

DE LA CONSTRUCCIÓN A LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA

From construction to the conceptualization of natural numbers in Primary Education

Rodríguez González, M. L., Gómez Alfonso, B. y Filloy Yagüe, E.

^aCinvestav – México, ^bUniversidad de Valencia, ^cCinvestav – México

Resumen

En esta comunicación se presentará un fragmento del análisis de dos entrevistas clínicas, consistente en identificar si persisten las dificultades que se presentaron en la etapa previa de experimentación del Modelo de Enseñanza diseñado con base en el modelo matemático de Von Neumann para la conceptualización de los números naturales; o bien hay nuevas dificultades. El marco teórico metodológico es el de los Modelos Teórico Locales (MTL) y sus cuatro componentes: Formal, Cognitivo, Comunicación y Enseñanza. Con el aporte de la Semiótica se diseñaron las categorías de análisis para observar y explicar dificultades de uso del Sistema Matemático de Signos (SMS) involucrado en la construcción de los primeros números naturales, usando la iteración y el proceso recursivo. De los resultados se puede inferir que hay posibilidades de potenciar el pensamiento matemático abstracto en alumnos de edades tempranas.

Palabras clave: aprendizaje, enseñanza, niños, números naturales

Abstract

This communication will present an excerpt of the analysis of two clinical interviews, consisting in identifying whether the difficulties that occurred in the previous stage of experimentation of the Teaching Model designed based on Von Neumann's mathematical model for the conceptualization of natural numbers persist; or there are new difficulties. The methodological theoretical framework is that of Local Theoretical Models (MTL) and its four components: Formal, Cognitive, Communication and Teaching. With the contribution of Semiotics, the categories of analysis were designed to observe and explain difficulties in the use of the Mathematical Sign System (SMS) involved in the construction of the first natural numbers, using iteration and the recursive process. From the results it can be inferred that there is possibilities to enhance abstract mathematical thinking in students of early ages.

Keywords: learning, teaching, children, natural numbers

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Desde la mirada de la Matemática Educativa se sostiene que las dificultades de aprendizaje de los niños no están sólo en la enseñanza sino que están principalmente en la matemática, por lo que se considera necesario conocer con profundidad la estructura matemática para trasladarla a la enseñanza.

La problemática que se ha observado es que generalmente en los primeros grados de educación primaria, la enseñanza de los números naturales se centra en su sentido cardinal y en menor medida en el ordinal; el número cero se usa como cifra en la representación de cantidades y como columna vacía, pero no hay un tratamiento conceptual del mismo.

De acuerdo con la metodología de los MLT, observar dificultades de aprender desde una propuesta formal matemática, permite centrar la atención en las acciones matemáticas más elementales y fundamentales, que para el caso de los números naturales es la *iteración* y la *recursión* (Hamilton y Landin, 1961).

Si bien, Cantor, Frege y Dedekind propusieron generar los números naturales a partir de las relaciones entre conjuntos y Peano inspirado en la definición de Dedekind, propuso caracterizarlos axiomáticamente (Mosterín, 2000, p. 55), para la enseñanza no es práctico apoyarse sólo en la teoría de conjuntos porque no hay orden numérico, ni tampoco en la axiomatización porque va en contra de las maneras en que los niños procesan cognitivamente las primeras acciones con números.

La conceptualización del cero como número va más allá de su uso en el sistema de numeración; por eso en este trabajo se considera fundamental iniciar con el número cero el aprendizaje de los números naturales. Así lo proponen Hamilton y Landin (1961) al traducir el modelo matemático de Von Neumann, quien usa la teoría de conjuntos y encapsula la axiomática de Peano en el principio de inducción finita a través de la *iteración*, para construir cada número a partir de un número finito de iteraciones. El orden está implícito por la misma construcción, empieza por la definición del número cero como conjunto vacío y usando proceso recursivo da sentido a la conceptualización de sucesor, que le permite definir el número uno y todos los demás.

