

# ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE VISUALIZACIÓN EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3D Y REALIDAD AUMENTADA: ALINEANDO PUNTOS EN EL ESPACIO

## Analysis of an activity of visualization in a 3d dynamic geometry with augmented reality environment: aligning points in space

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

### Resumen

*La representación plana de objetos tridimensionales acarrea problemas en la interpretación y reconocimiento de propiedades del objeto. Se considera que los programas de geometría dinámica ayudan a resolver en parte esta problemática. Pero se ha realizado poca investigación sobre el uso de aplicaciones de geometría dinámica espacial. Analizamos la actividad y los niveles de pensamiento espacial (Kondo et al., 2014) de dos estudiantes para maestro de educación primaria al resolver una tarea de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica y realidad aumentada. Hemos identificado distintos niveles de pensamiento geométrico en las estrategias de resolución, así como la complejidad de las interacciones con objetos espaciales en un ambiente de geometría dinámica espacial dotado de realidad aumentada.*

**Palabras clave:** *realidad aumentada, Geogebra, visualización, representaciones planas, geometría espacial*

### Abstract

*Plane representation of 3-dimensional objects causes problems in the interpretation and recognition of properties of the objects. It is considered that dynamic geometry software partly helps address this issue. However, little research has been done on the use of this software in spatial geometry. In this paper, we analyse the activity and levels of spatial thinking (Kondo et al., 2014) of two future primary school teachers when solving a spatial geometry task in a dynamic geometry software with augmented reality environment. We have identified different geometry thinking levels in the strategies of solution, and the complexity of students' interactions with space objects in a dynamic geometry environment 3d with augmented reality.*

**Keywords:** *augmented reality, Geogebra, visualization, 2-dimensional representation, spatial geometry*

## INTRODUCCIÓN

Hoy en día hay un amplio reconocimiento de los programas de geometría dinámica (en adelante PGD o GD), sus principales características y las bondades y retos que este recurso demanda para su inserción en la enseñanza y aprendizaje de la geometría (Sinclair et al., 2016). Según estos autores, son varios los esfuerzos investigativos desde la didáctica de las matemáticas que se han realizado en esta vía. Sin embargo, un especial énfasis se ha dado a los PGD que corporeizan objetos de geometría plana, dejando de lado la investigación sobre los PGD de geometría espacial (en adelante, PGD3d o GD3d) (Gutiérrez y Jaime, 2015).

En los últimos años, el desarrollo tecnológico de tabletas y teléfonos inteligentes ha permitido el diseño de entornos de realidad virtual y realidad aumentada que aprovechan características específicas de estos dispositivos. En particular, se ha integrado la realidad aumentada (en adelante, RA) en

algunos PGD3d. La RA amplifica el mundo real al insertar en él contenido multimedia creado por computador, en nuestro caso, objetos de geometría espacial. Estos objetos son observados en las pantallas de los dispositivos móviles. GeoGebra ofrece la posibilidad de explotar esta posibilidad en la educación matemática, presentando sus construcciones en RA, para interactuar con ellas en este ambiente y observarlas en el mundo real y no en la pantalla de un computador (Tomaschko y Hohenwarter, 2019).

Un problema de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría espacial es el tratamiento por los estudiantes de representaciones de objetos geométricos (Jones et al., 2012). Por lo general, estos objetos se presentan mediante representaciones planas, lo que lleva a errores en su elaboración o lectura (Parzysz, 1988). Los PGD3d son una forma de atender esta problemática, al permitir manipular los objetos corporeizados y poder observarlos desde distintos puntos de vista. La investigación ha mostrado que los tipos de representaciones tridimensionales a los que se accede inciden en el razonamiento de los estudiantes sobre los objetos corporeizados (Kondo et al., 2014), dando con ello respaldo a los PGD3d y, en particular, a los ambientes de RA.

Dado el estado embrionario en que se encuentra la investigación sobre la incidencia de los PGD3d, es necesario recoger evidencia empírica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con estos recursos (Gutiérrez y Jaime, 2015). Haciendo énfasis en el aprendizaje, presentamos una experiencia en la que se propuso una tarea de geometría espacial en un ambiente de GD3d con RA a estudiantes de Magisterio, con el objetivo de investigación de analizar las interacciones con las representaciones de objetos tridimensionales corporeizadas en este ambiente, las estrategias de solución desarrolladas y sus niveles de pensamiento geométrico.

