ESTRATEGIAS DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE EN LAS AULAS DE MATEMÁTICAS Y DE FÍSICA

Strategies of simple proportion in math and physics classroom

Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este trabajo analizamos las estrategias utilizadas por alumnado de 3º de ESO y 1º de Bachillerato en la resolución de problemas de proporcionalidad simple en aula de matemáticas y en el aula de física. El análisis se centra en valorar la tasa de éxito y en identificar las estrategias utilizadas, sean correctas o incorrectas. Los resultados muestran que el alumnado de 3º de ESO usa una mayor variedad de estrategias. En contraposición, el alumnado de 1º de bachillerato obtienen una mayor tasa de éxito. También indican que, indiferentemente del curso del alumnado, las estrategias utilizadas en el aula de física varían de las utilizadas en el aula de matemáticas.

Palabras clave: *proporcionalidad, educación secundaria, actividades intercurriculares, análisis de estrategias*

Abstract

In this work we analyse the strategies used by students of 3rd of ESO and 1st of Baccalaureate in solving problems of simple proportionality in the mathematics classroom and in the physics classroom. The analysis focuses on assessing the success rate and identifying the strategies used, whether correct or incorrect. The results show that 3rd ESO students use a greater variety of strategies. In contrast, the students of 1st baccalaureate obtain a higher success rate. They also indicate that, regardless of the student's course, the strategies used in the physics classroom vary from those used in the mathematics classroom.

Keywords: *proportionality, secondary education, cross-curricular activities, analysis of strategies*

INTRODUCCIÓN

La proporcionalidad es un concepto presente en el currículum de Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Postobligatoria (bachillerato), siendo en el currículo catalán de matemáticas un contenido clave en las etapas obligatorias. Lesh, Post y Behr (1998), lo describen como concepto fundamental para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares ya que supone la culminación de la aritmética elemental y es la piedra angular para adquirir muchos conocimientos posteriores (Martínez, Muñoz y Oller, 2015). También está implícitamente presente en física, siendo la cinemática, y concretamente el movimiento rectilíneo uniforme, un caso utilizado en varios estudios donde analizan las estrategias usadas por el alumnado de distintas edades en relación con la proporcionalidad (Cramer y Post, 1993; Lamon, 1993; Park, Park y Kwon, 2010). Pese a ser el mismo conocimiento, es posible que los métodos utilizados para afrontar la proporcionalidad por parte del alumnado sean diferentes en física y en matemáticas. Un ejemplo en este sentido lo presentan Monterrubio-Pérez, González-Astudillo, García-Olivares, Rodríguez-Cornejo y Rodríguez-Barrueco, (2019) en un estudio sobre desconexión entre matemáticas y física percibida por el alumnado de 4º de ESO, donde resuelven un problema de cinemática. Otro ejemplo más detallado de esta diferencia lo muestra el estudio con relación al concepto de pendiente en gráficos lineales de Planinic et al., (2012). Estudiar esta situación en otras edades y otros conceptos clave, como la proporcionalidad, es relevante para ampliar el conocimiento sobre conexiones entre disciplinas.

Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Estrategias de proporcionalidad simple en las aulas de Matemáticas y de Física. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 587 – 594). Valencia: SEIEM.

Conjeturando que los métodos puestos en práctica por el alumnado en problemas de proporcionalidad serán diferentes en el aula de física y en el aula de matemáticas, nos proponemos realizar un estudio exploratorio centrado en la identificación de las estrategias que utilizan los alumnos ante dichos problemas para estudiar la forma en la que las diferentes tradiciones propias de cada una de estas disciplinas condicionan el trabajo de los alumnos.

Por consiguiente, y buscando ampliar este campo de investigación, el propósito principal del trabajo es analizar las respuestas del alumnado de distintos niveles educativos a determinados problemas de proporcionalidad de valor perdido relacionados con movimiento rectilíneo uniforme en el aula de física y en el aula de matemáticas. En particular, nos centramos en:

- Estudiar la tasa de éxito del alumnado resolviendo los problemas.
- Analizar las estrategias utilizadas por el alumnado.
- Observar similitudes y diferencias de los anteriores puntos según el grado de nivel educativo y aula de trabajo

