

UN AÑO DESPUÉS DE UN MÓDULO DE ENSEÑANZA: ANTICIPACIÓN DE RESPUESTAS DE PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES¹

One year after a teaching module: Anticipation of solving measurement division problems with fractions

Montero, E.^a, Callejo, M. L.^b y Valls, J.^b

^aEscuni Centro Universitario de Magisterio, ^bUniversidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo estudiantes para maestro de primaria (EPM), que han participado un año antes en un módulo de enseñanza, anticipan tres respuestas de niños de primaria que se encuentren en diferentes etapas de la progresión de estrategias de Empson y Levi (2011) para la resolución de problemas de división medida con fracciones. Los participantes fueron 41 EPM que se encuentran en 4º año del Grado en Maestro en Educación Primaria en Escuni, centro universitario de magisterio, cuya metodología de trabajo está basada en favorecer procesos de autorregulación del aprendizaje. Los resultados muestran que el 78% de los EPM, un año después, han sido capaces de anticipar tres respuestas de al menos dos etapas de la progresión de estrategias. Posiblemente las características del diseño del módulo de enseñanza basado en procesos de autorregulación del aprendizaje han favorecido estos resultados.

Palabras clave: anticipación, progresión de estrategias, autorregulación del aprendizaje, aprendizaje profundo

Abstract

The aim of this research is to characterize how prospective primary teachers (PPT), who have participated in a teaching module a year earlier, anticipate three responses from elementary school children who are at different stages of a progression of solving strategies by Empson and Levi (2011) for measurement division problems with fractions. The participants were 41 PPT in 4th year of their Education Teaching Degree in Escuni, a University Centre where its work and organization methodology is based on promoting self-regulated learning. The results show that 78% of PPT, a year later, have been able to anticipate three responses corresponding to at least two stages of the progression of solving strategies. The design features of the teaching module based on self-regulated learning processes have possibly favored these results.

Keywords: anticipation, progression of strategies, self-regulated learning, deep learning

INTRODUCCIÓN

Anticipar, interpretar las respuestas de los estudiantes y tomar decisiones ante dichas respuestas (mirada profesional, Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010) forman parte de las tareas profesionales de los docentes. En la planificación de una actividad es conveniente que los docentes anticipen las respuestas que podrían dar los estudiantes, lo cual les permitiría planificar las preguntas que podrían hacer y qué variables didácticas de la tarea podrían modificar para superar sus dificultades o para plantearles situaciones más complejas. La importancia de anticipar ha sido puesta de manifiesto en el marco del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames, & Phelps, 2008) y de las

¹ La participación de M. Luz Callejo y Julia Valls en esta investigación se realiza a través del proyecto EDU2017-87411-R, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Gobierno de España.

Montero, E., Callejo, M. L. y Valls, J. (2021). Un año después de un módulo de enseñanza: anticipación de respuestas de problemas de división medida con fracciones. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 433 – 440). Valencia: SEIEM.

competencias que debe poner en juego el profesorado para tener en cuenta las ideas de los estudiantes (Smith & Stein, 2011). Por tanto, en la formación de futuros maestros la anticipación debe incluirse como una tarea profesional integrada en la planificación de la enseñanza.

Wilson, Sztajn, Edgington y Myers (2015) han mostrado cómo una progresión de aprendizaje sobre la equipartición ayudó a profesores en ejercicio a anticipar respuestas de estudiantes atendiendo a los niveles de competencia indicados en la progresión. De igual manera, Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo (2018) constataron que identificar la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango como avance conceptual (Key Developmental Understanding –KDU–, Simon, 2006) en la progresión de aprendizaje sobre el límite de una función en un punto, ayudó a los estudiantes para profesor de Secundaria a anticipar respuestas y a apoyar sus propuestas de enseñanza. Las progresiones de aprendizaje son “formas sucesivamente más sofisticadas de pensamiento sobre un tópico que pueden seguir los niños mientras aprenden e investigan un determinado tópico” (National Research Council, 2007, p. 214).