## REFERENTES CONCEPTUALES

El análisis que hacemos de la actividad de resolución de tareas de geometría espacial en un ambiente de GD3d con RA se basa en dos componentes centrales, la interpretación por los estudiantes de las representaciones en la pantalla de objetos espaciales y su uso de la visualización.

### Objetos tridimensionales y representaciones bidimensionales

De acuerdo con Parzysz (1988), cuando un objeto tridimensional es representado en el plano, se pierde información debido a las limitaciones del medio donde este se representa. Esta pérdida de información se evidencia al tratar de decidir si una representación plana corresponde a un objeto tridimensional y, si es así, observar sus propiedades. También se presenta al querer representar un objeto tridimensional en un formato bidimensional. Aunque hay convenciones que mitigan este problema (segmentos punteados, proyecciones, etc.), el problema persiste cuando esas convenciones no se conocen o cuando no son suficientes para capturar la naturaleza del objeto espacial (p. ej., representar o identificar la tangencia de una esfera inscrita en un dodecaedro).

En los ambientes computacionales, se ha visto una posibilidad para apoyar el reconocimiento de relaciones en representaciones gráficas o las representaciones de un objeto geométrico (Laborde et al., 2006). En particular, los PGD3d ofrecen la posibilidad de acceder a varias representaciones gráficas de un objeto geométrico (Jones et al., 2012) a través de su manipulación. Sin embargo, como en los libros de texto, las representaciones en una pantalla también son planas, por lo que, aunque están dotadas de movimiento, solo se puede ver una representación apropiada en la pantalla si se interactúa correctamente con el PGD3d.

Para comprender la naturaleza del pensamiento geométrico de los estudiantes al interactuar con objetos tridimensionales, Kondo et al. (2014) proponen un modelo analítico en el que articulan los constructos de los niveles de pensamiento espacial y las capacidades que intervienen en la interpretación de objetos tridimensionales. La Tabla 1 presenta este modelo, con tres niveles caracterizados por dos dimensiones: (i) reconocimiento de propiedades de figuras tridimensionales y (ii) manipulación de diferentes representaciones de objetos tridimensionales. Este modelo es apropiado para analizar las

actuaciones con PGD3d, ya que las representaciones en pantalla son bidimensionales.

Tabla 1. Niveles de pensamiento en geometría espacial (Kondo et al., 2014, p. 27)

| Nivel | Razonamiento con propiedades 3d | Manipulación      | Características del pensamiento 3d de los estudiantes                                                        |
|-------|---------------------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | No                              | No                | El pensamiento de los estudiantes está influenciado por representaciones 2d.                                 |
| 2 a   | Sí (no apropiado)               | No                | Los estudiantes empiezan a utilizar propiedades 3d de las figuras, pero sin su manipulación efectiva.        |
| 2 b   | Sí (no apropiado)               | Sí (no apropiado) | Los estudiantes utilizan propiedades 3d y manipulan la figura, pero esta no es apropiada.                    |
| 2 c   | Sí (no apropiado)               | Sí                | Los estudiantes utilizan propiedades 3d y manipulan la figura apropiadamente, pero con respuesta incorrecta. |
| 3     | Sí                              | Sí                | Los estudiantes utilizan propiedades 3d y manipulan la figura apropiadamente, con respuesta correcta.        |

### Componentes de la visualización

De acuerdo con Gutiérrez (1996), la visualización es un componente básico en la enseñanza y aprendizaje de la geometría 3d, de ahí su interés para la investigación en educación matemática. Para este autor, la visualización es una actividad de razonamiento que se apoya en elementos visuales o espaciales, que pueden ser mentales o físicos, con los cuales se da solución a tareas. Esta actividad involucra cuatro elementos: imágenes mentales, representaciones externas, procesos de visualización y habilidades de visualización, caracterizados por (Gutiérrez, 1996, pp. 9-10):

“Una *imagen mental* es cualquier tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática apoyado en elementos visuales o espaciales.” Estas imágenes son elementos básicos en la visualización. “Una *representación externa* ... es cualquier tipo de representación verbal o gráfica de conceptos o propiedades ... que ayudan a crear o transformar las imágenes mentales y hacer un razonamiento visual.” “Un *proceso de visualización* es una acción física o mental que involucra imágenes mentales. En visualización se reconocen dos procesos: interpretación visual de la información, para crear imágenes mentales, e interpretación de imágenes mentales, para generar información”. Finalmente, las *habilidades de visualización* son necesarias “para llevar a cabo los procesos necesarios con imágenes mentales específicas en la tarea dada.”

