LA CONVERSACIÓN ENTRE PROFESOR Y ESTUDIANTE: UNA FORMA DE APOYAR EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

Conversation between teacher and student: A way to support the learning of proof in geometry

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A.
Universitat de València

Resumen

Como parte de una investigación doctoral, cuyo objetivo es analizar el aprendizaje de la demostración en el contexto de la geometría tridimensional a través de problemas de construcción resueltos en un ambiente de geometría dinámica, queremos estudiar el apoyo e impacto de las intervenciones del profesor al conversar con un estudiante sobre las demostraciones elaboradas por él. En este documento ilustramos la relevancia de las intervenciones dirigidas a profundizar en las ideas del estudiante y guiar su trabajo cuando se presentan bloqueos. De esta forma resaltamos la importancia de la gestión y participación del profesor en el aprendizaje de la elaboración de demostraciones.

Palabras clave: *aprendizaje de la demostración, apoyo del profesor, geometría dinámica, geometría tridimensional, problemas de construcción.*

Abstract

As part of a doctoral research, whose objective is to analyze the learning of proof in the context of three-dimensional geometry through construction problems in a dynamic geometry environment, we want to study the support and impact of the teacher's interventions when he talks to the students about the proofs elaborated by them. In this document we illustrate the relevance of interventions aimed at deepening students' ideas and guiding their work when blockages occur. We highlight the importance of teacher's management and participation in the learning of elaboration of the proofs.

Keywords: *learning of proof, teacher support, dynamic geometry, 3-dimensional geometry, construction problems.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los campos más interesantes y desafiantes en didáctica de las matemáticas es el que tiene que ver con aprender a demostrar (Marrades y Gutiérrez, 2000). De acuerdo con estos autores, alcanzar este objetivo toma tiempo e involucra hacer frente a distintas problemáticas de los estudiantes al involucrarse en esta práctica matemática. Esto ha hecho que la investigación en esta área se mantenga vigente, siendo una de sus líneas de trabajo la que estudia el apoyo de los ambientes de geometría dinámica (AGD, en adelante) en el aprendizaje de la demostración (en este texto usaremos como equivalentes las expresiones aprender a demostrar y aprendizaje de la demostración).

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2022). La conversación entre profesor y estudiante: una forma de apoyar el aprendizaje de la demostración en geometría. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 559-567). SEIEM.

Ya se ha documentado cómo los AGD influyen positivamente en aspectos de la demostración como la exploración inicial, la formulación de una conjetura y la validación de esta (Gutiérrez, 2005; Sinclair y Robutti, 2013). La mayoría de los estudios en esta dirección han sido realizados en contextos de geometría bidimensional, pero es muy diferente el trabajo en contextos de geometría tridimensional (Gutiérrez y Jaime, 2015). Bajo esta premisa, hemos elaborado una propuesta para facilitar el aprendizaje de la demostración con el apoyo de un AGD, en el contexto de la geometría tridimensional y los problemas de construcción. Nuestro interés por conocer el impacto de este recurso en el aprendizaje de la demostración nos ha llevado a analizar la influencia de las representaciones 2D en configuraciones 3D, la analogía que se puede establecer entre ambos dominios y beneficios de algunas características del AGD al realizar construcciones geométricas.

En estas aproximaciones al objeto de estudio hemos reconocido el rol relevante del profesor a través de su gestión. Más concretamente, la forma en que la conversación que él sostiene con los estudiantes sirve como motor para la verbalización de ideas y argumentos, lo cual deriva en la producción por los estudiantes de demostraciones de propiedades geométricas. La literatura ha mostrado la importancia del profesor al ayudar al estudiante a producir soportes y datos relevantes para su argumentación (Singletary y Conner, 2015; Conner y Singletary, 2021), así como manejar las producciones de los estudiantes, pues en estas se puede reconocer la comprensión que ellos tienen respecto al tema de conversación (Solar et al., 2021). También se ha mostrado la influencia de los cuestionamientos del profesor a los estudiantes, argumentando los cambios conceptuales que estos producen en el pensamiento de ellos (van Zee y Minstrell, 1997).

