Acción 3.1: Considerar una analogía que relacione los dominios 2D y 3D para inferir una solución en el dominio 3D mediante un argumento analógico. Una solución en el dominio 2D es ya conocida. Los objetos análogos y la relación inferida en 3D harían parte de la conjetura.

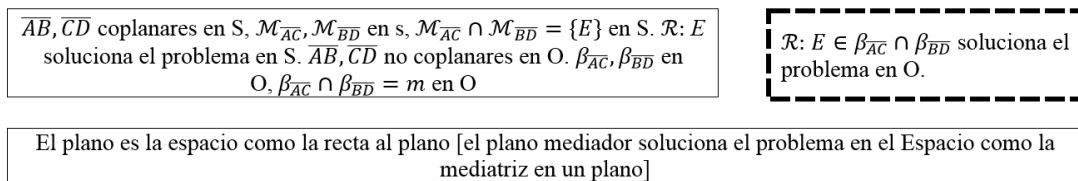


Figura 2. Argumento analógico para resolver el problema en el dominio de 3D

Episodios 2. Nuevas acciones son legitimadas

En la sesión 17, la profesora dirige la puesta en común sobre las soluciones propuestas; ya conocía su contenido pues las leyó previo al inicio de la clase. Pide a Adriana que exponga la producción de su grupo, la cual se corresponde con lo propuesto por Armando cuando los segmentos son coplanares. Enseguida, la profesora pide a un miembro del grupo de Armando que presente su solución; Armando toma el computador y proyecta a toda la clase su procedimiento; dice: “nuestra solución fue similar a la del grupo anterior [propuesta de Adriana] pero en el Espacio”. Al terminar su intervención, enfatiza que usó un objeto que no hacen parte del sistema teórico del curso (plano perpendicular a un segmento). Seguida a la intervención de Armando, la profesora comenta:

1. Prof. El problema está preguntado por la congruencia de triángulos. ¿Yo que haría? Tengo algunos criterios, busco construir ángulos o lados congruentes, por ejemplo. Ellos [grupo de Adriana] escogieron ese camino. Mejor dicho, el punto E debe generar segmentos congruentes... si busco segmentos congruentes, por ejemplo, si quiero que BE y DE sean congruentes, yo podría usar la mediatriz del segmento BD; igual con el segmento AC. Hemos insistido en esta estrategia de ir hacia atrás. Me sorprende que no la usen todos.
2. Prof. Esta solución [la propuesta de Armando] es exactamente la que ellos hicieron [señala al grupo de Adriana] pero en el Espacio... lo que es mediatriz en la solución del plano se convierte en un plano, con iguales características, en la solución de Armando... esa es una buena estrategia.

Con estas intervenciones, la profesora llevó a cabo acciones de gestión como las siguientes: (i) Pedir a los estudiantes exponer sus ideas para construir sobre ellas, reconociendo la autoría (al inicio de la sesión). (ii) Usar acciones de los estudiantes como ejemplares (intervención 2). (iii) Modelar expectativas con sus actos (intervención 1). Consideramos que estas acciones de gestión apuntaron a favorecer acciones que promueven las normas N1 y N2: Mediante la acción de gestión (ii), la profesora legitimó la Acción 3.1 emergida en el Episodio 1; mediante la acción de gestión (iii), ella explicitó una nueva acción asociada al paso 3 del procedimiento expuesto en la Tabla 1 (todo en el marco del abordaje de problemas que preguntan por condiciones suficientes para concluir una propiedad dada en el enunciado –como el Problema 1–):

Acción 3.2: Considerar un argumento abductivo cuya garantía pertenece al sistema teórico disponible, su aserción es la propiedad dada en el enunciado, y su inferencia (dato) es una condición rela-

cionada con las condiciones impuestas en el enunciado. Ese dato haría parte del antecedente de la conjetura. (La Figura 3 expone el argumento abductivo producido por la profesora para este caso].