MARCO TEÓRICO

En relación con la clasificación de problemas de proporcionalidad, Cramer y Post (1993) clasifican dichos problemas en dos tipos: problemas de comparación numérica y problemas de valor perdido. Por otro lado, Lamon (1993) clasifica los problemas de proporcionalidad en cuatro tipos según la estructura semántica: problemas de medidas bien compactadas, parte-parte-todo, conjuntos asociados y ampliadores-reductores. Según el contenido de las actividades, aquellas que comprenden más de una disciplina, como en el caso de matemáticas y física, son denominadas actividades intercurriculares (Alsina, 1998). Las cuales se subdividen en tres tipos (Michelsen, 1998): actividades (tipo I) de una materia que contienen ciertos aspectos de otra, actividades (tipo II) donde hay una gran coordinación entre dos o más materias y actividades (tipo III) de tipo temático, donde interactúan varias materias, pero difícilmente se puede distinguir.

En referencia a las magnitudes utilizadas, podemos clasificar los problemas en razones internas y externas (Freudenthal, 1978), siendo las internas aquellas razones que corresponden a una misma magnitud y las externas aquellas que se dan en términos de distintos sistemas, por ejemplo, espacio y tiempo. Continuando con la razón, Fernández y Llinares (2010) determinan que el tipo de razón influye a la hora de resolver el problema correctamente. Añadir en este campo el trabajo de Nunes, Deli y Bell (2003) el cual indica que los problemas de proporcionalidad con magnitudes intensivas en el enunciado son más complicados que los que solo contienen extensivas, asociándolo a la familiaridad del alumnado con estas últimas.

En los estudios de identificación y análisis de estrategias del alumnado en problemas de proporcionalidad resulta muy interesante el trabajo desarrollado por Lamon (1993) con alumnado de 6º grado en el que categoriza las estratégicas en seis tipos: visual o aditivo, evasivo, construcción de patrón, razón proporcional, razón de proporción cuantitativa y razón de proporción cualitativa. Cramer y Post (1993), con alumnado de 7º y 8º grado determina cuatro estrategias diferenciadas: reducción a la unidad, algoritmo de producto cruzado, fracción equivalente y razón numérica como operador, agrupando las respuestas incorrectas en una misma categoría. Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel (2009) ofrecen una nueva clasificación centrándose en estrategias utilizadas por alumnado en problemas de valor perdido en primaria, dividiéndolas en aditivas o multiplicativas. Fernández y Llinares (2010) plantean una clasificación similar refiriéndose a ellas como aditivas o proporcionales, remarcando la tendencia del alumnado a utilizar mayoritariamente las proporcionales a medida que avanza de estudios de educación primaria a estudios de secundaria. En el estudio de Park, Park y Kwon (2010) aparecen nuevas categorías respecto los anteriores, añadiendo la fórmula matemática para referirse a la expresión algebraica de la velocidad bajo el modelo físico. En los estudios similares de otras disciplinas científicas encontramos estrategias no presentes en los estudios de didáctica de la matemática anteriormente mencionados. Gabel, Sherwood y Enochs (1984) obtienen como resultado de su estudio sobre habilidades del alumnado de educación secundaria en la resolución de problemas de química, que el alumnado con una gran habilidad en el uso del razonamiento proporcional tiende a usar estrategias algorítmicas de forma más frecuente siendo el factor de conversión la estrategia más utilizada. Observamos una gran variedad de estrategias en la resolución de problemas de proporcionalidad simple. Su utilización está influenciada por la estructura semántica del problema, aun así, la estructura numérica influye en la tasa de éxito y en la estrategia utilizada de manera más determinante que la estructura semántica (Steinthorsdotti, 2006).

MÉTODO Y MUESTRA

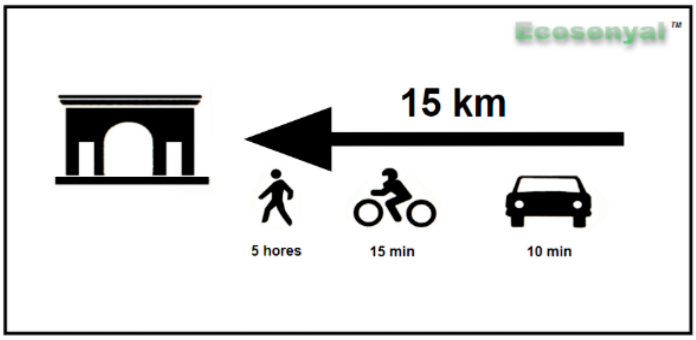
Acorde con los objetivos de investigación se plantea una metodología mixta. Los datos cualitativos se desprenden de la identificación y categorización de los métodos utilizados por los alumnos que se realiza mediante análisis de contenido. Los datos cuantitativos los aporta la descripción estadística de la población a partir de las categorías cualitativas establecidas a partir del análisis (Berg, 2007).