En este contexto, el objetivo de este documento es ilustrar y analizar la forma en que las intervenciones del profesor, en conversación individual con un estudiante durante la resolución de un problema de construcción en un AGD, apoyan la elaboración de una demostración de una propiedad geométrica.

REFERENTES CONCEPTUALES

Resolución de problemas de construcción y aprendizaje de la demostración

Los AGD apoyan el aprendizaje de la demostración (Mariotti, 2012). En nuestro estudio, hacemos énfasis en el aprendizaje de la demostración mediante problemas de construcción. Este tipo de problemas consiste en (i) crear en el AGD una figura geométrica con determinadas propiedades, planteadas en el enunciado, que se conserven bajo arrastre y (ii) explicar y validar el procedimiento empleado para construir la figura (Mariotti, 2019). Consideramos una demostración como un argumento matemático, empírico o deductivo, cuya intención es convencer a alguien sobre la verdad de algún hecho matemático. En el contexto de los problemas de construcción, la demostración tiene la finalidad de convencer sobre la validez de la construcción realizada.

Al emplear herramientas del AGD en la construcción de objetos geométricos, se producen significados personales gracias a las relaciones de dependencia que se descubren y verifican mediante acciones de arrastre. Sin embargo, estas herramientas también están relacionadas con elementos teóricos de la geometría euclidiana que podrían apoyar a los estudiantes al elaborar demostraciones de sus construcciones (Mariotti, 2012). En este escenario, resolver problemas de construcción permite que los estudiantes aprovechen las posibilidades que provee el AGD, así como del sistema lógico que subyace a este. Por lo tanto, las construcciones geométricas tienen también una naturaleza puramente teórica, donde su validez está ligada a la demostración de algún teorema. Resolver este tipo de problemas en un AGD puede hacer que los estudiantes evoquen significados teóricos de las herramientas utilizadas (Mariotti, 2019).

Las intervenciones del profesor: apoyo para el aprendizaje de la demostración

Estudiar la conversación entre el profesor y sus alumnos en la clase de matemáticas ha permitido analizar el efecto de las intervenciones del profesor en la elaboración de argumentos en clase, diferenciando quién aporta cada elemento del argumento, el profesor o los estudiantes (Conner y Singletary, 2021; Singletary y Conner, 2015). Como resultado de este tipo de estudio, Conner et al. (2014) proponen un conjunto de categorías y subcategorías de las intervenciones del profesor, a saber: *Contribución directa*, cuando el profesor provee elementos del argumento y los estudiantes no tienen intervención. Estas contribuciones provienen de afirmaciones realizadas por el profesor o de la escritura en la pizarra de información tomada como parte de un argumento. *Formulación de requerimientos* (requerir una propiedad, una idea, un método, una elaboración o una evaluación), cuando el profesor solicita a los estudiantes desarrollar ideas con profundidad, comunicar los procedimientos empleados en su resolución, proveer hechos matemáticos, u otros similares. En este tipo de apoyo prima la intención del profesor al requerir algo de los estudiantes, más que la respuesta misma que ellos ofrezcan. *Otras acciones de apoyo* (direccionar, promover, evaluar, informar, repetir), en las que se ubican las acciones del profesor no contempladas en las anteriores categorías; estas acciones pueden consistir en dirigir la atención de los estudiantes a elementos particulares, fomentar la exploración de alguna situación, evaluar la pertinencia y validez de las propiedades matemáticas declaradas por ellos, o retomar temas de la conversación que puedan ser necesarios.

Aunque Conner et al. (2014) han desarrollado esta categorización analizando las interacciones entre un profesor y sus alumnos en una clase ordinaria, la categorización puede aplicarse también cuando solo interviene en el diálogo un estudiante, sea en una clase o en un experimento individual como el nuestro.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

El contenido de este documento es parte de una investigación basada en una metodología de estudio de caso, en el que analizamos el aprendizaje de la demostración en el contexto de la geometría tridimensional con la mediación de GeoGebra, por parte de cuatro estudiantes con alta capacidad matemática (11 a 14 años) que cursaban entre primero y cuarto año de ESO. Además de su formación escolar, ellos participaban en programas de atención al talento (AVAST) y al talento matemático (ESTALMAT).

