ESTUDIANTES DE SEXTO DE PRIMARIA COMPARAN FUNCIONES LINEALES: EL ROL DEL LENGUAJE NATURAL

Sixth graders comparing linear functions: The role of natural language

Pinto, E.[a], Cañadas, M. C.[b], Moreno, A.[b] y Torres, M. D.[b]

[a]Universidad del Desarrollo, Chile, [b]Universidad de Granada, España

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas escritas y orales de seis estudiantes de quinto/sexto de primaria (10-12 años) al resolver diferentes problemas que involucran la comparación de funciones lineales. En el contexto del pensamiento algebraico, el objetivo del trabajo es identificar y describir cómo los estudiantes usan el lenguaje natural al resolver problemas que involucran la comparación de dos funciones. Empleamos un sistema de categorías que permite describir el modo en que los estudiantes expresan sus ideas a través del lenguaje natural (escrito u oral). Los principales hallazgos muestran que los estudiantes generalizan y reconocen la variación en las funciones involucradas en los problemas mediante este tipo de representación. Finalmente, discutimos la importancia del lenguaje natural cuando los estudiantes interactúan con contenidos de carácter algebraico.

Palabras clave: *pensamiento funcional, representaciones, lenguaje natural, función lineal*

Abstract

In this work, we analyze written and oral responses of six fifth/sixth graders (10-12 years) solving different problems that involve the comparison of linear functions. In the context of algebraic thinking, our goal is to identify and describe how students use natural language when solving problems that involve the comparison of two functions. We use a system of categories that allows us to describe how students express their ideas through natural language (written or oral). The main findings show that students generalize and recognize the variation in functions involved in problems using this type of representation. Finally, we argue the importance of natural language when students interact with algebraic ideas.

Keywords: *algebraic thinking, functional thinking, natural language, linear function, representations*

INTRODUCCIÓN

En los últimos veinte años, el rol del pensamiento algebraico en los primeros cursos educativos ha mostrado una creciente presencia e interés en la agenda investigativa. Por ejemplo, en pasados Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), un importante número de publicaciones tienen elementos asociados al pensamiento algebraico entre sus objetivos (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2019). En particular, algunas investigaciones abordan el pensamiento algebraico desde un enfoque funcional y han evidenciado cómo diferentes grupos de estudiantes de educación primaria (6-12 años) trabajan, principalmente, con problemas que involucran funciones (e.g., Brizuela y Earnest, 2008; Pinto y Cañadas, 2019). En este trabajo exploramos cómo un grupo de estudiantes de educación primaria resuelven problemas de generalización que involucran la comparación de funciones, un tema de reconocida importancia en la literatura de investigación (e.g., Brizuela y Blanton, 2014).

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2021). Estudiantes de sexto de primaria comparan funciones lineales: el rol del lenguaje natural. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 497 – 504). Valencia: SEIEM.

Dos razones principales motivan este trabajo. En primer lugar, diferentes investigaciones dan cuenta que los estudiantes de educación primaria, e incluso de educación infantil, trabajan con problemas que involucran una única función (e.g. Pinto y Cañadas, 2019). Sin embargo, son escasos los trabajos que describen cómo estudiantes comparan el comportamiento de dos funciones en un mismo problema). Describir cómo estudiantes de primaria comparación funciones permitirá entregar más evidencias del razonamiento algebraico de estudiantes en estas edades.

En segundo lugar, asumimos que los estudiantes pueden expresar sus ideas al resolver problemas de carácter algebraico mediante diferentes tipos de representaciones (e.g., pictórica, manipulativas, numéricas, etc.). Para diferentes autores, el rol del lenguaje natural es esencial, ya que es considerado un andamio útil para otros tipos de representaciones más simbólicas, como la notación algebraica, por ejemplo (Radford, 2003). Por ejemplo, Brizuela y Earnest (2008) exploran cómo estudiantes de tercero de primara resuelven un problema en el que se involucra la comparación de dos funciones lineales e interactúan con cuatro tipo de representaciones (lenguaje natural, notación algebraica, representación tabular y gráfica). Los autores destacan qué elementos del problema resalta cada representación. El lenguaje natural permitió a los estudiantes discutir el contexto del problema, conectar dicha situación con sus experiencias previas y establecer predicciones sobre la regla general involucrada en el problema. Por tanto, el lenguaje natural y la comparación de funciones cobra especial relevancia en las primeras edades.