La muestra del estudio consta de 190 alumnos de 4 centros públicos del área metropolitana de Barcelona. Se trata de una muestra por conveniencia (Mejía, 2000) formada por alumnado de 3º de ESO y 1º de Bachillerato (Tabla 1). En cada uno de los niveles educativos se realizaba la prueba una única vez por alumno, llevándose a cabo en el aula de física o en el aula de matemáticas, con su profesor habitual y como actividad ordinaria de aula, sin instrucción específica previa sobre proporcionalidad.

Tabla 1. Clasificación del alumnado muestra según nivel educativo y aula en la que realizó la prueba

Grupos	Cantidad Alumnado
Alumnado de 3o de ESO en el aula de matemáticas	53
Alumnado de 3º de ESO en el aula de física	60
Alumnado de 1º de Bachillerato Científico en el aula de matemáticas	31
Alumnado de 1º de Bachillerato Científico en el aula de física	46

Para dar respuesta a los objetivos se diseñó y se aplicó un problema al alumnado en aula de física o en la de matemáticas. Posteriormente se analizaron las respuestas escritas. El problema aplicado consta de una imagen inicial que representa una señal informativa de tránsito seguida de un enunciado y cinco subapartados (Figura 1). El enunciado de la prueba es el siguiente:



La empresa Ecoseñal está trabajando en una nueva señalización viaria para generar conciencia ecológica sobre el transporte. Esta señal indica la distancia a una zona monumental y el tiempo estimado para llegar utilizando diferentes medios de transporte.

Responde las siguientes preguntas explicando el proceso que realizas en cada caso:

1) ¿Qué nuevos datos deberían aparecer bajo las figuras de la persona, la motocicleta y el coche en un cartel si la distancia a recorrer fuese de 30 km?

2) ¿Qué nuevos datos deberían aparecer bajo las figuras de la persona, la motocicleta y el coche en un cartel si la distancia a recorrer fuese de 7,5 km?

3) ¿Qué nuevos datos deberían aparecer bajo las figuras de la persona, la motocicleta y el coche en un cartel si la distancia a recorrer fuese de 25 km?
4) ¿Qué nuevos datos deberían aparecer bajo las figuras de la persona, la motocicleta y el coche en un cartel si la distancia a recorrer fuese de 4 km?
5) En un nuevo cartel se indica la cantidad, en gramos, de dióxido de carbono (CO_2) que se emite a la atmosfera con cada medio de transporte: 29g, 1275g y 2100 g. ¿Qué datos deberían aparecer en un cartel si se expresan las cantidades en litros? La densidad del CO_2 es de 1,87g/l

Figura 1. Enunciado de la prueba.

El problema se diseña con subapartados que involucran dos magnitudes extensivas, espacio y tiempo, generando una razón externa (Freudhental, 1978) y un único apartado con la magnitud intensiva de la densidad. Las razones externas son simples en los primeros apartados y crecen en complejidad, buscando un cambio de estrategia aplicada por el alumnado (Cramer y Post, 1993). Se opta por cantidades numéricas naturales en los enunciados para facilitar los cálculos (Steinthorsdottir, 2006) y se proponen valores que generan razones enteras, inicialmente, y se varía a no enteras, acorde al aumento de dificultad con razones no enteras (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009; Fernández y Llinares, 2010). La estructura semántica es de medidas bien compactadas (Lamon, 1993) y de tipo valor perdido (Cramer y Post, 1993). El contenido de la prueba, movimiento rectilíneo uniforme, se basa en las actividades de tipo 2 (Michelsen 1998), con gran coordinación entre dos materias, matemáticas y física, y se incluye una actividad relacionada con la densidad añadiendo química como disciplina.

