

Investigación en Educación Matemática XV

Investigación en Educación Matemática XV

Margarita Marín Rodríguez, Gabriel Fernández García,
Lorenzo J. Blanco Nieto, Mercedes Palarea Medina (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha

Ciudad Real, 7, 8 y 9 de septiembre de 2011

Investigación en Educación Matemática XV

Edita:

É Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha
É Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada,
Campus de Cartuja s/n, 18071 Granada (España)
É Margarita Mar²n Rodr²guez
É Gabriel Fern²ndez Garc²a
É Lorenzo J. Blanco Nieto
É M²Mercedes Palarea Medina

Comité Científico:

Lorenzo J. Blanco Nieto (Coordinador)
M²Mercedes Palarea Medina (Coordinador)
Jordi Deulofeu Piquet
M²Carmen Penalva Mart²nez
Nuria Climent Rodr²guez
Antonio Estepa Castro

Las Comunicaciones aqu² publicadas han sido sometidas a evaluaci²n y selecci²n por parte de investigadores miembros de la Sociedad Espa²ola de Investigaci²n en Educaci²n Matemática (SEIEM).

Diseño de la portada: Fernando Gallego G²mez

Impresión y encuadernación: Indugrafic, Ártes Gráficas.

Deposito Legal: BA-398-2011

ISBN: 978-84-694-5590-6

ISSN: 1888-0762

INDICE

PRESENTACION	11
LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA QUINCE AÑOS DESPUÉS Rico Romero, L.	15
 SEMINARIO I: MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA	
PRESENTACIÓN DEL SEMINARIO Godino, J. D.	31
MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA ANÁLISIS DE LOS TRABAJOS PUBLICADOS EN LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM (1997-2010) Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W. F., Lacasta, E., M. Cinta Muñoz-Catalán, Wilhelmi, M. R.	33
MÉTODOS CUANTITATIVOS EN LAS CONTRIBUCIONES A LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM EN 2001–2010 Wilhelmi, M. R., Lacasta, E.	51
ANÁLISIS METODOLÓGICO DE LAS ACTAS DE LA SEIEM (1997-2010) DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS MÉTODOS CUALITATIVOS. REFLEXIÓN EN TORNO A UN CASO Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C.	77
MÉTODOS MIXTOS DE INVESTIGACIÓN EN LAS CONTRIBUCIONES A LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM (1997-2010) Castro, W. F., Godino, J. D.	99
 SEMINARIO II: LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN DIFERENTES NIVELES	
INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO II SOBRE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS POR NIVELES EDUCATIVOS Moreno Moreno, M. M.	119
INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA Sierra, T.A., Gascón, J.	125

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA	
Font, V.....	165

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO Y PRIMEROS CURSOS DE UNIVERSIDAD	
Camacho Machín, M.	195

COMUNICACIONES

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO	
Aké, L., Castro, W. F., Godino, J. D.....	227

LA NOTACIÓN NUMÉRICA EN EDUCACIÓN INFANTIL: UN ESTUDIO SOBRE EL PROCESO DE ADQUISICIÓN	
Alsina, A.....	237

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON APPLETS DE GEOMETRÍA DINÁMICA	
Aranda, C., Callejo, M. L.	247

CARACTERÍSTICAS DE UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES ARITMÉTICO-ALGEBRAICOS	
Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L.....	257

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE LA ESTADÍSTICA EN FUTUROS PROFESORES EN UNA TAREA ABIERTA	
Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G.....	267

INVENCION DE PROBLEMAS Y TIPIFICACIÓN DE PROBLEMA “DIFÍCIL” POR ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA	
Ayllón, M. F., Castro, E., Molina, M.	277

EL ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS POR MEDIO DE TECNOLOGÍAS HÍBRIDAS	
Basurto, E., Gallardo, A.	287

ESTIMACIÓN DE LA ASOCIACIÓN POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA	
Cañadas, G., Díaz, C., Batanero, C., Arteaga, P.....	297

PRUEBAS AUTONÓMICAS DE DIAGNÓSTICO PARA EVALUAR LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA	
Caraballo, R. M., Rico, L., Lupiáñez, J. L.....	307

INTERPRETACIÓN DE INDICADORES DISCURSIVOS EN SITUACIONES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN PAREJA	
Chico, J., Planas, N.....	319

IDENTIDAD PROFESIONAL Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE MAESTROS EN FORMACIÓN Contreras, P., Penalva, M. C., Torregrosa, G.	329
ANÁLISIS DE LAS RESOLUCIONES DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL MEDIANTE GRAFOS. UN EJEMPLO Edo, P., Huerta, M. P., Cerdán, F.	337
EL DESARROLLO DE UN ESQUEMA PARA CARACTERIZAR LA COMPETENCIA DOCENTE “MIRAR CON SENTIDO” EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES Fernández, C., Valls, J., Llinares, S.	351
SIGNIFICADOS DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS FRACCIONARIOS EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Gallardo, A., Saavedra, G.	361
ANÁLISIS TEMÁTICO DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN ESPAÑA A TRAVÉS DE LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM Gómez, P., Cañadas, M. C., Bracho, R., Restrepo, A. M., Aristizábal, G.	371
EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE LA VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES EN MAESTROS EN FORMACIÓN Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, J. M.	383
INCORPORACIÓN DE TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EL AULA: LA PRÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL TRAMO ESCOLAR DE 15 A 18 AÑOS DE EDAD Hoyos, V.	393
LOS VIDEOJUEGOS COMO UNA ALTERNATIVA PARA EL ESTUDIO Y DESARROLLO DE LA ORIENTACIÓN ESPACIAL Macías Gutiérrez, G., Quintero Zazueta, R.	405
CÓMO ESTUDIANTES PARA MAESTRO INTERPRETAN SOLUCIONES DE ALUMNOS DE PRIMARIA A PROBLEMAS DE DIVISIÓN CON RESTO Márquez, M., Callejo, M. L., Fernández, C.	417
EL CONOCIMIENTO DEL HORIZONTE MATEMÁTICO: MÁS ALLÁ DE CONECTAR EL PRESENTE CON EL PASADO Y EL FUTURO Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J.	429
EL SENTIDO DEL NÚMERO EN LOS FUTUROS PROFESORES DE 1. ^{ER} CICLO DOS ESTUDIOS DE CASO Menino, H., Tavares, D., Quaresma, A., Rodrigues, M.	439
CONCENTRACIÓN Y DISFRUTE CON ACTIVIDADES MATEMÁTICAS Montoro Medina, A. B., Gil Cuadra, F.	451

LA INTEGRAL DEFINIDA EN BACHILLERATO. RESTRICCIONES INSTITUCIONALES DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Ordóñez Cañada, L., Contreras de la Fuente, A.	461
LA ANSIEDAD MATEMÁTICA Y SU RED DE INFLUENCIAS EN LA ELECCIÓN DE CARRERA UNIVERSITARIA Pérez-Tyteca, P., Castro Martínez, E.	471
GEOMETRIZACIÓN DEL CURRÍCULUM EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS Pinto Leivas, J. C.	481
ARGUMENTOS QUE UTILIZAN LOS FUTUROS PROFESORES CUANDO SELECCIONAN TAREAS MATEMÁTICAS Polo, I., González, M. J., Gómez, P., Restrepo, A.	491
EL SIGNO IGUAL Y SU SIGNIFICADO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA Ramírez García, M., Rodríguez Marcos, P.	503
RELACIONES EN LA PRÁCTICA ENTRE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA (MKT) Y LAS CREENCIAS DEL PROFESOR Ribeiro, C. M., Carrillo, J.	513
LA MAYÉUTICA Y SU APLICACIÓN A UN CUESTIONARIO DIRIGIDO A DOCENTES. Rigo Lemini, M.	523
FIABILIDAD DE UNA JERARQUÍA PARA EVALUAR EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO ACERCA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Sánchez, E., Landín, P. R.	533
DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO DEL ALUMNADO DE 2º DE ESO RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE VOLUMEN Y SU MEDIDA Sanmiguel Suárez, M., Salinas Portugal, M. J.	543
LA HERRAMIENTA ARRASTRE EN FUNCIONES USANDO GEOGEBRA Silva Muslera, A., De La Torre Fernández, E.	555
AVANCES DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA SOBRE LA RAZÓN Y LA PROPORCIONALIDAD CON FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA Valverde Soto, A. G., Castro Martínez, E.	565
ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL SENTIDO ESTRUCTURAL EN TAREAS DE SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E.	575

ALGUNAS IDEAS DEL PROFESORADO SOBRE ASPECTOS RELACIONADOS CON LA INSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE FUNCIONAL.	
Vidal Conde, L. A., Salinas Portugal, M. J.	587
NIVEL DE ÉXITO Y FLEXIBILIDAD EN EL USO DE ESTRATEGIAS RESOLVIENDO PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PAUTAS LINEALES	
Zapatera Llinares, A., Callejo, M. L.	599
LISTADO DE AUTORES.	611

PRESENTACION

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) desde su origen lleva a gala celebrar anualmente un Simposio, punto de encuentro, aprendizaje y confrontación de las ideas matemáticas entre los miembros de la Sociedad. Estos Simposios nos convierten a los investigadores miembros de la SEIEM en una auténtica comunidad de aprendizaje.

Cada año se encarga de la organización local una universidad española. El presente año tiene el honor de organizar el XV Simposio la Universidad de Castilla-La Mancha, concretamente en su campus de Ciudad Real y sede la Facultad de Educación. Los organizadores locales somos todos profesores de Matemáticas y su Didáctica en dicho centro y hemos trabajado con ilusión y denuedo para conseguir las mejores concurrencias en bien de todos los asistentes a este Simposio.

Por su parte, el Comité científico ha hecho una magnífica labor en la elección de conferenciantes, ponentes y selección de comunicaciones.

Fruto de este trabajo conjunto es este Libro de Actas que presentamos. En él se recogen las ideas, preocupaciones y resultados sobre Investigación en Educación Matemática en territorio nacional articulados en torno a los Seminarios y las Comunicaciones mostradas.

Como ya sabemos todos, las comunicaciones aceptadas han pasado por un proceso de evaluación serio y riguroso a cargo de revisores, es decir, investigadores expertos en educación matemática que colaboran gustosamente con el Comité Científico del Simposio.

La estructura del Libro es semejante a la de sus predecesores: primero la conferencia inaugural, seguida de los dos Seminarios y las comunicaciones.

La conferencia inaugural está a cargo del profesor Luis Rico, entusiasta y esforzado pionero en nuestro país por la Didáctica de las Matemáticas. Su conferencia recorre estos quince años de vida de la sociedad, sus logros y luchas para llegar al momento actual.

El Seminario I *Métodos de Investigación en Educación Matemática* está coordinado por el Dr. Díaz Godino, de la Universidad de Granada, y cuenta con la participación de cuatro ponentes. Los dos primeros de la Universidad Pública de Navarra, doctores Rodríguez Wilhelmi y Lacasta Zabalza, se centran en los métodos cuantitativos tan al uso en educación, mientras que los doctores Carrillo y Muñoz, de la Universidad de Huelva, lo hacen en los métodos cualitativos y su aplicación a un caso concreto descrito y analizado en su ponencia.

El Seminario II *La investigación en Educación Matemática en diferentes niveles* trata un tema de máxima preocupación para todos los docentes de matemáticas, independientemente del nivel del alumnado. Está coordinado por la Dra. Moreno de la Universidad de Lleida y cuenta con tres ponentes de reconocido prestigio. El Dr. Sierra, de la Universidad Complutense de Madrid, analizará este tema de trabajo en los niveles de Infantil y Primaria. Por su parte el Dr. Font, de la Universidad de Barcelona, se centrará en Secundaria Obligatoria y finalizará el Dr. Camacho, de la Universidad de La Laguna, con Bachillerato y Universidad.

Por último las comunicaciones están organizadas por orden alfabético del primer autor y trabajan temas de candente actualidad en los diversos campos de la Didáctica de la Matemática, barriendo entre todas las categorías que en la Sociedad denominamos “Grupos de Trabajo”.

Para terminar, agradecer al presidente de la Sociedad, Dr. Blanco Nieto, así como a los componentes de la actual Junta Directiva, su elección de la Universidad de Castilla-La Mancha como sede del XV Simposio de la SEIEM así como su confianza y aliento al Comité Organizador. Agradecer a la Facultad de Educación su acogida, facilidades y apoyo económico; igualmente al Departamento de Matemáticas y el Vicerrectorado de Investigación por sus ayudas económicas; por último, mi agradecimiento personal a mis compañeros Gabriel Fernández García y José Luis González Fernández por todo su apoyo, esfuerzo y trabajo para conseguir la mejor organización de este Simposio manchego, igualmente a Raúl Rivilla Bastante, incorporado en pleno proceso organizativo. Fruto de su esmerado trabajo son las recepciones de los Alcaldes de Ciudad Real y Almagro, con visitas guiadas por las ciudades y representación teatral en el emblemático Corral de Comedias almagreño, al igual que las visitas a museos emblemáticos de la tierra de D. Quijote.

Ciudad Real, 7 de julio de 2011

Margarita Marín Rodríguez

Coordinador Local

CONFERENCIA INAUGURAL

LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA QUINCE AÑOS DESPUÉS

Rico Romero, L.

Universidad de Granada

La Junta Directiva de la SEIEM me ha invitado a realizar “una reflexión sobre lo que supuso el nacimiento de nuestra sociedad y lo que ha aportado a la investigación en Educación Matemática.” (Blanco, 2011)

Es una petición razonable ya que todo colectivo, todo grupo humano con voluntad de permanencia, busca establecer su identidad en la reflexión sobre sus actividades pasadas, en el ejercicio de su memoria histórica.

“Es bueno porque a veces nos ahogamos en nosotros mismos y es necesario pararnos y pensar de dónde venimos y hacían dónde queremos y podemos ir. (...) Además, en los últimos años se han incorporado nuevos investigadores a los que es necesario contarles quiénes somos y que, también, reflexionen con nosotros sobre el futuro. (...) Es el momento de la reflexión.” (Blanco)

En esta propuesta de Lorenzo Blanco se entiende la historia, la singular historia de nuestro grupo, como la reflexión y el estudio de su pasado para la comprensión y explicación de su presente y la previsión o transformación de su futuro.

Para superar el paso del tiempo se ejerce el arte de la memoria. Para conocer la verdad ejercemos nuestro derecho a saber. Consideramos la memoria de un grupo como condición para la vida de ese grupo. Sin memoria nada es posible, nada de lo que hagamos tienen sentido de identidad, de continuidad o de permanencia.

ANTECEDENTES

Este es un ejercicio de reflexión sobre quince años de la vida académica de un grupo de investigadores que estudian los problemas que surgen de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en su sentido más amplio, es decir, profesionales que se ocupan de las ideas, los conceptos, procesos y actitudes y, en general, de las actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático (Rico y Sierra, 2000). Necesariamente es un resumen desde un particular punto de vista sobre la actividad de la SEIEM, sesgado por vivencias personales, por mi participación activa en la vida de la sociedad, parcial por la cercanía en el tiempo y la limitada perspectiva que proporciona el corto número de años transcurridos. Es el informe de un participante que ha vivido los acontecimientos que describe como uno de sus

protagonistas¹. No es, no puede ser, un trabajo de erudición limitado a documentos y fuentes críticas. Aún así, considero que esta reflexión también es historia de la educación matemática en cuanto crónica de la vida de una institución, lo cual constituye un paso para la reflexión disciplinada sobre el campo en que se encuadra. Otras historias, otras narraciones podrán completar la que aquí se presenta.

La actividad de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, en su sentido más amplio, no es independiente de la sociedad española de los últimos años, de la vida intelectual, académica y universitaria del país, del sistema escolar y del mundo educativo. Tampoco su vida es ajena a la actividad llevada a cabo por grupos similares de otros países y por la realizada a nivel internacional en las instituciones que se ocupan de la docencia en matemáticas, de la formación de los profesores de matemáticas y de la investigación en educación matemática. Lo que sigue sólo quiere ser un relato de la actividad realizada por un grupo de investigadores españoles en educación matemática a partir de la decisión que tomaron hace quince años de constituirse oportunamente como sociedad científica, como grupo de trabajo.

A comienzos de 1996 Carmen Azcárate, Pilar Azcárate, Josep M^a Fortuny, Luis Puig y Luis Rico, profesores del área de Didáctica de la Matemática de distintas universidades, compartiendo preocupaciones sobre la actividad y el futuro del trabajo en el área, elaboran un documento titulado *Reflexiones para la constitución de un grupo español de investigación en educación matemática* (Boletín 0, SEIEM).

Ese documento comienza con unas notas que enfocan los antecedentes de la Didáctica de la Matemática en España desde una perspectiva histórica. En resumen, se recogían:

“Sus comienzos en los 70; las bases, instituciones y colectivos anteriores; los comienzos de la disciplina Didáctica de la Matemática en la universidad española; los grupos específicos de investigadores; la valoración académica inicial de trabajos realizados en este campo.

El despegue de la investigación en los 80: las sociedades de profesores, los seminarios y grupos de innovación; la reforma universitaria del año 84. Creación de las Áreas de conocimiento. Constitución de Departamentos y la integración en ellos de la Didáctica de la Matemática.”

Seguidamente, enumeran las necesidades del momento detectadas en los profesionales y grupos que trabajan en educación matemática. De este modo subrayan que:

“existe un grupo fuertemente profesionalizado en la investigación sobre Educación Matemática, reconocible por la realización de trabajos académicos, por su pertenencia a grupos internacionales y, fundamentalmente, por su producción sistemática de trabajos de investigación en este campo, sometidos a la crítica y control de la comunidad. Este grupo, no muy extenso, necesita en el momento actual una articulación que le permita trabajar como tal, superando la fase de las relaciones estrictamente personales o la invasión de otros ámbitos cuyo objetivo central no es la investigación. Como todo grupo profesional necesita su propio espacio de encuentro, debate y reflexión; necesita sus propias vías y medios de comunicación y un esfuerzo prioritario y coordinado por

¹ Este reconocimiento no contradice el hecho de que entre las personas que aparecen en esta narración, el sujeto Luis Rico es uno más de los que intervienen, distinto formalmente en el discurso del autor del trabajo.

delimitar y abordar los problemas que surgen al plantear con profundidad las dificultades de este campo. En el momento actual la comunidad de educadores matemáticos españoles necesita un grupo estructurado (o sociedad) formalmente establecido en el que se incardinan y organicen los investigadores profesionales en educación matemática.” (Boletín 0, SEIEM).

Detectado el grupo de profesionales a quienes afecta y delimitada su necesidad, los profesores mencionados proponen la creación de una sociedad de investigadores.

“Con esta percepción, fuertemente sentida por las limitaciones encontradas en la práctica profesional, un grupo de investigadores en Educación Matemática promovemos la constitución de la Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática.” (Boletín 0, SEIEM).

CONSTITUCIÓN DE LA SEIEM

El 11 de marzo de 1996, a las 16:00h, tiene lugar la sesión de constitución de la Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática. El marco del encuentro viene dado por el *Seminario La investigación en Didáctica de las Matemáticas y las necesidades actuales de desarrollo curricular*, convocado por el Centro de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación y Ciencia.

El orden del día del encuentro incluía los siguientes puntos:

- 1º establecer el reglamento de funcionamiento de la sociedad,
- 2º establecer la organización de la sociedad en campos de investigación,
- 3º elegir los órganos de gobierno de la sociedad.

Intervienen al comienzo el Director del Centro de Desarrollo Curricular, Miguel Soler, el profesor Miguel de Guzmán y los promotores de la convocatoria, quienes proponen a los asistentes la creación de la nueva sociedad, valorando su oportunidad.

Seguidamente, se pasa a debatir un borrador con la propuesta de los estatutos que regularán el funcionamiento de la sociedad, con la siguiente secuencia:

- Denominación de la Sociedad.
- Objetivos.
- Afiliación, cuyos requisitos son: compartir los objetivos de la sociedad y estar al tanto de las cuotas anuales.
- Organización: Asamblea general anual y Junta Directiva
- Junta Directiva: Funciones, composición, renovación y sistema de elección
- Adscripción a Federaciones y Grupos
- Bienes y disolución
- Cambio de estatutos

El texto completo de los Estatutos se encuentra en el Boletín 0 de la SEIEM.

Como objetivos generales se aprueban los siguientes:

1. Mantener un espacio de comunicación, crítica y debate sobre investigación en Educación Matemática.
2. Promover la constitución de grupos de investigación estables en Educación Matemática, que delimiten prioridades y aborden cuestiones específicas.

3. Fomentar la presencia de la Educación Matemática en organismos e instituciones relacionados con la investigación.
4. Contribuir al desarrollo, evaluación y aplicación de la investigación en Didáctica de la Matemática.
5. Contribuir a la presentación y difusión de resultados de investigación en los foros, encuentros y revistas de Educación Matemática.
6. Promover la colaboración entre grupos de investigación en Educación Matemática.
7. Favorecer activamente el intercambio entre investigación y docencia en todos los niveles educativos.
8. Impulsar y difundir institucionalmente la actividad de la Sociedad.

Los estatutos quedan aprobados por unanimidad de los 34 investigadores asistentes, quienes pasan a ser socios fundadores.

Sobre el segundo punto del orden del día cada uno de los asistentes fue presentando sus prioridades y líneas de investigación, proporcionando descriptores y términos clave. Finalizado el turno de intervenciones, los asistentes acuerdan la constitución de ocho grupos de trabajo, con las siguientes denominaciones:

Didáctica del Análisis, Aprendizaje de la Geometría, Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria, Pensamiento Numérico y Algebraico, Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor, Metodología de Investigación en Didáctica de la Matemática, Educación Infantil e Historia de la Educación Matemática.

Se proponen como coordinadores provisionales para la puesta en marcha de los grupos de trabajo a los profesores Carmen Azcárate, Ángel Gutiérrez, Carmen Batanero, Bernardo Gómez, Salvador Llinares, Luis Rico, Carmen Corral y José M^a Núñez, respectivamente.

Como tercer punto del orden del día se eligen los miembros de la Junta Directiva, que queda constituida como sigue:

Presidente: Luis Rico; Secretario: Eduardo Lacasta; Tesorero: Modesto Sierra; Vocales: Carmen Azcárate, Victoria Sánchez y Luis Puig.

ESTRUCTURA ORGANIZATIVA

La vida interna de la SEIEM se ha ajustado desde el comienzo a una estructura organizativa básica, que ha resultado estable. Anualmente la SEIEM celebra un Simposio que tiene un doble cometido. En primer lugar, cumple la función de presentar y debatir documentos, estudios e informes de investigación o de gestión de la investigación, lo cual se ha hecho según distintos formatos pero con unos criterios sobre sus contenidos bastante estables. En segundo lugar, durante el encuentro anual se celebra la Asamblea general de la SEIEM donde se han rendido cuentas de la actividad de la Sociedad y se ha renovado estatutariamente parte de su junta directiva. Las reuniones anuales han tenido pues la doble función de encuentro académico y de gobierno de la sociedad.

La actividad investigadora se ha recogido en las actas o memorias anuales, editadas con los trabajos presentados en cada caso. La actividad administrativa y de gestión queda recogida en los Boletines, usualmente semestrales, que edita la Junta Directiva, donde

da cuenta de la actividad institucional desarrollada desde la edición del boletín anterior y se proporcionan distintas informaciones de interés para los socios. Las fuentes documentales para estudiar la vida de la SEIEM son principalmente estas dos: los Boletines informativos de la SEIEM, de los cuales se han publicado 30 números, y las Actas de los Simposios de la SEIEM, que recogen los documentos aceptados para los encuentros, de los que se han publicado 15, uno por año de vida de la Sociedad. Aunque estructuralmente ambos tipos de documentos han sido bastante estables, como veremos se han producido cambios significativos que muestran la evolución y el cambio en la actividad de la sociedad.

Los documentos que se han utilizado para elaborar este informe han sido las ediciones completas de los 30 boletines y las de las 15 actas que, junto con otra información relevante sobre SEIEM, se pueden encontrar en la dirección: <http://www.seiem.es/>

ETAPAS EN LA HISTORIA DE LA SEIEM

Los periodos de estabilidad en el crecimiento del número de socios vienen a coincidir con los cambios de presidente en la Junta Directiva. Entre 1966 y 2011 la SEIEM ha tenido 5 presidentes. También se observa en este periodo un incremento constante, acotado pero significativo del número de socios, que muestra un proceso continuo de consolidación de la SEIEM y una capacidad apreciable de captación de nuevos socios, principalmente entre jóvenes investigadores que están realizando sus estudios de posgrado en Didáctica de la Matemática. En estos años se ha pasado de los 34 socios fundadores iniciales a los 200 actuales (Figura 1).

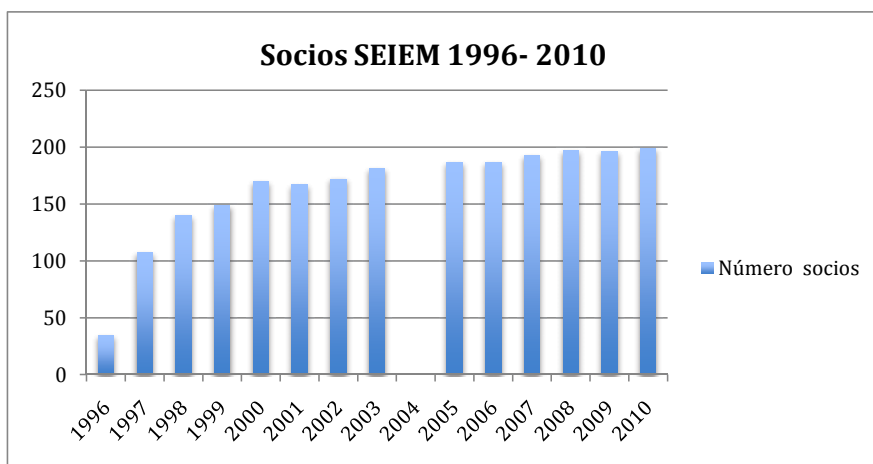


Figura 1: Evolución del número de socios de la SEIE en el periodo 1996-2010

Durante los 15 años de su existencia la SEIEM ha sido dirigida por 34 socios que han formado parte, cada uno durante 3 años, de la Junta Directiva. Los distintos equipos han sido coordinados por los presidentes de la SEIEM, quienes han desempeñado el papel de representación y liderazgo que los estatutos les confieren.

Dada la significación de estos datos y la distinta personalidad de los presidentes, que ha tenido reflejo en distintas actuaciones, he elegido realizar la reflexión sobre la historia de la SEIEM centrada en cinco etapas que son las que definen los periodos de mandato de sus presidentes, cuyos resúmenes se presentan brevemente.

1996-1999. PRIMER PERIODO

Entre marzo de 1996 y septiembre de 1999 transcurre la presidencia de L. Rico. En este primer periodo hay un incremento rápido y notable del número de socios, por razón de ser la etapa inicial de despegue y lanzamiento de la sociedad. Aún así, en 1999 no se habían alcanzado los 150 socios. En este periodo se editan 7 Boletines, el número 0 en 1996 con los datos y documentos de constitución de la SEIEM, y dos en cada uno de los años 1997 a 1999. También se celebran tres simposios en Zamora, Pamplona y Valladolid uno en cada uno de estos tres años, respectivamente.

En los boletines 1, 3 y 4 se hacen balances y reflexiones sobre la actividad llevada a cabo por la Sociedad; para ello se tienen en cuenta los objetivos y se aportan datos e indicadores que muestran su logro. El sentido crítico es reiterado y considerable, planteando nuevos retos. Así, en el Boletín nº 4 se dice:

“El reto que se plantea consiste en considerar la responsabilidad social del área; procede un estudio sistemático de los grandes problemas de la educación matemática en España:

- *revisión y desarrollo del currículo*
- *formación adecuada de los profesores*
- *mejorar los deficientes resultados de los alumnos españoles en las evaluaciones nacionales e internacionales.”*

La reafirmación del acierto en la constitución de la SEIEM es otro tema recurrente: “la especificidad del campo de trabajo y la exigencia de un grupo propio para su atención se valoran como necesidades sentidas por los especialistas en este campo de trabajo”.

Los boletines 2, 5 y 6 se orientan a informar sobre el desarrollo de los Seminarios de Investigación llevados a cabo en los Simposios y presentan los resultados de las evaluaciones llevadas a cabo sobre los mismos.

La información sobre tesis doctorales realizadas en educación matemática se inicia en el Boletín nº 2; son 26 el total de las tesis informadas en este periodo. La documentación de la actividad realizada por los Grupos de trabajo de la SEIEM comienza en el nº 1. También en este boletín se inicia la información sobre convocatorias de Congresos y Jornadas vinculados a la investigación en educación matemática.

Los Boletines publican regularmente las actas de las reuniones celebradas por la Junta Directiva y de la Asamblea general.

La organización de los Simposios en este periodo consiste en la realización de Seminarios de investigación, con un coordinador y varios ponentes invitados. En este periodo se llevan a cabo 7 seminarios y 2 debates sobre monografías de investigación presentadas por sus autores, tal y como aparecen en las Actas de los encuentros.

La actividad institucional de la SEIEM se comienza con varias iniciativas importantes:

En 1996 se hace la presentación de la SEIEM en el XX PME-Valencia, en el VIII ICME- Sevilla, y en el ECER –Sevilla.

En 1997 se participa en el encuentro europeo de investigadores para la constitución de la ERME en Osnabruck, y en 1998 se establecen acuerdos con el grupo GTI de la APM portuguesa.

En 1999 se constituye el Subcomité Español del Comité ICMI con participación de la SEIEM en el mismo; V. Sánchez se propone como representante de la SEIEM en este Comité. También tiene lugar la constitución del Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas 2000 (CEAMM-2000) con participación de la SEIEM; se propone a L. Puig como representante de la SEIEM en este Comité.

2000-2002. SEGUNDO PERIODO

La presidencia de S. Llinares sucede entre septiembre de 1999 y septiembre de 2002. En este segundo periodo el número de socios se sitúa en torno a los 170, con pequeñas oscilaciones. Se editan 6 Boletines correspondientes a las fechas de noviembre y junio de cada uno de los cursos académicos del periodo. También se celebran tres simposios en Huelva, Almería y Logroño, respectivamente.

La estructura de los boletines se estabiliza. Todos ellos comienzan por un Editorial que transmite las ideas y objetivos que la Junta Directiva considera conveniente. Los editoriales de este periodo destacan algunas ideas centrales que guían. En el boletín nº 7 se subraya la necesidad de mejorar las referencias teóricas y conceptuales así como la relación entre investigación y enseñanza, junto con la formación de profesores. En el boletín nº 8 se propone la plataforma INDIMAT como foro de discusión en Internet; se subraya la necesidad de realizar actividad institucional por parte de la SEIEM en aquellos ámbitos en los que se debaten cuestiones que tienen repercusión en la Investigación en Didáctica de la Matemática.

El boletín nº 10 propone ampliar los objetivos de la SEIEM mediante la consideración de nuevas metas y la reflexión sobre el papel que la Sociedad puede jugar en los próximos años para poder desarrollar con amplitud los objetivos formulados. Plantea incorporar a profesores de otros niveles educativos que también desarrollan trabajos de investigación en educación matemática. Impulsar mayor presencia de la SEIEM en la "evaluación y aplicación de la investigación en Didáctica de la Matemática" participando en "organismos e instituciones relacionadas con la investigación" como la Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora o en la ANEP.

Destaca los siguientes objetivos políticos como propios de la SEIEM: ganar influencia en Organismos e Instituciones relacionados con la educación matemática; establecer vías de divulgación de los trabajos realizados, canalizando la información que se produzca en este campo.

Es en el Boletín nº 12 donde la propuesta de intervención en la política educativa del país se plantea con mayor rotundidad: se destaca la responsabilidad que debiera tener la SEIEM de colaborar en los problemas a que se enfrenta la educación matemática en España. Presentar a la Administración Educativa el producto del trabajo realizado en investigación. Aportar ideas para contribuir en el debate sobre la formación de maestros y profesores de secundaria: elaboración de documentos. En esta editorial se destacan

como ejemplos la ponencia presentada por el presidente en el Senado y la carta al Secretario de Estado de Educación y Universidades. La SEIEM reclama el papel de interlocutor en los ámbitos de la toma de decisiones políticas y proclama el compromiso de la investigación con la política educativa.

Los boletines presentan las actas de las sesiones celebradas por la Junta Directiva con los acuerdos adoptados. Alternativamente, presenta el balance de un simposio y el programa científico del siguiente junto con su organización. Regularmente se publican los informes de la actividad llevada a cabo por los grupos de trabajo. A la información sobre tesis doctorales, 16 en este tiempo, se añade la correspondiente a grupos de investigación financiados, 9 en total.

Una iniciativa importante tomada en el año 2000 es el acuerdo de ampliar la actividad de los Simposios con "*Informes de Investigación*". La Junta Directiva establece que los trabajos deberán ser originales y no publicados previamente, que podrán ser propuestos por cualquier persona inscrita en el Simposio y serán sometidos a un proceso de revisión anónimo realizado por especialistas en las distintas líneas de investigación. Las características requeridas a estos trabajos y el proceso a seguir para su aceptación será similar al exigido para los *Research Report* del PME. Se propone una guía para la preparación de Informes de Investigación. Durante los simposios V y VI se presentan 6 y 5 informes de investigación, respectivamente, que se publican en las actas.

Se incrementa la actividad institucional de la SEIEM: Participación en el Congreso RSME 2000; Comité ICMI España; Encuentro de Sociedades Matemáticas Españolas y Portuguesas; Presencia en las actividades desarrolladas como consecuencia del Año Mundial de las Matemáticas; Conferencia de Decanos de Matemáticas; oferta del ZDM; convenio de colaboración con la SEM-SCPE portuguesa; colaboración con la FESPM; carta al Secretario de Estado de Educación y Universidades; documento sobre la formación inicial de profesores de Secundaria: ponencia en el Senado.

2003-2005. TERCER PERIODO

Entre septiembre de 2002 y septiembre de 2005 transcurre la presidencia de M. Sierra; durante este tercer periodo el número de socios supera los 180 y llega a 187. Durante este periodo se publican dos boletines informativos anuales, seis en total, con números 13 a 18, que se editan los meses de julio y diciembre de cada año, alternativamente. En estos tres años se organizan los simposios VII, VIII y IX en Granada, A Coruña y Córdoba, respectivamente.

El primer editorial de este periodo reitera los objetivos establecidos en los estatutos de la Sociedad, la prioridad de su cumplimiento y el necesario fortalecimiento de la comunidad de investigadores en educación matemática. La Junta Directiva destaca el nuevo marco legal y normativo del momento, que afecta a los sistema educativo y universitario con la puesta en marcha y publicación de la ley de Calidad para la Educación, la ley Orgánica de Universidades y la nueva organización de titulaciones universitarias debida a la incorporación de España a los principios del Espacio Europeo de Educación Superior, derivados del acuerdo de Bolonia. La junta directiva requiere a los socios su participación en los grupos de trabajo de la Sociedad. También destaca la necesidad de tomar iniciativas y plantear propuestas acordes con los nuevos marcos normativos. En sucesivos editoriales destaca la preocupación por el perfil educativo dentro de la licenciatura de matemáticas y la implantación del nuevo título de

Especialización Didáctica (TED), requerido a los futuros profesores de secundaria. Al cumplirse veinte años de institucionalización de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento en la Universidad española se hace visible el comienzo de una nueva etapa de madurez, donde el trabajo de cada uno es necesario.

Los editoriales transmiten también esperanza ante las nuevas situaciones de cambio y muestran la presencia creciente de la Sociedad en la comunidad matemática española y en órganos nacionales y autonómicos. Así, destaca la participación de la Sociedad en el Comité Español de Matemáticas (CEMat), de la Unión Matemática Internacional.

La preocupación por la calidad de los trabajos de investigación lleva a la constitución de la Comisión de Calidad de la Investigación en Educación Matemática en el seno de la Sociedad, con el fin de establecer indicadores de calidad, evaluar las revistas y publicaciones existentes y aportar criterios a las instituciones y organismos nacionales dedicados a la evaluación de la producción científica del profesorado como ANECA, las Agencias autonómicas de evaluación, la Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva (ANEP) y la Comisión Nacional de Evaluación de la Actividad Investigadora (CNEAI). A finales del periodo se destaca el buen momento de la Sociedad para intercambiar experiencias, presentar y discutir los resultados de nuestra investigación.

Estas preocupaciones llevan a la toma de varias decisiones prácticas que contribuyen a una línea de cambio. En estos años se instituye la presentación regular y abierta de comunicaciones dentro de los Simposios, superando el sistema anterior muy restrictivo. Para garantizar la calidad de los trabajos se establece un sistema avanzado de revisión por pares a doble ciego. La Junta Directiva se constituye en Comité Científico para la aceptación de los trabajos propuestos. Algunas de las propuestas que no consiguen su aprobación se derivan para su discusión en el seno de los grupos.

Estas decisiones se complementan con otra cuestión práctica importante: la edición de las actas antes del comienzo de los Simposios, donde aparecen publicados todos los documentos. Se establece un cambio importante respecto de las comunicaciones, cuyo número experimenta un rápido incremento. En este periodo son 50 las comunicaciones aceptadas y presentadas entre los tres simposios. Manteniendo unos requerimientos de calidad, ampliamente debatidos por los socios, se logra un incremento de su participación y de su protagonismo en los congresos.

Los simposios siguen manteniendo regularmente en este periodo dos seminarios anuales dedicados a la investigación y, en ocasiones, un tercero sobre gestión de la investigación, con los correspondientes ponentes invitados.

Los boletines mantienen su organización tradicional que incluye: actas de reuniones de la Junta directiva y de la Asamblea general anual, informes de las reuniones de los grupos de trabajo de la sociedad, informes sobre la actividad institucional de la SEIEM, informes sobre tesis doctorales leídas y proyectos de investigación en curso, e informes sobre anuncios y convocatorias de congresos y jornadas específicas. En este periodo se han informado 20 tesis doctorales, 4 proyectos y 4 memorias de tercer ciclo.

2006-2008. CUARTO PERIODO

La presidencia de B. Gómez acontece entre septiembre de 2005 y septiembre de 2008. En este cuarto mandato se superan los 190 socios, que llegan a 197 al final del periodo.

Se publican dos boletines informativos anuales, seis en total, con números 19 a 24, cuyas fechas de edición se mantienen fijas en los meses de julio y diciembre de cada año. Durante estos tres años se organizan los simposios X, XI y XII en Huesca, La Laguna y Badajoz, respectivamente.

Desde el comienzo de su mandato el nuevo presidente se reclama continuador del trabajo y el esfuerzo de los compañeros que le han precedido. Subraya que la SEIEM ha alcanzado un grado apreciable de difusión, madurez y consolidación. Sostiene que la Sociedad es cada vez más respetada y reconocida en el concierto de las matemáticas y de los matemáticos. Reconoce la labor de fomento y divulgación de las investigaciones que cubre el congreso anual; también subraya el fortalecimiento de la amistad y camaradería. Destaca como logro principal de la SEIEM construir una comunidad española de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, que vertebra, encauza y aúna.

Reclama superar la apatía y el desinterés que puedan llevar a desandar lo andado, “continuar con la hoja de ruta que nos propusimos y arrimar el hombro ante los retos que nos acechan”. Afirmo que esta junta directiva “lo va a intentar”, pero que necesita “vuestro compromiso, vuestra colaboración y vuestra complicidad” (Boletín 19).

Propone para el nuevo periodo dos objetivos preferentes. Uno: seguir trabajando para que la educación matemática sea componente importante en la formación de profesores de educación primaria y secundaria y de otros profesionales de la educación. Segundo: aumentar la “visibilidad” de la SEIEM entre los matemáticos. Expresa que ha llegado el momento de formar parte de la Conferencia de Decanos y Directores de matemáticas. Bernardo Gómez y la Junta que él preside mantienen estas prioridades a lo largo de los tres años de su mandato, durante los cuales van aportando nuevos datos y tomando iniciativas para su consecución.

Se aprecia una presencia sostenida de colegas latinoamericanos en el XI Simposio, con aportaciones que enriquecen y contribuyen a incrementar los indicadores de calidad al uso en sus países y centros de investigación. Se reconoce así el espacio que los Simposios de la SEIEM cubren por lo que se refiere a calidad en el ámbito de la lengua española. En 2007 se aprueba que el XII Simposio de 2008 se realice, conjuntamente, con los eventos portugueses SIEM y EIEM. Esta iniciativa se propone que el encuentro tenga el más alto nivel académico transfronterizo, que su plasmación no suponga pérdida de identidad para cada una de las Sociedades y Simposios, que acerque los ámbitos de investigación de los dos países y contribuya al necesario conocimiento mutuo y colaboración. El foco de atención en este año se centra en la organización del encuentro de Badajoz.

Los años de este periodo son objeto de una intensa actividad institucional. La incorporación de la SEIEM al Comité Español de Matemáticas (CEMat) se produce progresivamente, primero con asistencia a reuniones y encuentros y, finalmente con la pertenencia a su Comité Ejecutivo, del cual la SEIEM forma parte desde 2006. La presidencia de la Comisión de Educación de CEMat recae en L. Rico, representante por la SEIEM. También se produce un progresivo acercamiento a la Conferencia de Decanos y Directores de Matemáticas, que culminará en la admisión como socio de la SEIEM. Destacan, igualmente, la asistencia al Congreso de la Sociedad Portuguesa de Investigación, la participación en el ICM de Madrid, la participación en la reuniones para poner en marcha el *Programa Consolider*, los Seminarios de Granada organizados

por la Comisión de Educación de CEMat, el encuentro sobre PISA, en Madrid y muchos otros que se documentan en los boletines de este periodo.

Mejora el funcionamiento interno de la SEIEM debido a una serie de criterios prácticos, a la adopción de medidas técnicas y a nuevas decisiones. Destaca la actualización de la web master, que se inicia en 2007 y supone una mejora notable para los socios por su accesibilidad, riqueza de información y homogeneidad.

Las medidas sobre evaluación de las propuestas de comunicaciones van renovando la participación en los simposios e incrementando su calidad y cantidad. En este periodo se presentan 53 comunicaciones en los tres simposios realizados. Motivo de debate es el bajo nivel de citación de las ponencias y comunicaciones publicadas en las actas de los Simposios, en las ponencias y comunicaciones de los Simposios siguientes.

Los seminarios de investigación estabilizan su frecuencia en dos anuales y las reuniones de los grupos de investigación derivan hacia versiones especializadas del simposio. Los grupos de trabajo inician la edición de aquellas comunicaciones presentadas en su seno en soporte CD. Algunos grupos de trabajo promueven la realización de encuentros específicos, intermedios entre las reuniones que se celebran durante los simposios.

Los boletines mantienen la publicación de informes institucionales, de algunos trabajos de singular relevancia realizados por algunos socios, por comités o bien los informes de los grupos de trabajo.

Se recogen informes de 14 tesis defendidas sobre educación matemática y de 8 trabajos de tercer ciclo en Didáctica de la Matemática, que se incrementan; los informes sobre proyectos de investigación, impulsados en el segundo periodo, desaparecen. También desaparece la información amplia y general sobre Congresos y Jornadas, limitándose a casos singulares.

En este periodo la vida institucional de la SEIEM se incrementa y la sociedad se abre a la participación y colaboración con otros colectivos. Se atiende con más intensidad a cuestiones de tipo práctico, se rebajan tensiones internas y los planteamientos críticos en exceso.

2009-2011. QUINTO PERIODO

La presidencia de L. Blanco se cumple entre septiembre de 2008 y septiembre de 2011. Finalmente, en este quinto periodo cabe esperar que la SEIEM rebase el tope de los 200 socios. Durante este mandato se publican dos boletines informativos anuales, seis en total, con números 25 a 30, que se editan los meses de julio y diciembre de cada año, alternativamente. Durante estos tres años se organizan los simposios XIII, XIV y XV en Santander, Lleida y Ciudad Real, respectivamente.

La editorial del Boletín 25 hace balance de la situación de la SEIEM en el momento: marco europeo; modificaciones importantes en la estructura de las titulaciones de formación de los profesores de Educación Infantil, Primaria y Secundaria; elaboración de nuevos planes de estudio con las aportaciones que se han realizado para adaptar la educación matemática a las necesidades del siglo XXI.

“La SEIEM ha ganado presencia institucional, y actualmente estamos presente en la mayoría de órganos institucionales relacionados con las matemáticas, es también cierto

que todavía nos falta algún camino que recorrer para ser una referencia visible, y decisiva ante esos mismos organismos, que consideren importantes los resultados de nuestras investigaciones para mejorar la educación matemática.

Nuestra influencia en el proceso de reconversión del sistema de formación de profesores de matemáticas no es proporcional al rigor e importancia que los resultados de nuestro trabajo investigador y nuestra experiencia docente deberían tener.” (Boletín 25)

Esta reflexión impulsa recordar y reforzar dos objetivos de los estatutos:

- Promover el impulso de la Educación Matemática en los organismos e instituciones relacionados con la investigación y
- Transmitir y divulgar institucionalmente la actividad de la Sociedad.
- “Ambos objetivos obligan a un esfuerzo para que nuestro trabajo investigador tenga un reflejo mayor ante las decisiones importantes que en estos últimos años se están tomando acerca de la educación matemática, en general, y de la formación de profesores de matemáticas en particular.” (Boletín 25).

A lo largo de este periodo se plantean y abordan cuestiones críticas, no resueltas aún en el seno de la SEIEM. Así, en el Boletín 26 se objeta el funcionamiento de los grupos de investigación y la desigualdad y disparidad en los informes que presentan, cuestión que se vuelve a considerar en el siguiente boletín que plantea “el irregular funcionamiento de la mayoría de los Grupos de Investigación, sobre los que se apoya el trabajo de nuestra organización. Esta apreciación puede constatarse en los informes que se publican en los boletines e incluso en los contenidos de las sesiones que los diferentes grupos desarrollan durante los diferentes Simposios.” La Junta Directiva quiere ayudar al trabajo de los Grupos de Investigación para su buen desarrollo y que puedan ‘plantear cuestiones, transmitir e intercambiar resultados, profundizar en las elaboraciones teóricas, mejorar y validar los diseños metodológicos’. El editorial propone ayuda económica para eventos que pudieran surgir desde cada Grupo de Investigación. Los contenidos y documentos producidos estarán a disposición de todos los socios de la SEIEM y el evento para el que se solicita la ayuda debe estar abierto para que todos los socios de la sociedad puedan participar en el mismo (Boletín 27).

Finalmente los editoriales de los boletines 28 y 29 destacan los cambios que se están produciendo en la Formación Inicial del Profesorado: implantación del Máster para la Formación del Profesorado de Secundaria; desarrollo de los Grados de Infantil y Primaria, conjuntamente con los pobres resultados que muestra el Informe PISA en relación con la educación matemática en nuestro país.

La vida institucional de la SEIEM mantiene su intensidad. Se invita a representantes de RSME, FESPM, CEMAT y de la Conferencia de Decanos y Directores de Matemáticas para asistir al Simposio. Se participa en diversos encuentros como la *Asamblea de Alumnos de Matemáticas X ENEM*, en Madrid, *Paradigmas en la Educación Matemática para el Siglo XXI: Compartiendo experiencias educativas con Asia* organizado por el CSIC y Casa Asia en Valencia, el *Proyecto Klein*, a iniciativa de ICMI- IMU. También la SEIEM organiza un *Seminario sobre Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas de Educación Infantil, Primaria y Secundaria*, en abril de 2011 en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) de Castro Urdiales.

El presidente mantiene una entrevista institucional con el Secretario General de Universidades donde le presenta la SEIEM y le manifiesta nuestra visión de diferentes aspectos que conciernen a la educación matemática en nuestro país.

La Junta Directiva ha decidido promover la edición de una Revista de Investigación específica del área para recoger las investigaciones que se desarrollan en España y en los países de habla española. Con este motivo se incluye como punto en el orden del día de la asamblea de la SEIEM. Después de un debate e intercambio de opiniones en la asamblea del año 2010, el presidente expresa el compromiso por parte de la Junta Directiva de asumir las propuestas expresadas, y promover una Comisión que elabore una propuesta para analizar y hacer visible las necesidades y potencialidades de la Revista, y que pueda presentarse como una propuesta concreta con todas sus dimensiones en el Simposio de septiembre del 2011.

Se recogen informes de 25 tesis defendidas sobre educación matemática y de 3 trabajos de tercer ciclo en Didáctica de la Matemática, que se incrementan; los informes sobre proyectos de investigación, impulsados en el segundo periodo, desaparecen.

CONCLUSIÓN

La SEIEM apenas ha comenzado su recorrido, aún no ha cubierto su ciclo. Esta es la crónica de una experiencia, de un ideal compartido por muchos profesionales cuya ambición está en promover los valores de la educación matemática. Es la historia de una comunidad que necesita nuevos miembros con energía renovada, que espera nuevas ideas para realizar nuevos programas.

Este documento es un informe sobre la contribución hecha por los investigadores españoles en educación matemática; describe un proyecto que es parte integrante de otro más amplio, cuyo horizonte sobrepasa a la SEIEM.

“Aún cuando su historia no es muy dilatada, la investigación en educación matemática es un discurso que comenzó mucho antes de que surgiesen los investigadores actuales y que continuará bastante después de que hayan desaparecido. Es un discurso con miles de voces hablando acerca de cientos de tópicos. Se han discutido cuestiones muy importantes, pero los comentarios a menudo son difíciles de comprender. Los que escuchan pueden estar impacientes y desanimados. Es más fácil marcharse y rechazar lo que se está diciendo como inútil que permanecer, escuchar y responder . (...) Muchos creen que el discurso acaba de comenzar y que sólo lo que ellos están diciendo en el momento es importante. Podrían pensar de otro modo si estudiasen los documentos de lo que ya se ha pensado y se ha dicho. No se trata de una pizarra vacía, ni tampoco de una crónica de fracasos. Es la impresionante historia de una comunidad definiéndose a sí misma.” (Kilpatrick, 1987)

Agradecimientos

Agradezco a la Junta Directiva esta invitación que es, al mismo tiempo, un privilegio y una satisfacción, un compromiso y un reto.

Agradezco también a todos los miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática el trabajo y la vida intelectual que han promovido durante estos años y la amistad y camaradería que nos han regalado y de la que hemos disfrutado.

Referencias

- Blanco, L. (2011). *Invitación conferencia XV SEIEM* (Documento no publicado) Badajoz.
- Kilpatrick, J. (1994). Historia de la Investigación en Educación Matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra: *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis.
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (2011). *Actas de los Simposios de la SEIEM. (1997-2010)*. <http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm>
- Rico, L. y Sierra, M. (2000). Educación Matemática e Investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras: *Matemáticas en los albores del siglo XXI*. Huelva: Editorial Hergué.
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (2011). *Boletines SEIEM (1996-2010)*. <http://www.seiem.es/publicaciones/boletines.htm>

SEMINARIO I:

MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Coordinador: Juan Díaz Godino. Universidad de Granada
Presentación

**Juan D. Godino¹, José Carrillo², Walter F. Castro³,
Eduardo Lacasta⁴, M. Cinta Muñoz-Catalán² y Miguel R.
Wilhelmi⁴**

¹Universidad de Granada; ²Universidad de Huelva; ³Universidad de
Antioquia (Colombia); ⁴Universidad Pública de Navarra

*Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los
trabajos publicados en los simposios de la SEIEM*

Miguel Rodríguez Wilhelmi y Eduardo Lacasta Zabalza
Universidad Pública de Navarra

*Métodos cuantitativos de investigación en las contribuciones a los
simposios de la SEIEM (2001-2010)*

José Carrillo Yáñez y M. Cinta Muñoz
Universidad de Huelva

*Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la
perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso.*

Walter F. Castro¹ y Juan D. Godino²
¹Universidad de Antioquia (Colombia); ²Universidad de Granada

*Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios
de la SEIEM (1997-2010)*

PRESENTACIÓN DEL SEMINARIO²

Godino, J. D.

Universidad de Granada

De acuerdo con las orientaciones dadas por el Comité Científico del Simposio este seminario lo hemos orientado hacia el análisis de los métodos de investigación aplicados en las ponencias y comunicaciones incluidas en las actas de los Simposios de la SEIEM, celebrados desde 1997 hasta 2010. Asimismo, hemos recogido información sobre el tema en el panorama internacional de la investigación en educación matemática, usando el trabajo de Hart, Swars y Smith (2009). También hemos tenido en cuenta el estudio de Torralbo, Vallejo, Fernández y Rico (2004), centrado en el análisis metodológico de la producción de tesis doctorales en educación matemática española, lo que nos permite realizar algunas comparaciones y recomendaciones.

El estudio ha sido realizado por tres equipos, cada uno de los cuales ha centrado la atención en un tipo de métodos:

- José Carrillo y M. Cinta Muñoz-Catalán (métodos de tipo cualitativo);
- Miguel. R. Wilhelmi y Eduardo Lacasta y (métodos de tipo cuantitativo)
- Walter F. Castro y Juan D. Godino (investigaciones de tipo mixto)

Los tres equipos hemos trabajado en una primera fase de manera coordinada a fin de establecer el sistema de variables a tener en cuenta en el análisis de las ponencias y comunicaciones y proceder a la recogida de datos, codificación, descripción cuantitativa e interpretación de la información. En una segunda fase hemos procedido a elaborar un informe global de los datos recogidos de un total de 271 trabajos (ponencias invitadas y comunicaciones referidas), que ha dado lugar a la primera ponencia conjunta y que es presentada en primer lugar en este seminario. Posteriormente, cada equipo ha elaborado un informe sobre los trabajos clasificados en su foco de atención (métodos cualitativos, cuantitativos y mixtos), que serán presentados después de la ponencia conjunta para su conocimiento y discusión.

Fruto del trabajo conjunto ha sido la elaboración de una pauta o guía con un sistema de indicadores de calidad metodológica en trabajos de investigación en el campo de las ciencias sociales, que puede ser útil tanto en la producción científica, como en la revisión de trabajos de investigación; en particular, podría utilizarse en la revisión de trabajos que se presenten en los próximos simposios de la SEIEM.

Se trata de una primera versión de un instrumento para la reflexión, elaborado a partir de diversas fuentes metodológicas, sujeto a discusión y perfeccionamiento. Dicho instrumento se incluye como anexo en la ponencia conjunta.

² Godino, J. D. (2011). Presentación del Seminario de Métodos de Investigación en Educación Matemática. En, M. Marín et al. (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp 31). Ciudad Real: SEIEM.

Referencias

- Hart, L. C., Swars, S. L. y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3, 1, 26-41.
- Torralbo, M., Vallejo, Fernández, A. y Rico, L. (2004). Análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1976-1998). *RELIEVE (Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa)*

MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA³

ANÁLISIS DE LOS TRABAJOS PUBLICADOS EN LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM (1997-2010)

Godino, J. D.¹, Carrillo, J.², Castro, W. F.³, Lacasta, E.⁴, Muñoz-Catalán, M. C.²,
Wilhelmi, M.R.⁴

¹Universidad de Granada, ²Universidad de Huelva, ³Universidad de Antioquia
(Colombia), ⁴Universidad Pública de Navarra

Resumen. *En esta ponencia se describe el planteamiento general del seminario sobre métodos de investigación celebrado en el XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Se ha realizado un estudio cualitativo y cuantitativo de los trabajos presentados en los Simposios de la SEIEM desde su constitución en 1997 hasta 2010, desde el punto de vista de los métodos de investigación usados en dichos trabajos, así como otras variables relacionadas. En esta ponencia conjunta se describen los resultados globales obtenidos y se comparan con resultados de otros estudios relacionados en los que se analizan los métodos de investigación en educación matemática. Los análisis detallados de los métodos cuantitativos, cualitativos y mixtos son objeto de tres ponencias específicas, presentadas, asimismo, en el Seminario.*

Palabras clave: Métodos de investigación, ciencimetría, simposios SEIEM, reflexión metodológica.

Abstract. *This presentation describes the general approach of the seminar on research methods held at the XV Symposium of the Spanish Society for Research in Mathematics Education. A qualitative and quantitative study of the papers presented at the SEIEM Symposia since its creation in 1997 until 2010 has been performed. The study is focused on the research methodologies and other related variables used in the invited papers and research reports included in the proceedings. In this joint presentation the overall results are presented and compared with results from other related studies on research methodology in mathematics education. Detailed analysis of quantitative, qualitative and mixed methods is the subject of three papers presented, also, in the Seminar.*

Key words: Research methods, scientometric, SEIEM symposium, methodological reflection

³ Godino, J. D., et al. (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los Simposios de la SEIEM. En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV*. Ciudad Real: SEIEM.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis metodológico de las investigaciones se ha realizado teniendo en cuenta una serie de variables o categorías que se han definido como resultado del ajuste entre los aspectos que concretan y definen la metodología y las características de los estudios presentes en las actas de la SEIEM. Las variables consideradas son: método de investigación, área problemática, nivel educativo, métodos e instrumentos de información utilizados, tipo de informantes o fuentes de información y número de informantes (además del año de la publicación y del tipo -ponencia o comunicación).

La variable *métodos de investigación* es la que nos ha servido para organizar las tres ponencias siguientes (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011; Castro y Godino, 2011; Wilhelmi y Lacasta, 2011), en las que realizamos el análisis de las actas cruzando cada tipo de método (cualitativo, cuantitativo y mixto) con las demás variables.

Consideramos que los métodos son el conjunto de técnicas de recogida y/o análisis de datos utilizados en una investigación (Ernest, 1998). Suele identificarse con el término de metodología, pero ésta incluye los posicionamientos epistemológicos y ontológicos del investigador que justifican los métodos elegidos. En Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) se aclara la diferencia entre métodos y metodología y la incorrecta asociación que frecuentemente se establece entre un tipo de método y un determinado paradigma. Los indicadores y descriptores para esta variable son:

1. Cuantitativo (uso de estadística descriptiva y/o inferencial; predominio de variables cuantitativas).
2. Mixto (uso de variables cualitativas y cuantitativas, con recuentos de frecuencias en muestras o poblaciones).
3. Cualitativo (interpretativa, estudio de casos, descripciones narrativas, etc.).
4. Teórico (discusión o ensayo filosófico).

La variable *Área problemática principal (y secundaria)* hace referencia a los tópicos de la didáctica de la matemática que son objetos de investigación en las actas de la SEIEM. Los valores que hemos considerado para esta variable han emergido del cruce entre los grupos de la SEIEM y la clasificación en la que el grupo PME organiza las aportaciones a los congresos. A cada ponencia o comunicación le hemos asignado hasta un máximo de dos áreas, destacando en primer lugar la que define el objeto del estudio. Estas áreas son:

1. Didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria.
2. Didáctica de la matemática como disciplina científica (epistemología; fundamentos teóricos).
3. Pensamiento numérico y algebraico.
4. Historia de la educación matemática.
5. Didáctica del análisis.
6. Conocimiento, formación, y desarrollo profesional.
7. Aprendizaje de la geometría y medición.
8. Aspectos afectivos, socioculturales y de género.

Métodos de investigación en educación matemática.
Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010)

9. Estudio de procesos matemáticos genéricos (Visualización e imaginación; Modelización matemática; Métodos de prueba; Resolución de problemas).
10. TIC (Ordenadores, calculadoras y otros recursos tecnológicos).
11. Creencias y concepciones.

En la variable *nivel educativo* incluimos las distintas etapas educativas en las que se centran los estudios de la SEIEM. Distinguimos 5 etapas:

1. Educación Infantil (0-6 años).
2. Primaria (7-12 años).
3. Secundaria obligatoria (13-16 años).
4. Bachillerato y ciclos de formación superior (17-18 años).
5. Universidad (más de 18 años).

La variable *métodos e instrumentos de recogida de información utilizados* hace referencia a la existencia o no de interacción entre el investigador y las fuentes de información cuando se implementan durante el proceso de investigación. Desde esta perspectiva, siguiendo a Goetz y LeCompte (1988), distinguimos entre, métodos interactivos y métodos no interactivos, y añadimos, métodos mixtos,, cuando en un mismo estudio se combinan ambos tipos de métodos e instrumentos de recogida de información.

1. *Métodos interactivos*: implican una interacción entre investigadores y participantes, y, como resultado, producen reacciones en estos últimos que pueden afectar a la información reunida (entrevistas, observación, etc.).
2. *Métodos no interactivos*: exigen una escasa o nula interacción entre investigadores y participantes (cuestionarios, materiales docentes, documentos personales elaborados –diarios del profesor, por ejemplo-).
3. *Mixtos*.
4. *Ninguno*: no se recogen datos porque el estudio es de tipo teórico o filosófico.

La siguiente variable la hemos denominado *tipo de informantes o fuentes de información* y se refiere a los materiales y colectivos educativos a través de los cuales el investigador obtiene información. En un estudio se puede asignar más de un indicador:

1. Alumnos.
2. Profesor.
3. Padres y madres.
4. Materiales y recursos educativos (ya sea analógico o digital).
5. Centro o institución.
6. Documentos oficiales.
7. TESEO, revistas y bases especializadas.

Número de informantes (tamaño de muestra)

La variable *técnica de muestreo* sólo es pertinente para los estudios que utilizan métodos cuantitativos y hace referencia a la representatividad de la muestra con relación a la población. Los valores son los siguientes:

1. Si se ha explicitado la técnica de muestreo y su pertinencia.
0. En caso contrario.

En la sección 2 de esta ponencia conjunta mencionamos algunos antecedentes sobre el análisis de las metodologías de investigación en educación matemática, problema de interés en el campo general de la cienciometría o estudio de los aspectos cuantitativos de la ciencia como disciplina o actividad económica. En la sección 3 presentamos los resultados cuantitativos globales del análisis de los métodos de investigación usados en los trabajos publicados en las actas de la SEIEM, teniendo en cuenta las variables anteriormente descritas.

En un Anexo incluimos un conjunto de indicadores de calidad metodológica de los trabajos de investigación en el campo de las ciencias sociales que puede servir como “Guía para la reflexión metodológica”, tanto para los autores como para los revisores de los trabajos que se presenten en los próximos Simposios. Se trata de una guía o pauta simplificada elaborada a partir de diversas fuentes metodológicas, en particular Ramos-Álvarez y Catena (2004), Buela-Casals (2003), Bryman, Becker y Sempik (2008), Creswell (2009).

2. EL ANÁLISIS DE LAS METODOLOGÍAS DE INVESTIGACIÓN COMO CAMPO DE INDAGACIÓN

En este apartado presentamos una breve síntesis de trabajos realizados sobre el uso de los métodos de investigación en educación matemática, lo que nos permitirá establecer relaciones con nuestro estudio y situar éste en una perspectiva más amplia. Usaremos básicamente dos fuentes: el artículo de Torralbo, Vallejo, Fernández y Rico (2004) en el que se realiza un análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en educación matemática en el periodo 1976 – 1998, y el artículo de Hart, Smith, Swars, y Smith (2009) donde se hace un análisis similar de los artículos publicados en revistas de alto nivel de educación matemática en el periodo 1995 a 2005.

Es importante advertir que nuestro estudio tiene fuertes diferencias con los anteriormente mencionados, ya que los trabajos que estudiamos son básicamente “comunicaciones” presentadas en los Simposios de la SEIEM y, por tanto, se trata de trabajos de extensión reducida, donde el método se describe de manera sucinta.

2.1. El análisis metodológico de Torralbo et al.

Se trata de un estudio cuyo principal objetivo es describir de manera sistemática las características metodológicas de la investigación española sobre educación matemática reflejada en las tesis doctorales realizadas en el periodo 1976 – 1998 en las universidades españolas. Se realizó accediendo a la práctica totalidad de las fuentes documentales (135 tesis), por lo que se puede considerar como un estudio censal.

El número total de variables analizadas fue de 41, agrupadas según las fases metodológicas del proceso de investigación: 1) Ubicación de la investigación (paradigma, teoría, marco metodológico, revisión de la literatura; 2) Definición del problema (problema, objetivos, hipótesis, ...); 3) Diseño y trabajo de campo (instrumentos, validez, fiabilidad, ...); 4) Tratamiento y análisis de datos (uso de estadística descriptiva, inferencial, triangulación, ...; 5) Discusión de resultados (hallazgos, cuestiones abiertas e implicaciones)

Dado el carácter más limitado de nuestra investigación el número de variables que hemos considerado es menor, aunque tratamos que cubrir los aspectos más relevantes del proceso metodológico. En nuestro caso, las variables que hemos considerado se corresponden básicamente con el estudio de Hart et al. (2009).

2.2. El análisis metodológico de Hart et al.

Hart et al. (2009) realizan un estudio sobre la prevalencia de los métodos cualitativos, cuantitativos y mixtos en una muestra de artículos publicados en revistas internacionales de alto nivel sobre educación matemática. Estos autores adoptan definiciones operativas para la clasificación de los artículos en las distintas categorías de métodos. Consideran como métodos de recogida de datos cualitativos los siguientes: etnografías, estudios de casos, entrevistas, observaciones, análisis de documentos, y análisis del discurso.

Los análisis cualitativos de estas fuentes de datos implican la aplicación de unos códigos *a priori* o emergentes para facilitar la interpretación del significado. Como métodos de recogida de datos cuantitativos consideran: instrumentos que proporcionan directamente datos numéricos, típicamente a partir de diseños experimentales (esto es, pretest-postest aleatorizados), diseños cuasi-experimentales (esto es, no aleatorizados), meta-análisis, o diseños no experimentales (por ejemplo, encuestas). También se incluyen recuentos de elementos de datos textuales que no requieren interpretación de significado previo al recuento (p. e., número de artículos que usan el término “métodos mixtos” en el resumen).

Los análisis cuantitativos de estas fuentes de datos aplican alguna forma de estadística descriptiva o inferencial (p. e., comparaciones entre grupos, correlaciones, ANOVA). A partir de estas distinciones los autores definen los métodos mixtos como el uso de métodos cualitativos y cuantitativos en cualquier parte del estudio.

Hart et al. (2009) abordan, entre otras cuestiones, la siguiente: ¿cuál es la prevalencia del uso de métodos cuantitativos, cualitativos o mixtos en los artículos empíricos de educación matemática publicados en una colección de revistas prominentes publicadas en inglés entre 1995 y 2005? Las fuentes de datos usadas fueron los artículos de investigaciones en educación matemática publicados en una muestra intencional formada por las siguientes revistas:

- Journal for Research in Mathematics Education (JRME).
- Educational Studies in Mathematics (ESM).
- Journal of Mathematics Teacher Education (JMTE).
- Elementary School Journal (ESJ).

- Early Childhood Research Quarterly (ECRQ).
- American Educational Research Journal (AERJ).

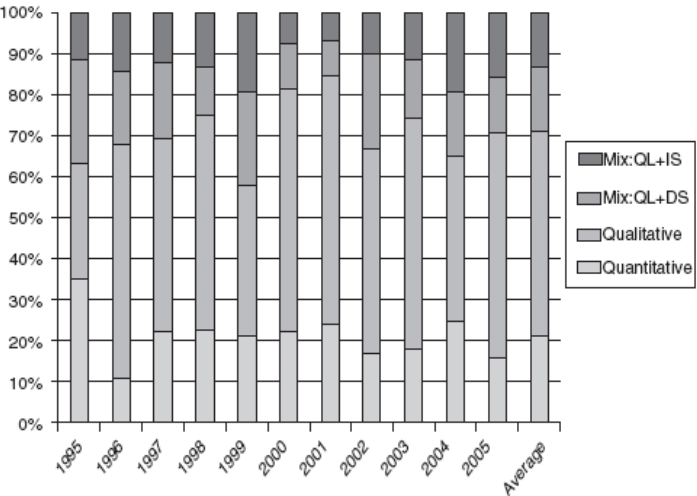
El estudio aplicó análisis cualitativos del texto de los artículos para determinar los métodos usados, y de manera más específica: (a) identificar los estudios empíricos que hacían mención explícita de su naturaleza experimental en el enunciado de los objetivos y en las secciones de metodología, y (b) determinar estudios que estaban relacionados con la educación matemática. Con estos criterios examinaron un total de 1636 artículos, de los cuales 1324 eran artículos de investigación empírica, y 710 eran de educación matemática.