A partir de los elementos anteriores, nuestro objetivo es identificar y describir cómo estudiantes de educación primaria usan el lenguaje natural al resolver problemas que involucran la comparación de funciones.

MARCO CONCEPTUAL

Existen diferentes aproximaciones al pensamiento algebraico (e.g., Kaput, 2008; Radford, 2003). Nuestro marco conceptual se basa en el análisis del álgebra escolar de Kaput. Específicamente, nos centramos en un enfoque funcional del álgebra escolar, el cual involucra la generalización de relaciones que covarían, las cuales pueden ser generalizadas o no, y son expresadas mediante diferentes representaciones.

Concepto de función

Asumimos el concepto de función como "una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asigna cada elemento en el primer conjunto (el dominio) a exactamente un elemento en el segundo conjunto (codominio)" (Vinner y Dreyfus, 1989, p. 357). El trabajo con funciones se centra en las relaciones entre cantidades que covarían y es presentada a través de problemas. Algunos problemas involucran una única función y otros problemas involucran dos o más funciones. Para ilustrar la manera en que se introduce un problema que involucra dos funciones, en la figura 1 presentamos el problema del trato de la abuela (adaptado de Brizuela y Earnest, 2008).

Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela quiere recompensarle por un trabajo que le ha hecho. Le ofrece dos tratos: (a) trato 1: "te doblo el dinero que tienes"; o (b) trato 2: "te doy el triple de tu dinero y tú me das 7 euros".

Figura 1. Problema del trato de la abuela

Tal como lo mostramos en la figura 1, este problema involucra la relación entre "el dinero que tiene" y el "trato", y las funciones involucradas son $y=2x$; e $y=3x-7$.

Representaciones: el rol del lenguaje natural

Las representaciones son "todas aquellas herramientas -signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas" (Rico, 2000, p. 221). En concreto, las representaciones son el medio por el cual los estudiantes pueden organizar y expresar las relaciones encontradas, con la finalidad de comprender, analizar, explicar, predecir y justificar la forma en la cual se relacionan las variables (Brizuela y Blanton, 2014).

En el contexto del pensamiento algebraico, el lenguaje natural cobra especial relevancia. Este tipo de representación, tal como lo señala Molina (2014), se refiere al lenguaje del día a día, el cual involucra términos específicos como los del lenguaje matemático y es el que comúnmente está presente en los problemas que involucran funciones y que se presentan a los estudiantes. Generalmente, en el lenguaje natural se distingue entre lenguaje escrito o y el hablado. El lenguaje natural-hablado incluye un sublenguaje especializado, de características orales, y que se relaciona con dominios de las matemáticas, mientras que el lenguaje natural-escrito, involucra la producción escrita de oraciones y frases (Lesh, Behr y Post, 1987). En el contexto del uso de este tipo de representación por los estudiantes, Mason y Pimm (1984) indican que el rol del lenguaje natural es esencial para generalizar y su uso puede influir en la expresión algebraica de la generalización, en contextos matemáticos u otros.

MÉTODOLOGÍA

Los datos que analizamos en este trabajo son las respuestas escritas y orales de estudiantes de quinto/sexto de Educación Primaria (10-12 años), con las cuales buscamos explorar cómo estos relacionan las variables involucradas en los problemas y describir cómo usan representaciones para expresar relaciones funcionales y compararlas.