ANALISIS

A partir de la literatura estudiada y recogida en el marco teórico, y tal y como se detalla en la tabla 2, se establecieron 11 categorías atendiendo a las estrategias usadas por el alumnado:

Tabla 2. Estrategias utilizadas por alumnado en la resolución de la prueba

Estrategia	Código
Sin respuesta	NC
Reducción a la unidad (Cramer y Post, 1993)	Ru
Algoritmo del producto cruzado (Cramer y Post, 1993)	R3
Aditivas (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009)	A
Razonamiento proporcional cualitativo “Comparación” (Lamon, 1993)	C
Reducción tomando la unidad como valor arbitrario (Park, Park y Kwon, 2010)	Rd
Multiplicación o división (Park, Park y Kwon, 2010)	D
Fracción equivalente (Cramer y Post, 1993)	Fe
Razón numérica como operador (Cramer y Post, 1993)	R
Factor de conversión (Gabel, Sherwood y Enochs (1984)	FC
Fórmula matemática (Park, Park y Kwon, 2010)	F

Utilizando la tabla 2 y los ejemplos de la literatura indicada en cada estrategia en dicha tabla se realiza un análisis de contenido de las respuestas del alumnado. Ejemplificaremos el análisis realizado a partir de un caso concreto en el que el alumno utiliza el factor de conversión (Figura 2). Se caracteriza por utilizar una fracción como operador. Una fracción que representa una equivalencia entre dos magnitudes o una equivalencia de diferente orden dentro de la misma magnitud. Dicho operador debe colocarse de tal forma que el análisis dimensional de como resultado la magnitud solución. En el caso de la imagen, utiliza la equivalencia entre las magnitudes de volumen y masa (densidad) como operador, colocando la masa como denominador y el volumen como numerador de tal forma que el resultado dimensional sea el volumen.

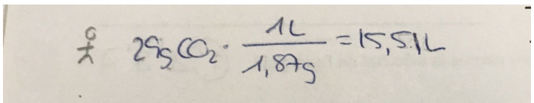


Figura 2. FC: Factor de conversión

Otros ejemplos de estrategias identificadas y recogidas en la tabla 2 son:

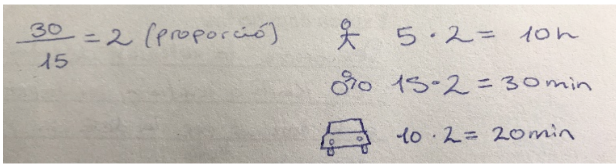


Figura 3. R: Razón numérica como operador.

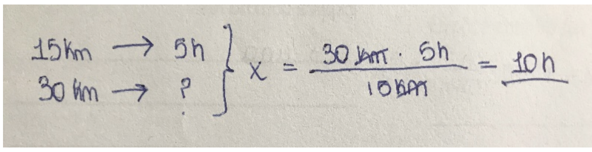


Figura 4. R3: Algoritmo cruzado o regla de tres

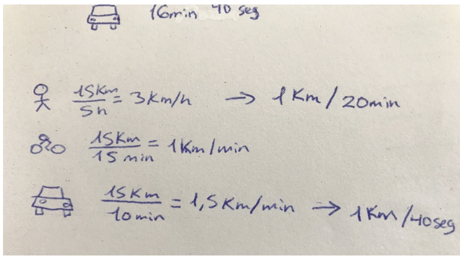


Figura 5. Ru: Reducción a la unidad.

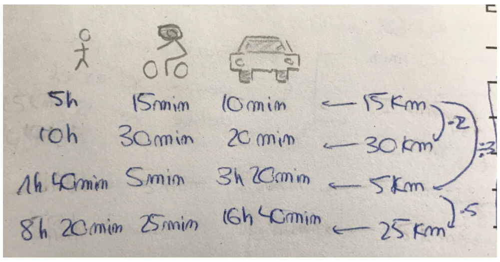


Figura 6. Rd: Reducción unidad como valor arbitrario

RESULTADOS

Análisis cuantitativo de las respuestas

El análisis cuantitativo se focaliza en los resultados correctos e incorrectos del alumnado. Como errores se han tenido en cuenta tanto aritméticos como dimensionales. Los resultados se representan en la tabla 3, separándolos por problemas y niveles educativos:

Tabla 3. Tasa porcentual de éxito del alumnado de por actividad (Correcto, Incorrecto, No Contesta)

