

ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Strategies and representations to solve a task of mathematics modeling

Porras, K.^a, Castro-Rodríguez, E.^b y Aguayo-Arrigada, C. G.^c

^aUniversidad Nacional de Costa Rica, ^bUniversidad de Granada, ^cUniversidad de Almería

Resumen

Este trabajo presenta una investigación centrada en profundizar en las estrategias y representaciones que realizan un grupo de estudiantes de Educación Secundaria cuando resuelven una tarea de modelización matemática sobre proporciones. Para ello, se llevó a cabo un estudio de casos de carácter cualitativo y se recolectó información de observaciones participantes y producciones escritas de los estudiantes. Entre los resultados destacamos que el uso de cálculos numéricos fue la estrategia más utilizada y la representación de mayor frecuencia fue de tipo simbólico-numérico. Concluimos que es necesario que la enseñanza haga un mayor énfasis en el uso el uso de diversas estrategias, más allá de la realización de algoritmos, utilizando para ello distintas representaciones.

Palabras clave: representaciones, estrategias, modelización matemática, proporciones

Abstract

This paper presents a study focused on deepening the strategies and the representation systems when Secondary students solve a mathematical modeling task about proportionality. Through a qualitative approach, different information collection techniques were applied: participant observation and written productions of the students. Among the results we emphasize that the use of numerical calculations was the most used strategy and the most preferred symbolic-numerical representation. We conclude that it is necessary for teaching to place emphasis on the use of various strategies, beyond of the use of algorithms, and using different representations for this.

Keywords: representations, strategies, mathematical modelling, proportions

INTRODUCCIÓN

La modelización matemática ha incrementado su atención en la comunidad de educadores e investigadores en las últimas décadas (Socas, Ruano y Hernández, 2016; Stender, 2018). Muestra de ello, son los números especiales dedicados a este tópico en revistas como ZDM (2006 (2-3), 2018 (1-2)), AIEM (2020 (1)) y UNO (2015 (69)), la celebración anual del congreso internacional de modelización matemática (*International Conference on Mathematical Modeling and Analysis*), los grupos de trabajo en congresos como el *International Congress on Mathematical Education* (ICME) y el *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME), o el concurso internacional de modelización matemática para estudiantes (*The International Mathematical Modeling Challenge*).

En educación matemática, no hay unanimidad en el significado de modelización matemática, no obstante, la mayoría de los autores coinciden en que su objetivo principal es construir y desarrollar un modelo matemático de una determinada situación real (Ärleback y Doerr, 2020). Atendiendo a Lesh y Doerr (2003), durante este proceso, se llevan a cabo cuatro etapas: descripción, manipulación, predicción y validación, en las que es necesario un manejo flexible y espontáneo de representaciones de los contenidos matemáticos involucrados.

La literatura previa muestra que la investigación sobre representaciones proporciona información relevante en cuanto a deficiencias que los estudiantes presentan al resolver problemas (Brown, Bossé y Chandler, 2016), dificultades de comprensión de sistemas de representación como el verbal y simbólico (González, Castro-Rodríguez y Castro, 2016) o conexiones entre el conocimiento previo y el nuevo (Roorda, Vos y Goedhart, 2015). En particular, los trabajos sobre resolución de problemas de tareas de proporcionalidad, revelan que los estudiantes utilizan el sistema de representación numérico, por ejemplo, en la construcción del concepto de unidad, de la estructura multiplicativa y de los esquemas de iteración o patrones (Singh, 2000), y que usan técnicas centradas en brindar una respuesta mecánica a través de cálculos matemáticos en lugar de reflexionar sobre cómo resolver el problema con sentido (Ärleback y Doerr, 2020; Van Dooren, De Bock, Vleugles y Verschaffel, 2008). Asimismo, diversas investigaciones a nivel de primaria (Avcu y Avcu, 2010; Sánchez, 2013) y a nivel de secundaria (Tjoe y de la Torre, 2014) proponen dejar de lado el uso de algoritmos mecánicos en la resolución de problemas de razonamiento proporcional y estimular la reflexión en el uso de diversas estrategias utilizando para ello distintas representaciones con el fin de mejorar el aprendizaje de los contenidos matemáticos (Morgan y Kynigos, 2014; Orey y Rosa, 2018).