Con el fin de estudiar la viabilidad de introducir un Modelo de Enseñanza adaptado al Modelo Matemático Formal para la construcción de los números naturales se diseñó un proyecto en tres fases, que es el que sustenta la presente comunicación: Primera.- Diseñar un Modelo de Enseñanza con base en Von Neumann, dirigido a niños de 6 a 9 años. Segunda.- Experimentar con tres grupos (1º, 2º y 3º) de educación primaria y identificar dificultades de aprendizaje. Tercera.- Contrastar a través de la entrevista clínica las dificultades observadas durante la experimentación.

Para guiar estas fases se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué elementos del modelo formal en los términos señalados por Hamilton y Landin (1961) se deben considerar para diseñar un Modelo de Enseñanza que se traduzca en actividades concretas, dirigidas a niños de 6 a 9 años de edad?

¿Qué dificultades se pueden observar cuando los niños trabajan a partir de la construcción de los números naturales, con base en ese modelo de enseñanza?

¿Cuál es el efecto del Modelo de Enseñanza con relación a las dificultades observadas en su implementación, una vez transcurrido un periodo aproximado de un curso escolar desde su implementación?

Para dar respuesta a estas preguntas, se propuso como Objetivo General:

Identificar dificultades de aprender la construcción de los números naturales, cuando se les propone un modelo de enseñanza basado en el modelo matemático de Von Neumann.

Esta comunicación se centra en el objetivo particular:

- Analizar a través de la entrevista clínica el efecto del Modelo de Enseñanza implementado, en relación a las dificultades identificadas en su experimentación, pasado un lapso aproximado de un curso escolar.

Los resultados del análisis de la experimentación se publicaron en (Rodríguez y Filloy 2018) y (Rodríguez, Gómez y Filloy 2019^a, 2019^b).

Marco Teórico

En Matemática Educativa, los MTL (Filloy, Rojano y Puig, 2008) son un marco teórico - metodológico para la observación experimental en la investigación. La semiótica de Peirce (1987) es el fundamento para dar sentido a los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS), que constituyen una teoría en los MTL para la interpretación de observaciones experimentales. Los SMS centran la atención en la producción de intertextos a través de la lectura/transformación de textos matemáticos en relación con otros textos. Esto permite a los usuarios producir sentido y dar significado matemático a los procesos de comunicación que se producen en las aulas, cuando se implementan

secuencias de actividades con un fin determinado. El sentido de lo *local*, focaliza su análisis en un fenómeno específico a través de los cuatro componentes: formal, cognitivo, de comunicación y de enseñanza.

Para este trabajo estas cuatro componentes se concretan de la siguiente manera:

Formal: La base de esta componente es el Modelo de Von Neumann (Hamilton y Landin, 1961) cuya lógica de construcción precisa el SMS involucrado en la construcción de los números naturales. La iteración y la recursión se usan para la construcción de cada número. Comienza con la definición de cero: $0 = \emptyset$; la noción de sucesor se introduce con la construcción del número uno, como el conjunto que contiene un el elemento, el vacío, representando como sigue: $1 = \{\emptyset\}$; el dos es el conjunto que contiene dos elementos, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; y así sucesivamente.

Es importante señalar que en este proceso de construcción recursiva, se hace patente el aspecto ordinal del número en el sentido de que cada número es el conjunto de todos los números que le preceden.

Para definir el conteo y la cardinalidad se introduce la noción de intervalo: “Si $a, b \in N$, $[a, b] = \{x \mid x \in N \text{ y } a \leq x \text{ y } x \leq b\}$ ” (Hamilton y Landin, 1961, p. 97). “Contar un conjunto A es una correspondencia uno-uno $\varphi: [1, n] \rightarrow A$, entre $[1, n]$ y A , donde $n \in N$ ”. (Op. Cit. p. 99). La cardinalidad es el resultado de un conteo:

Si n es el resultado de un conteo de A , entonces A tiene n elementos, o el número de elementos en A es n , o la cardinalidad de A es n . Esto también lo denotamos como la cardinalidad de A por $\#(A)$. (Op. Cit. p. 101).