La Tabla 1 resume la información sobre la prevalencia de los distintos tipos de investigación en el meta-análisis de Hart et al. (2009).

Tipo de investigación	Frecuencia	Porcentaje
Cualitativa solo	352	50
Cualitativa y estadística descriptiva	115	16
Cualitativa y estadística inferencial	92	13
Total métodos mixtos	207	29
Cuantitativa solo	151	21

Tabla 1. Frecuencias y porcentaje de prevalencia de tipos de investigación

La Figura 1 indica el porcentaje de los distintos métodos de investigación por año en el meta-análisis de Hart et al. (2009).



Note: QL + IS = Qualitative and Inferential Statistics; QL + DS = Qualitative and Descriptive Statistics

Figura 1. Porcentaje de los tipos de investigación en el periodo 1995-2005

3. RESULTADOS GLOBALES DEL ANÁLISIS DE LOS MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN EN LOS TRABAJOS PUBLICADOS EN LAS ACTAS DE LA SEIEM

En este apartado incluimos un resumen cuantitativo de las variables consideradas en nuestro estudio. Cuando procede comparamos nuestros resultados con los informados en los estudios de Torralbo et al. (2004) y Hart et al. (2009).

3.1. Número de trabajos presentados y su distribución temporal

El número total de trabajos analizados han sido de 271, de los cuales 109 son ponencias (40%) y 162 comunicaciones (60%). Hay que informar que en los primeros cuatro años de celebración de los simposios no se había establecido la posibilidad de presentar comunicaciones, sino que las contribuciones eran solicitadas a los autores por el Comité Científico. Así mismo, hemos excluido del análisis las contribuciones realizadas exclusivamente por investigadores extranjeros.

La Figura 2 incluye una tabla de frecuencias y un diagrama con la distribución de los trabajos por años.

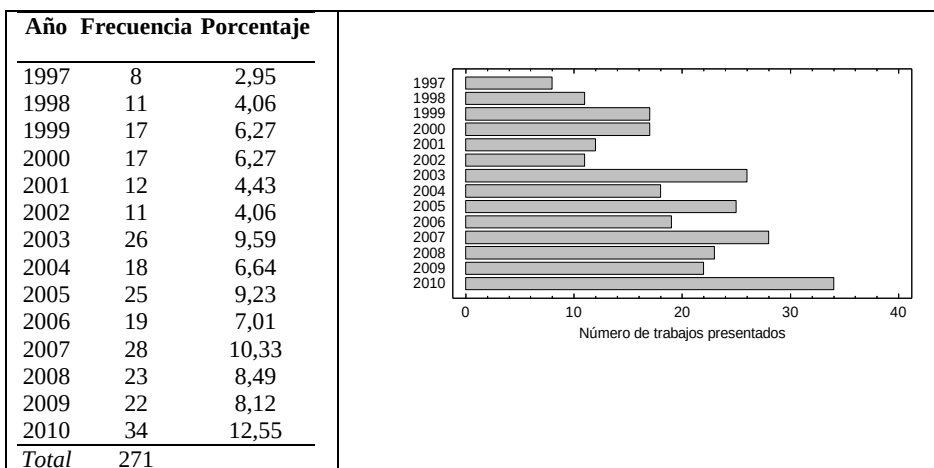


Figura 2. Número de trabajos presentados por años

3.2. Tipo de método de investigación preferente

La Tabla 2 indica las frecuencias del uso de los métodos de investigación aplicados.

Tipo de método de investigación	Frecuencia	Porcentaje
1. Cuantitativo (uso de estadística descriptiva y/o inferencial; predominio de variables cuantitativas)	31	11,44
2. Mixto con estadísticas descriptivas	45	16,61
3. Cualitativo (interpretativa, estudio de casos, descripciones narrativas, etc.)	94	34,69
4. Teórico / filosófico / ensayo.	101	37,27

Tabla 2. Frecuencias de los tipos de método de investigación

Destacamos el elevado porcentaje de estudio de tipo ensayo teórico (37,3%), lo cual refleja el peso relativamente alto de las ponencias invitadas, las cuales con frecuencia se orientan a reflexiones de carácter general sobre distintos tópicos de investigación. Igualmente resalta el alto porcentaje de estudios de naturaleza cualitativa (34,6%).

En la investigación de Torralbo et al, el 38,5% de las tesis se clasificaron dentro del paradigma interpretativo, mientras que las de tipo mixto fue del 31,1 y las positivistas (llamadas por estos autores, paradigma nomotético) el 18,5%. No es de extrañar que no se hayan desarrollado tesis doctorales calificables como “ensayos teóricos”, sino que se prefiere orientarlas hacia aspectos empíricos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Respecto del uso del paradigma mixto estos autores afirman que, “Ninguna de las tesis analizadas se posiciona explícitamente en este nuevo paradigma, sino que suelen argumentar que se toman aportaciones del paradigma positivista o nomotético y del paradigma interpretativo, según los problemas considerados y el juicio del investigador” (p. 46).

La Tabla 3 muestra las frecuencias absolutas y relativas (por filas y columnas) de los distintos métodos de investigación usados y su prevalencia a lo largo del período 1997-2010. La tabla permite observar, si nos fijamos en las columnas, la evolución temporal del uso de cada método, mientras que por filas indica el peso relativo de cada método dentro de cada año.

Año	Cuantitativo	Mixto	Cualitativo	Teórico	Total
1997	0 ⁽¹⁾	0	1	7	8
	0,00 ⁽²⁾	0,00	12,50	87,50	
	0,00 ⁽³⁾	0,00	1,06	6,93	2,95
1998	0	0	2	9	11
	0,00	0,00	18,18	81,82	
	0,00	0,00	2,13	8,91	4,06
1999	0	1	1	15	17
	0,00	5,88	5,88	88,24	
	0,00	2,22	1,06	14,85	6,27
2000	0	1	1	15	17
	0,00	5,88	5,88	88,24	
	0,00	2,22	1,06	14,85	6,27
2001	1	4	3	4	12
	8,33	33,33	25,00	33,33	
	3,23	8,89	3,19	3,96	4,43
2002	1	2	2	6	11

Métodos de investigación en educación matemática.
Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010)

	9,09	18,18	18,18	54,55	
	3,23	4,44	2,13	5,94	4,06
2003	8	2	9	7	26
	30,77	7,69	34,62	26,92	
	25,81	4,44	9,57	6,93	9,59
2004	1	1	11	5	18
	5,56	5,56	61,11	27,78	
	3,23	2,22	11,70	4,95	6,64
2005	2	6	15	2	25
	8,00	24,00	60,00	8,00	
	6,45	13,33	15,96	1,98	9,23
2006	2	1	6	10	19
	10,53	5,26	31,58	52,63	
	6,45	2,22	6,38	9,90	7,01
2007	6	8	8	6	28
	21,43	28,57	28,57	21,43	
	19,35	17,78	8,51	5,94	10,33
2008	2	8	12	1	23
	8,70	34,78	52,17	4,35	
	6,45	17,78	12,77	0,99	8,49
2009	4	4	10	4	22
	18,18	18,18	45,45	18,18	
	12,90	8,89	10,64	3,96	8,12
2010	4	7	13	10	34
	11,76	20,59	38,24	29,41	
	12,90	15,56	13,83	9,90	12,55
Total por Columna	31	45	94	101	271
	11,44	16,61	34,69	37,27	100,00

Contenido de las celdas: ⁽¹⁾Frecuencia Observada; ⁽²⁾Porcentaje de la Fila; ⁽³⁾Porcentaje de la Columna

Tabla 3. Métodos según años (frecuencias absolutas y relativas por filas y columnas)

Se observa que, en total, el número de estudios teóricos es mayoritario en el recuento total si bien su número por año muestra variaciones notables. El gráfico de mosaico de la Figura 2 muestra la misma información de manera más expresiva que la tabla 3.

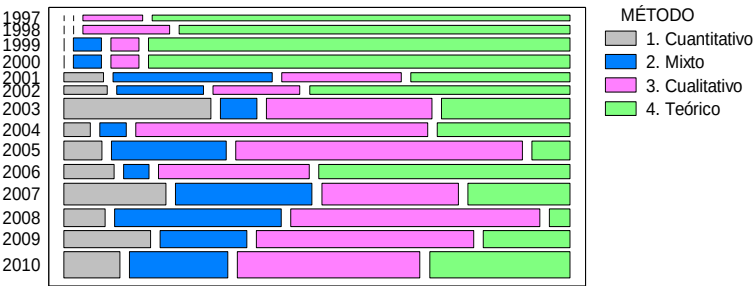


Figura 2. Gráfico de mosaico método según años

3.3. Área problemática principal

La Tabla 4 muestra la distribución de los trabajos en las distintas áreas problemáticas consideradas en nuestro estudio. El porcentaje mayor corresponde a “Pensamiento numérico y algebraico” (18.35%), seguido del “Conocimiento, formación y desarrollo del profesor” (17.23%)

Área problemática:	Frecuencia	Porcentaje
1. Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria	28	10,49
2. Didáctica de la Matemática como Disciplina científica	33	12,36
3. Pensamiento Numérico y Algebraico	49	18,35
4. Historia en la Educación Matemática	7	2,62
5. Didáctica del Análisis	28	10,49
6. Conocimiento, formación y desarrollo profesional	46	17,23
7. Aprendizaje de la Geometría y medición	31	11,61
8. Aspectos afectivos, socioculturales y de género	5	1,87
9. Estudio de procesos matemáticos genéricos	20	7,49
10. TIC (Ordenadores, calculadoras y otros recursos tecnológicos)	15	5,62
11. Actitudes, Creencias y Concepciones	5	1,87

Tabla 4: Frecuencia del número de trabajos presentados en cada área problemática.

Resulta interesante analizar también la prevalencia del uso de los distintos métodos según el área problemática, lo cual se puede hacer en la Tabla 5. La tabla permite observar, por columnas, el uso de cada método en cada área, mientras que por filas se indica el peso relativo de cada método dentro de cada área.

	Cuantitativo	Mixto	Cualitativo	Teórico	Total
1. Didáctica de la Estadística, probabilidad y combinatoria	7 ⁽¹⁾ 25,00 ⁽²⁾ 22,58 ⁽³⁾	9 32,14 20,00	5 17,86 5,32	7 25,00 7,22	28 10,49
2. Didáctica de la matemática como disciplina científica	2 6,06 6,45	2 6,06 4,44	2 6,06 2,13	27 81,82 27,84	33 12,36
3. Pensamiento numérico y algebraico	5 10,20 16,13	9 18,37 20,00	15 30,61 15,96	20 40,82 20,62	49 18,35
4. Historia de la educación matemática	1 14,29 3,23	1 14,29 2,22	2 28,57 2,13	3 42,86 3,09	7 2,62
5. Didáctica del análisis	0 0,00 0,00	1 3,57 2,22	17 60,71 18,09	10 35,71 10,31	28 10,49
6. Conocimiento, formación y	6	2	25	13	46

Métodos de investigación en educación matemática.
Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010)

desarrollo profesional	13,04 19,35	4,35 4,44	54,35 26,60	28,26 13,40	17,23
7. Aprendizaje de la geometría y medición	3 9,68 9,68	11 35,48 24,44	9 29,03 9,57	8 25,81 8,25	31 11,61
8. Aspectos afectivos, socioculturales y de género	2 40,00 6,45	0 0,00 0,00	0 0,00 0,00	3 60,00 3,09	5 1,87
9. Estudio de procesos matemáticos genéricos	2 10,00 6,45	8 40,00 17,78	7 35,00 7,45	3 15,00 3,09	20 7,49
10. TIC (Ordenadores, calculadoras y otros recursos tecnológicos)	0 0,00 0,00	2 13,33 4,44	10 66,67 10,64	3 20,00 3,09	15 5,62
11. Actitudes, creencias y concepciones	3 60,00 9,68	0 0,00 0,00	2 40,00 2,13	0 0,00 0,00	5 1,87
Total por columna	31 11,61%	45 16,85%	94 35,21%	97 36,33%	267 100,00%

Contenido de las celdas: ⁽¹⁾Frecuencia Observada; ⁽²⁾Porcentaje de la Fila; ⁽³⁾Porcentaje de la Columna

Tabla 5. Métodos según área problemática (frecuencias absolutas y porcentajes por filas y columnas)

3.4. Nivel educativo investigado

Hemos considerado interesante estudiar el nivel educativo sobre el cual se centran las investigaciones y la relación entre el método y el nivel. Resalta el interés por investigar en el nivel de universidad (29.5%), seguido de la educación secundaria obligatoria (18.8%), siendo muy escasas las investigaciones en educación infantil.

Nivel	Frecuencia	Porcentaje
1. Educación infantil	5	1,85
2. Primaria	23	8,49
3. Secundaria obligatoria	51	18,82
4. Bachillerato y FP	27	9,96
5. Universidad	80	29,52
6. Varios	22	8,12
No pertinente	63	23,25

Tabla 6: Nivel educativo

En el caso de la investigación de Torralbo et al., se encontraron 60 tesis doctorales sobre educación primaria (44.4%)

En la Tabla 7 se cruza el nivel educativo con el método de investigación.

	Cuantitativo	Mixto	Cualitativo	Teórico	Total por Fila
1. Educación infantil	1 ⁽¹⁾ 20,00 ⁽²⁾ 3,23 ⁽³⁾	3 60,00 6,67	0 0,00 0,00	1 20,00 0,99	5 1,85
2. Primaria	0 0,00 0,00	8 34,78 17,78	11 47,83 11,70	4 17,39 3,96	23 8,49
3. Secundaria obligatoria	5 9,80 16,13	10 19,61 22,22	24 47,06 25,53	12 23,53 11,88	51 18,82
4. Bachillerato y FP	2 7,41 6,45	4 14,81 8,89	17 62,96 18,09	4 14,81 3,96	27 9,96
5. Universidad	13 16,25 41,94	13 16,25 28,89	36 45,00 38,30	18 22,50 17,82	80 29,52
6. Varios	6 27,27 19,35	5 22,73 11,11	3 13,64 3,19	8 36,36 7,92	22 8,12
0. No pertinente	4 6,35 12,90	2 3,17 4,44	3 4,76 3,19	54 85,71 53,47	63 23,25
Total por Columna	31 11,44	45 16,61	94 34,69	101 37,27	271 100,00

Contenido de las celdas: ⁽¹⁾Frecuencia Observada; ⁽²⁾Porcentaje de la Fila; ⁽³⁾Porcentaje de la Columna

Tabla 7. Frecuencias para el nivel según el método

3.5. Métodos e instrumentos de recogida de información utilizados

En la tabla 8 se muestra una preferencia por los métodos no interactivos (aplicación de cuestionarios, análisis de documentos).

Tipo de método	Frecuencia	Porcentaje
Métodos interactivos	70	25,93
Métodos no interactivos	89	32,96
Mixtos	10	3,70
No se recogen datos	101	37,41

Tabla 8. Frecuencia para la variable métodos de recogida de datos

El uso de algún tipo de instrumento es casi universal en todas las tesis analizadas por Torralbo (2001), preferentemente instrumentos contruidos en la propia investigación, aunque en algunos casos se usaron pruebas estandarizadas con la pretensión de alcanzar medidas más fiables.

3.6. Tipo de informantes (fuentes de información)

Los alumnos son la fuente de información que se considera con mayor frecuencia (46,1%), seguido por los profesores (10,7%) (Tabla 9). En el caso de las tesis doctorales Torralbo et al., obtuvieron que en 98 tesis (72,6%) los alumnos fueron los más investigados, mientras que los profesores lo fue en 17 tesis (12,6%).

Informantes	Frecuencia	Porcentaje
Alumnos	125	46,13
Profesores	29	10,70
Materiales y recursos	15	5,54
Documentos oficiales	10	3,69
Alumnos y profesores	2	0,74
Documentos y profesores	1	0,37
Base Teseo	1	0,37
No aplicable	88	32,47

Tabla 9. Frecuencia para la variable fuente de información

3.7. Número de informantes (tamaño de muestra)

El número total de trabajos en los cuales se informa del tamaño de muestra es de 125, con un valor máximo de 1220 individuos y mínimo de 1 (estudio de un caso). El tamaño mediano de 34 (más representativo que la media, 115, dada la fuerte asimetría de la distribución), y un rango intercuartílico de 88. La Figura 3 muestra un histograma de frecuencias de esta variable.

Resaltamos que un porcentaje alto (26,4%) de trabajos empíricos no indican el tamaño de muestra o solo refieren a porcentajes. Parece que los autores no están muy interesados en hacer inferencias a partir de la muestra tomada, lo cual está justificado por el carácter exploratorio de muchos de tales estudios.

Torralbo et al., informan que el 52,3% de las tesis utilizan un tamaño de muestra entre 31 y 100. Con frecuencias inferiores encuentran tesis cuyo tamaño de muestra se encuentra entre 1 y 10 (16,3%) (estudios de caso). Con muestras superiores a 500 encuentran 23 tesis (17%) (estudios de tipo encuesta).

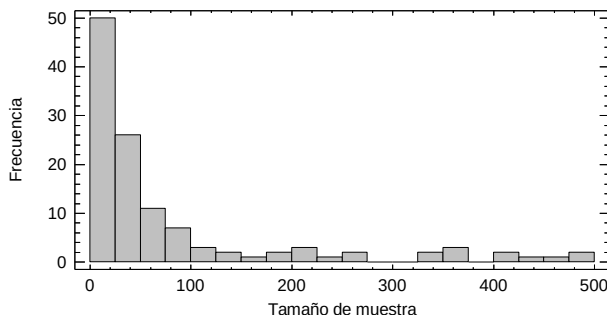


Figura 3. Histograma de la variable tamaño de muestra

Referencias

- Bryman, A., Becker, S. y Sempik, J. (2008). Quality criteria for quantitative, qualitative and mixed methods research: A view from social policy. *International Journal of Social Research Methodology*, 11 (4), 261-276.
- Buela-Casals, G. (2003). Evaluación de la calidad de los artículos y de las revistas científicas: Propuesta del factor de impacto ponderado y de un índice de calidad. *Psicothema*, 15, 1, 23-35.
- Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp.). Ciudad Real: SEIEM.
- Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp.). Ciudad Real: SEIEM.
- Creswell, J.W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Denzin, N. (1989). *The Research Act (3rd edition)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: a Postmodern perspective. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (Vol. Monograph No. 9, pp. 22–39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Flick, U. (2007). *An introduction to qualitative research (3rd edition)*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Goetz, J. P. y LeCompte, M. D. 1988. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Ediciones Morata.
- Hart, L. C., Swars, S. L. y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3, 1, 26-41.
- Ramos-Álvarez, M. M. y Catena, A. (2004). Normas para la elaboración y revisión de artículos originales experimentales en ciencias del comportamiento. *International Journal of Clinical and Health Psychology*, 4 (1), 173-189.
- Schoenfeld, A. H. (2008). Research methods in (mathematics) education. En Lyn English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education, second edition* (pp. 467-519). New York: Routledge.
- Simon, M. A. (2004). Raising issues of quality in mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 35 (3), pp. 157-163.
- Torralbo, M., Vallejo, Fernández, A. y Rico, L. (2004). Análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1976-1998). *RELIEVE (Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa)*, 10 (1), 41-59.

Métodos de investigación en educación matemática.
Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010)

Wilhelmi, M. R. y Lacasta, E. (2011). Métodos cuantitativos en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (2001–2010). En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp.). Ciudad Real: SEIEM.

ANEXO: INDICADORES DE CALIDAD METODOLÓGICA EN TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN

(Guía para la Reflexión Metodológica)

En las tablas A a H se incluyen una lista de cuestiones que orientan la valoración de aspectos relevantes en relación con la calidad en la aplicación de los métodos de investigación en el campo de la Didáctica de la Matemática, aplicable a trabajos realizados bajo los enfoques cuantitativos, cualitativos, mixtos, así como para los ensayos de tipo teórico (tabla H). Se trata de una guía o pauta simplificada que ha emergido a partir de diversas fuentes metodológicas, en particular Ramos-Álvarez y Catena (2004), Buela-Casals (2003), Bryman, Becker y Sempik (2008), Creswell (2009), Simon (2004), Schoenfeld (2008).

Los indicadores se agrupan según los siguientes apartados característicos de los procesos de investigación:

- a. Antecedentes y motivación de la investigación
- b. Desarrollo teórico
- c. Diseño metodológico
- d. Datos, análisis, resultados, discusión y conclusiones
- e. La comunicación de los resultados a la comunidad científica
- f. Referencias bibliográficas
- g. Visión global

		SI	NO
A1	¿Hay antecedentes que justifiquen la viabilidad y relevancia del trabajo? (La revisión de antecedentes deja clara la relevancia del estudio)		
A1	¿Está el problema adecuadamente formulado? (Un interrogante, alguna cuestión sin resolver o contradictoria que marca los objetivos)		
A4	¿Se formulan los objetivos y/o hipótesis de manera clara y precisa?		
	¿Se justifica el interés/necesidad de la pregunta y objetivos de investigación?		

Tabla A. Antecedentes y motivación de la investigación

		SI	NO
B1	¿Se describe adecuadamente el fundamento teórico? (Se describen las nociones teóricas usadas y se justifica su elección respecto de otras alternativas posibles)		

B2	¿Son adecuadas/pertinentes las referencias bibliográficas de la perspectiva teórica? (La revisión de modelos o explicaciones teóricas y de fenómenos relevantes es completa)		
B3	¿Se hace una aportación en el campo de lo conceptual, lo metodológico o sobre el dominio de aplicación?		

Tabla B. Desarrollo teórico

	C1: METODOLOGÍA CUANTITATIVA	SI	NO
C1.1	¿Es pertinente para el problema de investigación el uso de métodos cuantitativos?		
C1.2	¿Son <i>falsables</i> ⁴ las hipótesis de investigación?		
C1.3	¿Es adecuada la operativización general de <i>constructos</i> ⁵ en variables?		
C1.4	¿Son adecuadas las variables independientes? (Para cada uno de los factores se han elegido adecuadamente los niveles de los mismos)		
C1.5	¿Son adecuadas las técnicas estadísticas utilizadas y se justifica su uso? ¿El método es adecuado con relación al tamaño y la naturaleza de la muestra?		
C1.6	¿Se hace una interpretación correcta de los resultados del análisis estadístico? ¿Se atiende a la fiabilidad, significatividad y representatividad de los resultados?		
C1.7	¿Se aportan referencias específicas de los técnicas utilizadas?		
C1.8	¿Se aporta la información necesaria que permita replicar la experimentación o reproducir una observación en contextos similares con resultados equiparables?		
C1.9	¿Mediante qué medios se controla la <i>validez interna</i> ⁶ ? (Se garantiza la asignación aleatoria de participantes/sujetos a las diferentes condiciones experimentales y la aplicación aleatoria de las condiciones, así como el uso de técnicas adecuadas de aleatorización)		
C1.10	¿Se controlan las variables extrañas ⁷ para descartar interpretaciones alternativas potenciales?		
C1.11	Si se trata de un experimento en sentido estricto, ¿hay un control adecuado de las variables que se manipulan?		
C1.12	Respecto de la validez de constructo, ¿hay indicaciones de que se evitan los sesgos más destacados?		

	C2: METODOLOGÍA CUALITATIVA	SI	NO
C2.1	¿Es pertinente para el problema el uso del enfoque cualitativo? (Se justifica la adecuación de la metodología a las preguntas y objetivos de investigación)		

⁴ *Falsable*: Dicho de una proposición: Que puede ponerse a prueba y ser desmentida por los hechos o por un experimento adverso. (www.rae.es).

⁵ *Constructo*: Se dice de cualquier entidad no directamente observable o manipulable, de tal manera que su presencia debe ser detectada indirectamente. Ejemplos de constructos son la inteligencia o la competencia matemática.

⁶ *Validez interna*: A lo largo del estudio existe una coherencia de resultados obtenidos por métodos distintos, que aporta solidez a los resultados obtenidos.

⁷ *Variables extrañas*: Variable independiente no relacionada con el estudio, pero que puede presentar efectos sobre la variable dependiente.

Métodos de investigación en educación matemática.
Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010)

C2.2	¿Se indica explícitamente cuál es el paradigma de investigación?		
C2.3	¿Se especifica claramente cuál es el diseño de investigación?		
C2.4	¿Se justifican los criterios para la selección de informantes y contextos?		
C2.5	¿Se describe el proceso de investigación, los instrumentos de recogida de datos, y el fundamento de su uso?		
C2.6	¿Los instrumentos/métodos de recogida de información son adecuados a los objetivos formulados?		
C2.7	¿Se usan estrategias múltiples para validar los hallazgos? (triangulación ⁸)		

	C3: METODOLOGÍA MIXTA	SI	NO
	<i>Además de los criterios correspondientes a los métodos cualitativos y cuantitativos usados:</i>		
C3.1	¿Es pertinente para el problema el uso del enfoque mixto?		
C3.2	¿Se justifica el uso tanto de métodos cualitativos como cuantitativos?		
C3.3	¿Es adecuado el uso de los métodos cualitativos?		
C3.4	¿Es adecuado el uso de los métodos cuantitativos?		
C3.5	¿Se integran de manera coherente los resultados e interpretaciones de los datos y técnicas de análisis cualitativos y cuantitativos?		

Tabla C. Diseño metodológico

		SI	NO
D1	¿Los datos obtenidos permiten contrastar las hipótesis o alcanzar los objetivos formulados?		
D2	¿Se ha recogido un volumen de datos suficiente para poder dar respuesta a los objetivos o respaldar las conclusiones?		
D3	¿Los resultados son enunciados de forma clara y concisa?		
D4	¿La discusión de los resultados se fundamenta en el marco teórico y remite a la revisión bibliográfica previa?		
D5	¿Se realiza alguna aportación a modo de conclusión general del trabajo que sea directamente extraíble de la investigación?		
D6	¿Se formulan limitaciones y cuestiones abiertas ⁹ que sugieran la proyección del trabajo en investigaciones futuras sobre el mismo tópico?		
D7	¿Las conclusiones proceden del análisis de los datos y se contextualizan en trabajos anteriores del área?		
D8	¿Es adecuado el análisis (cualitativo o cuantitativo) para resolver el problema que motiva la investigación?		

⁸ Denzin (1989, en Flick, 2007) distingue 3 tipos de triangulación (desarrollado en Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011):

- Triangulación de fuentes de datos: cuando se comparan datos de un mismo fenómeno, procedentes de distintos informantes o de fases diferentes del proceso de investigación.
- Triangulación de investigadores: cuando participan diferentes observadores para minimizar los posibles sesgos que introduce la presencia del investigador.
- Triangulación metodológica: cuando se comparan datos obtenidos con distintas técnicas de recogida de información.

⁹ *Cuestión abierta*: interrogante relevante suscitado en la investigación que no tiene respuesta en la misma por no estar relacionada directamente con las hipótesis planteadas.

D9	¿Se hace una interpretación adecuada de los resultados del análisis cualitativo?		
D10	¿Se hace una interpretación adecuada de los resultados del análisis cuantitativo?		

Tabla D. Datos, análisis, resultados, discusión y conclusiones

		SI	NO
E1	¿Las secciones del informe siguen una secuencia lógica? (¿Hay coherencia e integración de las diferentes partes, una vuelta continua a un hilo rector o, por el contrario, las partes aparecen de manera discontinua, con saltos conceptuales?)		
E2	¿El informe es completo y autosuficiente? (Se ha incluido en el mismo todo lo necesario para resolver un problema de investigación o, por el contrario, da la sensación de ser un fragmento insuficiente?)		
E3	¿Se siguen las indicaciones de las normas APA sobre la forma (tipografía, denominación, orden, etc.) y composición de las distintas secciones?		
E4	¿Son las tablas, figuras y gráficos claros y necesarios?		

Tabla E. La comunicación de los resultados a la comunidad científica

		SI	NO
F1	¿Son adecuadas y relevantes las fuentes documentales usadas? (Predominan las fuentes relacionadas con el problema y el área específica de investigación, o son más bien dispersas?)		
F2	¿El formato de las referencias es homogéneo (por ejemplo, APA)?		
F3	¿Están actualizadas las fuentes documentales?		

Tabla F. Referencias bibliográficas

		SI	NO
G1	¿Supone un avance significativo respecto del conocimiento del área que se tiene hasta ese momento?		
G2	¿Existe coherencia entre el paradigma, formulación de objetivos y metodología utilizada?		

Tabla G. Visión global

		SI	NO
H1	¿Se abordan cuestiones que son importantes para la educación matemática en cualquiera de sus niveles?		
H2	¿Se ofrece un análisis profundo de las cuestiones? ¿Amplía nuestra comprensión de las mismas?		
H3	¿Se construyen conexiones fuertes dentro de una teoría o entre teorías? ¿Se hacen distinciones que no se han hecho antes o se hicieron de manera débil?		
H4	¿Tiene la discusión teórica implicaciones para la práctica en cualquier nivel de matemáticas aunque no sean inmediatas?		
H5	¿Se expresan con claridad las ideas?		
H6	Son adecuadas las referencias bibliográficas en las que se basa la nueva perspectiva teórica?		

Tabla H. Ensayos de tipo teórico

MÉTODOS CUANTITATIVOS EN LAS CONTRIBUCIONES A LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM EN 2001–2010

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E.

Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Como señalaba [...] Henry G. Felsen [...] un tratamiento adecuado cura un resfriado en siete días, pero si se deja que se resuelva por sus propios medios, se arrastra durante una semana. Lo mismo ocurre con [...] promedios, relaciones, tendencias y gráficos. Puede haber más de lo que ven los ojos y puede haber mucho menos.

(How to lie with Statistics, Huff, 1954)

Resumen. Se toma como campo de observación las contribuciones a los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) en las que aparecen métodos cuantitativos. Se motiva la necesidad de un control previo a la recogida de datos y su tratamiento. Se justifica entonces la función que la ingeniería didáctica como método de investigación puede aquí cumplir. Asimismo, se realiza un análisis sistemático de una contribución de tipo experimental cuyo método privilegiado es cuantitativo.

Palabras clave. Hechos y fenómenos, ingeniería didáctica, métodos cuantitativos, simposios SEIEM.

Abstract. Quantitative methods used in papers presented in the symposia of the Spanish Society for Research in Mathematics Education in the decade 2001-2010 are analyzed. We justify the need for a previous control of data collection and data processing. Then, we reasoned what it is here the role of didactical engineering as a research method. Also, a systematic analysis of an experimental contribution, whose preferred method is quantitative, is carried out.

Key words. Facts and phenomena, didactical engineering, SEIEM symposia, quantitative methods.

1. HECHOS, FENÓMENOS Y ECLECTICISMO

Los problemas propuestos en didáctica de las matemáticas son muy complejos, puesto que se trata de resolver cuestiones:

- *Científicas:* describir y explicar el comportamiento de los sistemas didácticos.
- *Técnicas:* desarrollar instrumentos para la mejora del funcionamiento y control de los sistemas didácticos.

- *Prácticas*: criterios concretos y eficaces para la acción, la toma de decisiones y la intervención en situaciones “en marcha”.

Estas necesidades (y la dificultad de abordarlas) explican en parte la existencia de diversos programas de investigación, que fundamentan sus propuestas según distintos enfoques teóricos y que realizan contrastes experimentales diversos en forma y fondo.

A este respecto, Kilpatrick (1994) mostró ya las barreras culturales y lingüísticas existentes entre los términos “Mathematics Education” y “Didactique des mathématiques”, referentes implícitos de dos formas diferentes —en ocasiones contrapuestas— de entender la investigación relativa a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es en este contexto heterogéneo, en ocasiones escindido, donde debemos analizar los métodos cuantitativos utilizados en las investigaciones de los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Los métodos cuantitativos se asocian en muchos contextos a la necesidad de inferir a partir de muestras significativas conocimiento fiable generalizable a una población. Johnson y Onwuegbuzie (2004) establecen una serie de fortalezas y debilidades de estos métodos que claramente apuntan en esta dirección (tabla 1).

Fortalezas	Debilidades
▪ Contraste y validación de teorías elaboradas sobre cómo (y en menor medida, por qué) los fenómenos ocurren. ▪ Contraste de hipótesis. Generalización de resultados cuando las muestras son significativas (aleatorias y suficientemente grandes). ▪ Generalización de resultados obtenidos de manera reiterada en muchas poblaciones y subpoblaciones. ▪ Obtención de datos experimentales útiles que permitan predicciones de hechos cuantificables. ▪ El investigador puede construir situaciones para eliminar las interpretaciones confusas de ciertas variables, con el objetivo de establecer relaciones causa-efecto más plausibles. ▪ La obtención de datos cuantitativos según ciertos métodos puede ser relativamente rápida. ▪ Proporciona datos precisos (numéricos, cuantitativos). ▪ El análisis utilizando programas estadísticos es relativamente poco costoso (desde el punto de vista del tiempo necesario). ▪ Los resultados (intensidad del efecto, significación estadística, etc.) son relativamente independientes del investigador. ▪ Se puede tener mayor credibilidad con personas de contextos de decisión (administradores, políticos, etc.) ▪ Útil para estudios de muestras grandes.	▪ Las categorías identificadas por los investigadores pueden no ser consensuadas. ▪ Las presunciones identificadas por los investigadores pueden no ser consensuadas. ▪ El investigador puede perderse en los fenómenos, porque focaliza su trabajo en el contraste o generación de hipótesis (sesgo de confirmación). ▪ El conocimiento producido puede ser demasiado abstracto y general para la aplicación directa a situaciones, contextos e individuos particulares.

Tabla 1. Fortalezas y debilidades de los métodos cuantitativos (Johnson y Onwuegbuzie, 2004, 19)

El trabajo de Johnson y Onwuegbuzie (2004) además de establecer como fortaleza de los métodos cuantitativos la “generalización de resultados cuando las muestras son significativas”, les atribuye otras características que podríamos calificar de “típicas”, por ser citadas reiteradamente en estudios sobre metodología. Por ejemplo: establecimiento de relaciones causa-efecto, obtención de datos precisos y objetivos (independientes del investigador), credibilidad en órganos decisorios, etc. Pero más aún, se atribuye una falta de “utilidad”, por cuanto “el conocimiento producido puede ser demasiado abstracto y general para la aplicación directa a situaciones, contextos e individuos particulares”. De hecho, lo cuantitativo es asociado abusivamente con lo inferencial: análisis de las relaciones entre variables (un número relativamente pequeño

de ellas) referidas a un conjunto de individuos (una muestra grande y representativa de ellos).

Esta identificación de lo cuantitativo con la búsqueda de leyes generales, tiene como trasfondo una ideología positivista-empirista que:

- Prima excesivamente la estadística inferencial paramétrica.
- Exige supuestos (en particular, normalidad de las variables y aleatoriedad de las muestras) difícilmente constatables en la mayoría de los casos.

Además, esta ideología es muchas veces entendida “en oposición” con un paradigma descriptivo-comprensivo. En breve, el debate cuantitativo-cualitativo que suele resumirse en una serie de descriptores exclusivos y excluyentes (tabla 2).

Paradigma cualitativo	Paradigma cuantitativo
▪ Métodos cualitativos ▪ Fenomenología y comprensión ▪ Observación naturalista, sin control ▪ Subjetivo ▪ Dentro de los datos ▪ Exploratorio, inductivo, descriptivo ▪ Orientado al proceso ▪ Datos “ricos y profundos” ▪ No generalizable ▪ Holista ▪ Realidad dinámica	▪ Métodos cuantitativos ▪ Positivismo lógico ▪ Medición penetrante y controlada ▪ Objetivo ▪ Desde fuera de los datos ▪ Confirmatorio, inferencial, deductivo ▪ Orientado al resultado ▪ Datos “sólidos y repetibles” ▪ Generalizable ▪ Particularista ▪ Realidad estática

Tabla 2. Reichardt y Cook (1986)

Sin embargo, los métodos cuantitativos pueden ser utilizados en otros contextos, con otras intenciones y bajo otra ideología científica. Mostraremos como la *ingeniería didáctica* (Lacasta, Pascual y Wilhelmi, 2009) permite realizar contrastes experimentales que incluyen estudios cuantitativos sin remitirse necesariamente a un paradigma positivista y sin buscar necesariamente la inferencia estadística.

El situar la ingeniería didáctica como referencia esencial de nuestro análisis de los métodos cuantitativos es evidentemente un *sesgo*, es decir, un “curso o rumbo que toma [el trabajo]” (www.rae.es), que consideramos inexcusable: no hay nada más contrario a la ciencia que el eclecticismo. Con otras palabras, cualquier intento de conciliar distintos enfoques debe garantizar un núcleo teórico y metodológico firme y bien definido, que garantice en particular que las aportaciones de diferentes perspectivas sean no sólo coherentes, sino que contribuyan a la consistencia de ese núcleo irrenunciable.

La identificación de este núcleo firme y bien definido es esencial para pasar del *hecho* al *fenómeno*. Wilhelmi, Font y Godino (2006) describen en qué sentido en este paso la teoría didáctica es determinante. Para estos autores, por un lado, un hecho puede describirse sucintamente como la parte de un fenómeno sobre la cual hay consenso; mientras que, por otro lado, un fenómeno sería la explicación del hecho dada por una teoría.

“Dos enfoques teóricos diferentes pueden coincidir en que determinadas variables están presentes en el fenómeno considerado [...], pero no

necesariamente en el papel que juegan las mismas. Las variables espaciales y temporales (dónde y cuándo se desarrolla un acontecimiento) o la edad de los protagonistas son características normalmente consideradas en cualquier marco teórico [con un carácter similar...] Otras características, como la complejidad semiótica, los significados personales (propios de cada estudiante individual) e institucionales (de la clase como institución) o el funcionamiento de los signos en el discurso matemático, representan descriptores explicativos relativos a una teoría específica.” (pp. 2–3).

Estos autores aportan ejemplos de cómo un mismo aspecto relativo a un proceso de enseñanza y aprendizaje es descrito según diversas teorías (APOS, TAD, EOS, TSDM¹⁰). Pero más aún, indagan en el tipo de explicación (*débil* o *fuerte* con relación al *modelo causal*¹¹) que cada una de las teorías intentan aportar a partir de los fenómenos que identifican y describen.

En resumen, el análisis de los métodos cuantitativos debe partir de un enfoque para la didáctica de las matemáticas, que debe, en particular, explicitar un núcleo metodológico firme. Situamos a la *ingeniería didáctica* (sección 3) en este núcleo y, por lo tanto, es para nosotros referencia obligada para, en concreto, los métodos cuantitativos.

En la sección 4, mostraremos un breve análisis de los trabajos cuantitativos presentados en la SEIEM en la última década 2001–2010. Uno de estos artículos será utilizado en la sección 5 para ejemplificar la ingeniería didáctica como método de investigación, así como para poner en funcionamiento la “guía metodológica”, que incluye indicadores para valorar la calidad de los métodos utilizados en trabajos de investigación (ver ponencia común de este mismo seminario de investigación). En la sección 6, y a modo de conclusión, haremos una breve síntesis y daremos alguna recomendación sobre el uso de estos métodos para la investigación en didáctica de las matemáticas.

Antes de todo ello, en la siguiente sección, damos una descripción de los trabajos presentados en los simposios de la SEIEM, donde el método privilegiado es cuantitativo.

2. LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS EN LAS CONTRIBUCIONES DE LA SEIEM

En esta sección haremos una breve descripción de los trabajos cuantitativos presentados en los simposios de la SEIEM en 2001–2010¹², atendiendo a:

¹⁰ APOS: Acción, Proceso, Objeto y Esquema (del inglés, *Action - Process - Object - Schema*); TAD: Teoría Antropológica de lo Didáctico; EOS: Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos; TSDM: Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas.

¹¹ Wilhelmi, Font y Godino (2006) señalan cómo, en todo caso, hay una “relajación” del modelo causal. Puesto que actualmente parece inviable determinar qué es una ley general en didáctica de las matemáticas, justifican dichos autores, el ideal causal de explicación es sustituido por un modelo más general: “Dado un fenómeno que se observa con cierta regularidad (1) hay que buscar las causas y (2) estas causas han de producir inevitablemente (o al menos en la mayoría de los casos) el fenómeno en cuestión” (p.4).

¹² Las actas de los simposios que incluyen todos los trabajos pueden descargarse de la Web de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (<http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm>).

- El área de referencia.
- El nivel educativo.
- El grado de intervención del investigador en la observación.
- El carácter temporal del estudio: *puntual, lineal, transversal, longitudinal o secuencial*.
- La fuente o fuentes de donde proceden: alumnos, profesores, padres, materiales educativos, instituciones o documentos oficiales.

El primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática data del año 1997. Sin embargo, hasta el año 2001 no se presenta ninguna contribución cuyo método cuantitativo sea explícito. Este hecho se justifica porque en el periodo 1997–2000 se presentaron únicamente contribuciones monográficas cuyo objetivo era describir “el estado de la cuestión” de diferentes tópicos en didáctica de las matemáticas.

Por ello, en este trabajo el periodo de referencia es la década pasada (2001–2010). En la figura 1 se puede ver el número de contribuciones cuyo método tiene un componente “cuantitativo” esencial, es decir, sea cual sea su naturaleza de las estadísticas (descriptiva, inferencial, paramétrica o no), hay un predominio de variables cuantitativas que aparecen en la comunicación de manera explícita.

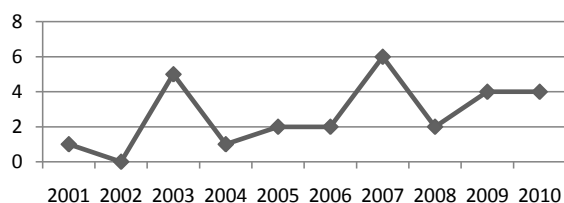


Figura 1. Frecuencias absolutas de contribuciones cuantitativas en 2001–2010

El restringir el estudio al periodo citado permite asimismo cuantificar de manera más justa el “peso” que los métodos cuantitativos tienen respecto al conjunto de las contribuciones. En la figura 2 se muestran las frecuencias absolutas y los porcentajes.

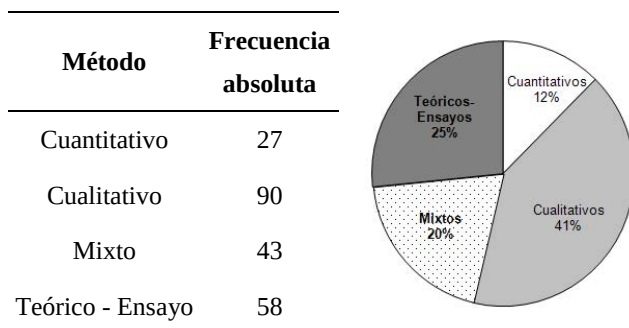


Figura 2. Frecuencias absolutas y porcentajes de métodos en 2001–2010

Métodos cuantitativos en las contribuciones a los simposios de la SEIEM en 2001-2010

Además, se observa en el último lustro un crecimiento considerable de las aportaciones basadas en métodos cuantitativos (tabla 3).

Año	Contribuciones	Cuantitativas	Tantos por ciento (%)	Media de % en los dos últimos lustros
2010	34	4	11,8	14,2
2009	22	4	18,2	
2008	23	2	8,7	
2007	28	6	21,4	
2006	19	2	10,5	
2005	25	2	8	8,2
2004	18	1	5,6	
2003	26	5	19,2	
2002	11	0	0	
2001	12	1	8,3	

Tabla 3. Evolución temporal del porcentaje de trabajos cuantitativos

En la figura 3 se muestran las áreas de referencia de los 27 trabajos cuantitativos presentados. En ella se observa que el área mayoritaria es “Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria” (9), seguida del “Pensamiento numérico y algebraico” (4) y, finalmente, una serie de áreas con 1 o 2 contribuciones presentadas.

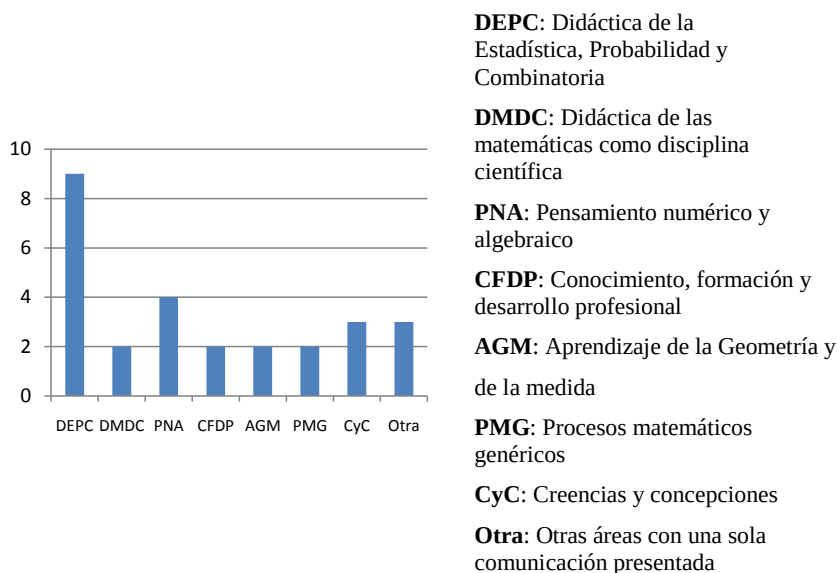


Figura 3. Frecuencias absolutas según áreas

Además, como se puede ver en la tabla 4, el tanto por ciento de trabajos cuantitativos por áreas muestra que las de DEPC y CyC tienen los tanto por ciento más elevados, siendo el de la primera área el más representativo (dado el número de trabajos presentados).

Área	DEP C	DMD C	PN A	CFD P	AG M	PM G	Cy C	Otr a	TOTA L
Frecuencia absoluta (Fa)	23	18	34	41	29	19	5	45	214
Fa (met. cuantitativo)	9	2	4	2	2	2	3	3	27
Tantos por ciento (%)	39,1	11,1	11,8	4,9	6,9	10,5	60	6,7	12,6

Tabla 4. Tantos por ciento de trabajos cuantitativos por áreas de conocimiento

En la figura 4 se muestra el nivel educativo de referencia en las muestras. Destacan dos: secundaria (15, incluyendo estudios transversales “primaria-secundaria” y “secundaria-universidad”) y universidad (8, incluyendo estudios transversales “secundaria-universidad”).

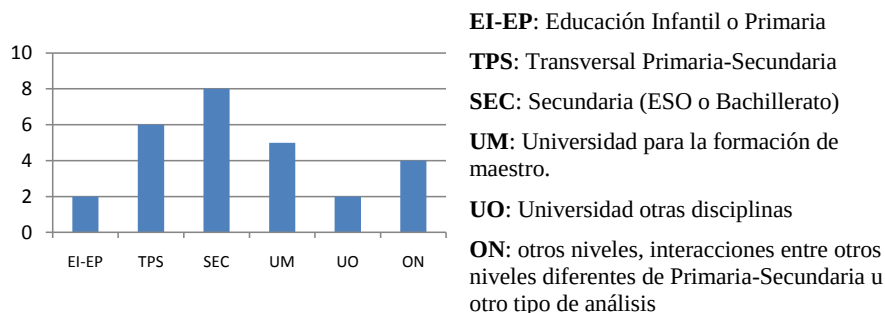


Figura 4. Frecuencias absolutas según nivel educativo

Excepto una, todas las muestras han sido obtenidas sin interacción, es decir, el investigador ha recogido los datos pero no ha participado, en tanto que observador implicado¹³, en el proceso de estudio anterior o posterior.

Como se puede deducir de la tabla 5, la recogida de datos es en 15 de los 17 casos *puntual*, esto es, en un momento concreto a un único grupo¹⁴. La recogida es transversal en 8 casos. Por otro lado, en esta misma tabla se recogen la fuente de los datos analizados. Cabe aquí destacar que 22 de los 27 se refieren a alumnos (17) o profesores (5), teniendo el resto de trabajos como fuente materiales educativos (2), documentos oficiales (1) o la interacción de diversas fuentes (2).

Tiempo		Fuente	
Puntual	15	Alumnos	17
Lineal	1	Profesores	5
Transversal	8	Materiales	2
Longitudinal	2	Documentos	1
Secuencial	0	Varios	2

Tabla 4. Permanencia del investigador y fuentes

3. INGENIERÍA DIDÁCTICA

Kilpatrick (1994) parte del descrédito en que ha caído el positivismo, el empirismo, para criticar los enfoques basados exclusivamente en métodos cualitativos, que limitan la

¹³ Puede suceder que un investigador sea a la vez profesor de los sujetos de su investigación, pero en el diseño del método no se hace referencia a cómo esto condiciona la investigación. Esto es, en tanto que investigador, únicamente interviene en el momento en que recoge los comportamientos de los estudiantes.

¹⁴ Puede darse la circunstancia de que sean varios grupos, pero entonces estos se suponen homogéneos entre sí; no pudiéndose por lo tanto asumir un análisis transversal o de comparación de grupos que tienen diferentes valores en la variable edad (*cohortes*).

toma en consideración de la fiabilidad de las observaciones y de la validez de los resultados.

“Nuestros investigadores evitan la ingeniería como metáfora de investigación; consideran la noción de variable como un residuo de un positivismo desacreditado; han abandonado no sólo todo contraste de hipótesis, sino también toda generación de hipótesis, incluso la propia formulación de hipótesis. Vagan por una especie de desierto donde el constructivismo radical, las matemáticas del niño y los métodos cualitativos tienen un poder encantador y donde las cuestiones de validez son obsoletas.” (Kilpatrick, 1994, 92)

Kilpatrick critica un enfoque en Educación Matemática que en los años noventa cumplía una suerte de discriminación positiva, para compensar el hecho de que en años precedentes la valoración de los trabajos de investigación se centrara en la “abundancia” (y no siempre en la pertinencia) de las estadísticas aportadas¹⁵. Lo esencial de la crítica de Kilpatrick, que aún sigue vigente, no es pues el método utilizado, sino la filosofía que lo sustenta. Creemos obsoleto centrar el debate metodológico en el enfrentamiento cuantitativo-cualitativo. Sin embargo, es necesario afrontar las cuestiones de validez, representatividad de una observación, estabilidad de una situación, reproducibilidad, transferencia de conocimiento, etc., si se quiere hacer progresar la didáctica sobre exigencias comunes.

La evolución de una teoría en didáctica de las matemáticas puede determinarse por el contraste entre un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. La teoría busca validar las hipótesis que formula (*a priori*). Los hechos observados permiten (*a posteriori*) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas. Este modo de proceder en la evolución de la teoría didáctica es una de las características definitorias de las distintas perspectivas que comparten los presupuestos del programa epistemológico.

“Los didactas [...] recurren a análisis elaborados previamente a la experimentación en clase. Este paso del pensamiento a la acción ha sido característico en su trabajo en las dos últimas décadas [...] Es cierto que los trabajos aportados por diferentes didácticas varían en sus centros de interés, pero todos ellos parecen revelar una epistemología común y compartir la misma metodología.” (Kilpatrick, 1994, 89–90)

Así, la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) permite abordar el contraste experimental necesario. Más aún, este método de investigación¹⁶ permite abrir el abanico de métodos estadísticos sin cortapisas. El análisis multivariante, el *análisis implicativo* (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008), surgido desde la didáctica de las matemáticas, la

¹⁵ Es la época en que se publica, por ejemplo, el ya clásico *Radical constructivism in mathematics education* (Von Glasersfeld, 1995).

¹⁶ *Ingeniería didáctica como método de investigación*. La ingeniería didáctica tiene dos facetas: una, técnica o de producción de instrumentos específicos para la gestión de un proceso de construcción y comunicación de un saber matemático; otra, científica o de análisis de dichos procesos. Más aún, ni siquiera la “bondad” contrastada de una *ingeniería*, en tanto conjunto de reglas sobre el funcionamiento y control de una situación, supone necesariamente la asunción de su aplicabilidad generalizada. Un ejemplo paradigmático es la situación del puzle (Brousseau, 1981): “El éxito del proceso, experimentado en 5º de Educación Primaria [10-11 años] bajo condiciones favorables, ha llenado de esperanza y entusiasmo [a profesores e investigadores], a la vez que ha mostrado hasta que punto su generalización a todas las clases de 5º sería complejo” (Brousseau, 1998, 337).

estadística descriptiva, la estadística inferencial paramétrica y no paramétrica, todo ello encuentra su acomodo y mejor adaptación a las características de los datos recogidos.

La polémica cualitativo-cuantitativo en la que había desembocado la crítica al positivismo y al empirismo radical, coarta los métodos estadísticos utilizables. En concreto, en una perspectiva estrechamente cuantitativa, como ya hemos dicho, se prima excesivamente la estadística inferencial paramétrica, que exige supuestos difícilmente constatables en la mayoría de los casos. Por otro lado, en una perspectiva exclusivamente cualitativa, se descuidan las cuestiones de validez y de contraste de hipótesis. Sin embargo, el contraste entre el análisis *a priori* y *a posteriori* de la ingeniería didáctica permite evitar esta polarización y sus efectos.

Aunque la ingeniería didáctica no es un método exclusivo de la TSDM, es el marco de esta teoría donde más se ha desarrollado y utilizado. A continuación describimos de manera somera cómo la TSDM hace evolucionar el conocimiento sobre los procesos de construcción y comunicación del saber, en lo que estos procesos tienen de específico de las matemáticas; en breve, cómo hace evolucionar la Didáctica de las matemáticas.

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) busca la estabilidad en el funcionamiento del “medio”, necesaria para la *reproducibilidad* de situaciones didácticas. Esto determina el progreso de la didáctica como instrumento técnico-práctico (*intervenciones críticas* en los sistemas didácticos) y como disciplina científica (*prueba de la contingencia*). De esta forma, según la TSDM, el progreso de la didáctica requiere la determinación de las condiciones que rigen las interacciones sujeto-medio.

La didáctica estudia entonces la sensibilidad del medio didáctico a « estímulos », esto es, modificaciones de los agentes, del medio material utilizado, de la institución en donde se desarrolla el proceso de estudio, etc. Se identifica un fenómeno cuando se establece una relación entre una intervención crítica sobre el medio y una respuesta que éste, en tanto *medio antagonista*, da a los sujetos.

En este sentido, las *variables didácticas* actúan de “contraste o reactivo” que permiten de manera controlada provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas al medio. De hecho, el estudio de la adecuación de las variables didácticas para determinar cambios en las estrategias de acción representa un instrumento de validación interna de las conclusiones que puedan extraerse de una observación concreta. En estas condiciones, se puede definir una situación *reproducible*; es decir, en condiciones similares, con un control del medio, la construcción del conocimiento pretendido será la misma.

La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su *validez* puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable¹⁷.

¹⁷ No obstante, hay que tener en cuenta que el fenómeno de la *obsolescencia* (Brousseau, 1998) de las situaciones didácticas es inevitable; obligando a su ulterior revisión y ajuste.

En la figura 6 se muestra a la izquierda el esquema genérico de la ingeniería didáctica y a la derecha su desarrollo en la TSDM.

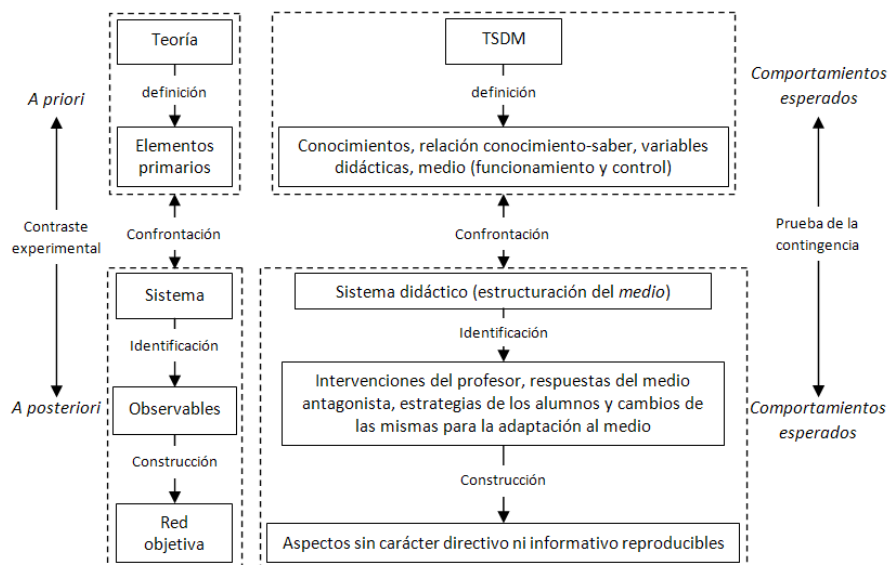


Figura 5. Evolución de la didáctica de las matemáticas según la TSDM

4. BREVE ANÁLISIS DE LOS TRABAJOS CUANTITATIVOS PRESENTADOS EN LA SEIEM

De los 27 trabajos analizados destacamos en esta sección el objetivo, el tamaño de la muestra, el tipo de estadísticas utilizadas y si se han explicitado o no las hipótesis que se desea contrastar.

1. *Objetivo.* Dos son los grandes objetivos pretendidos: uno, describir un grupo de individuos¹⁸; otro, prever su comportamiento¹⁹. Un trabajo puede compartir estos dos objetivos, que además no se identifican necesariamente con “estadística descriptiva” y “estadística inferencial” (que presuponen unos métodos más o menos estandarizados). Asimismo, la descripción puede identificarse con un estudio para la confirmación o refutación de un comportamiento previamente observado y descrito.

De los 27 trabajos analizados, 21 tienen por objetivo la descripción y 6 la previsión.

2. *Tamaño de la muestra.* Es muy heterogéneo: varía entre 16 y 1220, con una media de 337 y una desviación típica de 294,2. En la figura 5 se muestra un

¹⁸ Los individuos en muchas ocasiones son sujetos, pero podrían ser libros de texto, instituciones, materiales escolares, etc.

¹⁹ En general, la previsión suele hacerse pensando en una intervención posterior, que puede o no estar contemplada en el diseño del estudio que se esté llevando a cabo.

gráfico de dispersión del tamaño de las muestras de las 27 contribuciones cuantitativas.



Figura 6. Heterogeneidad en el tamaño de las muestras

La técnica de muestreo es explícita y pertinente en el trabajo en 10 de los 27 trabajos. En estos 10 trabajos incluimos 4 cuyo análisis se refiere a toda la población²⁰.

3. *Técnicas utilizadas.* Todos los trabajos presentan una estadística descriptiva, es decir, presentan de manera organizada datos mediante frecuencias, porcentajes, alguna medida de centralización o dispersión, etc., y representaciones gráficas de los mismos. De hecho, en 11 trabajos es el único tipo de estadística que se presenta, aunque de manera profusa o con un número de variables numeroso (motivo por el cual se han clasificado como estudios cuantitativos²¹). El resto de métodos utilizados son muy heterogéneos. Destaca el uso de las pruebas χ^2 (5 trabajos) y Kruskal-Wallis (3 trabajos), α de Cronbach (3 trabajos), ANOVA (3 trabajos), escalas o índices seleccionados o diseñados *ex profeso* para el análisis de los datos (3 trabajos) y coeficiente de correlación de Pearson (2 trabajos).
4. *Hipótesis.* De los 27 trabajos analizados, 8 se refieren explícitamente a unas hipótesis que son contrastadas, esto es, refutadas, validadas o, de manera más propia, dada la sensibilidad del sistema didáctico, valoradas según la aportación de los datos experimentales recogidos que contribuyen a su apoyo, confortación, matización, rechazo o aceptación parcial, reformulación, etc.

Estos cuatro aspectos no son en sí mismos valorativos, es decir, objetivos, tamaño de la muestra, técnicas y explicitación o no de las hipótesis pueden estar relacionados con criterios diversos, de tal forma que las distintas decisiones tomadas por los investigadores puedan ser aceptables, incluso en el caso extremo de ser contrarias.

Así, por ejemplo, con relación a las hipótesis, su explicitación o no puede estar justificada. En efecto, hay que observar que la determinación de hipótesis necesita de

²⁰ Aquí se incluyen ensayos basados en estadísticas cuantitativas sobre la producción científica en Didáctica de las matemáticas o en alguna de sus áreas de conocimiento.

²¹ Ver la contribución común que sirve de presentación de este mismo *Seminario sobre métodos estadísticos (cualitativos, cuantitativos y mixtos)*.

una exposición previa de los aspectos teóricos relevantes. Este hecho, dados los distintos paradigmas presentes actualmente en Didáctica de las matemáticas, puede dificultar la difusión de los resultados de la investigación y por lo tanto su impacto. Contrariamente, se podría argüir que la ausencia de hipótesis tiene una connotación empirista o positivista que dista de ser pertinente para la didáctica, al menos en su estado actual en tanto rama de las Ciencias Humanas.

Más aún, debe tenerse en cuenta el contexto de referencia: análisis de contribuciones en congresos, simposios, seminarios y reuniones científicas en general, donde, por un lado, la limitación de espacio condiciona sobremanera los modos formales de difusión de los resultados y, por otro lado, el público al que va dirigido es heterogéneo, puesto que no comparte la misma ideología científica.

Mención aparte merece el tamaño de la muestra. De manera aislada, esta característica no permite valorar el estudio. Es necesario analizarla bajo una perspectiva más amplia, en la que al menos las técnicas de muestreo y de tratamiento de los datos, así como las nociones de *significatividad* y *representatividad* son esenciales.

- Técnicas de muestreo y de tratamiento de los datos. La normalidad de las variables, la aleatoriedad de las muestras, la igualdad de varianzas (*homocedasticidad*), etc., deben ser justificadas, no supuestas. En general, las restricciones temporales, materiales y de personal restringen el tipo de muestreo factible, siendo el más común el intencional con muestras reducidas.

Por ello, es esencial explicitar la técnica de muestreo, justificar su pertinencia y ajustar la técnica a los datos recogidos.

- *Significatividad vs. representatividad*. Dos muestras con una diferencia de medias no significativa (según un nivel de confianza) pueden mostrar medias “representativas” de una muy distinta situación real, si existe un criterio de decisión externo cuantitativo. Por ejemplo, en las adjudicaciones de vivienda VPO se exige que la renta supere un determinado valor: un céntimo por debajo de esa cantidad imposibilita ser beneficiario y, por lo tanto, a pesar de que no se pueda hablar de “significatividad estadística”, la diferencia de un céntimo es “representativa”.

El contraste entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* busca garantizar la valoración interna de la representatividad de los resultados, basándose en la técnica estadística o el método cualitativo adaptado a los datos empíricos.

De esta forma, la variedad de las técnicas utilizadas, no supone *a priori* menoscabo alguno de la validez o pertinencia de las mismas. Estas cualidades deben ser controladas por el investigador atendiendo a los datos, a la forma en que han sido obtenidos y al conocimiento previo de las condiciones en que se desarrolla la experimentación, que determinan la frontera entre lo esperado o previsible y lo que no lo es, así como los medios de control sobre las consecuencias admisibles que pueden extraerse de los datos.

Por último, la demanda clásica que pesa sobre la didáctica sobre la producción de respuestas técnicas y prácticas sigue vigente. En la muestra objeto de análisis, si bien 6 de los 27 trabajos tienen por objetivo la previsión, se echa en falta la presencia explícita de directrices para la gestión de procesos de estudio; esto es, la propuesta de medios de intervención fiables y reproducibles.

5. ESTUDIO DE CASO DE UNA INVESTIGACIÓN CUANTITATIVA

En este apartado realizamos un análisis más detallado de la metodología aplicada en la comunicación *Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones*, presentada por Lacasta y Wilhelmi en el XIV Simposio de la SEIEM de 2010 y que ha sido clasificada como “cuantitativa”. En esta sección, nos referiremos a este trabajo como “la comunicación”, “en este trabajo”, etc., es decir, sin necesidad de nombrar constantemente a los autores. La selección de un artículo nuestro está motivada por la necesidad de ser totalmente libres en la crítica inicial (en este caso, autocrítica), sin cortapisas para la descripción de sus puntos fuertes y débiles y su apertura al debate.

Una breve descripción de la comunicación en los términos de la sección 2 es:

- *Área*: Didáctica del análisis matemático.
- *Nivel*: educación secundaria, bachillerato.
- *Grado de intervención del investigador*: mera observación.
- *Carácter temporal del estudio*: *transversal* (diferentes grupos de diferente nacionalidad y constitución) y *longitudinal* (grupos supuestos equivalentes en dos periodos de tiempo muy distintos, 15 años de diferencia).
- *Fuente*: profesores.

En el anexo se da un esquema de la comunicación.

5.1. Fondo y forma

El trabajo seleccionado cumple ciertas premisas a nuestro juicio esenciales de una investigación en didáctica de las matemáticas: unas, relativas a la forma; otras, relativas al fondo y, en particular, a la experimentación y al análisis cuantitativo de los datos.

- I. *Aspectos de forma*. Parafraseando a Oscar Wilde, “no hay artículos buenos o malos, sino mal o bien escritos²²”. La difusión de un artículo exige una redacción cuidada, un esquema claro y el respeto de las normas APA sobre la estructura del texto y de cada una de las secciones particulares.

El artículo respeta los aspectos formales básicos relativos a: el título general y de encabezado de las páginas, el resumen, la propuesta de palabras clave para la indexación del trabajo, los nombres de las secciones (que no se denominan “introducción”, “método”, etc.), la citación y la sección “referencias”. Termina el artículo con el cuestionario como anexo, puesto que su inclusión detallada en el cuerpo del artículo hubiera dificultado su lectura

Sin embargo, formalmente la *estructura del texto* es mejorable. Por un lado, no se da un esquema del trabajo en la introducción. Además, la ausencia de una tipografía o una numeración específica de las secciones, subsecciones, etc., es un aspecto que dificulta la identificación de la estructura del texto. La distinta tabulación de los títulos según la jerarquía de los apartados no parece suficiente.

²² La popular cita atribuida a Oscar Wilde es textualmente: “There is no such thing as a moral or immoral book. Books are either well written or badly written. That is all”. (“No hay libros morales ni libros amorales. No hay más que libros bien escritos o mal escritos. Eso es todo”).

- II. *Aspectos de fondo.* Por la naturaleza del trabajo, nos centraremos en aquellos aspectos de fondo que hacen referencia al método. Es esencial resaltar que:
- Es una investigación “científica”, según la clasificación hecha en este documento, cuyo objetivo es la descripción de prácticas de enseñanza usuales en el bachillerato.
 - Los marcos teóricos de referencia son la TSDM (Brousseau, 1998) y el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007).
 - La hipótesis es enunciada y justificada.
 - Las técnicas estadísticas utilizadas son justificadas, en particular se motiva la pertinencia del test no paramétrico W de Kendall.
 - La ingeniería didáctica es utilizada como método de investigación. En particular, se falsa la hipótesis, siendo los resultados estadísticamente significativos y representativos de la realidad educativa.
 - La experimentación puede ser replicada, puesto que tanto el instrumento como el método de análisis de los datos son dados explícitamente.

Sirva este somero análisis de la forma y el fondo como introducción. De hecho, en el análisis de un trabajo de investigación se puede tener en cuenta otros muchos aspectos. En la siguiente sección, intentamos mostrar un análisis más sistemático.

5.2. Valoración de la comunicación: indicadores de calidad metodológica

En el anexo de la ponencia común de este seminario se proponen unas orientaciones para la valoración de trabajos de investigación. Este instrumento ha sido elaborado a partir de diversos trabajos (Buela-Casals, 2003; Simon, 2004; Ramos-Álvarez y Catena, 2004; Bryman, Becker y Sempik, 2008; Schoenfeld, 2008; Hart, Swars y Smith, 2009; Creswell, 2009), para la reflexión metodológica de trabajos de investigación. La utilizamos aquí para valorar la comunicación cuantitativa elegida.