Diseñamos e implementamos una secuencia de 18 problemas de construcción en sesiones de 60 minutos aproximadamente. Algunos problemas solicitaban la construcción de un objeto geométrico que satisficiera alguna propiedad asociada a la equidistancia, primero en 2D y luego en 3D (por ejemplo, un triángulo equilátero). Otros problemas solicitaban la construcción de un objeto en 2D y uno análogo en 3D (por ejemplo, el centro de la circunferencia en 2D y de la esfera en 3D). La resolución de cada problema brindaba elementos instrumentales y conceptuales útiles para resolver los problemas planteados posteriormente.

Los estudiantes inicialmente resolvían cada problema y después dialogaban con el primer autor del documento, quien dirigía la conversación para justificar los resultados. Estas sesiones se grabaron en audio y video. Debido a que los estudiantes estaban en diferentes cursos escolares y tenían diferentes experiencias escolares, las sesiones se realizaron como entrevistas clínicas individuales.

A continuación, presentamos algunos episodios de la resolución del sexto problema de la secuencia y la conversación entre el profesor (el primer autor) y un estudiante a quien llamaremos Diego (pseudónimo). El problema y los episodios seleccionados ilustran cómo las reacciones del profesor a las intervenciones de Diego le apoyaban en la explicitación y organización de su pensamiento, de cara a la demostración para validar la construcción realizada.

Este problema, que presentamos a continuación, tiene el objetivo de introducir la mediatriz y el plano mediador como conjuntos de puntos que equidistan de dos puntos fijos en el plano y el espacio, respectivamente. El enunciado del problema es el siguiente:

- Abre GeoGebra y selecciona la vista *Gráficos*. Construye los puntos A, B y C. Construye ahora una circunferencia con centro en C que contenga el punto A. Arrastra el punto C hasta que la circunferencia contenga el punto B. Arrastra C manteniendo B en la circunferencia hasta donde te sea posible.
- Activa la vista *Gráficos 3D* y cierra la vista *Gráficos*. Verás la construcción que has realizado en 2D. Arrastra el punto C fuera del plano, a distintos lugares del espacio, manteniendo la propiedad de estar a la misma distancia de los puntos A y B.

APOYO DEL PROFESOR: ANÁLISIS DE UN EJEMPLO

Al resolver la primera parte del problema, Diego construyó los puntos A, B y C y la circunferencia con centro en C que contenía el punto A. Después, arrastró C hasta que B llegó a pertenecer a la circunferencia (figura 1a) y luego arrastró C conservando dicha pertenencia. Diego construyó el segmento AB, su mediatriz y vinculó el punto C a la mediatriz con la herramienta *Vincular/desvincular puntos*. Luego arrastró el punto C sobre la mediatriz, mientras la representación en pantalla mostraba que se mantenía la pertenencia de B a la circunferencia (figura 1b). Diego aseguró haber completado lo que pedía el problema.

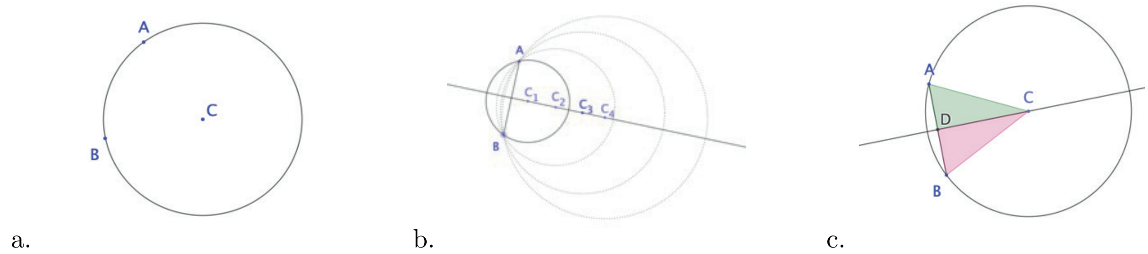

Figura 1. Resolución del sexto problema en la configuración 2D.