La suma se introduce desde la unión de conjuntos disjuntos $A \cup B$. Si m y n son sus cardinales respectivamente, entonces $m + n$ es la suma. Cada una de las sumas se obtiene de manera natural por iteración y partiendo del sucesor de n , $n+1$, del sucesor del sucesor de n , $(n+1) + 1$, ...

Cognitiva: La base de esta componente son los aportes de la teoría de la actividad (Talizina, 2001) que señala que las dificultades observadas se pueden explicar a través de los obstrutores cognitivos (OB). Éstos obstrutores son los aprendizajes previos sobre los números que tienen los niños de 6 a 9 años y que les dificultan el tránsito de la acción a la operación cognitiva para la conceptualización del número cero y para usar la iteración y la recursión en la construcción del *sucesor* de cada número.

Comunicación: La base de esta componente es la Semiótica (Peirce, 1987), de la cual se toman los argumentos de inducción, deducción y abducción como procesos de significación y base del razonamiento reflexivo y, también, las relaciones significantes como interrelaciones continuas y complejas entre la sintaxis, la semántica y la pragmática, con el uso de códigos establecidos en el contexto, para la producción de sentido (Dotación de Sentido) en las acciones numéricas.

También es importante señalar que la lógica de uso de los SMS (Fillooy, Rojano y Puig 2008), es una herramienta para entender y explicar los sistemas o estratos de signos que producen los niños para producir sentido a las actividades que se les proponen con el modelo de enseñanza.

Enseñanza: La base de esta componente es la colección de textos concretos que entienden los alumnos y que gradualmente van transformando en textos cada vez más abstractos, con significado matemático convencional. A tal fin se ha traducido el modelo formal matemático de Von Neumann en un modelo de Enseñanza estructurado en secuencias de actividades concretas, con uso de material manipulativo.

Metodología: Diseño, ejecución del Modelo de Enseñanza y protocolo de Entrevista clínica

El diseño de las actividades se realizó siguiendo la secuencia de principios (P_i) propuestos por Hamilton y Landin (1961) en su adaptación del Modelo de Von Neumann. Además, como recurso didáctico, se ha incorporado una semirrecta para representar gráficamente el orden de los números, que si bien no está contemplado explícitamente en los principios Hamilton y Landin (1961) se puede derivar implícitamente de la definición de intervalo (Op. Cit. p. 97).

P_1 : El número cero es el conjunto vacío: $0 = \emptyset$.

Actividad: *Adivina quién soy*. Se les pide que observen una bolsa vacía de plástico transparente; la relacionen con el conjunto vacío y número cero y le peguen la etiqueta del número cero en la cara posterior de la bolsa.

P_2 y P_3 : Contrucción del número uno como sucesor del cero $0 = \emptyset$; $1 = \{\emptyset\}$. Concepto de sucesor como un *siguiente*. Con esta idea y usando el proceso recursivo se construyen todos los demás números; $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Las llaves que representan a los conjuntos se sustituyen en las actividades con los niños por bolsas transparentes, como se ilustra en la figura 1.