Siguiendo dicha guía, los aspectos de la comunicación que analizaremos son:

- h. Antecedentes y motivación de la investigación.
- i. Desarrollo teórico.
- j. Diseño metodológico relativo a trabajos cuantitativos.
- k. Datos, resultados y discusión.
- l. La comunicación de los resultados a la comunidad científica.
- m. Referencias.

5.2.1. Antecedentes y motivación de la investigación

- ¿Hay antecedentes que justifiquen la viabilidad y relevancia del trabajo?

Sin contar los Reales Decretos de enseñanzas mínimas para la Educación Secundaria (ESO y Bachillerato) que sirven de telón de fondo de la dimensión de enseñanza, una única referencia bibliográfica sirve de antecedente. Es pues escasa la motivación científica, dificultando la transparencia de la originalidad y trascendencia;

máxime cuando el tópico (límite de funciones) ha sido abundantemente tratado en Didáctica de las matemáticas desde distintas perspectivas.

- ¿Está el problema adecuadamente formulado?

No. Por un lado, el lector debe esperar a la sección 3 para conocer el objetivo que se persigue con el cuestionario que se propone a profesores de secundaria; por otro lado, no se dice en qué este objetivo de la experimentación va a contribuir al “contexto” descrito en las dos primeras secciones.

El desarrollo del artículo contempla el método propio de la ingeniería didáctica de manera subyacente. Sin embargo, en ningún momento se explicita esta estructura, que hubiera facilitado la lectura y difusión del trabajo.

- ¿Se formulan las hipótesis de manera clara y precisa?

Sí, en relación con la experimentación y el resultado esperado del cuestionario. Sin embargo, no se establecen hipótesis sobre la relación con el saber de los profesores de matemáticas y la pertinencia de un contrato “grafista” o “de ostensión”.

5.2.2. Desarrollo teórico

- ¿Se describe adecuadamente el fundamento teórico?

Sí. Además, se introducen y describen únicamente las nociones teóricas usadas explícitamente, lo cual da consistencia al trabajo y agilidad a la lectura, puesto que se omiten desarrollos teóricos innecesarios.

- ¿Son adecuadas las referencias bibliográficas de la perspectiva teórica?

Sí, puesto que son específicas de las nociones teóricas utilizadas y no genéricas relativas a las teorías de referencia.

- ¿Se hace una aportación teórica?

Sí, ya que, por una parte, se muestra la utilidad e interés de las nociones y procedimientos propios de la didáctica utilizados; y, por otra parte, la contribución completa el conocimiento de la *epistemología espontánea del profesor* o, de manera más general, del *pensamiento del profesor*.

5.2.3. Diseño metodológico relativo a trabajos cuantitativos

- ¿Es pertinente para el problema de investigación el uso de métodos cuantitativos?

Sí, porque la cantidad, origen y dispersión de los datos experimentales no sugiere un estudio cualitativo de los mismos.

- ¿Son las hipótesis de investigación *falsables*²³?

Sí, se dan todos los valores obtenidos, incluso los intermedios, así como el estadístico y una referencia para su interpretación.

²³ *Falsable*: Dicho de una proposición: Que puede ponerse a prueba y ser desmentida por los hechos o por un experimento adverso. (www.rae.es).

- Si los datos son mostrados en primera instancia mediante una presentación sinóptica basada en una estadística descriptiva elemental, ¿es ésta pertinente y adecuada para la difusión de los resultados?

Sí, porque se presenta información suficiente y no sobreabundante. De hecho, únicamente se presenta un histograma resumen de cada uno de los tres sectores en que queda dividida la muestra. Este histograma representa el peso relativo (en tantos por ciento) de las respuestas en cada uno de los sectores; lo que da una escala común que permite la comparación de las respuestas según el sector.

- ¿Es adecuada la operativización general de *constructos*²⁴ en variables?

Sí, ya que la ordenación de las respuestas ha sido interpretada *a priori* y, por lo tanto, se garantiza su interpretación en términos del tipo de contrato privilegiado por los profesores (grafista, ostensivo) y sobre su consideración de las restricciones epistemológicas.

- ¿Son adecuadas las técnicas estadísticas utilizadas y se justifica su uso? ¿El método es adecuado al tamaño y a la naturaleza de la muestra?

Sí. No puede suponerse normalidad ni *homocedasticidad* de la muestra. Esto impide el uso de la estadística inferencial paramétrica, pero permite el uso de una “prueba de rango” no paramétrica para “distribuciones libres”: la prueba de significación del coeficiente de correlación W de Kendall.

- ¿Se aportan referencias específicas de los técnicas utilizas?

Sí, el clásico *Estadística no paramétrica. Aplicada a las ciencias de la conducta*, debido a Siegel (1990).

- ¿Se hace una interpretación correcta de los resultados del análisis estadístico? ¿Se atiende la fiabilidad, significatividad y representatividad de los resultados?

Sí. Se da un nivel de confianza (95%), que es aplicado para el contraste de la hipótesis nula y descrito en términos de la experimentación (aceptación de una ordenación no debida al azar de las representaciones de la noción de límite, según su interés didáctico dada por los profesores). Además, la representatividad está controlada *a priori* según la ingeniería didáctica.

- ¿Se aporta la información necesaria que permita replicar²⁵ la experimentación o reproducir una observación en contextos similares con resultados equiparables?

La experimentación puede ser replicada, porque está disponible el texto del cuestionario y se recogen las interpretaciones textuales de los participantes. Por lo tanto, el procedimiento podría repetirse completamente y así la comunidad científica podría testar su *validez externa*.

- ¿Mediante qué medios se controla la *validez interna*²⁶?

²⁴ *Constructo*: se dice de cualquier entidad no directamente observable o manipulable, de tal manera que su presencia debe ser detectada indirectamente. Ejemplos de constructos son la inteligencia o la competencia matemática.

²⁵ *Replicable*: que puede ser replicado, esto es, que puede reproducirse de manera exacta.

²⁶ *Validez interna*: a lo largo del estudio existe una coherencia de resultados obtenidos por métodos distintos, que aporta solidez a los resultados obtenidos.

Por medio de la ingeniería didáctica, que contempla tanto la ordenación dada por los profesores como la justificación textual de la misma.

- ¿Se controlan las variables extrañas²⁷ para descartar interpretaciones alternativas potenciales?

En todo cuestionario una de las dificultades esenciales son los matices lingüísticos. El cuestionario ha sido redactado en español y francés y con resultados comparables. Asimismo, las características de la muestra son diferentes por sectores: profesores en distintas fases de su formación inicial y profesores en ejercicio, con diferente cultura matemática de origen²⁸.

5.2.4. Datos, resultados y discusión

- ¿Los datos obtenidos permiten contrastar las hipótesis?

Sí, la refutación de la hipótesis está bien fundamentada. Sin embargo, no se ha establecido previamente su relación con el contexto de investigación. Por esto mismo, se dificulta su difusión y trascendencia en el seno de la comunidad científica. En concreto, la contribución limita su alcance en el problema original más vasto: el papel de la visualización en el cálculo.

- ¿Los resultados son enunciados de forma clara y concisa?

Sí, en particular es notable el esfuerzo por sintetizar en un solo histograma las respuestas recogidas y la aportación de la expresión matemática del test de contraste utilizado.

- ¿La discusión de los resultados se fundamenta en el marco teórico y remite a la revisión bibliográfica previa?

Sí. La ingeniería didáctica contribuye a la coherencia interna y una interrelación efectiva entre el marco teórico y los resultados obtenidos, a pesar de la revisión bibliográfica limitada.

- ¿Se realiza alguna aportación a modo de conclusión general del trabajo que sea directamente extraíble de la investigación?

Sí, relativa a las restricciones epistemológicas que eviten la sustitución de una noción matemática por un modelo explicativo de la misma (*deslizamiento metadidáctico*): en vez de enseñar la noción de límite de funciones, se muestra una

²⁷ *Variables extrañas*: variable independiente no relacionada con el estudio, pero que puede presentar efectos sobre la variable dependiente. Un ejemplo, podría ser: si se quiere valorar un proceso de enseñanza, marcado por unas intervenciones del profesor preestablecidas, se puede considerar la inteligencia como una variable extraña, puesto que la “sensibilidad” de los estudiantes a las intervenciones del profesor (el “efecto”) podría ser distinta según las capacidades cognitivas de dichos estudiantes. Evidentemente, puede haber variables externas no contempladas en el diseño y que afecten o que la experimentación las ponga de manifiesto. Por lo tanto, la “bondad” de un diseño con relación a este aspecto es únicamente teórica o apriorística.

²⁸ Lacasta, Wilhelmi y Montiel (2010) han replicado la experimentación con un grupo de profesores estadounidenses que han recibido el cuestionario en inglés y que tienen asimismo una formación matemática muy heterogénea. Allí se han observado unos comportamientos equiparables y, en todo caso, se debe aceptar que las variables extrañas “redacción-lenguaje” y “formación inicial” están controladas.

aproximación numérica en forma de tabla para un caso concreto. Este resultado establece una precisión esencial sobre la relación con el saber de los profesores.

- ¿Se formulan cuestiones abiertas²⁹ que sugieran la proyección del trabajo en investigaciones futuras sobre el mismo tópico?

No de manera explícita. A pesar de que las recomendaciones apuntadas en el caso anterior sugieren un determinado “modo de proceder”, no se hace referencia a: cómo podría lograrse éste, cómo validar una propuesta de enseñanza que lo tuviera en cuenta, etc. Es decir, no se sugiere explícitamente una investigación que tenga por objetivo la elaboración de medios técnicos específicos para la enseñanza del límite de función.

5.2.5. *La comunicación de los resultados a la comunidad científica*

- ¿Las secciones del informe siguen una secuencia lógica rigurosa?

Sí, pero hubiera sido útil, como se ha dicho en la sección 5.2, que un esquema del trabajo hubiera sido dado en la introducción del trabajo y que, además, se hubiera utilizado una tipografía o numeración diferenciada para secciones, subsecciones, etc., ya que la mera distinta tabulación de los títulos no parece suficiente. Esto puede dar al lector la impresión de una secuencia de secciones aisladas.

- ¿El informe es completo y autosuficiente?

Teniendo en cuenta las limitaciones de espacio propias de una reunión científica, podríamos aceptar que el documento es completo, porque se dispone del contexto, el desarrollo, los resultados y las implicaciones. Desde el punto de vista de la revisión bibliográfica ya hemos señalado sus limitaciones.

- ¿Se sigue las indicaciones de las normas APA sobre la forma (tipografía, denominación, orden, etc.) y composición de las distintas secciones?

Se respecta la estructura básica de un reporte de investigación, con las simplificaciones propias de un documento corto propio de un congreso. También la mayoría de las distintas secciones presenta sus características propias, salvo la sección “introducción”. Sin embargo, hubiera sido necesaria una distinta tipografía para los títulos de distinto nivel.

- ¿Son las tablas, figuras y gráficos claros y necesarios?

Sí, contribuyendo a la comprensión del texto. Además, para agilizar la lectura y, a la vez, facilitar el examen minucioso, se aporta en anexo el cuestionario utilizado.

5.2.6. *Referencias*

- ¿El formato de las referencias es homogéneo (por ejemplo, APA)?

Sí.

- ¿Las fuentes documentales específicas de la didáctica de las matemáticas son relevantes?

²⁹ *Cuestión abierta*: interrogante relevante suscitado en la investigación que no tiene respuesta en la misma por no estar relacionada directamente con las hipótesis planteadas.

La intención de fondo de la contribución está vinculada a la didáctica normativa. Por ello, hay una mezcla de documentos oficiales, libros de texto y artículos científicos. No obstante, a pesar del objetivo profesional, debieran haberse usado otras fuentes que ayudaran tanto a la contextualización y motivación científica como a las implicaciones tecnológicas que pudieran derivarse.

- ¿Están actualizadas las fuentes documentales?

Sí, sobre todo teniendo en cuenta que se trata de un estudio longitudinal que abarca 15 años. Las referencias al marco teórico están actualizadas, se considera el currículo vigente y las citas no provenientes de los últimos 5 años están justificadas. Por último, las referencias científicas son específicas de aquellos aspectos que se movilizan en la fundamentación, el marco teórico, la discusión de los resultados y las implicaciones que se han extraído.

6. A MODO DE CONCLUSIÓN: UNA PUERTA ABIERTA AL DEBATE

En los simposios de la SEIEM la proporción de contribuciones cuantitativas ha aumentado en la última década, situándose en torno al 14%. Dicho de otro modo, en alrededor del 85% de trabajos se presentan otros métodos. Al mismo tiempo, no hay una correspondencia entre esta proporción y las orientaciones teóricas subyacentes. Por otro lado, *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (DEPC) es el área de trabajo que recurre a los métodos cuantitativos con mayor frecuencia; esto se puede explicar por su afinidad epistemológica.

Así pues, no sólo los trabajos que presentan métodos no cuantitativos son claramente mayoritarios, sino que, fuera del área DEPC, su presencia general efectiva en las contribuciones supera el 90%. ¿A qué puede deberse este hecho? ¿Está justificado? ¿Cuáles son sus efectos? ¿Qué implicaciones tiene en la producción y difusión de nuestras investigaciones? ¿Qué papel deben jugar los métodos cuantitativos en la formación inicial de investigadores?

Sólo en 2 de los 27 trabajos donde se han utilizado métodos cuantitativos, la muestra procede de la Educación Infantil (EI) o Primaria (EP). Además, si se consideran el total de trabajos (218), únicamente en 25 (11,5%) las etapas educativas de referencia son éstas. Por otro lado, se refieren a la población universitaria 7 de los trabajos cuantitativos y 77 del total de trabajos (35,3%). Estos porcentajes no reflejan el peso de cada etapa en el conjunto del sistema educativo, que tiene estructura piramidal, en cuya base está la EI, EP y la ESO, y en cuyo vértice está la formación universitaria.

La investigación didáctica tiene por fin último la mejora de las condiciones de construcción y comunicación de conocimientos matemáticos en contextos educativos. Por lo tanto, esos datos reflejan un sesgo deficitario con relación a la EI y EP, que no se observa en la Educación Secundaria (32,2%). Una explicación a este hecho es la accesibilidad de los investigadores al contexto universitario y de la Educación Secundaria. ¿Qué efectos tiene este sesgo en la formación de maestros? ¿Cómo afrontar la relación teoría-práctica en este contexto? ¿Qué objetivos debiera abordar la comunidad de investigadores?

Se ha observado una falta de contribuciones donde se propongan medios de intervención fiables y reproducibles, es decir, propuestas de enseñanza normalizadas y listas para su aplicación. ¿Este hecho obedece únicamente al coste de diseño, puesta en

marcha y valoración de un proceso de estudio concreto? ¿Cuáles son los requerimientos de difusión de las fases, medios de control e intervención, indicadores de pertinencia, pautas de reproducibilidad, etc.? ¿Son estos requerimientos abordables según las restricciones formales de los canales de difusión científica? ¿Son estos requerimientos visibles y aceptados por la comunidad científica? ¿En qué tipo de revistas se pueden difundir propuestas de enseñanza? ¿Qué valoración se hace de estas publicaciones? Las investigaciones en didáctica de las matemáticas, ¿qué reflejo tienen en los textos y materiales escolares? ¿Qué relación existe entre los investigadores y los redactores de libros de texto y diseñadores de materiales escolares?

El contraste entre el análisis *a priori* y *a posteriori* que propone la ingeniería como método permite eludir el debate cualitativo-cuantitativo (y sus efectos) fundamentado en dicotomías. El control *a priori* de la situación permite utilizar en un mismo estudio métodos cualitativos y cuantitativos inferenciales o descriptivos, tanto elementales (medidas de centralización y dispersión, gráficos) como Análisis Factorial, Implicativo, etc.

Esta flexibilidad encuentra acomodo bajo una teoría que permita el paso del hecho al fenómeno y, de esta forma, el progreso de la didáctica. Progreso que se fundamentará en el contraste (independientemente del método elegido) de hipótesis “representativas” antes que “significativas”. ¿De qué herramientas dispone la didáctica para valorar la representatividad de los resultados obtenidos en una experimentación? ¿Es posible valorar *a priori* qué tipo de resultados serían pertinentes para el contraste de una hipótesis de investigación en contexto determinado? ¿Qué significa que dos contextos son *similares* y que dos resultados de dos observaciones son *equiparables*?

La valoración de una investigación experimental cuantitativa puede orientarse mediante la guía metodológica que ha sido utilizada en la sección anterior. Esta guía hace un barrido sobre cuestiones muy diversas, tales como la falsabilidad de las hipótesis, la significatividad y la representatividad de los resultados, la reproducibilidad de las observaciones, el diseño experimental, la muestra y la pertinencia de las técnicas estadísticas, el control de la validez interna, los medios que faciliten la validez externa efectiva o potencial, etc. Si se desea que los métodos cuantitativos contribuyan al avance de la didáctica, ¿cuáles de los aspectos contemplados en la guía metodológica son irrenunciables en este tipo de investigaciones?

Referencias

- Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 282–307.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des Situations Didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes des didactique des décimaux. Recherches en didactique des mathématiques, 2(1), 37–59.
- Bryman, A., Becker, S., Sempik, J. (2008). Quality criteria for quantitative, qualitative and mixed methods research: The view from social policy. International Journal of Social Research Methodology, 11(4), 261–276.

- Buela-Casal, G. (2003). Evaluación de la calidad de los artículos y de las revistas científicas: propuesta del factor de impacto ponderado y de un índice de calidad. *Psicothema*, 15(1), 23–35.
- Cook, T. D., Reichardt, Ch. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata.
- Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. New York: Sage.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127–135.
- Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical implicative analysis. Theory and applications*. Berlin: Springer-Verlag.
- Hart, L. C., Swars, S. L., Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995–2005). *Journal of Mixed Methods Research* 3(1), 26–41.
- Huff, D. (1954). *How to lie with statistics*. New York: Norton & Company Inc.
[Versión en castellano disponible en:
<http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/estadistica.pdf>]
- Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come. *Educational Researcher*, 33(7), 14–26.
- Kilpatrick J. (1994). Vingt ans de didactique française depuis les USA. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavnigot, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. (pp. 84–96) Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Lacasta, E., Wilhelmi, M. R. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. (pp. 379–394) Lleida: SEIEM. [Disponible en:
<http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm>]
- Lacasta, E., Wilhelmi, M. R., Montiel, M. (2010). Ostension et rapport des professeurs du secondaire à la limite de fonctions. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 20(sup. 1), 305–328 [Disponible en:
http://math.unipa.it/~grim/menu_quaderni_mat.htm].
- Lacasta, E., Pascual, J. R., Wilhelmi, M. R. (2009). Qu'est-ce qui permet le contraste entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori ? *Quaderni di Ricerca in Didattica* 19, 284–297. [Disponible en:
http://math.unipa.it/~grim/Quad19_LaCasta_09.pdf].
- Ramos-Álvarez, M. M., Catena, A. (2004). Normas para la elaboración y revisión de artículos originales experimentales en Ciencias del Comportamiento. *International Journal of Clinical and Health Psychology*, 4(1), 173–189.
- Schoenfeld, A. H. (2008). Research methods in (mathematics) education. En Lyn English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, second edition. (pp. 467–519) New York: Routledge.

- Siegel, S. (1990). Estadística no paramétrica. Aplicada a las ciencias de la conducta. México DF: Trillas.
- Simon, M. A. (2004). Raising, issues of quality in Mathematics Education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 157–163.
- Von Glasersfeld, E. (ed.) (1995). *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrech, HOL: Kluwer.
- Wilhelmi, M. R., Font, V., Godino, J. D. (2006). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. En A. Rouchier (Ed.), *Didactiques : Quelles Références Épistémologiques ?* (CD-ROM). Bordeaux: IUFM d'Aquitaine et AFIRSE. [Versión española disponible en:
<http://www.webpersonal.net/vfont/Burdeos.pdf>].

ANEXO: ESQUEMA DE LA COMUNICACIÓN (LACASTA Y WILHELMI, 2010)

1. *Resumen*. Una muestra de profesores de matemáticas de secundaria, compuesta por profesores españoles y franceses, ordena cuatro maneras de exponer el límite de una función en un punto, extraídas de cuatro manuales distintos. Existe un orden predominante de manera significativa, según el cual los profesores prefieren primero una presentación ostensiva epistemológicamente incorrecta y luego las otras en orden decreciente de utilización de recursos gráficos.
2. *Análisis a priori y marco teórico*
 - 2.1. *Restricciones cognitivas y de enseñanza*. Se presentan en esta sección algunas restricciones cognitivas (relativas a las capacidades de los estudiantes) y de enseñanza (relacionadas con el currículo vigente y la presentación de los objetos matemáticos) relativas al límite funcional.
 - 2.1.1. El paso del álgebra al análisis
 - 2.1.2. Tratamiento curricular: presencia nominal y efectiva
 - 2.2. *Idoneidad didáctica y fenómenos didácticos*. Se describe cada uno de los aspectos según el marco teórico de referencia.
 - 2.2.1. Idoneidad didáctica.
 - 2.2.2. Epistemología espontánea del profesor.
 - 2.2.3. Deslizamiento metacognitivo y deslizamiento metadidáctico.
 - 2.2.4. Ilusión de la transparencia y ostensión.
3. *Experimentación*
 - 3.1. Cuestionario. Se trata de la clasificación de cuatro presentaciones del límite de funciones: a) dos con una presencia diferenciada de elementos gráficos, b) tabla de valores y, finalmente, c) representación ostensiva.

- 3.2. Comportamientos esperados e hipótesis. La hipótesis supone la aceptación de que los profesores preferirán las presentaciones de la noción de función según la carga gráfica que comportan.
- 3.3. Muestra. Se indica: 1) cómo ha sido obtenida (intencional, no probabilística), 2) la naturaleza de la misma (3 sectores, homogéneos intragrupo y heterogéneos intergrupo), 3) el tipo de información que puede extraerse (dada la naturaleza de los sectores, *longitudinal* y *transversal*) y, por último, 4) el carácter de la explicación (descriptiva – interpretativa).
- 3.4. Resultados. Se señala tanto los resultados como el método para su obtención. Se explicita el test no paramétrico utilizado (W de Kendall) y la pertinencia de su uso (no se puede suponer ni normalidad ni homocedasticidad). Se aportan los valores numéricos del estadístico de contraste y los valores y coeficientes intermedios que lo generan (facilitando la revisión externa de los mismos). Se termina con una interpretación del test en términos de la hipótesis de investigación formulada y sobre la *intensidad* con que la hipótesis nula³⁰ debe ser rechazada (“la preferencia por una presentación se sigue de la posibilidad de hacer una presentación ostensiva con la misma, más que por la información gráfica que ella incluye”) y la *significatividad* de la tesis (“concordancia de la preferencia por las presentaciones ostensivas en el conjunto de los profesores”). Asimismo, se tienen en cuenta algunas justificaciones explícitas dadas por los profesores que apoyan la tesis identificada.
4. *Análisis a posteriori*, que supone el contraste con el análisis *a priori* basándose en el marco teórico de referencia.
5. *Referencias*. Según normativa APA.
 - 5.1. *Anexo*. Cuestionario

³⁰ Se distingue entre *hipótesis de investigación* e *hipótesis nula* propia del método estadístico.

ANÁLISIS METODOLÓGICO DE LAS ACTAS DE LA SEIEM (1997-2010) DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS MÉTODOS CUALITATIVOS. REFLEXIÓN EN TORNO A UN CASO

Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C.

carrillo@uhu.es; maria.cinta@ddcc.uhu.es

Universidad de Huelva

Resumen. *En este trabajo realizamos un estudio cuantitativo-descriptivo de las comunicaciones y ponencias presentadas a la SEIEM, en el periodo comprendido entre 1997 y 2010, que utilizan métodos cualitativos. Para tal fin, cruzamos el indicador método cualitativo con cada una de las categorías presentadas en Godino et al. (2011, en estas actas). Aportamos una caracterización de la naturaleza de los métodos cualitativos, destacando los más habituales en nuestra área y presentamos algunas reflexiones sobre aquellos que utilizamos en la Universidad de Huelva para el análisis del desarrollo profesional en entornos colaborativos.*

Palabras clave: Métodos cualitativos, metodología, educación matemática, análisis estadístico, instrumentos de obtención de información

Abstract. *In this paper, we present a quantitative-descriptive study of the papers presented at SEIEM symposia (from 1997 to 2010) in which qualitative methods are used. We have combined the qualitative method category with each category presented in Godino et al. (2011, in this volume). We describe the nature of qualitative methods, highlighting those which are more commonly used in mathematics education. We also present some reflections about the qualitative methods implemented at the University of Huelva for the analysis of professional development in collaborative environments.*

Key words: Qualitative methods, methodology, mathematics education, statistical analysis, instruments for information gathering

INTRODUCCIÓN

Esta ponencia centra su interés en los estudios de la SEIEM que sólo utilizan métodos cualitativos, en el periodo comprendido entre 1997-2010. En la actualidad, a pesar del reconocimiento compartido de la necesidad de definir los criterios de calidad de la investigación en Didáctica de la Matemática (Pirie, 1998a; Schoenfeld, 2008) hay pocos trabajos que den respuesta a esta problemática y aparecen esporádicamente. Cabe destacar las publicaciones de Teppo (1998), en el que diversos autores describen métodos cualitativos específicos en el contexto de sus investigaciones; Schoenfeld (2008), donde se ofrece una panorámica histórica de los métodos de investigación y se propone una serie de criterios respecto de su apropiación y adecuación destacando los principios teóricos subyacentes; y Simon (2004), más centrado en los criterios de

calidad en la investigación en Educación Matemática en general. No obstante, no hemos encontrado ningún trabajo similar al que aquí presentamos.

Organizamos este trabajo en cuatro apartados: en el primero abordamos la caracterización de la naturaleza de los métodos cualitativos; en particular distinguimos entre método y metodología, identificamos sus elementos característicos y destacamos los métodos cualitativos más habituales en educación matemática. En el segundo apartado, abordamos el estudio cuantitativo-descriptivo de las comunicaciones y ponencias presentadas a la SEIEM que utilizan métodos cualitativos. Su estructura se corresponde con el cruce del indicador método cualitativo con cada una de las categorías presentadas en la ponencia inicial (Godino et al., 2011). Al final del mismo, sintetizamos los resultados obtenidos mostrando un perfil metodológico de todos estos estudios.

En el tercer apartado presentamos una reflexión sobre los métodos cualitativos que solemos utilizar en la investigación sobre desarrollo profesional en entornos colaborativos que realizamos en la Universidad de Huelva. Analizamos la utilidad, evolución y dificultades de los principales instrumentos utilizados.

Finalmente, aportamos algunas sugerencias metodológicas a partir de las necesidades sentidas durante el análisis de los estudios de la SEIEM, que pueden servir para orientar futuros trabajos.

1. NATURALEZA DE LOS MÉTODOS CUALITATIVOS DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La educación matemática es una ciencia emergente que todavía busca establecer su identidad como una comunidad legítima, independiente y académica. La tendencia inicial era importar las técnicas y los métodos de otras ciencias, sin un verdadero cuestionamiento de su validez y aplicabilidad al campo de la educación matemática. Criterios de representatividad, replicabilidad y generalización, fundamentales en la investigación cuantitativa, no tienen por qué funcionar en nuestro campo de investigación (Pirie, 1998a; Schoenfeld, 2008). En este contexto, abordar aspectos de investigación como los métodos no es una cuestión baladí; la SEIEM, como comunidad de investigación, ha comenzado a proporcionar los primeros pasos hacia el establecimiento y definición de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento y de investigación. Este esfuerzo está en sintonía con el realizado por investigadores en otros países (Schoenfeld, 2008).

En esta ponencia nos centramos en los métodos cualitativos y, para definir su naturaleza, consideramos pertinente plantearlo en el contexto de otros términos relacionados, analizando sus puntos en común y divergencias. Diversos autores han constatado una tendencia, constante en la investigación, a la asociación de estos métodos con la investigación cualitativa y con determinadas asunciones ontológicas y epistemológicas subyacentes (Bryman, 2004 –en el campo de las Ciencias Sociales–; Ernest, 1998; Pirie, 1998b; Santos, 2002–en el campo de la Didáctica de la Matemática). En particular, se considera que el investigador que hace uso de estos métodos sostiene, por un lado, la existencia de múltiples realidades situadas, resultado de la construcción humana, y, por otro lado, que el conocimiento supone la interpretación de los significados construidos en la interacción. Esta descripción se corresponde con las

perspectivas ontológicas y epistemológicas del paradigma relativista/interpretativo (Guba y Lincoln, 1994) descrito por Santos (2002) en el VI Simposio de la SEIEM. Sin embargo, estos métodos cualitativos son también utilizados en estudios realizados desde el paradigma positivista, al igual que ocurre en los de naturaleza interpretativa con los métodos cuantitativos. Según Ernest (1998), la raíz de este problema radica en una incorrecta asociación entre método y metodología. Los métodos son las técnicas utilizadas para la recogida y el análisis de datos y suponen un enfoque específico y particular. Se diferencia así de la definición proporcionada en el ámbito de la investigación social, donde se restringe al proceso de recogida de datos (Bryman, 2004). La metodología, sin embargo, tiene un enfoque mucho más amplio y podría considerarse como una *teoría de métodos*, que abarca '*los fundamentos teóricos subyacentes y el conjunto de asunciones epistemológicas (y ontológicas) que determinan el modo de ver el mundo y, por tanto, la elección de los métodos de investigación*' (Ernest, 1998, p. 35).

A la luz de lo anteriormente expuesto, podemos afirmar que los métodos de investigación no constituyen el elemento que discrimina el paradigma de investigación adoptado; por el contrario, son la naturaleza de los datos considerados? y, especialmente, el modo en que el investigador aborda su tratamiento, los aspectos que permiten identificarlo.

Proseguimos nuestro discurso con la caracterización de los métodos cualitativos vinculados al paradigma relativista/interpretativo (Santos, 2002) por ser los más representativos en el conjunto de todos los estudios analizados en esta ponencia. Estos métodos producen y manejan datos cualitativos, los cuales vienen definidos por: su *naturaleza predominantemente verbal*, que requieren que el investigador utilice junto a sus notas de campo y memoria recursos de baja inferencia (como registros de audio y vídeo); su *carácter polisémico*, debido a los múltiples y diversos significados que las palabras encierran; y *el gran volumen de datos* que se toman en el conjunto de la investigación (Rodríguez, Gil, García, 1996).

Si enfrentamos los métodos cualitativos con los cuantitativos, emergen nuevos aspectos definitorios. Por un lado, poseen un mayor grado de flexibilidad; en el caso de la entrevista, por ejemplo, permite la espontaneidad en la interacción, dando pie al investigador para adaptar la formulación de las preguntas a cada informante y profundizar en respuestas ambiguas o confusas. En este sentido, la aplicación de los instrumentos de recogida de información exige una mayor conciencia del investigador sobre la información que se desea recoger, necesitando contrastarla constantemente con la comprensión del problema que continuamente va construyendo. Además, están muy vinculados a la relación que el investigador establezca con el informante, adquiriendo un mayor potencial informativo cuanto más cercanía y empatía se establezca entre ambos. En un clima adecuado, estos métodos ofrecen la oportunidad a los informantes de proporcionar respuestas más elaboradas, profundas y detalladas de lo que se requiere con los métodos cuantitativos.

Un aspecto que emerge de la relación entre el investigador y el informante, y la caracteriza durante el uso de estos métodos cualitativos, es el respeto por ciertas cuestiones de orden ético (Pirie, 1998b; Santos, 2002). Aspectos como el *consentimiento informado*, el necesario equilibrio entre información detallada y protección al informante, la motivación hacia la participación en la investigación y el

esfuerzo por la evitación de juicios de valor deben ser tenidos en cuenta y claramente definidos.

Los métodos cualitativos más utilizados en educación matemática son la observación y las entrevistas semiestructuradas. Cada uno de ellos está indicado para obtener un tipo específico de datos: la observación es apropiada para recoger datos sobre comportamientos como acontecen en sus contextos naturales; las entrevistas pretenden recoger información sobre las historias, experiencias y perspectivas personales en relación a un tópico de interés. Aunque en menor frecuencia en nuestra área, también podemos destacar los grupos focales, en los que interesa tanto la interacción de sus miembros, como su opinión sobre la base de su experiencia respecto al tópico objeto de interés. Otras técnicas e instrumentos de recogida de información, como el cuestionario, más habituales en estudios de naturaleza cuantitativa, también pueden ser considerados métodos cualitativos siempre y cuando su aplicación y posterior tratamiento de los datos se realice con la orientación de identificar los significados presentes en los discursos y acciones de los participantes. Los datos obtenidos con estos métodos adoptan la forma de notas de campo, registros de audio y vídeo y transcripciones.

En sintonía con Pirie (1998b), pretendemos que esta descripción de la naturaleza de los métodos cualitativos contribuya a enriquecer el necesario debate sobre la clarificación de qué investigación vamos a considerar aceptable y de calidad (Simon, 2004) en nuestra disciplina, dada la íntima relación existente entre, por un lado, el proceso y los métodos de investigación, y, por otro, los resultados que produce. En este sentido, en Godino al. (2011) se incluye una guía de reflexión metodológica a modo de primera aproximación a una propuesta de valoración de la calidad de los estudios en Educación Matemática, donde se incluyen, en particular, los estudios cualitativos.

2. UNA APROXIMACIÓN CUANTITATIVA A LOS ESTUDIOS DE LA SEIEM QUE UTILIZAN MÉTODOS CUALITATIVOS

En la tabla 3 de la ponencia conjunta (Godino et al, 2011) se puso de relieve cómo los métodos cualitativos son los más utilizados en las actas de la SEIEM para abordar los problemas de investigación en Didáctica de la Matemática. Esta preponderancia de los métodos cualitativos es una constante a lo largo del tiempo. Eliminando del cómputo general las comunicaciones y ponencias codificadas como ensayos (en las que no se sigue ninguno de los métodos de investigación estudiados), puede observarse que los estudios que emplean métodos cualitativos son más frecuentes en cada uno de los Simposios, alcanzando sus valores más altos en 2004 (84,62%), 2005 (65,22%) y 2006 (66,67%) (ver tabla 1 y figura 1) y manteniéndose en valores superiores al 50% a partir de 2008.

Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexion en torno a un caso

Actas	N_i^*	N_i	$n_{i,1}$	$n_{i,2}$	$n_{i,3}$	$f_{i,1}$	$f_{i,2}$	$f_{i,3}$
1997	8	1	1	0	0	100,00	0	0
1998	11	2	2	0	0	100,00	0	0
1999	17	2	1	0	1	50,00	0	50,00
2000	17	2	1	0	1	50,00	0	50,00
2001	12	8	3	1	4	37,50	12,50	50,00
2002	11	5	2	1	2	40,00	20,00	40,00
2003	26	19	9	8	2	47,37	42,11	10,53
2004	18	13	11	1	1	84,62	7,69	7,69
2005	25	23	15	2	6	65,22	8,70	26,09
2006	19	9	6	2	1	66,67	22,22	11,11
2007	28	22	8	6	8	36,36	27,27	36,36
2008	23	22	12	2	8	54,55	9,09	36,36
2009	22	18	10	4	4	55,56	22,22	22,22
2010	34	24	13	4	7	54,17	16,67	29,17

$(N_i^*$ da el total de estudios por año; N_i da el total de estudios por año, excluyendo los ensayos; $n_{i,j}$ da el total de estudios cualitativos (1)/cuantitativos(2)/mixtos(3) por año; $f_{i,j}$ da la frecuencia relativa de estudios cualitativos (1)/cuantitativos(2)/mixtos(3) por año, expresada en porcentaje)

Tabla 1. Frecuencia absoluta y relativa de métodos cualitativos frente a otros

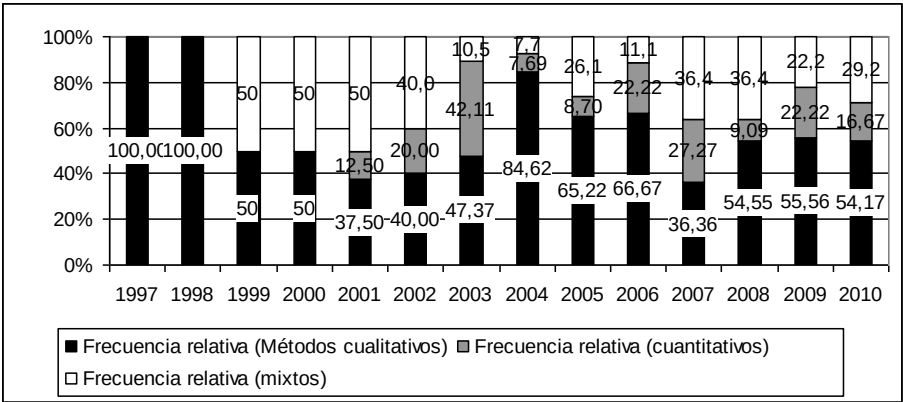


Figura 1. Evolución de l uso de métodos a lo largo del tiempo (Porcentaje)

Área problemática principal entre los estudios que utilizan métodos cualitativos

La tabla 2 muestra cuáles son las áreas problemáticas que están presentes en los estudios que utilizan métodos cualitativos. De todas ellas, es la de ‘*Conocimiento, formación y desarrollo profesional*’ la que alcanza el valor más alto con un 26,6%. Si consideramos, además, el dato aportado en la tabla 4 de la ponencia inicial (Godino et al., 2011) donde se mostraba que es la segunda área que más atención recibe por la comunidad de investigadores (con un 17,23%), podemos decir que en la SEIEM existe una preocupación compartida por la formación y desarrollo profesional del profesorado (ya sea en formación o en su carrera profesional) y que, además, considera como método de abordaje preferente el cualitativo.

Una situación similar ocurre con el área de “Pensamiento Numérico y Algebraico” que, siendo la más frecuente en el conjunto de todas las publicaciones, también ocupa un lugar destacado entre las áreas que utilizan métodos cualitativos (15,96% del total de investigaciones cualitativas pertenecen a esta área – ver tabla 2).

Área problemática	Principal		Secundaria	
	Frec. absoluta	Frec. relativa	Frec. absoluta	Frec. relativa
1. Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria	5	5,32	1	3,23
2. Didáctica de la Matemática como disciplina científica	2	2,13	0	0
3. Pensamiento Numérico y Algebraico	15	15,96	6	19,35
4. Historia en la Educación Matemática	2	2,13	1	3,23
5. Didáctica del Análisis	17	18,09	2	6,45
6. Conocimiento, formación y desarrollo profesional	25	26,60	5	16,13
7. Aprendizaje de la Geometría y medición	9	9,57	3	9,68
8. Aspectos afectivos, socioculturales y de género	0	0	0	0
9. Estudio de procesos matemáticos genéricos	7	7,45	6	19,35
10. TIC (Ordenadores, calculadoras y otros recursos tecnológicos)	10	10,64	6	19,35
11. Actitudes, creencias y concepciones	2	2,13	1	3,23
Total	94		31	

Tabla 2: áreas problemáticas principales cuando se utilizan métodos cualitativos

Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso

También suelen utilizarse métodos cualitativos para dar respuesta a las problemáticas relacionadas con las áreas de “Didáctica del Análisis” (18,09%) y de “TIC”, aunque en este caso el mayor número de incidencias no está distribuido a lo largo del tiempo como en el caso de los anteriores, sino que alcanza su nivel más elevado en el año 2005, donde se producen 7 de las 10 comunicaciones totales de este área.

En el extremo opuesto hay que destacar las áreas de “Didáctica de la Matemática como disciplina científica”, “Historia en la Educación Matemática” y “Actitudes, creencias y concepciones”, en las que sólo hay 2 comunicaciones en cada área con un enfoque cualitativo. Tampoco parece ser éste el enfoque con el que la comunidad se enfrenta al estudio de “Aspectos afectivos, socioculturales y de género”, no encontrándose ninguna publicación en este área.

Suele haber una correspondencia entre las áreas principales y secundarias, de manera que también las de “Pensamiento Numérico y Algebraico”, “Conocimiento, formación y desarrollo profesional” y “TIC” son las mayoritarias. Se incorpora a este listado el área de “Estudios de procesos matemáticos genéricos” con la misma frecuencia que las anteriores.

Finalmente, incluimos la tabla 3 para visualizar el peso de los métodos en cada área problemática, observando que los métodos cualitativos son mayoritarios en las áreas “Pensamiento numérico y algebraico”, “Didáctica del Análisis”, “Conocimiento, formación y desarrollo profesional” y “TIC”.

Áreas	Cualitat.	Cuantit.	Mixto	Total
1. Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria	5	7	9	21
2. Didáctica de la Matemática como Disciplina científica	2	2	2	6
3. Pensamiento Numérico y Algebraico	15	5	9	29
4 Historia en la Educación Matemática	2	1	1	4
5 Didáctica del Análisis	17	0	1	18
6 Conocimiento, formación y desarrollo profesional	25	6	2	33
7 Aprendizaje de la Geometría y medición	9	3	11	23
8 Aspectos afectivos, socioculturales y de género	0	2	0	2
9 Estudio de procesos matemáticos genéricos	7	2	8	17
10 TIC (Ordenadores, calculadoras y otros recursos tecnológicos)	10	0	2	12
11 Actitudes, Creencias y Concepciones	2	3	0	5

Tabla 3: métodos según área problemática (frecuencias absolutas) (adaptada de tabla 5 de ponencia inicial, godino et al., 2011, excluyendo los ensayos)

Nivel educativo investigado entre los estudios de naturaleza cualitativa

En la figura 2 se muestra la frecuencia relativa de los niveles educativos en los que se centran los estudios de naturaleza cualitativa. Destaca mayoritariamente el nivel universitario con un 38,3% de los estudios, debido principalmente al interés que suscita la formación inicial. Le sigue la etapa secundaria: 25,53% en ESO y 18,09% en Bachillerato, y, a continuación, Educación Primaria con un 11,7%. Se conserva la misma tendencia que en el conjunto de todos los estudios de la SEIEM (Ver tabla 7, ponencia inicial)

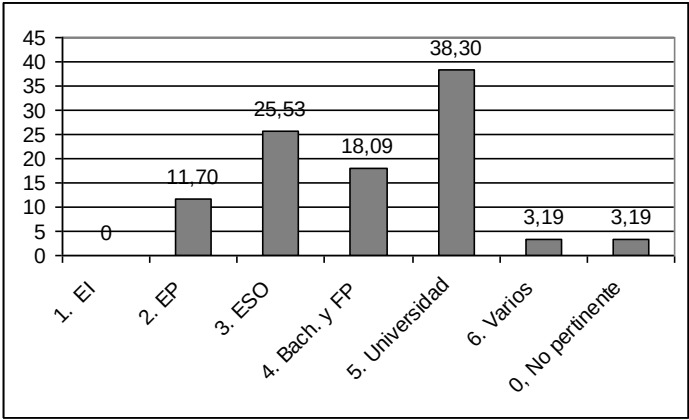


Figura 2: nivel educativo en los estudios de naturaleza cualitativa

Métodos e instrumentos de recogida de información utilizados en estudios cualitativos

La tabla 4 presenta la frecuencia con la que aparecen los métodos de recogida de información en los estudios de naturaleza cualitativa. Observamos que es más frecuente el uso de los métodos interactivos (54,26%), frente a los no interactivos (30,85%) y, además, no suele darse la mezcla entre ellos (6,38%). Esta relación es inversa en el conjunto de todas las comunicaciones de la SEIEM, en la que se prioriza el uso de métodos no interactivos (32,96%) frente a los interactivo (25,93%).

Tipo de método	Frecuencia	Porcentaje
1. Métodos interactivos	51	54,26
2. Métodos no interactivos	29	30,85
3. Mixtos	6	6,38
0. No se recogen datos	8	8,51

Tabla 4: tipos de métodos utilizados en los estudios cualitativos

Tipos de informantes en estudios con métodos cualitativos

En los estudios con métodos cualitativos, la fuente principal de información son los alumnos con un 62,77%, como se pone de relieve en la tabla 5. Los profesores y los materiales y recursos manipulativos son otras fuentes de información utilizadas, con una frecuencia mucho menor (20,21% y 10,64%, respectivamente). Esta relación se mantiene en el conjunto de todas las Actas de la SEIEM (ver tabla 9, ponencia inicial, Godino et al., 2011).

Informantes	Frecuencia	Porcentaje
1. Alumnos	59	62,77
2. Profesores	19	20,21
3. Padres y madres	0	0
4. Materiales y recursos	10	10,64
5. Centro o Institución	0	0
6. Documentos oficiales	1	1,06
1 y 2. Alumnos y profesores	2	2,13
7. Base Teseo	0	0
0. No aplicable	3	3,19

Tabla 5: tipos de informantes en los estudios con métodos cualitativos

El perfil metodológico de los estudios de las actas de la SEIEM que usan métodos cualitativos

Hasta ahora hemos analizado cada uno de los aspectos metodológicos seleccionados para este estudio, de las distintas comunicaciones y ponencias de la SEIEM que utilizan métodos cualitativos exclusivamente. Con esta información podemos esbozar un perfil general de todos estos estudios que, en el conjunto de las ponencias que complementan a ésta (Godino et al., 2011; Castro y Godino, 2011; Wilhelmi y Lacasta, 2011), nos van a permitir avanzar en la caracterización y legitimación de la investigación en Didáctica de la Matemática realizada por la SEIEM, aspecto demandado por numerosos investigadores (Pirie, 1998a, 1998b; Schoenfeld, 2008), como hemos puesto de relieve en el primer epígrafe. Este perfil está sintetizado en la figura 3.

A la luz de los resultados obtenidos, podemos destacar que la SEIEM, sin desmerecer los otros métodos de investigación, parece dar primacía al enfoque cualitativo como abordaje mayoritario para el estudio de los objetos de interés en Didáctica de la Matemática. Como concluyen Hart et al (2009) en su estudio sobre la prevalencia de métodos, los enfoques cualitativos son también prevalentes entre las investigaciones reflejadas en artículos publicados en una selección de revistas de alto nivel en Educación Matemática. En particular, son las áreas de “*Conocimiento, formación y desarrollo profesional*”, “*Pensamiento numérico y algebraico*”, “*Didáctica del Análisis*” y “*TIC*” en las que los investigadores priorizan los métodos cualitativos frente a los mixtos o cuantitativos. Asimismo, podemos apreciar que priman los métodos interactivos de recogida de información (54,26%) en el conjunto de los estudios analizados.

Estos estudios se centran principalmente en el nivel universitario (38,3%), aunque son también significativos los niveles de Secundaria obligatoria (25,53%) y Bachillerato

Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso

(18,09%) y, un poco más lejano, el nivel de Primaria (11,7%). Se toma como fuente de información principal a los alumnos (62,77%) y muy de lejos le siguen los profesores (20,21%) y los materiales y recursos (10,64%). Cruzando la información ‘nivel educativo’ y ‘fuente de información’, parece que son los alumnos universitarios, incluyendo a los estudiantes para maestro, los informantes clave de los estudios con un abordaje cualitativo. Podríamos decir que los procesos de aprendizaje, desarrollo y conocimiento de estos alumnos constituyen un foco de interés prioritario en la comunidad científica de la SEIEM.

Cabría preguntarse en qué medida este perfil guarda relación con un posicionamiento consciente del área o, por el contrario, obedece a las diversas coyunturas por las que el área, dentro y fuera de nuestras fronteras, ha pasado a lo largo de estos años.

Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C.

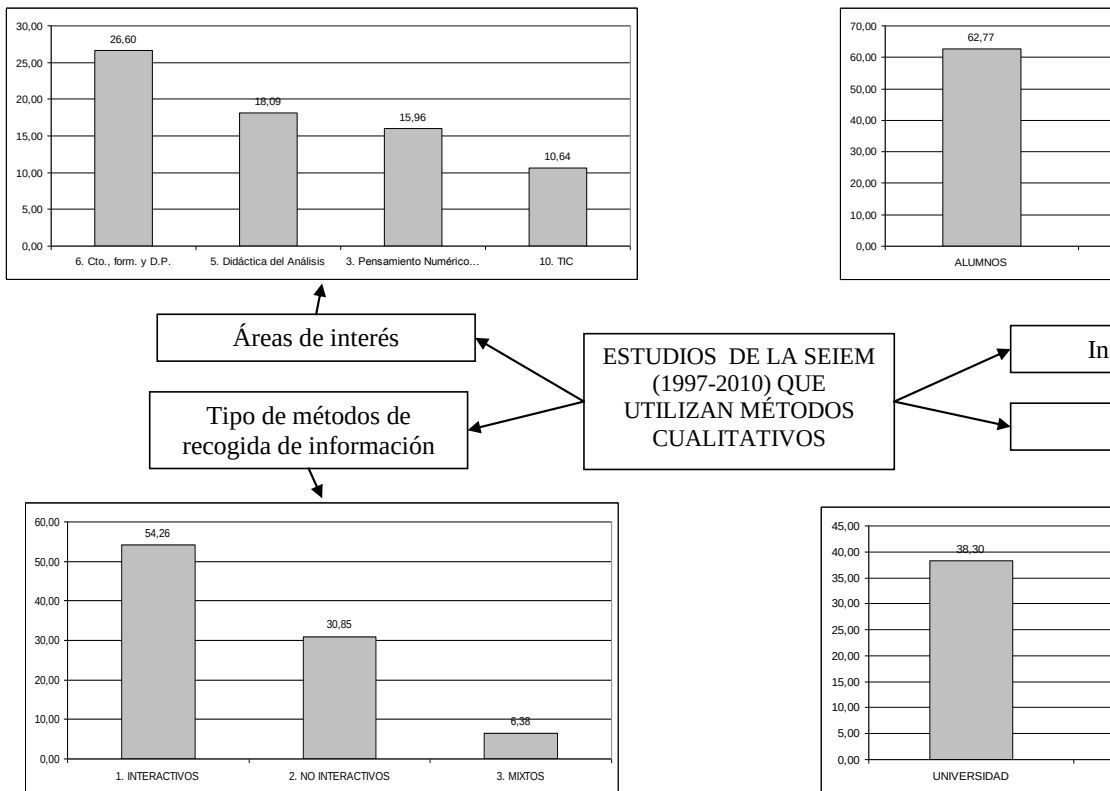


Figura 3. Perfil metodológico de los estudios de la SEIEM (1997-2010) que utilizan metodos cualitativos (Datos

3. REFLEXIÓN SOBRE LOS MÉTODOS CUALITATIVOS PARA EL ANÁLISIS DEL DESARROLLO PROFESIONAL EN ENTORNOS COLABORATIVOS: EL CASO DE LA UNIVERSIDAD DE HUELVA

En este epígrafe reflexionamos sobre la investigación desarrollada en la Universidad de Huelva, centrándonos en los métodos cualitativos empleados. Elegimos nuestra propia investigación por la proximidad y por el hecho de estar representada en comunicaciones nuestras a la SEIEM. Esto nos permite profundizar en un caso y actuar con libertad de crítica. Aclaramos que solo serán objeto de análisis aquellas investigaciones que han estudiado el desarrollo profesional del profesorado.

Hemos de considerar, a tal efecto, dos períodos claramente diferenciados: de 1991 a 1998 y de 1999 hasta la fecha. En el primer período se situarían las tesis de Carrillo (1996) (publicada en 1998) y Contreras (1998) (publicada en 1999), y, en realidad, el desarrollo profesional no era objeto de estudio, aunque se cimentaron las bases para las investigaciones sobre desarrollo profesional llevadas a cabo a partir de 1999, entre las que merece la pena considerar las tesis de Climent (2002) (publicada en 2005), Muñoz-Catalán (2009) y Ribeiro (2010).

Las tesis del primer período abordaron el estudio de las concepciones del profesorado sobre la matemática, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y el modo de llevar la resolución de problemas al aula. Según manifestaciones de los casos que participaron como informantes, el simple hecho de someterse a observación, cuestionarios y entrevistas, supuso una reflexión sobre su actividad docente que les llevó a plantearse algunos aspectos de la misma, lo que puede interpretarse como un cierto impulso a su desarrollo profesional, pero en ningún momento este desarrollo fue analizado por los investigadores.

El cambio a tomar como objeto de estudio el desarrollo profesional procedió del cuestionamiento sobre la evolución de las concepciones (nos empezó a interesar más el proceso que la foto estática), al tiempo que se generó un grupo de trabajo entre los investigadores y algunos maestros, a solicitud de estos. Este cambio sintoniza con el interés que toma la investigación sobre el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas a nivel internacional (que se hace visible, en particular, con el lanzamiento, en 1998, del *Journal of Mathematics Teacher Education*). Asimismo, el trabajo conjunto entre investigadores y profesores encuentra su paralelismo en publicaciones y encuentros como la *First European Conference for Practice-based and Practitioner Research. Improving quality in teaching and learning: developmental work and implementation challenges*, organizada por la European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI) en la Universidad de Lovaina, en 2006.

Aunque en contadas ocasiones hemos empleado métodos cuantitativos (con el instrumento presentado en Muñoz-Catalán et al. 2010), siempre han tenido un papel complementario y subsidiario de los métodos cualitativos; podemos decir que más del 90% de los métodos empleados han sido cualitativos. Asimismo, todos los estudios han sido estudios de caso, variando la cantidad de ellos: 9 en Carrillo, 3 en Contreras, 1 en Climent (Carrillo y Climent, 2003) y en Muñoz-Catalán (Muñoz-Catalán, 2009; Muñoz-Catalán et al., 2006), y 2 en Ribeiro (Ribeiro, 2010; Ribeiro et al., 2008, 2009, 2010).

Los instrumentos aplicados para obtener la información han ido adaptándose al propio contexto y las necesidades de cada investigación (cuestionarios abiertos, entrevistas

semiestructuradas, diarios, observaciones no participantes de aula, y otros que luego detallaremos). La información rescatada ha sido analizada utilizando la técnica de análisis de contenido (Bardin, 1986), así como los descriptores y categorías que de forma generativa (Arnal et al., 1992) se han ido conformando a lo largo del estudio o bien se han definido previamente.

En las primeras tesis (Carrillo y Contreras), que no tuvieron repercusión en publicaciones en las actas de la SEIEM en la línea que ahora nos ocupa del desarrollo profesional, se emplearon cuestionarios y entrevistas, entre otros instrumentos de obtención de información. Los cuestionarios fueron abiertos y las entrevistas, semiestructuradas. Se suele criticar el uso de los cuestionarios por la escasa fiabilidad de las respuestas, crítica que compartimos cuando no se emplean otros instrumentos con los que triangular la información. Sin embargo, en temas en los que el profesor no posee una clara consciencia, como el de sus propias concepciones, el uso del cuestionario se mostró fundamental para impulsar una reflexión que luego se plasmaría en las entrevistas. De hecho, hemos seguido empleando cuestionarios en posteriores investigaciones con la intención mencionada, incluso en temas más familiares para el profesor. En estos casos, el cuestionario es un medio para poner en común una reflexión meditada, elemento básico del debate en grupo.

Del caso aislado en las tesis de Carrillo y Contreras, hemos pasado a los casos de las tesis de Climent, Muñoz-Catalán y Ribeiro, en los que, aunque se estudia el desarrollo profesional individual, se tiene en cuenta, en mayor o menor medida, la interacción en el grupo de maestros e investigadores. Asimismo, vamos desarrollando una actitud y una concepción del papel del investigador congruente con la idea de Leatham (2006) del sistema sensato de creencias, de modo que nuestro propósito no es tanto categorizar las actuaciones y declaraciones de los profesores, sino comprenderlos, de acuerdo también con una posición ética que consideramos esencial en grupos compartidos de profesores e investigadores (en sintonía con la noción de *co-learning agreement* de Wagner, 1997).

Pasamos ahora a comentar el uso de algunos instrumentos de recogida de información en nuestra investigación.

En la tesis de Climent el *diario* de la maestra, estructurado en función de algunas dimensiones, ocupó un papel central a la hora de presentar el análisis sobre el proceso de reflexión y modificación de la práctica.

Dentro de una *perspectiva desarrollista* (Jaworski, 2004), el diario se diferencia de otros instrumentos de recogida de información, como cuestionarios y entrevistas, en que en estos no se hace seguimiento ni se potencia la continuidad de dicha reflexión. En el caso del diario, además de potenciarse una reflexión continua, se dota al profesor de un medio que le permite mejorar la calidad de su reflexión. Es así que el diario se convierte en un medio para el desarrollo del profesor y para la investigación, entendiéndolo este doble propósito relacionado con el carácter colaborativo (Feldman, 1993) del grupo de profesores e investigadores. Como contrapartida, necesita en mayor medida de la implicación del sujeto: una implicación deficiente no sólo provoca que pierda sentido como medio del desarrollo del profesor, sino que pierde eficacia como instrumento de recogida de información dentro de la investigación. Aunque consideramos que refleja de forma bastante fidedigna las características y actitudes más personales del profesor, la falta de implicación mencionada o la falta de transparencia que algunos profesores pueden poner de relieve en los diarios, se convierte en un obstáculo a la hora de

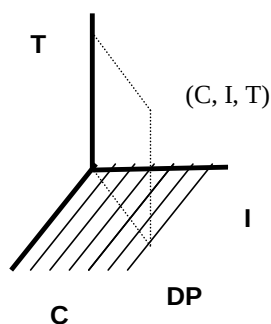
profundizar en las características de la reflexión, si bien se puede seguir apreciando su existencia. Además de la tendencia de la maestra de la tesis de Climent hacia la reflexión sobre su práctica, el hecho de ser capaz de hacer explícitas dichas reflexiones potencia el papel de los diarios como medio de su desarrollo profesional y como instrumento metodológico clave de la investigación.

La calidad de la información obtenida en el caso de esta maestra se debe en gran medida a su implicación en la reflexión sobre su práctica. Implicación, transparencia y capacidad para la reflexión emergieron como conceptos que ayudan a caracterizar la adecuación entre instrumento (diarios) e informante. Encontramos a una maestra experta en la que su capacidad para la reflexión se erige como clave de su desarrollo profesional. En el caso de la maestra novel de la tesis de Muñoz-Catalán, se puso de relieve una menor capacidad para la reflexión. Esto nos llevó a preguntarnos si, incluso cuando un profesor novel muestra implicación hacia la reflexión y una tendencia personal o habilidad hacia la misma, ¿qué profundidad tendrán sus reflexiones y qué capacidad poseerá para explicitarlas? Apuntamos que la capacidad para la reflexión puede ser un rasgo definitorio del profesor experto (que ha aprendido de su experiencia), lo que refrenda la elección de la reflexión como concepto estructurante en la caracterización del desarrollo profesional. En cuanto al uso de los diarios en la investigación, llegamos a la conclusión de la necesidad de emplear otros instrumentos de recogida de información, sobre todo en el caso de los maestros noveles, entre los cuales es previsible apreciar una menor transparencia y, sobre todo, capacidad.

Por supuesto, no proponemos estas tres variables como parámetros medidores y definitorios del grado de experiencia del profesor. Creemos que esto no puede medirse o valorarse sólo en función de su relación con un instrumento de obtención de información. La realidad educativa y profesional, así como el desarrollo profesional, posee mayor complejidad. Pero sí creemos que dichas variables pueden ser útiles para describir la relación mencionada y, sobre todo, puede tenerse en cuenta a la hora de analizar la adecuación de un instrumento de la investigación a los sujetos que habrán de aportar información (el mejor instrumento puede mostrarse totalmente inútil si el profesor no se siente motivado o cómodo con él).

Las tres variables, capacidad, implicación y transparencia, son modificables interna y externamente. Aunque inicialmente capacidad e implicación son requisitos en el contexto de la investigación, a largo plazo los investigadores pueden promover la mejora o el cambio de ellos a partir de las interacciones con los profesores. Por su parte, la falta de transparencia puede solventarse introduciendo los investigadores medidas correctoras (otros instrumentos de recogida de información).

La figura 4 muestra una posible representación y uso de estas tres variables (lo llamaremos CIT). El plano I-C puede pensarse como el plano del desarrollo profesional, mientras que el triedro nos representa la investigación sobre el desarrollo profesional (referida a la relación entre instrumento e informante). El triedro CIT también podría representar la investigación colaborativa sobre el desarrollo profesional si las variables se entienden respecto al grupo de profesores e investigadores.



Mientras que las coordenadas C e I dan idea del desarrollo profesional del sujeto en relación con el uso de un instrumento, la coordenada T da idea de su grado de contribución a la investigación (podría tener un alto desarrollo pero no aportar información –no ser transparente).

Figura 4. Gráfico cit

Esta reflexión trasciende el instrumento del diario y es aplicable al conjunto de instrumentos empleados en la investigación para obtener la información necesaria para responder las preguntas formuladas. De este modo, aunque al iniciar el desarrollo de una investigación se perfilan unos instrumentos, su conformación definitiva dependerá de la medida en que esos instrumentos, en función de los sujetos participantes, aporten la información necesaria.

El investigador se convierte, además, en ocasiones, en un receptor de ondas de información, como fue el caso de las Jornadas “El reto de la integración Innovación-Docencia-Investigación”, en las que participaron maestras que estaban siendo objeto de investigación. Dichas jornadas se convirtieron en un instrumento de recogida de información, tanto su preparación, como su propio desarrollo, especialmente las respuestas ofrecidas por las maestras a preguntas de los maestros asistentes.

La perspectiva del grupo ha sido una constante, fundamentalmente, en los trabajos de Climent y Muñoz-Catalán, con diferencias entre uno y otro. Mientras que en el caso de Climent el grupo era, esencialmente, el contexto del desarrollo profesional de la maestra, adquiriendo un papel relevante de impulsor de dicho desarrollo, y proporcionando importante información a los investigadores, en la tesis de Muñoz-Catalán, a lo anterior se añade el análisis en las interacciones entre las maestras, manteniendo el foco en el desarrollo profesional individual de una maestra novel, y profundizándose en el propio proceso (el *cómo*) de desarrollo profesional.

La importancia del grupo se plasma en el uso de algunos instrumentos de obtención de información. Así, cuestionarios individuales se debaten en el grupo, subordinado siempre al objetivo de obtener información sobre el desarrollo profesional de la maestra, al tiempo que se propicia el propio desarrollo (perspectiva desarrollista). Las entrevistas grupales también contribuyen a la reflexión conjunta (*joint reflection*; Tichá y Hospesová, 2006) y aportan información a los investigadores. Asimismo, el instrumento “Imagen del otro”, en el que el grupo escribe y pone en común cómo ve a uno de sus miembros en relación con, por ejemplo, sus concepciones o su modo de llevar una lección, además de dar información a los investigadores, promueve la cohesión del grupo en beneficio del desarrollo profesional de sus miembros.

Mención especial merecen la observación de sesiones de clase, su preparación y su posterior análisis. Debido al carácter colaborativo del grupo, el diseño de las actividades

que se llevan a la práctica es compartido por todos, siendo todos los miembros del grupo los que sugieren actividades y enfoques concretos. En esta fase surgen cuestiones muy cercanas a la práctica que luego trascienden a discusiones más próximas a la teoría, siempre con el propósito, por parte de las maestras, de aplicarlas de vuelta a su práctica, y, por parte de los investigadores, de generar teoría (*practical* y *theoretical loop*, respectivamente, Skott, 2004). En la observación del aula participa también el grupo al completo, asistiendo todos o casi todos los miembros. Posteriormente, el análisis de la observación se realiza generalmente en la misma semana, de modo que el recuerdo quede cercano, aunque se dispone de la grabación. Comienza el debate con la interpretación y análisis de la propia maestra observada, y prosigue con la intervención de los otros componentes del grupo. En general, hemos observado que a las maestras les cuesta ser críticas con sus compañeras.

En todo este proceso de investigación y aprendizaje por nuestra parte, desde las concepciones al desarrollo profesional, desde los cuestionarios y las entrevistas hasta la flexibilidad en el manejo de los instrumentos en función de los objetivos de la investigación, apreciamos:

- la solidez del establecimiento de categorías de análisis al tiempo que la posibilidad de que estas categorías emerjan en el proceso,
- el papel de los cuestionarios abiertos como impulsores de reflexión que produce información en posteriores instrumentos,
- la necesidad de disponer de diversos instrumentos que permitan triangular la información y que ayuden a minimizar la influencia, en el análisis, de los deseos de los investigadores, mezclados en el proceso desarrollista,
- la conveniencia de que sea más de un investigador el que participe en el grupo colaborativo, poniendo en práctica el papel de co-investigador,
- la importancia del paradigma y de los objetivos de la investigación por delante de los métodos, y la subsidiariedad de la ortodoxia de su aplicación a la (saturación de la) obtención de información que permita responder lo que nos preguntamos,
- la importancia del contexto colaborativo para generar una verdadera vinculación entre teoría y práctica, y entre investigadores y profesores,
- la dificultad del profesorado para criticar a sus compañeros, pues su tendencia es a respaldar, sin un gran sentido crítico y con un gran sentimiento de comprensión, la actuación de los pares,
- la necesidad de renovar los recursos y las estrategias de trabajo (que a su vez forman parte del conjunto de instrumentos de obtención de información de los investigadores) y colaboración en el grupo para promover la crítica del profesorado a sus compañeros, dada la dificultad mencionada anteriormente.

Como ejemplo de investigación cualitativa (en el sentido de emplear métodos cualitativos), comparte características que desde otros posicionamientos se consideran como fortalezas y debilidades (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), entre las que destacamos la influencia que ejercen los investigadores en el proceso de investigación. En este sentido, merece la pena aludir a la idea de triangulación, en relación con la cual

aplicamos y distinguimos los siguientes tipos considerados en Denzin (1989, en Flick, 2007):

- Triangulación de fuentes de datos: se refiere a la comparación de datos relacionados con el mismo fenómeno, pero que proceden de fases diferentes del proceso de investigación, de diferentes ciclos temporales en el que el fenómeno ocurre o bien de diferentes participantes del entorno. Este tipo de triangulación contribuye a proporcionar una descripción más profunda de los significados sociales implicados en el entorno (Hammersley y Atkinson, 1995)
- Triangulación de investigadores: Diferentes observadores participan para detectar o minimizar los sesgos que introduce la propia persona del investigador. Para Hammersley y Atkinson (1995) este tipo de triangulación se promueve mediante la formación de equipos de investigación, y se vería potenciada por la existencia de observadores que adoptaran roles diferentes en el campo o que fueran muy diferente entre sí.
- Triangulación metodológica: En este caso, la triangulación se basa en la comparación de los datos obtenidos con distintas técnicas de recogida de datos. Puesto que cada técnica implica una amenaza diferente para la validación, este tipo de triangulación proporciona la base para contrastar las interpretaciones.

4. TENDENCIAS Y SUGERENCIAS PARA EL FUTURO

Entendemos que la Didáctica de la Matemática como campo de investigación comparte características, fundamentos y métodos propios de las Ciencias Sociales. No podemos ignorar la influencia social en los procesos interactivos entre el profesor y sus alumnos. No obstante, la naturaleza específica de la matemática como materia de aprendizaje, le confiere a la Didáctica de la Matemática como área de indagación unas cualidades específicas (Pirie, 1998a). En este trabajo nos hemos centrado en los métodos cualitativos ofreciendo una caracterización de su naturaleza, que se ha visto completado con un análisis cuantitativo-descriptivo de los estudios de la SEIEM realizados con métodos cualitativos. En este análisis se ha puesto de manifiesto que estos métodos son prioritarios en las áreas: “*Conocimiento, formación y desarrollo profesional*”, “*Pensamiento numérico y algebraico*”, “*Didáctica del Análisis*” y “*TIC*”. Los informantes son principalmente alumnos y además del nivel universitario, destacándose el hecho de no ser los profesores en activo objeto frecuente de interés. Como se ha comentado, parecen ser los procesos de aprendizaje, desarrollo y conocimiento de estos alumnos el foco de interés prioritario. Asimismo, se prefiere utilizar los métodos interactivos para la recogida de información.