Son pocas las investigaciones realizadas en el ámbito de la formación inicial en el contexto del desarrollo de la mirada profesional que se hayan centrado en la forma en la que los futuros docentes anticipan posibles respuestas de los estudiantes (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Llinares, Fernández, & Sánchez-Matamoros, 2016; Montero & Callejo, 2019; Stahnke, Schueler, & Roesken-Winter, 2016), como una tarea profesional integrada en la planificación de la enseñanza.

La puesta en práctica de programas para la formación de maestros que faciliten el desarrollo de un aprendizaje profundo puede ser efectiva a la hora de formar EPM con un tipo de capacidades en la resolución de problemas que sostengan su autoeficacia en la tarea docente (Gordon & Debus, 2002). La autorregulación del aprendizaje se ha mostrado como una de las mejores variables predictoras del rendimiento académico (Hernández & Camargo, 2017), por lo que el desarrollo de módulos de enseñanza basados en fomentar procesos de autorregulación (Bandura, 1997; Zimmerman, 1998) y el aprendizaje profundo pueden favorecer que las competencias profesionales desarrolladas por los EPM permanezcan un año después del periodo de instrucción.

En este contexto el objetivo de esta investigación es caracterizar cómo EPM, que han participado un año antes en un módulo de enseñanza, anticipan tres respuestas de niños de primaria que se encuentren en diferentes etapas de la progresión de estrategias de problemas de división medida con fracciones.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación se ha tomado como marco teórico la progresión de aprendizaje de estrategias de problemas de grupos múltiples de división-medida con fracciones de Empson y Levi (2011) (Figura 1).

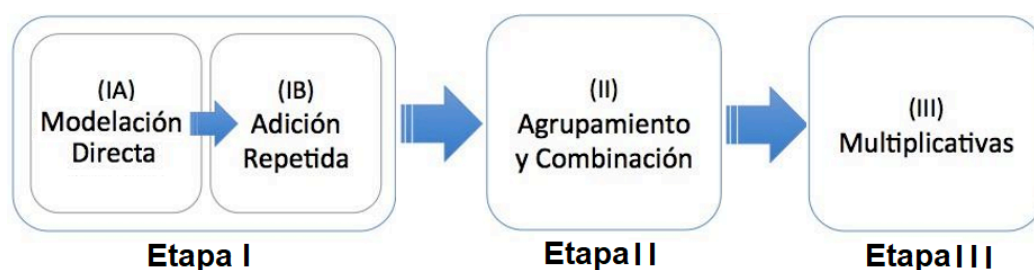


Figura 1. Progresión de estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida (Empson y Levi, 2011, p. 62)

Esta progresión consta de tres etapas, en las dos primeras se utilizan estrategias aditivas y en la tercera estrategias multiplicativas:

Etapas I: Modelado directo y adición repetida. Se representa cada unidad fraccionaria individualmente. En el modelado directo los niños representan de forma icónica todas las cantidades en el problema y cuentan o suman (y en ocasiones restan) hasta llegar a la respuesta final. Por ejemplo, en el problema (Figura 2):

Estamos preparando brochetas de fruta y hemos decidido colocar $\frac{3}{8}$ de naranja en cada brocheta. Si tenemos 12 naranjas, ¿cuántas brochetas de fruta podremos hacer?

Una forma de implementar esta estrategia es dibujar las 12 naranjas, dividir cada una en octavos consiguiendo 96 octavos. A continuación, se hacen grupos de $\frac{3}{8}$ que se usan en cada brocheta hasta completar los 96 octavos; como hay 32 grupos de $\frac{3}{8}$ la solución es 32 brochetas de fruta.

La estrategia de adición repetida se diferencia de la modelización directa en que las fracciones se representan de manera simbólica, con números fraccionarios, en lugar de con dibujos.