Aunque los PGD3d ofrecen representaciones aparentemente tridimensionales de objetos espaciales, el medio donde se muestran es plano; por lo tanto, la interpretación que se realice de estas representaciones puede acarrear dificultades en las imágenes mentales generadas (p. ej., establecer propiedades sin tener certeza de estas). Por otro lado, los PGD3d pueden apoyar la conformación de imágenes mentales ricas (Gutiérrez y Jaime, 2015), ejemplo de ello es que una representación externa estática pueda verse como instancia de un objeto geométrico en movimiento. Aun con un PGD3d, es necesario interpretar correctamente las representaciones externas que este recurso provee.

### METODOLOGÍA

Participaron tres estudiantes de una asignatura de didáctica de la geometría de 4º curso del Grado de Maestro de Primaria de la Universidad de Valencia, elegidos como muestra de conveniencia debido a su notable desempeño en dicha asignatura. La formación matemática de los estudiantes incluía un curso de matemáticas para maestros en 2º año del Grado, donde se estudian temas de geometría 3d como sólidos, simetrías, áreas y volúmenes. El experimento, con el primer autor como profesor, consistió en resolver varias tareas planteadas en la aplicación Calculadora 3D de GeoGebra con la RA activada y se realizó en un aula con un amplio espacio vacío de mesas, que permitía el movimiento libre de los estudiantes. Las tareas eran parte de una secuencia en construcción para utilizar la RA. La experiencia de los estudiantes con GD3d era mínima y nunca habían utilizado RA.

Cada estudiante disponía de un iPad, desde el que podía acceder a archivos preparados para realizar las tareas. Al empezar, les explicamos cómo arrastrar puntos en el espacio y activar la RA. La primera tarea requería moverse alrededor de una figura geométrica mostrada en RA para encontrar posiciones de la figura en las que se vieran configuraciones geométricas particulares, por ejemplo, dos cuadriláteros (Figura 1a). El objetivo de esta tarea era familiarizarse con el uso del iPad, los ambientes RA y el cambio de representaciones en pantalla. La segunda tarea mostraba un conjunto de puntos de distintos colores ubicados en el espacio y sin relación alguna entre ellos (Figura 1b). El objetivo era arrastrar los puntos hasta que fuesen colineales. Los puntos eran libres excepto dos de ellos que estaban bloqueados, lo cual impedía mover todos los puntos al plano  $z = 0$  y alinearlos allí. En este texto analizamos la resolución de la segunda tarea. Resolver la primera tarea tomó entre 11 y 15 minutos y la segunda tomó 9, 18 y 24 minutos.

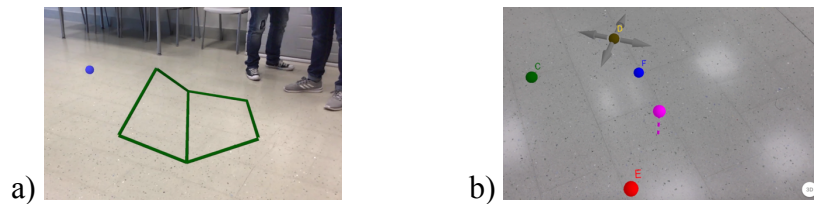


Figura 1. Tareas de reconocimiento de formas (a) y de alineación de puntos (b)

Los datos recogidos provienen del registro audiovisual de lo que ocurría en las pantallas del iPad (captura de pantalla), los movimientos que hacían los estudiantes y lo que estudiantes e investigadores verbalizaban (cámara externa) durante la sesión cuando surgía alguna inquietud o el investigador quería conocer con mayor detalle alguna estrategia. Cuando un estudiante finalizaba la tarea, explicaba verbalmente el procedimiento llevado a cabo y los motivos por los que consideraba que su solución era correcta. Para el análisis de la información, hemos utilizado el marco teórico detallado antes, caracterizando la actividad de visualización y el pensamiento geométrico espacial exhibidos por los estudiantes a partir de su interacción con el iPad y sus verbalizaciones.