Por otra parte, al analizar las publicaciones de los Simposios de la SEIEM hemos notado la ausencia de explicitación del paradigma dentro del cual los autores se sitúan. Tampoco se suele presentar el diseño de la investigación en el que se enmarca el proceso de investigación descrito. Pensamos que, más allá del carácter cualitativo o cuantitativo de los métodos empleados, debemos preocuparnos por el alcance o aplicabilidad de los resultados, su confiabilidad o rigor interno, y la importancia o pertinencia (Schoenfeld, 2008). Asimismo, destacamos la importancia de explicitar las

razones que soportan las decisiones del investigador, poniendo de manifiesto nuestros posicionamientos (*Where is the why* de Burton, 2002). Esta explicitación es muestra, también, de la honestidad del investigador y de la apertura a la crítica externa, como sugiere Pirie (1998a) para los estudios cualitativos.

Como comunidad científica, convendría que nos planteáramos hacia dónde consideramos que deberíamos enfocar nuestra investigación: ¿qué áreas, niveles, métodos requieren una mayor atención? En particular, ¿no deberíamos prestar una mayor atención al profesorado en activo? ¿Qué cabida damos a la diversidad, la imaginación y la innovación de métodos (sin pérdida de rigor, Pirie, 1998a)?

De nuestra experiencia investigadora hemos aprendido la subsidiariedad de métodos y técnicas respecto de los objetivos, las preguntas y el paradigma de investigación. Asimismo, la emergencia de tendencias y necesidades educativas, profesionales e investigadoras (dominio afectivo, competencias, TIC, conocimiento matemático para la enseñanza, de nuevo resolución de problemas, especialmente como formulación de problemas, matemáticas y democratización, matemáticas y género, multiculturalidad..., Sriraman y English, 2010) deberá conducirnos a una revisión de enfoques, métodos y técnicas que permitan dar respuesta a los nuevos retos.

Referencias

- Arnal, J., Del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.
- Bryman, A. (2004). *Social Research Methods (2nd edition)*. USA: Oxford University Press.
- Burton, L. (2002). Methodology and methods in mathematics education research: where is “the why”? En S. Goodchild y L. English (Eds.), *Researching mathematics classrooms: a critical examination of methodology*. (pp. 1-10). Westport: CT, Praeger.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J. y Climent, N. (2003). El caso del desarrollo profesional de una maestra. En J. Murillo, P.M. Arnal, R. Escolano, J.M. Gairín y L. Blanco (eds) *Investigación en Educación Matemática. Actas del VI Simposio de la SEIEM* (p. 47-67). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza: Universidad de La Rioja.
- Castro, W.F. y Godino, J.D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp.). Ciudad Real: SEIEM.
- Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*, Doctoral dissertation. Michigan: Proquest Michigan University. www.proquest.co.uk.
- Contreras, L.C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

- Denzin, N. (1989). *The Research Act (3rd edition)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: a Postmodern perspective. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (Vol. Monograph No. 9, pp. 22–39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Feldman, A. (1993). Promoting equitable collaboration between university researchers and school teachers. *Qualitative Studies in Education*, 6(4), 341-357.
- Flick, U. (2007). *An introduction to qualitative research (3rd edition)*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Godino, J.D.; Carrillo, J.; Castro, W.F.; Lacasta, E.; Muñoz-Catalán, M. C. y Wilhelmi, M. R (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp.). Ciudad Real: SEIEM.
- Guba, E. y Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105-117). London: Sage Publications.
- Hammersley, M. y Atkinson, P. (1995). *Ethnography*. London: Routledge.
- Hart, L. C., Swars, S. L. y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3, 1, 26-41.
- Jaworski, B. (1998). The centrality of the researcher: rigor in a constructivist inquiry into mathematics teaching. In: A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (Vol. Monograph No. 9, pp. 112–127). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Jaworski, B. (2004). Insiders and outsiders in mathematics teaching development: the design and study of classroom activity. En O. McNamara y R. Bawell (Eds), *Research in Mathematics Education*, vol. 6 (p. 3-22). Londres: British Society for Research into Learning Mathematics.
- Johnson, R. B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33 (3), 14-26.
- Leatham, K.R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 91-102.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Universidad de Huelva. [<http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949>]
- Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. y Climent, N. (2006). La reflexión de una maestra de matemáticas en el *Practicum* y en los inicios de su práctica docente. En P. Bolea, M.J. González y M. Moreno (Eds), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 217-224). Huesca: Universidad de Zaragoza.

- Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. y Climent, N. (2010). Modelo de análisis de interacciones en un contexto colaborativo de desarrollo profesional. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 451-462). Lleida, España: SEIEM.
- Pirie, S. (1998a). Toward a definition for research. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (Vol. Monograph No. 9, pp. 17–21). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pirie, S. (1998b). Where do we go from here? En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (Vol. Monograph No. 9, pp. 156–163). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ribeiro, C.M. (2010). *O desenvolvimento profissional de duas professoras do 1.º ciclo, envolvidas num grupo de trabalho colaborativo, partindo da modelação das suas aulas de matemática*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Huelva.
- Ribeiro, C.M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2008). Uma perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática no 1.º ciclo: um exemplo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. En R. Luengo et al. (Eds), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 545-555). Badajoz: SEIEM.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis e influencia en la práctica de una maestra. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 187-196). Santander: SEIEM.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2010). Desarrollo profesional de una maestra de primaria. Introduciendo y discutiendo un modelo de análisis de desarrollo profesional. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 511-522). Lleida: SEIEM.
- Rodríguez Gómez, G., Gil Flores J. y García Jiménez, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.
- Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: Contributos para uma discussão. En L. Blanco et al. (Eds), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 157-170). Logroño: Universidad de Logroño.
- Schoenfeld, A. H. (2008). Research Methods in (Mathematics) Education. In Lyn English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education, second edition* (pp. 467-519). New York: Routledge.
- Simon, M. A. (2004). Raising Issues of Quality in Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 35 (3), pp. 157-163.
- Skott, J. (2004). The forced autonomy of mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 227-257.
- Sriraman, B. y English, L. (Eds) (2010). *Theories of Mathematics Education. Seeking new frontiers*. New York: Springer.
- Teppo, A. R. (1998). *Qualitative Research Methods in Mathematics Education*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

- Tichá, M. y Hospesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 29-56.
- Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of educational research: a framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation. *Educational Researcher*, 26(7), 13-22.
- Wilhelmi, M. R. y Lacasta, E. (2011). Métodos cuantitativos en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (2001–2010). En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp.). Ciudad Real: SEIEM.

MÉTODOS MIXTOS DE INVESTIGACIÓN EN LAS CONTRIBUCIONES A LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM (1997-2010)³¹

Castro, W. F.¹, Godino, J. D.²

¹Universidad de Antioquia (Colombia)

²Universidad de Granada

“Los estudios cualitativos a pequeña escala y los estudios cuantitativos a gran escala son esenciales para construir conocimiento base teóricamente fundamentado y útil para la práctica de la enseñanza. Ninguno [de estos tipos de estudios] es suficiente; ambos son necesarios” (Hiebert y Grouws, 2007, p. 398).

Resumen. En este trabajo analizamos los trabajos publicados en las Actas de los Simposios de la SEIEM desde el punto de vista del uso de metodologías de investigación de tipo mixto (cualitativas y cuantitativas). En dichas investigaciones se describe el área problemática que abordan, el nivel educativo, tiempo de permanencia del investigador en el campo, métodos e instrumentos de recogida de datos, fuentes de información y tamaño de muestra. Se estudia también la prevalencia de los métodos mixtos en relación con los trabajos que usan preferentemente métodos cualitativos y cuantitativos y se comparan con resultados de otros estudios similares. Tras analizar un caso de una investigación realizada con este enfoque metodológico concluimos con algunas recomendaciones para la mejora del uso de las metodologías mixtas en la investigación sobre educación matemática.

Palabras claves: Metodologías de investigación; métodos cualitativos, cuantitativos y mixtos; fortalezas y debilidades; estudio de caso; integración de métodos.

Abstract. In this paper we analyze the works published in the Proceedings of the SEIEM Symposia from the point of view of using mixed research methodologies (qualitative and quantitative). For these investigations the problem area addressed, the educational level, the researcher's time of permanence in the field, methods and tools for data collection, data sources and sample size are described. We also study the prevalence of mixed methods in connection with works preferably using qualitative and quantitative methods and compared with the results of the meta-analysis by Hart et al. (2009). After analyzing a case of research with this methodological approach we conclude with some recommendations for improving the use of mixed methodologies in research on mathematics education.

³¹ Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Metodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En, M. Marín et al (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99). Ciudad Real: SEIEM.

Key words. Research methodologies; qualitative, quantitative and mixed methods; strengths and weaknesses; case study; integration of methods

1. INTRODUCCIÓN

En educación matemática, y otros campos de investigación en ciencias sociales, se observa un creciente interés por el empleo de métodos cualitativos de investigación, aunque esto no supone descartar el uso de los métodos cuantitativos cuando se pretende obtener resultados más ampliamente generalizables. Se está reconociendo la complejidad de los problemas que se abordan en la investigación en ciencias sociales y la necesidad de adoptar una perspectiva pragmatista sobre el uso de metodologías mixtas. Estas metodologías permiten comprender las actividades educativas en el contexto en que tienen lugar y al mismo tiempo aportar recomendaciones generalizables que apoyen la toma de decisiones de política educativa.

En este trabajo vamos a centrar la atención en el uso de métodos mixtos en las investigaciones publicadas en las Actas de la SEIEM desde su primera edición en 1977 hasta 2010, lo que dará una visión aproximada³² del perfil de la comunidad de investigadores españoles en educación matemática. Este análisis será contrastado con otros informes sobre el análisis metodológico de las investigaciones a nivel nacional (Torralbo, Vallejo, Fernández y Rico, 2004) y a nivel internacional, para lo cual nos basaremos en el trabajo de Hart, Smith, Swars y Smith (2009). Torralbo et al., realizan un análisis metodológico de 135 tesis doctorales sobre educación matemática presentadas en las universidades españolas en el periodo 1976 - 1998, mientras que Hart et al. (2009), estudian la prevalencia de los métodos cualitativos, cuantitativos y mixtos aplicados en 710 artículos de investigación publicados en seis revistas de educación matemática de alto nivel en el periodo 1995-2005. Estos autores abordan, entre otras, las siguientes cuestiones, de interés para nuestro análisis:

- ¿De qué manera están los métodos cuantitativos y cualitativos equilibrados (o integrados) en métodos mixtos en el caso de una de las revistas examinadas?
- ¿Qué problemas hay en la interpretación del texto de los artículos para (a) identificar los métodos de investigación, (b) evaluar el balance relativo de las facetas cuantitativas y cualitativas en las cuestiones de investigación, la recogida de datos, o el análisis, y (c) evaluar la medida y el tipo de cualquier integración de resultados de cada faceta en las inferencias o conclusiones?

La investigación que hemos realizado sobre los métodos usados en los trabajos de los Simposios tiene un componente de tipo interpretativo en el proceso de clasificación de los trabajos en las distintas categorías, mientras que el estudio de la prevalencia de los métodos mediante estadísticas descriptivas es propio de los métodos cuantitativos. Se trata de codificar datos cualitativos, asignar números a los códigos, y registrar el número

³² En nuestro caso los trabajos que se analizan son principalmente comunicaciones a los Simposios de la SEIEM, por lo que se trata de trabajos de extensión breve, donde la metodología se describe de manera sucinta. Este no es el caso del estudio cuantitativo realizado por Torralbo (2001) que versa sobre tesis doctorales, o el de Hart et al. (2009) que analizan artículos de revistas.

de veces que aparecen los códigos. Analizar descriptivamente datos cuantitativos para determinar la frecuencia de ocurrencia y comparar los conjuntos de datos obtenidos son procedimientos característicos de los procedimientos analíticos de los métodos mixtos.

Comenzaremos esta ponencia indicando algunas características básicas de los métodos mixtos de investigación, incluyendo una síntesis de sus fortalezas y debilidades, así como de los requisitos que deben reunir para ser calificados como aportaciones de alta calidad metodológica. En la sección 3 se incluye un resumen cuantitativo de los trabajos presentados en los Simposios de la SEIEM, y se comparan estos resultados con los del estudio de Hart et al. (2009), cuando procede. En la sección 4 se hace un estudio más detallado de variables relacionadas con la “calidad metodológica” de los trabajos de la SEIEM, para el caso de una comunicación clasificada como mixta, aplicando la “Guía para la Reflexión Metodológica” incluida como anexo en la ponencia conjunta de este Seminario (Godino et al., 2011). Esta parte permitirá clarificar el uso de la mencionada guía como recurso para la reflexión metodológica. Finalmente, se concluye con algunas recomendaciones sobre posibles mejoras en el uso de metodologías mixtas en la investigación española sobre educación matemática que se presenta en el Simposio.

2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MÉTODOS MIXTOS DE INVESTIGACIÓN

Creswell (2009, 18) describe de la siguiente manera los métodos mixtos de investigación: “El investigador basa la indagación sobre el supuesto de que la recogida de diversos tipos de datos proporciona una mejor comprensión del problema de investigación. El estudio comienza con una amplia encuesta con el fin de generalizar los resultados a una población y después, en una segunda fase, se centra en entrevistas abiertas y cualitativas para conocer los puntos de vista detallados de los participantes”

Se da prioridad a la recogida y análisis de datos tanto cualitativos como cuantitativos en un único estudio en el que los datos son recogidos concurrentemente o secuencialmente, e implica la integración de los datos en una o más etapas en el proceso de investigación. A veces se usan datos y análisis cualitativos o cuantitativos, pero se mezclan de manera marginal, pero los tipos de cuestiones y las inferencias son o bien cuantitativas o cualitativas. Otras definiciones de los métodos mixtos requieren una combinación sinérgica entre los aspectos cualitativos y cuantitativos en lugar de una combinación de dos métodos discretos.

Otros autores requieren que se trate de una pregunta de investigación en cuya respuesta se usen datos y técnicas cualitativas y cuantitativas. En este sentido Bryman (2007) afirma que existen dos discursos en relación con el uso de la metodología mixta: el particularista, que considera pertinente el uso de los métodos mixtos en función de las preguntas de investigación, y el universalista que considera que los métodos mixtos se deben usar en todo caso, con independencia de los objetivos de la investigación.

El discurso universalista está vinculado con la perspectiva pragmatista que asume el uso de una amplia variedad de métodos que deben ser aplicados para abordar cuestiones de investigación complejas (Johnson y Onwuegbuzie, 2004). En un mismo proyecto de investigación se pueden aplicar métodos cualitativos y cuantitativos con una planificación cuidadosa y reconociendo la contribución potencial de cada aproximación.

Greene (2008) estudia dos aspectos en el uso de la metodología mixta: la lógica de uso, que hace referencia a las motivaciones para usar la metodología mixta, y la forma como

ésta se debe usar. Bryman (2007) incluye la lógica de uso como uno de cuatro criterios para los métodos mixtos: relevancia, transparencia, necesidad de integración de los hallazgos, y lógica de uso de la investigación mixta.

La investigación de procesos educativos sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas es un proceso complejo, por lo que la elección de métodos mixtos de investigación puede ser apropiada para aportar una mayor generalizabilidad a los resultados, al tiempo que se mantiene suficiente detalle sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje para ser válidos y replicables.

“Como una disciplina aplicada donde la investigación debería mejorar la educación, esta integración [de métodos] es necesaria no solo para conocer *si* unos experimentos educativos particulares mejoran el aprendizaje con comprensión sino también *cómo* estos resultados se lograron y *por qué* podemos esperar que se puedan replicar en otros lugares” (Hart et al., 2009, 39).

La Tabla 1 incluye una síntesis de las fortalezas y debilidades de las investigaciones mixtas, de acuerdo con Johnson et al., (2004).

Fortalezas	Debilidades
- Se pueden incluir palabras, figuras y narrativas para añadir significado a los números. - Se pueden usar números para añadir precisión a las palabras, figuras y narrativas. - Aportan las fortalezas de las investigaciones cualitativas y cuantitativas - El investigador puede generar y contrastar una teoría a partir de las observaciones (grounded theory) - Se puede responder a un más amplio y completo rango de cuestiones de investigación porque el investigador no está limitado a un único método o aproximación. - Un investigador puede usar las fortalezas de un método adicional para superar las debilidades de otro método usando ambos métodos en un estudio. - Puede proporcionar evidencia más fuerte para una conclusión mediante la convergencia y corroboración de los hallazgos. - Puede añadir comprensiones que pueden perderse cuando se usa un solo método. - Se pueden usar para incrementar la generalizabilidad de los resultados	- Puede ser difícil para un único investigador realizar ambas investigaciones, cualitativas y cuantitativas, especialmente si se espera usar de manera concurrente dos o más aproximaciones; puede requerir un equipo. - El investigador tiene que aprender sobre múltiples métodos y aproximaciones y comprender como combinarlas apropiadamente. - Los metodólogos puristas defienden que se debería trabajar siempre dentro de un paradigma, bien cualitativo o cuantitativo. - Es más costoso y consume más tiempo - Algunos de los detalles de la metodología mixta continúan siendo objeto de trabajo por los metodólogos (p.e., los problemas de la mezcla de paradigmas, cómo analizar

Métodos mixtos de investigación en las contribuciones de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010)

▪ El uso conjunto de la investigación cualitativa y cuantitativa produce un conocimiento más completo necesario para informar la teoría y la práctica.	cualitativamente datos cuantitativos, cómo interpretar resultados conflictivos)

Tabla 1. Fortalezas y debilidades de las investigaciones mixtas

En la Guía para la Reflexión Metodológica (Godino et. al., 2011) se proponen un conjunto de indicadores de calidad de las investigaciones cualitativas, cuantitativas y mixtas que serán aplicados al caso descrito en la sección 4.

3. INVESTIGACIONES DE TIPO MIXTO EN LAS PONENCIAS Y COMUNICACIONES DE LA SEIEM

En el periodo 1997 a 2010 se han presentado un total de 45 trabajos (16.6% del total de 271 trabajos) cuya metodología la consideramos como mixta, de los cuales 9 son ponencias y 36 comunicaciones. En la tabla 1 clasificamos las ponencias y comunicaciones según el tipo de metodología.

	Comunicaciones	Ponencias	Total por fila
Cuantitativo (uso de estadística descriptiva y/o inferencial; predominio de variables cuantitativas)	28 ⁽¹⁾	3	31
	90,32 ⁽²⁾	9,68	
	17,28 ⁽³⁾	2,75	11,44
Mixto con estadísticas descriptivas	36	9	45
	80,00	20,00	
	22,22	8,26	16,61
Cualitativo (interpretativa, estudio de casos, descripciones narrativas, etc.)	73	21	94
	77,66	22,34	
	45,06	19,27	34,69
Teórico / filosófico / ensayo	25	76	101
	24,75	75,25	
	15,43	69,72	37,27
Total por columna	162	109	271
	59,78%	40,22%	100,00%

Contenido de las celdas: ⁽¹⁾Frecuencia observada; ⁽²⁾Porcentaje de la fila; ⁽³⁾Porcentaje de la columna

Tabla 2. Frecuencias de los métodos según el tipo de trabajo

En el estudio de Hart et al. (2009), del total de 710 artículos analizados el 29% son clasificados como investigaciones mixtas (el 16% usa estadísticas descriptivas, mientras que el 13% usa estadísticas inferenciales). Dado que en nuestro caso hemos incluido los estudios que usan estadísticas inferenciales en la categoría de cuantitativos, el porcentaje de investigaciones mixtas (descriptivas) es similar.

En cuanto a las tesis doctorales españolas analizadas por Torralbo et al. (2004), el 31,1% son clasificadas como realizadas dentro del paradigma mixto. Hay que tener en cuenta que en el estudio de Torralbo no se consideró la categoría de estudios de tipo ensayo teórico. Torralbo et al., consideran que los valores que se reflejan en la metodología están íntimamente relacionados y son consecuentes con los de la variable paradigmas. La metodología mixta fue utilizada en 48 tesis doctorales (35,6%). En ellas se entremezclan técnicas típicamente cualitativas con ciertas técnicas y análisis de naturaleza eminentemente cuantitativas: “en concreto, es muy usual utilizar estadísticos descriptivos del tipo: media, porcentaje y tabla de contingencia; junto con informes

narrativos textuales, producto de entrevistas en profundidad, o con exposiciones del análisis de desempeño en una prueba *ad hoc*” (p. 46).

3.1. Distribución temporal

En el diagrama de barras de la Figura 1 se muestra el número de trabajos presentados de tipo mixto según el año de celebración del Simposio. No es posible adelantar alguna hipótesis en relación con las razones probables que justifiquen el incremento del número de investigaciones realizadas con metodologías mixtas, presentadas durante algunos años.

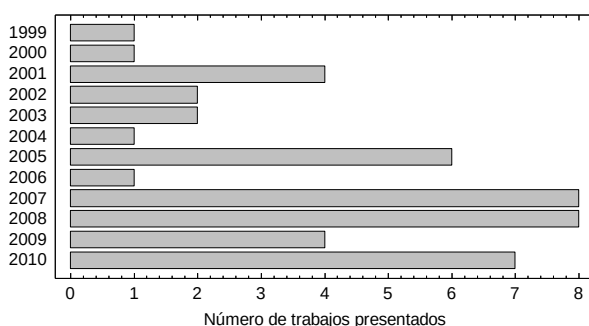


Figura 1. Distribución temporal del número de trabajos presentados

Sobre los resultados de la prevalencia de métodos Hart et al. (2009) encontraron que la proporción anual de métodos mixtos publicados en las revistas analizadas durante el periodo no cambia significativamente. Sin embargo, hay una variación considerable en la prevalencia de los métodos entre las revistas examinadas. El *Journal for Research in Mathematics Education* aporta el mayor número de artículos que usan métodos mixtos con estadística inferencial (37) que supone el 40% del total de artículos de esa categoría (92). *Educational Studies in Mathematics* y *Journal of Mathematics Teacher Education* publicaron bastante más investigación cualitativa que cuantitativa, y los artículos con metodología mixta consistían principalmente en estudios cualitativos con estadísticas descriptivas. Estas dos revistas publicaron muy pocos trabajos considerados como investigación cualitativa con estadísticas inferenciales.

3.2. Área problemática principal de las investigaciones mixtas

La Tabla 3 muestra el área temática sobre la cual han versado las investigaciones mixtas en las comunicaciones y ponencias del Simposio.

Área temática	Frecuencia	Porcentaje
Didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria.	9	20,00
Didáctica de la matemática como disciplina científica	2	4,44
Pensamiento numérico y algebraico	9	20,00
Historia de la educación matemática	1	2,22
Didáctica del análisis	1	2,22
Conocimiento, formación y desarrollo profesional	2	4,44
Aprendizaje de la geometría y medición	11	24,44
Estudio de procesos matemáticos genéricos	8	17,78
TIC (Ordenadores, calculadoras y otros recursos tecnológicos)	2	4,44
Total	45	

Tabla 3. Frecuencia del área principal investigada

El área de “aprendizaje de geometría y medición” es la de mayor frecuencia (24,4%), seguida de “didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria” y “pensamiento numérico” con el 20%. No se han presentado trabajos cuyo tema se refiera al área de “Aspectos afectivos, socioculturales y de género”, ni tampoco sobre “Actitudes, creencias y concepciones”

3.2. Nivel educativo

El nivel educativo o académico con mayor frecuencia investigado corresponde al de universidad (29%), seguido de secundaria (22,2% y primaria (17,8%), como se muestra en la Tabla 4.

Nivel	Frecuencia	Porcentaje
Educación infantil	3	6,67
Primaria	8	17,78
Secundaria obligatoria	10	22,22
Bachillerato y FP	4	8,89
Universidad	13	28,89
Varios niveles	5	11,11
No pertinente	2	4,44
Total	45	

Tabla 4. Frecuencias de la variable nivel educativo

La Tabla muestra que estos tres niveles educativos concentran el 69% del total de las investigaciones presentadas en el Simposio.

3.3. PERMANENCIA TEMPORAL DEL INVESTIGADOR EN EL CAMPO DE ESTUDIO

En cuanto a la variable “permanencia temporal del investigador en el campo de estudio” encontramos que los “estudios puntuales”, esto es, en los que se realiza una única observación, o varias simultáneas, tiene la frecuencia más alta (51,1%), seguidos de los estudios de tipo transversal (22,2%). En este caso se comparan grupos que tienen diferentes valores en la variable edad en un único momento. Los estudios lineales (donde se realizan varias observaciones a lo largo del tiempo) aparecen en 9 ocasiones, mientras que los estudios de tipo longitudinal (sin duda más exigentes en cuanto a recursos, ya que en ellos se compara al mismo grupo de sujetos en diferentes edades) solo se han presentado en 2 ocasiones (Tabla 5).

Tipo de estudio	Frecuencia	Porcentaje
Estudio puntual	23	51,11
Lineal (varias observaciones)	9	20,00
Transversal	10	22,22
Longitudinal	2	4,44
No pertinente	1	2,22

Tabla 5. Frecuencia para la variable tiempo de permanencia en el campo

3.4. MÉTODOS E INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN UTILIZADOS

El uso de métodos no interactivos de recogida de información (empleo de cuestionarios, materiales docentes, ...) son los que tienen mayor frecuencia (64,4%) (Tabla 6), seguido de los métodos interactivos (entrevistas, observación participante, etc.) con el 26,7%. Estos últimos métodos suponen una interacción estrecha entre investigador y participantes y como resultado se producen reacciones en estos últimos que pueden afectar a la información recogida.

Métodos	Frecuencia	Porcentaje
Interactivos	12	26,67
No interactivos	29	64,44
Mixtos	3	6,67
No pertinente	1	2,22
Total	45	

Tabla 6. Frecuencia para la variable métodos de recogida de datos

3.5. TIPO DE INFORMANTES O FUENTES DE INFORMACIÓN

Como se muestra en la Tabla 7 los alumnos son la principal fuente de información en las investigaciones de tipo mixto (77,8%), seguido con gran diferencia de los profesores (8,9).

Informantes	Frecuencia	Porcentaje
Alumnos	35	77,78
Profesores	4	8,89
Materiales	3	6,67
Documentos oficiales	1	2,22
Profesores y documentos	1	2,22
No pertinente	1	2,22
Total	45	

Tabla 7. Frecuencia para la variable fuente de información

3.6. TAMAÑO DE MUESTRA

La distribución de la variable “tamaño de muestra” presenta una fuerte asimetría en los 37 casos en que hemos podido obtener esta información, como se muestra en el diagrama de cajas de la Figura 2. La mediana tiene un valor de 56, el máximo es de 504, el mínimo de 16, y el recorrido intercuartílico de 111. En algunas investigaciones no se menciona el tamaño de la muestra, en otros se indican porcentajes, pero sin señalar el número de sujetos.

En general los estudios clasificados en esta categoría no pretenden generalizar los resultados a las poblaciones de donde se han extraído las muestras.

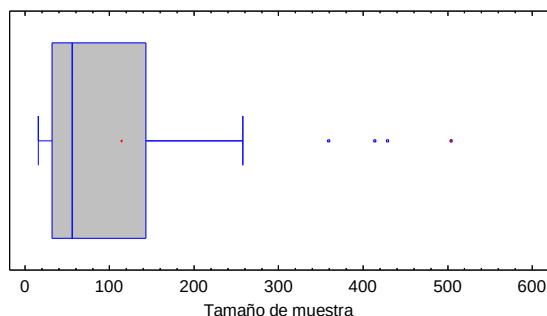


Figura 2. Diagrama de caja del tamaño de muestra

Como síntesis podemos informar que, en el periodo estudiado, se aprecia un incremento en el número de trabajos que usan los métodos mixtos, de tal manera que el número de trabajos que usan este enfoque ocupa el segundo lugar, después de los correspondientes al uso de métodos cualitativos. Los métodos mixtos son mayoritariamente usados en las áreas temáticas correspondientes a geometría, didáctica de la estadística, junto con pensamiento numérico y algebraico, estudio de procesos genéricos y finalmente en didáctica del análisis e historia de la educación matemática. Los niveles educativos donde más se utilizan métodos mixtos son, en orden decreciente: universidad, secundaria obligatoria, primaria, y finalmente educación infantil.

4. VALORACIÓN DE LA CALIDAD METODOLÓGICA. ESTUDIO DE UN CASO

En este apartado realizamos un análisis más detallado de la metodología aplicada en una de las comunicaciones presentadas en el Simposio de la SEIEM celebrado en 2010 y que fue clasificada como de tipo mixto. El trabajo seleccionado ha sido el de Godino, Gonzato y Fernández titulado, *¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática*.

Hacemos un "análisis crítico" de la metodología empleada en la realización de la investigación y del reflejo de la misma en el informe incluido en las actas del Simposio.

Consideramos que este análisis puede ser útil para clarificar el uso de la "Guía para Reflexión Metodológica (GRM)"³³ en el caso de las metodologías de tipo mixto.

El resumen del trabajo que presentan los autores es el siguiente:

En el marco de un proyecto de investigación sobre evaluación y desarrollo de competencias matemáticas y didácticas de futuros profesores de educación primaria presentamos resultados parciales sobre dichas competencias referidas a la justificación de una proposición y a la identificación de conocimientos puestos en juego en dicha actividad. Presentamos también una herramienta teórica, cuya apropiación por los futuros profesores estamos experimentando, que facilita la realización del análisis de los conocimientos puestos en juego en la actividad matemática.

El trabajo tiene un componente experimental ya que se recogen datos de una muestra de 32 estudiantes, futuros profesores de educación primaria, aplicando un "cuestionario" formado por dos preguntas:

a) *¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier triángulo? Justifica la respuesta.*

b) *¿Qué conocimientos se ponen en juego en la resolución de este problema?*

Estas cuestiones se plantean para evaluar el estado de los conocimientos de la muestra de sujetos sobre dos aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2001; Godino, 2009): (1) conocimiento sobre las características de la demostración de una proposición matemática, y (2) competencia de análisis epistémico (conocimiento sobre los conocimientos puestos en juego en la resolución de tareas matemáticas).

4.1. Antecedentes y motivación de la investigación

Se plantea un problema de naturaleza principalmente teórica relacionado con la caracterización del conocimiento matemático necesario para la enseñanza, enmarcándolo dentro de una línea de investigación que vienen desarrollando, entre otros investigadores, Ball y colaboradores. También se cita como referencia Morin (1977) como apoyo al planteamiento del problema epistemológico y cognitivo de la naturaleza del conocimiento. El problema que se menciona es el de evaluación y desarrollo del conocimiento común y especializado de futuros profesores de educación primaria sobre la matemática. Se formulan dos objetivos:

- 1) describir una experiencia de formación de futuros profesores sobre “matemáticas para la enseñanza” que articula la formación matemática y la reflexión epistémica;
- 2) presentar una “guía” para el reconocimiento de objetos y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas que hace operativos algunos aspectos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007).

³³ Incluida como anexo en la ponencia conjunta presentada en este Seminario de Investigación de la SEIEM.

De este modo el estudio se enmarca dentro del desarrollo del marco teórico enfoque ontosemiótico en educación matemática. El trabajo informa de una experiencia docente con un grupo de 32 estudiantes para profesor de primaria en la que se pide demostrar una proposición geométrica (considerado como conocimiento avanzado del contenido) y que expliciten los conocimientos geométricos puestos en juego en la demostración (aspecto del conocimiento especializado del contenido).

Se puede concluir que en el apartado “antecedentes y motivación de la investigación” este informe se puede evaluar positivamente en sus distintos ítems.

4.2. Desarrollo teórico

Este apartado de la Guía para la reflexión metodológica también se puede evaluar positivamente por las siguientes razones: 1) El trabajo se enmarca dentro de un marco teórico que se describe con detalle en diversas referencias publicadas en revistas de alto nivel en educación matemática, citándose los autores correspondientes. 2) En la parte cualitativa se presenta una “guía para el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos (GROP)”, que es una aportación original de esta comunicación, útil para promover la reflexión epistemológica (uno de los objetivos del trabajo).

4.3. Diseño metodológico

El trabajo carece de una sección dedicada a describir la metodología de la investigación. Se pueden distinguir tres tipos de contribuciones: teórica, cuantitativa y cualitativa. Por tanto, es una investigación de tipo mixto, no solo por los componentes cuantitativo y cualitativo, sino también por la aportación de tipo teórico. Estos tres componentes están presentes, aunque no de manera explícita, al constatar las dificultades de los futuros profesores para responder a la cuestión: *b) ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la resolución de este problema?*, reveladas en el estudio cuantitativo con una muestra de 32 estudiantes.

Se formula, de manera implícita, una hipótesis: los estudiantes no “entienden” lo que se pide porque la noción de conocimiento es conflictiva, desde el punto de vista epistemológico y cognitivo, y es necesario adoptar modelos explícitos que ayuden a identificar diferentes tipos de conocimientos. En este caso se presenta una GROP, la cual es un desarrollo del “enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático”. El componente cualitativo de la investigación está en la aplicación de la GROP al análisis del contenido de la tarea geométrica y su solución, tratándose en este caso de un tipo de análisis de contenido de índole semiótico.

La lógica del proceso de investigación seguido se podría haber descrito de la siguiente manera: a) el profesor de matemáticas necesita unos conocimientos especiales para una enseñanza idónea, en particular, que sea capaz de identificar los tipos de objetos y procesos matemáticos que se ponen en juego en la solución de tareas matemáticas escolares; b) comprobemos si efectivamente los profesores tienen esos conocimientos (estudio empírico cuantitativo); c) ¿qué se quiere decir cuando pedimos que identifiquen los conocimientos? (estudio teórico de índole epistemológica, desarrollo de una pauta de análisis); d) ¿Cómo se aplica dicha pauta? (aplicación de la GROP al análisis de una tarea y su solución); e) Conclusiones: los profesores deberían ser capacitados para que conozcan, comprendan y apliquen de manera competente la guía.

Características de la metodología cuantitativa

Se describe la población y la muestra (estudiantes de educación primaria, una muestra no aleatoria de 32 estudiantes). Se presenta como un estudio de caso (el grupo particular seleccionado).

- No se formulan hipótesis o expectativas fundadas sobre los resultados que se esperan obtener.
- El cuestionario construido para operativizar el constructo, “conocimiento común y especializado del contenido”, formado por dos únicas cuestiones, es insuficiente para evaluar dicho constructo. La validez de contenido queda, por tanto, limitada a los conocimientos puestos en juego en dichas tareas. No se pueden generalizar a otros contenidos matemáticos o modos de formular las cuestiones.
- Se describen y analizan cuantitativamente dos variables categóricas: “tipos de justificaciones” del teorema a demostrar propuesto; “tipos de conocimientos identificados”. Estas variables pueden depender del tipo de tarea seleccionada (probar un teorema clásico de geometría elemental); se pueden elegir otros contenidos. matemáticos, u otros tipos de teoremas, las cuales serían las variables independientes.

Características de calidad de los ensayos teóricos

La cuestión teórica planteada en el trabajo se refiere a clarificar la naturaleza del conocimiento matemático, explicitando los tipos de objetos y procesos que participan en la práctica matemática, lo que es de interés para la educación matemática en cualquiera de sus niveles. En este trabajo se aporta una guía que orienta la identificación sistemática de objetos y procesos matemáticos, ejemplificada mediante su aplicación a la demostración de un teorema geométrico elemental. El origen y conexiones de este modelo epistemológico se desarrollan en otras publicaciones del marco teórico subyacente a la comunicación, las cuales se citan en las referencias.

Características de la metodología cualitativa

El informe incluye ejemplos particulares de tipos de respuestas dadas por los sujetos a las dos cuestiones, con la intención de dar información del significado de las categorías de respuestas cualitativas elaboradas. Este es un rasgo de las metodologías cualitativas.

El análisis del texto del teorema y su solución como aplicación de la GROU es un análisis de contenido de tipo semiótico, desarrollado por Godino y otros en otras publicaciones (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). En este caso se presenta como un ejemplo de un tipo de metodología de análisis de datos textuales cuya generalizabilidad queda a cargo del lector: las categorías de análisis (tipos de objetos y procesos) se proponen como aplicables a cualquier tipo de tarea matemática.

No se aporta ninguna información sobre la fiabilidad de los datos presentados: dos o más analistas distintos, ¿identificarán los mismos objetos y procesos para la tarea?

4.4. Datos, resultados y análisis

Las respuestas de los estudiantes se clasifican según las variables cualitativas, tipos de justificaciones y tipos de conocimientos identificados; se calculan las frecuencias absolutas y porcentajes de cada valor (tabla de frecuencias), análisis que es apropiado para hallar la mayor o menor incidencia de cada valor. Como la muestra es pequeña y no se pretende generalizar los resultados no se realizan estimaciones de los intervalos de confianza de las proporciones encontradas. No se menciona el estadístico de posición central pertinente para las distribuciones de frecuencias de variables categóricas, en este caso, la moda.

4.5. Interpretación y discusión de resultados

En el caso de los resultados sobre los tipos de justificaciones dadas por los estudiantes se pone en relación con la investigación de Recio y Godino (2001), manifestando esquemas personales de prueba (Harel y Sowder, 2007) de tipo “convicción externa” (ritual o autoritario), o de tipo empírico-inductivo. Dichos tipos de respuestas no aparecen explícitamente entre las categorías de respuestas estudiadas, lo que resulta incongruente. La explicación teórica de la falta de competencia para el análisis epistémico que muestran los estudiantes para el apartado b) del cuestionario es lo que motiva la inclusión del apartado de desarrollo teórico de la sección 3. La explicación de los resultados se hace en términos de la complejidad ontosemiótica de la tarea pedida.

4.6. La comunicación de los resultados a la comunidad científica

La inclusión de un apartado para describir la metodología de cada tipo de componente de la investigación (cuantitativo, teórico, cualitativo y mixto), explicando la conexión y coherencia de cada uno, ayudaría a mejorar la comprensión del problema y su relevancia a la comunidad científica. Dada la complejidad del tema abordado, en particular el componente teórico (desarrollo del EOS) y su aplicación al análisis semiótico de objetos y procesos matemáticos, posiblemente el informe no es suficiente y será necesario que el lector amplíe la información en las fuentes documentales citadas.

4.7. Referencias bibliográficas

El informe incluye referencias, en formato APA, representativas y adecuadas de cada componente de la investigación: formación de profesores, aprendizaje de la demostración en geometría, análisis epistémico de tareas, así como sobre el propio enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Las fuentes documentales son específicas del campo tratado, actuales y de tipo científico.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En la investigación de Torralbo et al. (2004), se concluye que aunque se observa una primacía en el uso del paradigma interpretativo, se destaca que el paradigma mixto emerge con una presencia significativa. Con este paradigma se alude a la unión sincrética y asistemática de fundamentos del paradigma nomotético (positivista/cuantitativo) e interpretativo. En cuanto a las metodologías de investigación, el análisis

indica el predominio de una metodología eminentemente mixta o complementarista seguida de una metodología cualitativa. De aquí se infiere una clara visión del cambio metodológico que está emergiendo en el mundo científico y concretamente, en las ciencias sociales. “Cambio relacionado con una visión de un mundo más plural y complejo, que necesita por ello de metodologías que apuesten por dicha pluralidad” (Torralbo et al., 2004, 56).

Hart et al. (2009) concluyen en su estudio que los autores de las investigaciones calificadas como mixtas en cuanto a la metodología empleada (29% de los 710 artículos analizados) podían y deberían haber sido más sistemáticos en: (a) anticipar la coordinación de resultados entre las facetas cualitativas y cuantitativas de sus cuestiones, (b) describir los propósitos de mezclar los métodos particulares con un equilibrio y dominancia apropiada, y (c) mejorar la integración de resultados de las facetas cualitativas y cuantitativas en sus inferencias y conclusiones. Estos autores consideran necesario que todos los que usan métodos mixtos de investigación en sus investigaciones describan claramente y justifiquen sus elecciones particulares de los métodos dentro del contexto de sus propósitos y perspectivas.

Los mencionados autores observaron falta de claridad en los manuscritos sobre los métodos usados. Aunque los elementos cuantitativos usan básicamente estadística descriptiva, el análisis de tendencias va más allá de ese nivel de los métodos cuantitativos; así mismo, los elementos cualitativos constituyen inicialmente una actividad de cuantificación, pero los análisis posteriores sobre balance e integración fue muy interpretativo, aunque dirigido también al uso de estadística descriptiva.

En nuestro análisis de los 45 trabajos de tipo mixto incluidos en las Actas de la SEIEM hemos podido constatar las mismas características que describen Hart et al. (2009), en su investigación. Estos trabajos, si bien utilizan criterios de metodología cualitativa y cuantitativa, no parecen integrar ambos métodos en función de los problemas investigados ni explicitan el paradigma dentro del cual se sitúan sus autores. Parece que los autores se decantan por algunas de las fortalezas de los métodos mixtos (ver Tabla 1), sin embargo no las explicitan en su escrito. En consecuencia, sería altamente deseable que las investigaciones sobre educación matemática que se realicen bajo el enfoque metodológico mixto,

- Justifiquen adecuadamente la pertinencia del uso de un enfoque mixto de investigación.
- Usen adecuadamente de los métodos cualitativos y cuantitativos.
- Integren de manera coherente los resultados e interpretaciones de los datos y técnicas de análisis cualitativos y cuantitativos.

Los métodos mixtos ofrecen ventajas cuando se investigan preguntas complejas: el análisis estadístico provee una valoración numérica de las respuestas, mientras que los datos cualitativos y su interpretación ofrecen comprensión de los aspectos no cuantificables. Sin embargo, el proceso es costoso en recursos y en tiempo, además de la dificultad para justificar, vincular y equilibrar las dos componentes.

Se reconoce que la complejidad de la educación y los contextos diversos en donde se desarrolla parecen imponer exigencias a los investigadores que proponen aproximaciones investigativas que suelen ser particulares e intentan adaptarse a las

condiciones del problema investigado. Si bien Howe y Eisenhart (1990) consideran que existen múltiples métodos, todos legítimos, para investigar los problemas en educación, consideramos que se debe lograr acuerdos mínimos en términos de uso de métodos, de metodologías, y de uso de los tres paradigmas: cualitativo, cuantitativo y mixto. Las variaciones del método usado en atención a problemáticas peculiares deberían ser justificadas y la lógica de uso de los métodos y los vínculos entre las componentes de la investigación debería ser explicitados.

Referencias

- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Bryman, A. (2007). Barriers to integrating quantitative and qualitative research. *Journal of Mixed Methods Research*, 1 (1), 8-22.
- Bryman, A., Becker, S. y Sempik, J. (2008). Quality criteria for quantitative, qualitative and mixed methods research: A view from social policy. *International Journal of Social Research Methodology*, 11 (4), 261-276.
- Buela-Casals, G. (2003). Evaluación de la calidad de los artículos y de las revistas científicas: Propuesta del factor de impacto ponderado y de un índice de calidad. *Psicothema*, 15 (1), 23-35.
- Creswell, J.W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. [Versión en español, ampliada y actualizada disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino>].
- Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W. F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Wilhelmi, M. R. (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp.). Ciudad Real: SEIEM.
- Godino, J. D., Gonzato, M. y Fernández, T. (2010) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

- Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En, F. J. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.
- Hart, L. C., Smith, S. Z, Swars, S. L. y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3: 26-41.
- Hiebert, J. y Grouws D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: NCTM. & IAP.
- Howe, K., y Eisenhart, M. (1990). Standards for qualitative (and quantitative) research: A Prolegomenon. *Educational Researcher*, 19(4), 2-9.
- Johnson, R. B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33 (3), 14-26.
- Lincoln, Y. S., y Guba, E. G. (2000). Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences. En N. K. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 163-188. Thousand Oaks, CA: Sage
- Morin, E. (1977). *El método I; la naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra, 1986.
- Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.
- Torralbo, M., Vallejo, Fernández, A. y Rico, L. (2004). Análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1976-1998). *RELIEVE (Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa)*, 10 (1), 41-59.

SEMINARIO II:

**LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN
MATEMÁTICA EN DIFERENTES NIVELES**

Coordinadora: Mar Moreno Moreno. Universidad de Lleida
Introducción

Tomás Sierra Delgado
Universidad Complutense de Madrid

Educación Infantil y Primaria

Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona

Educación Secundaria Obligatoria

Matías Camacho Machín
Universidad de La Laguna

Educación en Bachillerato y Universidad

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO II SOBRE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS POR NIVELES EDUCATIVOS.

Moreno Moreno, M. M.

Universidad de Lérida

La temática planteada en este seminario de investigación: “*Investigación en Didáctica de las Matemáticas por niveles educativos*” no es del todo novedosa en el ámbito de los Simposios que anualmente celebra la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). De hecho, en diferentes simposios se han presentado trabajos en los que se abordaban los tipos de investigaciones realizadas en Educación Matemática, bien en el seno de la Sociedad (Maz, A., Torralbo, M., Hidalgo, M., Bracho-López, R. (2009); Maz, A., Bracho, R., Torralbo, M. y Gutiérrez, M. P. (2011)), bien procedentes de recopilaciones de tesis doctorales en España (Torralbo, M., Vallejo, M. y Fernández, A. (2003); Torralbo, M., Maz, A., Vallejo, M. y Fernández-Cano, A. (2007)), o bien de las existentes en diferentes publicaciones (Maz, A., & Torralbo, M. (2007); Salvador Llinares (2008); Maz, A., Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández-Cano, A. y Rico, L. (2009)). Asimismo, se han presentado trabajos en los que se ha mostrado de forma bastante exhaustiva, el panorama de la investigación en ámbitos muy específicos como la geometría y tecnología (Fortuny, J.M., Iranzo, N., y Morera, L. (2010)) o, por ejemplo, trabajos como el de la profesora Nuria Planas en el que se presentan datos bibliométricos sobre la presencia de las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática (Planas, N. (2010)), por poner algunos ejemplos recientes.

En este seminario, el objetivo es doble. Por un lado, que los ponentes invitados nos muestren un panorama amplio de lo que ha supuesto la investigación en educación matemática en los últimos veinte años en los diferentes niveles educativos, y asimismo, que se inicie una reflexión sobre lo que las investigaciones en este ámbito han aportado a las demandas planteadas por el sistema educativo.

La propuesta de trabajo inicial propuesta a cada ponente se organizó en torno a tres preguntas, a las que no necesariamente debían responder una a una, pero sí tenerlas en cuenta como hilo conductor del seminario y del posterior debate con la comunidad de investigadores asistentes a la XV edición del Simposio de la SEIEM:

- ¿La investigación en Educación Matemática en cada nivel educativo ha sido un largo camino paralelo a las demandas del sistema educativo?
- ¿Cuáles son algunas de las aportaciones más relevantes de la investigación en Educación Matemática a la investigación y al sistema educativo?
- Las actuales agendas de investigación en cada nivel educativo, ¿en qué medida atienden/se preocupan de las demandas y necesidades actuales del sistema educativo?

Nuestra pretensión era ir más allá de la mera revisión de investigaciones en educación matemática, aspecto abordado en diversas ocasiones en el seno de la SEIEM y fuera de él, y retomar algunos retos que quedaron planteados en la ponencia que el profesor Salvador Llinares presentaba en el XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) celebrado en Badajoz, como parte del

seminario de investigación titulado: “la investigación en educación matemática en España y Portugal, marcos generales y perspectivas de futuro”.

En la ponencia presentada por Salvador Llinares (2008), se planteaba una revisión de las agendas de investigación en educación matemática en España desde las publicaciones encontradas en ISI-Web of Knowledge y en la base de datos ERIH, sobre todo por la necesidad creciente de los últimos años de publicar en revistas de impacto internacional y de analizar la presencia de la investigación española en educación matemática en el contexto internacional.

La revisión realizada mostró una gran variedad de enfoques en las investigaciones realizadas y un amplio rango de cuestiones de investigación. Es evidente la dificultad de clasificación y que la decisión adoptada por el revisor proporciona diferentes visiones de las agendas de investigación y de la relevancia de temas estudiados, tal como tendremos ocasión de comprobar en cada una de las ponencias de este seminario.

Asimismo, a modo de conclusiones o comentarios finales, en dicha ponencia el autor se hacía eco de la necesidad que, en cierta medida, mostraban los investigadores a la hora de buscar implicaciones para la mejora de la enseñanza a partir de los resultados generados. Pero también de la importancia de no dejar de lado la constitución de teorías “fuertes” desde el punto de vista de su capacidad explicativa de los fenómenos estudiados como una necesidad a la que debe responder la investigación y que debería llegar a caracterizar la investigación en nuestro ámbito.(p.52).

Ambos aspectos, desde la perspectiva del autor, generaban un nuevo objetivo para la comunidad de investigadores en educación matemática en España: determinar en qué medida los resultados de las investigaciones realizadas en el campo de la Educación matemática influían en la mejora de los procesos de enseñanza aprendizaje y de los contextos escolares en nuestro país. Es decir, el impacto en la práctica y en los contextos concretos.

El primer objetivo del seminario, nos permitirá disponer de un panorama global sobre temáticas de investigación, atendiendo a los criterios usados por cada uno de los ponentes, siempre sin dejar de lado el nivel educativo concreto. De esta forma, el profesor Tomás A. Sierra, nos presenta una revisión de las investigaciones en educación matemática en los niveles de Educación Infantil y Educación Primaria. El profesor Vicenç Font hace algo similar en el nivel de educación Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.), y el profesor Matías Camacho, nos presenta lo mismo en los niveles de Bachillerato y Universidad. Un elemento común de las tres ponencias es que todos han tenido en cuenta las investigaciones publicadas en los libros de la SEIEM y presentadas a la comunidad de investigadores en los diferentes Simposios desde que éstos empezaron su andadura allá por el año 1997 en Zamora.

Los criterios usados por los ponentes son diferentes, así por poner un ejemplo:

En la ponencia presentada por el profesor Tomás A. Sierra, los autores adoptan cuatro criterios de clasificación de las investigaciones en los niveles de educación infantil y primaria: (a) *los contenidos matemáticos*; (b) *el enfoque teórico*; (c) *la metodología de investigación*; (d) *la amplitud y la naturaleza del ámbito institucional y de la actividad matemática*.

Introducción al seminario II sobre investigación en didáctica de las matemáticas por niveles educativos

En el trabajo presentado por el profesor Vicenç Font, se presenta una exhaustiva revisión de los trabajos publicados en las actas de la SEIEM tomando como criterio de clasificación ocho demandas del sistema educativo, y a las que dichas investigaciones han tratado de dar respuesta: (1) *organización del contenido matemático*; (2) *emergencia de los objetos matemáticos en contextos extra-matemáticos*; (3) *dificultades comprensión contenidos*; (4) *incorporación de las TIC*; (5) *atención a la diversidad*; (6) *transición entre etapas*; (7) *desarrollo y evaluación de procesos y competencias*; (8) *desarrollo de competencias profesionales*.

Asimismo, tanto en las ponencias de los profesores Tomás Sierra y Josep Gascón (niveles de educación infantil y primaria) y Matías Camacho (niveles de bachillerato y universidad), la revisión va más allá de los Simposios de la SEIEM, y se amplía al contexto internacional, tomando en consideración los trabajos publicados en el PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) durante los últimos 30 años. Incluso, en el primer caso, los autores revisan las aportaciones realizadas en ámbitos teóricos como son los de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), el Enfoque Ontosemiótico (EO) o la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Algunas de las conclusiones que nos presentan los autores, a la vista de las revisiones realizadas es que las investigaciones relativas a la Educación Elemental son escasas y, especialmente escasas las de Infantil tanto dentro de la SEIEM, como dentro del EOS y la TAD. Sin embargo, son numerosos los trabajos con esta temática en el ámbito del PME entre los años 1976 y 1986 y, asimismo encontramos una amplia investigación didáctica sobre las matemáticas de Infantil y Primaria en el marco de la Teoría TSD. Asimismo, tampoco son muy numerosas las investigaciones en el ámbito de bachillerato y mucho menos las del ámbito universitario, siendo éstas últimas más numerosas en temas de uso de tecnología.

El impacto que la investigación en educación matemática tiene en el sistema educativo es un tema, que como hemos dicho anteriormente, se ha tratado. Nos resulta especialmente interesante las reflexiones de Artigue (2004) al respecto, en el sentido de que la enseñanza de la matemática debe remontar nuevos desafíos y hacer frente a nuevos problemas, y preguntarse a cerca de la capacidad de la investigación en didáctica para proveer armas para enfrentar tales desafíos. Sin caer en tópicos, Artigue sostiene que la capacidad es real y algunas direcciones en las que evoluciona la investigación son prometedoras desde esta perspectiva. La investigación puede y debe ayudarnos a pensar, ayudarnos a desconfiar de las soluciones ingenuas y tentadoras, ayudarnos a tener en cuenta la medida de la complejidad de los problemas que debemos administrar, proponernos senderos, a la vez ambiciosos y realistas, para abordarlos, ayudarnos a acompañar las acciones y a evaluar sus efectos.(p.26).

Destacamos en este sentido, los esfuerzos del profesor Vicenç Font en su ponencia sobre la investigación en el nivel de la ESO, ya que tratado de responder a esta “conexión” entre la investigación y las “posibles demandas que surgen del sistema educativo”. Para Font, la investigación en Educación Matemática y las demandas del sistema educativo son caminos diferentes que, metafóricamente, pueden considerarse como paralelos. El paralelismo se manifiesta, entre otros aspectos, en la existencia de revistas de profesores y revistas de investigadores o en la existencia de congresos para investigadores (SEIEM) y congresos para profesores (JAEM). Sin embargo, cuando

pensamos en los problemas más importantes a los que se enfrenta en la actualidad la investigación en Educación Matemática, nuestra agenda de investigación, está muy condicionada por las agendas internacionales, como por ejemplo, la marcada por el PME.

En general el autor considera que se han dado respuestas a estas demandas, si bien hace notar que hay ciertas demandas sobre las que las investigaciones realizadas son aún insuficientes como pueden ser las de transición entre etapas o atención a la diversidad; otras como las relativas al conocimiento y tratamiento del error se han satisfecho bastante si bien, no se ha resuelto la elaboración de propuestas más allá de las situaciones experimentales. Asimismo, son insuficientes aquellas investigaciones sobre desarrollo y evaluación de competencias.

Deseamos que los tres trabajos presentados en el seminario sirvan para entrar en este debate y profundizar en un aspecto de la investigación que no debemos olvidar, la transferencia que de los resultados de la investigación se realiza al sistema educativo, más allá de que muchas veces, las decisiones políticas resultan ser un obstáculo insalvable al que no podemos enfrentarnos, y la lógica de las decisiones escapa a la de la investigación.

Referencias

- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en Educación Matemática. *Educación Matemática*, Vol. 16, nº3, pp. 5-28.
- Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida: SEIEM.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España. Una aproximación desde “ISI-Web of Knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII/ Investigação em Educação Matemática XII* (pp. 25-53). Badajoz: SEIEM.
- Maz, A., & Torralbo, M. (2007). Producción ISI del profesorado universitario español del área de Didáctica de la Matemática. In M. Camacho, B. P. P. Flores, B. Gómez, J. Murillo & M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM*. (pp. 181-188). Tenerife: Universidad de la Laguna.
- Maz, A., Torralbo, M., Hidalgo, M., Bracho-López, R. (2009). La Educación Matemática en los Simposios de la SEIEM: las redes de colaboración y autoría. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 311-321). Santander: SEIEM.
- Maz, A., Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández-Cano, A. y Rico, L. (2009). La Educación Matemática en la revista Enseñanza de las Ciencias: 1983-2006. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 185-194.

Introducción al seminario II sobre investigación en didáctica de las matemáticas por niveles educativos

- Maz, A., Bracho, R., Torralbo, M. y Gutiérrez. M. P. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 163-184.(<http://hdl.handle.net/10481/15314>).
- Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.
- Torralbo, M., Maz, A., Vallejo, M. y Fernández-Cano, A. (2007). Formación del profesorado en Educación Matemática en España: producción de tesis doctorales y de artículos. *PNA*, 1(4), 161-178.
- Torralbo, M., Vallejo, M. y Fernández, A. (2003). Panorama de la investigación en educación matemática en España a través de las tesis doctorales. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la SEIEM* (29-43). Granada: SEIEM.

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA³⁴

RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION IN EARLY CHILDHOOD EDUCATION AND PRIMARY

Sierra, T.A.¹, Gascón, J.²

¹Departamento de Didáctica de la Matemáticas, UCM

²Departament de Matemàtiques, UAB

Resumen. *En este trabajo revisamos algunas de las investigaciones más relevantes en Didáctica de las Matemáticas relativas a los niveles de Educación Infantil y Primaria y realizadas en las últimas décadas. En primer lugar abordaremos los trabajos presentados en la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) desde el año 1997 hasta 2010 atendiendo al contenido matemático tratado. En segundo lugar haremos una revisión de algunas de las contribuciones llevadas a cabo bajo diferentes enfoques teóricos dentro del PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) durante los últimos 30 años, y otras no presentadas en el PME y realizadas respectivamente en los ámbitos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, el Enfoque Ontosemiótico o la Teoría Antropológica de lo Didáctico.*

Palabras clave. Investigación en Educación Matemática, Educación Primaria, Educación Infantil, PME, Teoría de Situaciones Didácticas, Enfoque Ontosemiótico, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Simposios SEIEM.

Abstract. *This paper reviews some of the most relevant research in Mathematics Education relating to levels of Primary Education (between the ages of 3 and 12) carried out in recent decades. First we will address the papers presented at The Spanish Society for Research in Mathematics Education (SEIEM) since 1997 to 2010 taking into account the mathematical content treaty. Secondly we will review some of the contributions carried out under different theoretical approaches within the PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) for the past 30 years, and others not presented in the PME and held respectively in the fields of the Theory of Didactic Situations, the Onto-semiotic Approach or the Anthropological Theory of Didactics.*

Keywords. Research in Mathematics Education, Elementary Education, Early Childhood Education, PME, Theory of didactical situations, onto-semiotic approach, Anthropological Theory of Didactics, Symposia SEIEM.

³⁴ Trabajo realizado dentro del Proyecto EDU2008/02750, Plan Nacional de I+D+I (2008-2011).

1. INTRODUCCIÓN

Ante el encargo de llevar a cabo una revisión de las investigaciones realizadas en didáctica de las matemáticas a lo largo de los últimos 20 años, en los niveles de Educación Infantil y Primaria, se puede responder de diversas formas. Se podría, por ejemplo, hacer un listado de trabajos clasificados por el año de realización o bien por autores o grupos de trabajo y, a continuación, clasificarlos según diferentes criterios. Entre dichos criterios pueden citarse los que se basan en:

(a) Los *contenidos matemáticos* que están involucrados en cada uno de los trabajos.

(b) El *enfoque teórico* en didáctica de las matemáticas o paradigma utilizado.

(c) La *metodología de investigación* a la que se recurre en cada caso para abordar el problema didáctico planteado.

(d) La amplitud y la naturaleza del *ámbito institucional* y de la *actividad matemática* que el problema didáctico planteado toma en consideración.

Mientras que el criterio (c) se utilizará en otro de los Seminarios de este Simposio, en este trabajo utilizaremos parcialmente los criterios (a) y (b) y propondremos para terminar el (d) como punto de partida de una futura línea de investigación relacionada con el cada vez más urgente “diálogo” entre teorías o enfoques teóricos en didáctica de las matemáticas.

2. CONTENIDO MATEMÁTICO DE LAS INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS PRESENTADAS EN LOS SUCESIVOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM (1997 – 2010)

Sin pretender ser exhaustivos, intentaremos revisar brevemente las principales aportaciones presentadas en los diferentes Simposios de la SEIEM desde el año 1997 hasta el 2010. A lo largo de estos 14 años se han presentado en torno a 6 trabajos que hacen referencia al nivel de Educación Infantil (EI) y 26 relativos al nivel de Educación Primaria (EP).

2.1. Investigaciones relativas a la Educación Infantil

De los 6 relativos a la EI, uno de ellos (Giménez, Ruesga, Orozco 2003) trata sobre la equilibración y la introducción de tareas de transformación mediante flechas en EI. En él se estudian las diferentes respuestas de los niños de Infantil cuando se les plantean tareas en modo directo y en modo inverso.

Del resto trabajos presentados, cuatro versan sobre el número en EI y uno sobre el aprendizaje de la geometría en EI.

Fernández (2002) tiene como objetivo realizar una modelización de las competencias ordinales de los alumnos de EI mediante entrevistas clínicas.

Lacasta &Wilhelmi (2008) analizan la introducción de las nociones conjuntistas en EI durante la reforma de los años sesenta y su influencia en la enseñanza del número, señalando algunos de los fenómenos didácticos originadas por dicha reforma.

Salgado & Salinas (2009) analizan el tratamiento que hacen del número los manuales de Educación Infantil con el objetivo de ver si, a través de las actividades propuestas en los libros de texto, se tratan los contenidos establecidos en el currículo.

Núñez, Castro, del Pozo & Mendoza (2010) pretenden con este trabajo, que se halla en fase inicial de desarrollo, la elaboración y progresivo refinamiento de un *producto curricular* (el taller de problemas), dentro de un esfuerzo más amplio por desarrollar el currículo matemático de Educación Infantil.

Para ello, utilizan un modelo de *investigación de diseño*, utilizando como modelo teórico de partida la “Enseñanza de enfoque cognitivo”.

Se plantean las siguientes cuestiones: *¿Cómo ayudar a los niños en la transición de estrategias de modelización directa a las de conteo, y de éstas a las de uso de hechos numéricos? ¿Cuál es el papel de materiales manipulativos y recursos didácticos como la ‘banda numérica’ en estas transiciones? ¿Qué edad es la adecuada para comenzar este tipo de trabajo? ¿Cómo favorecer el inicio de niños de 4-5 años en este tipo de actividad?*

Para abordarlas comienzan el *diseño* de un taller para niños de 4-5 años poniendo especial atención en el uso de materiales didácticos y en las representaciones infantiles de cantidades, y cuidando aspectos afectivos y cognitivos del trabajo en estas edades, para lo que deciden introducir la literatura infantil.

Participan en la investigación 55 niños y niñas pertenecientes a los tres grupos de 2º curso del 2º ciclo de Educación Infantil (4 años).

El taller se desarrolla en tres fases: lectura de la carta (contextualización y comprensión del problema), trabajo individual (búsqueda de solución) y puesta en común y búsqueda de consenso sobre resultado y estrategia.

Wilhelmi & Lacasta (2007) muestran una experiencia que busca la deconstrucción del *modelo epistemológico centrado en técnicas aisladas y terminadas de resolución de problemas* de las matemáticas de las estudiantes para Maestro de Infantil, para el caso de la geometría, y la determinación de un *modelo epistemológico* basado en la modelización del saber utilizada en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas. La experiencia se ha realizado con 49 estudiantes de una asignatura de Didáctica de las Matemáticas, de 30 horas lectivas, de tercer curso de la diplomatura de Maestro de EI. Las estudiantes después del proceso de enseñanza deben elaborar situaciones didácticas, modelizadas según el esquema propuesto durante dicho proceso, donde se muestre los papeles, que juegan la maestra y los niños, y la función de las matemáticas como instrumento de resolución de problemas.

2.2 Investigaciones relativas a la Educación Primaria

2.2.1 Números en la Educación Primaria

En lo que se refiere a investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre los números en la EP tenemos 5 trabajos en total.

En uno de ellos (Ortiz, 1998), el objetivo general es analizar la naturaleza y evolución del razonamiento inductivo numérico en alumnos de EP mediante entrevistas semiestructuradas.

Otros dos tratan sobre la numeración. En el primero de ellos (Salinas, 2007) se analizan las dificultades que surgen en el aprendizaje del valor posicional de las cifras del sistema de numeración posicional. En particular, se señalan los errores que cometen tres grupos de estudiantes para Maestro de diferentes planes de estudio, cuando se les plantean cuestiones en torno a dicho sistema. En el segundo (Bosch, Gascón & Sierra, 2009) se realiza un análisis de manuales utilizados en la formación de Maestros en España en torno a los sistemas de numeración. Para ello se empieza proponiendo un Modelo Epistemológico de Referencia del desarrollo de los sistemas de numeración, que no es otra cosa que un modelo relativo y provisional, una hipótesis elaborada desde la didáctica, que sirve de referencia para dicho análisis y permite escapar de las restricciones o condicionantes que conlleva el proceso de transposición didáctica.

Hay, también, otros dos trabajos en torno a los números racionales, por un lado el trabajo de Escolano (2001) donde se presenta un estudio de tipo exploratorio e interpretativo, en el que se evalúa una experiencia de aula dentro del enfoque de Investigación-Acción con el mismo grupo de alumnos, en 4º y 5º de Primaria, en torno a las fracciones y los números decimales. Por otro, el de Perera & Valdemoros (2007) en el que se realiza un estudio de carácter cualitativo sobre los efectos producidos por una propuesta didáctica sobre las fracciones en un grupo de 30 alumnos de 4º de Primaria de una escuela mejicana. Dicha propuesta, que ha sido realizada dentro del marco de la Matemática Realista, utiliza situaciones y experiencias de la propia vida de los alumnos.

2.2.2 La resolución de problemas en la Educación Primaria

Hay 6 trabajos sobre la resolución de problemas en la EP. Dos de ellos tratan sobre la clasificación de problemas aditivos (González, 1997 y Socas, Hernández & Noda, 1997). En el primero se clasifican los problemas atendiendo a sus estructuras numérica y semántica global y en el segundo se aporta una clasificación de los problemas aritméticos verbales elementales con el objetivo de ampliar el marco teórico existente hasta ese momento y mostrar que los números enteros son un buen modelo para caracterizar el campo conceptual de las magnitudes discretas mientras que las categorías de cambio, combinación y comparación son pertinentes para la clasificación de problemas.

Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, Segovia, González, Morcillo & Fernández, (1997) analizan los problemas aditivos compuestos de dos o más pasos con el fin de determinar cuáles son sus variables estructurales y ver qué influencia tienen éstas en las dificultades que surgen al resolverlos.

Noda & Bruno (2009), describen entrevistas realizadas a alumnos con síndrome de Down. En ellas se les propone resolver problemas aditivos simples y cálculos aditivos y sustractivos para analizar las dificultades con las que tropiezan y los errores que cometen en sus estrategias, con la finalidad de proponer metodologías adecuadas que les ayuden a avanzar en su aprendizaje.

Molina & Ambrose (2010) exploran la relación entre el lenguaje y las matemáticas. Se plantea a un grupo de alumnos latinos la resolución de un conjunto de problemas formulados en inglés y en español con el fin de analizar si tienen más éxito en la resolución de problemas en su lengua materna o si su éxito es el mismo en ambas lenguas.

Por último, en Ayllón, Castro & Molina (2010) se recoge un estudio de caso donde se analiza la actuación de dos niños de 1º EP al responder a cuestiones y resolver problemas. Se pretende obtener cuál es el conocimiento informal de los alumnos sobre la noción de problema, cuál es el papel que juegan los números en un problema y qué factores influyen sobre el grado de dificultad de un problema.

2.2.3 La geometría en la Educación Primaria

Hay 5 trabajos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la geometría en EP.

Fiol (1999) plantea un problema de carácter general: *¿Cómo garantizar una óptima relación entre la enseñanza-aprendizaje de la geometría y el desarrollo cognitivo de los alumnos de 6 a 12 años?*

Guillén, Sáiz, Figueras & Corberán (2003) presentan tres ítems de un cuestionario diseñado para valorar si la geometría enseñada se corresponde con la que aparece el currículum de Primaria de las escuelas de algunos estados de México.