Etapas II: Agrupamientos y combinaciones. En la segunda etapa también se utilizan estrategias aditivas, pero no se representa cada unidad fraccionaria, sino que se agrupan y se cuentan conjuntos de fracciones con la idea de que con ese agrupamiento se tenga un número entero y así poder utilizar estos agrupamientos para contar el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.). Por ejemplo, en el problema de las brochetas se agrupa ocho veces $\frac{3}{8}$ y se tiene $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$ que son 3 naranjas que dan para 8 brochetas; $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$ son otras 3 naranjas más que dan para 8 brochetas más; de nuevo, con 3 naranjas que dan para 8 brochetas y otras 3 que dan para otras 8 brochetas. En total con 12 naranjas se pueden preparar 32 brochetas.

Etapas III: Estrategias multiplicativas. En esta etapa se relaciona el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la relación de proporcionalidad ($f(ax)=af(x)$), un proceso constructivo combinando las relaciones de proporcionalidad y la suma ($f(ax+bx) = af(x)+bf(x)$), o directamente la multiplicación; en este último caso se interpreta el significado de la fracción como relación multiplicativa. Por ejemplo: $\frac{3}{8}$ significa que con 3 naranjas se pueden hacer 8 brochetas; si se tienen 12 naranjas (el cuádruple), entonces podremos hacer $4 \times 8 = 32$ brochetas (el cuádruple de brochetas).

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación son 41 EPM que cursaron la asignatura “Matemáticas y su Didáctica II” de 3er curso del Grado en Maestro en Educación Primaria (quinto semestre) durante el curso académico 2018-2019, en Escuni. En este Centro Universitario el modelo de aprendizaje de los EPM está enfocado a favorecer procesos de autorregulación del aprendizaje en los estudiantes. En esta asignatura se diseñó un módulo de enseñanza con el objetivo de que adquirieran la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de Primaria cuando resuelven problemas de división-medida con fracciones apoyándose en la progresión de estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones propuesta por Empson y Levi (2011) (Montero & Callejo, 2019). Los EPM trabajaron en pequeños grupos las distintas tareas que se plantearon en el módulo de enseñanza. En el curso 2019-2020 los participantes se encuentran en 4º año del Grado en Maestro en Educación Primaria (séptimo semestre).

Instrumento de recogida de datos

En el curso 2019-2020, al final del séptimo cuatrimestre, en una clase ordinaria de la asignatura “Matemáticas y su didáctica III” de 4º curso del grado en Maestro en Educación Primaria se pidió a los alumnos presentes que resolvieran una tarea (Figura 2), sin darles información ni material de apoyo.

Anticipa las resoluciones que podrían hacer 3 niños que se encontraran en 3 etapas diferentes de la progresión de estrategias según Empson y Levi (2011) al siguiente problema:

Estamos preparando brochetas de fruta y hemos decidido colocar $\frac{3}{8}$ de naranja en cada brocheta. Si tenemos 12 naranjas, ¿cuántas brochetas de fruta podremos hacer?

Figura 2. Tarea propuesta a los EPM

Los datos de esta investigación son las respuestas de los EPM a la tarea propuesta.

Análisis de datos

Para el análisis cualitativo de los datos hemos tenido en cuenta el número de estrategias diferentes que han anticipado los EPM y las etapas de la progresión en que se encuentran estas estrategias: Etapa I (E1): modelización directa (IA) y adición repetida (IB); Etapa II (E2): agrupamiento y combinaciones (II); y Etapa III (E3): multiplicativas (III), en el marco de la progresión de estrategias de Empson y Levi (2011). Solamente se han considerado aquellas respuestas que correspondían a las tres etapas de esta progresión y sus cuatro estrategias.