## RESULTADOS: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES DE LOS ESTUDIANTES

Primero describimos las interacciones con la RA observadas al resolver la tarea. Después, apoyados en estas interacciones y algunas verbalizaciones, analizamos el proceso de solución. Por motivos de espacio, seleccionamos y analizamos dos estudiantes, cuyas actuaciones al resolver la tarea permiten ilustrar diferentes aproximaciones con la RA y niveles de pensamiento geométrico espacial.

### Tipos de interacciones de los estudiantes con la RA

Durante la resolución de la segunda tarea, los estudiantes evidenciaron diversas estrategias de interacción con la RA, es decir de movimiento por el aula y de arrastre de los puntos en la pantalla para tratar de alinear los puntos:

- Interacción i1: Se para en una posición fija y observa la nube de puntos. Arrastra los puntos para alinearlos de acuerdo con su percepción visual.
- Interacción i2: Se para en una posición fija y observa la nube de puntos. Arrastra los puntos para alinearlos con el apoyo de líneas observadas en elementos del entorno, como suelo, paredes, mesas, etc.
- Interacción i3: Se para en una posición fija y observa la nube de puntos. Arrastra los puntos para alinearlos prestando atención a las líneas de proyección en el plano  $z = 0$ .
- Interacción i4: Se para en una posición fija, elige un punto y ubica los demás detrás de ese.
- Interacción i5: Se sitúa en distintas posiciones para observar desde cada una la nube de puntos.

Arrastra los puntos para alinearlos; se mueve a otra posición, verifica si se mantienen alineados y, en caso necesario, arrastra puntos para volver a alinearlos; repite el procedimiento las veces necesarias. Todo ello, con el apoyo de la percepción visual.

- Interacción i6: Se sitúa en distintas posiciones para observar desde cada una la nube de puntos. Arrastra los puntos para alinearlos; se mueve a otra posición, verifica si se mantienen alineados y, en caso necesario, arrastra puntos para volver a alinearlos; repite el procedimiento las veces necesarias. Todo ello, con el apoyo de la percepción visual y de líneas observadas en elementos del entorno.

### Análisis de las resoluciones de la tarea

Para preservar su anonimato, llamamos a los estudiantes E1 y E2. E1 siguió la estrategia i3, hasta afirmar que había terminado la tarea. Cuando el profesor le solicitó que explicara la validez de su construcción, E1 se basó en la colinealidad de las proyecciones en pantalla: *las líneas [proyecciones de los puntos] coinciden con esta línea [punteada rosada] que me sirve de guía* (Figura 2a). El profesor le pidió que cambiara su posición, con lo que vio que su solución no era válida (E1: *Se mueven [los puntos]*) y que la pantalla debía mostrar los puntos colineales desde cualquier posición (E1: *Entonces, hay una forma desde la que todas las perspectivas se ven rectas*). E1 realizó nuevamente i3, a la vez que se movía para observar la construcción desde distintos ángulos: *¿Cómo hacemos para que queden fijos? Yo he conseguido hacerlo desde una perspectiva, no de todas, se mueven*.

E1 utilizó la estrategia i1 en varias ocasiones sin éxito (Figura 2b), pues, al cambiar de posición, se rompía la colinealidad: *Es que se mueven, debe haber un tipo de estrategia* (Figura 2c). En algunas oportunidades integró i3 a i1, pero el resultado era el mismo. Esta secuencia de intentos fallidos llevó a E1 a mostrar algo de impotencia: *Utilice la forma que utilice, no da... No sé cómo fijarlos*.



Figura 2. Primeras estrategias de solución de E1

E1 cambió de estrategia y utilizó i4: *Y si los pongo todos en el [punto] E...*, con lo cual los tres puntos manipulables quedaron detrás del punto rojo E (Figura 3a). Cuando cambió su posición notó que el punto E y los otros tres que manipuló estaban ligeramente alineados: *Más o menos me sale, pero no los he cuadrado exacto debajo del punto E...* (Figura 3b). El profesor le explicó que no debía preocuparse por la precisión, solo por lograr una buena aproximación y que observara que uno de los puntos no satisfacía aún la condición (Figura 3c). El ya era consciente de ello:

- E1: He utilizado una táctica, que *es* poner todos en [detrás de] el E, pero no los puedo poner todos exactamente porque entonces [el punto E] me lo[s] tapa y no lo[s] veo. Parecía que, desde varias perspectivas, no todas, varias, sí que estaban [alineados; se desplaza para mostrar los puntos alineados, Figura 3a]. Lo que pasa es que no puede ser exacto. Ahí, más o menos. Y me estiro así [se aleja de la construcción] y aquí coinciden [Figura 3b], más o menos. Pero luego vamos a probar otra [posición]... aquí ya no [Figura 3c, el punto rosa no está alineado].