En primer lugar, diseñamos un experimento de enseñanza que fue llevado a cabo con un grupo de quinto de educación primaria (10-11 años) (ver Pinto y Cañadas, 2019). Implementamos cuatro sesiones y en cada una de ellas presentamos problemas de generalización que involucraban funciones lineales (y=ax+b, con a y $b \in \mathbb{N}$). Específicamente, en la segunda y tercera sesiones presentamos a los estudiantes problemas que involucran la comparación de funciones: el problema de las camisetas (Carla y Daniel venden camisetas. Carla gana 3 euros por cada camiseta vendida. Daniel gana el doble por cada camiseta vendida y tiene 15 euros ahorrados) y el problema del trato de la abuela (ver figura 1).

En segundo lugar, y con la finalidad de profundizar en los razonamientos de los estudiantes, los entrevistamos cuando los mismos estudiantes cursaban sexto de primaria (11-12 años). Al iniciar la entrevista, presentamos a los estudiantes el problema de las tarifas telefónicas (adaptado de Brizuela y Martinez, 2012). En la figura 2 presentamos el problema de las tarifas.

Jorge y Rosa tienen diferentes tarifas telefónicas:
- La tarifa de Jorge: Él paga 10 céntimos por minuto para todas las llamadas que haga.
- La tarifa de Rosa: Ella paga 60 céntimos al mes más 5 céntimos por minuto para todas las llamadas que haga.

(no importa la hora del día ni el día de la semana en el que se haga la llamada)
Discute las ventajas y desventajas de cada tarifa.

Figura 2. Problema de las tarifas telefónicas

En los tres problemas, los estudiantes respondieron a preguntas que involucraban las relaciones entre casos particulares y el caso general (por ejemplo, en el problema de las tarifas telefónicas, una pregunta planteada a los estudiantes fue: “Si realizo solo una llamada de un minuto, ¿qué tarifa me conviene más?”). Adicionalmente, en cada problema trabajaron con diferentes representaciones matemáticas.

Los participantes de este trabajo son seis estudiantes de sexto curso, que el año anterior habían participado en el experimento de enseñanza. Ellos fueron seleccionados con base en sus avances en la identificación de patrones y generalización, así como su disposición a colaborar. Los seis pertenecían a tres grupos con diferentes logros de aprendizaje en las sesiones: dos estudiantes del grupo avanzado (E1 y E2), dos estudiantes del grupo intermedio (E3 y E4) y dos estudiantes del grupo inicial (E5 y E6).

Las fuentes de recogida de información fueron las hojas de trabajo y las videograbaciones de los problemas presentados durante el experimento de enseñanza (camisetas y trato de la abuela) y en la entrevista (tarifas telefónicas). Las categorías que hemos usado en este estudio se apoyan en las ideas de Brizuela y Martinez (2012). En concreto, y según el objetivo de este trabajo, estas categorías permiten caracterizar cómo los estudiantes usan el lenguaje natural al resolver los problemas. Para ello, analizamos si esta representación les permite: (a) tratar con casos particulares, (b) hace referencia a lo indeterminado; (c) explicar cálculos aritméticos; (d) reconocer la totalidad de la variación o solo una parte (reconocer la parte constante de la variación, se enfocan en expresar la variación total, o reconocen la variación de cada función); (e) expresar la regla general; y (f) comparar la variación de cada función (comparación con base en casos particulares y/o comparación con base en la regla general).

RESULTADOS

En la tabla 1 presentamos cómo los seis estudiantes (E1-E6) usan el lenguaje natural (escrito o hablado) al resolver los tres problemas descritos.

Tabla 1. *Uso del lenguaje natural en los problemas que involucran la comparación de funciones*

	E1			E2			E3			E4			E5			E6		
	C	A	T	C	A	T	C	A	T	C	A	T	C	A	T	C	A	T
Trata con casos particulares			x			x			x			x			x			x
Trata con lo indeterminado																		
Explica cálculos aritméticos	x			x														
Reconoce la parte constante de la función	x	x									x				x			
Se enfoca en expresar la cantidad total															x			
Reconoce la variación en cada función	x	x	x			x		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
Expresa la regla general para cada situación										x			x			x		
Compara con base en algunos casos particulares									x						x			x
Compara con base en la regla general		x						x		x	x			x			x	

Nota. C = problema de las camisetas; A = problema del trato de la abuela; T = problema de las tarifas telefónicas.