Dada la relevancia que tienen las representaciones en el proceso de modelización (Lesh y Doerr, 2003) y debido a que desarrollar representaciones adecuadas para expresar las ideas matemáticas en una tarea de modelización es una área de investigación que necesita atención (Ärleback y Doerr, 2020; Orey y Rosa, 2018), en este trabajo nos proponemos como objetivo profundizar en las estrategias y las representaciones que se presentan en las respuestas de un grupo de estudiantes de séptimo curso de educación secundaria a una tarea de modelización matemática. El contenido matemático seleccionado para la tarea fue el de proporcionalidad directa, pues diversas investigaciones destacan la existencia de dificultades en su aprendizaje, por ejemplo, al tener un razonamiento multiplicativo deficiente se afecta el razonamiento proporcional (Singh, 2000) y errores como el uso inadecuado de porcentajes y números decimales; con repercusiones en posteriores aprendizajes (Fernández y Brey, 2012).

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

En la resolución de una tarea de modelización, donde se involucra la resolución de problemas, es importante la estrategia o plan de acciones que el estudiante planifica y reflexiona para obtener una solución con sentido (Ärleback y Doerr, 2020; Stender, 2018). Estas estrategias o heurísticos específicos son modos de proceder que le permite al estudiante abordar el problema, estableciendo una guía en el camino de resolución, a la vez que desarrolla estructuras conceptuales matemáticas que ayudan a tomar decisiones para encontrar una solución (Pólya, 1981).

Entre las distintas propuestas de estrategias específicas, en este trabajo consideramos el listado planteado por Fan y Zhu (2007) basado en los trabajos de Pólya, Schoelfeld y el *National Council of Teachers of Mathematics*. Específicamente, las estrategias que se abordan en el presente trabajo son: (a) uso de cálculos numéricos —a través de la realización de operaciones aritméticas—; (b) uso de correspondencias matemáticas —establecer una relación binaria entre dos conjuntos de elementos distintos, utilizando símbolos para representación la información del problema y sus relaciones—; (c) uso de diagramas —hacer un dibujo basado en la información disponible para representar visualmente el problema— y (d) uso de patrones —identificar patrones o características comunes, variaciones o diferencias en los números.

REPRESENTACIONES EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

En la resolución de tareas matemáticas, las descripciones, explicaciones y construcciones proporcionadas por los estudiantes son expresadas a través de distintas representaciones, por lo que constituyen un elemento central en el desarrollo de estrategias de resolución (Morgan y Kynigos, 2014; Stylianou, 2011). Durante el proceso de modelización, las representaciones no solo se usan para producir una solución, sino que constituyen las componentes más importantes, donde se

demuestra el proceso de análisis y reflexión del estudiante (Lesh y Doerr, 2003; Morgan y Kynigos, 2014).

En Educación Matemática el término representación ha adquirido distintos significados y connotaciones (Presmeg, 2006). Entre las distintas causas, se encuentra su doble naturaleza —referida tanto al proceso de capturar un concepto o relación matemática, como al producto de la forma misma (NCTM, 2000)—, así como la dualidad entre representación externa e interna —en forma de lenguaje hablado, símbolos escritos, imágenes u objetos físicos o ideas con las que la mente opera (Hiebert y Carpenter, 1992). En este trabajo consideramos las representaciones como signos o gráficos específicos que permiten comunicar los conceptos y procesos matemáticos (Lesh y Doerr, 2003). Estos signos y gráficos no pueden entenderse de forma aislada, sino dentro de un sistema de representación que satisface un conjunto de reglas con el que se puede identificar o crear representaciones, operar sobre y con ellas, y determinar relaciones (Goldin, 2002; Kaput, 1991). Dentro de los modos convencionales de representación de las estructuras numéricas, comúnmente se distingue entre sistemas de representación simbólico-numérica —formado por símbolos con los cuales podemos relacionar y hacer operaciones con cantidades numéricas—, tabular —elementos en forma matricial o dispuestos en filas y columnas—, icónico-gráfica —diagramas, trazos, dibujos, imágenes, figuras, entre otros, que facilitan la visualización de los conceptos matemáticos— y verbal —lenguaje natural de enunciados expresados en forma oral o escrita— (Castro y Castro, 1997; Goldin, 2002; Kaput, 1991).