Además hay dos investigaciones que consisten en estudios exploratorios sobre la enseñanza de la geometría. Una de ellas, (Figueras & Guillén, 2004), contiene un trabajo, que se enmarca dentro de la formación del profesorado, donde se describe una segunda versión de un cuestionario, administrado a 20 maestros en ejercicio, elaborado para analizar la situación de la enseñanza de la geometría en algunas escuelas mejicanas de Primaria. Y en la otra, Guillén & Figueras (2005) presentan las creencias y concepciones de 20 maestros mejicanos en ejercicio relacionadas con la enseñanza de la geometría de los sólidos y con los contenidos que imparten en sus clases. Las creencias y concepciones han sido obtenidas a partir de un estudio exploratorio llevado a cabo durante las actividades realizadas en un curso taller.

El quinto trabajo es de Climent & Carrillo (2005) y aborda un estudio comparativo, desde una perspectiva cualitativa y cuantitativa, sobre la enseñanza de los polígonos en 6º de Primaria en cuatro países (Bélgica, Hungría, España e Inglaterra). La docencia analizada ha sido llevada a cabo por un maestro de cada país y ha sido considerada por los investigadores como ejemplo de buenas prácticas en su contexto.

2.2.4 Razón, proporción y proporcionalidad en la Educación Primaria

Puig & Fernández (2002) se plantean el problema de la enseñanza y aprendizaje de la razón, proporción y proporcionalidad el 2º y 3º ciclo de Primaria y lo abordan utilizando el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales. Dicho marco teórico tiene cuatro componentes: La componente de competencia formal que elaboran mediante el análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. La componente de cognición y comunicación que se lleva a cabo con una revisión bibliográfica atendiendo a los problemas, las actuaciones de los alumnos y las variables que afectan a dichas actuaciones. Aquí la componente de comunicación se limita a la

forma como se presentan a los alumnos las tareas. Y en la componente de enseñanza se tienen en cuenta dos diseños curriculares (el nacional y el autonómico), los libros de texto de primaria de Matemáticas y de Ciencias Sociales. Luego llevan a cabo una experimentación donde tienen en cuenta dos partes: el estudio de los grupos de los alumnos en el aula y el estudio de casos de alumnos seleccionados. Para realizar el análisis y clasificación de las actuaciones utilizan el modelo de interpretación de comportamientos construido en anteriores investigaciones sobre razón y proporción en Méjico.

2.2.5 La optimización y la medida en la Educación Primaria

Lacasta, Malaspina, Pascual & Wilhelmi (2009) se plantean la cuestión siguiente: *¿Es posible construir una situación de optimización en el tránsito del número natural a la medida a partir de los conocimientos escolares propios del primer ciclo de EP?* Más tarde, reformulan la cuestión para buscar cuáles deben ser características de dicha situación. Y luego describen el análisis a priori y la experimentación de una situación de optimización planteada en el paso del número natural a la medida, realizada con alumnos del primer ciclo de Primaria.

2.2.6 Sobre el álgebra temprana en la Educación Primaria

Molina (2007) presenta una caracterización del Early-Algebra (EA) o Álgebra temprana explicando que dicha propuesta promueve en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de ese modo, cultiva hábitos de pensamiento que atienden a la estructura que subyace a las matemáticas.

Señala las diferencias entre el Early-Algebra y la Pre-álgebra y habla del origen y la evolución del EA.

Nos muestra la visión del álgebra dentro de la propuesta EA, indicando que es compartida por los estándares del NCTM. Según la autora, dicha visión consiste en distinguir como componentes estándar del álgebra la comprensión de patrones, las relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y el análisis del cambio.

El interés de la autora por la EA se concreta en el análisis del uso del pensamiento relacional por parte de los alumnos, ya que conjetura que el pensamiento relacional puede ayudar a los alumnos a desarrollar métodos propios, personales y flexibles, para la resolución de ecuaciones. Algo que, según la autora, suele trabajarse en el aprendizaje de la aritmética pero no en el aprendizaje del álgebra.

Para analizar el uso de pensamiento relacional puesto de manifiesto por los alumnos, ha realizado un experimento de enseñanza con un grupo de 26 alumnos de 3º de EP.

El estudio se enmarca dentro del *paradigma de la investigación de diseño*.

El contexto elegido para analizar el uso del pensamiento relacional de los alumnos ha sido la resolución de sentencias numéricas de suma y resta, basadas en propiedades aritméticas básicas.

Para terminar, la autora propone dos líneas a profundizar: el proceso de generalización de las propiedades aritméticas, una vez los alumnos han explicitado el uso de pensamiento relacional, y el uso de este tipo de pensamiento en contextos algebraicos, en especial, en el trabajo con expresiones, igualdades y ecuaciones algebraicas.

2.2.7 Sobre el desarrollo profesional del profesor en la Educación Primaria

En lo que se refiere al desarrollo profesional del profesor hay un total de 6 trabajos. Dos de ellos están dedicados al análisis del desarrollo profesional de una maestra a partir de un estudio de caso. En el primero, Carrillo & Climent (2002) analizan la evolución que experimenta una maestra, que está implicada en un proceso de reflexión y modificación de su práctica, en el contexto de una investigación colaborativa sobre la resolución de problemas, en el aula de matemáticas. Un resultado obtenido, fruto de este análisis, es que el principal detonante de cambio de sus concepciones se produce cuando la maestra reflexiona sobre la necesidad de dominar el conocimiento del contenido que se requiere para trabajar en el aula desde el enfoque de la resolución de problemas.

En el segundo trabajo (Muñoz-Catalán, Carrillo & Climent, 2006), siguiendo en la misma línea de trabajo, analizan el desarrollo profesional de una maestra novel (no prototípica) inmersa en un proyecto de investigación colaborativo. Primero se centran en su reflexión durante el período de prácticas, cuando todavía es estudiante para maestra, y después estudian su actuación como maestra durante el primer trimestre de su vida como docente. Se pretende conocer sobre qué reflexiona y cómo se posiciona como estudiante en prácticas y como maestra en ejercicio, identificando las posibles diferencias en ambos casos. Para el análisis de los datos obtenidos combinan la técnica de análisis de contenido con el método de comparación constante de la Grounded Theory.

Hay otros dos dedicados al trabajo cooperativo. Así, Lopes & Salinas (2006), a partir de un experimento realizado sobre una unidad curricular de Matemáticas, en una clase de 25 alumnos de 5º de Primaria, se plantean el problema siguiente: *¿Cómo influye en la forma que los alumnos aprenden y ven los conceptos geométricos y de medida, la enseñanza que privilegia el aprendizaje en grupos cooperativos?*

Y Lopes, Salinas & Palhares (2008) presentan un estudio de caso. A partir de una experiencia educativa de una sesión, donde se proponen dos problemas de áreas a un grupo de cuatro alumnos de 5º de Primaria, utilizando una metodología que privilegia el trabajo cooperativo, analizan cómo interactúan los alumnos al resolver ambos problemas. El propósito es investigar con detalle si las estructuras de aprendizaje cooperativo introducen o no cambios significativos en los participantes en el aula.

Alfonso, Rigo & Gómez (2008) exponen un estudio de caso de carácter etnográfico donde se destacan las actuaciones diarias en el aula, y en especial la conducta de la profesora. La investigación se lleva a cabo en un aula con 25 alumnos de 6º grado de una escuela pública de Ciudad de México. La maestra de 25 años de experiencia profesional resalta como buena docente ya que sus alumnos obtienen muy buenos resultados en las evaluaciones oficiales. El propósito de los autores es identificar cómo la maestra, en condiciones espontáneas, promueve entre sus alumnos el desarrollo de competencias de regulación autónoma en sus procesos de aprendizaje de las matemáticas. Privilegian la observación no participante como metodología de toma de datos y proponen un instrumento de análisis.

En el último trabajo, Ribeiro, Carrillo & Monteiro (2009) pretenden obtener una mayor comprensión del papel que juegan los objetivos del profesor en su práctica docente. Para ello analizan dos secuencias de clases de matemáticas de una maestra en dos momentos distintos, estando uno de ellos asociado a un trabajo colaborativo.

2.2.8 Sobre el juego en la EP

Edo & Deulofeu (2005) tienen como objetivo general conseguir una mejor comprensión sobre el modo en que alumnos del primer ciclo de Primaria aprenden contenidos matemáticos en una situación didáctica que incorpora juegos de mesa, gracias a los procesos de interacción. El marco psicológico de referencia adoptado es la concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza. La investigación está basada en el *modelo conceptual y metodológico para el análisis de algunos mecanismos de influencia educativa que operan en la interactividad*.

Los autores obtienen los datos a partir de una experiencia de innovación que consiste en la realización de un *Taller de juegos y matemáticas* en una clase del primer ciclo de Primaria.

3. CLASIFICACIÓN DE ALGUNAS INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS EN BASE AL ENFOQUE TEÓRICO QUE LAS SUSTENTA

El criterio elegido para clasificar las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas en los niveles de Educación Infantil y Primaria no tiene por qué ser único. En esta sección hemos elegido el enfoque teórico que sustenta cada una de las investigaciones como criterio porque nos ha permitido una mayor facilidad de aplicación. Primero consideraremos los trabajos llevados a cabo dentro del PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education), luego, los realizados en el marco de la TSD (Teoría de las Situaciones Didácticas); a continuación los trabajos sustentados en el EOS (Enfoque Ontosemiótico); para terminar con los enmarcados en la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico).

3.1 Investigaciones sobre el desarrollo de los conocimientos matemáticos en alumnos de Educación Infantil y Primaria en el PME³⁵

Las bases teóricas de las primeras investigaciones desarrolladas dentro del PME fueron explicadas, en su mayor parte, a través de trabajos realizados con alumnos de Educación Infantil y Primaria. La mayor parte de estos trabajos giraron en torno al aprendizaje del conteo y de la aritmética. En los últimos 15 años, se ha empezado a investigar con alumnos de Infantil y Primaria sobre el desarrollo de contenidos matemáticos que previamente se habían tratado sólo con alumnos de mayor edad (Secundaria), como el razonamiento multiplicativo, el álgebra, la exploración y análisis de datos y la modelización matemática.

³⁵ Para la revisión de los trabajos del PME hemos tomado como base el capítulo que realizan Mulligan & Vergnaud (2006) en el *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 117 - 146). (<http://www.sensepublishers.com/catalog/files/90-77874-19-4.pdf>) (Última consulta el 1/05/2011)

Ha habido más concentración de investigaciones en el nivel de Educación Infantil y Primaria y en el ámbito del aprendizaje de la aritmética entre los años 1975 y 1995 que posteriormente. Dichos trabajos versaron sobre el desarrollo del conteo, la noción de cardinalidad, la comprensión de las estructuras aditivas y multiplicativas, la iniciación a la noción de fracción y algunos estudios de figuras geométricas. Entre los años 1995 y 2005 ha habido menos de un 10% de estudios dedicados al desarrollo de las matemáticas en alumnos de Educación Infantil y Primaria (excluyendo los trabajos sobre el desarrollo profesional del profesor).

Este último periodo se ha caracterizado porque las investigaciones muestran una ampliación de los contenidos y procesos matemáticos considerados y un mayor ámbito de aplicación con estudios transversales y longitudinales. Los paradigmas de investigación se han vuelto más dinámicos y ya no abordan estudios de contenido único, centrados en el análisis de las estrategias y niveles de los niños, sino que pasan a analizar los sistemas de enseñanza y el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, por ejemplo Anghileri (2001). Algunas contribuciones recientes derivan de proyectos gubernamentales de gran escala sobre la aritmética, que se han llevado a cabo en el ámbito de marcos teóricos basados en trabajos de investigadores del PME como, por ejemplo, Askew (2003), Brown (2002), Clarke, McDonough & Sullivan (2002). La investigación ha evolucionado y en lugar de estudiar únicamente las bases psicológicas del desarrollo matemático ha pasado a cuestionar la enseñanza de la aritmética elemental.

Las conferencias del PME que se han centrado en campos relacionados con la Educación Infantil y Primaria, han sido las siguientes: sobre los primeros esquemas del conteo y la simbolización (PME8, 1984), sobre el pensamiento numérico elemental (PME21, 1997), sobre las matemáticas en la educación infantil (PME26, 2002) y sobre el Álgebra temprana o Early-Álgebra (PME28, 2004).

3.1.1 Perspectivas teóricas de las investigaciones sobre el desarrollo matemático de los niños en el PME.

Los enfoques teóricos desarrollados en los primeros años del PME se centraron fundamentalmente en el estudio del aprendizaje de los niños y en el desarrollo de diferentes perspectivas psicológicas. Algunos ejemplos de estas contribuciones son: Los modelos intuitivos de Fischbein, la estructura de los resultados del aprendizaje de Collis, los campos de experiencia de Boero, los campos conceptuales de Vergnaud, el conteo temprano y el desarrollo de Goldin, una visión proceptual de Gray, Pitta y Tall, el constructivismo social de Yackel y las perspectivas interaccionistas de Hershtikowitz.

a) La teoría de los *modelos intuitivos* de Fischbein (1978) afirma que los modelos primitivos (implícitos) influyen en el desarrollo de los conceptos y en el comportamiento en la resolución de problemas de los niños, y, además, esos modelos continúan ejerciendo influencia con matemáticas más complejas (Fischbein, 1983). Su investigación sobre problemas de multiplicación y división y pensamiento probabilístico han contribuido de modo significativo a comprender el pensamiento matemático y las dificultades experimentadas por estudiantes de la escuela secundaria. Las bases psicológicas de su teoría aparecen en muchos estudios sobre el desarrollo intuitivo del niño que emergen en el grupo del PME.

b) La *estructura de los resultados del aprendizaje observados* (SOLO)³⁶ de Collis se basa en los modos de funcionamiento y en los niveles de estructura de las respuestas de los estudiantes: preestructural, uniestructural, relacional y de resumen extendido. Aunque este modelo estructural ha mejorado nuestra comprensión de la estructura cognitiva, tiene algunas limitaciones cuando se aplica al aprendizaje de las matemáticas escolares, particularmente para niños pequeños, debido a la carencia de recomendaciones didácticas. Las mismas limitaciones asociadas con el modelo de Collis pueden ser esgrimidas para otras descripciones propuestas de los niveles de desarrollo, más o menos influenciadas por la teoría Piagetiana de los estadios, tales como la propuesta por Harrison, Bye y Schroeder (1985).

c) Los *campos de experiencia* de Boero.

A mediados de 1980, los investigadores desarrollaron amplias perspectivas sobre el aprendizaje de las matemáticas que consideraban que el conocimiento de los niños se desarrollaba principalmente cuando éste se enfrentaba a situaciones dentro y fuera de la escuela. Los primeros trabajos de la escuela brasileña (Nunes y Schlieman, 1987) pusieron de relieve en varias reuniones del PME que era esencial estudiar el conocimiento matemático informal, y comprender cómo dicho conocimiento podría ser utilizado en la escuela. Una importante cuestión didáctica apareció al cuestionarse en qué forma y con qué objetivos muchas experiencias de la vida diaria podrían ser introducidas en las clases de matemáticas. Una reflexión sistemática y un análisis de este problema fueron avanzados por Boero (1989) en el PME13. Lesh (1985) y otros también contribuyeron a esta cuestión. Sin embargo, otros miembros de PME afirmaron que la referencia a la experiencia no era necesariamente autosuficiente desde un punto de vista epistemológico, puesto que esta no lleva directamente a conceptos matemáticos sólidos de número, espacio, álgebra y geometría.

d) Los *campos conceptuales* de Vergnaud

En relación con la problemática anterior, la idea de campo conceptual ofreció una conexión entre las matemáticas de la experiencia y las convencionales, identificando las principales relaciones y conceptos que podrían ser tomados y estudiados como objetos matemáticos. Las situaciones encontradas en la experiencia no son consideradas de manera organizada y sistemática. Por lo tanto, la noción de campo conceptual fue útil para reflexionar sobre las situaciones desde un punto de vista conceptual e intentar organizarlas en un conjunto de situaciones estructuradas. Para ello, Vergnaud (1981) introdujo el concepto de campo conceptual (estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, álgebra elemental y geometría elemental), que está en la base de muchos de los trabajos sobre problemas aritméticos verbales que siguieron (Vergnaud, 1983, 1990). Vergnaud acuñó los términos “estructuras aditivas” y “multiplicativas” para describir este nuevo campo de trabajo basado en estructuras conceptuales.

e) Las investigaciones sobre *el conteo*.

En el PME5 celebrado en Grenoble, se presentan muchas investigaciones en torno al conteo. Por ejemplo, comunicaciones de Comiti & Bessot; Fischer; Richards, Schmidt & Steffe; Van den Brink; y Von Glasersfeld. Steffe, Von Glasersfeld y Richards

³⁶ the Structure of Observed Learning Outcomes (SOLO)

discutieron el papel del conteo en las primeras concepciones de número de los niños (Richards, 1981; Steffe, 1981; Von Glasersfeld, 1981). Cuestionaron si una unidad de conteo es concreta o abstracta y se preguntaron cuál es el elemento que se cuenta. Concluyeron que depende de su posición de la secuencia completa de acciones de conteo, y del problema que se debe resolver.

f) Las bases iniciales de las investigaciones sobre *las estructuras aditivas*.

Ya en 1978 varios grupos de investigación propusieron clasificaciones de tareas cognitivas implicadas en problemas de adición y sustracción. Vergnaud (1978) en el PME3 y Nesher y Greeno (1981) en el PME6 identificaron tres relaciones principales que los niños deberían construir para enfrentarse a esas tareas: combinación de dos partes en un total, transformación de un estado inicial en un estado final, y comparación de dos cantidades. Carpenter & Moser (1979) añadieron el caso de igualar 2 cantidades. Vergnaud consideró relaciones más complejas como la combinación de transformaciones, la combinación de relaciones y la transformación de una relación. La ventaja fue que se extendió la clasificación a problemas con números con signo, incluyendo sustracción de números de distinto signo, un caso que plantea obstáculos de larga duración, incluso para los alumnos mayores de 15 años y para adultos. La principal contribución de la investigación sobre estas clasificaciones es que hace posible el estudio sistemático de la dificultad comparativa de diferentes tareas cognitivas implicadas. Esas clasificaciones también hacen posible introducir el marco de los campos conceptuales y los conceptos de esquema, concepto en acción y teorema en acto (Vergnaud, 1982, 1984).

g) Las investigaciones en torno a las *estructuras multiplicativas y las fracciones*

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas proporciona otra importante contribución al estudio de los procesos aritméticos de los niños. Vergnaud ilustró el prototipo de estructura multiplicativa como la relación de proporción de cuatro términos, la cual a menudo es pasada por alto en simples problemas de multiplicación y división porque uno de los términos es el número 1. Describió 4 casos prototípicos: multiplicación, “quotition”, partición y encontrar el cuarto término. Durante las dos primeras décadas del PME se han presentado muchos estudios sobre problemas de multiplicación y división (partición y “quotition”) y sobre situaciones de encontrar el cuarto término. Si consideramos la fracción como un concepto asociado con la división y la multiplicación en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, entonces las principales aportaciones a este ámbito las encontramos en los primeros años del PME (hay 5 o 6 comunicaciones cada año). Por ejemplo, Behr, Bell, Figueras, Fischbein, Greer, Gaza, Hunting, Karplus, Lesh, Nohda, Post, Reiss, Seeger, Southwell, Strefland, Vinner, Waschmuth, y muchos otros han realizado trabajos en este campo. La mayoría de las contribuciones se refieren a primaria y secundaria, de modo que los problemas de proporción no se considera que sean dominados por los niños hasta el final de la escuela primaria. Lo sorprendente es que, a pesar del gran número de trabajos presentados en el PME sobre este tema, se echan en falta trabajos sobre las relaciones entre las fracciones y el razonamiento proporcional, y esto a pesar de que una fracción es primero comprendida como una relación escalar entre dos cantidades o magnitudes del mismo tipo.

h) Investigaciones sobre las *representaciones simbólicas: la numeración*.

Durante la década de los ochenta en las reuniones del PME hubo una serie de contribuciones sobre la comprensión de los símbolos por los niños y sobre su uso en la enseñanza. Se tuvieron en consideración diferentes sistemas simbólicos como tablas y gráficos, símbolos algebraicos y fracciones, pero el sistema simbólico más investigado fue la representación del valor posicional de los números naturales y decimales. Janvier & Bednarz (1989) diagnosticaron errores persistentes en la escuela primaria (por ejemplo, los niños no reconocían la equivalencia entre 40 decenas y 400) y Nunes (1989) mostró las dificultades encontradas por alumnos brasileños en situaciones “fuera de la escuela”.

i) El impacto de las *teorías constructivistas*.

La mayoría de los participantes en las primeras reuniones del PME eran constructivistas. Glaserfeld y sus colegas Cobb, Confrey, Richards y Steffe promovieron un enfoque radical constructivista. De acuerdo con este enfoque, es imposible representar el mundo real, y por tanto la comunicación podría ser problemática, tanto palabras como símbolos podrían no tener significados unívocos.

Aunque Von Glaserfeld en 1983, presentó una versión débil del constructivismo radical, dicho enfoque teórico rápidamente llegó a ser dogmático. Y se convirtió en uno de los temas polémicos en la historia del PME. Kilpatrick (1987) abogó por una visión más equilibrada y afirmó que, después de todo, los constructivistas no habían sido capaces todavía de desarrollar nuevos métodos para enseñar y aprender matemáticas. En la misma sesión del PME, Sinclair (1987) afirmó que Piaget nunca había sido un constructivista radical sino un “constructivista interactivo” o incluso un “constructivista dialéctico”. Para él, se trata de conocer los resultados de las transformaciones que el sujeto introduce en la relación conocedor/conocido como una “acción y reacción”. Vergnaud (1987), alumno de Piaget, también argumentó que Piaget había dedicado gran atención a las propiedades físicas de los objetos, e incluso se opuso a la contraposición entre abstracción matemática desde la acción por un lado y abstracción física desde los objetos por otro lado. Vergnaud advirtió que podría ser peligroso ir demasiado lejos en la crítica al constructivismo, porque algunos enfoques alternativos como el procesamiento de la información, la manipulación simbólica, o las secuelas de larga duración del conductismo podrían ser contraproducentes para la investigación en educación matemática. La ideología predominante de los profesores del momento estaba marcada todavía por el dogmatismo (la verdad matemática es expuesta y transmitida) y por el empirismo (la ciencia consiste en observar regularidades). Por tanto, el constructivismo tenía la fecundidad potencial de cuestionar una visión demasiado ingenua de los procesos, promoviendo que se tuviera en cuenta la epistemología específica de los conceptos matemáticos.

A pesar del aparente conflicto de posiciones teóricas y las interpretaciones y disparidades ofrecidas por los investigadores en este ámbito, los trabajos relativos al desarrollo temprano de las matemáticas, basados en el constructivismo, florecieron desde 1980 hasta pasado 1990. El trabajo de Steffe (1984) y sus colegas sobre el comienzo del conteo y los esquemas multiplicativos jugó un papel decisivo en articular el proceso de abstracción reflexiva y el desarrollo de las estrategias aritméticas de los niños. Este enfoque tuvo un impacto muy significativo en la dirección de las investigaciones llevadas a cabo por el grupo del PME de Norteamérica.

j) *La teoría proceptual del pensamiento matemático elemental*

Gray y Tall (1991) propusieron en el PME15 la teoría proceptual del desarrollo de los conceptos matemáticos. Una visión de la aritmética simple, donde los símbolos usados dualmente como **proceso** y **concepto**, pasan a denominarse “proceps”. Más tarde, Gray y Pitta (1996) ampliaron la noción de *proceps* a distintos tipos de representaciones mentales.

La perspectiva teórica de Gray, Pitta y Tall ha ido avanzando a través de las diferentes contribuciones realizadas en la reuniones del PME, tales como el estudio de imágenes (Pitta & Gray, 1996), una teoría explicativa del éxito y el fracaso en matemáticas (Gray & Tall, 2001), y el papel de las imágenes en el cálculo mental (Bills & Gray, 2001). Más recientemente, el papel de esta teoría se ha visto reflejado en los estudios sobre fracciones (Pitta-Pantazi, Christou & Gray, 2002) y el análisis del patrón y de la estructura en la aritmética temprana (Mulligan, Prescott & Mitchelmore, 2004).

k) *La perspectiva social constructivista e interaccionista*

A finales de los años 1980 y 1990, ha habido un nuevo cambio de paradigmas de investigación, los nuevos enfoques se han centrado en el análisis de la enseñanza y aprendizaje del aula. Los puntos de vista socio-cultural e interaccionista del aprendizaje de las matemáticas han influido en los investigadores que han tratado de comprender mejor la relación entre la enseñanza y el aprendizaje a través de las prácticas en el aula. La perspectiva constructivista social trasladó la investigación más allá de considerar al individuo como sujeto de desarrollo matemático, hacia el estudio del desarrollo de la construcción social del significado a través de la negociación y el consenso en la comunidad de estudiantes. Experimentos de enseñanza como los realizados por Cobb, Yackel, Wood y sus colegas, durante largos períodos, han caracterizado el desarrollo y diseño de esta investigación en los primeros años de la escolaridad (Cobb, 1994; McClain & Cobb, 2001). En el PME25, Yackel (2001) discutió la importancia de desarrollar formas de analizar las aulas de matemáticas que fomentan el aprendizaje significativo. Describió de qué forma la construcción de las normas sociales y socio-matemáticas, que surgen cuando se adopta una perspectiva simbólica, proporcionan un medio para analizar y fomentar los aspectos de la explicación, justificación y argumentación en las clases de matemáticas. Yackel se basó en ejemplos de interacción profesor/alumno en segundo de Primaria, proporcionando formas sofisticadas de explicación y justificación en la descripción de las estrategias mentales para la adición. Las ideas importantes surgieron del pensamiento del grupo ya que ello permitió que emergiera el razonamiento matemático y la argumentación. En el PME23, Hershkowitz (1999) puso de relieve la complejidad de la investigación en educación matemática como la interacción de múltiples entornos de aprendizaje entre los estudiantes, entre estudiantes y profesores, con la herramienta o con las tareas, etc. Afirmó que no debe descuidarse el papel del individuo, que utiliza los conocimientos construidos, mientras se está investigando la interacción social dentro de la comunidad de la clase.

Hasta aquí hemos visto la diversidad de perspectivas teóricas (psicológicas, cognitivas o sociales) que han influido en los investigaciones sobre el desarrollo matemático temprano presentadas en las reuniones del PME.

3.1.2 Investigaciones más recientes dentro del PME

Las investigaciones más recientes han tratado sobre los conceptos numéricos y los procesos de cálculo, los modelos matemáticos, el razonamiento y el álgebra temprana.

Uno de los cambios más importantes en la atención de la investigación en las últimas dos décadas ha sido el desarrollo de la investigación de las ideas de los niños asociadas con los procesos matemáticos. Estas incluyen la modelización y el razonamiento matemático, la representación y la comunicación de ideas (Jones, Langrall, Thornton & Nisbett, 2002; Perry & Dockett, 2002). Este énfasis en la resolución de problemas y el pensamiento matemático entre los niños mayores durante los 80 y los 90 y un aumento de la evidencia de las capacidades para resolver problemas de los niños pequeños, ha inspirado a los investigadores para diseñar investigaciones de modelización y razonamiento matemático en los primeros años. Esta tendencia es la que ha proporcionado la dirección de las investigaciones más recientes sobre las representaciones matemáticas, la modelización, el razonamiento y el pensamiento algebraico temprano.

a) El papel de las imágenes y las representaciones matemáticas

Varios grupos que investigan las estrategias y el razonamiento matemático en la resolución de problemas se han centrado en aspectos como la visualización y las imágenes (Gray & Pitta, 1999; Pitta-Pantazi, Christou & Gray, 2002). Algunas investigaciones han empleado estudios longitudinales para analizar el desarrollo del razonamiento de los niños como, por ejemplo, en el aprendizaje de las fracciones (Goldin & Passantino, 1996) e investigaciones estructuradas (Diezmann, Watters & English, 2001; Maher, 2002). Otros estudios han investigado el uso de diagramas en la resolución de problemas (Diezmann, 2000). Al mismo tiempo, la investigación sobre la resolución de problemas ha integrado el papel del desarrollo estructural y de patrones en una variedad de estudios sobre conteo (Thomas et al., 2002), patrones de número utilizando calculadoras (Groves, 2002) y razonamiento analógico (English, 2004).

Por ejemplo, en un estudio descriptivo con 103 estudiantes de primero de Primaria, incluyendo 16 estudios de caso longitudinales, Mulligan, Prescott & Mitchelmore (2004) y Mulligan, Mitchelmore & Prescott (2005) encontraron que la percepción y representación de los niños de la estructura matemática era generalizada a lo largo de los dominios matemáticos (conteo, partición, “unitizing”, patrones, medida, espacio y gráficos). Describieron cómo los conceptos matemáticos de los niños se desarrollan en 5 estados de desarrollo estructural. El logro de estas investigaciones en relación a las matemáticas escolares iniciales fue encontrar la relación entre el desarrollo y la percepción de los niños de patrones y estructuras matemáticas. Estos hallazgos apoyan lo que los investigadores del PME han dicho sobre la importancia de las imágenes y la estructura en la comprensión matemática (Gray & Tall, 2001).

Sin embargo, ha habido pocos estudios que examinen las prácticas de enseñanza y aprendizaje que fomentan que los niños pequeños se centren en patrones y estructuras. Esto podría requerir que los investigadores pusieran más atención a los procesos de representación y abstracción y al desarrollo de estructuras matemáticas inherentes a varias situaciones.

b) *La modelización y el razonamiento matemático*

Los primeros investigadores interesados en la modelización matemática se centraron en la resolución de problemas aritméticos verbales. Algunos han construido sobre esta investigación las bases para investigar los procesos de razonamiento y comunicación matemática en contextos de resolución de problemas más abiertos utilizando paradigmas de investigación más dinámicos.

Un ejemplo de esta línea de investigación lo constituye el trabajo de English (1996, 1997, 2004) sobre el desarrollo de la modelización matemática en estudiantes de Primaria, la resolución de problemas, el planteamiento de problemas y el razonamiento matemático, (deductivo, combinatorio y analógico). En un estudio longitudinal y transcultural English (2004) estudió el desarrollo del razonamiento analógico y matemático en niños de 4 a 7 años. Observó que los niños que destacaban en razonamiento analógico y matemático reflexionaban sobre lo que habían aprendido y aplicaban su conocimiento en nuevas situaciones. English & Watters (2005) hicieron un estudio longitudinal a lo largo de tres años con niños de 8 años sobre problemas de modelización que requerían que los niños plantearan problemas e hipótesis y hasta matematizaran una situación. El estudio se centraba en las características estructurales de los sistemas a modelizar tales como los patrones y las relaciones entre sus elementos en lugar de quedarse en las características superficiales.

c) *El razonamiento algebraico temprano*

Los estudios sobre pensamiento algebraico de niños pequeños (Blanton & Kaput, 2002, 2004; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth & Peled, 2003; Tabach & Hershkowitz, 2002; Warren, 2005) están principalmente centrados en las bases de la abstracción y la generalización matemática. En particular, investigaciones recientes sobre el pensamiento funcional (Blanton & Kaput, 2004; Schliemann & al., 2003) descubren recursos, desconocidos hasta la fecha, de razonamiento algebraico en niños de 3 a 8 años. En un estudio longitudinal sobre el álgebra temprana o early algebra, Schliemann & al. (2003) encontraron que estudiantes de tercero de Primaria tenían una rica comprensión de la función y eran capaces de describir algunos aspectos del pensamiento algebraico utilizando múltiples representaciones. Otros investigadores han abordado el problema del razonamiento algebraico temprano alejándose del enfoque casi exclusivo en la aritmética y el cálculo y centrándose en el estudio de la comprensión infantil de la naturaleza algebraica de la aritmética (Fujii & Stephens, 2001). La eficiencia computacional ya no se considera la razón dominante para el estudio de la aritmética. Otro aspecto de la relación entre el álgebra y la aritmética es la comprensión de la equivalencia, pero ha habido pocos estudios que examinen esta área con los estudiantes más jóvenes (Irwin, 1990, Womack & Williams, 1998).

3.1.3 *Futuras líneas de investigación en el desarrollo matemático temprano*

Los estudios de la enseñanza de las matemáticas utilizando los enfoques socio-culturales son limitados, puesto que existen pocos estudios de corte cultural y etnográfico.

Es posible que haya que revisar algunas teorías fundamentales que proporcionan, en muchos sentidos, marcos teóricos integrados de los procesos matemáticos. Por ejemplo, la teoría de Fischbein sobre la intuición no se ha explorado a fondo en particular en el

contexto del aprendizaje de los niños pequeños o en sus consecuencias prácticas para situaciones de enseñanza. Del mismo modo, la teoría de los campos conceptuales que abarca las estructuras aditiva y multiplicativa podría utilizarse en el desarrollo de una nueva investigación más comprensiva.

a) *Nuevas líneas de investigación sobre razonamiento algebraico temprano*

A pesar de las reformas curriculares y el interés de las investigaciones recientes en el pensamiento algebraico temprano, sigue habiendo relativamente poca investigación sobre el desarrollo de patrones matemáticos en los niños pequeños y estudios de los programas educativos que promuevan patrones (Fox, 2005; Papic, 2005).

La investigación sobre los principios de pensamiento funcional algebraico puede mejorar nuestra comprensión de cómo los niños distinguen entre las relaciones aditivas y multiplicativas. Se podría considerar que la investigación sobre razonamiento matemático y principios de la modelación matemática está vinculada con el estudio del álgebra temprana. Teniendo en cuenta esto, podría resultar conveniente utilizar conjuntamente, en un mismo estudio, las tareas de investigación que involucran patrones cuantitativos y espaciales, la modelización y el razonamiento.

b) *La investigación sobre el papel de la tecnología*

El estudio sobre el uso y la influencia de la tecnología en el desarrollo matemático temprano ha sido bastante limitado. El grupo de investigadores PME no ha prestado suficiente atención a este tema.

El estudio sobre la aplicación de las calculadoras de mano también ha sido escaso a pesar de la evidencia científica de sus efectos positivos en la escuela infantil y primaria. Otra área que parece estar insuficientemente representada dentro del PME es el desarrollo de conceptos elementales de medición tales como el tiempo, la velocidad, el crecimiento y el cambio, a menudo representados a través del uso de la tecnología.

c) *La investigación sobre la alfabetización cuantitativa en los primeros años.*

Dentro del PME ha habido pocos estudios sobre la influencia de la lectura infantil en el aprendizaje de las matemáticas de los niños pequeños. Los estudios sobre la lectura infantil y la utilización de la literatura fuera de la escuela, en preescolar y en ambientes de clase podrían proporcionar mayor información sobre el desarrollo de conceptos matemáticos, del lenguaje y del razonamiento. Esto puede contribuir a hacer avanzar la comprensión de las bases sociales, culturales y psicológicas de la educación matemática temprana.

Otra área de investigación que es necesario impulsar en el PME dentro de este campo es la realización de estudios que se centren en la exploración de datos y habilidades de manejo de datos. En Jones & al. (2002) se lleva a cabo una investigación de las representaciones que realizan los niños pequeños de gráficos sencillos y tablas, incluyendo el uso de la tecnología. También hay un trabajo reciente sobre el análisis del rendimiento de alumnos de primaria en lenguajes gráficos en matemáticas (Lowrie & Diezmann, 2005).

Del mismo modo, ha aumentado el interés de la investigación por los vínculos entre los conceptos numéricos de los niños pequeños y la representación gráfica (Selva & al., 2005). Un programa de investigación relacionado con la exploración del razonamiento

probabilístico ofrecería una imagen más coherente del desarrollo de los niños en este dominio (Perry, Putt, Jones, Thornton, Langrall & Mooney, 2000; Spinillo, 1997).

Para terminar, digamos que desde el PME se propone proporcionar una visión más holística de las diferentes perspectivas o enfoques de investigación.

La colaboración entre equipos de investigadores a nivel internacional podrá fomentar los estudios interculturales y la ampliación de las bases de investigación del grupo del PME. Por otra parte, la integración de la investigación del PME con otros ámbitos como la ciencia y la alfabetización, contribuirá significativamente al diseño de los futuros estudios de aprendizaje y desarrollo de los niños pequeños que rebasen los límites de plan de estudios tradicional.

En el PME26, Brown destacó la necesidad de llevar a cabo investigaciones desde múltiples perspectivas con el fin de tener una visión más holística de la enseñanza y el aprendizaje y evitar conclusiones simplistas.

En la última década la atención de la investigación se ha fijado sobre la influencia de la enseñanza en el aprendizaje en las aulas (Boaler, 2003).

Otros estudios han observado los aspectos sociales de la situación de aprendizaje, tales como el papel de la tarea en el aprendizaje (Groves & Doig, 2002), el discurso de los niños (Irwin & Ginsburg, 2001) o la interacción dialógica entre el estudiante y el maestro (Sáenz-Ludlow, 2003).

Es evidente, en resumen, que la investigación didáctica en la escuela elemental ha pasado del estudio clínico de la evolución de los conceptos matemáticos al estudio de la enseñanza práctica en aula y en grupos pequeños. Sin embargo, hay todavía una escasez de investigación sobre cómo los niños construyen su conocimiento matemático previo a la escolarización, y fuera de la escuela.

Desde el PME se preguntan si es necesario reunir, a través de meta-análisis o grupos de estudio, los nuevos enfoques teóricos para el estudio del desarrollo matemático temprano, con el fin de combatir las diferencias y disparidades habidas en este campo de investigación en la última década.

3.2 Investigaciones didácticas sobre las matemáticas de Educación Infantil y Primaria dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas

Una de las aportaciones más relevantes de los últimos años a la investigación en Didáctica de las Matemáticas en los niveles de Educación Infantil y Primaria es la realizada por las investigaciones desarrolladas en el ámbito de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

La TSD surge en torno al año 1970 con el proyecto de construir un modelo de las situaciones que permita tanto ser utilizado para enseñar como para cuestionar las nociones matemáticas escolares intentando construir otras más adecuadas.

Una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado que está asociado a un conocimiento dado. Aquí este conocimiento se presenta como el recurso del que dispone el sujeto para poder conseguir un estado óptimo dentro de ese medio. Dentro de estas situaciones va a haber algunas que le van a permitir al individuo construir por sí mismo un conocimiento nuevo mediante un procedimiento de génesis artificial.

El principio metodológico fundamental de la TSD es que el conocimiento matemático está representado por una “situación” que involucra problemas que pueden resolverse de manera óptima usando este conocimiento.

El objeto fundamental de estudio de la TSD no es el sujeto que aprende, sino la situación en que el sujeto interactúa con otro y con la matemática (Artigue, 2004).

Desde la perspectiva de la teoría de las situaciones, los alumnos se convierten en los reveladores de las características de las situaciones a las que reaccionan (es importante señalar esta inversión de posición con respecto a las aproximaciones de la psicología, donde las situaciones suelen estudiarse como dispositivo para revelar los conocimientos del alumno. (Brousseau 2007, p. 24)

Esta es la diferencia clave con respecto a los demás enfoques teóricos, de carácter psicológico o cognitivo. En la TSD, se parte de la hipótesis de que para cada conocimiento matemático existe al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás (Brousseau, 2000). Por ello, dado un conocimiento matemático determinado, se busca qué tipo de situaciones son capaces de propiciar que aparezca, se utilice y se construya y, en consecuencia, se aprenda. Además, se conjetura que el conjunto de situaciones que caracterizan una noción matemática está estructurado y se puede generar, a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través del uso y manejo de las variables didácticas. Veamos un ejemplo:

La noción de conteo o cardinación está caracterizada por las tres situaciones fundamentales siguientes:

Situaciones fundamentales de la cardinación:

Aspecto cardinal (1)

“Un emisor E dispone de una colección de objetos y debe fabricar un mensaje para que un receptor R pueda realizar una colección que tenga tantos objetos como la de E”

Aspecto cardinal (2)

“Un emisor E dispone de una colección de objetos y debe fabricar un mensaje para que un receptor R que dispone también de otra colección, pueda prever cuál de las dos es más numerosa”

Aspecto ordinal

“Un emisor E dispone de una colección de objetos organizados en una fila y debe fabricar un mensaje para que un receptor R pueda reconocer la posición de un objeto señalado por el emisor en la fila”

En este caso las variables didácticas que van a permitir generar la noción de conteo y cardinación en el sujeto serán: *el tamaño de la colección, la disposición de los elementos, el tipo de comunicación, el tamaño de los números utilizables por el alumno, el número de viajes que se permite realizar para ir de una colección a la otra, la accesibilidad simultánea a las dos colecciones (esta variable sólo puede tomar dos valores), el hecho de que los objetos de las colecciones tengan o no movilidad (dos valores), la proximidad o lejanía del objeto señalado de los extremos de la fila.*

Por tanto, en este marco teórico serán los comportamientos de los alumnos los que revelarán cómo funciona el medio que se considera como un sistema. Así tenemos que la caja negra dentro de la TSD es el medio (Brousseau, 2000). Por ello, lo que es problemático, donde está el misterio y, por lo tanto, lo que se modeliza, es el medio considerado como un medio autónomo y antagonista del sujeto.

3.2.1 Tres investigaciones relevantes dentro de la TSD

La TSD ha realizado relevantes aportaciones a la investigación en Didáctica de las Matemáticas en torno a la enseñanza de diferentes nociones matemáticas, como los números naturales, los racionales, los decimales, el espacio y la geometría, la iniciación al álgebra, la estadística y la probabilidad, el estudio del razonamiento y de la lógica, y la medida de magnitudes. A continuación presentaremos de una forma un poco más detallada tres investigaciones desarrolladas en los niveles de Educación Infantil y Primaria, que consideramos muy relevantes por la problemática didáctica que abordan.

Dicha problemática gira en torno al siguiente fenómeno:

En ciertas situaciones, el alumno tiene necesidad de conocimientos que no le son enseñados, pero que él debe poner en práctica para aprender algo o para utilizar lo que ha aprendido... Por tanto, existen conocimientos necesarios para realizar ciertas prácticas sociales o de enseñanza relativos a un cierto saber, que no pueden ser objeto de enseñanza porque no aparecen como una forma cultural conocida. Generalmente dichos conocimientos son dejados bajo responsabilidad del alumno, y el profesor no puede hacer nada para cambiar este reparto de responsabilidades. (Briand, 1993, p. 5)

Los trabajos realizados en torno a esta problemática muestran que existe otro modo de estudiar el reparto de responsabilidades entre el profesor y el alumno. Dichos conocimientos son la *enumeración de colecciones*, los *conocimientos espaciales* y el *razonamiento natural*.

La enumeración de colecciones

En Briand (1993), se lleva a cabo un cuestionamiento de las actividades de conteo y de cardinación. Se observa que para poder tener un dominio efectivo del conteo y de la cardinación de los elementos de una colección finita es necesario que los alumnos sepan *enumerar*, es decir, sean capaces de pasar por cada uno de los elementos de dicha colección una y solo una vez. Este nuevo saber, *enumerar*, apenas es reconocido culturalmente y en algunos casos es confundido con contar o cardinar. Además el aprendizaje de la enumeración no figura en el curriculum de la enseñanza elemental. La primera parte del trabajo de Briand se dedica a mostrar, por un lado, que para poder controlar el conteo y la cardinación se requiere que los alumnos dominen la enumeración, y, por otro lado, que dicho dominio es necesario para la construcción y comprensión de las operaciones aritméticas. En la segunda parte, se estudian las consecuencias que tiene el hecho de que la enseñanza tenga necesidad de conocimientos de los que no se puede hacer cargo, porque no forman parte del curriculum. La imposibilidad de realizar la transposición didáctica de la enumeración conduce a que sea el propio alumno quien debe adquirir dicho conocimiento bajo su exclusiva responsabilidad. Esto produce dificultades tanto a los alumnos como a los profesores. Con el fin de hacer posible dicha transposición didáctica el autor desarrolla una

ingeniería didáctica de la enumeración de conjuntos y muestra cómo puede ser aprendida y utilizada por los estudiantes para Maestro.

Los conocimientos espaciales

Berthelot & Salin (1992) estudian el papel de los conocimientos espaciales en la transposición didáctica de la geometría. Dichos autores (Salin, 2004) subrayan las diferencias entre los conocimientos espaciales y los conocimientos geométricos y señalan las relaciones que hay entre estos dos tipos de conocimientos. Por un lado la geometría euclídea ha surgido en gran parte de la resolución de problemas espaciales y, por otro, el control eficaz del sujeto de sus relaciones con el espacio sensible es más fácil si domina los conocimientos geométricos.

El aprendizaje de los conocimientos espaciales apenas aparece en el currículo de Educación Primaria y es reemplazado por la geometría de las figuras elementales. Esta ausencia deja a los niños y a los adultos sin recursos en muchas situaciones que implican la utilización o producción de representaciones espaciales de la vida diaria o profesional. Por otra parte, la enseñanza de la geometría en la secundaria es para muchos estudiantes un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas.

Los autores proponen distinguir tres tipos principales de relaciones con el espacio, llamadas problemáticas: la problemática práctica, la problemática de la modelización “espacio-geométrica” y la problemática geométrica propiamente dicha (deductiva o teórica). Muestran mediante numerosos ejemplos, que la falta de consideración o de articulación de estas problemáticas en la enseñanza, las constituye en obstáculos para el aprendizaje.

Para la construcción de situaciones de enseñanza que permitan la superación de la problemática práctica, los autores incorporan y amplían el análisis de las representaciones del espacio introducidas por G. Gálvez y G. Brousseau, micro, meso y macro-espacios (Gálvez, 1985).

Desarrollan para tal fin varios procesos experimentales sobre la enseñanza de planos y maquetas, sobre la enseñanza de los ángulos y su medida, sobre la introducción del razonamiento en las figuras elementales así como un análisis comparativo de las diversas situaciones de introducción a la demostración en la Secundaria Obligatoria.

Una de las conclusiones de este trabajo, que se reitera posteriormente en Berthelot & Salin (1999-2000) es que, más allá del micro-espacio que es el espacio de trabajo habitual de la geometría escolar, hay que conseguir que los alumnos de la Escuela Primaria adquieran conocimientos espaciales útiles, en particular en el macro-espacio y en el dominio de las representaciones materiales de los objetos.

El razonamiento natural

En la tesis doctoral de Pilar Orús (1992) se analiza una problemática semejante a las dos anteriores que, en este caso, gira en torno al razonamiento natural. “Saber razonar” es una de las competencias que espera el profesor del alumno. El profesor no dispone de medios para ayudar al alumno que tiene dificultades relacionadas con este conocimiento y la falta de estos conocimientos es considerada como una falta de capacidad intelectual del alumno. La enseñanza del saber sabio correspondiente, o sea, de la lógica, se ha llevado a cabo, en los años 70, en la escolaridad obligatoria; pero ello no produjo los

efectos esperados. En este trabajo la autora hace una propuesta que permita llevar a cabo dicha enseñanza.

La problemática es la siguiente: el profesor habitualmente solicita de sus alumnos (de modo implícito) que razonen en sus aprendizajes personales, utiliza el razonamiento “natural” cuando enseña y controla cuándo y cómo se utiliza dicho razonamiento en su clase, pero no puede aceptarlo como resultado de un conocimiento matemático. Por otro lado, el alumno lo utiliza en sus actividades escolares, tanto para producir sus respuestas personales como para comunicar y explicar sus conocimientos, pero no puede distinguir cuando es utilizado por él mismo o por el profesor.

Así, por un lado, el razonamiento natural es necesario, pero no suficiente para producir razonamientos matemáticos y, por otro, el profesor no puede enseñar directamente el razonamiento natural, ya que no forma parte del saber a enseñar, pues no aparece en el currículum de forma explícita.

Ante esta problemática, la autora propone una ingeniería didáctica que permita a los maestros de Educación Primaria poder llevar a cabo la transposición didáctica del razonamiento y evitar que dicho conocimiento, tan necesario, quede bajo la responsabilidad exclusiva del alumno al tiempo que es tomado en cuenta por el profesor. Propone un conjunto de situaciones didácticas y adidácticas que permiten construir un campo común para la lógica, que se emplea en matemáticas, y el razonamiento natural. Modeliza dicho campo común utilizando el análisis tipológico.

3.2.2 Otras aportaciones de la Teoría de Situaciones Didácticas

En Briand, Loubet & Salin (2004) se presentan un conjunto de documentos (escritos, artículos, fotografías, vídeos) que describen muchos de los trabajos realizados en el Centro para la Observación e Investigación en la Enseñanza de las Matemáticas (COREM) de la Escuela Jules Michelet de Talence sobre investigación en Didáctica de las Matemáticas, durante 20 años, en el nivel de Educación Infantil, bajo la dirección de Guy Brousseau. Son 23 situaciones de aprendizaje por adaptación al medio (situaciones a-didácticas)³⁷ en torno a las matemáticas de la Educación Infantil (situaciones de designación y marcado, de enumeración, de conteo y cardinación, de orden, de clasificación, de iniciación a las magnitudes).

Peres (1984) lleva a cabo una investigación sobre la construcción de un código común de designación de objetos por alumnos de la Escuela Infantil.

³⁷ Es una situación específica del conocimiento que se pretende y debe aparecer ante los alumnos como una interacción con un medio no didáctico, de modo que sus decisiones no se guíen por la lectura de las intenciones del profesor, sino por la propia lógica del problema. Además el alumno podrá modificar sus decisiones teniendo en cuenta las informaciones que el medio con el que interactúa le devuelva. También puede decirse que es una situación donde se plantea a los alumnos un problema, que estos no saben resolver de inmediato. Pero los alumnos deben disponer de una estrategia inicial que les permita poder entrar en el problema. Dicha estrategia inicial pronto se vuelve ineficaz para resolver dicho problema ya que no coincide con la estrategia óptima. La intención didáctica del profesor debe permanecer oculta ante los ojos de los alumnos. Además, la propia situación debe permitir a los alumnos saber si han resuelto bien o no el problema sin necesidad de tener que acudir al profesor. Para poder gestionar este proceso en el que el alumno construye la estrategia óptima en interacción con sus iguales, el profesor utiliza las variables didácticas, que son elementos de la situación que puede manejar el profesor con el objetivo de provocar en los alumnos un cambio de estrategia. Por ello, no sirve como situación adidáctica cualquier situación. La construcción de situaciones adidácticas resulta de un trabajo de investigación de ingeniería matemático-didáctica.

En el trabajo de El Bouazzaoui (1982) se analiza la actividad matemática escolar en torno al número y la numeración en la Educación Infantil y en los primeros cursos de Educación Primaria y se hace una propuesta de situaciones adidácticas para su enseñanza.

Foucaud & Brousseau (1992) presentan situaciones adidácticas o de aprendizaje por adaptación al medio con las que se pretende iniciar al alumno en el estudio de las operaciones con números de dos cifras en primer ciclo de Primaria. Dichas situaciones son fruto de las investigaciones realizadas en el COREM.

También hay algunos trabajos de investigación relacionados con las magnitudes y su medida, como los que figuran en Brousseau (2000, 2001) y Chamorro (1997).

Del mismo modo, se han llevado a cabo varias investigaciones sobre la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la educación Primaria. En <http://guy-brousseau.com/?s=probabilit%C3%A9> se pueden consultar las diferentes experimentaciones realizadas en el COREM sobre la primera enseñanza de la estadística y la probabilidad.

Digamos, para concluir esta apretadísima síntesis, que en Brousseau (2010) se analizan las dificultades de aprendizaje de los algoritmos clásicos de la multiplicación y de la división. Se comparan con otros algoritmos estudiando tanto la facilidad de aprendizaje como la facilidad de utilización y los comienzos de su enseñanza, y se relaciona el sentido de la operación con la construcción del algoritmo.

Son muchos los trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas llevados a cabo, a lo largo de últimos cuarenta años en el marco de la TSD, en los niveles de Educación Infantil y Primaria. Para tener una visión más completa se puede acceder a las siguientes páginas web:

<http://guy-brousseau.com/>,

<http://www.ardm.eu/contenu/guy-brousseau-espanol>,

<http://gismo.fi.ncsu.edu/version1/files/articles/15df9093ccc761d57c1cd9768c3173dc.pdf>,

<http://math.unipa.it/~grim/homebrousseau.htm>

3.3 Investigaciones didácticas sobre las matemáticas de Educación Infantil y Primaria dentro del Enfoque Ontosemiótico

El EOS fue iniciado por el grupo de investigación “Teoría de la Educación Matemática” de la Universidad de Granada a principios de los años 90. El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico cuyo objetivo tiene un carácter holístico de integración de los diferentes modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática, como los enfoques de la fenomenología didáctica, la etnomatemática, la teoría antropológica, la teoría de situaciones, los campos conceptuales, los registros de representación semiótica, la socioepistemología, etc., para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Los fundamentos de este enfoque pueden analizarse con detalle en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Algunos de sus trabajos de investigación han sido llevados a cabo sobre contenidos de Educación Infantil y Primaria.

Así, por ejemplo, en Godino, Font & Wilhelmi (2006) se utilizan las herramientas que propone el EOS para valorar la idoneidad global de una lección sobre la suma y la resta de un manual de 5º de Educación Primaria. Dicha idoneidad global supone tener en cuenta criterios de idoneidad epistémica, cognitiva, semiótica, mediacional y emocional.

En Castro (2007) se plantea un modo de evaluar algunos de los métodos utilizados para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil, utilizando lo que dentro del EOS se llama criterios de idoneidad didáctica.

En Godino, Font, Wilhelmi & Arrieche (2009) se aborda el estudio de las relaciones entre las nociones conjuntistas y los números naturales. El análisis realizado se basa en la noción de significado personal e institucional de los objetos matemáticos.

Y en Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy (2011) se muestra de qué forma las nociones de *sistemas de prácticas y configuración de objetos y procesos*, junto con la noción de *función semiótica*, desarrollan y hacen operativa la noción de *sistema semiótico*. Para ello, analizan algunos sistemas semióticos utilizados en el estudio de los números naturales, aplicando dichas nociones al análisis de las respuestas de un alumno a una tarea de recuento y de escritura de números mayores que diez, donde aparecen las dificultades de aprendizaje de la decena.

3.4 Investigaciones didácticas sobre las matemáticas de Educación Infantil y Primaria dentro la Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) considera que la actividad matemática, o sea, la actividad del estudio de las matemáticas, es, como cualquier actividad humana, una actividad institucionalizada. Se postula que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra de *praxeología* (unión de los términos griegos *praxis* y *logos*). Se asume así que, toda práctica o “saber hacer” (*praxis*), que se compone de un *tipo de tareas* y de una *técnica* (manera de hacer sistemática y compartida en una institución), aparece siempre acompañada de un discurso o “saber” (*logos*), que contiene una *tecnología* (discurso sobre la técnica en cuestión) y una *teoría* que aporta elementos descriptivos, justificativos y generativos de los demás componentes de la praxeología.

La ventaja de la noción de praxeología es que unifica el saber-hacer (*praxis*) y el saber (*logos*) en una misma noción, y además de mostrar, en su propia expresión, su significado, valora del mismo modo cada uno de sus componentes.

Asimismo dentro de la TAD se propone un modelo de *praxeología didáctica* que debe venir generada por una cuestión generatriz (Gascón, 2010) cuya respuesta consistirá en la elaboración de la *praxeología matemática* que es objeto de estudio. Dicho modelo estará basado en la dialéctica entre cuestiones y la búsqueda de elementos de respuesta a dichas cuestiones, y en él deberán aparecer diferentes dimensiones o momentos didácticos como el *momento del primer encuentro*, el *momento exploratorio*, el *momento tecnológico-teórico*, el *momento del trabajo de la técnica*, el *momento de la institucionalización* y el *momento de la evaluación*.

Para poder tener una visión más detallada de este enfoque pueden consultarse:

<http://yves.chevallard.free.fr>

<http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm>

http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm

<http://www.crm.cat/Conferences/0910/cdidactic/cdidactic.pdf>

La mayor parte de los trabajos realizados en el marco de la TAD tratan problemáticas de los niveles de Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad. Aunque no hay muchos trabajos que estudian problemáticas relacionadas con la Educación Infantil y Primaria, sí existen algunos como, por ejemplo, Sierra (2006) donde se realiza una reconstrucción de los *sistemas de numeración* y de la *medida de magnitudes continuas* que servirá, posteriormente, de referencia para el análisis de manuales y de procesos de estudio de dichas praxeologías matemáticas y para el diseño de varios procesos de estudio en diferentes instituciones, entre ellos, uno en torno al número y la numeración en el primer ciclo de Educación Primaria.

En Sierra, Bosch & Gascón (en prensa) se propone un recorrido de formación de maestros de Educación Infantil que pretende responder a la cuestión: *¿Cómo enseñar a contar a alumnos de Educación Infantil?* Para ello, se analiza primero *¿cuál es la razón de ser de la actividad de contar?*, o sea, *¿cuáles son las cuestiones a las que responde la necesidad de utilizar los primeros números?* Y, en consecuencia, *¿cuáles son las tareas problemáticas que dan sentido a los primeros números y cuáles las posibles técnicas que permiten resolverlas?* Para ello se utilizan y reinterpretan algunos resultados de investigaciones realizadas dentro de la TSD.

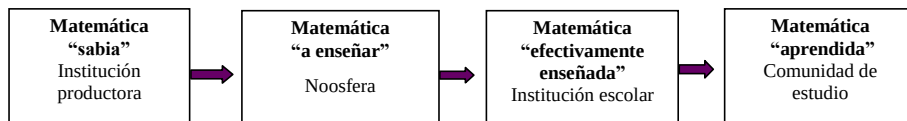
En Ruiz-Higueras & García (2011) se describe y se analiza un proceso de modelización diseñado e implementado en la etapa de Educación Infantil (3 a 6 años) sobre un sistema dinámico de variación en términos de praxeologías matemático-didácticas. Dicho proceso es generado por una cuestión generatriz que va a conducir a la construcción por los alumnos de cuatro praxeologías matemáticas en torno a los primeros conocimientos numéricos. Además se analiza, describe y justifica la acción didáctica de la maestra en la gestión de las praxeologías didácticas.

4. PROPUESTA DE UN CRITERIO PARA INTERPRETAR Y RELACIONAR ENTRE SÍ LAS INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS Y LOS ENFOQUES TEÓRICOS QUE LAS SUSTENTAN

En este apartado propondremos, como criterio para interpretar y clasificar las investigaciones didácticas y, más ampliamente, los enfoques teóricos que las sustentan, un criterio inspirado en la teoría de la *trasposición didáctica* (Chevallard, 1985/1991) y, más concretamente, en la progresiva ampliación de la base empírica que propugna la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) cuando propone como *unidad de análisis de los procesos didácticos* una secuencia del proceso didáctico que incluya todas las etapas de la transposición didáctica³⁸, esto es, el proceso de reconstrucción escolar de

³⁸ Para que un conocimiento pueda llegar a ser enseñado en la escuela ha sido necesario que éste sufra un conjunto de transformaciones que hagan posible que algo que no fue creado para la escuela pueda ser reconstruido dentro de ella. A este conjunto de transformaciones es a lo que se llama *proceso de transposición didáctica*. Dicho proceso comienza cuando un conjunto de representantes de diferentes instituciones debe elegir el cuerpo de conocimientos, que se considera que los individuos de una institución deben estudiar y aprender, dentro del conjunto de conocimientos científicos existentes en Matemáticas, es

una Organización Matemática local relativamente completa (Bosch, Fonseca & Gascón 2004; Bosch & Gascón 2005).



Postulamos que todo enfoque teórico en didáctica de las matemáticas, toma, de manera más o menos explícita, una *unidad de análisis* que es, a la vez, el constructo teórico básico y el ámbito elemental en el que se analizarán todos los datos empíricos. La unidad de análisis elegida ocupará, por lo tanto, un lugar central y privilegiado en la relación entre la teoría y los datos empíricos y constituirá así uno de los rasgos esenciales para caracterizar el enfoque teórico en cuestión.

Es evidente que cuando se elige una unidad de análisis particular se están tomando decisiones sobre:

- El tipo de *datos empíricos* que se van a tener en cuenta y, por tanto, sobre los datos que se van a ignorar.
- Las formas posibles de *interpretar* dichos datos.
- El tipo de *relaciones* que se van a priorizar en el análisis y que serán, en última instancia, relaciones entre elementos constitutivos de la unidad elegida.
- El tipo de *problemas didácticos* que el enfoque teórico va a considerar.

En el esquema de las etapas de la transposición didáctica, I_1 es la institución *productora* del saber matemático, I_2 , la *noosfera*, I_3 , la institución *escolar* e I_4 , la *comunidad de estudio* protagonista del proceso didáctico. El “saber aprendido” está compuesto por aquellos elementos praxeológicos que, al final del proceso didáctico, integrarán el *medio matemático del grupo* y que, por lo tanto, podrán ser utilizados (por la comunidad de estudio) de manera relativamente no problemática para la realización de nuevos tipos de tareas y para el estudio de nuevas cuestiones.

A continuación propondremos un nuevo criterio cuya aplicación sistemática postulamos que permitirá:

1. Dar una primera interpretación de los trabajos en investigación didáctica.

decir, lo que se llama *el saber matemático* o *matemática sabia*. A continuación, un grupo de expertos deberá realizar un proceso de reconstrucción de dichos conocimientos con la finalidad de transformarlos en objetos enseñables, esto es lo que se llama *el saber a enseñar*. Dicho grupo de representantes y expertos (que llamamos, la *noosfera*) estará formado por profesores que diseñan los planes de estudio, matemáticos productores del saber sabio o científico, por miembros del sistema de enseñanza (profesores, inspectores, representantes de la sociedades de profesores, etc.). Más tarde los profesores de la institución de enseñanza deben llevar a cabo las preparaciones de las lecciones que han de impartir a sus estudiantes sobre dicho cuerpo de conocimientos, es lo que se llama *el saber enseñado*. Este proceso termina cuando los estudiantes consiguen aprender dicho cuerpo de conocimientos dándoles sentido, esto es lo que se llama *el saber aprendido*. Este proceso, necesario para que la enseñanza sea posible, es fuente de muchas restricciones sobre el tipo de enseñanza que se imparte y sobre el tipo de actividad matemática que es posible realizar en la institución escolar. A veces, puede suceder que la actividad matemática, que el alumno realiza en el aula, esté muy alejada del *saber matemático* que se propuso como *saber a enseñar*, de ahí la necesidad de vigilar este proceso de transposición a lo largo de las diferentes etapas por las que pasa y a través de las cuales se va transformando y reconstruyendo.

2. Ayudar a proponer formas de desarrollar o completar relativamente dichos trabajos,

3. Relacionar las investigaciones a las que se aplique y hasta colaborar en el desarrollo del “diálogo” entre teorías o enfoques teóricos en didáctica de las matemáticas.

El criterio consiste en mostrar en cada caso la naturaleza y la amplitud de la base empírica, la actividad matemática que se ha tomado en consideración y, en la medida de lo posible, la relación entre ambas. De esta forma se podrán comparar los alcances respectivos de las diferentes investigaciones y se podrán proponer desarrollos posibles de estas que, en algunos casos, podrán facilitar el diálogo entre enfoques diferentes. Su aplicación efectiva requeriría responder para cada trabajo de investigación concreto y, sobre todo, para cada enfoque teórico que sustenta un conjunto de trabajos, a dos tipos de cuestiones:

(1) ¿Cuál es la amplitud, el *alcance del ámbito institucional* (en referencia a las instituciones que intervienen en la transposición didáctica de los saberes matemáticos) que se toma en consideración en el *problema didáctico* concreto que se plantea? Esto es, ¿en qué institución o instituciones se toman prioritariamente los datos empíricos? ¿En cuál o cuáles de las etapas de la transposición didáctica se cuestiona el conocimiento matemático? Esto es, ¿se cuestiona la matemática “aprendida”, la matemática “efectivamente enseñada”, la matemática “a enseñar” y la matemática “sabia”? A fin de explicitar y hacer operativo dicho cuestionamiento, ¿se elabora explícitamente un modelo epistemológico alternativo de, por ejemplo, la matemática “a enseñar”?

(2) ¿Cuál es la *amplitud de la actividad matemática* que se toma en consideración en el *problema didáctico* que se plantea? Teniendo en cuenta la relatividad institucional del conocimiento matemático, esto es, la forma específica en que se consideran los objetos matemáticos en las diferentes instituciones (en nuestro caso, la Educación Infantil y Primaria), ¿la actividad matemática considerada en dicho problema didáctico, se reduce a una tarea *puntual* acompañada por una técnica matemática relativamente aislada o, por el contrario, contiene un conjunto de tareas y técnicas, una práctica matemática, que engloba lo que en Educación Infantil y Primaria se considera como un “tema” (actividad matemática *local*)? ¿La actividad matemática tomada en consideración llega a englobar toda un área de la matemática escolar como, por ejemplo, la geometría (actividad matemática *regional*)? ¿Cuál es la “razón de ser” de la actividad matemática considerada? Esto es, ¿cuáles son las cuestiones a las cuáles dicha actividad matemática responde?

Para responder a estas cuestiones es imprescindible que el trabajo de investigación que pretendemos interrogar proponga explícita y claramente un *problema didáctico* (con la ayuda de las herramientas proporcionadas por el enfoque teórico que lo sustenta). Así podremos empezar a caracterizar el tipo de problemas que plantean las investigaciones que se sustentan en cada uno de los enfoques teóricos y, en consecuencia, el *objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas* tal como es construido por los enfoques teóricos en cuestión.

Una vez respondidas estas cuestiones para un trabajo de investigación determinado, se plantearán posibles ampliaciones del problema didáctico inicial mediante la inclusión, si

fuera necesario, de datos empíricos provenientes de instituciones no tomadas en consideración en primera instancia, mediante la potencial ampliación de la actividad matemática considerada en el mismo, haciendo explícita la “razón de ser” de dicha actividad matemática. Obtendremos así, hipotéticamente, una más profunda comprensión de la problemática involucrada y, en algunos casos, una solución más sencilla de la misma.

En general, postulamos que la aplicación sistemática de este criterio – que, aceptamos a priori, requerirá un enorme esfuerzo – permitirá, más allá de cuestiones puramente formales, relacionar de forma más detallada el “contenido” de los problemas didácticos planteados y abordados por los diferentes trabajos de investigación por lo que puede favorecer el necesario diálogo entre las diferentes teorías didácticas.

Iniciamos la puesta en marcha de esta propuesta aplicándola a dos ejemplos que utilizan marcos teóricos distintos.

Ejemplo (1): Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática, *Educación Matemática*, 16/3, 103-125.

En lo referente al alcance del ámbito institucional que se toma en consideración en este trabajo hay que decir que los datos empíricos a los que se alude se toman esencialmente de una *comunidad de estudio* virtual. No se analizan ni se cuestionan ni la matemática “efectivamente enseñada”, ni la matemática “a enseñar” ni, mucho menos, la matemática “sabia”. De hecho, en coherencia con el modelo de Van Hiele, se asume de manera explícita un modelo epistemológico general de la actividad matemática bastante próximo al euclideanismo (Gascón, 2001) que es el modelo dominante en la *institución productora* del conocimiento matemático. Este modelo es compatible con una interpretación de la actividad matemática a través de las etapas de *describir/analizar, clasificar, definir y demostrar*.