Con la intención de profundizar en el uso del lenguaje natural de los estudiantes en cada problema, en las siguientes secciones describimos las principales tendencias, así como ilustramos con algunas evidencias.

Problema de las camisetas

El problema de las camisetas fue respondido por los seis estudiantes. De manera general, los estudiantes muestran evidencias de uso del lenguaje natural para: (a) explicar cálculos aritméticos; (b) reconocer la parte constante de la función; (c) reconocer la variación en cada situación; (d) expresar la regla general; (e) comparar con base en la regla general. Sobre estos hallazgos, describimos tres ideas principales. En primer lugar, el lenguaje natural es un medio que permite expresar las reglas generales involucradas en cada situación: las ventas de camisetas que realiza Carla (y=3x) y Daniel (y=2x+15). Específicamente, tres estudiantes (E4, E5 y E6) expresan la regla general mediante este tipo de representación. Por ejemplo, y ante la pregunta "Cuando acaben de vender camisetas y sepan cuántas ha vendido cada uno, ¿cómo puede saber Carla cuánto dinero tiene?", E6 responde "multiplicando el número de camisetas vendidas por 3". La respuesta de E6 permite describir la manera en que el estudiante hace relación a la operación aritmética ("multiplicando") que involucra las variables. En este caso, la regla general coincide con la función que está involucrada en el problema.

En segundo lugar, tres estudiantes (E1, E4 y E6), por medio del lenguaje natural, reconocen que las ventas de camisetas que realiza Carla o Daniel pueden variar de forma diferente. Por ejemplo, E4 al responder a la pregunta "¿Pueden ahorrar la misma cantidad?" señala "depende del valor de X". En esta respuesta es posible identificar la expresión *depende* para referirse a la variación que está involucrada en las ventas que realice Daniel o Carla.

En tercer lugar, dos estudiantes (E1 y E2) usan este tipo de representación para explicar cálculos aritméticos específicos. Por ejemplo, en la figura 4 presentamos las respuestas de E1 a una de las preguntas.

Cuando acaben de vender camisetas y sepan cuántas ha vendido cada uno, ¿cómo puede saber Carla cuánto dinero tiene?

sumando el dinero
que tenía antes con
el dinero que tiene
ahora

Figura 4. Respuestas de E1

Las respuestas presentadas en la figura 4 muestran cómo el estudiante relaciona, a través de una operación aritmética específica, "el dinero que tenía antes" con "el dinero que tiene ahora". Tanto en E1 como en E2, las operaciones aritméticas no han sido usadas para relacionar variables, sino más bien para responder a la pregunta planteada.

Problema del trato de la abuela

A partir de los datos presentados (ver tabla 1), es posible señalar que el lenguaje natural es usado, al responder este problema, para: (a) reconocer la variación que supone cada trato; y (b) comparar con base en la regla general. No observamos evidencias, ni en el análisis de los vídeos ni en las hojas de trabajo, de otros usos del lenguaje natural. Específicamente, en lo que respecta al reconocer la variación involucrada en ambos tratos, los cinco estudiantes reconocen que no hay un trato que sea siempre mejor que el otro. Por ejemplo, ante la pregunta "¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?", E5 responde "No. Porque depende del dinero que tenga. En esta respuesta, la expresión *depende* permite identificar que los estudiantes reconocen la variación. Dicha expresión está directamente relacionada a la variable "dinero".

Por otra parte, los cinco estudiantes establecen comparaciones basados en la regla general; señalan cuál es el mejor trato indicando cuál es el punto (en términos de euros) en la cual conviene un trato o el otro. Por ejemplo, en la figura 5 presentamos las respuestas de E1 y E4 al responder a la pregunta "¿Qué debes hacer? Ayúdale a elegir el mejor trato".