Diego expresó que ubicó el punto C en la mediatriz al observar su comportamiento mientras lo arrastraba y se conservaba la pertenencia del punto B a la circunferencia. Él expresó conocer ya la mediatriz, definiéndola como "una recta perpendicular que pasa por el centro de un segmento". El profesor intervino validando la respuesta de Diego y añadiendo:

1. Profesor: Cuando colocas al punto C en la mediatriz, ves que en cualquier lugar de la mediatriz donde se ubique el punto C, la circunferencia va a contener al punto A y B… ¿Podrías explicarme por qué ese punto C, al estar en la mediatriz, siempre va a estar a la misma distancia de A y B?
2. Diego: Siempre va a tener la misma distancia estando en la mediatriz y una demostración en parte es lo que estamos haciendo ahora del círculo, porque significa que A y B ahora mismo son el radio de C. Y si siempre son el radio de C, de la circunferencia C, significa que [sus distancias a C] son iguales.
3. Prof.: …Yo quisiera que me dijeras por qué esos puntos deben estar en la circunferencia, más allá de "porque se ve que están ahí". ¿Podrías decirme el motivo de ello?
4. Diego: Sí. Siempre están a la misma distancia… no sé cómo explicarlo exactamente… yo diría que es porque la mediatriz pasa por el punto medio del segmento entre A y B, y es

una recta que se mueve, o sea, que tiene la misma inclinación, que es perpendicular al segmento AB, entonces, como está al medio y al ser perpendicular, el punto C nunca se puede acercar más a un punto que a otro. Entonces… es por eso por lo que yo creo…

A petición del profesor, Diego construyó D, el punto medio del segmento AB, y los triángulos ADC y CDB (figura 1c). También le pidió recordar elementos usados al resolver anteriores problemas que pudieran ser útiles ahora, en particular los relacionados con congruencia de triángulos.

5. Diego: Ya, pues, ha de ser la misma distancia porque el triángulo CDB y CDA siempre son congruentes, aunque yo mueva C [arrastra C a lo largo de la mediatriz].
6. Prof.: ¿Por qué crees que esos dos triángulos siempre son congruentes?
7. Diego: Sé que tienen la misma base, porque es la mitad del segmento AB, y tienen la misma altura que es DC. Entonces, sabemos que tenemos este lado [señala el segmento DB] y este lado [señala el segmento DC] … y este ángulo de aquí [señala el ángulo CDB] siempre va a ser de 90º, así que tenemos dos lados y un ángulo… y así ya sabemos que son congruentes.

La solución en 2D dejó ver una primera aproximación de Diego en la que proponía una demostración que vinculaba elementos empíricos y teóricos [2, 4]. En este caso, Diego sustentaba gráficamente la pertenencia de los puntos A y B a la circunferencia, pero luego evocaba la congruencia de los radios de esta para concluir la equidistancia. La reacción del profesor a esta aproximación (*formulación de requerimientos: elaboración*) [3] y la sugerencia de emplear congruencia de triángulos (*otras acciones de apoyo: direccionar*) [6] llevó a Diego a explotar las propiedades de la mediatriz que él conocía y otras dadas por el protocolo de construcción [7], con lo que ofreció una explicación formal de la equidistancia solicitada.

Diego procedió a resolver la segunda parte del problema. En la vista 3D de GeoGebra se veían el segmento AB, su punto medio D y su mediatriz. Diego declaró su interés en construir un plano o recta perpendicular al plano XY (plano gris) que contuviera la mediatriz. Él no conocía las herramientas de GeoGebra 3D suficientemente, por lo que el profesor le ayudó a construir la recta perpendicular al plano XY que pasa por C y el plano que determinan esta recta y la mediatriz (figura 2a).