En cuanto a la *amplitud de la actividad matemática* que se toma en consideración podría decirse que, en primera instancia, engloba un *sector* de la matemática escolar (la geometría de los sólidos) dentro del *área* de la geometría. Es importante subrayar, sin embargo, que la naturaleza de la actividad matemática que interviene efectivamente en este trabajo está completamente determinada –como no podría ser de otra forma– por el modelo epistemológico de las matemáticas que se asume. Además, en este caso, el trabajo se centra en la primera de las etapas de dicha actividad, esto es, principalmente en la *descripción y análisis de objetos geométricos* (sólidos).

Ejemplo (2): Berthelot, R & Salin, M. H (1996). L’enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d’un obstacle didactique, *Revue des sciences de l’éducation*, 22/2, 417-442.

Los datos empíricos a los que se alude en este trabajo se toman explícitamente tanto de la *comunidad de estudio*, como de la *institución escolar* y de la *noosfera*. En coherencia con los presupuestos básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) se analiza y cuestiona no sólo la matemática “aprendida” sino también la matemática “efectivamente enseñada” y la matemática “a enseñar”. Además, cuando los autores construyen un *modelo epistemológico específico* de la actividad matemática escolar en torno al concepto de ángulo, no asumen acríticamente el modelo dominante en ninguna de dichas instituciones ni, tampoco, el modelo dominante en la institución productora.

Por todo ello podemos afirmar que el ámbito institucional que se toma en consideración en este trabajo contiene todas las etapas de la transposición.

La actividad matemática que se toma en consideración en este trabajo gira en torno a la noción de ángulo, por lo que podemos decir que abarca lo que en Educación Primaria se considera como un “tema” (actividad matemática *local*). De nuevo hay que interpretar la naturaleza y la amplitud de la actividad matemática que se pone en juego a la luz del *modelo epistemológico general* de las matemáticas en el que se sustenta la TSD y que permite dar sentido a investigaciones centradas en ámbitos relativamente reducidos de la actividad matemática.

5. CONCLUSIONES

Hemos realizado una revisión de algunas de las más relevantes investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre las Matemáticas de la Educación Infantil y Primaria. Las relativas a la Educación Elemental son escasas y, especialmente escasas las de Infantil tanto dentro de la SEIEM, como dentro del EOS y la TAD. Sin embargo, son numerosos los trabajos con esta temática en el ámbito del PME entre los años 1976 y 1986 y, asimismo encontramos una amplia investigación didáctica sobre las matemáticas de Infantil y Primaria en el marco de la TSD. Estos últimos son, probablemente, los que más han influido en el desarrollo del sistema educativo. En efecto, los resultados de los trabajos realizados dentro de la TSD se han visto reflejados en el currículum francés, aportando nociones que estaban ausentes anteriormente como los conocimientos espaciales y la simbolización (ver http://dpernoux.chez-alice.fr/Docs/vers_les_math.pdf).

Así, por ejemplo, a partir de la publicación de un trabajo de Guy Brousseau en los años 70 sobre las ventajas de la técnica de la multiplicación “Per Gelosía” (Brousseau, 1973) para ser utilizada por los alumnos de Educación Primaria, con respecto a la técnica clásica o de Fibonacci, algunos textos escolares y materiales para maestros de Francia (Ermel, 1978, 1981) proponían la técnica “Per Gelosía” como técnica que debían aprender los alumnos de Primaria.

Esta influencia se ha dejado sentir en otros países como, por ejemplo, en Chile, dentro del proyecto “Estrategia LEM” (Lectura-Escritura-Matemáticas) del Ministerio de Educación. En este macro-proyecto se ha llevado a cabo en los últimos años una propuesta de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en Infantil y Primaria basada fundamentalmente en los resultados de investigaciones realizadas en el marco de la TSD. Este proyecto, dirigido por la profesora Lorena Espinoza (Espinoza y Barbé, 2006), también utiliza, en su fundamentación y desarrollo, algunos elementos del modelo de praxeologías matemáticas y didácticas que propone la TAD. Los resultados obtenidos en la experimentación del equipo chileno, que se inició en el 2003 con un plan piloto en la región Metropolitana de Santiago de Chile, trabajando con 20 escuelas, 4500 alumnos y 160 profesores, permitirá, en un futuro próximo, avanzar en el diseño e implementación de procesos de estudio análogos en otros países. Para una revisión más detallada consultar la página del Centro Felix Klein: http://www.centrofelixklein.cl/?page_id=38.

En la última parte de nuestro trabajo hemos presentado una propuesta para interpretar y relacionar entre sí las diferentes investigaciones didácticas y los enfoques teóricos que

las sustentan. Se trata de una propuesta diseñada desde el enfoque que proporciona la Teoría Antropológica de lo Didáctico y ha sido presentada con el objetivo explícito de ser discutida en el ámbito de esta comunidad. Postulamos que no es posible proponer criterios “*neutros*” de clasificación e interpretación de trabajos de investigación didáctica, a menos que se trate de criterios puramente *formales* como los que hemos indicado al principio de este trabajo, esto es, criterios relativos al contenido matemático que aparece en el trabajo, al enfoque teórico que lo sustenta o al tipo de metodología de investigación utilizada. Pero si pretendemos tomar en consideración el contenido de los trabajos y, en especial, el tipo y la naturaleza de los *problemas didácticos* que éstos formulan y abordan, entonces deberemos situarnos necesariamente en un enfoque didáctico concreto y elaborar criterios con ayuda de las herramientas teóricas y metodológicas que dicho enfoque nos proporciona. Creemos que sólo así será posible valorar y comparar adecuadamente el alcance y las limitaciones de los diferentes trabajos de investigación y potenciar el necesario diálogo y desarrollo mutuo, que no necesariamente integración, de los enfoques teóricos en didáctica de las matemáticas que sustentan los trabajos en cuestión.

Referencias

1. Trabajos presentados en los Simposios de la SEIEM sobre Educación Infantil y Primaria

- Alfonso, D.; Rigo, M.; Gómez, B. (2008). *El papel del profesor en los procesos de auto-regulación del aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases de la escuela elemental*. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M; Blanco, L. (Eds.), Investigación en educación matemática XII (pp. 415-424). Badajoz: SEIEM.
- Ayllón, M. F.; Castro, E.; Molina, M. (2010). *Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas*. En Moreno, M.; Estrada, A.; Carrillo, J.; Sierra, T. A. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 223-233). Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida y SEIEM.
- Bosch, M.; Gascón, J.; Sierra T. (2009). *Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración*. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 139-150). Santander: SEIEM
- Carrillo, J.; Climent, N. (2002). *El caso del desarrollo profesional de una maestra*. En Murillo, J.; Arnal, P. M.; Escolano, R.; Gairín, J.M. (Eds.), Actas del VI Simposio de la SEIEM (pp. 29-46). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Castro, E.; Castro, Encarnación; Rico, L.; Gutiérrez, J.; Tortosa, A.; Segovia, I.; González, E.; Morcillo, N.; Fernández, F. (1997). *Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones*. En Sierra, M.; Rico, L. (Eds.), Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 64-77). Zamora: Universidad de Granada.
- Climent, N.; Carrillo, J. (2005). *Proyecto "METE" (Mathematics Education Traditions of Europe): polígonos en primaria*. En Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (Eds.), Noveno Simposio de la SEIEM (pp. 139-144). Córdoba: SEIEM.

- Edo, M.; Deulofeu, J. (2005). *Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos: investigación sobre una práctica educativa*. En Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M.(Eds.), *Noveno Simposio de la SEIEM* (pp. 187-196). Córdoba.
- Escolano, R. (2001). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. En Moreno, M. F.; Gil, F.; Socas, M.; Godino, J. D. (Eds.), *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la SEIEM* (pp. 149-158). Almería: Servicio de Publicaciones.
- Fernández, C. (2002). Entrevistas clínicas individuales a escolares de 3 a 6 años: una modelización de las competencias ordinales en Educación Infantil. En Murillo, Jesús; Arnal, Petra María; Escolano, Rafael; Gairín, José María (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 95-136). Logroño: SEIEM.
- Figueras, O.; Guillén, G. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria: elaboración de una encuesta. En Castro, E.; de la Torre, E. (Eds.), *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la SEIEM* (pp. 219-228). A Coruña: Servicio de Publicaciones.
- Fiol, M. L. (1999). La investigación del aprendizaje de la geometría en la educación primaria. En Ortega, T. (Ed.), *Actas del III SEIEM* (pp. 17-24). Valladolid: SEIEM.
- González, J.L. (1997). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global. En Sierra, M.; Rico, L. (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 78-106). Zamora: Universidad de Granada.
- Guillén, G.; Sáiz, M.; Figueras, O.; Corberán, R.M. (2003). Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría al aula. En Castro, E. (Ed.), *Investigación en Educación Matemática: séptimo Simposio de la SEIEM* (pp. 247-256). Granada: Universidad de Granada.
- Guillén, G.; Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria: curso-taller como técnica para la obtención de datos. En Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 227-234). Córdoba
- Giménez, J.; Ruesga, M. P.; Orozco, M. (2003). Sobre la equilibración y la introducción de tareas de transformación mediante flechas en educación infantil. En Castro, E. (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la SEIEM* (pp. 323-338). Granada: Universidad de Granada.
- Lacasta, E.; Wilhelmi, M. R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 403-414). Badajoz: SEIEM.
- Lacasta E., Malaspina U., Pascual J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. (pp.247–258). Santander: SEIEM.
- Lopes, M. H.; Salinas, M. J. (2006). O trabalho cooperativo nas aulas de Matemática: numa turna do 5º ano: uma experiência curricular. En Bolea, M. P.; Moreno,

- M.; González, M. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 256-267). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Lopes, M. H.; Salinas, M. J.; Palhares, P. (2008). O trabalho cooperativo na resolução de problemas de áreas. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 647-658). Badajoz: SEIEM.
- Molina, M., Ambrose, R. (2010). El papel del lenguaje en la resolución de problemas verbales aritméticos. Un estudio con alumnos bilingües. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 423-434). Lleida: SEIEM.
- Molina, M. (2007). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Muñoz-Catalán, Mª C.; Carrillo, J.; Climent, N. (2006). La reflexión de una maestra de Matemáticas en el "Prácticum" y en los inicios de su práctica docente. En Bolea, M. P.; Moreno, M.; González, M. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 217-224). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Noda, A., Bruno, A. (2009). Conceptos, estrategias y errores en las operaciones de suma y resta en alumnos con síndrome de down. En González, M.J.; González, M.T. & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 333-344). Santander: SEIEM.
- Núñez, C.; Castro, C.; del Pozo, A.; Mendoza, C.; Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En Moreno, M.; Carrillo, J.; Estrada, A., Sierra, T.A. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Ortiz, A. (1998). Entrevistas semiestructuradas: una aplicación en educación primaria. En Pascual, J.R. (Ed.), *Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 33-54). Pamplona: SEIEM.
- Perera, P. B.; Valdemoros, M. E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Puig, L.; Fernández, A. (2002). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En Murillo, J.; Arnal, P. M.; Escolano, R.; Gairín, J.M. (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 29-46). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Monteiro, R. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica?: análisis e influencia en la práctica de una maestra.

- En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIII* (pp. 415-423). Santander: SEIEM.
- Salgado Somoza, M., Salinas Portugal, M.J. (2009). El número en los libros de texto de Educación Infantil. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 487-497). Santander: SEIEM.
- Salinas, M. J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal de estudiantes de magisterio. En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Socas, M.; Hernández, J.; Noda, A. (1997). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En Sierra, M.; Rico, L. (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 46-62). Zamora: Universidad de Granada.
- Wilhelmi, M. R.; Lacasta, E. (2007). Un modelo docente para la formación en geometría de maestros en educación infantil. En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 315-324). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

2. Trabajos relacionados con diferentes enfoques teóricos

2.1 Trabajos relacionados con el PME

- Anghileri, J. (2001). What are we trying to achieve in teaching standard calculating procedures? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 2, 41-48.
- Askew, M. (2003). Mental calculation: Interpretations and implementation. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 1, 202.
- Bills, C., & Gray, E. (2001). The 'particular', 'generic' and 'general' in young children's mental calculations. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 2, 153-160.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2002). Design principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 2, 105-112.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 2, 135-142.
- Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice-the case of the dance of agency. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 1, 3-16.
- Boero, P. (1989). Mathematical literacy for all experiences and problems. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th PME International Conference*, 1, 62-76.

- Brown, M. (2002). Researching primary numeracy. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 1, 15-30.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1979). The development of addition and subtraction concepts in young children. En D. Tall (Ed.), *Proceedings of the 3rd PME International Conference*, 1, 40-46.
- Clarke, B., McDonough, A., & Sullivan, P. (2002). Measuring and describing learning: The early numeracy research project. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 1, 181-185.
- Cobb, P. (1994). A summary of four case studies of mathematical learning and small group interaction. En J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference*, 2, 210-218.
- Diezmann, C. M. (2000). The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 2, 241-248.
- Diezmann, C. M., Watters, J. J., & English, L. D. (2001). Difficulties confronting young children undertaking investigations. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 2, 353-360.
- English, L. D. (1996). Children's reasoning in solving novel problems of deduction. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 2, 329-336.
- English, L. D. (Ed.), (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.
- English, L. D. (2004). Promoting the development of young children's mathematical and analogical reasoning. En L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 210-215). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
- English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modeling with 9-year-olds. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 2, 297-304.
- Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. En E. Cohors-Fresenborg & I. Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the 2nd PME International Conference*, 148-176.
- Fischbein, E. (1983). Role of implicit models in solving elementary arithmetical problems. En R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th PME International Conference*, 2-18.
- Fox, G. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 2, 313-320.
- Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. L. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of teaching and learning algebra* (pp. 258-264). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

- Glaserfeld, E. von (1981). Things, pluralities, and counting. En C. Comiti & G. Vergnaud (eds.) *Proceedings of 5th International Conference on Psychology in Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 18-24). Grenoble, France: IMAG.
- Goldin, G. A.; Passantino, C. B. (1996). A longitudinal study of children's fraction representations and problem-solving behavior. En L Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 3, 3-10.
- Gray, E. M.; Pitta, D. (1996). Number processing: Qualitative differences in thinking and the role of imagery. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 3, 155-162.
- Gray, E. M.; Pitta, D. (1999). Images and their frames of reference: A perspective on cognitive development in elementary arithmetic. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 3, 49-56.
- Gray, E. M.; Tall, D.O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 2, 72-79.
- Gray, E. M.; Tall, D.O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 3, 65-72.
- Groves, S. (2002). Calculators — The first day. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 1, 98-109.
- Groves, S.; Doig, B. (2002). Developing conceptual understanding: The role of the task in communities of mathematical inquiry. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 3, 25-32.
- Harrison, B., Bye, M.P.; Schroeder, T.L. (1985). Pupil cognitive ability levels compared with curricular demands when six-to-eight-year-olds are taught arithmetic operations. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th PME International Conference*, 1, 210-215.
- Hershkowitz, R. (1999). Where in shared knowledge is the individual knowledge hidden? En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 1, 9-24.
- Irwin, K. (1990). Children's understanding of compensation, addition and subtraction in part-whole relationships. En G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference*, 3, 257-264.
- Irwin, K.C.; Ginsburg, H.P. (2001). Early mathematical discourse. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 3, 185-192.
- Janvier, C.; Bednarz, N. (1989). Representation and contextualization. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th PME International Conference*, 2, 139-146.
- Jones, G.A., Langrall, C.W., Thomson, C.A.; Nisbet, S. (2002). Elementary students' access to powerful mathematical ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of*

- international research in mathematics education* (pp. 113-141). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. En J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference*, 1, 3-27.
- Lesh, R. (1985). Conceptual analyzes of mathematical ideas and problem-solving processes. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th PME International Conference*, 2, 73-96.
- Lowrie, T.; Diezmann, C. (2005). Fourth-grade students' performance on graphical languages in mathematics. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 3, 265-272.
- Maher, C. (2002). How students structure their own investigations and educate us: What we've learned from a 14-year study. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 1, 31-46.
- McClain, K.; Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociocultural norms in one first grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 236-266.
- Mulligan, J.T., Mitchelmore, M.C., & Prescott, A. (2005). Case studies of children's development of structure in early mathematics: A two-year longitudinal study. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 4, 1-8.
- Mulligan, J.T., Prescott, A.; Mitchelmore, M.C. (2004). Children's development of structure in early mathematics. En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 3, 393-401.
- Nesher, P., & Greeno, J. G. (1981). Semantic categories of word problems reconsidered. En Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME International Conference*, 63-68.
- Nunes, T. (1989). Numeracy without schooling. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th PME International Conference*, 1, 164-171.
- Nunes, T. ; Schliemann, A. D. (1987). Manipulating equivalences in the market and in mathematics. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference*, 1, 289-294.
- Papic, M. (2005). The development of patterning in early childhood. En H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 1, 269.
- Perry, B.; Dockett, S. (2002). Young children's access to powerful mathematical ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 81-111). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
- Perry, B., Putt, I.J., Jones, G.A., Thornton, C.A., Langrall, C. W.; Mooney, E. S. (2000). Elementary school students' statistical thinking: An international perspective. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 4, 65-72.

- Pitta, D.; Gray, E.M. (1996). Nouns, Adjectives and Images in Elementary Mathematics. En L. Puig and G. Guitiérrez (Eds.), *Proceedings of XX International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 35-42). Valencia: Spain
- Pitta-Pantazi, D., Christou, C.; Gray, E., (2002). Mental representations in elementary arithmetic. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 4, 65-72.
- Richards, J. (1981). Pre-numerical counting. En Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME International Conference*, 1, 25-30.
- Sáenz-Ludlow, A. (2003). An interpreting game in a third grade classroom. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 79-87.
- Schliemann, A., Carraher, D.W., Brizuela, B.M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 127-134.
- Selva, A.C.V., Da Rocha Falcão, J.T.; Nunes, T. (2005). Solving additive problems at pre-elementary school level with the support of graphical representation. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 4, 161-168.
- Sinclair, H. (1987): Constructivism and the psychology of mathematics. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference*, 1, 28-41.
- Spinillo, A.G. (1997). Chance estimates by young children: Strategies used in an ordering chance task. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International PME Conference*, 4, 182-189.
- Steffe, L.P. (1981). Operational counting and position. En Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME International Conference*, 1, 12-17.
- Steffe, L.P. (1984). Children's prenumerical adding schemes. En B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy, & K. Collis (Eds.), *Proceedings of the 8th PME International Conference*, 313-327.
- Tabach, M.; Hershkowitz, R. (2002). Construction of knowledge and its consolidation: A case study from the early-algebra classroom. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 4, 265-272.
- Thomas, N., Mulligan, J.T.; Goldin, G.A. (2002). Children's representations and cognitive structural development of the counting sequence 1-100. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 117-133.
- Vergnaud, G. (1978). The Acquisition of Arithmetical Concepts. En *Proceedings of the 2nd PME Conference*, vol. 1, pp. 344-355.

- Vergnaud, G. (1981): Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. En *Proceedings of the 5th PME Conference*, vol. 2, pp. 7-17
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (1982), *Addition and subtraction. A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press Inc.
- Vergnaud, G. (1987). About constructivism. En *Proceedings of the twelfth Conférence for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 42-54). Montréal.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 305-312. Melbourne: PME.

2.2 Trabajos relacionados con la TSD

- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en Educación Matemática. ¿Qué nos ofrece hoy la Didáctica de la Matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, 16 (003), 5-28.
- Berthelot, R. ; Salin M.H. (1992), *L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Bordeaux.
- Berthelot, R.; Salin M.H. (1999-2000). *L'enseignement de l'espace à l'école primaire*. *Grand N*, 65, 37-59.
- Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Tesis doctoral. Ladist. Université Bordeaux I.
- Briand, J.; Loubet, M.; Salin, M.H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle* [Cédérom]. Paris : Hatier. 1 cédérom + 1 notice (15 p.). Hatier pédagogie.
- Brousseau, G. (1973), Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels ? *Actes du 3e congrès des sciences de l'éducation « Apports des disciplines fondamentales aux sciences de l'éducation »* (Vol. 1, pp. 361-378). Paris: EPI
- Brousseau, G. (2000). Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 9. Disponible en: <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm>.

- Brousseau, G. (2001), Les grandeurs dans la scolarité obligatoire, *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, (Corps) version courte 331-348, version longue, CDrom (43p) La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorzal. Traducción de Fregona, D.
- Brousseau, G. (2010) Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N*, 85, pp. 13 - 41
- Brousseau, G. ; Foucaud, R. (1992). Situations didactiques pour l'apprentissage des nombres naturels. IREM de Bordeaux. (http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/51/51/11/PDF/Situations_didactiques_pour_l_apprentissage_des_nombres_naturels.pdf) (Recuperado el 8 de junio de 2011)
- Chamorro, C. (1997), *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- El Bouzaoui, H. (1982) *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération*. Thèse d'Université, Bordeaux 1.
- Ermel (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. Cycle Élémentaire . tome 2. Sermap O.C.D.L., París.
- Ermel (1981). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. Cycle Moyenne. tome 1. Sermap Hatier, París.
- Espinoza, L.; Barbé, J. (2006). El problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Básica Chilena: la “Estrategia de Asesoría a la escuela en la implementación curricular LEM-Matemática” como una vía de abordaje. *Actas del I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Baeza (España).
- Peres J. (1984), *Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire : Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle* ; Thèse de 3^{ième} cycle Université Bordeaux II, publié par IREM de Bordeaux
- Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Tesis de doctorado, DIECINVESTAV-IPN, México.
- Orús, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Tesis Doctoral. Université de Bordeaux.
- Salin, M.H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la escuela elemental. En *Números, formas y volúmenes en el entrono del niño* (pp. 37-80). Madrid: Instituto Superior de Formación del Profesorado, Ministerio de Educación y Ciencia.

2.3 Trabajos relacionados con el EOS

- Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación matemática*, 11, 59-77.
- Godino, J.D., Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME*, 9 (Especial), 133-156.
- Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M. R.; Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número? *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 34-46.
- Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265. DOI 10.1007/s10649-010-9278-x (Versión preliminar en español en <http://www.ugr.es/~batanero/>)

2.4 Trabajos relacionados con la TAD

- Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2), 205-250.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). La Pensée Sauvage : Grenoble.
- Chevallard, Y. (1985/1991). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble (2ª edición 1991).
- Gascón, J. (2001) Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *RELIME*, 4 (2), pp.129-159.
- Gascón, J. (2010) Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 9-35 (Recuperable en http://www.fisem.org/web/union/revistas/22/Union_022_005.pdf)
- Ruiz-Higueras, L. & García. F.J. (2011), Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Relime*, 14 (1), 41-70.
- Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis Doctoral. UCM. Madrid. Recuperable en <http://www.ucm.es/BUCM/tesis/edu/ucm-t%2029075.pdf> (Última consulta realizada el 12/06/2011)
- Sierra, T.A., Bosch, M. & Gascón, J. (en prensa). La formación matemático-didáctica del maestro de educación infantil: El caso de “enseñar a contar”. *Revista de Educación. MEC*. http://www.revistaeducacion.mec.es/doi/357_059.pdf (Última consulta realizada el 12/06/2011)

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Font, V.

Universitat de Barcelona

La Dra. Mar Moreno, coordinadora del seminario *Investigación en Didáctica de las Matemáticas por niveles educativos*, propuso a los ponentes hacer una reflexión de lo que ha supuesto la investigación didáctica en los últimos 20 años en los diferentes niveles educativos. Sugirió las siguientes preguntas alrededor de las cuales organizar las diferentes ponencias y a las que se debería intentar dar respuesta:

- ¿La investigación en Educación Matemática en cada nivel educativo ha sido un largo camino paralelo a las demandas del sistema educativo?
- ¿Cuáles son algunas de las aportaciones más relevantes de la investigación en Educación Matemática a la investigación y al sistema educativo?
- ¿Las actuales agendas de investigación en cada nivel educativo en qué medida atienden/se preocupan de las demandas y necesidades actuales del sistema educativo?

Se trata de preguntas que tienen un cierto territorio compartido por lo que, en esta ponencia que corresponde al nivel de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), voy a contestar brevemente a las dos primeras preguntas y voy a extenderme en la contestación a la tercera.

1. PRIMERA PREGUNTA

Con relación a la primera pregunta mi opinión, coincidente con otros investigadores, es que los caminos que siguen la investigación en Educación Matemática y las demandas del sistema educativo son caminos diferentes que, metafóricamente, podemos considerar como paralelos. El paralelismo se manifiesta, entre otros aspectos, en la existencia de revistas de profesores y revistas de investigadores o en la existencia de congresos para investigadores, por ejemplo los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), y congresos de profesores, por ejemplo las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).

Si pretendemos responder a la pregunta ¿cuáles son los problemas más importantes a los que se enfrenta en la actualidad la investigación en Educación Matemática?, debemos dirigir la atención hacia los congresos importantes de esta área de investigación, por ejemplo el PME, en los que los asistentes no son, mayoritariamente, docentes de escuelas de primaria o institutos de secundaria, sino investigadores de universidades, y los trabajos que presentan suelen ser investigaciones didácticas o bien desarrollos de marcos teóricos.

Si nos fijamos en el sector del sistema educativo formado por los profesores que participan en congresos de profesores y nos preguntamos ¿a qué problemas se enfrenta este tipo de profesorado de matemáticas y cómo los intenta solucionar?, vemos que los profesores que participan en estos congresos presentan, sobre todo, experiencias

innovadoras. Se trata de presentaciones de procesos de instrucción realizados en sus centros educativos que destacan el uso de nuevos materiales didácticos, métodos, estrategias, etc. Son experiencias de procesos de instrucción cumplidos o en etapas de desarrollo que no involucran cambios macroestructurales.

2. SEGUNDA PREGUNTA

Hay momentos en que el paralelismo deja paso a la convergencia, lo cual nos lleva a la segunda pregunta. La convergencia se manifiesta en que las experiencias innovadoras realizadas por los profesores en los centros de secundaria implican una reflexión, la formulación de preguntas y el uso de determinadas técnicas de recogida de la información, es decir, tienen elementos de una investigación didáctica. Es en la reflexión sobre la propia práctica donde al profesor le pueden ser útiles algunos de los constructos teóricos elaborados por la investigación en Educación Matemática. Otro aspecto, además de la reflexión sobre la propia práctica, donde la investigación ofrece aportes al sistema educativo es en la formación inicial y continua de profesores. Por ejemplo, en la Universitat de Barcelona el constructo *criterios de idoneidad*, propuesto por el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), nos está resultando muy útil en la formación inicial de futuros profesores de secundaria de matemáticas (Font, 2011).

Otro aspecto donde la investigación en Educación Matemática, y en general toda la investigación educativa, afecta a la vida del docente y al sistema educativo es en el momento que la investigación, realizada durante un periodo largo de tiempo, se convierte en el motor de alguna reforma del sistema educativo —un ejemplo paradigmático es el uso del constructivismo como base psicopedagógica de la LOGSE—. En estos casos, probablemente en lugar de hablar de aporte o convergencia, que tiene connotaciones positivas, sería mejor hablar de efectos sobre el docente y sobre el sistema educativo.

3. TERCERA PREGUNTA

Con relación a la tercera pregunta voy a hacer primero una delimitación de los dos elementos que intervienen y a continuación comentaré cómo la investigación ha respondido a las diferentes demandas del sistema educativo en el nivel de la ESO.

3.1 Investigación y sistema educativo

En este apartado voy a delimitar lo que voy a entender por investigación en Educación Matemática y por sistema educativo. Por investigación en Educación Matemática voy a entender las ponencias y comunicaciones presentadas en los Simposios SEIEM cuyas actas están en formato electrónico en la página web de esta sociedad. Por demandas del sistema educativo voy a entender las que he tenido yo como profesor que ha impartido clases, durante 23 años, en la franja de edades correspondientes a la ESO, en calidad de representante de un grupo de profesores que ha tenido un desarrollo profesional similar al mío.

Investigación en Educación Matemática

He optado por delimitar la investigación en Educación Matemática a las ponencias y comunicaciones presentadas a los Simposios SEIEM, entre otras razones, para complementar la información de otras ponencias de simposios anteriores que han optado por acotar la investigación a las tesis doctorales (Torralbo, Vallejo y Fernández, 2003) o bien a los artículos de revistas de impacto (Llinares, 2008; Planas, 2010) —por ejemplo, Llinares (2008) caracteriza la investigación en Educación Matemática realizada en España mediante los artículos publicados en revistas que aparecen en los listados del “ISI-web of knowledge” y del “European Reference Index for the Humanities” (ERIH) del European Science Foundation en el periodo 2000-2008, completando la revisión de las revistas evaluadas por CONACYT-México—. En la revisión se han excluido las comunicaciones presentadas a los grupos de trabajo de los Simposios SEIEM.

Un aspecto importante que tuvo que ser analizado y resuelto estaba relacionado, por una parte, con las comunicaciones y ponencias en las que se presentaban investigaciones realizadas en otros países, pero en una etapa educativa de edades similares a la ESO y, por otra parte, con el XII Simposio realizado en Badajoz, porque se efectuó conjuntamente con la Associação de Professores de Matemática de Portugal y la Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de la Educação. Su inclusión quizás podría originar distorsión en los resultados, pero por otra parte eran investigaciones que en cierta manera estaban relacionadas con algunas de las demandas de nuestro sistema educativo. La decisión final ha sido la de incluir todos los documentos de los simposios.

Para cada comunicación o ponencia he considerado el año, el tipo de presentación, el nombre del primer autor, el título, el nivel, la metodología y, en algunos casos, el área de investigación. Por razones de espacio, estas comunicaciones y ponencias aparecen en las tablas de esta ponencia pero no en las referencias bibliográficas.

Con relación a la variable nivel he considerado los siguientes valores: ESO, Equivalente, FPSM y Transición. En el valor ESO incluyo las investigaciones realizadas con alumnos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y también las realizadas con alumnos de EGB y BUP de edades comprendidas entre 12 y 16 años. En el valor Equivalente incluyo las investigaciones realizadas en otros países con alumnos de las mismas edades que los alumnos de la ESO. En el valor Formación de Profesores de Secundaria (FPSM) incluyo (1) investigaciones realizadas en el contexto de las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas impartidas en las facultades de matemáticas y (2) investigaciones sobre la formación inicial del profesor de secundaria. En el valor Transición se han incluido (1) las investigaciones sobre la transición entre la primaria y la secundaria y entre la secundaria obligatoria y el bachillerato y (2) las investigaciones que estudian la evolución de la comprensión (o los perfiles) de un tópico en los estudiantes de diferentes etapas educativas.

Con relación a la variable método he considerado los siguientes valores: cuantitativa (Cuan) si hay uso de estadística descriptiva y/o inferencial, predominio de variables cuantitativas, etc.; mixta (Mix), si hay uso de variables cualitativas y cuantitativas, con recuentos de frecuencias en muestras o poblaciones; cualitativa (Cual), cuando se trata de estudio de casos, etc.; y teórica o ensayo (Teo/Ensy). En algún caso se asignan dos valores para esta variable. Por ejemplo, a una ponencia que realiza una reflexión teórica

pero utiliza como contexto de reflexión una investigación de tipo cualitativa se le pueden asignar dos valores: teórica o ensayo y cualitativa.

Con relación a la variable área de investigación he utilizado como valores los nombres de los siguientes grupos de trabajo de la SEIEM: Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria; Pensamiento Numérico y Algebraico; Didáctica del Análisis; Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor; Aprendizaje de la Geometría y Otra. Este último valor para las comunicaciones que eran difíciles de encajar en las temáticas de los grupos de trabajo de la SEIEM acabados de citar. En algunos casos, la ponencia o comunicación trata sobre una problemática general utilizando un determinado contenido matemático como contexto de reflexión. En este caso, se ha utilizado el contenido del contexto de reflexión para asignarle el valor de la variable área de investigación.

Sistema educativo

El término sistema educativo se presta a diferentes interpretaciones que están relacionadas con la manera de entender las relaciones entre las instituciones y las personas en las que se encarna dichas instituciones. Fundamentalmente hay tres puntos de vista sobre la manera de entender esta relación, que en la sociología (Flecha, Gómez y Puigvert, 2001) se suelen calificar como: 1) punto de vista sistémico, 2) punto de vista de los sujetos y 3) el punto de vista de los sistemas y los sujetos (dual). El primero pone el énfasis en la institución, el segundo dirige su atención primero a los sujetos y deja en segundo plano a la institución. El tercero hace hincapié en ambos aspectos: instituciones y personas.

Según el punto de vista sistémico para caracterizar el sistema educativo (Chevallard, 1997), podríamos comenzar hablando de sistemas didácticos, después de sistema de enseñanza, que reúne el conjunto de sistemas didácticos. Después del entorno del sistema de enseñanza. En este entorno, de una gran complejidad, están los matemáticos, los padres y las autoridades educativas.

Según el punto de vista de los sujetos, si queremos saber las demandas del sistema educativo, debemos preguntar a las personas que protagonizan el proceso de enseñanza-aprendizaje ya que las personas, y no las instituciones, son los protagonistas reales dicho proceso. Según el punto de vista dual hay que tener en cuenta tanto los aspectos institucionales como a los sujetos que encarnan estas instituciones. En este caso, el conocimiento de los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje es tan importante como los aspectos institucionales.

En esta ponencia he optado por el punto de vista más relacionado con el punto de vista de los sujetos y el punto de vista dual puesto que por demandas del sistema educativo voy a entender las que he tenido yo como profesor de la ESO, en calidad de representante de un grupo de profesores que ha tenido un desarrollo profesional similar al mío.

Las razones para tomar esta opción son (1) que durante 23 años yo he encarnado al sistema educativo en la franja de edades correspondiente a la ESO y (2) dado que la profesión de profesor de matemáticas es bastante homogénea con relación a los problemas que debe afrontar, los problemas y demandas de un profesor concreto están relacionadas con los de una parte importante de la profesión. Por tanto, mi caso es parecido al de un numeroso grupo de profesores cuya edad está entre 50-60 años y que

ha tenido un desarrollo profesional similar al mío. Una tercera razón es que creo que probablemente el punto de vista sistémico será el adoptado por alguno de los otros ponentes.

3.2 Demandas del sistema educativo

A continuación voy a intentar hacer una ruta del desarrollo profesional de este colectivo de profesores, en el cual me incluyo, y voy a relacionar sus demandas con los resultados ofrecidos por las diferentes agendas de investigación en forma de comunicaciones y ponencias presentadas a los Simposios SEIEM.

Un aspecto importante, que tuvo que ser analizado y resuelto, estaba relacionado con el hecho de que se han tenido en cuenta varias demandas del sistema educativo y que, en muchos casos, una misma comunicación o ponencia estaba relacionada con varias de las demandas consideradas. Por razones de espacio, cada comunicación o ponencia aparece relacionada sólo con una demanda, aquella con la que, en mi opinión, más se relaciona. Dicho de otra manera, si en esta ponencia me hubiese centrado en una sola demanda, por ejemplo en la necesidad de incorporar las TIC, algunas de las comunicaciones que en este trabajo aparecen relacionadas con otras demandas —entre otras, las comunicaciones de Fiallo y Gutiérrez (2007), Murillo y Marcos (2007), Pérez y Guillén (2008), López y Guillén (2009)— se considerarían relacionadas con ella.

Primera demanda: herramientas para analizar las diferentes maneras de organizar el contenido matemático

Este grupo de profesores que estoy considerando tuvo una formación formalista y comenzó su experiencia profesional siguiendo el modelo de sus profesores de universidad, sin cuestionarse la idoneidad de este tipo de enseñanza. Se dedicaron a explicar los contenidos matemáticos de manera magistral, descontextualizada y de manera deductiva (que por cierto, también era la forma de presentación de los contenidos en la mayoría de los libros de texto).

Las dificultades que tuvieron al seguir, en sus primeros años como profesores, el modelo formalista les llevó al convencimiento de que tenían que cambiarlo y buscar una organización de las matemáticas a enseñar diferente a la formalista. Lo hicieron básicamente en dos direcciones opuestas. Algunos optaron por seguir enseñando teorías acabadas, pero sin demostrarlas deductivamente, focalizando el trabajo en el aula en el dominio de las técnicas algorítmicas que se derivaban de la teoría. Otros optaron por una alternativa basada en: 1) enseñar las matemáticas a partir de la resolución de problemas y 2) hacer ver a los alumnos que las matemáticas se podían aplicar a situaciones de la vida real. Se trataba en definitiva de pasar de enseñar teorías matemáticas acabadas a enseñar a "hacer matemáticas" y de ofrecer una imagen de las matemáticas con capacidad de responder a la pregunta "esto para qué sirve".

En lo que sigue voy a centrarme en el profesorado que optó por enseñar una matemática realista, como fue en mi caso. Este profesorado, para el diseño e implementación de unidades didácticas contextualizadas, tuvo que estudiar por su cuenta unas matemáticas diferentes a las matemáticas modernas que había estudiado en la facultad. Necesitó saber cuáles eran las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, cuáles fueron los problemas que originaron los objetos matemáticos que tenía que enseñar, etc. Esta

necesidad de formación le llevó a estudiar cursos de formación permanente relacionados con las aplicaciones de las matemáticas (por ejemplo, astronomía) cursos de historia de las matemáticas e incluso cursos de filosofía de las matemáticas.

En este desarrollo profesional que se acaba de esbozar se observa una demanda de herramientas para analizar diferentes modelos de organización del contenido matemático a enseñar. Con relación a esta demanda, hay que resaltar el seminario *El análisis didáctico matemático como conjunto de medios para comprender y organizar los fenómenos de la Educación Matemática* del X SEIEM coordinado por el Dr. José Luis González Marí; el seminario *La investigación histórica en Didáctica de la Matemática* del VII SEIEM, coordinado por el Dr. Bernardo Gómez y el seminario *Análisis de libros de texto* del XIII SEIEM, coordinado por el Dr. Modesto Sierra.

En mi opinión, ésta es una de las demandas del sistema educativo que mejor se ha satisfecho desde la investigación en el área de Educación Matemática, ya que se han desarrollado herramientas para el análisis de los libros de texto y, más en general, para el análisis didáctico de procesos de instrucción, que incluye el análisis del contenido matemático. Sin pretender ser exhaustivo, algunas de dichas herramientas son:

- 1) Las tres dimensiones para el análisis del contenido, como procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto, propuestas en la ponencia de Gómez (2006), y utilizados con cierta regularidad en los trabajos del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA): estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (situaciones-problemas).
- 2) El constructo praxeología utilizado con regularidad en los trabajos que usan como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).
- 3) El constructo configuración epistémica utilizado con regularidad en los trabajos que usan como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS)
- 4) Uso de textos clásicos de historia de las matemáticas con el fin de elaborar secuencias didácticas. Por ejemplo, Puig (2003) y Gallardo y Torres (2005) se sitúan en esta línea en sus trabajos sobre historia de las ideas algebraicas.
- 5) Las propuestas de análisis históricos de manuales —por ejemplo, Gómez (2009) utiliza el análisis epistemológico para estudiar la ambigüedad del signo radical, mientras que Maz (2009) aplica el análisis conceptual y del contenido al concepto de número en libros españoles de los siglos XVIII y XIX— y, más en general, las propuestas para el análisis y valoración de libros de texto como el que proponen Monterrubio y Ortega (2009).
- 6) Propuestas para el análisis del contenido matemático de tópicos concretos como, por ejemplo, la propuesta de clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional de Lonjedo y Cerdán (2004) o los criterios específicos para la geometría de Guillén, González y García (2009).

Si bien en muchas de las ponencias y comunicaciones presentadas en los diferentes Simposios SEIEM se hace, en mayor o menor medida, un análisis del contenido matemático de procesos de instrucción o de libros de texto, las siguientes, en mi opinión, se relacionan en mayor medida con esta demanda:

Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel	Área
2001	C	Gómez, P.	Desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación	Cual	FPSM	Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor
2003	P	Puig, L.	Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa	Teo/Ens y	No pertinente	Pensamiento N. y A.
2003	P	Furinghetti, F.	Storia della matematica per insegnanti e studenti	Teo/Ens y	No pertinente	Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor
2004	C	Lonjedo, M ^a A.	Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos	Teo/Ens y	No pertinente	Didáctica de la Estadística, P. C.
2004	C	Maz, M.	Concepto de cantidad, número y número negativo durante la época de influencia jesuita en España (1700-1767)	Teo/Ens y Mix	No pertinente	Pensamiento N. y A.
2005	C	Gallardo, A.	El álgebra aritmética de George Peacock: un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica	Teo/Ens y	No pertinente	Pensamiento N. y A.
2006	C	Gallardo, A.	La negatividad permitida: George Peacock en la historia y en la enseñanza	Teo/Ens y	No pertinente	Pensamiento N. y A.
2006	P	Gómez, P.	Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria	Teo/Ens y	FPSM	Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor
2006	P	Godino J. D.	Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las	Teo/Ens y	No pertinente	Didáctica del análisis

			matemáticas			
2006	P	Gallardo, J.	El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática	Teo/Ens y	No pertinente	Pensamiento N. y A.
2008	C	Serradó, A.	Los sucesos aleatorios: tendencias en los libros de texto	Cual	ESO	Didáctica de la Estadística, P. C.
2009	P	Maz Machado, A.	Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas	Teo/Ens y	No pertinente	Pensamiento N. y A.
2009	P	Gómez, B.	El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas	Teo/Ens y	ESO (4º)	Pensamiento N. y A.
2009	P	Monterrubio, M. C.	Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones	Teo/Ens y	No pertinente	Otra
2009	P	Bosch	Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria	Teo/Ens y	FPSM	Pensamiento N. y A.
2009	C	Guillén, G.	Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución	Teo/Ens y Mix	ESO (1º y 3º)	Didáctica de la Geometría
2009	C	Quispe, W.	Una aproximación a la comprensión de la fracción en Perú a través de los libros e texto	Cual	Equivalentes (Perú)	Pensamiento N. y A.
2010	C	García, M. A.	Aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en la eso a libros de texto de tres editoriales	Mix	ESO (1º, 2º y 3º)	Aprendizaje de la Geometría
2010	C	Salinas, S.	El uso de la historia de las matemáticas para el	Cual	Equivalentes	Aprendizaje de la

			aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato		(México)	Geometría

Tabla 1. Primera demanda

Segunda demanda: ¿cómo se produce la emergencia de los objetos matemáticos a partir de contextos extramatemáticos?

Con el tiempo, y a partir de la reflexión sobre su propia práctica, el profesorado que estoy considerando llegó al convencimiento de que la estructura que debía tener una unidad didáctica era la siguiente: a) problemas contextualizados extramatemáticos introductorios, b) desarrollo de la unidad didáctica con problemas contextualizados extramatemáticos de aplicación intercalados y c) problemas contextualizados extramatemáticos de consolidación. Los problemas contextualizados extramatemáticos introductorios se proponían al inicio de la unidad didáctica con el objetivo de que sirvieran para la construcción de los objetos matemáticos que se iban a estudiar. En este caso, no se trataba tanto de aplicar conocimientos matemáticos acabados de estudiar, sino que el objetivo era presentar una situación del mundo real que el alumno pudiese resolver con sus conocimientos previos (matemáticos y no matemáticos). Su principal objetivo era facilitar la construcción, por parte de los alumnos, de los conceptos matemáticos nuevos que se iban a estudiar en la unidad didáctica. Los problemas contextualizados de aplicación y de consolidación tenían por objetivo, por una parte, aplicar los conocimientos matemáticos adquiridos y, por otra parte, que los alumnos viesen las aplicaciones de las matemáticas al mundo real.

La metodología implícita de este tipo de unidades era la siguiente: el profesor proponía problemas que los alumnos habían de intentar resolver (normalmente en grupo). En el proceso de puesta en común de las soluciones, además de resolver los problemas, se iban construyendo los conceptos de la unidad. Estos conceptos se relacionaban y organizaban para ser primero aplicados a ejercicios y después ser utilizados en la resolución de problemas contextualizados extramatemáticos más complejos.

Puesto que se pretendía que los conceptos, propiedades y procedimientos surgiesen a partir de generalizaciones y de procesos de abstracción adecuados a la edad de los estudiantes, la argumentación deductiva era casi inexistente. El tipo de argumentación que se utilizaba era de tipo inductivo o abductivo —en la que tenía un papel importante la visualización, por ejemplo utilizando gráficas de funciones—. Otro aspecto a destacar es que este tipo de unidades didácticas incorporaba de manera explícita pocas propiedades puesto que no se tenía como objetivo caracterizar la estructura del conjunto de objetos matemáticas que se estaba estudiando (grupo, anillo, espacio vectorial, etc.).

El profesorado que estoy considerando profundizó en esta línea de trabajo, lo cual le llevó a participar incluso en algunas experiencias interdisciplinares (Núñez y Font, 1995) en las que los contextos extramatemáticos que se debían modelizar pasaban a ser lo más importante, y no se limitaban a ser usados de manera parcial a fin y efecto de hacer emerger el objeto matemático que interesaba.

Las matemáticas que se pretendían enseñar eran configuraciones epistémicas contextualizadas (Font y Godino, 2006) que daban un papel preponderante a las situaciones problemas de contextos extramatemáticos y estaban claramente enfocadas a

la emergencia de nuevos objetos matemáticos; y, por tanto, se asumía explícita o implícitamente un cierto constructivismo psicológico. Estas configuraciones (empíricas, contextualizadas, realistas, intuitivas, etc.,...) presuponían, además, una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales. Por otra parte, también presuponen que “saber matemáticas” incluye la competencia para aplicar las matemáticas a situaciones extramatemáticas de la vida real.

La enseñanza de unas matemáticas de este tipo da pie a una extensa lista de cuestiones relevantes que deben ser investigadas. Por ejemplo, dado que se adopta un cierto constructivismo, preguntarse cómo se realiza esta construcción y el papel que juega en ella la intuición se convierte en una sugerente agenda de investigación para la Educación Matemática. Las configuraciones epistémicas contextualizadas dan pie, además, a otras cuestiones relevantes que deberían ser objeto de investigación. Por ejemplo, en Font y Godino (2006) se proponen las siguientes cuestiones: ¿qué características han de cumplir los problemas contextualizados, ¿cómo se consigue la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos?, ¿con las configuraciones contextualizadas se consigue que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas contextualizados en otras materias o en ámbitos no escolares?, ¿es posible en las instituciones de secundaria implementar configuraciones epistémicas contextualizadas que permitan una actividad de modelización “rica”?, ¿qué competencias necesitan los profesores para diseñar e implementar este tipo de configuraciones epistémicas?, ¿cómo se relacionan este tipo de configuraciones epistémicas con las formales y qué dificultades tienen los alumnos en la transición entre estos dos tipos de configuraciones epistémicas?

La lista de cuestiones a investigar relacionadas con las configuraciones epistémicas contextualizadas es tan extensa y tan relevante que en mi opinión la investigación didáctica realizada y presentada en los diferentes Simposios SEIEM sólo ha contestado aspectos parciales de algunas de estas preguntas.

Tal como se ha dicho, el enfoque contextualizado, al adoptar un cierto constructivismo, plantea la necesidad de investigar cómo se realiza la construcción del conocimiento matemático en el proceso de instrucción, lo cual lleva a numerosas preguntas de investigación, como por ejemplo: ¿cómo intervienen los conocimientos previos en la construcción del conocimiento matemático?, ¿qué papel juega en el aprendizaje significativo de un determinado contenido (funciones, etc.) la intuición y el rigor?, ¿qué papel juegan los razonamientos inductivos, abductivos, intuitivos etc. en la construcción del conocimiento matemático?, ¿qué papel juegan los diferentes registros de representación en la emergencia del objeto matemático?, ¿qué papel juegan los aspectos individuales, sociales y culturales en la construcción del conocimiento matemático en el aula?, ¿cómo se relaciona el tipo de interacción social con la construcción del conocimiento matemático?, ¿cómo se desarrollan e integran los esquemas cognitivos de los alumnos cuando aprenden un determinado contenido matemático?

Las siguientes comunicaciones y ponencias, en mi opinión, se relacionan en mayor medida con esta demanda de investigar cómo se realiza la construcción del conocimiento matemático en el proceso de instrucción:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel	Área
1998	P	Lacasta, E.	Funcionamiento de las gráficas de funciones en el sistema didáctico	Teo/Ensy Cuan	ESO (1º EGB y 2º BUP)	Didáctica del Análisis
1999	P	Castro, E.	Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales	Teo/Ensy Cual	ESO (1º y 8º EGB)	Pensamiento N. y A.
1999	P	Gómez, B.	Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales	Teo/Ensy	ESO (1º y 8º EGB)	Pensamiento N. y A.
1999	P	Giménez, J.	Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales	Teo/Ensy	ESO (1º y 8º EGB)	Pensamiento N. y A.
2000	P	Romero, I.	Representación y comprensión en pensamiento numérico	Teo/Ensy Cual	ESO	Pensamiento N. y A.
2000	P	Fortuny, J. M.	Desarrollo de técnicas interactivas de autorización y formación. Aplicación a situaciones especiales de educación matemática	Teo/Ensy Cual	ESO (4º)	Aprendizaje de la Geometría.
2001	P	Sáenz, C.	Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas	Teo/Ensy Mix	ESO (4º)	Otra (demostración versus intuición)
2001	P	Etchegaray, S.	Análisis de significados personales e institucionales: el problema de su compatibilización	Cual	ESO (7º 8º de EGB)	Pensamiento N. y A.

2002	P	Galán , E.	Los mapas conceptuales en educación matemática: antecedentes y estado actual de la investigación	Teo/Ensy Cual	FPSM	Otra (Evaluación)
2003	C	Casas, L. M.	Redes asociativas Pathfinder y teoría de los conceptos nucleares. Aportaciones a la investigación en didáctica de las matemáticas	Cual	ESO (3º y 4º)	Aprendizaje de la Geometría.
2006	C	Salinas, J.	Estudio exploratorio sobre el uso de herramientas culturales para la enseñanza de la demostración en la geometría euclidiana	Cual	Equivalente (México)	Aprendizaje de la Geometría.
2007	P	Carvalho, C.	Desafios para o trabalho colaborativo nas aulas de estatística	Teo/Ensy Cual	Equivalente (Portugal)	Didáctica de la Estadística, P. C.
2007		Gualdrón, E.	Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza	Mix	Equivalente (Colombia)	Aprendizaje de la Geometría.
2008		Matos, A.	Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória	Cual	Equivalente (Portugal)	Pensamiento N. y A.
2008		Nunes, M.	O sentido do símbolo na aprendizagem da álgebra em alunos do 7ºano de escolaridade	Cual	Equivalente (Portugal)	Pensamiento N. y A.
2009	C	Pecharrom án	Diseño de un marco de investigación. Aplicación al	Teo/Ensy Cual	ESO (3º y 4º)	Didáctica del Análisis

			proceso de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones			

Tabla 2. Segunda demanda (construcción del conocimiento matemático)

Una de las cuestiones más relevantes que plantean las configuraciones epistémicas contextualizadas a la investigación en Educación Matemática es determinar el papel que juegan los contextos extramatemáticos en el proceso de construcción del conocimiento matemático y cómo se relacionan con los contextos intramatemáticos, lo cual lleva a numerosas preguntas de investigación, entre otras: ¿qué características han de cumplir los problemas de contextos extramatemáticos?, ¿cómo se consigue la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos extramatemáticos?, ¿con las configuraciones epistémicas contextualizadas se consigue que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas contextualizados en otras materias o en ámbitos no escolares?, ¿el uso de contextos extramatemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje facilita o dificulta la comprensión de los alumnos?, ¿el uso de contextos extramatemáticos sirve para motivar (frustrar) a los alumnos?, ¿qué papel juegan los conocimientos previos de los contextos extramatemáticos que tienen los alumnos?, ¿qué relaciones se establecen entre los contextos extramatemáticos y los intramatemáticos?, ¿la enseñanza con el enfoque contextualizado consume más tiempo que la enseñanza descontextualizada?

Las siguientes comunicaciones y ponencias, en mi opinión, se relacionan en mayor medida con esta demanda de determinar el papel que juegan los contextos extramatemáticos en el proceso de construcción del conocimiento matemático:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel	Área
2000	P	Bruno, A.	Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos	Teo/Ensy Cual	ESO (7º EGB 2º ESO)	Pensamiento N. y A.
2005	C	Lonjedo, Mª A	La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema	Mix	ESO (4º)	Didáctica de la Estadística, P. C.
2006	C	Contreras, M.	Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones	Cual	ESO (3ª)	Pensamiento N. y A.
2007	C	Lonjedo, Mª A	Análisis del comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas <i>isomorfos</i> de probabilidad condicional	Mix	ESO (4º)	Didáctica de la Estadística, P. C.

2009	C	Carles, M.	Influencia de la estructura y del contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0 . Un estudio de caso	Mix	ESO (4º)	Didáctica de la Estadística, P. C.
2009	C	Espinel, _Mª C.	Un estudio sobre la competencia de los alumnos en el manejo de tablas para la resolver situaciones cotidianas	Mix	ESO (3ª y 4º)	Otra (Matemática discreta)
2010	C	Gallardo, A.	La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria. un estudio de caso	Cual	Equivalente (México)	Pensamiento N. y A.
2010	C	López, L.	Exploración con espejos y enseñanza/aprendizaje de la geometría en la educación secundaria obligatoria. Sobre la actuación de la profesora y la transferencia de procedimientos	Cual	ESO (3º)	Aprendizaje de la Geometría

Tabla 3. Segunda demanda (papel del contexto en la construcción del conocimiento matemático)

Otra cuestión relevante es contestar a la pregunta ¿es posible en las instituciones de secundaria implementar configuraciones epistémicas contextualizadas que permitan una actividad de modelización “rica”? Las siguientes comunicaciones y ponencias, en mi opinión, se relacionan en mayor medida con esta pregunta:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método *	Nivel**	Área
2007	C	García, F. J.	El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria	Teo/Ensy	ESO (4º)	Pensamiento N. y A.
2010	C	Ruiz, N.	La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria	Teo/Ensy Cual	ESO (4º)	Pensamiento N. y A.

Tabla 4. Segunda demanda (matemáticas contextualizadas y modelización rica)

Tercera demanda: conocimiento de las dificultades de comprensión de los contenidos matemáticos

Esta nueva manera de organizar el contenido matemático a enseñar le permitió al profesorado que estoy considerando resolver su problema personal de cómo enseñar las matemáticas. Esta seguridad le llevó a integrarse más en la institución escolar en la que

impartía sus clases y también a participar en diferentes asociaciones profesionales de profesores. Fue ganando en experiencia y aumentó su interés por conocer las dificultades de aprendizaje de sus alumnos y maneras de superarlas. Con el tiempo, generó una serie de creencias y conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y sobre las dificultades de los alumnos que podríamos calificar de “conocimiento generado a partir de la propia práctica”. Aumentó mucho su conocimiento sobre el diseño y gestión de secuencias didácticas y sobre los errores y dificultades que tenían sus alumnos para aprender determinados objetos matemáticos.

Si bien en muchas de las ponencias y comunicaciones presentadas en los diferentes Simposios SEIEM se hace, en mayor o menor medida, reflexiones sobre dificultades de comprensión de los alumnos de ESO (o bien de estudiantes para profesor de secundaria, en tanto que sus dificultades pueden ser causa de dificultades en sus futuros alumnos), las siguientes comunicaciones y ponencias, en mi opinión, se relacionan en mayor medida con esta demanda al investigar: 1) niveles de comprensión de los alumnos para un determinado contenido matemático, 2) rendimiento de los alumnos según el contenido matemático, 3) la caracterización de dificultades y sus causas, y, en algún caso, 4) los métodos de enseñanza que permiten superarlas:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel	Área
2002	P	Scaglia, S.	Investigación en el aula. Las decisiones condicionan las interacciones	Teo/Ensy Cual	ESO (1º y 2º de BUP)	Pensamiento N. y A.
2002	p	Bruno, A	Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos	Mix	ESSO (2º)	Pensamiento N. y A.
2003	C	Ruano, R	Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra	Cual	ESO (4)	Pensamiento N. y A.
2004	P	Santos, L.	O ensino e a aprendizagem matemática Em portugal: um olhar através da avaliação	Teo/Ensy	Equivalente (Portugal)	Otra (Evaluación)
2004	C	Moreno, A.	Niveles de comprensión de conceptos inferenciales en el nivel de secundaria	Cual	ESO	Didáctica de la Estadística, P. C.
2007	P	Socas, M.	Dificultades y errores en	Teo/Ensy	ESO	Pensamiento

			el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico	Cual		N. y A.
2007	C	Diego-Mantecón, J.	Mejora y evaluación de un cuestionario de creencias de matemáticas en función de nacionalidad, edad y sexo	Cuan	ESO	Otra (Creencias sobre las matemáticas)
2008	C	Buhlea, C.	Sobre raíces y radicales. efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumania)	Cual	ESO Equivalente (Rumanía)	Pensamiento N. y A.
2008	C	Cerdán, F.	Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores.	Mix	ESO (1º 2º BUP)	Pensamiento N. y A.
2009	C	Mayén, S.	Dificultades de estudiantes mexicanos en la comparación de datos ordinales	Cuan	Equivalente (México)	Didáctica de la Estadística, P. C.
2009	C	Proença, M. C.	Investigação em formação conceitual: o conhecimento de alunos do ensino médio sobre polígonos	Cual	Equivalente (Portugal)	Aprendizaje de la Geometría
2009	C	Mato, M. D.	Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico	Cuan	ESO	Otra (Actitudes)
2009	C	Carreño, E.	Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas	Cual	FPSM (Perú)	Aprendizaje de la Geometría
2010	C	Huerta, M. P.	El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria	Mix	FPSM	Didáctica de la Estadística, P. C.
2010	C	Torres, J. M.	Conocimiento sobre orientación espacial en estudiantes de ESO	Mix	ESO (1º 4º)	Aprendizaje de la Geometría

Tabla 5. Tercera demanda

En mi opinión, una de las demandas que mejor se han satisfecho, desde la investigación en el área de Educación Matemática, es el conocimiento sobre los errores y las dificultades de comprensión de los alumnos de secundaria de diferentes contenidos matemáticos. Ahora bien, seguramente no se puede decir lo mismo sobre la contribución del área en la elaboración de propuestas que permitan resolver dichas dificultades más allá de situaciones de diseño experimental, es decir en los procesos de instrucción implementados en situaciones normales que están sujetos a todas las restricciones del sistema educativo.

Cuarta demanda: incorporación de las TIC

Le generación de profesores de la que estoy hablando se encontró con la presión para la incorporación de las nuevas tecnologías en los centros de secundaria. Dedicó bastante tiempo a realizar cursos de informática (hoja de cálculo, Cabri-Géomètre, etc.) y fue observando como, en un lapso de tiempo no demasiado largo, se pasó de una falta de disponibilidad de la tecnología, a una disponibilidad razonable de dicha tecnología en el aula. Este profesorado se encontró con un entorno que le presionaba para que incorporase las TIC en sus clases, dando por supuesto que el uso de la tecnología iba a mejorar el aprendizaje del alumnado y a facilitar su tarea docente. Este profesorado se convenció de la necesidad de la incorporación de las nuevas tecnologías, siendo un factor importante para ello la presión de la administración educativa, aunque no el más importante, y comenzó a formularse preguntas de tipo: ¿cómo y cuándo incorporar el uso de un determinado programa informático, ¿cuáles son las ventajas y los inconvenientes, ¿cómo incide el uso de las TIC en la gestión de la clase?, ¿los conocimientos generados con el uso de un programa informático (por ejemplo el GeoGebra), se transfieren a otros contextos (por ejemplo en un contexto de lápiz y papel)?

Con relación a esta demanda, hay que resaltar el seminario *Investigación en Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en Educación Matemática* del IX SEIEM, coordinado por el Dr. Josep M. Fortuny, y las siguientes comunicaciones y ponencias que, en mi opinión, se relacionan en mayor medida con esta demanda de investigar sobre la incorporación de las nuevas tecnologías en los procesos de instrucción:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel	Área
1999	P	Murillo, J.	Un entorno de aprendizaje para la enseñanza de la geometría en la ESO: actividades con Cabri	Mix	ESO (4º)	Aprendizaje de la Geometría.
2001	P	Gutiérrez, A.	Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles	Teo/Ensayo/Cual	ESO (4º)	Aprendizaje de la Geometría.
2003	C	Rodríguez, R.	El aprendizaje de las matemáticas como participación en una práctica de una	Cual	ESO (2º)	Aprendizaje de la Geometría.

			comunidad virtual			
2005	P	Figueras, O.	Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación	Teo/E nsy Cual	Equiva lente (Méxi co)	Conocimien to y Desarrollo Profesional del Profesor
2005		Recio, A.	Réplica a la ponencia “atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación”, De la doctora Olimpia Figueras	Teo/E nsy	No pertine nte	Conocimien to y Desarrollo Profesional del Profesor
2005	P	Gutiérrez, A.	Aspectos de investigación sobre aprendizaje mediante exploración con tecnología	Teo/E nsy Cual	ESO	Aprendizaje de la Geometría.
2005	P	Cobo, P.	El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas	Cual	No pertine nte	Aprendizaje de la Geometría.
2005	C	Arnau, A.	Análisis de las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo	Cual	ESO (1º)	Pensamiento N. y A. Proceso de RP
2005	C	Murillo, J.	Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo	Cual	ESO (3º)	Aprendizaje de la Geometría. Competenci a comunicativ a
2006	C	Arnau, A.	Formas de construir nombres y referirse a las cantidades en las actuaciones de alumnos de secundaria al resolver problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo	Cual	ESO (1º)	Pensamiento N. y A. Proceso de RP
2009	C	Rodríguez, G.	Funcionalidad de juegos de estrategia virtuales y del software Cabri-Géomètre II en el aprendizaje de la simetría en Secundaria	Cual	Equiva lente (Méxi co)	Aprendizaje de la Geometría.

2010	P	Fortuny, J. M.	Geometría y tecnología	Teo/Ensay	No pertinente	Aprendizaje de la Geometría.
2010	C	Morera, L.	Momentos clave en el aprendizaje de isometrías	Cual	ESO (3º)	Aprendizaje de la Geometría.

Tabla 6. Cuarta demanda

Las investigaciones se han centrado básicamente en el uso de la hoja de cálculo y programas de geometría dinámica, en especial el Cabri-Géomètre, y en dos temáticas: geometría y resolución de problemas.

Quinta demanda: atención a la diversidad

El profesorado que estoy comentando había participado en el cambio que va de la matemática moderna a la matemática constructivista tal como lo explica el punto de vista que hemos llamado de los sujetos, es decir había asumido las experiencias innovadoras realizadas por otros profesores innovadores y entusiastas, a pesar de que el currículum oficial decía otra cosa (un cambio horizontal de profesor a profesor). Como resultado de este cambio era un profesorado seguro de lo que hacía.

Este cambio se produjo en un sistema educativo donde la etapa de secundaria no era obligatoria y cuyo objetivo era preparar a los alumnos para los futuros estudios universitarios. La etapa de secundaria era una etapa selectiva en la que los alumnos que no podían seguir el ritmo normal se derivaban hacia una formación profesional, que los preparaba para el mercado laboral. Los años de desarrollo profesional del profesorado comentados anteriormente fueron años en los que fue madurando la necesidad de un cambio profundo en la institución escolar de secundaria que se concretó en la implementación de la LOGSE.

Con la introducción de la LOGSE el profesorado que estoy considerando participó en una experiencia de cambio en la institución escolar completamente diferente. Un cambio entendido a la manera sistémica (un cambio vertical de arriba abajo). Es decir, las autoridades académicas decidieron un cambio en el currículum oficial que posteriormente tenía que ser asumido e implementado por los profesores.

La principal novedad de la nueva propuesta de sistema educativo consistía en crear una etapa de enseñanza secundaria obligatoria desde los 12 a los 16 años. Al profesorado que estoy considerando el cambio propuesto, de entrada, le pareció muy bien, puesto que las bases psicopedagógicas del nuevo currículum eran constructivistas y coincidían con su práctica de aula. También le pareció bien la propuesta de aumentar la enseñanza obligatoria hasta los 16 años ya que consideraba que era bueno para el país aumentar el nivel de escolarización de toda la población.

Este entusiasmo no le impedía ser consciente de las nuevas necesidades profesionales que dicho cambio implicaba. Entre otras, tenía que enseñar a alumnos de 12 y 13 años que eran unas edades que le eran bastante desconocidas y, sobre todo, tenía que adaptarse a una enseñanza que no fuese una preparación para la universidad, sino una enseñanza finalista que tenía que asegurar unos objetivos mínimos para toda la

población. Este último aspecto implicaba que los alumnos con dificultades no eran expulsados del sistema sino que continuaban siendo alumnos del centro educativo. Por otra parte, eran conscientes de que estaban mejor preparados que otros profesores para estos nuevos retos profesionales, puesto que, como mínimo, ellos ya era constructivistas y ya estaban enseñando el tipo de matemáticas que demandaba el nuevo currículum. Ahora bien, su entusiasmo inicial se fue enfriando al ver como las administraciones educativas iban concretando el nuevo sistema educativo y los recursos económicos que destinaban a su implantación.

Su vida cotidiana como profesores de secundaria cambió de manera radical en algunos aspectos. Estos fueron, entre otros, los siguientes:

a) Tuvieron que dedicar una cantidad importante del tiempo de la clase a poner orden; es decir, a que hubiera disciplina, entendida ésta como las condiciones mínimas de comportamiento de los alumnos que son necesarias para que una clase pueda desarrollarse. Además, puesto que esas condiciones mínimas no eran las mismas para todos los profesores tuvieron que dedicar bastante tiempo a consensuarlas con los otros profesores.

b) Tuvieron que reducir radicalmente el tiempo que dedicaba a la exposición verbal ya que los alumnos no parecían capaces de seguir su discurso más allá de unos pocos minutos.

c) Tuvieron que cambiar su manera de realizar la evaluación ya que ahora pasaron a realizar, sobre todo, una evaluación continua.

d) Tuvieron que aprender a convivir con alumnos muy diversos en cuanto a sus niveles de conocimiento, actitud y motivación y también en cuanto a su procedencia cultural debido al aumento de la emigración. Esta experiencia en carne propia de la diversidad les llevó al convencimiento de que la vida en el aula era mucho más compleja de lo que pensaban anteriormente.

e) Tuvieron que dedicar mucho tiempo a la coordinación con los otros profesores, a las reuniones con los padres de los alumnos y a los aspectos burocráticos.

f) Para atender a la diversidad del alumnado, tuvieron que dedicar mucho más tiempo a la elaboración de los materiales utilizados en el aula. Tuvieron que planificar y diseñar las unidades didácticas para un alumno promedio, y también diseñar actividades de refuerzo para los alumnos con más dificultades y actividades de ampliación para los alumnos más aventajados. Incluso tuvieron que diseñar adaptaciones curriculares para alumnos individuales.

Como consecuencia de todos estos cambios en su vida cotidiana como docentes, este profesorado tiene actualmente un cierto desconcierto puesto que, a pesar de todos sus esfuerzos, tiene la sensación de estar superado por la complejidad de la enseñanza de las matemáticas a un alumnado tan diverso. Por otra parte, hay que resaltar que esta sensación de desconcierto no sólo la tiene este profesorado sino que la tiene casi toda la comunidad educativa.