(E1)

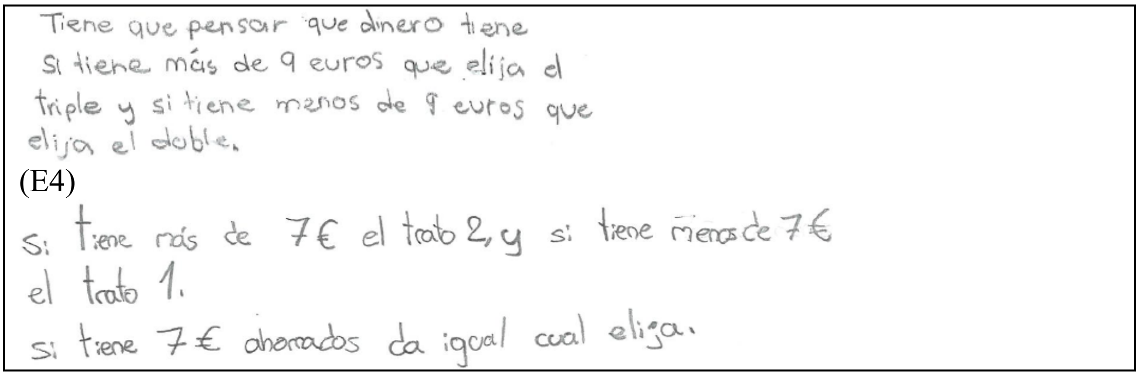

Figura 5. Respuestas de E1 y E4

Problema de las tarifas telefónicas

A partir de las respuestas de los estudiantes, el lenguaje natural ha sido utilizado para: (a) tratar con cantidades específicas; (b) reconocer la parte constante de la función; (c) expresar el precio total de ambas tarifas; (d) reconocer la variación en ambas situaciones; y (e) comparar con base en algunos casos particulares. Este tipo de representación ha sido usado, principalmente, para interactuar con casos particulares (0, 1, 8 y 20). En otras palabras, los estudiantes explican qué tarifa es más conveniente dado los casos particulares involucrados. Adicionalmente, todos los estudiantes reconocen de manera oral, que las tarifas telefónicas varían de manera diferente. El siguiente extracto de entrevista, refleja cómo una estudiante (E5) reconoce la variación de las tarifas telefónicas.

1. I: Bueno, E5, este es el pequeño reto que tenemos. ¿Vale? Léetelo un poquito y ya me dices lo que me interesa.
2. E5: Vale
3. I: Vale. Como ves vamos a comparar dos tarifas telefónicas y, en principio, ¿ves alguna ventaja o desventaja en una de ellas?
4. E5: Depende.
5. I: ¿De qué depende?
6. E5: De cuantos [minutos] llames (…)

En el extracto anterior, y tras la presentación del problema (líneas 1 a 3), la estudiante reconoce que la ventaja o desventaja por una tarifa telefónica “depende” (línea 5) de la cantidad de minutos. En este caso, la estudiante reconoce que existe una variación en los valores que puede tomar la variable “precio”, considerando la variable “tiempo”.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El pensamiento funcional alienta naturalmente a que los estudiantes investiguen (Yerushalmy, 2000), ya que el foco de introducir problemas que involucran funciones es que los estudiantes atiendan a las relaciones y estructuras matemáticas involucradas, más que centrarse en cálculos aislados. En concreto, esta investigación contribuye a describir cómo estudiantes de educación primaria (6-12 años) resuelven problemas que involucran la comparación de funciones, un tópico que se reconoce necesario para profundizar (Brizuela y Blanton, 2014). Adicionalmente, y en lo que respecta a la originalidad de este trabajo, destacamos que este estudio proporciona evidencias de: (a) el trabajo de estudiantes a diferentes problemas, que fueron resueltos en diferentes momentos; y (b) una diversidad de estudiantes, lo que nos permite tener una diversidad de formas de abordar la comparación de funciones por estudiantes de primaria.