Por ejemplo, el EPM-21 anticipa una respuesta para el niño 1 con la estrategia “modelización directa” (IA) dibujando 12 círculos divididos en ocho partes iguales (octavos), agrupándolos de tres en tres y contando cuántos grupos puede hacer con ellos (brochetas). Para el niño 2, anticipa una respuesta con la estrategia “agrupamiento y combinaciones” (II) dibujando tres círculos divididos en octavos que agrupa de tres en tres (8 brochetas) e indica que con “tres naranjas tengo ocho brochetas” para a continuación sumar $3 + 3 + 3 + 3 = 6 + 6 = 12$ naranjas y $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ brochetas. La anticipación para el tercer niño no ha sido considerada por haber empleado el algoritmo de la división que no estaba contemplado en la progresión de estrategias (Figura 3A). La respuesta de EPM-21 se ha codificado como “2 (E1-E2)” porque anticipa dos estrategias diferentes que corresponden a las dos primeras etapas de la progresión. El análisis de las respuestas de todos los participantes se organizó en una hoja de cálculo, parte de la cual se puede ver en Figura 3B.

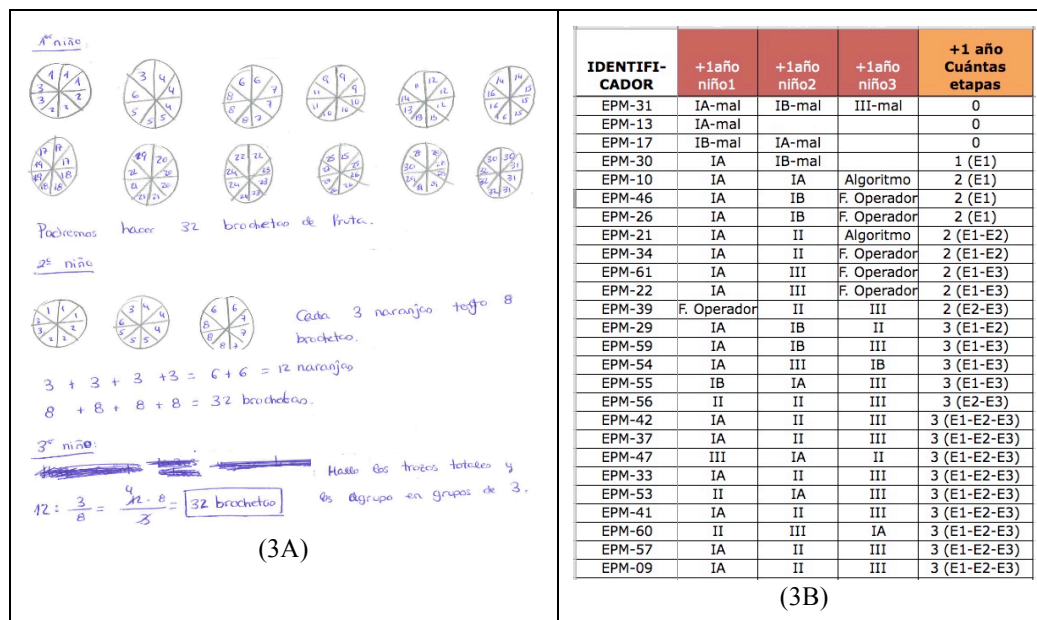


Figura 3. Respuesta del estudiante con identificador EPM-21 (3A) y codificación de respuestas de un grupo de EPM (3B)

Este análisis ha dado lugar a cuatro categorías en función del número de etapas diferentes de la progresión de estrategias usadas por los EPM para anticipar respuestas de niños. Estas categorías se describen en la sección de resultados.

RESULTADOS

Esta sección se ha organizado en cuatro apartados que corresponden a cuatro formas de anticipar respuestas de niños de primaria.

G0. EPM que no anticipan respuestas en el marco de la progresión de estrategias

En esta categoría se encuentran tres EPM que anticipan respuestas que muestran rasgos de alguna de las estrategias de la progresión, pero sin que ello les permita dar respuesta a la pregunta planteada.