	1			2			3			4			5		
	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
3º ESO	96,5	3,5	0,0	87,6	5,3	7,1	65,5	12,4	22,1	56,6	15,0	28,3	22,1	23,0	54,9
1º Bch	96,1	2,6	1,3	96,1	3,9	0,0	93,5	5,2	1,3	93,5	5,2	1,3	79,2	13,0	7,8

Comparando actividades, podemos observar la tendencia común de disminución del éxito con la subida de la dificultad de las actividades, especialmente en la actividad 5. Comparando grupos, dicha tendencia es mucho mayor en 3º de ESO que en 1º de Bachillerato. En la mayoría de las actividades, la tasa de éxito en bachillerato es mayor que la de 3º de ESO. También es relevante la disminución de respuestas en blanco de 3º de ESO a 1º de bachillerato.

Análisis cualitativo de las respuestas

Se clasifican las respuestas del alumnado acorde con la tabla 2 y se presentan resultados para alumnado de 3º de ESO según el aula en la que realizaron la prueba. Las tablas relacionan el número de actividad con el porcentaje de respuesta para cada tipo de estrategia:

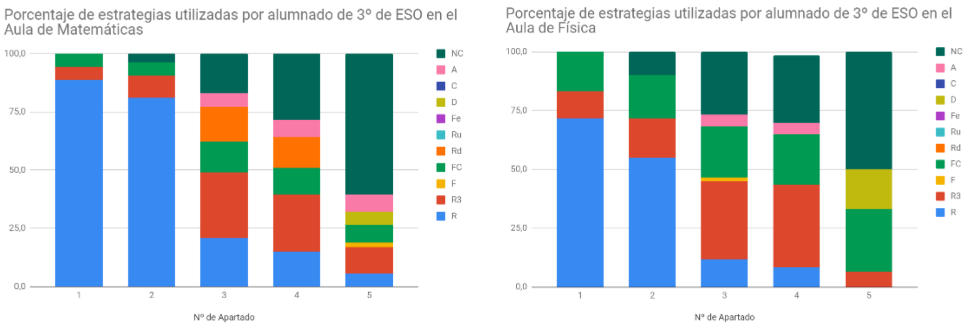


Figura 7. Gráficos de estrategias utilizadas por el alumnado de 3º de ESO

En el caso de bachillerato:

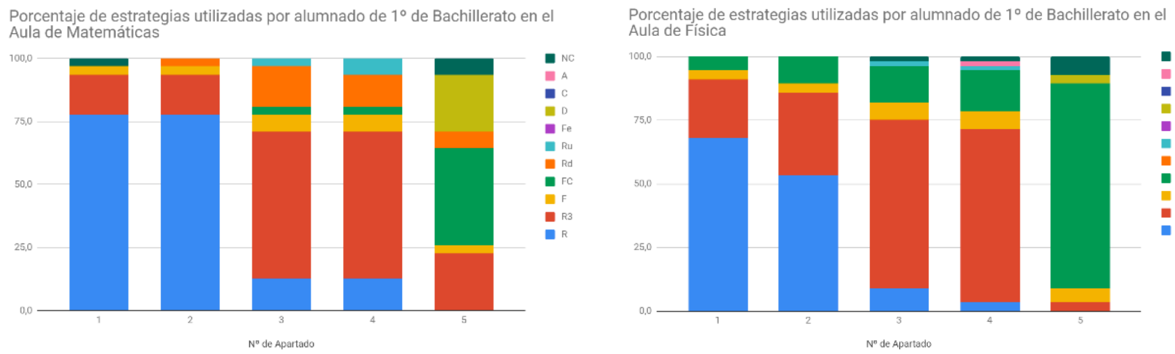


Figura 8. Gráficos de estrategias utilizadas por el alumnado de 1º de Bachillerato

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En primer lugar, los resultados de este estudio muestran una coincidencia con las conclusiones de los estudios de Martínez, Muñoz y Oller, (2015) y Park, Park y Kwon (2010), donde se establece una relación entre el aumento de la tasa de éxito con el nivel educativo y la instrucción recibida, asociándose a la mayor experiencia con problemas y estrategias de proporcionalidad del alumnado. Aun así, la diferencia en la tasa de éxito no es relevante en las actividades 1 y 2, donde se obtiene prácticamente los mismos resultados tanto en 3º de ESO como en 1º de bachillerato. Ambas son actividades de razones simples (Cramer y Post, 1993), deduciéndose que llegado a cierto nivel de instrucción este tipo de problema no plantea un reto para el alumnado.