Con relación a esta demanda de herramientas para tratar la diversidad del alumnado en el aula, hay que resaltar el seminario *Sobre Educación Matemática y diversidad* (XIV SEIEM), coordinado por el Dr. De la Torre, y las siguientes comunicaciones y ponencias que, en mi opinión, se relacionan en mayor medida con esta demanda:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel
2003	P	Moreira, D.	Multiculturalismo e educação matemática: o contexto português	Teo/Ensy	No pertinente
2004	P	Giménez, J.	Evaluación reguladora y apoyo geométrico al alumnado deficiente auditivo en aulas inclusivas en la eso. Un estudio de caso	Cual	ESO
2008	C	González, J. J.	Diseño y validación de la prueba de competencia curricular PROC-HAB1 para la diversificación curricular en Extremadura.	Cuan	ESO (3º)
2009	P	Civil, M.	Inmigración y diversidad: implicaciones para la formación de profesores de matemáticas	Teo/Ensy	No pertinente
2009	C	Díez-Palomar, J.	Contribuciones de la educación matemática de las familias a la formación del profesorado	Cual	No pertinente
2010	P	Gómez-Chacon, I.	Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto	Teo/Ensy	No pertinente
2010	P	Bruno, A.	Necesidades educativas especiales en matemáticas. el caso de personas con síndrome de Down	Teo/Ensy	No pertinente
2010	C	Ramírez, R.	Visualización y talento matemático: una experiencia docente	Mix	ESO (2º, 3º y 4º)

Tabla 7. Quinta demanda

El tratamiento de la diversidad que exige la enseñanza obligatoria necesita de un profesorado preparado para afrontar la gran complejidad de las aulas de secundaria. La atención a la diversidad demanda investigar una lista extensa de cuestiones relevantes, entre otras las siguientes: ¿cómo se gestiona el principio de equidad en el aula de matemáticas?, ¿cómo tratar en la clase de matemáticas la diversidad cultural producida por la inmigración?, ¿cómo tratar en la clase de matemáticas la diversidad cognitiva y social?, ¿cómo tratar los problemas específicos (discapacidad sensorial, trastorno por déficit de atención con hiperactividad, etc.)?, ¿cómo tratar el caso de los superdotados?, ¿cómo entender y aprovechar el contexto sociocultural de los alumnos y, en especial de sus familias, para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?, ¿cómo influyen los aspectos institucionales y organizativos como, por ejemplo la agrupación de los alumnos por niveles, en la inclusión o exclusión de los alumnos en las aulas de matemáticas? En mi opinión, la investigación didáctica relacionada con el tratamiento de la diversidad, presentada en los diferentes Simposios SEIEM, ha sido escasa y sólo ha contestado aspectos muy parciales de algunas de estas cuestiones.

Sexta demanda: transición entre etapas

El profesorado que estoy comentando con el tiempo fue asumiendo cargos de de gestión (director, coordinador pedagógico, jefe de estudios, jefe de departamento, etc.) lo cual le llevó a interesarse, entre otras, por la problemática de la transición entre etapas educativas, en concreto por la transición entre primaria y secundaria y entre ESO y bachillerato. Este interés estaba relacionado con la sensación de que no existía una adecuada transición entre la educación primaria y la enseñanza secundaria obligatoria, ni entre ésta y el bachillerato.

La transición entre etapas es un problema complejo e importante (hay que conseguir aunar las expectativas del nivel de matemáticas que se debe exigir en la nueva etapa con las potencialidades y limitaciones que tienen los alumnos cuando inician los estudios). Hay diferentes maneras de afrontar el problema de la transición: actuando sobre los conocimientos del alumno; actuando sobre aspectos socioculturales; actuando sobre las matemáticas que se enseñan y actuando sobre la formación del profesorado.

Si se considera que el problema es la falta de preparación del alumno, porque llega con carencia de los conocimientos y procedimientos básicos para abordar con éxito el aprendizaje de las matemáticas de la nueva etapa, la solución suele pasar por algún tipo de nivelación que permita a los alumnos aprender los conocimientos previos necesarios. Si se parte del hecho que, al tratarse de instituciones diferentes, los alumnos tienen que adaptarse a normas muy diferentes de las que están acostumbrados (mayor autonomía, contrato didáctico diferente, etc.) la solución suele pasar por la orientación tutorial. Si se considera que el problema es que las matemáticas de una etapa son muy diferentes a las de la etapa siguiente, la solución suele pasar por proponer una organización de las matemáticas de la nueva etapa que reduzca la brecha con las de la etapa anterior. También se puede plantear el problema de la transición desde la perspectiva de la competencia del profesorado, en este caso la solución pasa porque los profesores desarrollen la competencia profesional que les permita ayudar a sus alumnos en la transición entre primaria y secundaria y entre ESO y bachillerato. Cada una de estas maneras de afrontar la problemática de la transición entre etapas genera muchas preguntas de investigación.

Las siguientes comunicaciones se relacionan con la necesidad de dar importancia a la transición entre etapas educativas, bien porque su objetivo explícito es investigar sobre esta problemática o bien porque son estudios en los que participan alumnos de dos etapas educativas diferentes

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel
2009	C	Sainza, C.	Identificación de diferencias en la resolución de problemas de conteo entre alumnos de primaria y bachillerato	Cuan	Transición
2010	C	Fernández, C.	Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales	Cuan	Transición
2010	C	Fernández, S.	El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua	Teo/Ensy Cual	Transición

Tabla 8. Sexta demanda

La demanda de investigar sobre la problemática de la transición entre etapas, en mi opinión, no ha sido considerada, a pesar de su relevancia, por la investigación en Educación Matemática. Tal como se puede ver en la tabla anterior, la investigación didáctica realizada y presentada en los diferentes Simposios SEIEM ha sido muy escasa.

Séptima demanda: desarrollo y evaluación de procesos y competencias

Cuando el profesorado que estoy comentando, a pesar del desconcierto y la sensación de sentirse superado por el tratamiento de la diversidad que demandaba la ESO, se había adaptado relativamente a la nueva situación derivada de la LOGSE, se encontró con un nuevo cambio entendido nuevamente a la manera sistémica (un cambio vertical de arriba abajo). Se encontró que unos currículos, derivado de la LOE, que pretendían desarrollar y evaluar competencias y procesos matemáticos. Dichos currículos contemplan la competencia matemática, la cual es entendida, en muchos casos, de manera similar a como se entiende en el informe PISA 2003 (OCDE, 2003).

La actual propuesta de currículos de secundaria de matemáticas por competencias hay que pensarla como una consecuencia más del giro procesal en el diseño de currículos de matemáticas (y también de otras materias) que ha tenido lugar a nivel internacional en las últimas décadas. Dicho giro ha significado pasar de currículos de matemáticas cuyos objetivos eran el aprendizaje, sobre todo, de conceptos a currículos cuyos objetivos son el aprendizaje, sobre todo, de procesos. Este giro se ha producido, entre otras razones, debido a que las matemáticas actualmente se ven como una ciencia en la cual el método domina claramente sobre el contenido. Por esta razón, recientemente se ha dado una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en particular los procesos de resolución de problemas y modelización. Podemos observar este giro procesal, entre otros, en los Principios y Estándares del NCTM (2003), donde se propone el aprendizaje de los siguientes procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación; en el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, conocido con el acrónimo TIMSS (Mullis y otros, 2003), en el estudio PISA (OCDE, 2003) y en las propuestas de los currículos de algunos países, como es el caso de los currículos del estado español.

Los currículos derivados de la LOE le plantean al profesorado el problema de cómo conseguir el desarrollo y la evaluación de los procesos y competencias matemáticas señaladas en el currículo y plantean muchas preguntas de investigación, entre otras las siguientes: ¿qué hay que entender por proceso matemático o por competencia matemática?, ¿cuáles son los procesos matemáticos y cómo se relacionan entre ellos?, ¿cuáles son los componentes de la competencia matemática y cómo se relacionan entre ellos?, ¿cómo se pueden desarrollar y evaluar las competencias y los procesos matemáticos?

Con relación a esta demanda, hay que resaltar el *Seminario de Investigación sobre competencias* coordinado por la Dra. María F. Moreno en el X SEIEM, aunque ninguna de las tres ponencias tuviese una relación directa con las competencias que se deben desarrollar y evaluar en la educación secundaria obligatoria, y las siguientes comunicaciones y ponencias:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel
2002	P	Planas, N.	Nociones sociales recontextualizadas en educación matemática: el caso de la competencia comunicativa	Teo/Ensy	No pertinente
2004	P	Rico, L.	Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003	Teo/Ensy	ESO (4º)
2004	C	Cañadas, M. C.	Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático	Cual	ESO (3º y 4º)
2004	C	Cruz, J.	¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas? Diferencias entre alumnos de 12 y 14 años	Cual	Equivalente (Portugal)
2006	P	Poblete, M.	Las competencias, instrumento para un cambio de paradigma	Teo/Ensy	No pertinente
2006	P	Puig, L.	Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos	Teo/Ensy	No pertinente
2007	C	Murillo, J.	Una metodología para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas	Teo/Ensy Cual	ESO
2007	C	Cañadas, M. C.	Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas	Cuan	ESO (3º y 4º)
2007	C	Fiallo, J.	tipos de demostración de estudiantes del	Mix	Equivalente

		E.	grado 10º en Santander (Colombia)		(Colombia)
2008	P	Puig, L.	Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo	Teo/Ensy	ESO
2008	P	Castro, E.	Resolución de Problemas Ideas, tendencias e influencias en España	Teo/Ensy	No pertinente
2008	C	Roig, A.	Fases en la abstracción de patrones lineales	Mix	ESO (4º)
2008	C	Cañadas, M. C.	Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas	Mix	ESO (3º y 4º)
2008	C	Cerdán, F.	Las igualdades producidas en el proceso de traducción algebraico. Estudio de las igualdades correctas.	Mix	ESO (1º 2º BUP)
2008	C	Vale, I.	Padrões no currículo de matemática: presente e futuro	Teo/Ensy	Equivalente (Portugal)
2009	C	Rigo, M.	Procesos meta-cognitivos en las clases de matemáticas de la escuela elemental. Propuesta de un marco interpretativo	Cual	ESO (1º y 2º)
2009	C	López, L.	La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Sobre competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. Estudio exploratorio	Cual	ESO (2º y 3º)
2009	C	Solar, H.	Competencia de modelización en la interpretación de gráficas funcionales	Cual	Equivalente (Chile)
2010	P	Guillén, G.	¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿y en la investigación?	Teo/Ensy	No pertinente
2010	P	Neto, T.	Diferentes enfoques teóricos de investigação sobre o ensino e aprendizagem da demonstração em geometria	Teo/Ensy Cual	Equivalente (Portugal)

Tabla 9. Séptima demanda

Octava demanda: desarrollo de competencias profesionales

Otra cuestión relevante, para la investigación relacionada con los currículos de secundaria cuyo objetivo es el desarrollo de procesos y competencias matemáticas, es la

pregunta ¿cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria? Las siguientes comunicaciones y ponencias se han interesado por el desarrollo de las competencias profesionales de los futuros profesores de matemáticas de secundaria relacionadas con la pregunta anterior:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel
2003	C	Rico, L.	Indicadores de calidad para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria	Teo/Ensy	FPSM
2003	C	Gómez, P.	De un conocimiento técnico a su puesta en práctica: desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáticas de secundaria	Cual	FPSM
2003	C	Gámez, P.	Concepciones de los futuros profesores sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	Cual	FPSM
2004	P	Flores, P.	Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación	Teo/Ensy	FPSM
2004	P	Azcárate, P.	Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos	Teo/Ensy Cual	FPSM
2004	C	Ortiz, J.	La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica. Un estudio con profesores en formación	Cual	FPSM
2004	C	Peñas, M.	Modo de uso del conocimiento profesional en procesos de reflexión en la formación inicial de profesores de matemáticas	Cual	FPSM
2006	C	Lupiáñez, J. L.	Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares	Teo/Ensy Cual	FPSM
2008	C	González, M. J.	Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas	Cual	FPSM
2010	C	Lupiáñez, J.L.,	Aprendizaje de futuros profesores sobre el enunciado de objetivos específicos para las matemáticas escolares	Cual	FPSM
2010	C	Roig, A. I.	Aprendiendo sobre la comunicación matemática. características de las estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno on-line	Cual	FPSM

Tabla 10. Octava demanda (desarrollo de competencias en la FPSM)

Otras comunicaciones relacionadas con el profesorado de secundaria de matemáticas (PSM) que no se centran en la formación inicial o bien se han realizado con profesores de otros países son las siguientes:

Año	P / C	1r Autor	Título	Método	Nivel
2001	P	Contreras, L.C.	Un estudio cualitativo de corte interpretativo en el ámbito del pensamiento del profesor de secundaria	Cual	PSM
2002	P	Bairral	Comunidad virtual de discurso profesional geométrico. Contribuciones de un proceso interactivo docente por Internet	Cual	PSM (Brasil)
2003	C	Calzadilla, A.	Resumen de Nuevas demandas profesionales al profesorado de matemáticas de la Educación Secundaria en Cuba: conclusiones de un estudio exploratorio en la ciudad de Cienfuegos	Cual	PSM (Cuba)
2004	P	Ponte, J.	Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional	Teo/Ensy	PSM (Portugal)
2004	C	Azcárate, P.	Las fuentes de información como recurso para la planificación	Cual	PSM
2005	C	Vicario, V.	Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración	Cual	PSM
2007	C	Pérez, S.	Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza	Mix	PSM
2008	C	Pérez, S.	Estudio exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria.	Mix	PSM
2008	C	Gómez, A. L.	El pensamiento estadístico en la planificación de lecciones de estadística por profesores de secundaria	Cual	PSM (México)
2008	C	Romano, E.	Calculadoras no ensino: estudos sobre as concepções, as práticas e a formação do professor de matemática	Cual	PSM (Portugal)

2008	C	Gonçalves, M.	A interação promovida por uma futura professora na aula de matemática	Cual	PSM (Portugal)
2008	C	Rocha, A.	Percurso de um grupo de trabalho colaborativo: influências na nossa prática profissional	Cual	PSM (Portugal)
2008	C	De Costa, M.	Reflexões sobre contextos de determinação de áreas de figuras planas e a formação inicial de professores de matemática	Teo/Ensy	PSM (Brasil)

Tabla 11. Octava demanda (profesorado de secundaria de matemáticas)

Con relación a la séptima y octava demanda, se han realizado algunas investigaciones, pero es fundamental ampliar la investigación sobre ellas ya que los currículos de secundaria por competencias son currículos ambiciosos, que conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Mi opinión es que la competencia profesional que exige este tipo de currículo implica, entre otros aspectos, el desarrollo de la competencia de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos —como saber de fondo sobre el cual desarrollar el desarrollo y evaluación de competencias matemáticas—. Si el profesorado no consigue ser competente en dicho análisis puede dar la espalda al currículo por competencias, ignorándolo o bien limitándose a tenerlo en cuenta sólo para los documentos oficiales (programación de departamento, documentos del centro, etc.).

4. CONSIDERACIONES FINALES

En mi opinión, la investigación en Educación Matemática, reflejada en las actas de los Simposios de la SEIEM, ha respondido a algunas de las ocho demandas del sistema educativo que se han considerado en esta ponencia de manera relativamente satisfactoria y de manera menos satisfactoria a las otras.

Tal como se ha dicho, creo que la demanda de herramientas para analizar las diferentes maneras de organizar el contenido matemático se ha respondido satisfactoriamente. Con relación a la demanda de responder a la pregunta ¿cómo se produce la emergencia de los objetos matemáticos a partir de contextos extramatemáticos? mi opinión es que se trata de una pregunta crucial sobre la que se ha investigado, pero sobre la que es necesario seguir haciéndolo. En mi opinión, una de las demandas que mejor se han satisfecho es el conocimiento sobre los errores y las dificultades de comprensión de los alumnos de secundaria de diferentes contenidos matemáticos; pero no se puede decir lo mismo sobre la contribución del área en la elaboración de propuestas que permitan resolver dichas dificultades más allá de situaciones de diseño experimental. Con relación a la demanda de investigar sobre la incorporación de las TIC, mi opinión es que se trata de una temática sobre la que se ha investigado, pero sobre la que es necesario seguir haciéndolo. Con relación a la demanda de conseguir un tratamiento adecuado de la diversidad del alumnado en la ESO, mi opinión es que se trata de una demanda crucial del sistema educativo sobre la que se ha investigado poco. La demanda de investigar sobre la problemática de la transición entre etapas, en mi opinión, no ha sido considerada, a pesar de su relevancia. Con relación a la séptima y octava demanda, es

fundamental ampliar la investigación sobre ellas ya que los currículos de secundaria actuales presuponen en el profesorado la competencia profesional que les permite el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Mi opinión es que la competencia profesional que exige este tipo de currículo implica, entre otros aspectos, el desarrollo de la competencia de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos, como saber de fondo necesario para poder evaluar y desarrollar competencias matemáticas, y, para conseguirlo, las herramientas para analizar el contenido matemático (primera demanda) son muy importantes.

Para terminar, comentar que son escasas las investigaciones presentadas en los Simposios SEIEM sobre la comparación de nuestro sistema educativo con el de otros países y que sería conveniente potenciar, además de investigaciones a gran escala como las prueba PISA, investigaciones de tipo comparativo a pequeña escala como, por ejemplo, la realizada en el proyecto *Mathematics Education Traditions of Europe* de la Unión Europea (Andrews, Carrillo y Climent, 2005).

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos: 1) “Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato”, EDU2009- 08120/EDUC, Ministerio de Ciencia e Innovación, España; 2) “Una perspectiva competencial sobre el Master de Formación de Profesor de Secundaria de Matemáticas”, REDICE-10-1001-13, Institut de Ciències de l’Educació (ICE) de la Universitat de Barcelona.

Referencias

- Andrews, P., Carrillo, J. y Climent, N. (2005). Proyecto “mete” (mathematics education traditions of europe): El foco matemático. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la SEIEM* (131-137). Córdoba: SEIEM.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Flecha, R., Gómez, J. y Puigvert, L. (2001). *Teoría sociológica contemporánea*. Barcelona: Paidós.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, 26 (en prensa).
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España. Una aproximación desde “ISI-Web of Knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación*

- Matemática XII/ Investigação em Educação Matemática XII* (pp. 1-26). Badajoz: SEIEM.
- Mullis, I., Martin, M., Smith, T., Garden, R., Gregory, K., Gonzales, E., Chrostowski, S. y O'Connor, K. (2003): *TIMSS assessment frameworks and specifications 2003*. Chestnut Hill, MA, EEUU: Boston College.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales y National Council of Teachers of Mathematics.
- Núñez, J.M. y Font, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica. *Revista de Educación*, 306, 293-314.
- OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OCDE.
- Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.
- Torralbo, M., Vallejo, M. y Fernández, A. (2003). Panorama de la investigación en educación matemática en España a través de las tesis doctorales. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la SEIEM* (29-43). Granada: SEIEM.

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO Y PRIMEROS CURSOS DE UNIVERSIDAD³⁹

Camacho Machín, M.

Universidad de La Laguna

Resumen. *En este trabajo presentamos una revisión de las investigaciones que se han venido realizando en los últimos 20 años, tanto a nivel internacional como en nuestro país, en el campo de la Didáctica de la Matemática en la enseñanza post-obligatoria. En primer lugar, analizamos los estudios internacionales realizados en el seno del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) y especialmente en el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), al objeto de mostrar un panorama general de la investigación en este ámbito. Posteriormente abordaremos los trabajos presentados en los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIM) y, en particular los del Grupo de Investigación Didáctica del Análisis Matemático, tomando como elemento organizador el contenido matemático. Finalmente estableceremos algunas conclusiones generales del estudio elaborado.*

Palabras clave: Investigación en Educación Matemática, Bachillerato y Universidad, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Abstract. *A review of research performed over the past 20 years, both internationally and in our country, in the field of mathematics education in post-compulsory education is presented here. Firstly, we analyze international studies conducted by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) and especially the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), in order to give an overview of research in this area. We then analyze the papers presented at the Symposia of the Spanish Society for Research in Mathematics Education (SSRME), in particular the Research Group of Mathematical Analysis Education, using the mathematical content as organizing element. Finally, we make some general conclusions arising from the study.*

Keywords: Research in Mathematics Education, post-compulsory education, Spanish Society for Research in Mathematics Education

³⁹ Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación EDU 2008-05254 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Plan Nacional I+D+i del Gobierno de España.

INTRODUCCIÓN

Sintetizar los avances de la investigación en cualquier ámbito no es una tarea fácil y resulta aún más complicado hacerlo en un campo de investigación emergente y con tanta variabilidad de paradigmas de investigación como es la Didáctica de la Matemática en el bachillerato y universidad. Artigue (2001, p. 207) justifica esa dificultad en términos de:

- La falta de unificación del campo de la investigación, que hace difícil la síntesis y uso de los resultados, aunque la diversidad existente sea un elemento enriquecedor.
- La dependencia parcial de la investigación de los diferentes entornos sociales y culturales donde se desarrollan, que hacen que tengan un campo de validez limitado
- La dificultad de convertir los resultados de la investigación en *estrategias educativas efectivas*.

Para la preparación de esta revisión de la investigación en nuestro país, hemos tratado de encontrar algunos elementos comunes que nos permitan organizar la información de que disponemos, derivada fundamentalmente de las ponencias y comunicaciones publicadas en las Actas de los catorce Simposios celebrados por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Hemos considerado oportuno analizar también las comunicaciones que se presentan en los Grupos de Investigación que son posteriormente publicadas y entregadas en el Simposio siguiente. Estas publicaciones en soporte electrónico, que se entregan al año siguiente de presentadas, se demoran en el tiempo con la intención de que se incorporen en ellas las aportaciones de las discusiones que se plantean en las sesiones que se desarrollan durante las reuniones de dichos Grupos. Como referencia complementaria, hemos hecho una revisión de las diferentes Tesis Doctorales que se han defendido en estos últimos quince años, que de una manera o de otra constituyen el lugar donde convergen las diferentes investigaciones presentadas en el foro de los Simposios. Sabemos que, en muchos de los casos, los diferentes Proyectos de Investigación tanto del Plan Nacional con los de las diferentes Autonomías y Universidades hubieran ayudado a hacer un análisis más exhaustivo que el que hemos realizado, pero la no disponibilidad de esas fuentes no nos ha permitido hacer referencia a ellos.

Dividiremos el trabajo en tres partes. En la primera parte presentamos una revisión de algunos estudios internacionales que se han hecho en las dos últimas décadas. Pensamos que las fuentes originales de nuestros trabajos se encuentran en los trabajos de investigación que se han realizado en el ámbito internacional. La segunda parte de este trabajo se centra en el análisis detallado de las diferentes investigaciones que han sido presentadas y discutida en los Simposios, en particular en el ámbito del Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático. Terminaremos, estableciendo algunas consideraciones generales sobre el análisis desarrollado.

UN PANORAMA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN EN LOS NIVELES SUPERIORES.

Desde principio de la década de los noventa y casi con una periodicidad de un lustro se han publicado diversos estudios internacionales, que tratan de sintetizar, con enfoques generalmente diferentes, las investigaciones que se han desarrollado a nivel internacional del campo de la Educación Matemática.

El *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*⁴⁰, publicado en el año 1992 constituyó, desde nuestro punto de vista, uno de los primeros referentes básicos para la investigación en el campo de la Didáctica de la Matemática. Pese a que no había un capítulo específico dedicado a la enseñanza y aprendizaje del Bachillerato y la Universidad, el capítulo de D. Tall titulado *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof* (Tall, 1992) es el que se refiere más directamente a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en estos niveles. En él se muestra que los principales temas de investigación hasta ese momento eran de carácter cognitivo, centrados en: la identificación de los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje de las matemáticas de los niveles avanzados, las relaciones de tales procesos con los procesos que surgen en los niveles más elementales y, finalmente, en la comprensión de las dificultades de los estudiantes con los conceptos avanzados de matemáticas. Posteriormente, se publicaron otros “*Handbooks*” en los años 1996⁴¹, 2002⁴², 2006⁴³ y por último el del año 2007⁴⁴.

En relación con el *Handbook* del PME (Gutiérrez y Boero, 2006), se observa que no existe un capítulo específico dedicado a la revisión de la investigación en los niveles superiores de la enseñanza, sin embargo se puede considerar que hay tres capítulos que mantienen una relación directa con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en alumnos de 17 a 20 años. No obstante, los capítulos que mayor conexión tienen con estos tópicos son los de Harel, Selden y Selden (2006), Mariotti (2006) y Ferrara, Pratt y Robutti (2006) que se refieren respectivamente al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA⁴⁵), a la demostración y la prueba y finalmente al uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje, en particular para la enseñanza del Álgebra y del Cálculo. Por motivos de espacio, haremos una breve descripción de la estructura del primero de los capítulos citados. En él, los autores se centran inicialmente en establecer la distinción entre dos de los términos más utilizados en el campo de investigación del PMA que son *concept image* y *concept definition* y señalan que mientras que el término *concept image* se refiere a la “estructura cognitiva total asociada con un concepto” que se construye durante el paso de los años y mediante la experiencia con los conceptos matemáticos, el *concept definition* se refiere principalmente a la expresión verbalizada del concepto, que puede ser *personal* o *formal* (la que ha sido institucionalizada por la comunidad matemática). Posteriormente, dedican una sección a la definición, destacando la importancia que tienen las definiciones para comprender los conceptos matemáticos y aportando dos dimensiones principales a las definiciones una en relación con la prueba y otra como organizador de los conceptos. La sección 4 analiza, en una primera parte, la construcción de los conceptos matemáticos en el individuo, estableciendo un paralelismo entre un conocimiento operacional (proceso) de un concepto matemático en términos de los aspectos de cálculos y procedimientos y la

⁴⁰ Grouws, D. A. (Ed.) (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

⁴¹ Bishop, A.J.; Clements, K.; Keitel, K.; Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.) (1996) *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

⁴² English, L.I. (Ed.) (2002) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

⁴³ Gutiérrez, A.; Boero, P. (Eds.) (2006) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers.

⁴⁴ Lester, F.K. (Ed.) (2007) *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte: Information Age Publishing

⁴⁵ PMA son las siglas que utilizaremos para el Advanced Mathematical Thinking (AMT)

concepción estructural (objeto) del mismo más formal y estática. A continuación se centra en la breve descripción de la aproximación propuesta por la teoría APOS⁴⁶ y termina la sección destacando el papel que juegan los símbolos como puente de conexión entre los aspectos operacional (proceso) y estructural (objeto) de un concepto matemático, que desemboca en el término *procepto* como una combinación de los tres elementos: proceso, concepto y símbolo⁴⁷. Primeramente el alumno se encuentra el concepto matemático como un proceso, con los símbolos se introduce el producto de ese proceso y finalmente ese simbolismo lleva al significado dual tanto del proceso como del producto. En los últimos años ha surgido una línea de investigación dedicada a estudiar las prácticas y productos de los matemáticos “profesionales” (docentes o investigadores), (Misfeldt, 2003), dado que el análisis de tales prácticas y productos pueden ayudar a entender algo más de los que significa el PMA. Por ello, en la sección 5, se revisan algunas investigaciones en esta línea que se centran principalmente en el análisis de la forma en que los matemáticos escriben sus investigaciones, la manera en que resuelven problemas (Hitt, Barrera y Camacho, 2010), las estructuras mentales que utilizan para realizar las demostraciones, tanto cuando aprenden nuevos conceptos e incluso como cuando enseñan matemáticas (Moreno, 2001; Moreno y Azcárate, 2003). Finalmente, en el último capítulo proponen temas futuros de investigación: En primer lugar, proponen investigaciones que tengan en cuenta consideraciones sociales y culturales sobre la enseñanza y aprendizaje del PMA, dado que la gran mayoría de las que aparecen en los *Proceedings* de los PME se realizan desde las perspectiva cognitiva, es esencial no sólo este tipo de investigación sino la búsqueda de modelos que expliquen el comportamiento de los estudiantes, se debe profundizar también en el análisis de las actuaciones de los matemáticos, la transición de la secundaria a la Universidad y por último y, finalmente, otro de los temas de investigación que proponen es sobre la prueba y la demostración.

El *Handbook* más reciente (Lester, 2007) recoge en el capítulo 22 de una manera acertada un análisis de la investigación que se ha desarrollado en lo que podemos considerar que es el campo que nos ocupa (Artigue, Batanero y Kent, 2007). Pese a que en el título habla del “post-secondary level”, pensamos que se adecua perfectamente a nuestro propósito. En esta revisión, se presenta la evolución generada en los años posteriores al primer *Handbook* a partir de las áreas temáticas clásicas de la investigación en estos niveles como son el Análisis Matemático y el Álgebra Lineal y añadiendo dos temas emergentes relacionados con las Matemáticas en los cursos de Ingeniería y la estocástica los que no atenderemos por motivos prácticos. Las referencias a las Tecnologías de la Información y Comunicación aparecen incluidas en la discusión de todo el capítulo. El capítulo aparece estructurado en cuatro partes y pasaremos a describir brevemente a continuación los aspectos más relevantes para nuestro trabajo.

La primera parte, se dedica a presentar una visión general de las primeras investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje en el nivel superior que trataban de caracterizar el PMA en relación con las formas más elementales del pensamiento matemático y se clarifican cuáles son los procesos mentales que permiten a los

⁴⁶ Que son la iniciales de “Action-Process-Object-Schema”. En España, algunos autores la denominan APOE (la última sigla se corresponde con la traducción española de Schema=Esquema). Más adelante se explicará un poco más sobre su fundamentación.

⁴⁷ En (Gray y Tall, 1991) y en (Azcárate y Camacho, 2003) se hacen una descripciones más precisas de estos términos.

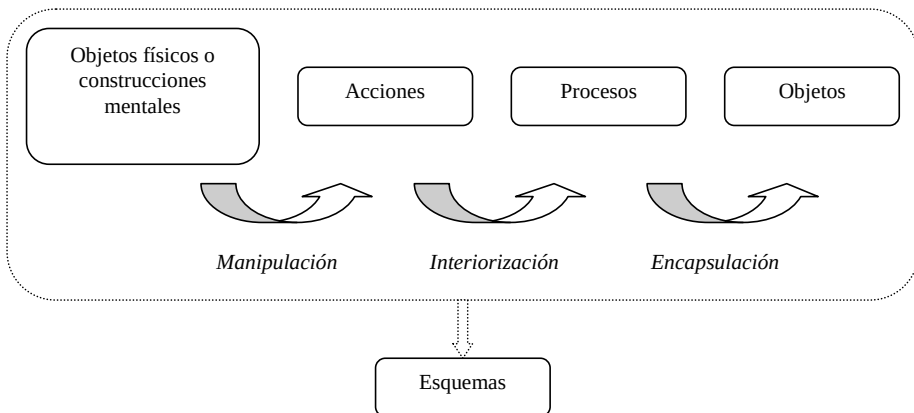
estudiantes alcanzar el PMA, atendiendo a las dificultades que se encuentran para desarrollar tales procesos. Se discute sobre algunos de los constructos teóricos fundamentales ya mencionados como son el *concept imagen* y la *concept definition*, y destacan los principales aspectos de la noción de obstáculo epistemológico de Bachelard importada por Brousseau al campo de la Educación, como aquella que permite entender mejor los errores que cometen los estudiantes, generalmente los más resistentes, que provienen no de una falta de conocimientos sino de un conocimiento asimilado que dificulta la comprensión de nuevos conocimientos. Son varios los obstáculos descritos por los investigadores en la década de los noventa, Artigue sintetiza, a partir de varias investigaciones los siguientes:

- el significado cotidiano de la palabra “límite”, que induce concepciones resistentes del límite como una barrera o el último término de un proceso, o que tiende a restringir la convergencia a la convergencia monótona;
- la sobre-generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, siguiendo el principio de continuidad enunciado por Leibniz;
- la fuerza de la geometría de las formas, que impide a los alumnos identificar claramente los objetos implicados en el proceso límite y su topología subyacente. Esto hace que para los alumnos sea difícil apreciar la interacción sutil entre los marcos numérico y geométrico en los procesos límite. (Artigue, 2001, p. 211)

También la dualidad proceso-objeto de Sfard y Dubinski jugó en los años noventa un papel importante en las investigaciones realizadas con estudiantes de 17 a 20 años. La teoría APOS que fue introducida por Dubinsky y que está basada en la teoría de Piaget, trata de modelizar las construcciones mentales que intervienen en el aprendizaje de los conceptos teniendo en cuenta que:

... comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente contruidos para formar *acciones*; las acciones son luego interiorizadas para formar *procesos* que son después encapsulados para formar *objetos*. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuáles fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en *esquemas* (Asiala et al., 1996, p. 8).

El esquema siguiente refleja el modelo que propone la Teoría APOS para la construcción de los conceptos



Esquema 1.1.2: Conceptualización según la Teoría APOS (Reproducido de Perdomo, J. (2010), p. 10)

(Artigue, Batanero y Kent, 2010) señalan que durante los años noventa se lograron avances importantes en la investigación dado que, por ejemplo, se consiguió estructurar una forma de interpretar los procesos de aprendizaje de los estudiantes y diseñar alternativas para detectarlas. Sin embargo, consideran como limitaciones que los resultados obtenidos estuvieron concentrados en pequeñas áreas de la educación post-obligatoria, los constructos teóricos establecidos no fueron integrados en estructuras didácticas más globales que conectasen los fenómenos de enseñanza y aprendizaje. Finalmente otra limitación para los autores es que esos constructos pertenecían exclusivamente a perspectiva cognitiva.

(Artigue, Batanero y Kent, 2007) muestran como han evolucionado las ideas sobre el PMA:

- el afianzamiento de las aproximaciones basadas en la dualidad objeto-proceso,
- el impacto de algunas aproximaciones cognitivas nuevas
- la integración de aproximaciones más globales.

Afirman los autores de la complementariedad de tales aproximaciones para “entender la interacción entre el individuo y el colectivo en los procesos de enseñanza y aprendizaje y sustentar los diseños didácticos”.

En relación con la evolución de las ideas sobre la naturaleza del PMA, se puede decir que ha estado centrada principalmente sobre a qué hace referencia el término “avanzado”, si al pensamiento, a las matemáticas o a ambos (Selden y Selden, 2005). De esta forma han surgido dos perspectivas, una centrada en las matemáticas, identificada en inglés con las siglas A-MT y otra enfocada hacia el pensamiento matemático, denotada AM-T (Zazkis y Applebaum, 2007). Esta es una cuestión que se retoma cada cierto tiempo y que aún no está resuelta, pero que ha dado lugar a la publicación de diversos trabajos sobre el tema. En particular, la revista *Mathematical Thinking and Learning* dedicó un monográfico, en el año 2005, a esta discusión. En este monográfico, Harel y Sowder (2005) se plantean qué significa que el pensamiento matemático sea avanzado (reescribiendo el término Pensamiento Matemático Avanzado

como Pensamiento-Matemático Avanzado⁴⁸, P-MA) y estableciendo que el pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición de una forma de pensamiento por parte de un individuo queda determinado por la manera en que el individuo ha superado dichos obstáculos. (Harel y Sowder, 2005, pp. 34-35)

En relación con el afianzamiento y desarrollo de las aproximaciones existentes, se puede considerar que la evolución de la Teoría APOS ha resultado importante en los últimos años, debido principalmente al trabajo de varios grupos de investigación relacionados de una manera u otra con el grupo RUMEC. En nuestro país, es uno de los marcos de referencia más utilizados en las investigaciones realizadas en los últimos años en relación con la enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático, como veremos más adelante. El análisis teórico de los conceptos matemáticos que se denomina *descomposición genética del concepto*, constituyen la base para el diseño de secuencias de enseñanza para experimentar con los alumnos. La mayor evolución ha venido en relación con la parte que tiene que ver con el “esquema”. (Dubinski y McDonald, 2001, p. 277) señalan que un esquema para un cierto concepto matemático es una colección individual de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados con algunos principios generales para formar una estructura en la mente del individuo que puede ser retomada en una situación problemática relacionada con el concepto

Algunas dificultades encontradas a la hora de explicar las investigaciones realizadas bajo esta teoría, en particular en lo que concierne a la construcción de esquemas, motivaron una reconsideración de este término, distinguiéndose en la actualidad tres niveles en el desarrollo del esquema de un concepto: *Intra*, *Inter* y *Trans*

- En el nivel de desarrollo *Intra* el estudiante se centra en acciones, procesos y objetos individuales, de forma aislada con respecto a otros aspectos cognitivos de naturaleza similar.
- El nivel *Inter* se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre esos aspectos cognitivos.
- En el nivel *Trans* el individuo construye una estructura subyacente que permite comprender las conexiones establecidas en el nivel *Inter* y da cierta coherencia al esquema de manera que el individuo puede decidir cuándo y cómo resulta útil el esquema.

Con este enfoque también se han elaborado y probado diseños de enseñanza, ligados al aprendizaje cooperativo (Artigue, Batanero y Kent, 2007). El proceso de diseño de las secuencias de enseñanza basadas en esta teoría comienza con la descomposición genética del concepto a enseñar, reflejando qué significa comprender ese concepto y cómo puede un estudiante construir o desarrollar esa comprensión. Con ese análisis se propone una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante debería realizar para desarrollar su comprensión del concepto.

En el proceso de enseñanza se hace pasar a los estudiantes por situaciones donde tengan que afrontar sus lagunas conceptuales y tratar de darles sentido involucrándose en actividades como resolver problemas o responder preguntas, de forma individual o en grupo. Uno de los enfoques pedagógicos que se utiliza es el “Ciclo de Enseñanza ACE.

⁴⁸ En inglés: Advanced Mathematical-Thinking (AM-T).

Los estudiantes trabajan en grupo en todas las sesiones. Los tres componentes del ciclo son: actividades, discusiones de clase y ejercicios. Las actividades se desarrollan en las salas de ordenadores y consisten en tareas de programación diseñadas para promover construcciones mentales específicas, con base en el análisis teórico del concepto realizado previamente. El objetivo de estas actividades es que los estudiantes desarrollen una experiencia con el concepto matemático que se va a tratar en las clases posteriores. En las discusiones de clase los estudiantes trabajan en equipo para responder, con lápiz y papel, a cuestiones basadas en las actividades que previamente se han realizado en la sala de ordenadores. El profesor guía las discusiones que se producen en los grupos con el objetivo de que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que realizaron con el ordenador y los relacionen con los cálculos que han hecho en clase. En algunas ocasiones el profesor interviene, introduciendo definiciones o explicaciones para integrar o aclarar los aspectos que se han discutido.

El ciclo se completa con una serie de ejercicios que se asignan a los estudiantes como trabajo de casa. El objetivo de estos ejercicios es reforzar las ideas que los alumnos han construido, que utilicen las matemáticas que han aprendido o incluso comenzar a pensar en situaciones que se abordarán más adelante.

La evolución de las ideas de D. Tall ha sido independiente a las teorías de Sfard o Dubinsky, en lo que al desarrollo del conocimiento matemático se refiere. Tall (2004) distingue tres vías por las que se produce este desarrollo que son distintas pero están interrelacionadas y se corresponden con tres “mundos matemáticos”. Cada individuo transita por estos tres mundos de una manera diferente.

El primer camino se basa en la *percepción* del mundo que tenga el individuo, refiriéndose a lo que el individuo piensa sobre las cosas que percibe y siente, tanto en el mundo físico como en su propio mundo mental de significados. A través de la reflexión y el uso de un lenguaje cada vez más sofisticado, el individuo puede centrarse en aspectos de su experiencia sensorial que le permita imaginarse nociones que no existan en el mundo exterior, tal como una línea perfectamente recta. Para Tall este sería el “conceptual-embodied world”, que se podría interpretar como “mundo de los conceptos personificados”. El segundo mundo es el de los *símbolos* que se utilizan en aritmética, álgebra o cálculo para manipular y calcular. El paso por este mundo comienza con las acciones (como contar) que son encapsuladas como conceptos, utilizando símbolos que permitan pasar, sin esfuerzo, de los procesos para hacer matemáticas a los conceptos para pensar en matemáticas. A este mundo lo denomina “proceptual-symbolic world”, que se puede interpretar como “el mundo de los proceptos”. El tercer mundo se basa en las *propiedades*, expresadas en términos de definiciones formales que se utilizan como axiomas para especificar estructuras matemáticas como “grupo”, “espacio vectorial”, etc. Este sería el “formal-axiomatic world” o el “mundo formal”. En este mundo se activa la experiencia previa del individuo, trabajando con objetos que no resultan familiares sino con axiomas que se formulan cuidadosamente para definir estructuras matemáticas en términos de propiedades específicas. Dentro del sistema de axiomas se pueden definir nuevos conceptos y deducir sus propiedades para así construir una teoría coherente y lógica.

Tall (2007) relaciona los dos primeros mundos con las matemáticas elementales y el tercero, el “mundo formal” con el PMA. Uno de los puntos de interés en esta teoría es cómo se produce la transición hacia ese “mundo formal”, que resulta tan complicada para muchos estudiantes. (Artigue, Batanero y Kent, 2007) señalan que muchos estudiantes podrían conseguir acceder a ese mundo de las matemáticas formales

trabajando previamente en los otros dos mundos definidos por Tall, el de la percepción y el de los *proceptos*.

Las aproximaciones epistemológicas se pueden considerar complementarias a la anterior y se centran más en planteamientos más abstractos como los del Álgebra Lineal. (Dorier, 2000), muestra la importancia del análisis epistemológico de los conceptos para entender la complejidad de esa abstracción y para presentar situaciones más prácticas para el aprendizaje de esos conceptos.

En relación con la integración de aproximaciones más globales, (Artigue, Batanero y Kent, 2010) se refieren a una aproximación a la enseñanza y aprendizaje en el nivel post-secundario que toma en cuenta prácticas socioculturales e institucionales.

Estas investigaciones están sustentadas en diferentes marcos teóricos que tienen en común el hecho de considerar que los objetos matemáticos emergen a partir de prácticas humanas que pueden ser institucionales y socioculturales, entendiendo por *institución*, cualquier tipo de estructura formal o informal que organiza o condiciona nuestras actividades sociales y culturales. De esta forma, cada institución desarrolla una idea específica de qué significa conocer un objeto matemático, definiendo un conjunto de normas institucionales para el conocimiento. Así, la relación que cada individuo establece con los objetos matemáticos surge a partir de las prácticas institucionales y las normas que se han experimentado en relación con dicho objeto matemático. Desde esta perspectiva, resulta fundamental comprender las normas y prácticas institucionales para comprender los procesos de aprendizaje. Por otra parte, la mediación entre lo social y lo cultural desempeña un papel importante y las herramientas semióticas son fundamentales en esta mediación, debido a la dimensión semiótica de la actividad matemática.

(Cobb y Yackel, 1996) conectan las perspectivas sociocultural y el constructivismo para analizar los procesos que se producen en el aula y el diseño de experimentos dentro del aula. Este marco es utilizado por Rasmussen y sus colaboradores en el desarrollo de un proyecto para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, el proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equations), en el que se analiza la influencia que tienen las prácticas que se realizan en el aula, como comunidad de aprendizaje, en el conocimiento matemático de cada individuo. (Rasmussen et al., 2005).

Otro ejemplo de este paradigma de investigación es el enfoque antropológico iniciado por Chevallard (1996) en el que las prácticas de las que emerge el conocimiento se analizan utilizando la noción de *praxeología*, que incluye cuatro componentes: tareas, técnicas, tecnología y teoría. Existen numerosas investigaciones realizadas empleando este marco. Praslon (2000), por ejemplo, caracteriza las *praxeologías* involucradas en la noción de derivada en dos instituciones, la enseñanza secundaria y la universitaria, encontrando que parte de las dificultades en la transición de un nivel a otro pueden ser explicadas en función de las prácticas que se dan en cada uno de ellos. Un enfoque instrumental del marco antropológico analiza cómo afecta el uso de CAS a las componentes técnicas y tecnológicas de las *praxeologías* matemáticas (Guin, Ruthven y Trouche, 2004). Este enfoque presta especial atención a la *génesis instrumental*, proceso por el que una herramienta, en este caso CAS, se transforma en un instrumento matemático, tanto para el individuo como para la institución. Las investigaciones muestran que el uso de tecnología define lo que aprendemos y la forma en que lo aprendemos, aspecto que debe tenerse en cuenta, en términos de prácticas

institucionales, valores y normas, para integrar la tecnología, de manera eficiente, en la enseñanza de las matemáticas.

El enfoque ontosemiótico (EOS) propone que la comprensión de un concepto emerge de las prácticas que resultan significativas para el estudiante vinculadas con la repetición de la resolución de problemas específicos para ese concepto y distinguen entre la dimensión institucional del conocimiento, formada por los significados matemáticos propuestos o marcados por una institución particular, y su dimensión personal, referido al significado considerado por una persona concreta de esa institución. En este modelo, el significado (comprensión) de cualquier objeto matemático se concibe como un sistema complejo, compuesto por diferentes elementos interrelacionados (Godino, 2003): (i) los problemas o situaciones a partir de las que emergen los objetos, (ii) las representaciones de los datos y los conceptos, (iii) los procedimientos y las estrategias para resolver los problemas, (iv) las definiciones y propiedades y (v) los argumentos y demostraciones, incluyendo argumentos de tipo deductivo e informal. De esta forma, distinguen dos componentes de las matemáticas: la fenomenológica o *praxis* (Chevallard, 1999), formada por los problemas matemáticos y las acciones para resolverlos y el *logos*, componente teórica o discursiva formada por las definiciones, las propiedades y los argumentos.

La investigación en el Bachillerato y la Universidad en los Simposios de la SEIEM: Didáctica del Análisis Matemático.

Una revisión de los trabajos presentados en los Simposios de la SEIEM muestra que el mayor número de investigaciones desarrolladas en torno al Bachillerato y la Universidad. De de unas sesenta ponencias y comunicaciones que hemos recopilado, aproximadamente las tres cuartas partes están dedicadas a conceptos propios del Análisis Matemático. Conviene señalar que la mayoría de estos trabajos han ido encaminados hacia la elaboración de trabajos de doctorado, por lo que hemos creído conveniente hacer converger, en la medida de lo posible, la discusión hacia la propia Tesis Doctoral en los casos que haya sido presentada.

Un elemento que tuvo que ser valorado fue la inclusión o no de investigaciones realizadas en otros países. Hemos decidido incluir únicamente aquellas en las que existiera equivalencia de niveles y constituyeran trabajos que tuvieran continuidad con algún otro⁴⁹.

En la literatura se pueden encontrar algunas revisiones sobre la investigación en Educación Matemática en España que se han realizado en los últimos años. (Torrallbo, Vallejo y Fernández, 2003), (Llinares, 2008), (Planas, 2010) son ejemplo de ellas. En el primer caso se hace un estudio bibliométrico de las Tesis Doctorales hasta el año 2002, en el segundo a la presencia en revistas de impacto de trabajos de investigadores españoles. Quizás la que mayor relación tenga con este trabajo sea el trabajo recientemente publicado por (Maz-Machado et al., 2011) quienes identifican una serie de indicadores bibliométricos de colaboración y coautoría de autores en las publicaciones de las Actas de los Simposios de la SEIEM. Aunque el enfoque sea

⁴⁹ Somos conscientes de las limitaciones de nuestro trabajo y con toda seguridad han quedado ponencias y comunicaciones que podríamos haber referenciado. Apelamos a la tolerancia de los autores y pedimos que, en su caso nos lo hagan saber para próximos informes.

diferente al nuestro, creemos que es importante reseñar una de sus conclusiones principales que se relaciona con la escasez de colaboración entre investigadores de diferentes universidades.

A la hora de agrupar las diferentes ponencias y comunicaciones hemos distinguido tres grandes áreas temáticas correspondientes a los Grupos de Investigación que funcionan habitualmente y en los que se pueden observar un mayor número de trabajos relacionados con el Bachillerato y la Universidad: Didáctica del Análisis Matemático, Didáctica de la Estadística y la Probabilidad y el tercer grupo lo hemos denominado Temas Transversales. Nos centraremos en este artículo en el ámbito del Análisis Matemático que es donde se encuentran el mayor número de trabajos dedicados a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas del Bachillerato y la Universidad. Limitaciones de tiempo y espacio no nos han permitido extender el análisis, pese a que en el Anexo hemos incluido las ponencias y comunicaciones de los otros grupos considerados. Categorizaremos por contenidos específicos la discusión, de tal forma que hemos distinguido seis grupos de ponencias y comunicaciones sobre aspectos generales de la investigación y en particular del Análisis, así como sucesiones, series e infinito, funciones y límites de funciones, derivada, integral y ecuaciones diferenciales.

Se incluyen unas tablas en las que se recogen las diferentes ponencias y comunicaciones, en las que se utilizan una serie de indicadores para el análisis posterior. Los indicadores empleados: año, autores (en el caso de más de dos autores, hemos puesto “et al”), Título, Marco de Investigación, Nivel, TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) y Tipo de presentación. En el indicador Nivel consideramos: B (Bachillerato), U (Universidad) y I (Interniveles, cuando se consideren varios niveles de enseñanza). El indicador TIC reflejará si se utiliza o no tecnología en la investigación, los Tipos de presentación serán P (Ponencia), C (Comunicación) y CGI (Comunicación en los grupos de Investigación). Una explicación especial necesita el indicador que hemos denominado Marco de Investigación y vamos a considerar tres tipos de Marco: Marco Teórico, (MT) Marco Conceptual (MC) y Marco Práctico (MP)..Lester (2010)⁵⁰ señala, que el uso de un marco de referencia en una investigación proporciona una estructura para el diseño, la concepción y la visualización del estudio, además de establecer las bases que permiten identificar la información relevante y justificar las evidencias que se muestren, los cuáles conducen a la presentación de las conclusiones y finalmente a una comprensión más profunda del fenómeno que se está investigando. En este caso, y en virtud del problema de investigación que se aborda, el marco de referencia estará formado por aquellos elementos que permitan analizar el conocimiento matemático mostrado por los estudiantes al resolver las actividades relacionadas con el tema de investigación que facilite el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan. Eisenhart (1991) distingue tres tipos de marcos de investigación, con sus propias características y jugando cada uno su papel: Teórico, Práctico y Conceptual. Lester (2010) profundiza en la caracterización de los diferentes marcos y, en relación con los Marcos Teóricos señala que las investigaciones realizadas empleando un Marco Teórico dependen de una teoría formal, las preguntas de investigación se reformulan en términos de dicha teoría, los resultados de la

⁵⁰ Lester (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.

investigación se utilizan para confirmarla, extenderla o modificarla y los investigadores deben seguir la agenda de investigación marcada por dicha teoría, aceptando los convenios de argumentación y experimentación asociados a ella. Son numerosos y muy variados los Marcos Teóricos que existen en el campo de la investigación en Educación Matemática y, en muchos casos, no resulta sencillo establecer relaciones entre ellos, con lo que se siguen desarrollando de forma independiente dentro del contexto en que se crearon. Los intentos por encontrar relaciones entre las diferentes teorías que ayuden al desarrollo de un marco más general no han resultado muy satisfactorios en ese aspecto, aunque sí resultan enriquecedores por la visión que presentan de diversas teorías (Artigue, Batanero y Kent, 2010) (Santos-Trigo y Barrera-Mora, 2007). El Marco Práctico se fundamenta en el conocimiento práctico de los expertos y los resultados de investigaciones previas, pero sus resultados no se pueden generalizar fácilmente. Finalmente, un Marco Conceptual es “un argumento que incluye diferentes puntos de vista y culmina en una serie de razones para adoptar algunos puntos... y no otros” (Eisenhart, 1991, p. 210). Un Marco Conceptual puede estar basado en diferentes teorías y una noción fundamental para este tipo de marcos es la de justificación; resulta fundamental explicar por qué se hacen las cosas y por qué son razonables las explicaciones e interpretaciones. El bricolaje, o como denomina Gravemeijer (1998) “bricolaje guiado por la teoría” (p. 279), es un proceso relacionado con la noción de Marco Conceptual de Eisenhart (1991). Este término hace referencia al proceso según el cual un investigador toma ideas de diferentes fuentes y las ajusta para construir, por ejemplo, un marco de referencia para su investigación o un conjunto de actividades para el aprendizaje de un concepto matemático.

Una vez hechas estas consideraciones, pasamos a continuación a la descripción de las investigaciones en los términos indicados.

Comunicaciones y ponencias de carácter general

En este primer grupo hemos incluido seis ponencias y comunicaciones (Tabla 1) presentadas entre los años 1999 y 2009. Las dos primeras se centran, después de una breve revisión de los trabajos a nivel internacional realizadas en la Didáctica del Análisis Matemático, en la exposición de algunos proyectos de trabajo en los temas de enseñanza y aprendizaje de conceptos del Análisis Matemático, desde dos perspectivas claramente diferenciadas. Por una parte, en (G1), se proponen varias investigaciones en el marco de algunos Proyectos de Investigación basándose en una perspectiva cognitiva que se deriva del campo de investigación del PMA y los diferentes constructos teóricos asociados, mientras que por otra en (G2) se plantea un Proyecto de Investigación desde la consideración de los obstáculos epistemológico Brousseau (1998) y los actos de comprensión Sierpinska (1995) como elementos constitutivos del referente teórico que los guía. En estos dos trabajos, se ponen de manifiesto las distintas líneas de investigación que empezaban a desarrollarse en nuestro país, así como se presentan algunos de los trabajos ya realizados en torno a la Didáctica del Análisis Matemático. Podemos considerar ambos trabajos como las primeras agendas de investigación del campo de la Didáctica del Análisis Matemático que, como veremos posteriormente, marcaron la pauta del conjunto de investigaciones que se realizaron en los siguientes años. Se adelantaban en ambos trabajos, los enfoques y temas de investigación para futuras investigaciones en nuestro país. Hemos clasificado de ámbito general las comunicaciones y ponencias (G4), (G5) y (G6), que presentan también un panorama global de la investigación haciendo uso de Programas de Cálculo Simbólico (PCS en lo 206

que sigue), las comunicaciones (G4) y (G6) utilizan el software *Mathematica*, para analizar los fenómenos didácticos que surgen en el estudio de los conceptos (objetos) matemáticos límite y derivada mientras que Camacho presenta la síntesis de dos investigaciones realizada sobre los conceptos de integral definida e integral impropia haciendo uso de *Derive* y *Maple* respectivamente.

Hemos considerado que la ponencia (G3) debía estar incluida en este grupo de trabajos, pese a que no trata directamente con temas específicos de la Didáctica del Análisis, porque en ella se describe -tomando como referencia una investigación con estudiantes universitarios sobre las concepciones, dificultades y errores en el aprendizaje del contraste de hipótesis- un esquema metodológico que puede resultar útil para la investigación de temas específicos de otras áreas en la enseñanza y aprendizaje en los cursos universitarios.

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TI C	Presentac ión/(Códi go)
1999	Azcárate, C. et al.	Perspectivas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Investigación en Didáctica del Análisis.	MC	B/U	No	P (G1)
2000	Contreras , A.	La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad.: Una perspectiva desde la Teoría de los obstáculos Epistemológicos y los actos de comprensión	MC	B/U	No	P (G2)
2001	Vallecillos , A.	Cuestiones metodológicas en la investigación educativa.	-	U	No	P (G3)
2005	Contreras , A. et al.	Aplicación del programa <i>Mathematica</i> a las prácticas de cálculo en el primer año universitario.	MC	U	Sí	C (G4)
2005	Camacho , M.	La enseñanza y aprendizaje del DAM haciendo uso de las CAS (Computer Algebra System).	MC	U	Sí	P (G5)
2009	Contreras, A. y Ortega, M.	Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa <i>Mathematica</i> .	MC	U	Sí	CGI (G6)

Tabla 1. Comunicaciones y ponencias de carácter general

Comunicaciones y ponencias sobre sucesiones, series e infinito (Tabla 2)

Se incluyen en este apartado varios trabajos inmersos en investigaciones más amplias que posteriormente dieron lugar a Tesis Doctorales. Así (Codes, 2010)⁵¹, (Claros, 2010)⁵² y (Belmonte, 2010)⁵³ son Tesis que derivan directamente de las investigaciones presentadas en los Simposios en este ámbito. En la primera de ellas, se utiliza la Teoría APOS como referente teórico y se desarrolla, previo a un análisis histórico, del

⁵¹ (SI2), (SI4) y (SI5)

⁵² (SI3) y (SI6)

⁵³ (SI1)

concepto de serie numérica y su convergencia, describiendo además los distintos niveles de comprensión de ambos conceptos. Se detectan algunos obstáculos que provienen principalmente de las concepciones previas de los conceptos de límite, función e infinito que poseen los estudiantes y también debidas a problemas de instrumentación con el PCS utilizado. En la Tesis Doctoral de Claros, se elabora un marco conceptual que le permite hacer una organización fenomenológica del concepto de límite, a partir de dos estudios empíricos uno con libros de texto y otro con estudiantes de bachillerato, determinan dos tipos de fenómenos: el de aproximación simple intuitiva (a.s.i.) y el de retroalimentación (i.v.s.). Belmonte, en su Tesis, analiza la evolución del concepto de infinito desde primero de primaria hasta segundo de bachillerato, poniendo de manifiesto el papel articulador que los elementos metafóricos juegan entre el finitismo del entorno que rodea a los estudiantes y la abstracción del concepto.

Hemos considerado importante, pese a que no existen comunicaciones y ponencias en los simposios, la Tesis Doctoral de Garbín (2000), que trata también del tema del infinito. En ella se identifican las inconsistencias y se representan las situaciones de coherencia que manifiestan los estudiantes con los esquemas conceptuales⁵⁴ que los estudiantes asocian al concepto de infinito actual cuando lo contextualizan en lenguajes matemáticos diferentes (verbal, geométrico, gráfico, analítico y algebraico).

⁵⁴ El término “esquema conceptual” se considera equivalente al *concept image* descrito por Tall y Vinner (1987). En Azcárate, C. (1990) se hace una discusión al respecto.

Investifación en didáctica de las matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de
Universidad

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TIC	Presen tación/ (Códig o)
2004	Belmonte, J. L. y Sierra, M.	Intuición y esquemas conceptuales del infinito: actualización.	MC	E/U (longit udinal)	No	CGI (SI1)
2004	Codes, M. y Sierra, M.	Enseñanza-aprendizaje con Maple del concepto de convergencia de series numéricas con alumnos de primer curso de la diplomatura de informática: un estudio piloto.	MT	U	Sí	CGI (SI2)
2006	Claros, F. J. et al.	Fenómenos que organizan el límite.	MC	B	No	C (SI3)
2006	Codes, M. y Sierra, M.	Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica	MT	U	Sí	CGI (SI4)
2007	Codes, M. et al.	Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional.	MT	B/U	Sí	C (SI5)
2009	Claros, F. J. et al.	Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy	MC	U	No	C (SI6)

Tabla 2. Comunicaciones y ponencias sobre sucesiones, series e infinito

Comunicaciones y ponencias sobre funciones y límite de funciones (Tabla 3)

En relación con estos temas, se puede considerar que los trabajos (FL2), (FL5) y (FL6) convergen en la Tesis Doctoral de García (2008) en la que se desarrolla una investigación de naturaleza epistemológica, cognitiva y curricular sobre las causas de naturaleza ontosemiótica de las dificultades mostradas por los alumnos para el concepto de límite de una función en primero de bachillerato. Después de siseñar y experimentar una secuencia de enseñanza elaborada a partir de la aproximación ontosemiótica, se estudian tres tipos de idoneidades: epistémica (grado de representatividad de los significados institucionales implementados), interaccional (grado en que las configuraciones y trayectorias permiten identificar conflictos semióticos y resolverlos mediante la negociación de significados y cognitiva (grado en el que los significados pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los implementados). La ponencia (FL1) también forma parte de su trabajo de Tesis Doctoral de Blázquez (2000) en la que se construye una grupo de actividades para la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite funcional como aproximación óptima, para la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de segundo de bachillerato. Se muestra la utilidad de la definición propuesta frente a otras definiciones más intuitivas e ingenuas, la

importancia del uso de distintos sistemas de representación y del tratamiento previo del límite secuencial, la discriminación entre tendencias y límite finito, la participación del alumno en su aprendizaje, el uso de medios informáticos, y las dificultades que lleva asociadas el concepto. La comunicación FL3 utiliza como marco conceptual algunos constructos teóricos de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2003) y las ideas de (Lakoff y Núñez, 2000) para analizar la representación gráfica de funciones, constatando la importancia del uso de las metáforas, tanto en el discurso del profesor como de los alumnos para la construcción de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes y en la negociación de significados en el aula. En la comunicación (FL7) presentada en el Grupo de Investigación, se analizan los conflictos semióticos que surgen (a partir del análisis de una prueba pasada a estudiantes universitarios) entre el lenguaje matemático y la sintaxis del PCS Mathematica, al igual que aquéllos que aparecen entre los procedimientos matemáticos y los que utiliza el PCS todo ello desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS).

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TI C	Presentación/(Código)
1999	Blázquez, S.	Sobre la noción de límite en las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.	MC	B	No	P (FL1)
2003	Contreras, A. et al.	Investigación acerca de la enseñanza del límite en el marco de teoría de las funciones semióticas.	MT	B	No	C (FL2)
2004	Acevedo, J. y Font, V.	Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales.	MC	B	No	C (FL3)
2004	Rodríguez, F. M.	Una perspectiva didáctica en la iteración de funciones y el punto fijo.	MC	U	No	C (FL4)
2006	Contreras, A. et al.	Análisis de una experiencia de la enseñanza de la noción de límite funcional con herramientas del enfoque ontosemiótico.	MT	B	No	C (FL5)
2008	Contreras, A. y García, A. L.	La trayectoria instruccional de un proceso de estudio sobre el límite de una función.	MT	B.	No	C (FL6)
2008	Contreras, A. et al.	Prácticas del límite y derivada de una función con el programa Mathematica en estudiantes universitarios.	MT	U	Sí	CGI (FL7)

Tabla 3. Comunicaciones y ponencias sobre funciones y límite de funciones

Comunicaciones y ponencias sobre la derivada de una función (Tabla 4)

Los trabajos (D2) y (D6) están íntimamente conectados. Mientras que en el primero se hace una revisión, a partir del marco teórico EOS, de distintas investigaciones realizadas desde esta perspectiva teórica y se detecta como conflicto semiótico particular el que surge cuando los estudiantes deben distinguir la derivada puntual de la función

derivada, en (D6) se propone, basándose en estas ideas, una secuencia de actividades con ordenador para promover el aprendizaje de estos conceptos a partir de la noción de linealidad local.

La comunicación (D5), proviene de su Tesis Doctoral de Sánchez Matamoros (2004) y aporta al marco teórico APOS lo que se denominan “relaciones lógicas” como elemento interpretativo para explicar el paso de un nivel a otro del esquema de derivada de una función (inter, intra y trans). Estas relaciones resultan ser útiles para analizar la comprensión que poseen los estudiantes de bachillerato y primer curso de universidad del concepto y proporcionó información sobre la forma de comprender el concepto.

La comunicación (D7) plantea, después de revisar diversas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la optimización, un proyecto de investigación sobre esta noción. Presenta además una propuesta, basada en el EOS. Se propone llevar al aula con estudiantes de bachillerato una secuencia de actividades usando un software de geometría dinámica con el objetivo de analizar su idoneidad epistémica, cognitiva y mediacional en términos de dicha teoría.

La ponencia (D1) se enmarca dentro de una investigación más amplia dirigida hacia la Tesis Doctoral de Fonseca (2004) basada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y muestra cómo la derivación de funciones aparece como una amalgama de Organizaciones Matemáticas (OM) puntuales. Los autores establecen una OM local (minimal) con las tareas y las técnicas relacionadas con el tema. En la Tesis Doctoral se define además una OM en torno a la regla de Ruffini en el paso de la secundaria a la Universidad.

Pese a que no existen comunicaciones ni ponencias de la Tesis Doctoral de González, (2002), podemos decir que aporta un modelo de análisis de libros de texto que permite caracterizar la información, estructura y forma de hacer matemáticas que se plantean a los estudiantes en torno al concepto de punto crítico. Como una segunda parte de la investigación, se realiza un estudio de las aportaciones que introducirán las nuevas tecnologías, en particular los CAS en relación con las representaciones así como las modificaciones que plantea su uso en el aula de matemáticas.

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TIC	Presentación/(Código)
2002	Fonseca, C. Gascón, J.	Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria.	MT	B.	No	P (D1)
2005	Font, V.	Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada.	MT	B	No	P (D2)
2006	Mesa, G. et al.	Identificación y clasificación de los enfoques didácticos para la educación por competencias en algunos libros de cálculo diferencial.	MC	U	No	CGI (D3)
2007	Moreno, M. M. et al.	Competencias y evaluación: desarrollo de un instrumento de análisis y caracterización de problemas matemáticos de nivel superior.	MC	U	No	CGI (D4)
2007	Sánchez-Matamoros, G. et al.	Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas.	MT	B/U	No	C (D5)
2010	Robles, M. G. et al.	La función derivada a partir de una visualización de linealidad local.	MT	U	Sí	C (D6)
2010	Contreras, Á., Balcaza, T.	La enseñanza-aprendizaje de la optimización matemática en estudiantes de educación secundaria desde la perspectiva del EOS	MC	B	Sí	C (D7)

Tabla 4. Comunicaciones y ponencias sobre la derivada de una función

Comunicaciones y ponencias sobre la integral (Tabla 5)

Los problemas de enseñanza y aprendizaje del concepto de integral definida son los que más han sido tratados en las ponencias y comunicaciones en el ámbito de la Didáctica del Análisis Matemático en los Simposios de la SEIEM. Casi todos los trabajos han cristalizado en diferentes Tesis Doctorales. Pasamos ahora a comentar brevemente dichos trabajos relacionándolos con Tesis a que han dado lugar. La comunicación (I1) forma parte de la Tesis Doctoral de Depool (2004) en la cual se diseña y se lleva al aula un módulo instruccional para la enseñanza y aprendizaje del concepto de integral definida basado en un conjunto de prácticas de laboratorio diseñadas con el PCS *DERIVE*. La secuencia propuesta planteaba las prácticas atendiendo a una perspectiva numérica y gráfica, privilegiando el sentido de aproximación de la integral definida. Para analizar la comprensión del concepto por parte de los estudiantes, se utilizó una parte del marco conceptual definido por el Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2007), en combinación con la Teoría de las representaciones de Duval. Se establecieron tres perfiles de actuación de los estudiantes. La comunicación (I10), es una prolongación del trabajo de Depool (2004), y se establece una herramienta metodológica para analizar la comprensión de los estudiantes de los concepto de error de aproximación, cota del error y valores exactos y aproximado de una integral. Las comunicaciones (I1), (I5), (I8) e (I9), configuraron la Tesis Doctoral de Ordóñez (2011). Utiliza en la Teoría de la Funciones Semióticas y la Teoría de las representaciones de Duval sobre los registros

semióticos de representación para realizar un análisis del objeto integral en las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU). Identifican y describen algunos factores relacionados con los fenómenos de algebrización del Cálculo Integral y muestra las dificultades que tienen los estudiantes para que emerja el objeto integral, detectándose renuncias, tanto institucionales como personales para conseguir el aprendizaje de la integral definida. Las comunicaciones (I3), (I6) e (I11) forman parte de la Tesis Doctoral de Boigues (2010), en la que utiliza la Teoría APOS como marco teórico. Presenta dos descomposiciones genéticas del concepto de Integral de Riemann y utiliza la métrica Fuzzy para analizar la información obtenida de una serie de entrevistas realizadas a los estudiantes. Muestra que los estudiantes tienen mayor facilidad para manejar los elementos cognitivos que representan las acciones y observa que encuentran numerosas dificultades a la hora de establecer relaciones con los elementos que conforman el esquema de Integral de Riemann. La comunicación (I7) también forma parte de la Tesis Doctoral de Aldana (2011), quien emplea como marco de investigación también la Teoría APOS. Adapta las “relaciones lógicas” (Sanchez-Matamoros, 2004) entre los niveles intra, inter y trans del esquema construido a partir de una descomposición genética diferente a la de Boigues (2010) y establece una clasificación de un grupo de estudiantes de Matemáticas (profesores) en varios subniveles obtenidos a partir de los niveles iniciales. La comunicación (I4) forma parte de la Tesis Doctoral de González (2005) y se utiliza en ella un marco conceptual que combina la Teoría de las Situaciones Didácticas, la Teoría de Duval y la aproximación instrumental (Guin, Ruthven y Trouche, 2004). A partir de la perspectiva metodológica de la Ingeniería Didáctica se desarrolla una secuencia de enseñanza para la enseñanza y aprendizaje de la integral impropia. Se concluye que es posible transformar el contrato didáctico usual en la enseñanza superior y dar a los estudiantes una mayor responsabilidad en el proceso de aprendizaje, dar al registro gráfico un mayor estatus matemático y promover el trabajo en él y organizar las condiciones ecológicas en un aula de ordenadores para facilitar la colectivización de las técnicas instrumentales. Otra aportación importante de este trabajo es la detección de una variante del obstáculo epistemológico de la “heterogeneidad de las dimensiones” (Schneider, 1988), que se evidencia por la convicción que tienen los estudiantes de que para funciones positivas, $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b f^2(x)dx$ tienen el mismo carácter debido a que un área finita (respectivamente infinita área) corresponde por rotación alrededor del eje OX un volumen finito (respectivamente infinito volumen). Finalmente, en la comunicación (I13), se presenta un estudio con estudiantes de primero de la Licenciatura de Matemáticas en la que se evalúa la influencia del método visual para la comprensión del concepto de integral. Se describen los resultados de un cuestionario de problemas no rutinarios, tratando de identificar errores y dificultades relacionados con la comprensión visual de la integral. Por último, se sugieren aspectos clave para ser incorporados en la enseñanza explícita de la visualización en la disciplina del Análisis.