Por ejemplo, EPM-31 (Figura 4) en su anticipación para el niño 1 muestra un rasgo de la estrategia “modelización directa” ya que dibuja varios rectángulos (cinco en lugar de 12) divididos en octavos. En cada rectángulo solamente subraya tres octavos. Esta modelización no permite dar respuesta a la pregunta planteada. Para el niño 2 comienza una estrategia de adición repetida que deja inconclusa porque se para cuando llega a $12/8$. Para el niño 3 hace una regla de tres mal planteada.

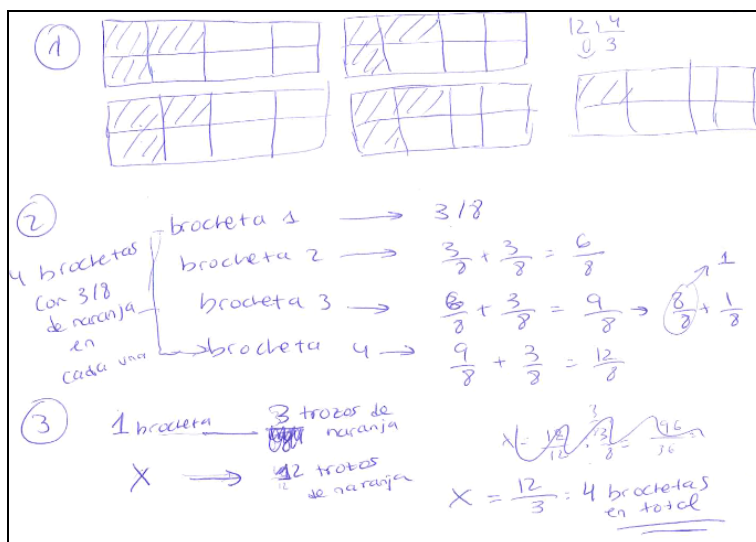
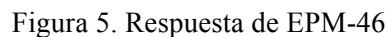


Figura 4. Respuesta de EPM-31

G1. EPM que anticipan respuestas usando estrategias de una sola etapa

En esta categoría se encuentran seis EPM que anticipan dos respuestas de niños de primaria mediante dos estrategias de la misma etapa (cuatro EPM anticipan de la E1, un EPM de la E2 y un EPM de la E3) y la tercera anticipación mediante alguna estrategia que no aparece en la progresión (algoritmo de la división, regla de tres...).

Por ejemplo, EPM-46 (Figura 5) en su anticipación para el niño 1 utiliza la estrategia “modelización directa” y para el niño 2 utiliza “adición repetida”, ambas pertenecientes a la misma etapa I. Para el niño 3, utiliza una estrategia que no aparece en la progresión. Calcula el número de porciones totales que se pueden obtener con las 12 naranjas divididas en octavos ($12 \times 8 = 96$ porciones) para posteriormente dividir las entre tres que se colocan en cada brocheta ($96/3 = 32$ brochetas).



En esta categoría se encuentran 22 EPM que anticipan dos o tres respuestas de niños de primaria.

C3. EPM que anticipan respuestas usando estrategias de las tres etapas

Diez de los 41 ERM han sido asignados a esta categoría. Estos ERM anticipan tres respuestas de

Por ejemplo, la respuesta de EPM 57 (Figura 6) anticipa tres estrategias diferentes que