El aumento progresivo de la dificultad en las actividades, a partiendo de razones enteras y tendiendo a razones no enteras (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009; Fernández y Llinares, 2010), ha facilitado el cambio y la variedad en las estrategias utilizadas por al alumnado en todos los niveles y aulas, como se puede observar en la actividad 3. Esa dificultad se hace más explícita en los resultados obtenidos en la actividad 5, muestra de ello lo encontramos en a la tasa de errores y de respuestas en blanco en 3º de ESO y menos marcada en bachillerato. Esta situación coincide con las conclusiones de Nunes et al. (2003) en las que establece una mayor dificultad para el alumnado realizar problemas con magnitudes intensivas.

En segundo lugar, analizando las estrategias utilizadas observamos que las actividades 1 y 2 se resuelven en su mayoría utilizando la razón numérica como estrategia. A partir del problema 3 augmenta la variedad de estrategias identificadas. En total, se identifican nueve diferentes, las trabajadas en educación primaria y que recogen los estudios de Lamon (1993) o Cramer y Post (1993) así como las identificadas en el estudio de Park, Park y Kwon (2010). Una visión general nos aporta unas estrategias "predilectas" según la disciplina, siendo la razón numérica como operador la más utilizada en matemáticas mientras que en física es la Regla de tres. Hay que añadir la observación de estrategias "exclusivas", aquellas que solo encontramos en una de las dos disciplinas, siendo la Reducción a la unidad tomando un valor arbitrario en matemáticas, mientras que en física es el Factor de conversión. Este hecho podría denotar una influencia relevante por parte de la instrucción en la disciplina respecto a la estrategia utilizada, el ejemplo de física lo encontramos en el factor de conversión, una estrategia trabajada únicamente en el aula de ciencias. Por otro lado, las estrategias aditivas (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009) tienen una presencia prácticamente nula en bachillerato y son poco presentes en 3º de ESO.

Indiferentemente de la tasa de éxito, se constata que el nivel de 3º de ESO presenta una mayor variedad de estrategias que el de bachillerato tanto en el aula de matemáticas como en la de física. Este hecho coincide con el estudio de Gabel, Sherwwod y Enochs (1984), dado que observamos un mayor uso de estrategias algorítmicas en alumnado de bachillerato que en alumnado de ESO. Pero se abre una pregunta interesante a las razones de las elecciones, pues ambos grupos son conocedores de todas las estrategias y optan por estrategias diferentes.

En el análisis en el ámbito disciplinar, podemos observar que en el aula de física hay menor variedad de estrategias que en el aula de matemáticas indiferentemente del nivel educativo. El contenido disciplinar del problema es relevante en el uso de la estrategia como muestran los resultados para la actividad 5, donde el factor de conversión es la estrategia más utilizada en todo el alumnado. Es interesante destacar el tipo de estrategias utilizada en esta actividad, ya que difiere del resto de actividades. El contenido de la actividad, el cual enmarca el uso de un concepto químico como la densidad, favorece el uso de estrategias diferentes a los problemas que no lo plantean.

CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo nos permiten corroborar las aportaciones de estudios previos, pero también aportan nuevos elementos para estudiar la influencia de la forma de trabajar en cada materia sobre las estrategias de proporcionalidad que usan los alumnos. Se constatan tanto la relevancia de la estructura semántica del problema (Lamon, 1993), la estructura numérica (Steinthorsdottir, 2006) y el tipo de magnitud involucrada (Freudenthal, 1978) en los problemas de proporcionalidad simple de valor perdido (Cramer y Post, 1993) sobre la estrategia utilizada por alumnado.