8. Diego: Si C está en ese plano [verde], B y A estarán dentro de esa circunferencia [la construida en el plano XY al resolver el problema en 2D]… a la misma distancia.
9. Prof.: Listo. ¿Por qué crees que ese plano es el que soluciona la tarea?
10. Diego: Porque en el 2D solo nos teníamos que preocupar de que estuviera en la perpendicular [mediatriz], pero ahora también nos tenemos que preocupar de la altura [desplazamiento vertical de C, figura 2b]. Pero en realidad la altura prácticamente no influye en nada. Por muy alto que esté C dentro de este plano [verde], que esté arriba o debajo de la mediatriz, pues siempre habrá la misma distancia.
11. Prof.: ¿Podrías mostrarme de alguna manera por qué ese plano funciona?
12. Diego: Voy a mover a C (en el plano verde) …

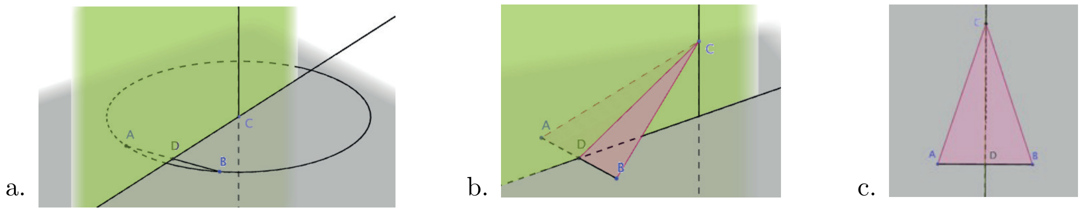

Figura 2. Resolución del problema en la configuración 3D.

Al arrastrar C fuera del plano XY la circunferencia de la que era centro desapareció y el plano construido quedó vinculado a la recta perpendicular al plano XY que contenía C y un punto en la mediatriz. Debido a esto, Diego arrastró horizontalmente C, hasta que el plano verde contuviera a la mediatriz. Luego, Diego construyó los triángulos CDA y CDB (figura 2b) y determinó las longitudes de los segmentos AC y CB. El profesor le pidió explicar la validez del plano construido.

13. Diego: Porque lo que cambia de aquí [3D] al 2D es la altura. Pero solo con que esté a la misma altura que cualquier punto de una mediatriz… Yo creo que funciona porque la altura no influye, lo único que influye es que esté en el mismo plano, que se pueda hacer una perpendicular con la mediatriz que hemos hecho.
14. Prof.: ¿Como así? ¿Eso último que dijiste cómo es?
15. Diego: Lo único que importa es que los puntos…, que el punto C sea coplanar a la recta [mediatriz]. Porque la altura, lo que es la dimensión Z no importa, lo único que importa es la X e Y del plano. La Z puede estar donde quiera.

El profesor le recordó a Diego que en 2D había usado la congruencia de triángulos para validar su construcción y le preguntó si era posible replicar dicha estrategia en 3D. Observado la construcción desde arriba (figura 2c), Diego aseguró que sí era posible, pues las condiciones para establecer la congruencia entre los triángulos eran iguales a las que había en 2D. Aunque Diego cambió de perspectiva para modificar la posición de C en el plano verde, regresó a la vista superior de la construcción para afirmar que, en cualquier posición de C en el plano, el razonamiento era igual.

El profesor reaccionó a las ideas de Diego, mencionándole que la congruencia de lados era algo que sí se mantenía de 2D a 3D, pero que la perpendicularidad era algo solamente válido en 2D, dado que allí se apoyaba en la propiedad de perpendicularidad de la mediatriz. Por lo anterior, le preguntó a Diego por la validez de la perpendicularidad en la configuración 3D.