Figura 3. Colocar todos los puntos tras otro

E1 reconoció en i4 una forma efectiva de alinear los puntos, sin embargo, no era consciente que la limitación de esta estrategia residía en tomar únicamente uno de los dos puntos fijos como referente. Este estudiante replicó i4 y observó la representación desde distintas perspectivas: *El rosa tiene que ir incluido en los puntos colineales, ¿no?* Ante la respuesta afirmativa, E1 retomó i1 e i4 sin éxito alguno. Parece que aun no era consciente de la ineficacia de estas estrategias tal como las había usado hasta ahora. Al final E1 reconoció que i3 no era efectiva: *Si yo, por ejemplo, intento hacer la misma línea [punteada] con todos así... tampoco vale, porque hay una perspectiva en la que se ve [colinealidad] y en las otras no.* En un último intento, E1 ejecutó nuevamente i1 y, sin moverse, ejecutó i4. Al observar la construcción desde distintas posiciones, notó que el punto verde cumplía la condición y que el azul estaba próximo a cumplirla (Figura 4a). Arrastró los puntos amarillo y azul, ajustando su posición respecto a los otros hasta obtener la colinealidad (Figura 4b). Pese a ello, no era consciente de cómo lo había realizado: *Te digo una cosa, no sé cómo lo he hecho.*

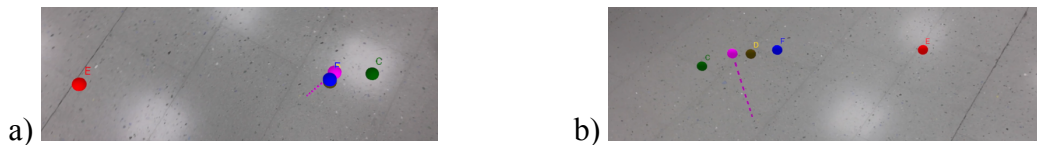


Figura 4. Último intento de alinear los puntos

Las acciones iniciales de E1 sobre los puntos en pantalla y las expresiones que las acompañan reflejan un nivel 1 de pensamiento (Tabla 1). E1 se apoya en una representación externa plana provista por la pantalla al mantenerse en una sola posición, desde la cual arrastra los puntos hasta que se ven alineados gracias a las líneas de proyección de estos sobre el plano  $z = 0$ . Sus verbalizaciones, al ver los puntos desde otras posiciones, dejan ver que E1 no reconoce propiedades 3d en la configuración estudiada. La interpretación de la información que realizaba era básica, ligada a una única representación externa, con la que ha interactuado, por lo que su imagen mental de la nube de puntos inicial es estática e incompleta.

Después, E1 integra otras representaciones a su labor, pero sigue apoyado solo en una para manipular los puntos, usando la segunda para corroborar la colinealidad. En este caso, su nivel de pensamiento es 2a ya que, aunque no manipula distintas representaciones externas para alcanzar el resultado, sí hay un razonamiento sobre la forma de verificar la validez de sus acciones con estas, lo cual se evidencia al expresar la necesidad de una estrategia que le permita alcanzar la colinealidad. Así pues, parece que la imagen mental que ha formado mejora por el uso de varias representaciones externas y no es tan básica como antes, aunque parece seguir siendo estática.

La estrategia de colocar los puntos detrás de otro le permite a E1 reconocer oportunidades y limitaciones, como la imposibilidad de solucionar la tarea al dejar un punto fijo fuera de la configuración. En este caso, hay una manipulación de distintas representaciones, aunque su razonamiento no es adecuado al no contemplar el segundo punto fijo. Por lo tanto, se sitúa en el nivel de pensamiento 2c. Sus expresiones y las representaciones externas a las que acude como soporte dejan ver un beneficio en su imagen mental. Al final, E1 reconoce las limitaciones y bondades de cada estrategia empleada, pero no usa esta experiencia para articular de buena forma sus acciones. Sin tener conciencia de cómo lo hace, una composición de estrategias lo lleva a resolver la tarea. E1 exhibe una manipulación de las representaciones y un razonamiento apoyado en los objetos tridimensionales al hablar de las estrategias empleadas, aunque este no es totalmente válido por la ausencia de articulación en sus ideas. De esta forma, sigue evidenciando el nivel 2c.