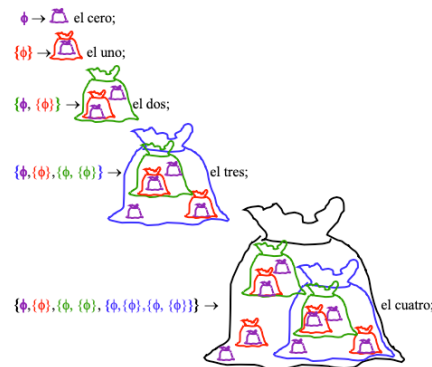


Figura 1. Proceso de construcción recursiva de los números, usando bolsas

Actividad: *¿Podemos construir el siguiente número?.*- Una vez relacionada y nombrada la bolsa vacía con el número cero, se les pregunta: ¿Podemos construir el siguiente número? El sucesor es la bolsa/número que contiene a la bolsa/número vacía o cero. Esta nueva bolsa/número se etiqueta con el número uno. Se vuelve a preguntar ¿Podemos construir el siguiente? El sucesor del uno es el dos, usando la recursión se tiene una bolsa/número que contiene dos bolsas: la bolsa/número cero y la bolsa/número uno que a su vez contiene dentro de ella la bolsa/número cero. Así sucesivamente se sigue con la construcción (Figura 1). Conforme se van construyendo todas las bolsas/números se va colocando una marca en una semirrecta de izquierda a derecha, empezando por el cero (Figura 2).



Figura 2. Las bolsas/número colocadas de izquierda a derecha en la semirrecta.

P_4 : Definición de número natural como conjunto n . La bolsa con n elementos es el número n . El conjunto n contiene a todos los anteriores; si está vacío es el número cero, si no está vacío es un sucesor.

Actividad: *¿Cómo soy?* Se les cuestiona a los niños para que reflexionen empleando preguntas como: ¿Qué relación hay del número cero con cualquier sucesor? ¿quién está antes y después de? ¿Quién no tiene sucesor?...

P₅: Conteo: cardinalidad y ordinalidad.

Actividad: *¿Cuál es el orden?* Está actividad no se implementó en el modelo de enseñanza dado que los niños están habituados al conteo; pero si en la entrevista, primero con un tarro y canicas idénticas y después manipulando figuras concretas de los numerales. Con la finalidad de que reflexionaran sobre la relación del conteo y el orden.

P₆: Adición y multiplicación. Uso del proceso recursivo para la construcción de tablas de doble entrada (filas y columnas) de sumar y multiplicar.

Actividad: *Construimos las tablas de suma y multiplicación.* – Los resultados de (+) y (x) se escriben en las celdas donde se cruzan filas y columnas. Se les propone usar la forma $a \cdot 10 + b$, para representar los números mayores que 10.

La construcción de la tabla de multiplicación se apoya en el uso de una semirrecta para resaltar *los saltos* (iteración del multiplicador) en la obtención de cada producto.

Metodología del protocolo de las entrevistas y categorías de análisis

Para el protocolo de entrevista se siguieron las mismas actividades del modelo de enseñanza señaladas en los párrafos anteriores, se agregó una actividad para P₅. Para P₆ se sustituyó la construcción de las tablas por la resolución de problemas aditivos y multiplicativos.

Para el análisis de las dificultades observadas en la experimentación y en la aplicación de la entrevista clínica, se utilizaron las mismas categorías de análisis, de acuerdo con el aporte del marco teórico:

- *Obstructores (OB)* que generan tendencias cognitivas, por las maneras en que han aprendido las nociones numéricas, manifestadas en dificultades semánticas, pragmáticas, sintácticas y de uso numérico.
- *Argumentos como Procesos de Significación (APS)*, para identificar el razonamiento inductivo, deductivo y abductivo en el uso de la iteración y recursividad en la conceptualización de los números naturales.
- *Dotación de Sentido (DS)* de los SMS con la utilización de códigos personales, para desarrollar el tránsito de lo concreto a lo abstracto.

Las dificultades identificadas en el modelo de enseñanza se clasificaron de acuerdo con los obstructores en tres ejes:

- *Pragmático. A.* Uso de conocimientos pragmáticos y espontáneos de los números en acciones de representación de conteo. En este rubro las dificultades fueron: A1. Identificar al cero como número (P₁) y A2 Identificar el sucesor y antecesor de cualquier número (P₃).
- *Semántico. B.* Uso semántico de los números en acciones de representación y conteo. En este otro rubro las dificultades fueron: B1. Reconocer al número cero como conjunto vacío (P₁), B2. Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor (P₂), B3. Reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores (P₃), B4. Identificar el cero como el punto origen en la recta.
- *Sintáctico. C.* Uso sintáctico en las operaciones. Aquí, las dificultades fueron: C1. Uso de la forma $a \cdot 10 + b$ para representar a los sucesores (P₆).