METODOLOGÍA

El enfoque de investigación que se siguió fue un estudio de casos de carácter cualitativo, pues la finalidad es comprender y analizar situaciones profundizando en su significado (Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista, 2014). En el estudio participaron 24 estudiantes de la provincia de San José en Costa Rica matriculados en séptimo año de educación secundaria y cuya edad promedio fue de 13 años. Según el Programa de Matemática del Ministerio de Educación Pública, es en este nivel en donde se desarrolla el tema matemático de proporcionalidad directa. No obstante, este tema también es abordado en menor medida en el nivel de sexto año de primaria, por lo que los participantes deben poseer conocimientos previos del tema.

La tarea de modelización matemática utilizada en este estudio, “*Cocinando con mi mamá*” (figura 1), ha sido utilizada en investigaciones previas (Porrás, 2013). Se construyó según los lineamientos del programa del MEP (2012) y siguiendo los principios propuestos por Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewski (2003) para las actividades de modelización. Es decir, la actividad posee un contexto familiar del estudiante, pero el método de resolución es desconocido para este, no obstante, las estrategias y representaciones dependen del conocimiento previo del estudiante.

A la mamá de Carlos le encanta cocinar para su familia. Un día decidió hacer pan casero. La receta especifica que necesita 3 tazas de harina y una taza de leche, además de otros ingredientes para preparar 20 panecillos. Como su familia se deleita mucho con el pan casero, ella decide usar toda la harina con la que cuenta y cuando la mide descubre que tiene 16,5 tazas de harina. Ahora, el problema para ella es determinar la cantidad de leche y el resto de los ingredientes de manera exacta para cumplir con la receta. Como sabe que a Carlos le gusta realizar cálculos matemáticos, le pide ayuda para determinar las cantidades exactas que necesita.



Así, ¿cuántas tazas de leche debería usar?
Además, ¿cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la con la cantidad de ingredientes que usó?
Redacte un informe donde se describe el método de solución utilizado y sus conclusiones para cada una de las preguntas anteriores. Además, contesta la siguientes pregunta, ¿en qué otras situaciones similares se podría aplicar el razonamiento a este problema?

Figura 1. Tarea planteada a los participantes (Porrás, 2013)

La implementación de la tarea se llevó a cabo en el horario habitual de la asignatura de matemáticas. Los 24 participantes se dividieron en subgrupos, los cuales fueron establecidos por ellos mismos,

como es habitual en su trabajo en clase. A lo largo de su educación primaria y secundaria, los estudiantes han trabajado tareas de modelización y han recibido instrucción sobre sus etapas: descripción, manipulación, predicción y validación (Lesh y Doerr, 2003), en las cuales es necesario el uso de estrategias a través de representaciones para la comunicación de sus pensamientos matemáticos. Para obtener los datos, se recolectó información de diversas fuentes: observaciones participantes y producciones escritas de los estudiantes.

Análisis

Los datos obtenidos fueron sometidos a un análisis de contenido (McMillan y Schumacher, 2006) que se llevó a cabo en dos etapas. La primera etapa consistió en la categorización de los datos realizada por una de las investigadoras. Para ello, nos centramos en la identificación de estrategias con base en las categorías propuestas por Fan y Zhu (2007) y en las categorías de sistemas de representación: simbólico-numérica, tabular, icónica-gráfica, y verbal-escrita, propuestas por Castro y Castro (1997), Goldin (2002) y Kaput (1991) presentadas en el marco teórico. En la segunda etapa, la segunda investigadora revisó el análisis realizado y se discutió entre ambas investigadoras hasta que no hubo discrepancias entre los resultados.

RESULTADOS

Cada grupo de estudiantes planteó una respuesta a la tarea, por lo que se obtuvo un total de 9 respuestas de las que solo dos (el grupo 1 y 9) llegaron a una solución final correcta. En sus respuestas escritas, los participantes plasmaron diversas estrategias expresadas por medio de representaciones. La tabla 1 presenta las estrategias y representaciones presentes en las respuestas de cada grupo.

Tabla 1. Estrategias y representaciones presentadas en las respuestas de los grupos de estudiantes

	Representación simbólico-numérica	Representación tabular	Representación icónica-gráfica	Representación verbal-escrita
Cálculos numéricos	G1, G3, G4, G5, G6, G7, G9			G1, G3, G4, G5, G6, G7, G9
Correspondencias	G2, G8			G2, G8
Diagramas	G1		G1	G1
Patrones	G9	G9		G9

Nota: Los Gi para $i=1, \dots, 9$ corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

Uso de cálculos numéricos

La primera estrategia detectada fue el uso de operaciones básicas aritméticas a través de cálculos numéricos para expresar procesos. Esta estrategia fue la más usada por los grupos al resolver la tarea, específicamente, está presente en las respuestas de 7 de los 9 grupos. Se presentó al realizar operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, entre otros. La figura 2 muestra ejemplos de respuestas pertenecientes a esta categoría.