Analizamos ahora las acciones realizadas por el estudiante E2. E2 empezó utilizando la estrategia i2, usando las divisiones de las baldosas del suelo (Figura 5a). Reconoció que esto no era acertado, pues el punto rojo, que es un punto fijo, no estaba en esta línea, así que rotó la construcción hasta que los puntos fijos (rosa y rojo) quedaron sobre la línea del suelo (Figura 5b). Entonces, E2 ejecutó nuevamente i2, logrando la colinealidad desde la posición adoptada (Figura 5c).



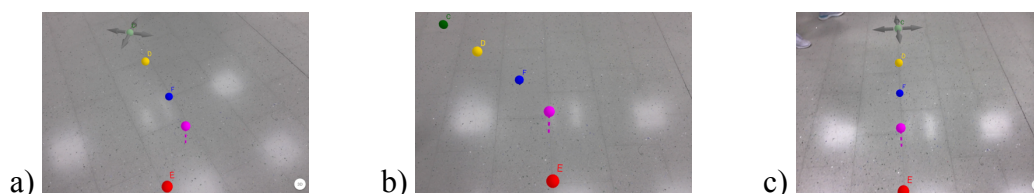


Figura 5. Uso de referentes externos

E2 afirmó: *Vale, ya tengo esta... lo que va a pasar es que uno [de los puntos] va a estar más alto que el otro*, por lo que se desplazó para cambiar la representación en pantalla, hasta que los puntos no se vieran colineales (Figura 6a). En esta nueva perspectiva utilizó i1 hasta lograr la colinealidad desde la vista a la que tenía acceso (Figura 6b). Esto último le permitió colocar todos los puntos a la misma “altura”. E2 cambió su posición y observó la construcción desde la parte superior, donde manipuló los puntos, bajo un esquema i5, hasta lograr la colinealidad solicitada (Figura 6c).

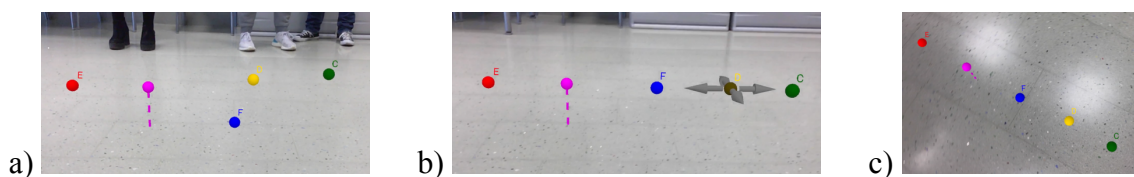


Figura 6. Alineación vertical de los puntos

E2 corroboró su construcción observándola desde distintas posiciones y dijo que había terminado. En algún momento el profesor le pidió que observara la construcción desde abajo, posición no alcanzable por lo bajo que estaban los puntos. E2 dijo: *No sale, por que está más bajo que yo... pero bueno, si se ve desde arriba, se verá desde abajo, ¿no?* Cuando se le pidió explicar por qué su estrategia era válida, E2 aseguró: *Están uno detrás del otro, porque lo mire desde donde lo mire, no está uno más bajo o alto que el otro*.

Destaca que, en sus acciones, E2 aprovecha el entorno físico, aspecto favorecido por la RA, y que reconoce su error en el primer intento, pues no puede alinear un punto fijo con los otros, lo que moviliza un ajuste en su representación en pantalla. A diferencia de E1, este estudiante toma los dos puntos fijos como referencia. Antes de ejecutar cualquier otra acción, E2 sospecha que los puntos no están a la misma altura, por lo que busca una nueva posición en que esto se aprecie mejor y le permita manipular los puntos en atención a ello. La estrategia de E2 combina dos perspectivas, que le permiten solucionar la tarea. Se aprecia el nivel 3 en su pensamiento, dado que anticipa la configuración de los puntos al realizar la primera manipulación y, con ello, muestra que está razonando sobre propiedades geométricas de estos objetos. Además, la segunda manipulación que realiza responde a una necesidad expuesta.