Análisis de las entrevistas clínicas con respecto a las dificultades observadas

Los criterios de selección de los alumnos para la entrevista clínica fueron:

- a) Registro y análisis Cuantitativo de respuestas a los ejercicios escritos de cada alumno.
- b) Análisis Cualitativo su desempeño en cada sesión grupal.

Por sus resultados cada alumno se clasificó en estratos (alto, medio y bajo), usando el modelo tridimensional propuesto por Rojano (1985). Se seleccionó a un alumno representante de cada estrato por grupo, teniendo un total de 6 entrevistas.

La entrevista clínica se aplicó en el siguiente ciclo escolar y tuvo como finalidad comparar si persistían las dificultades identificadas durante la experimentación, si se superaron o si aparecieron nuevas. Para esta comunicación y debido a la limitación de espacio se presenta sólo el fragmento de la actividad “¿Podemos construir el siguiente?” para la construcción del sucesor del número cero, de dos alumnos representantes del estrato bajo (Daniel de 2º grado y Guillermo de 4º grado) y posteriormente el análisis de estos fragmentos. La simbología que se usa para la transcripción es Daniel (D), Guillermo (G) y Entrevistadora (E).

Fragmento de Daniel 2º grado.

1. E: ¿Cuál es el siguiente? [Se refiere al sucesor del cero]
2. D: El uno.
3. E: ¿Qué necesito para que sea el número uno?
4. D: Un número que esté adentro.
5. E: ¿Quién va a ser ese elemento que esté adentro?
6. D: ¿El uno?
7. E: ¿Quién era el que estaba antes?
8. D: ¡Ah! El cero.
9. E: El cero. ¿Qué tienes que hacer?
10. D: Agarrar una... [Daniel toma otra bolsa vacía y la etiqueta con el número cero y la introduce en la nueva bolsa/número].
11. E: ¿Qué nombre le voy a poner?
12. D: El uno. [Daniel señala las etiquetas del número uno].
13. E: ¡Muy bien! ¿Quién está antes del uno?
14. D: El dos.
15. E: ¿El dos?
16. D: ¡Ah no! El cero.

Fragmento de Guillermo 4º grado.

17. E: ¿Podremos construir el siguiente? [se refiere al sucesor del cero].
18. G: El uno.
19. E: ¿Cómo le hacemos?
20. G: Con otro... [Guillermo toma otra bolsa vacía y le pega la etiqueta del cero].
21. E: Muy bien.
22. G: Poner este adentro... [Toma otra bolsa vacía más grande y va describiendo oralmente sus acciones].

23. E: ¡Muy bien! ¿Dónde lo vas a meter?
24. G: En el uno.
25. E: ¿Cómo podemos saber que es la bolsita del uno?
26. G: Porque está más grande.
27. E: Y porque tiene... ¿Cuántos elementos adentro?
28. G: Uno.
29. E: ¿Quién es ese elemento?
30. G: Cero.

En las primeras líneas de cada entrevista D (2) y G (18) afirman que el número uno es el sucesor del cero, lo que se puede entender que han superado la dificultad (B2), dando sentido al proceso recursivo. Sin embargo, hay diferencias de actuación entre Daniel y Guillermo.

D(4) expresa un argumento deductivo: “un número que esté adentro” para referirse a la noción de sucesor, pero cuando E(5) lo cuestiona, se observa que aun no tiene claro el sentido de la recursión (B3), por lo que la intervención de E(7), le permite recordar la construcción de los números D(8), realiza el proceso de construcción recursiva D(10) introduciendo en la bolsa/número uno la bolsa/número cero, lo que se puede interpretar como una dotación de sentido (DS) a la noción del sucesor del número cero.

Mientras que G(20, 22 y 24) realiza el proceso de manera natural al tomar otra bolsa vacía, etiquetarla con el número cero e introducirla en la nueva bolsa/número uno, mostrando que tiene mayor claridad en el uso de la construcción recursiva.