Figura 3. Argumento abductivo para resolver el problema

Entrevista 2. Gestión de la profesora

La respuesta de la profesora a la pregunta (i) evidencia su interés por introducir el objeto *Plano Mediator* como una extensión “natural” [término empleado por ella] del objeto *Mediatriz*. En este sentido, lo que guio su actuar no fue cumplir con un currículo (norma ecológica) sino considerar amplitud de significados (norma epistémica). Pese a esto, ella no aludió explícitamente al uso de analogías para estudiar el objeto *Plano Mediator*. En lo que respecta a la segunda pregunta, ella explicitó las siguientes acciones de gestión que fomentan que ciertas acciones de los estudiantes sean recurrentes durante el proceso en el que una conjetura se convierte en el teorema: (i) Plantear problemas de conjeturación como metodología del curso; esto, dice ella “promueve la argumentación porque los estudiantes deben apoyar sus conjeturas y elaborar las demostraciones [...] usando abducción o inducción”. Y (ii) ilustrar (o modelar) el uso de tales argumentos cuando sea necesario. Vale decir que, aunque la profesora aludió a su acción de “evaluar las producciones de los estudiantes y tomar las interesantes como ejemplos”, no fue consciente de una acción que, de hecho, ella ejecutó: legitimar el uso de argumentos analógicos para resolver problemas en el dominio 3D.

Discusión y conclusiones

Respondimos las preguntas que orientaron el estudio ilustrando acciones recurrentes (acciones 3.1 y 3.2) que apuntan al cumplimiento de normas (Tabla 1) presentes en el proceso en el que una conjetura se convierte en teorema en un curso de Geometría 3D; mostramos cómo dichas acciones involucran argumentos abductivos o analógicos. Así mismo, ilustramos competencias (acciones de gestión) del profesor que promueven tales acciones (precisando la propuesta de Makar, Bakker, y Ben-Zvi, 2015). Este escenario nos permitió ratificar que la gestión de un aula cuyo objetivo es el desarrollo de la argumentación es compleja. Coincidimos con Yackel (2002), y Stylianides, Stylianides, y Weber (2017) en que ello implica considerar conocimientos profundos sobre las matemáticas y la demostración. Sin embargo, el estudio nos deja ver que esta idea puede ser complementada, precisando piezas del conocimiento didáctico-matemático y competencias que debe desarrollar un profesor. Para el caso reportado, las competencias de la profesora no provenían de la improvisación natural con la que a veces se actúa; más bien, fueron producto de su conocimiento sobre aspectos de la Educación Matemática; ella tenía conocimiento sobre (i) normas que deberían ser consideradas para generar un aula de indagación; (ii) tipos de argumentos informales (específicamente, los abductivos), y su papel para explorar y producir demostraciones, y (iii) el papel que el DGE y los tipos de problemas pueden tener en los procesos de exploración (por ejemplo, provocar la producción de argumentos que apoyen una conjetura). Este escenario le permitió tener una interpretación adecuada de acciones de estudiantes que no había contemplado (utilizar argumentos analógicos), pero que, por su riqueza, legitimó y quiso hacerlas recurrentes. En suma, el estudio nos ha provisto de un insumo más para destacar la importancia del conocimiento y las competencias que sobre asuntos normativos debe tener el profesor (Font, Breda, Giacomone, & Godino, 2018), en este caso para regular el proceso en que una conjetura se convierte en teorema.

Referencias

- Assis, A., Godino, J. D., & Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 171–198.

- Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15, 225–253.
- Brousseau, G. (2002). The Didactical Contract: The Teacher, the Student and the Milieu. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Mathematics Education Library* (Vol. 19). Dordrecht: Springer.
- Font, V., Breda, A., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García, & A. Bruno (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (págs. 23-38). Gijón: SEIEM.
- Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *for the learning of mathematics*, 39(1), 35-40.
- Kelly, A., & Lesh, R. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. doi:https://doi.org/10.4324/9781410602725
- Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. *ZDM*, 47(7), 1107-1120. doi:https://doi.org/10.1007/s11858-015-0732-1
- Mariotti, M., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen, *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, págs. 180-195). Lahti, Finland: PME.
- Molina, O., Pino-Fan, L., & Font, V. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(1), 93-116. doi:https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484
- Partanen, A., & Kaasila, R. (2014). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(4), 927-946. doi:https://doi.org/10.1007/s10763-014-9521-5
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41. doi:https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x
- Stylianides, A., Bieda, K., & Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En A. Guitérrez, G. Leder, & P. Boero, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 315-352). Rotterdam: Sense Publishers.
- Stylianides, G., Stylianides, A., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai, *First compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments* (Actualización de 1 ed.). Cambridge: Cambridge University Press. doi:https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005
- Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 423–440. doi:https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. doi:10.2307/749877

ⁱ Precisamos un asunto de notación: $\mathcal{M}_{\overline{XY}}$ indica mediatriz del $\overline{XY}$. $\beta_{\overline{XY}}$ indica plano mediador de $\overline{XY}$.