Considerando nuestro objetivo de investigación —identificar describir cómo estudiantes de primaria, en concreto de quinto/sexto, usan el lenguaje natural al resolver problemas que involucran la comparación de funciones—, destacamos que la notación algebraica no es el único camino para que los estudiantes interactúen con problemas que involucran la comparación de funciones (e.g., Brizuela y Martinez, 2012). Tal como lo reportamos en este trabajo, el lenguaje natural es una representación que, a este grupo particular de estudiantes, les permite comparar el comportamiento de las funciones involucradas en los problemas, así como generalizar. En lo que respecta a la generalización, la mitad de los estudiantes expresó reglas generales mediante el lenguaje natural en los problemas de las camisetas y el trato de la abuela (experimento de enseñanza), mientras que este tipo de representación no fue precisamente usado para generalizar en el problema de las tarifas telefónicas (entrevistas). Esto sugiere que, posiblemente y con el paso del tiempo, los estudiantes expresan sus generalizaciones de maneras más sofisticadas. Los anterior permite enfatizar que el lenguaje natural (hablado o escrito) es considerado el primer paso hacia la apropiación de una representación más simbólica y, a la vez, es un vehículo útil para expresar la generalidad (Mason, 2008). Los resultados de este trabajo complementan los hallazgos reportados por otros autores sobre la importancia del lenguaje natural al comparar funciones. Considerando el estudio de Brizuela y Earnest (2008), nuestros resultados brindan más detalle sobre cómo el lenguaje natural resalta diferentes aspectos de las funciones involucradas en el problema como, por ejemplo: (a) reconocer la variación en cada función, (b) expresar la regla para cada función, (c) comparar con base en algunos casos particulares y (d) comparar con base en la regla general. Lo anterior nos hace reflexionar que existe un creciente interés en proporcionar a los estudiantes representaciones cada vez más simbólicas, abandonando la importancia que tiene el lenguaje natural para que los estudiantes sean capaces de interactuar con otras representaciones.

Por otra parte, y según los resultados reportados en este trabajo, existen expresiones o palabras que nos entregan orientaciones sobre cómo los estudiantes perciben la comparación de funciones. Por ejemplo, la expresión *depende* (que aparece en los problemas del trato de la abuela y las tarifas telefónicas) muestra cómo los estudiantes reconocen y expresan, desde su lenguaje cotidiano, que las variaciones entre las funciones varían de maneras diferentes (considerando las necesidades específicas de cada problema). Este hallazgo está en sintonía con lo reportado por Radford (2018), quien identifica la manera en que estudiantes perciben reglas generales usando la expresión *siempre*. Lo anterior sustenta una idea interesante: algunas expresiones o palabras entregan información valiosa que favorece comprender e interpretar la manera en que los estudiantes interactúan con elementos propios de las funciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2019). Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, A. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 183-192). Valladolid, España: SEIEM.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)*, *14*, 37-57.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). Nueva York, NY: LEA.

Brizuela, B. M. y Martinez, M. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero (Ed.), *Desarrollo cognitivo y educación [II] Procesos de conocimiento y contenidos específicos* (pp. 267-290). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: LEA.

Lesh, R. A., Behr, M. y Post, T. (1987). Rational numbers relations and proportions. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Nueva York, NY: LEA.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277-289.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *La Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579.

Moreno, A., Cañadas, M. C., Jaldo, P. y Bautista, A. (2016, julio). Functional topics in grade 5 students' comparison of two linear functions. Documento presentado en el *13th International Congress on Mathematical Education* (ICME). Hamburgo, Alemania.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (first online). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 1-22. DOI10.1007/s13394-019-00300-2

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5 - 12 year- olds. ICME 13 Monographs* (pp. 3-25). Berlín, Alemania: Springer.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IV* (pp. 219-231). Huelva, España: SEIEM.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function base approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(2), 125-147.