En Daniel la dificultad (B3) se vuelve a presentar (13 a 15) y es superada por el cuestionamiento de la entrevistadora E(15). En el caso de Guillermo, se observa que también presenta esta dificultad, al referirse al sentido perceptual G(26) centrando la atención en el tamaño de la bolsa y no en el proceso de construcción recursiva; por lo que el cuestionamiento de E(27 y 29) le posibilita rectificar su respuesta G(30). Ambos alumnos usaron de manera eficiente el proceso recursivo en cada construcción de los números, para Daniel fue claro al expresarlo oralmente D(4); mientras que Guillermo realiza directamente la acción a la pregunta de E (19). Las acciones realizadas por ambos, las entendemos como una dotación de sentido (DS) de uso de este SMS.

Se observa que Guillermo superó en menor tiempo las dificultades, en comparación con Daniel. Por lo que se considera que la edad influye, pero no determina la dotación de sentido para usar el proceso recursivo en la construcción de los números naturales a partir de la noción del sucesor (P_2 y P_3) empezando por el cero (P_1).

Discusión final

Se insiste en que el objetivo general de la investigación es identificar las dificultades de aprendizaje cuando se les enseña con el modelo de enseñanza basado en el modelo formal matemático de von Neumann para la construcción de los números naturales y los SMS involucrados en dicha tarea. Podemos afirmar que la influencia de las maneras en que los niños han adquirido las nociones numéricas en los diferentes entornos de su vida cotidiana pueden obstruir la comprensión y uso pragmático de la recursividad para reconocer que cada sucesor (número) contiene a todos los sucesores; que el número cero es el primer elemento de la construcción, que es el único que pertenece a todos sus sucesores y que no tiene antecesor. Pero cuando se trabaja con un modelo de enseñanza con una base formal matemática, como en este caso Von Neumann, esas dificultades se pueden superar, como muestran los resultados de la entrevista; a pesar de haberse realizado la entrevista en el siguiente ciclo escolar al de la implementación de la enseñanza. Los niños con un bajo nivel de competencia (estrato bajo) superaron las dificultades que se presentaron durante la

experimentación grupal, lo que nos permite proponer la posibilidad de implementar estos modelos desde los primeros grados de educación elemental, brindando un área de oportunidad para establecer las bases un pensamiento matemático que les permita acceder a otros niveles de comprensión. Además, se presupone que incorporar la componente formal para la conceptualización de los números desde el primer grado de primaria, facilitará el desarrollo conceptual antes del uso del simbolismo, evitando concebir la enseñanza de los números naturales como una construcción trivial, memorística y operativa.

Es por esto que se considera que es necesario recuperar la tradición formal matemática en la enseñanza, para potenciar el pensamiento matemático abstracto, que les permita a los alumnos acceder a niveles superiores de conocimiento matemático.

Referencias

- Filloy, Rojano y Puig. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. USA: Springer.
- Hamilton, N. y Landin. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. USA. Allyn and Bacon, Inc.
- Mosterín, J. (2000). *Los Lógicos*. España: Spasa Calpe, S. A.
- Peirce, Ch. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus Ediciones.
- Rodríguez y Filloy. (2018) Dificultades de uso de la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en la construcción de los números naturales. En Herrera Carrasco D. y Macías Romero, F. (Coods.) *Matemáticas y sus aplicaciones 10*. ISBN 978-607-525-521-7. México: BUAP.
- Rodríguez, et. al. (2019^a). Dificultades en el aprendizaje del cero, en alumnos de escuela elemental. En Marbán, et. al. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*. España: SEIEM XXIII.
- Rodríguez, et. al. (2019^b). *Un modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en Von Neumann*. Colombia: CIAEM XV.
- Rojano, C. T. (1985). *De la Aritmética al álgebra*. Tesis Doctoral no publicada. México: Cinvestav-IPN.
- Talizina, N. (2001). *La formación de las habilidades del Pensamiento Matemático*. México: UASLP