16. Diego: Lo que yo creo es que es porque el propio plano [verde] actúa como perpendicular. Es decir, como… esta mediatriz infinitas veces hacia arriba y hacia abajo. Porque… para que el punto C pueda estar a la misma distancia de A y B, como son, entre comillas, infinitas mediatrices, siempre va a estar en una [la figura 3a representa la idea de Diego]. Entonces va a estar a la misma distancia de A y B. Entonces, lo que hace aquí la perpendicular con el triángulo sería el propio plano.
17. Prof.: Hay dos o tres cosas que dijiste que me llamaron mucho la atención. La primera: dijiste que había infinitas mediatrices. Cuando dices infinitas mediatrices, ¿te refieres que para el segmento AB existen infinitas mediatrices?
18. Diego: No exactamente. Me refería a que la mediatriz de A y B…, lo que quería hacer con este plano [verde] era duplicarla y copiarla en el eje Z, crear infinitas para que el punto C estuviera a la misma distancia al estar en una mediatriz, aunque no fuera la original [figura 3a].

19. Prof.: Entonces tú dices no, para un segmento, solamente hay una mediatriz.

…

20. Diego: Bueno…, la mediatriz puede estar igual en el espacio también. No solo puede haber una, puede haber infinitas también.
21. Prof.: Ah, o sea que sí hay infinitas mediatrices para un segmento.
22. Diego: Sí, porque la mediatriz… el punto que estamos usando ahora mismo es el C. Pero para hacer una recta necesitamos dos puntos. Entonces el punto puede estar… este es el punto medio [punto D], entonces está el punto medio y cualquier otro punto [del plano verde].

a.
b.

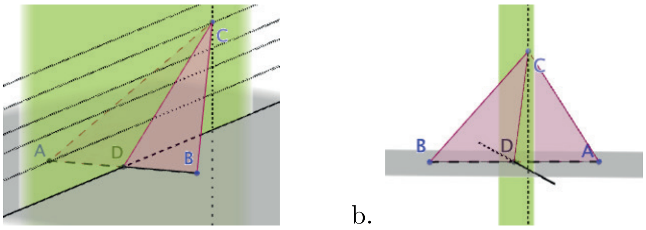

Figura 3. Manipulación de representaciones gráficas.

El profesor cuestionó a Diego por los motivos que le llevaron a asegurar que el plano construido gozaba de la propiedad de perpendicularidad y con respecto a qué era perpendicular.

23. Prof.: Dijiste que ese plano era como perpendicular, ¿te acuerdas que dijiste eso? ¿perpendicular a qué?
24. Diego: Al otro plano gris.
25. Prof.: ¿Tu qué entiendes de que dos planos sean perpendiculares?
26. Diego: Por ejemplo… que sus infinitas rectas sean perpendiculares. A ver, he dicho perpendicular, pero lo he dicho por la forma esta, no que fuera que tenía que ser perpendicular sí o sí.
27. Prof.: ¿Qué forma?
28. Diego: La forma que hacen de cruz (figura 3b). Y que sé que este ángulo [señala la intersección entre los planos] es de 90º.

El profesor propuso a Diego considerar lo que pasaría si la mediatriz del segmento AB rotaba alrededor de su punto medio. Diego aseguró que esta recta estaría en el plano construido. Ante esta respuesta, el profesor pidió a Diego explicar por qué en los triángulos ADC y BDC se contaba con un ángulo recto, propiedad mencionada al justificar la pertinencia del plano construido.

29. Diego: El ángulo que sabemos que es recto… porque hay una mediatriz… una de las infinitas del plano…
30. Prof.: En este caso, ¿cuál podría ser? ¿Podríamos saber cuál es?
31. Diego: La que pasa por D y por C.
32. Prof.: Esa recta DC es mediatriz del segmento AB, ¿por qué?
33. Diego: Sí, porque está dentro del plano de todas las mediatrices y porque corta de forma perpendicular al segmento AB por su punto medio.