Nuestros resultados coinciden con Monterrubio-Pérez et al. (2019) indicando que la disciplina del aula en la que se desarrolla la recogida de datos es un elemento determinante en la estrategia utilizada por el alumnado indiferentemente del nivel educativo. Este aspecto es relevante ya que pone de manifiesto que el trabajo disciplinar condiciona al alumnado y acota sus estrategias, dificultando que pueda establecer conexiones entre disciplinas. Si nos centramos en un conocimiento central dentro del currículo de matemáticas como es la proporcionalidad, esta variabilidad de aproximaciones puede condicionar el aprendizaje de los alumnos de diferentes formas. En algunos casos los alumnos establecerán las conexiones entre estrategias por ellos mismos o con ayuda del profesorado, pero en otros casos puede generar bloqueos de aprendizaje al mostrar como distintos conceptos equivalentes.

Si nos centramos en los alumnos de 3º de ESO, encontramos una mayor variedad de estrategias utilizadas indiferentemente de la disciplina en la que se desarrolla la prueba. Este hecho refuerza la conclusión anterior, ya que al aumentar el nivel educativo la parcelación de las disciplinas es mayor, dificultando la conexión de conocimientos entre disciplinas o el trabajo interdisciplinar.

El contenido de los problemas también es un elemento relevante en la estrategia utilizada por alumnado indiferentemente del nivel educativo. Nuestros resultados muestran que una mayor variedad de disciplinas presentes en el enunciado del problema (enunciado 5 con química) aumenta la variedad de estrategias utilizadas. Indicando que las actividades de tipo 2 o interdisciplinares (Michelsen, 1998), enriquecen la variedad estratégica.

Interpretando los resultados desde una perspectiva interdisciplinar de los aprendizajes, nos preguntamos si el trabajo disciplinar limita la conexión conceptual o limita la profundidad con la que se deben aprender conceptos clave como la proporcionalidad. Esta pregunta nos lleva a cuestionarnos si la variedad de estrategias que usan los alumnos en contextos de aula interdisciplinares puede aportar oportunidades de aprendizaje a los alumnos en la que se promueva la conexión entre distintas formas de afrontar los contenidos de proporcionalidad. Por ello entendemos que es necesario explorar en el futuro la variedad de estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad entre el alumnado que trabaja de forma interdisciplinar e indagar en la toma de decisiones de los alumnos al elegir estrategias, para identificar los aspectos de aula específicos que influyen en sus decisiones.

Referencias

Alsina, C. (1998). Mathematics and Cross-Curricular Activities: Bridges Exist for Crossing them. *ZDM 30*(2), 34−36.

Berg, B. L. (2007). *Qualitative research methods for the social sciences.* Boston: Allyn and Bacon.

Cataluña. Decreto 119/2015, de 23 de junio, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primaria. *Diari oficial de la Generalitat de Catalunya*, 26 de junio de 2015, núm. 6900, pp. 76

Cataluña. Decreto 187/2015, de 25 de agosto, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundaria obligatòria. *Diari oficial de la Generalitat de Catalunya*, 28 de agosto de 2015, núm. 6945, pp. 99-112

Cramer, K. y Post. T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404−7.

Fernández, C., Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing, Mathematics as an educational task.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Gabel, D., Sherwood, R. y Enochs, L. (1984). Problem-solving skills of high school chemistry students. *Journal of Research in Science Teaching*, 21(2), 221−233.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for research in Mathematical Education, 24*(1), 41−61

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. En J. Hiebert, y M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93−118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum y NCTM.

Martínez S., Muñoz J. M. y Oller A. M. (2015). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351−359). Alicante: SEIEM.

Mejía, J. (2000). El muestreo en la investigación cualitativa. *Investigaciones sociales 4*(5), 165−180.

Michelsen, C. (1998). Expanding Context and Domain: A Cross-Curricular Activity in Mathematics and Physics. *ZDM, 30*(4), 100−106.

Monterrubio-Pérez, M. C., González-Astudillo, M. T., García-Olivares, A., Rodríguez-Cornejo, P. y Rodríguez-Barrueco, M. J. (2019). ¿Existe desconexión en la enseñanza de Matemáticas y Física en Educación Secundaria? En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. inicial-final). Valladolid: SEIEM.

Nunes, T., Desli, D. y Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research*, *39*(7), 651–675.

Park, J., Park, H. y Kwon, O. (2010). Characterizing proportional reasoning of middle school students. *The SNU Journal of Education Research, 19*, 119–144.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A. y Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1393−1414.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variables influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, y N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 5, p. 169−176). Prague, Czech Republic: PME.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. y Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 187−211.