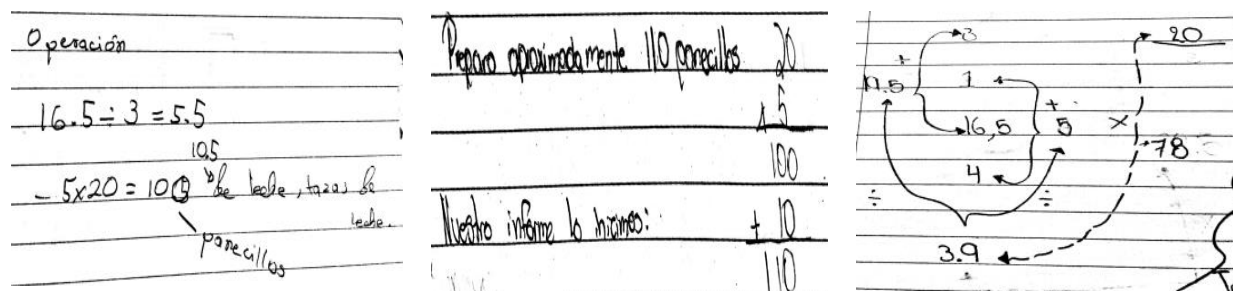


Figura 2. Ejemplo de la estrategia uso de operaciones aritméticas básicas

La primera imagen de la figura 2 evidencia el uso de operaciones de división y multiplicación al buscar la cantidad de veces que crece la cantidad de harina, es decir la constante de proporcionalidad, que en este caso se obtuvo como resultado 5,5. Los estudiantes la usaron para determinar la cantidad

de tazas de leche. En la segunda imagen de la figura 2, usando la cantidad de tazas de leche correcta (5,5 tazas), los estudiantes realizan el producto de la cantidad de 20 panecillos por la cantidad entera de las tazas de leche. A los resultados anteriores le suman la mitad de una taza de leche que hace falta y, la mitad de los panecillos a la cantidad anterior (10 panecillos), obteniendo como solución correcta los 110 panecillos. Por último, en la tercera imagen de la figura 2 se muestra una solución desordenada, que no verifica las condiciones del problema y presenta errores conceptuales, pues no aplicaron la etapa de validación del proceso de modelización matemática.

En las respuestas se presentan las representaciones simbólica-numérica, realizada por siete de los nueve grupos participantes, a través de los símbolos numéricos, los símbolos de las operaciones, y flechas. En menor medida se detecta representaciones verbales escritas.

Uso de correspondencias matemáticas

La segunda estrategia detectada presenta una relación binaria entre dos conjuntos de elementos distintos. Esta estrategia se manifestó en 2 de los 9 grupos participantes. Un ejemplo se presenta en la figura 3.

Tazas de harina:	Tazas de leche:
3	1
Panecillos:	
20	
	$3 = 1$
	$3 = 1$
	$3 = 1$
	$3 = 1$
	$3 = 1,5$
$3 \times 16,5 = 5,5$	
	5×20
	100

Figura 3. Ejemplo de la estrategia uso de correspondencias

En la figura anterior, se observa la correspondencia $3=1$, que significa que cada 3 tazas de harina tenemos 1 taza de leche. En este caso los elementos del primer conjunto corresponden a las cantidades de las tazas de harina y los elementos del segundo, serían las cantidades de tazas de leche. La solución que se presenta en la imagen es incorrecta, debido a que aparece 4 veces la correspondencia $3=1$. Al sumar los miembros izquierdos y derechos de las igualdades respectivamente se obtiene una correspondencia de 15 tazas de harina es igual a 4,5 tazas de leche. Además, la correspondencia $3 = 0,5$ es errónea pues en la parte derecha de la igualdad dividen por la mitad la unidad, pero la parte izquierda se muestra invariante.

Los dos grupos que usaron este tipo de estrategia realizaron representaciones simbólica-numéricas, pero a diferencia de las respuestas anteriores en donde el símbolo de igualdad se usa dentro de un cálculo, en esta ocasión este símbolo se presenta para indicar una relación de proporcionalidad (figura 3). También, se detectó en menor medida el uso del lenguaje verbal-escrito.