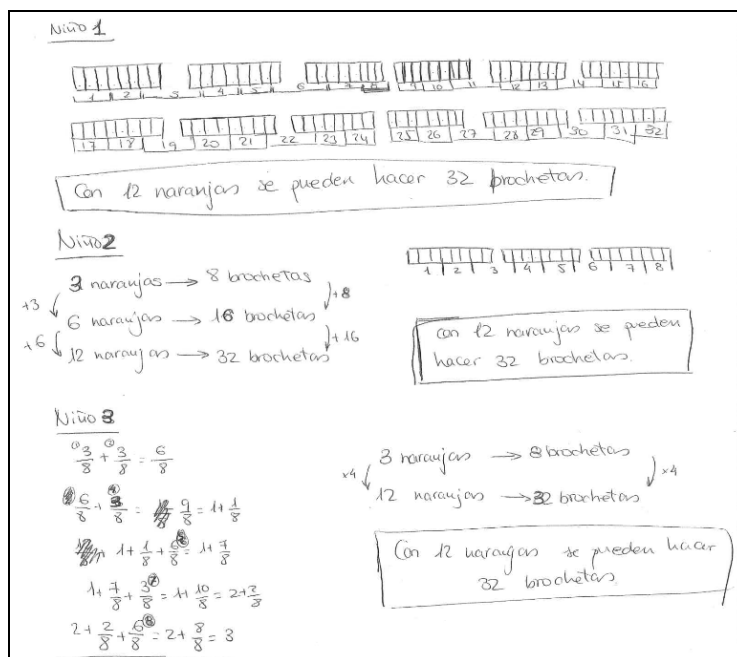


Figura 6. Respuesta de EPM-57

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue caracterizar cómo EPM, que han participado un año antes en un módulo de enseñanza, anticipan tres respuestas de niños de primaria que se encuentren en diferentes etapas de la progresión de estrategias de problemas de división medida con fracciones.

Nuestros resultados muestran que el 78% de los EPM, un año después de participar en un módulo de enseñanza que buscaba desarrollar en los EPM la mirada profesional del pensamiento matemático de los niños de primaria cuando resuelven problemas de división-medida con fracciones, haciendo uso de la progresión de estrategias propuesta por Empson y Levi (2011), han sido capaces de anticipar tres respuestas de niños de primaria de al menos dos etapas de dicha progresión. Este resultado podría indicar que el diseño e implementación del módulo de enseñanza basado en procesos de autorregulación con tareas realizadas en pequeños grupos ha favorecido procesos de aprendizaje profundo que han permitido que un año después los EPM hayan usado el conocimiento adquirido en el módulo de enseñanza (Bandura, 1997; Gordon & Debus, 2002; Zimmerman, 1998) y, en consecuencia, adquirir la competencia docente de anticipar respuestas de niños de primaria a problemas de grupos múltiples de división-medida con fracciones.

Nuevamente hemos constatado que los EPM (Montero & Callejo, 2019), un año después, siguen teniendo dificultades para anticipar las estrategias multiplicativas, solo el 56,1% de estos anticiparon respuestas con este tipo de estrategias. Esta dificultad puede ser debida a que las ideas de razón y proporción están en el centro de las relaciones multiplicativas y, en consecuencia, es más difícil de encontrar la razón entre las cantidades que visualizar y representar las diferencias entre dos cantidades cuando estas se comparan aditivamente.

Referencias

- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bandura, A. (1997). Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change. *Psychological review*, 84(2), 191.
- Empson, S. B. & Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*. Portsmouth, NH: Heinemann.

- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M.L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias*, 36(1), 143-162.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM- Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61.
- Gordon, C., & Debus, R. (2002). Developing deep learning approaches and personal teaching efficacy within a preservice teacher education context. *British Journal of Educational Psychology*, 72(4), 483-511.
- Hernández, A., & Camargo, Á. (2017). Autorregulación del aprendizaje en la educación superior en Iberoamérica: una revisión sistemática. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 49(2), 146-160.
- Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(8), 2155-2170.
- Montero, E. & Callejo, M. L. (2019). Cambios en cómo estudiantes para maestro anticipan respuestas de niños de Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 433-442). Valladolid: SEIEM.
- National Research Council (2007). *Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K-8*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Simon, M. (2006). Key Developmental Understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 359-371.
- Smith, M. S. & Stein, M.K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, 48, 1-27.
- Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, 66(3), 227-244.
- Zimmerman, B. (1998). Developing self-fulfilling cycles of academic regulation: An analysis of exemplary instructional models. In D. Schunk & B. Zimmerman (Eds.), *Self regulated learning: From teaching to self-reflective practice* (pp. 1-19). New York: Guilford Press.