La imagen mental que refleja E2 es amplia y dinámica, no solo por las representaciones externas que elabora para materializar sus ideas y que le permitan operar para obtener nueva información, sino también por las habilidades de visualización que exhibe cuando considera innecesario ver los puntos desde debajo para corroborar que son colineales.

## CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

El experimento realizado con apoyo de la GD3d y la RA permitió reconocer formas de interactuar de los estudiantes con los puntos en pantalla, así como limitaciones y oportunidades de este entorno. Las limitaciones se debían a considerar las imágenes de la pantalla como bidimensionales. Esto ilustra cómo una configuración tridimensional es interpretada como bidimensional, aunque no sabemos si esta limitación es por el medio empleado o la falta de experticia de los estudiantes. El experimento permitió ver que los PGD, en nuestro caso RA, dada la posibilidad de manipulación y acceso a distintas vistas continuas, facilitó a los estudiantes contar con varias representaciones de la configuración estudiada, adoptar estrategias para corroborar si sus acciones sobre los puntos eran acertadas y tomar

decisiones sobre las acciones a realizar posteriormente. Aun así, adoptar estas prácticas no es intuitivo y puede requerir experiencias cuidadosamente diseñadas.

El experimento permitió ver diferencias en los niveles de pensamiento de los estudiantes y cómo en un caso estos se transformaron gracias a la experiencia que se adquiría al interactuar con la RA. Sin embargo, los niveles presentados corresponden a una configuración geométrica sencilla, en la que intervenían apenas puntos. Considerar una configuración en la que otros objetos de la geometría espacial intervengan (p. ej., poliedros), lleva a contemplar la necesidad de realizar esfuerzos de largo alcance que permitan a los estudiantes alcanzar niveles de pensamiento tridimensional superiores. Aun cuando se cuenta con PGD tridimensionales, estos por su propia cuenta no garantizan acceder a dichos niveles y otorgan un rol relevante a la gestión del profesor. Como se vio en este experimento, los PGD apoyan la dimensión de manipulación, aun cuando no de manera sencilla, pero la de razonamiento requiere esfuerzos aun mayores.

La RA es una tecnología emergente que ofrece la posibilidad de interactuar con objetos geométricos y el entorno mismo en que estos se representan. Entre estas formas de interacción muchas aludían a acciones físicas sobre el cuerpo. Hemos mostrado en el desarrollo de una tarea aparentemente sencilla la complejidad que puede acarrear el uso de esta tecnología en términos instrumentales y conceptuales. Esta idea bien podría aplicar a los PGD tridimensionales en general. Al proponer una tarea en la que se requería apenas el arrastre de puntos y el cambio de perspectivas de la configuración geométrica, se pudo observar un abanico de posibilidades y problemáticas. Considere ahora lo que ocurriría al involucrar en estos ambientes digitales objetos como poliedros, superficies y otros similares. Por lo anterior, se ve la necesidad de realizar mayores esfuerzos investigativos que permitan caracterizar el impacto de estos recursos en el aprendizaje de la geometría espacial.

Esta investigación forma parte del proyecto I+D+i EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y de la ayuda predoctoral EDU2017-84377-R.

## REFERENCIAS

- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–19). Valencia: PME.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53–83.
- Jones, K., Fujita, T., y Kunimune, S. (2012). Representations and reasoning in 3-D geometry in lower secondary school. En T.-Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 2, pp. 339–346). Taipéi, Taiwan: PME.
- Kondo, Y., Fujita, T., Kunimune, S., Jones, K., y Kumakura, H. (2014). The influence of 3D representations on students' level of 3D geometrical thinking. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting PME 38 and PME-NA 36*. (Vol. 4, pp. 25–33). Vancouver: PME.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., y Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275–304). Leiden, Países Bajos: Sense Publishers. [https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789087901127\\_011](https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789087901127_011)
- Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79–92.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691–719.
- Tomaschko, M., y Hohenwarter, M. (2019). Augmented Reality in Mathematics Education: The Case of GeoGebra AR. En T. Prodromou (Ed.), *Augmented reality in educational settings* (pp. 325–346). Leiden, Países Bajos: Brill | Sense. [https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789004408845\\_014](https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789004408845_014)