Uso de diagramas

Una tercera estrategia detectada en uno de los grupos participantes es la realización de un diagrama. Un ejemplo se presenta en la figura 4, donde las tazas de harina son representadas gráficamente como bolas y las tazas de leche como cajas. Además, se establece la relación en forma gráfica de 1 taza de leche = 3 tazas de harina, deduciendo gráficamente que 5 tazas de leche es igual a 15 tazas de harina. También, los estudiantes expresaron la mitad de la taza de leche en lenguaje verbal-escrito “media leche”, pero realizaron gráficamente media circunferencia para representar esta situación. La respuesta final fue brindada en lenguaje verbal-escrito “Se necesitan 5 tazas y media de leche para 16,5 tazas de harina”. Por lo que, este grupo utilizó un sistema de representación icónico junto con sistema un numérico y verbal-escrito.

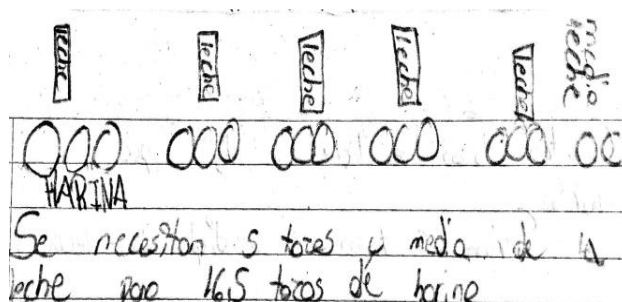


Figura 4. Ejemplo de la estrategia de uso de diagramas

Por otra parte, este grupo cambió de estrategia en la segunda pregunta del problema para determinar la cantidad de panecillos. Esta segunda estrategia fue el uso de cálculos numéricos (ver imagen 2 de figura 2), donde se utilizó la representación simbólica-numérica, logrando una solución correcta. Además, en ambas estrategias se usó en menor medida una representación verbal-escrita para fundamentar sus procesos matemáticos, por lo que este grupo, además de utilizar varias estrategias, utilizó tres sistemas de representación: simbólico-numérico, icónico-gráfico y verbal-escrito.

Uso de patrones

La última estrategia detectada fue el uso de patrones donde se establece una serie o comportamiento recurrente entre valores numéricos que se repiten de una manera predecible.

1 Taza	20 panecillo
2 Tazas	40 panecillos.
3 Tazas	60 panecillos
4 Tazas	80 panecillos
5 Tazas	100 panecillos
5,5 Tazas	110 panecillos

Figura 5. Ejemplo de la estrategia de uso de patrones

Solamente uno de los nueve grupos participantes usó esta estrategia (figura 5). En esta respuesta se presenta una tabla, en la cual la primera fila se observa la cantidad inicial de 1 taza de leche equivale a 20 panecillos. Luego, los estudiantes utilizaron una iteración o patrón al ir aumentando en una unidad las tazas de leche, y en el caso de la cantidad de los panecillos, se duplica la cantidad anterior. Este comportamiento, se mantuvo hasta el quinto caso, es decir hasta las 5 tazas de leche. En la siguiente fila el patrón utilizado cambia, pues a las tazas de leche se les realizó un aumento de 0,5 obteniendo como resultado final 5,5 tazas de leche. Esto mismo lo realizan con la cantidad de panecillos aumentando la mitad de la cantidad que iba creciendo, es decir 10 panecillos, obteniendo 110 panecillos, logrando una solución correcta de la tarea de modelización.

En esta respuesta (figura 5), se realiza una representación tabular utilizando la exploración de patrones y formulación de conjeturas en su solución, sin aplicar mecanismos de memorización o fórmulas para determinar la cantidad de tazas de leche y de panecillos correctas. Además, en la representación tabular se utilizó una representación simbólica-numérica y verbal-escrita para explicar los procesos matemáticos, por lo que este grupo utilizó tres sistemas de representación distintos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo profundizamos en las estrategias y representaciones que se presentan en las respuestas a una tarea de modelización matemática por estudiantes de séptimo curso de Educación Secundaria de Costa Rica. Los resultados muestran que la estrategia más utilizada por los participantes fue el uso de cálculos numéricos, la cual fue aplicada para obtener la constante de proporcionalidad. Dos de los

grupos muestran un uso mayor de distintos sistemas de representación en sus estrategias en comparación del resto de grupos que utilizaron solo el sistema simbólico-numérico y lenguaje verbal-escrito, lo que sugiere un pensamiento proporcional más reflexivo y analítico en la resolución de la tarea de modelización (Morgan y Kynigos, 2014; Van Dooren et al., 2008; Tjoe y de la Torre, 2014).