34. Prof.: Esa recta DC es una mediatriz. ¿Qué pasa con que sea una mediatriz?

35. Diego: Pues que está en perpendicular al segmento AB.

En la configuración 3D, la primera justificación que Diego produjo sobre la pertenencia del punto C al plano construido se sustentaba en la conservación de la equidistancia a través del desplazamiento vertical de este punto [10, 13]. Para Diego, tomar un punto en la mediatriz y desplazarlo verticalmente no afectaba la igualdad de distancias. En un segundo momento, el profesor enfocó la atención de Diego en la justificación dada en 2D (*otras acciones de apoyo: direccionar*), cuestionándolo sobre la posibilidad de que esta pudiera ser replicada en 3D. La respuesta positiva de Diego frente a esto, en particular la perpendicularidad entre AB y CD que él declara, llevó al profesor a profundizar en el pensamiento del estudiante (*formulación de requerimientos: elaboración*), lo que favoreció que Diego mencionara la infinitud de mediatrices del segmento AB en el espacio [20, 22] y su pertenencia al plano mediador como justificación de la perpendicularidad entre los segmentos mencionados [33, 35]. Al final, Diego organizó sus ideas y explicó por qué C equidistaba de A y B apoyándose en la congruencia de triángulos.

CONCLUSIONES

La forma en que Diego resuelve el problema se caracteriza por un distanciamiento de las acciones con el AGD esperadas por el profesor. Aunque el problema pedía arrastrar un punto en 2D o 3D para que equidistara de dos puntos fijos, como contexto para el descubrimiento de la mediatriz y el plano mediador, Diego anticipó en ambos casos el objeto geométrico que se obtendría, expresando su conocimiento previo de la mediatriz y su propiedad de perpendicularidad. Esto permitió dirigir la conversación hacia la demostración de que los puntos en la recta y el plano equidistan de A y B.

En las conversaciones presentadas se evidencia un constante apoyo por parte del profesor hacia Diego, con la intención de que este elaborara con mayor detalle las ideas que exponía o que centrase su atención en aspectos particulares que había dejado de lado y que podían llegar a ser útiles al construir la demostración de alguna propiedad. El resultado de esta conversación deja ver que este apoyo es favorable, no solo por el logro de una demostración cercana a la formal sino también por la forma como la comprensión de Diego sobre los objetos de discusión es exhibida y manejada por el profesor de acuerdo con el objetivo del problema abordado.

La interpretación que hemos realizado sobre la conversación entre el profesor y el estudiante que resuelve un problema de construcción brinda evidencia sobre la relevancia y efecto de las intervenciones del profesor en la actividad matemática de demostrar realizada por el estudiante. La combinación de acciones del profesor dirigidas a conocer en profundidad las ideas que el estudiante expresa, así como la ayuda que le brinda cuando es necesario, dejan ver su utilidad cuando se pretende involucrar al estudiante en el razonamiento deductivo. En nuestro caso, es además interesante que el profesor nunca realizó una *contribución directa*, lo que permite decir que este dio prioridad al desarrollo y guía de las ideas del estudiante de acuerdo con el objetivo de aprendizaje del problema y no a la elaboración de la demostración de la propiedad involucrada.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto PID2020-117395RB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y de la ayuda predoctoral EDU2017-84377-R, financiada por FSE Invierte en tu futuro.

Referencias

Conner, A. y Singletary, L. M. (2021). Teacher support for argumentation: An examination of beliefs and practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *52*(2), 213-247. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0250

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática* (pp. 27-44). SEIEM.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Analysis of the learning of space geometry in a 3-dimensional geometry environment. *PNA*, *9*(2), 53-83. https://doi.org/https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6106

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic geometry systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 163-185. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282

Mariotti, M. A. (2019). The contribution of information and communication technology to the teaching of proof. En G. Hanna, D. A. Reid y M. de Villiers (Eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching* (pp. 173-195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 87-125.

Sinclair, N. y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y K. F. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 571-596). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_19

Singletary, L. M. y Conner, A. (2015). Focusing on mathematical arguments. *The Mathematics Teacher*, *109*(2), 143-147. https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.2.0143

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J. y Ulloa, R. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(7), 977-1005. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686

van Zee, E. y Minstrell, J. (1997). Using questioning to guide student thinking. *Journal of the Learning Sciences*, *6*(2), 227-269. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0602_3