En relación con el tema de proporciones, coincidiendo con los resultados de (Roorda, Vos y Goedhart, 2015), algunos grupos no mostraron conocimientos relativos al razonamiento proporcional, pues en sus respuestas no se incluyeron procesos o conceptos relativos a este tópico (como la regla de tres o el uso de porcentajes), conocimientos previos que los participantes debían manejar en el momento del estudio. Además, varios grupos no crearon interpretaciones adecuadas con base en las condiciones del problema. Se obtuvieron razonamientos desordenados y cometieron errores que pudieron haberse detectado y evitado en la etapa de validación del proceso de modelización matemática (Lesh y Doerr, 2003). A la luz de los resultados obtenidos, y siguiendo las propuestas de Avcu y Avcu (2010), Sánchez, (2013) y Tjoe y de la Torre (2014), consideramos necesario que en la enseñanza se haga un menor énfasis en el uso de algoritmos y se estimule la reflexión y análisis, así como el uso de diversas estrategias de resolución de problemas, utilizando para ello distintas representaciones. Con ese fin, los ambientes de modelización matemática son adecuados pues las condiciones de este tipo de tareas incentivan la participación activa y curiosidad del estudiante, lo que conlleva que asuman la tarea como un desafío por resolver (Avcu y Avcu, 2010; González et al., 2016; Tjoe y de la Torre, 2014).

A pesar de las limitaciones de trabajo relativas a la generalización de los resultados, consideramos valiosos los resultados obtenidos, pues amplían la información en relación con el área de estrategias y representaciones en tareas de modelización matemática.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado con el apoyo del proyecto PCG2018-095765-B-100 del Plan Nacional de I+D+I (MICINN) y al grupo FQM-193: Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico.

REFERENCIAS

- Ärleback, J. B. y Doerr, H. M. (2020). Moving beyond descriptive models: Research issues for design and implementation. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 5-20.
- Avcu, R. y Avcu, S. (2010). 6th grade students' use of different strategies in solving ratio and proportion problems. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 1277-1281.
- Brown, M., Bossé, M. J. y Chandler, K. (2016). Student Errors in Dynamic Mathematical Environments, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(1), 1-27.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Ed.), *Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 61-75.
- Fernández, A. y Brey, R. (2012). Errores en el aprendizaje de las matemáticas financieras. *Enseñanza de las ciencias*, 30(2), 73-92.
- Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah: Erlbaum.
- González, F., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. *PNA*, 10(4), 280-306.
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed). México: McGrall Hill.
- Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.65-97). Nueva York, NY: MacMillan.

- Kaput, J. (1991) Notations and Representations as Mediators of Construct Live Processes. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer A. P.
- Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. y Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 203-204). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 203-204). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.
- McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2006). *Research in education*. New York, NY: Longman.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. Costa Rica: autor.
- Morgan, C., & Kynigos, C. (2014). Digital artefacts as representations: Forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 357-379”.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Orey, D. C., y Rosa, M. (2018). Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. *ZDM*, 50(1-2), 315-326.
- Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (2a ed.). DF, México: Trillas.
- Porras, K. (2013). Modelación matemática: Recurso de mediación pedagógica en el aprendizaje geométrico del tema de semejanza, en octavo año de secundaria. *Acta del congreso del 8th CIEMAC* (pp. 104-115).
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.
- Roorda, G., Vos, P., y Goedhart, M. J. (2015). An actor-oriented transfer perspective on high school students’ development of the use of procedures to solve problems on rate of change. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(4), 863-889.
- Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. *Revista Sigma*, 11(1), 10-25.
- Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271-292.
- Socas, M., Ruano, M.R., Hernández, J. (2016). Análisis Didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *AIEM*, 9, 21-41.
- Stender, P. (2018). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM*, 50(1-2), 315-326.
- Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students’ representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 265-280.
- Tjoe, H., y de la Torre, J. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 1-7.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K., y Verschaffel, L. (2008). Pupils’ reasoning on proportionality: solving versus classifying missing-value word problems. *Proceedings of the 32nd PME and 30th PME-NA* (Vol. 4, pp. 369-376).