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TIC	Presentación/ (Código)
2003	Camacho, M. y Depool, R.	Análisis de la comprensión de la integral definida. Un estudio de casos.	MC	U	Si	CGI (I1)
2003	Contreras, A. y Ordóñez, L.	El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida.	MC	B	No	C (I2)
2004	Boigues, F. J.	El valor cognitivo de los sistemas de cálculo formal: el caso de la integral definida.	MT	U	Sí	G (I3)
2004	González, A. S. y Camacho, M.	La enseñanza y aprendizaje de la integral impropia. Algunos resultados de investigación relacionados con el registro gráfico.	MC	U	Sí	G (I4)
2005	Contreras, A. y Ordóñez, L.	Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida.	MT	B	No	CGI (I5)
2006	Boigues, J. y Pastor, J.	La teoría Fuzzy como elemento para medir el grado de desarrollo en la comprensión de la integral.	MT	U	Sí	CGI (I6)
2009	Aldana, E. y González, M ^a T.	Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario.	MT	U	No	CGI (I7)
2007	Ordóñez, L. y Contreras, A.	Significados histórico-epistemológicos y escolares de la integral definida. Restricciones planteadas por las pruebas de acceso a la universidad.	MC	B	No	CGI (I8)
2010	Ordóñez, L. y Contreras, A.	La integral definida en las pruebas de acceso a la universidad (PAU): sesgos y restricciones en la enseñanza de este objeto en 2º Bachillerato.	MC	B	No	P (I9)
2010	Camacho, et al.	La integral de Riemann. Interpretación de los errores de aproximación utilizando un CAS.	MC	U	Sí	P (I10)
2010	González, M ^a T., Aldana, E.	Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE	MT	U	No	P (I11)
2010	Boigues, F.J.	Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería.	MT	U	Sí	P (I12)
2010	Souto, B., Gómez, I.M ^a	Comprensión visual y concepto de integral en la enseñanza universitaria.	MC	U	No	C (I13)

Tabla 5. Comunicaciones y ponencias sobre el concepto de integral

Comunicaciones y ponencias sobre ecuaciones diferenciales (Tabla 6)

Únicamente dos de las comunicaciones se han dedicado a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y ambas poseen perspectivas tanto teóricas como metodológicas esencialmente diferentes. La (ED1) forma parte de la Tesis Doctoral (Perdomo 2010) en la que, previa la elaboración de un marco conceptual basado en la Resolución de Problemas (Schoenfeld, 1992) y el sentido de competencia matemática propuesto en (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2010), se experimentó un módulo de enseñanza dirigido a introducir el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un primer curso de la licenciatura en química. El objetivo principal consistió en analizar los procesos emergentes en el aula durante la implementación de dicho módulo. La enseñanza se basó en el uso de distintos problemas planteados en contextos hipotéticos, basados en situaciones reales para los estudiantes, que se resolvieron en un ambiente de interacción entre los alumnos y con la tecnología (la calculadora VoyageTM200). Analizando los procesos cognitivos, las heurísticas y las estrategias de control mostradas por los estudiantes durante el proceso de resolución, como elementos que describen la competencia matemática de los estudiantes (Schoenfeld, 1992), se concluye que el uso de la herramienta tecnológica promovió que los estudiantes desarrollaran procesos del PMA tales como la abstracción o la generalización, y la interacción entre los alumnos favoreció que expresaran, contrastaran, verificaran y justificaran sus argumentos. De esta forma, el modelo de enseñanza contribuyó a que los estudiantes desarrollaran habilidades y capacidades como la competencia estratégica y el razonamiento adaptativo (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2010). En el campo cognitivo, se concluye que la construcción de un concepto matemático que resulte novedoso para el estudiante, no debe entenderse como un hecho aislado, puesto que este nuevo conocimiento modifica la red de significados matemáticos de que dispone el individuo. De esta forma, la introducción del concepto de EDO, partiendo de su relación con el concepto de derivada de una función, permitió que los estudiantes iniciaran la construcción de un nuevo objeto matemático a la vez que se enriquecía la red de significados que asociaban al concepto de derivada de una función.

La comunicación (ED2), proviene del trabajo más amplio que constituye la Tesis Doctoral de Barquero (2009) en la cual se utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico como marco teórico y metodológico de la investigación. Se diseñan Recorridos de Estudio e Investigación (Chevallard, 2006) basados en la dinámica de poblaciones para el análisis y diseño del proceso didáctico subyacente. Se concluye que la implantación de los REI bajo condiciones controladas por la investigación pone de manifiesto algunas de las principales condiciones y restricciones didácticas ligadas principalmente al contrato didáctico imperante en la enseñanza universitaria, permitiendo dar una primera aproximación a la 'ecología de los REI'.

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TIC	Presentación
2007	Camacho , et al.	La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: un estudio exploratorio.	MC	U	Sí	CGI (ED1)
2010	Barquero et al.	Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE.	MT	U	No	C (ED2)

Tabla 6. Comunicaciones y ponencias sobre ecuaciones diferenciales

Consideraciones finales

En este trabajo hemos tratado de sintetizar la evolución de la investigación en Didáctica de las Matemáticas en el bachillerato y la universidad, haciendo primeramente una descripción de lo acontecido en el panorama internacional. Nos centramos posteriormente en analizar la esa evolución en nuestro país, particularizando el estudio al campo de la Didáctica del Análisis Matemático, utilizando como instrumentos de análisis las Actas de los Simposios de la SEIEM y la información disponible sobre las Tesis Doctorales defendidas en los últimos quince años. Se ha podido constatar a partir de nuestro análisis, cómo la aportación de los Simposios ha resultado ser determinante para la comunidad de investigadores de este campo. La mayoría de comunicaciones y ponencias que hemos ido detallando en el trabajo, han dado lugar a Tesis Doctorales. Consideramos que esto supone un avance importante para el desarrollo de la investigación en el área. El estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje en conceptos tales como límite, derivada, integral, han sido suficientemente estudiados y debemos pensar en abrir nuevos campos de investigación con nuevos enfoques.

Otro elemento que se ha podido observar es el uso de una gran diversidad de marcos teóricos y conceptuales en las diferentes investigaciones analizadas. Ahora bien, se ha podido constatar que los trabajos empíricos desarrollados en las investigaciones han conseguido, en líneas generales, aportar elementos que enriquecen en cierta medida los propios marcos utilizados (Sánchez-Matamoros, 2004; González, 2005; Fonseca, 2004), entre otros.

En relación con las preguntas planteadas por la coordinadora del seminario, pensamos que, el camino recorrido por la investigación en el bachillerato y universidad no ha seguido un camino paralelo a las necesidades del sistema educativo. La mayoría de investigaciones nos suministran resultados que confirman resultado obtenidos en otras o encuentran pequeños avances pero una gran parte de ellos deben ser incorporados a la enseñanza efectiva, buscando puentes que hagan visibles esas pequeñas aportaciones. Desde aquí se deben promover la elaboración de materiales curriculares que permitan implementar esos avances. La falta de conexión es uno de los puntos en los que habrá que poner un énfasis mayor en el futuro. Pensamos que deben crearse cuanto antes unas nuevas agendas de investigación en las que se incorporen nuevos aspectos que investigar acordes con la evolución de las investigaciones desarrolladas a nivel internacional (Artigue, Batanero y Kent, 2007)

Otro elemento importante que pensamos que debe ser atendido es la colaboración con grupos de investigación de otros países con el objetivo de internacionalizar nuestras investigaciones en el área, tal y como están haciendo otros grupos de investigación.

Referencias

- Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the University level?. En D. Holton (ed.) (2001) *The Teaching and Learning of Mathematics at University level. An ICMI study* (pp. 207-220). Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- Artigue, M.; Batanero, C. y Kent, P. (2007). Mathematics Thinking and Learning at Post-Secondary Level. En F. K. Lester (Ed.) *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Charlotte: Information Age Publishing.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6 (pp. 1-32).
- Azcárate, C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis Doctoral. UAB
- Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 135-149.
- Brousseau, G. (1998). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990* (editado y traducido por N. Balacheff, M. Cooper, R Sutherland and V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des prtiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 19 (2), pp. 221-266
- Chevallard, Y. (2006). "Steps towards a new epistemology in mathematics education". *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4) pp. 21-30.
- Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, emnrgent and socio-cultural perspectivas in the contexto f developmental research. *Educational Psychologist*, 31, 175-190.
- Dubinski, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructive theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (ed.) (2001) *The Teaching and Learning of Mathematics at University level. An ICMI study*, (pp. 207-220) The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J. L. (Ed.) (2000). *On the teaching of Linear Algebra*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist. *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp. 202-219. Blacksburg, VA.

- Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). En A. Gutiérrez y Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-273). Rotterdam: Sense Publishers.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet:
URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm
- Gray E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 2, (72-79)
- Gravemeijer, K. (1998). Developmental research as a research method. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study* (pp. 277-296). Gran Bretaña: Kluwer Academic Publisher.
- Guin, D.; Ruthven, K. y Trouche, L. (Eds.) (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. New York: Springer.
- Harel, G.; Selden, A. y Selden J. (2006). Advanced Mathematical Thinkinf. Some PME Perspectives. En A. Gutiérrez y Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 147-172). Rotterdam: Sense Publishers.
- Harel, G., Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50.
- Hitt, F.; Barrera, F. y Camacho, M. (2010). Mathematical Thinking, conceptual frameworks: A review of structure of analysis of protocols for Problem Solving. *Far East Journal of Mathematical Education* 4(2), pp. 93-115.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2009). The Strands of Mathematical Proficiency. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (7th ed.) (pp. 115-155). Washington, DC: National Academy Press.
- Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics come from: How the embodied mind bring mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Lester, F. (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España. Una aproximación desde “ISI-Web of Knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII/ Investigaçãõ em Educaçãõ Matemática XII* (pp. 1-26). Badajoz: SEIEM.
- Mariotti, A. (2006). Proof and proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez y y Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

- Maz-Machado, A.; Bracho-López, R.; Torralbo-Rodríguez, M.; Gutiérrez-Arenas, M. P.; y Hidalgo-Ariza M. D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: lossimposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 163-185.
- Misfeldt, M. (2003). Mathematician's writing. En A Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 2, 301-308
- Moreno M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (2), pp. 265-280.
- Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.
- Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures Dans la transition terminales S/DEUG Sciencies en analyse. Le cas de la notion dérivée et son environnement*. Tesis Doctoral. Universidad Paris 7.
- Selden, A. y Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 1-13.
- Sierpinska, A.:1995, *La compréhension en mathématiques*, Mont-Royal, Québec: Modulo Editeur.
- Torralbo, M., Vallejo, M. y Fernández, A. (2003). Panorama de la investigación en educación matemática en España a través de las tesis doctorales. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la SEIEM* (29-43). Granada: SEIEM.
- Rasmussen, C., Zandieh, M, King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: a Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51-73.
- Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and looking into some Mathematics Education frameworks. *The Mathematics Educator*, 10(1), 81-106.
- Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis des superficies et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11 (2/3), 241-294.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In Grouws, D. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 334-370.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores (Eds). *Investigación en Educación Matemática, XI. Tenerife*, 19-52.
- Tall, D. (2004). Thinking throught three worlds of mathematics. En M. Holmes & A. Fuglestead (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 281-288. Bergen, Norway: Bergen University College.

- Tall, D. (2007). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. *Plenaria presentada en el 10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Febrero 22-27, San Diego, California.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), pp. 151-169.
- Zazkis, R. y Applebaum, M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Larnaca: Chipre, pp. 2389-2397.

TESIS DOCTORALES DE DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

- Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Universidad Autónoma de Barcelona. Director: Josep Gascón Pérez. Codirectora: Marianna Bosh Casavò.
- Belmonte, J. L. (2010). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad. Universidad de Salamanca. Director: Modesto Sierra Vázquez.
- Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Universidad de Valladolid. Director: Tomás Ortega del Rincón.
- Boigues, F.J. (2010). *El desarrollo de un esquema sobre la integral definida en universitarios de ingeniería y medio ambiente*. Universidad de Alicante. Director: Salvador Llinares Ciscar.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Universidad Autónoma de Barcelona. Directora: Carmen Azcárate Giménez.
- Claros, F.J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Universidad de Granada. Director: Moisés Coriat Benarroch.
- Codes, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Universidad de Salamanca. Director: Modesto Sierra Vázquez.
- Delgado, C. A. (1999). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*. Universidad Autónoma de Barcelona. Directora: Carmen Azcárate Giménez.
- Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS)*. Universidad de La Laguna. Director: Matías Camacho Machín.
- Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de una función". Del "pensamiento del profesor" a la gestión de los momentos de estudio*. Universidad Autónoma de Barcelona. Director: Carmen Azcárate Giménez.

- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Universidad de Vigo. Director: Josep Gascon Pérez. Codirectora: Marianna Bosh Casavò.
- Galán, J.L. (2003). *Integrales múltiples con DERIVE, un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación*. Universidad de Málaga. Director: José Luis González Marí.
- Garbín, S. (2000). *Infinito actual; inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*. Universidad Autónoma de Barcelona. Directora: Carmen Azcárate Giménez.
- González, A.S. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica. Utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Director: Matías Camacho Machín.
- González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Director: Modesto Sierra Vázquez. Codirector:
- Moreno, M.M. (2001). *El profesor Universitario de Matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales*. Universidad Autónoma de Barcelona. Directora: Carmen Azcárate Giménez.
- Nora, S. (2007). *Aprendizaje del concepto de límite funcional en alumnos de ingenierías*. Universidad de Valladolid. Director: Tomás Ortega del Rincón.
- Perdomo, J. (2010). *Construcción del concepto de ecuación diferencial ordinaria en escenarios de resolución de problemas*. Universidad de La Laguna. Director: Matías Camacho Machín. Codirector: L. Manuel Santos Trigo.
- Rodríguez, P. (2004). *Derivación e integración de funciones de Variable Compleja con DERIVE. Un estudio de innovación curricular en segundo curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación*. Universidad de Málaga. Director: José Luis González Marí.
- Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)*. Universidad de Sevilla. Director: Salvador Llinares Ciscar. Codirectora: M^a Mercedes García Blanco.

Anexo: Comunicaciones y ponencias de Didáctica de la Estadística y Probabilidad

Año	Autores	Título	Nivel	Presentación
1998	Batanero, C. et al.	La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos: reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística	B	P
2004	Alvarado, H. y Batanero, C.	Elementos del significado del Teorema Central del Límite.	U	CGI
2007	Alvarado, H. y Batanero, C.	Distribución asintótica de la suma de variables aleatorias: significado en textos de estadística aplicada a la ingeniería.	U	CGI
2007	Díaz, C. et al	Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes para la aplicación del Teorema de Bayes.	U	C
2007	Huerta, P. y Carles, M.	El mundo de los problemas de Probabilidad Condicional en el contexto de los test de diagnóstico	B	C
2007	García, I. Y García, J. A.	Inferencia estadística y lenguaje: un estudio den Bachillerato.	B	C
2009	Rodríguez-Muñiz, L. J.	Experiencias de uso de la historia de la estadística y la probabilidad en una asignatura instrumental: métodos estadísticos de la ingeniería.	U	CGI
2009	Carpó, M. et al	Significados de la distribución normal en la universidad.	U	CGI
2009	Alvarado, H. y Retamal, M. L.	Diseño de unidades didácticas de la distribución muestral incorporando recursos tecnológicos.	U	CGI

Comunicaciones y ponencias de temas transversales: Comunicaciones y ponencias de Resolución de Problemas

Año	Autores	Título	Nivel	Presentación
1998	Cobo, P.	Análisis de las interacciones entre pares de alumnos en la resolución de problemas de Matemáticas.	B	P
2001	Roa, R. y Batanero, C.	Un estudio semiótico del razonamiento combinatorio en estudiantes universitarios.	U	P
2003	Lonjedo, M ^a . A. y Huerta, P.	La resolución de problemas de probabilidad condicional: un estudio exploratorio con estudiantes de Bachillerato.	B	CGI
2004	Cañadas, M ^a C. Y Castro, E.	Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la	T	C

Investifación en didáctica de las matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de
Universidad

		resolución de un problema matemático.		
2005	Codina, A. y Castro, E.	Resolución de problemas, interactividad e interacción. Una parrilla de observación.	U	CGI
2005	Cobo, P. y Fortuny, J. M.	El sistema tutorial ArgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas.	S-B	C
2005	Lonjedo, M ^a A. y Huerta, P.	La naturaleza de las cantidades presentes en el problema e probabilidad condicional.	B	C
2007	Huerta, P. y Carles, M.	El mundo de los problemas de Probabilidad Condicional en el contexto de los test de diagnóstico	B	C
2008	Iranzo, N. y Fortuny, J. M.	La influencia del SGD en las estrategias de resolución de problemas de geometría analítica.	B	C
2009	Sainza, C. y Figueiras, L.	Identificación de diferencias en la resolución de problemas de conteo entre alumnos de Primaria y Bachillerato.	P-B	C
2010	Aranda, C., y Callejo, M.L.	Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la construcción del concepto de dependencia lineal.	B	C

Comunicaciones y ponencias sobre la prueba y la demostración

Año	Autores	Título	Nivel	Presentación
2001	Sáenz, C.	Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las Matemáticas.	B	P
2005	Gutiérrez, A.	Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica.	U	P
2006	Fiallo J. E. y Gutiérrez, A.	Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.	B	CGI
2010	Camargo, L., Gutiérrez, Á.	El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social.	U	C
2001	Martínez, A.	La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica.	U	P

COMUNICACIONES

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

THE DIDACTIC-MATHEMATICS KNOWLEDGE ON ELEMENTARY ALGEBRAIC REASONING: AN EXPLORATORY STUDY

Aké. L.¹, Castro, W. F.², Godino, J. D.¹

¹Universidad de Granada (España); ²Universidad de Antioquia (Colombia)

Resumen. *En este trabajo se informa de algunos resultados de la primera fase de una investigación en la que se indaga sobre el conocimiento didáctico-matemático manifestado por futuros maestros de educación primaria al resolver tareas de naturaleza algebraica. La información se obtuvo mediante un cuestionario compuesto por tareas matemáticas que incluyen características algebraicas, y diseñado teniendo en cuenta elementos que componen el conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental.*

Palabras clave: Razonamiento algebraico, nivel de algebrización, formación de maestros, conocimiento del profesor.

Abstract. *We report some results of an ongoing research that examines the didactic-mathematics knowledge exhibited by 40 prospective primary school teachers when solving algebraic tasks. The information was obtained by applying a questionnaire designed to explore some features of the didactic-mathematics knowledge related to elementary algebraic reasoning.*

Keywords: Algebraic reasoning, level of algebraization, teacher's training, teacher's knowledge.

PROBLEMA Y ANTECEDENTES

Diversas investigaciones recomiendan la incorporación del razonamiento algebraico elemental en los distintos niveles de educación primaria (Kaput, 2000; Davis, 1984; Vergnaud, 1988). Esta integración del razonamiento algebraico en todos los grados y todos los temas de la escuela elemental, plantea en el ámbito de la formación inicial de profesores, la cuestión: *¿Qué conocimientos deben ser promovidos durante la formación inicial de los maestros para que puedan reconocer el carácter algebraico de las tareas matemáticas, y promover el razonamiento algebraico en los niños de la escuela elemental?* Cuestiones como éstas referidas a los conocimientos del profesor forman parte de la problemática que constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática. Al respecto Godino (2009) propone un sistema de categorías de análisis del conocimiento didáctico-matemático del profesor que integra, organiza y extiende diferentes modelos propuestos (Shulman, 1986; Hill, Ball y Schilling, 2008) sobre el complejo de

conocimientos que un profesor de matemáticas pone en juego para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes.

La formación de maestros de escuela elemental que les faculte para reconocer y promover el razonamiento algebraico elemental en los niños, es un reto para los formadores. Para Blanton y Kaput (2005, p. 414), “la mayoría de los profesores de escuela elemental tienen poca experiencia con los aspectos del razonamiento algebraico elemental...” y agregan “...debemos proveer formas apropiadas de apoyo profesional que produzcan cambios en las prácticas curriculares” (p. 414). Sin embargo existe poca evidencia sistemática de los efectos en la formación en maestros de acciones instruccionales específicas (Jacobs, Franke, Carpenter, Levy y Battey, 2007); por tanto, la investigación que promueva el razonamiento algebraico en los maestros en formación es tema de interés (Borko, Frykholm, Pittman, Eiteljorg, Nelson, Jacobs, et al., 2005). Es relevante mencionar que aunque Castro, Godino y Rivas (2010) investigaron las competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental, nuestro trabajo ofrece una orientación diferente.

En este sentido, nuestro problema de investigación se centra en el estudio del conocimiento didáctico-matemático que manifiestan futuros maestros de primaria, cuando resuelven tareas con características algebraicas. En esta comunicación se informa sobre algunos de los resultados obtenidos referentes a la resolución de una tarea que forma parte de un cuestionario piloto que se ha diseñado, con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009).

MÉTODO

El método de investigación para este estudio se inscribe en un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004). Se trata de un estudio de tipo exploratorio, que se realizó durante el curso académico 2010-2011 en la Escuela Normal para Maestros en la ciudad de Mérida, Yucatán, en el que se utilizó un cuestionario como instrumento para la recogida de datos.

Los sujetos

La aplicación del cuestionario se realizó con un grupo de 40 estudiantes en el contexto de un curso de formación en didáctica general. Los futuros maestros cursaban el último año de estudios y realizaban su prácticum en escuelas de educación primaria. El grupo está formado por 83% de mujeres y 17% de hombres, y cuya edad promedio está alrededor de los 21 años. La muestra para el estudio se escogió en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue de tipo incidental, por lo tanto no aleatoria, ya que los estudiantes participaron en tanto que estaban inscritos en el curso de didáctica general referido.

El cuestionario

El cuestionario de respuesta abierta, consta de ocho tareas. Algunas de estas fueron modificaciones de tareas propuestas en diferentes investigaciones referidas al álgebra en la escuela primaria (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Blanton y Kaput, 2003, Bednarz, Radford, Janvier, y Lepage, 1992), así como algunas tareas propuestas en libros de texto. La selección final se realizó considerando la presencia o ausencia de ciertos rasgos algebraicos.

Para el diseño de las tareas se tomaron en cuenta dos criterios, por un lado el nivel de algebrización, y por otro, el tipo de conocimiento que puede manifestarse a través de la resolución. La naturaleza algebraica se concibe desde una visión ampliada sobre el razonamiento algebraico que permite reconocer distintos tipos y grados de algebrización de la actividad matemática. Así, la consideración de una tarea como algebraica se ha basado en la identificación de rasgos algebraicos intrínsecos en la resolución de la misma. En las siguientes líneas, se describen sucintamente cinco ejes que permiten la identificación de rasgos algebraicos y, en función del número de estos rasgos se puede atribuir grados o niveles de algebrización (Aké, 2010).

- *Relaciones.* Se consideran: (1) las relaciones entre operaciones y sus propiedades; y (2) las relaciones binarias y sus respectivas propiedades. Las propiedades fundamentales de las operaciones y las diversas acepciones para el signo igual.
- *Funciones.* Se incluyen los diferentes tipos de funciones, operaciones con funciones, y propiedades; así como también las funciones proposicionales, fórmulas y parámetros.
- *Estructuras.* Se consideran, los diferentes tipos de estructuras, propias del álgebra, que permiten entender, por ejemplo, los naturales como un semi-anillo conmutativo.
- *Lenguajes.* Se consideran diferentes lenguajes para expresar la actividad matemática. Se hace referencia al uso de palabras, representaciones gráficas o figurativas, imágenes, iconos, sistemas alfanuméricos, etc.
- *Intensivos.* En este eje se ha considerado, a la generalización como un rasgo característico del razonamiento algebraico. La generalización se puede expresar mediante la identificación de características generales presentes en casos particulares. Por ejemplo, en el estudio de las funciones, $f(x) = x^2 + 1$ sería una función particular perteneciente a la clase de funciones lineales, $f(x) = 2x + 1$ esta última expresión será un objeto general. No obstante, en el estudio de las funciones polinómicas, la función lineal, $f(x) = 2x + 1$ será un caso particular (un extensivo) de dicha clase de funciones (un intensivo).

En el cuestionario se incluyeron consignas para explorar tres tipos de conocimientos de los futuros maestros, a saber: (1) conocimiento común, que faculta al maestro a resolver la tarea matemática; (2) conocimiento especializado utilizado por el profesor en la enseñanza, que demanda el uso de los diferentes significados de un objeto, de sus diferentes representaciones, la identificación de conocimientos de naturaleza algebraica puestos en juego en la resolución de las tareas; y (3) conocimiento ampliado, que favorece vincular el conocimiento común y el especializado y realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo.

A continuación se describen y analizan dos resoluciones dadas por futuros maestros a una tarea planteada en el cuestionario. El análisis realizado usando nociones del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino,

Batanero y Font, 2007), permitirá desvelar los diversos componentes del contenido involucrados en la resolución de la tarea. Esto proporcionará información sobre aspectos relevantes del conocimiento manifestado por los maestros en formación.

La tarea

Del cuestionario que se ha diseñado, se ha elegido, la tarea dos (tomada de un libro de texto de 6º de Educación Primaria), para ser discutida en este informe (ver Figura 1). Esta tarea busca obtener información sobre el conocimiento común a través de la resolución al inciso a). Por otro lado, la resolución de los incisos b) y c) ofrece información sobre el conocimiento especializado.

TAREA 2

Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el dígito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 + \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

- ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?
- ¿Cómo sabes que son correctos?
- Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.

Figura 1. Tarea 2

Se ha considerado a la tarea dos como una tarea matemática con rasgos algebraicos de tipo relacional y estructural “...la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico” (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets, 2006, p. 88). En tal sentido, la atribución del carácter algebraico a la tarea se fundamenta en la identificación de propiedades estructurales que soportan el algoritmo de la suma y el uso del sistema posicional que permiten obtener las condiciones para encontrar los valores numéricos de A, B y C. También se fundamenta, en la presencia de relaciones entre las operaciones y entre los números y en la introducción de un lenguaje simbólico-literario.

ANÁLISIS DE LA TAREA: SOLUCIÓN ARITMÉTICA

En la solución aritmética se debe interpretar, inicialmente que la suma de tres veces el mismo “número” debe dar como resultado un número cuya cifra de las unidades sea igual al número buscado. Esta condición, cuya identificación favorece la búsqueda sistemática del número, ofrece dos opciones: los números cero y cinco. Se descarta el primero, y de esta manera se encuentra una de las incógnitas. De la lectura de la suma de la segunda columna, la correspondiente a las decenas, se aprecia otra condición: la suma de tres números repetidos más una “unidad” da como resultado un número de dos cifras que termina en cinco. Esta condición permite identificar al número buscado: ocho. Para obtener el valor de la incógnita A se procede de manera análoga, y se halla el único número posible para la letra A: nueve. El algoritmo de la suma en columnas subyace en el proceso numérico de resolución.

Ejemplo de resolución aritmética

En la Figura 2 se presenta el proceso de resolución del estudiante A. Este proceso resalta la interpretación por parte del futuro maestro del elemento lingüístico, “determinar el número que representa cada letra”, como el proceso de asignación de números a las letras, que otorga un significado de número generalizado a las mismas.

También se han identificado, conceptos como la noción de suma, la multiplicación como suma repetida, el signo igual como asignación de un valor específico y como resultado de la operación de sumar. Así mismo, se aprecia que el futuro maestro pone en uso el concepto de variable cuando asigna valores, tomando casos posibles de solución.

ITEM 2.

~~A = 1~~
~~B = 2~~
~~C = 3~~

~~A = 2~~
~~B = 4~~
~~C = 6~~

~~A = 3~~
~~B = 6~~
~~C = 9~~

~~A = 4~~
~~B = 8~~
~~C = 12~~

~~A = 5~~
~~B = 10~~
~~C = 15~~

~~A = 6~~
~~B = 12~~
~~C = 18~~

~~A = 7~~
~~B = 14~~
~~C = 21~~

~~A = 8~~
~~B = 16~~
~~C = 24~~

~~A = 9~~
~~B = 18~~
~~C = 27~~

~~A = 10~~
~~B = 20~~
~~C = 30~~

~~A = 11~~
~~B = 22~~
~~C = 33~~

~~A = 12~~
~~B = 24~~
~~C = 36~~

~~A = 13~~
~~B = 26~~
~~C = 39~~

~~A = 14~~
~~B = 28~~
~~C = 42~~

~~A = 15~~
~~B = 30~~
~~C = 45~~

~~A = 16~~
~~B = 32~~
~~C = 48~~

~~A = 17~~
~~B = 34~~
~~C = 51~~

~~A = 18~~
~~B = 36~~
~~C = 54~~

~~A = 19~~
~~B = 38~~
~~C = 57~~

~~A = 20~~
~~B = 40~~
~~C = 60~~

~~A = 21~~
~~B = 42~~
~~C = 63~~

~~A = 22~~
~~B = 44~~
~~C = 66~~

~~A = 23~~
~~B = 46~~
~~C = 69~~

~~A = 24~~
~~B = 48~~
~~C = 72~~

~~A = 25~~
~~B = 50~~
~~C = 75~~

~~A = 26~~
~~B = 52~~
~~C = 78~~

~~A = 27~~
~~B = 54~~
~~C = 81~~

~~A = 28~~
~~B = 56~~
~~C = 84~~

~~A = 29~~
~~B = 58~~
~~C = 87~~

~~A = 30~~
~~B = 60~~
~~C = 90~~

~~A = 31~~
~~B = 62~~
~~C = 93~~

~~A = 32~~
~~B = 64~~
~~C = 96~~

~~A = 33~~
~~B = 66~~
~~C = 99~~

~~A = 34~~
~~B = 68~~
~~C = 102~~

~~A = 35~~
~~B = 70~~
~~C = 105~~

~~A = 36~~
~~B = 72~~
~~C = 108~~

~~A = 37~~
~~B = 74~~
~~C = 111~~

~~A = 38~~
~~B = 76~~
~~C = 114~~

~~A = 39~~
~~B = 78~~
~~C = 117~~

~~A = 40~~
~~B = 80~~
~~C = 120~~

~~A = 41~~
~~B = 82~~
~~C = 123~~

~~A = 42~~
~~B = 84~~
~~C = 126~~

~~A = 43~~
~~B = 86~~
~~C = 129~~

~~A = 44~~
~~B = 88~~
~~C = 132~~

~~A = 45~~
~~B = 90~~
~~C = 135~~

~~A = 46~~
~~B = 92~~
~~C = 138~~

~~A = 47~~
~~B = 94~~
~~C = 141~~

~~A = 48~~
~~B = 96~~
~~C = 144~~

~~A = 49~~
~~B = 98~~
~~C = 147~~

~~A = 50~~
~~B = 100~~
~~C = 150~~

~~A = 51~~
~~B = 102~~
~~C = 153~~

~~A = 52~~
~~B = 104~~
~~C = 156~~

~~A = 53~~
~~B = 106~~
~~C = 159~~

~~A = 54~~
~~B = 108~~
~~C = 162~~

~~A = 55~~
~~B = 110~~
~~C = 165~~

~~A = 56~~
~~B = 112~~
~~C = 168~~

~~A = 57~~
~~B = 114~~
~~C = 171~~

~~A = 58~~
~~B = 116~~
~~C = 174~~

~~A = 59~~
~~B = 118~~
~~C = 177~~

~~A = 60~~
~~B = 120~~
~~C = 180~~

~~A = 61~~
~~B = 122~~
~~C = 183~~

~~A = 62~~
~~B = 124~~
~~C = 186~~

~~A = 63~~
~~B = 126~~
~~C = 189~~

~~A = 64~~
~~B = 128~~
~~C = 192~~

~~A = 65~~
~~B = 130~~
~~C = 195~~

~~A = 66~~
~~B = 132~~
~~C = 198~~

~~A = 67~~
~~B = 134~~
~~C = 201~~

~~A = 68~~
~~B = 136~~
~~C = 204~~

~~A = 69~~
~~B = 138~~
~~C = 207~~

~~A = 70~~
~~B = 140~~
~~C = 210~~

~~A = 71~~
~~B = 142~~
~~C = 213~~

~~A = 72~~
~~B = 144~~
~~C = 216~~

~~A = 73~~
~~B = 146~~
~~C = 219~~

~~A = 74~~
~~B = 148~~
~~C = 222~~

~~A = 75~~
~~B = 150~~
~~C = 225~~

~~A = 76~~
~~B = 152~~
~~C = 228~~

~~A = 77~~
~~B = 154~~
~~C = 231~~

~~A = 78~~
~~B = 156~~
~~C = 234~~

~~A = 79~~
~~B = 158~~
~~C = 237~~

~~A = 80~~
~~B = 160~~
~~C = 240~~

~~A = 81~~
~~B = 162~~
~~C = 243~~

~~A = 82~~
~~B = 164~~
~~C = 246~~

~~A = 83~~
~~B = 166~~
~~C = 249~~

~~A = 84~~
~~B = 168~~
~~C = 252~~

~~A = 85~~
~~B = 170~~
~~C = 255~~

~~A = 86~~
~~B = 172~~
~~C = 258~~

~~A = 87~~
~~B = 174~~
~~C = 261~~

~~A = 88~~
~~B = 176~~
~~C = 264~~

~~A = 89~~
~~B = 178~~
~~C = 267~~

~~A = 90~~
~~B = 180~~
~~C = 270~~

~~A = 91~~
~~B = 182~~
~~C = 273~~

~~A = 92~~
~~B = 184~~
~~C = 276~~

~~A = 93~~
~~B = 186~~
~~C = 279~~

~~A = 94~~
~~B = 188~~
~~C = 282~~

~~A = 95~~
~~B = 190~~
~~C = 285~~

~~A = 96~~
~~B = 192~~
~~C = 288~~

~~A = 97~~
~~B = 194~~
~~C = 291~~

~~A = 98~~
~~B = 196~~
~~C = 294~~

~~A = 99~~
~~B = 198~~
~~C = 297~~

~~A = 100~~
~~B = 200~~
~~C = 300~~

~~A = 101~~
~~B = 202~~
~~C = 303~~

~~A = 102~~
~~B = 204~~
~~C = 306~~

~~A = 103~~
~~B = 206~~
~~C = 309~~

~~A = 104~~
~~B = 208~~
~~C = 312~~

~~A = 105~~
~~B = 210~~
~~C = 315~~

~~A = 106~~
~~B = 212~~
~~C = 318~~

~~A = 107~~
~~B = 214~~
~~C = 321~~

~~A = 108~~
~~B = 216~~
~~C = 324~~

~~A = 109~~
~~B = 218~~
~~C = 327~~

~~A = 110~~
~~B = 220~~
~~C = 330~~

~~A = 111~~
~~B = 222~~
~~C = 333~~

~~A = 112~~
~~B = 224~~
~~C = 336~~

~~A = 113~~
~~B = 226~~
~~C = 339~~

~~A = 114~~
~~B = 228~~
~~C = 342~~

~~A = 115~~
~~B = 230~~
~~C = 345~~

~~A = 116~~
~~B = 232~~
~~C = 348~~

~~A = 117~~
~~B = 234~~
~~C = 351~~

~~A = 118~~
~~B = 236~~
~~C = 354~~

~~A = 119~~
~~B = 238~~
~~C = 357~~

~~A = 120~~
~~B = 240~~
~~C = 360~~

~~A = 121~~
~~B = 242~~
~~C = 363~~

~~A = 122~~
~~B = 244~~
~~C = 366~~

~~A = 123~~
~~B = 246~~
~~C = 369~~

~~A = 124~~
~~B = 248~~
~~C = 372~~

~~A = 125~~
~~B = 250~~
~~C = 375~~

~~A = 126~~
~~B = 252~~
~~C = 378~~

~~A = 127~~
~~B = 254~~
~~C = 381~~

~~A = 128~~
~~B = 256~~
~~C = 384~~

~~A = 129~~
~~B = 258~~
~~C = 387~~

~~A = 130~~
~~B = 260~~
~~C = 390~~

~~A = 131~~
~~B = 262~~
~~C = 393~~

~~A = 132~~
~~B = 264~~
~~C = 396~~

~~A = 133~~
~~B = 266~~
~~C = 399~~

~~A = 134~~
~~B = 268~~
~~C = 402~~

~~A = 135~~
~~B = 270~~
~~C = 405~~

~~A = 136~~
~~B = 272~~
~~C = 408~~

~~A = 137~~
~~B = 274~~
~~C = 411~~

~~A = 138~~
~~B = 276~~
~~C = 414~~

~~A = 139~~
~~B = 278~~
~~C = 417~~

~~A = 140~~
~~B = 280~~
~~C = 420~~

~~A = 141~~
~~B = 282~~
~~C = 423~~

~~A = 142~~
~~B = 284~~
~~C = 426~~

~~A = 143~~
~~B = 286~~
~~C = 429~~

~~A = 144~~
~~B = 288~~
~~C = 432~~

~~A = 145~~
~~B = 290~~
~~C = 435~~

~~A = 146~~
~~B = 292~~
~~C = 438~~

~~A = 147~~
~~B = 294~~
~~C = 441~~

~~A = 148~~
~~B = 296~~
~~C = 444~~

~~A = 149~~
~~B = 298~~
~~C = 447~~

~~A = 150~~
~~B = 300~~
~~C = 450~~

~~A = 151~~
~~B = 302~~
~~C = 453~~

~~A = 152~~
~~B = 304~~
~~C = 456~~

~~A = 153~~
~~B = 306~~
~~C = 459~~

~~A = 154~~
~~B = 308~~
~~C = 462~~

~~A = 155~~
~~B = 310~~
~~C = 465~~

~~A = 156~~
~~B = 312~~
~~C = 468~~

~~A = 157~~
~~B = 314~~
~~C = 471~~

~~A = 158~~
~~B = 316~~
~~C = 474~~

~~A = 159~~
~~B = 318~~
~~C = 477~~

~~A = 160~~
~~B = 320~~
~~C = 480~~

~~A = 161~~
~~B = 322~~
~~C = 483~~

~~A = 162~~
~~B = 324~~
~~C = 486~~

~~A = 163~~
~~B = 326~~
~~C = 489~~

~~A = 164~~
~~B = 328~~
~~C = 492~~

~~A = 165~~
~~B = 330~~
~~C = 495~~

~~A = 166~~
~~B = 332~~
~~C = 498~~

~~A = 167~~
~~B = 334~~
~~C = 501~~

~~A = 168~~
~~B = 336~~
~~C = 504~~

~~A = 169~~
~~B = 338~~
~~C = 507~~

~~A = 170~~
~~B = 340~~
~~C = 510~~

~~A = 171~~
~~B = 342~~
~~C = 513~~

~~A = 172~~
~~B = 344~~
~~C = 516~~

~~A = 173~~
~~B = 346~~
~~C = 519~~

~~A = 174~~
~~B = 348~~
~~C = 522~~

~~A = 175~~
~~B = 350~~
~~C = 525~~

~~A = 176~~
~~B = 352~~
~~C = 528~~

~~A = 177~~
~~B = 354~~
~~C = 531~~

~~A = 178~~
~~B = 356~~
~~C = 534~~

~~A = 179~~
~~B = 358~~
~~C = 537~~

~~A = 180~~
~~B = 360~~
~~C = 540~~

~~A = 181~~
~~B = 362~~
~~C = 543~~

~~A = 182~~
~~B = 364~~
~~C = 546~~

~~A = 183~~
~~B = 366~~
~~C = 549~~

~~A = 184~~
~~B = 368~~
~~C = 552~~

~~A = 185~~
~~B = 370~~
~~C = 555~~

~~A = 186~~
~~B = 372~~
~~C = 558~~

~~A = 187~~
~~B = 374~~
~~C = 561~~

~~A = 188~~
~~B = 376~~
~~C = 564~~

~~A = 189~~
~~B = 378~~
~~C = 567~~

~~A = 190~~
~~B = 380~~
~~C = 570~~

~~A = 191~~
~~B = 382~~
~~C = 573~~

~~A = 192~~
~~B = 384~~
~~C = 576~~

~~A = 193~~
~~B = 386~~
~~C = 579~~

~~A = 194~~
~~B = 388~~
~~C = 582~~

~~A = 195~~
~~B = 390~~
~~C = 585~~

~~A = 196~~
~~B = 392~~
~~C = 588~~

~~A = 197~~
~~B = 394~~
~~C = 591~~

~~A = 198~~
~~B = 396~~
~~C = 594~~

~~A = 199~~
~~B = 398~~
~~C = 597~~

~~A = 200~~
~~B = 400~~
~~C = 600~~

~~A = 201~~
~~B = 402~~
~~C = 603~~

~~A = 202~~
~~B = 404~~
~~C = 606~~

~~A = 203~~
~~B = 406~~
~~C = 609~~

~~A = 204~~
~~B = 408~~
~~C = 612~~

~~A = 205~~
~~B = 410~~
~~C = 615~~

~~A = 206~~
~~B = 412~~
~~C = 618~~

~~A = 207~~
~~B = 414~~
~~C = 621~~

~~A = 208~~
~~B = 416~~
~~C = 624~~

~~A = 209~~
~~B = 418~~
~~C = 627~~

~~A = 210~~
~~B = 420~~
~~C = 630~~

~~A = 211~~
~~B = 422~~
~~C = 633~~

~~A = 212~~
~~B = 424~~
~~C = 636~~

~~A = 213~~
~~B = 426~~
~~C = 639~~

~~A = 214~~
~~B = 428~~
~~C = 642~~

~~A = 215~~
~~B = 430~~
~~C = 645~~

~~A = 216~~
~~B = 432~~
~~C = 648~~

~~A = 217~~
~~B = 434~~
~~C = 651~~

~~A = 218~~
~~B = 436~~
~~C = 654~~

~~A = 219~~
~~B = 438~~
~~C = 657~~

~~A = 220~~
~~B = 440~~
~~C = 660~~

~~A = 221~~
~~B = 442~~
~~C = 663~~

~~A = 222~~
~~B = 444~~
~~C = 666~~

~~A = 223~~
~~B = 446~~
~~C = 669~~

~~A = 224~~
~~B = 448~~
~~C = 672~~

~~A = 225~~
~~B = 450~~
~~C = 675~~

~~A = 226~~
~~B = 452~~
~~C = 678~~

~~A = 227~~
~~B = 454~~
~~C = 681~~

~~A = 228~~
~~B = 456~~
~~C = 684~~

~~A = 229~~
~~B = 458~~
~~C = 687~~

~~A = 230~~
~~B = 460~~
~~C = 690~~

~~A = 231~~
~~B = 462~~
~~C = 693~~

~~A = 232~~
~~B = 464~~
~~C = 696~~

~~A = 233~~
~~B = 466~~
~~C = 699~~

~~A = 234~~
~~B = 468~~
~~C = 702~~

~~A = 235~~
~~B = 470~~
~~C = 705~~

~~A = 236~~
~~B = 472~~
~~C = 708~~

~~A = 237~~
~~B = 474~~
~~C = 711~~

~~A = 238~~
~~B = 476~~
~~C = 714~~

~~A = 239~~
~~B = 478~~
~~C = 717~~

~~A = 240~~
~~B = 480~~
~~C = 720~~

~~A = 241~~
~~B = 482~~
~~C = 723~~

~~A = 242~~
~~B = 484~~
~~C = 726~~

~~A = 243~~
~~B = 486~~
~~C = 729~~

~~A = 244~~
~~B = 488~~
~~C = 732~~

~~A = 245~~
~~B = 490~~
~~C = 735~~

~~A = 246~~
~~B = 492~~
~~C = 738~~

~~A = 247~~
~~B = 494~~
~~C = 741~~

~~A = 248~~
~~B = 496~~
~~C = 744~~

~~A = 249~~
~~B = 498~~
~~C = 747~~

~~A = 250~~
~~B = 500~~
~~C = 750~~

~~A = 251~~
~~B = 502~~
~~C = 753~~

~~A = 252~~
~~B = 504~~
~~C = 756~~

~~A = 253~~
~~B = 506~~
~~C = 759~~

~~A = 254~~
~~B = 508~~
~~C = 762~~

~~A = 255~~
~~B = 510~~
~~C = 765~~

~~A = 256~~
~~B = 512~~
~~C = 768~~

~~A = 257~~
~~B = 514~~
~~C = 771~~

~~A = 258~~
~~B = 516~~
~~C = 774~~

~~A = 259~~
~~B = 518~~
~~C = 777~~

~~A = 260~~
~~B = 520~~
~~C = 780~~

~~A = 261~~
~~B = 522~~
~~C = 783~~

~~A = 262~~
~~B = 524~~
~~C = 786~~

~~A = 263~~
~~B = 526~~
~~C = 789~~

~~A = 264~~
~~B = 528~~
~~C = 792~~

~~A = 265~~
~~B = 530~~
~~C = 795~~

~~A = 266~~
~~B = 532~~
~~C = 798~~

~~A = 267~~
~~B = 534~~
~~C = 801~~

~~A = 268~~
~~B = 536~~
~~C = 804~~

~~A = 269~~
~~B = 538~~
~~C = 807~~

~~A = 270~~
~~B = 540~~
~~C = 810~~

~~A = 271~~
~~B = 542~~
~~C = 813~~

~~A = 272~~
~~B = 544~~
~~C = 816~~

~~A = 273~~
~~B = 546~~
~~C = 819~~

~~A = 274~~
~~B = 548~~
~~C = 822~~

~~A = 275~~
~~B = 550~~
~~C = 825~~

~~A = 276~~
~~B = 552~~
~~C = 828~~

~~A = 277~~
~~B = 554~~
~~C = 831~~

~~A = 278~~
~~B = 556~~
~~C = 834~~

~~A = 279~~
~~B = 558~~
~~C = 837~~

~~A = 280~~
~~B = 560~~
~~C = 840~~

~~A = 281~~
~~B = 562~~
~~C = 843~~

~~A = 282~~
~~B = 564~~
~~C = 846~~

~~A = 283~~
~~B = 566~~
~~C = 849~~

~~A = 284~~

Con respecto a los argumentos, el futuro maestro justifica la validez de su solución con la comprobación numérica más que con la identificación de una regla en la que se considere el uso de las propiedades para el algoritmo de la suma.

Se advierte que aunque el estudiante A tiene un conocimiento común que le permitió dar una solución correcta, no identificó conocimientos intrínsecos en la tarea y que son relativos a la educación primaria como dígito, número y valor posicional.

ANÁLISIS DE LA TAREA: SOLUCIÓN ALGEBRAICA

Una solución que resalte el carácter algebraico de la tarea puede ser aquella que transforme la suma vertical en una ecuación del tipo: $A + B + C = 200$, que a su vez puede ser escrita como: $C = 200 - A - B$, y simplificada mediante la aplicación de operaciones elementales en: $C = 200 - 5B - 3B$.

Ahora se puede despejar C en función de los parámetros A y B, y escribir una ecuación bi-paramétrica de la forma: $C = 200 - 8B$ de donde se obtiene $C = 200 - 8B$. La búsqueda de valores numéricos, para los dos parámetros, pertenecientes al conjunto de números desde el uno hasta el nueve, proporciona la solución: $A = 5, B = 3, C = 3$.

Ejemplo de resolución algebraica

La Figura 3 presenta la resolución del estudiante B. Esta solución de un futuro maestro se ha escogido en virtud al enfoque procedimental de naturaleza “algebraica” que ha usado.

Handwritten work by student B:

1. $A = 5B$
 $C = 3B$

2. $3A + 3B + 9B = 200$
 $3A + 12B = 200$
 $3(5B) + 12B = 200$
 $15B + 12B = 200$
 $27B = 200$
 $B = \frac{200}{27}$

3. $A = 5B = 5 \left(\frac{200}{27} \right) = \frac{1000}{27}$
 $C = 3B = 3 \left(\frac{200}{27} \right) = \frac{200}{9}$

Figura 3. Resolución completa de la tarea 2 por el estudiante B

Se identifica el uso de propiedades de los números reales, que se ponen de manifiesto al aplicar operaciones elementales tales como: sumar o restar la misma expresión a ambos lados de la ecuación.

Como procedimientos el futuro maestro plantea una relación entre las incógnitas, que deja a la letra B como parámetro. El establecimiento de esta relación se justifica en términos de lo que observa en la suma, () y atiende al conteo de las letras A, B y C. El segmento horizontal, lo considera como signo igual, en su acepción de resultado. Interpreta la expresión algebraica 2ACC como una concatenación de caracteres, y aparentemente considera que concatenar es equivalente a unir caracteres y unir caracteres es equivalente a sumar (plantea). Posteriormente reemplaza la letra C por 3B y agrupa términos semejantes.

En este punto del desarrollo de la resolución se aprecia el carácter algebraico procedimental de la solución, se halla ecuaciones equivalentes aplicando operaciones elementales, obteniendo finalmente otra relación, . Posteriormente el futuro maestro retoma la expresión inicial , reemplaza A por la expresión 5B, pero a continuación interpreta la “concatenación” 2ACC como un producto (ver Figura 4). Sin embargo llama la atención que el estudiante multiplica solo los números mas no así las letras. Igualmente el estudiante no hace uso de la interpretación de la concatenación de letras en términos del sistema posicional, que parece desconocer. Finalmente, al apreciar que los resultados obtenidos, no conducen a un valor numérico, el estudiante renuncia.

$$\begin{aligned} 3(5B) + 3B + 3(3B) &= 2(ACC) \\ 15B + 3B + 9B &= 2(5B)(3B)(3B) \\ 27B &= 90B \end{aligned}$$

Figura 4. Segundo planteamiento de una ecuación por del estudiante B

Aunque el maestro en formación sigue un procedimiento basado en las relaciones entre A, B y C que observa en la suma, no los percibe como dígitos de un número, pasa por alto la estructura matemática que soporta al sistema posicional, lo que le lleva a que la ecuación que plantea no cumpla con las condiciones de la tarea.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se advierte que la tarea supone un reto a los futuros maestros, pues precisa identificar las letras como representaciones de dígitos desconocidos, que deben ser hallados y que están sometidos a ciertas condiciones. Se pone en juego el concepto de incógnita. En su solución se utilizan configuraciones de objetos y significados que dan origen a una resolución aritmética y a otra algebraica.

En el caso del estudiante A, el procedimiento seguido (ensayo y error) bajo un enfoque aritmético le llevó a encontrar los valores correctos de A, B y C, pero llama la atención que identificó como conocimientos usados para la resolución de la tarea la suma,

“resta”, multiplicación y “estimación” y ninguna de carácter algebraico. Se observa que la resta no parece haber sido usada por el estudiante durante el proceso de resolución y el conocimiento “estimación” corresponde al método de ensayo y error. El estudiante A remite a la comprobación para justificar la validez de su resultado. Por otro lado, el estudiante B, vinculó las letras cuyos valores deben ser hallados con el uso de procedimientos “algebraicos”; intenta dar solución a la tarea planteando una ecuación, sin embargo no utilizó procedimientos que soportan el algoritmo de la suma en columnas, y propiedades vinculadas con el sistema posicional.

Además de este análisis descriptivo, los datos recogidos con el cuestionario, se han sometido a un análisis de carácter cuantitativo y cualitativo, usando las variables “grado de corrección” y “método de solución” respectivamente. Los resultados, respecto a la tarea 2, indican que el 55% de los estudiantes dio una respuesta correcta, el 25% dio una respuesta incorrecta y el 20% restante no dio respuesta alguna. Por otro lado, el 57% usó un método de ensayo y error, un 20% aplicó el algoritmo de la suma y la multiplicación y el 3% abordó la tarea planteando una ecuación. Los estudiantes apoyan sus afirmaciones en frases como “los valores asignados son correctos porque al realizar la suma me da el resultado” e identificaron prioritariamente conocimientos relativos a la aritmética.

CONCLUSIONES

En el análisis realizado se advierte que aunque los futuros maestros resolvieron la tarea, exhiben dificultades cuando intentan proporcionar una justificación y conectar las condiciones de la tarea con la identificación de conocimientos algebraicos implicados, aspectos relacionados con el conocimiento especializado. En este sentido, se precisa que tanto los maestros como los alumnos experimenten “procesos de desarrollo y proposición de ideas matemáticas en relación con la estructura, las propiedades o las relaciones que subyacen las ideas matemáticas” (NCISLA, 2003, p.11). Según los resultados, parece plausible que los obstáculos detectados en la comprensión y uso del algoritmo de la suma existan también en contextos no numéricos.

Es necesario brindar oportunidades a los maestros en formación no solo para construir una visión más ampliada del pensamiento algebraico sino también para que sean capaces de conectar éste con el currículo de la primaria en sus distintos bloques de contenido.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN), Fondos FEDER, y de la Beca MAEC-AECID (Ministerio de Asuntos Exteriores y Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo).

Referencias

- Aké, L. (2010). *Una aproximación al razonamiento algebraico elemental desde el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático*. Tesis de Fin de Máster, Universidad de Granada, España.
- Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B. y Lepage, A. (1992). Arithmetical and algebraic thinking in problem solving. *Proceedings of PME-XVI*, Durham, (Vol. 1, pp. 65-72).
- Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teacher's "algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics*, 10, 70-77.
- Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412.
- Borko, H., Frykholm, J. A., Pittman, M. E., Eiteljorg, E., Nelson, M., Jacobs, J. K., Clark, K. K., y Schneider, C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. *Zentralblatt für didaktik der mathematik: International reviews on mathematical education*, 37(1), 43-52.
- Carraher, D., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. En M. L. Fernández (Ed). Conferencia magistral presentada en el 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson, Arizona.
- Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), pp. 87-115.
- Castro, W.F., Godino, J.D., y Rivas, M. (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 259-270). Lleida: SEIEM
- Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. London: Croom Helm.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in

elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258-288.

Johnson, R.B., y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research*, 33(7), 14-26.

Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. *National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*. Dartmouth, MA.

León, O. G. y Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en psicología y educación*. (3ª ed.). Madrid: McGraw-Hill.

National Center for Improving Student Learning and Achievement-NCISLA- (2003). Algebraic skills and strategies for elementary teachers and students. *Brief*, 3(1), 1-12.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l' apprentissage de l'algebre. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l' informatique*, 189-19

LA NOTACIÓN NUMÉRICA EN EDUCACIÓN INFANTIL: UN ESTUDIO SOBRE EL PROCESO DE ADQUISICIÓN

NUMERICAL NOTATION IN PRE-SCHOOL EDUCATION: A STUDY OF THE ACQUISITION PROCESS

Alsina, A.

Universidad de Girona

Facultad de Educación y Psicología

Plaça de Sant Domènec, 9. 17071 Girona

angel.alsina@udg.edu

Resumen: *Se solicitó a niños de tres a seis años ($n=221$) que anotasen números dígitos presentados en su forma oral. Se establecieron tres niveles: 1) ausencia de código simbólico, que se caracteriza por notaciones concretas (dibujos, etc.) que parten de una correspondencia uno a uno; 2) aparición de código simbólico, en la que se usan notaciones pictóricas (cruces, etc.) en las que se mantiene todavía una correspondencia término a término; 3) consolidación del código simbólico (alfabetización), en la que se usan ya los números convencionales, aunque con múltiples inversiones.*

Palabras clave: sistemas externos de representación, notación numérica, prácticas educativas, alfabetización matemática, Educación Infantil.

Abstract: *Three to six-year-old pre-school students ($n=221$) were asked to write down digital numbers presented to them orally. The results revealed three levels among the pre-schoolers: 1) the absence of symbolic code, characterized by specific notations (drawings, etc.) based on the principle of a one-to-one correspondence; 2) the appearance of symbolic code, in which pictorial notations are used (crosses, etc.) and a term-to-term correspondence is still maintained; 3) the consolidation of the symbolic code (literacy), in which written numbers are used, although often reversed.*

Key words: external representation systems, numerical notation, educational practices, mathematical literacy, Pre-school Education.

Este estudio se ha desarrollado en el marco del Proyecto EDU2009-13893-C02-02, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Plan Nacional I+D+i 2010-2012)

INTRODUCCIÓN

En España existe una práctica docente muy afincada durante la etapa de Educación Infantil que consiste en enseñar a anotar números de forma convencional sin considerar sus implicaciones cognitivas, es decir, su papel como construcciones semióticas, con sus propias características, que interactúan con las representaciones internas en un proceso dialéctico, permitiendo tanto la exteriorización de dichas representaciones internas como la adquisición de nuevos conocimientos (Pérez-Echevarría, Martí y Pozo, 2010). Desde este marco, una de las prácticas educativas más habituales consiste en que los niños y niñas sigan el trazo, copien o dibujen números a partir de un modelo dado. Esta actividad todavía tan arraigada proviene de perspectivas que históricamente han atribuido un carácter estrictamente instrumental a los sistemas externos de representación (Tolchinski y Solé, 2009).

El objetivo de este trabajo, que se enmarca en un dominio de investigación constituido por los sistemas externos de representación (Martí y Pozo, 2000), es analizar cómo niños de 3 a 6 años ($n=221$) anotan números presentados oralmente. Los datos presentados forman parte de un estudio de mayor envergadura sobre el aprendizaje y la enseñanza de los sistemas externos de representación matemáticos en las primeras edades en el que, además de analizar las producciones de los niños y niñas, se analizan también las directrices curriculares para poder contextualizar y contrastar dichas prácticas.

ADQUISICIÓN DE LA NOTACIÓN NUMÉRICA

Martí (2003) establece que la construcción de los sistemas externos de representación se extiende, en las culturas occidentales, desde los 2-3 años hasta los 9-10 años aproximadamente. Este autor señala que, desde el punto de vista gráfico, en primer lugar es imprescindible diferenciar los sistemas figurativos (dibujos, imágenes) de los sistemas arbitrarios (especialmente escritura y números).

Respecto a la evolución de la notación numérica, Scheuer *et al.* (2000) sostienen que se trata de un proceso lento y complejo, en el que los usos de formas convencionales y no convencionales conviven durante un largo periodo. El primer eslabón del itinerario de adquisición de la notación de números es la correspondencia término a término (Sinclair, 1991). Según esta autora, en este nivel los signos varían según los niños (formas geométricas, dibujos, etc.), pero no dependen de la edad. Estas primeras producciones notacionales se refieren exclusivamente a la cantidad; la notación se compone de caracteres discretos, alineados; y en muchas producciones, un mismo signo es repetido varias veces (Bialystock, 1992). Martí (2003) indica que el siguiente paso es la producción de un signo único como representante de la cantidad. Se trata de un rasgo inherente al sistema de numeración decimal de difícil comprensión, dado que se usa un solo signo para designar a toda una colección. El hecho de que exista un objeto semiótico ya elaborado -los números escritos- que se transmite culturalmente ayuda a esta construcción, y no es hasta que los niños comprenden que un solo signo puede representar una pluralidad cuando empiezan a usar los números escritos. A partir de este momento los niños pueden comprender de forma progresiva las reglas del sistema (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994). En este nivel, la comprensión del valor cardinal (una única expresión para representar una cantidad) es fundamental, puesto que constituye el punto de partida para que los niños puedan ir adentrándose en la

comprensión de las reglas del sistema de numeración decimal: valor posicional, etc. (Zhang y Norman, 1995).

Otros estudios se han centrado en el análisis de los distintos tipos de notaciones que realizan los niños y niñas durante el itinerario de adquisición (Brizuela y Cayton, 2010; Scheuer *et al.*, 2000; entre otros). El estudio de Scheuer *et al.* (2000) se centra en las estrategias que utilizan niños de edades comprendidas entre los 5 y 8 años, con diferente historia escolar y familiar, en tareas en las que se les pide anotar diferentes números presentados oralmente o con fichas de valores. Un análisis cualitativo de las respuestas de los 162 niños de la muestra permite identificar siete categorías de notaciones que van revelando la laboriosa adquisición del conjunto de reglas convencionales que subyace a la representación numérica de las cantidades. Se trata de categorías mutuamente excluyentes, aún considerando que un mismo sujeto puede presentar varias estrategias a la vez: notaciones numéricas convencionales; notaciones múltiples, en las que se regulan el número de formas gráficas en la notación de acuerdo al número de elementos en la colección basándose, por lo general, en procedimientos de correspondencia uno a uno (una forma gráfica para cada elemento); formas para números, que consisten en la producción de una única grafía arbitraria; formas para clases de números, que registran características particulares de los números pero la notación no identifica de forma concluyente el número representado; notaciones logográficas, que resultan del establecimiento de una correspondencia estricta entre la forma oral de un número y su notación; notaciones compactadas, en las que además de la correspondencia anterior, se empieza a integrar el principio de notación posicional; y otras notaciones, que incluyen formas que se desvían de las descritas debido a errores suplementarios o de otras particularidades, o bien producciones que registran la naturaleza de los objetos que forman la colección en lugar de su cantidad. En el reciente estudio de Brizuela y Cayton (2010) se exploran las diferencias en el tipo de producciones de números que hacen los niños como consecuencia de dos modos distintos de presentar números que ya se usaron en el estudio de Scheuer *et al.* (2000): presentación oral y con fichas de valores. Las conclusiones del estudio de Brizuela y Cayton, realizado con un grupo de 22 niños desde Educación Infantil hasta segundo curso de Educación Primaria, señalan que en los niños de Educación Infantil la presentación oral parece facilitar las respuestas convencionales, es decir, dígitos anotados en una posición convencional.

MÉTODO

Participantes

En el estudio participaron 221 niños de 3 a 6 años de Girona (España) de tres centros escolares públicos de características similares (con alumnos diversos a nivel étnico, racial y sociocultural), y las 9 maestras de las aulas en las que se llevó a cabo la investigación. De todos los alumnos, 73 cursaban 1º de Educación Infantil (3-4 años); 75 eran de 2º de Educación Infantil (4-5 años) y 73 estaban escolarizados en 3º de Educación Infantil (5-6 años). La media de niños por clase era de 24.5 niños, cuando la río en España es de 25 alumnos por aula como máximo.

En relación a las maestras, 5 de ellas tenían plaza definitiva en el centro, 3 eran provisionales y 1 funcionaria en prácticas. Su edad oscilaba entre los 23 y los 51 años de edad, con una media de edad de 37.5 años. Todas eran Diplomadas en Magisterio, con la especialidad de Pre-escolar las de mayor edad y Educación Infantil las restantes.

A finales del segundo trimestre, cuando fueron llevadas a cabo las entrevistas, se trabajaba con los números 1 a 9, propiciándose en general un pasaje rápido de las colecciones concretas a través de la manipulación de materiales hacia la simbolización convencional mediante prácticas que consistían en copiar, seguir el trazo o bien dibujar números escritos en cuadernos y fichas, que era el tipo de práctica educativa más habitual en los tres centros escolares.

Instrumentos y procedimiento

Siguiendo el mismo procedimiento que en estudios preliminares (Scheuer *et al.*, 2000) se empleó una tarea sencilla de producción de notaciones. Se proponía a los niños que anotaran los siguientes números, en el siguiente orden: 1 - 2 - 3 en 1º de Educación Infantil; los números 1- 2 - 3 - 4 - 5 - 6 en 2º de Educación Infantil; y los números 1- 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 en 3º de Educación Infantil. Todas las cantidades eran dictadas oralmente, en catalán, a partir de la siguiente instrucción: *“Te voy a ir diciendo unos números. Quizás aún no los hayas aprendido en la escuela, pero seguro que tienes ideas para escribirlos”*.

La elección de estas cantidades responde al hecho de que en la mayoría de aulas de Educación Infantil existe la creencia que debe enseñarse a escribir los números hasta el 3 en 1º de Educación Infantil; hasta el 6 en 2º; y hasta el 9 en 3º.

Se optó por un interrogatorio de tipo clínico y, en función de las respuestas de los sujetos, eventualmente se contextualizaron los números presentados oralmente. De forma más concreta, cuando el niño no realizaba ninguna producción, se le ofrecían ayudas a través de consignas como por ejemplo: “dibuja tres huevos”, etc. Se analizaron las notaciones de los niños de acuerdo a dos criterios: el primero, de carácter conceptual, intentaba especificar los aspectos numéricos que el niño integraba en su notación (correspondencia término a término, cantidad, palabra numérica, etc.); el segundo era el análisis morfológico, que especificaba las formas empleadas (número convencional, signos como por ejemplo cruces, etc.). La clasificación de cada producción se trianguló con cada maestra tutora de forma independiente.

RESULTADOS

Partiendo de la base que para realizar el estudio se usó una tarea notacional muy simple en los que los niños anotaban números que se dictaban oralmente, el nivel de producciones no fue idéntico en todos los casos, sino que fue variable. Pese a esta producción desigual de respuestas, ligada fundamentalmente a la edad y al curso, a partir del criterio conceptual se clasificaron las notaciones en tres grandes categorías, que se muestran en la tabla 1.

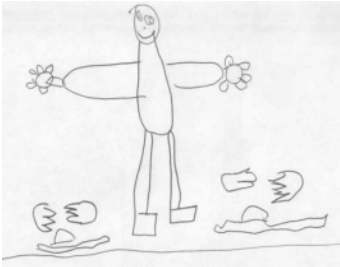
	Notación de la cantidad
Nivel 1: ausencia de código simbólico	Los niños usan dibujos para representar cantidades. En sus representaciones, que son concretas, realizan una correspondencia término a término: se trata de un sistema de notación aditivo. Por ejemplo, para representar que se han roto dos huevos, dibujan dos huevos rotos 
Nivel 2: aparición de código simbólico	Los niños usan símbolos pictóricos para representar cantidades, realizando de nuevo una correspondencia término a término. Por ejemplo, para representar dos huevos rotos usan diferentes tipos de representaciones que todavía mantienen la correspondencia término a término: // XX oo
Nivel 3: consolidación del código simbólico (alfabetización)	Los niños usan códigos simbólicos, transmitidos culturalmente, para representar cantidades. Estos símbolos tienen una particularidad “muy abstracta”: un solo símbolo permite representar muchos objetos. Por ejemplo, para representar dos huevos rotos usan el número convencional 2. 2

Tabla 1. Niveles de producción notacional de números presentados oralmente

El nivel 1 se caracteriza por la ausencia de código simbólico. En esta fase los participantes demostraron tener ya un cierto conocimiento de los números, dado que habían recibido formación en la escuela, pero su conocimiento era sobre todo de tipo pragmático, es decir, habían memorizado el valor del número, pero para representarlo

necesitaban que la instrucción se acompañase de una contextualización. En consecuencia, el tipo de representación que realizaban los niños eran sobre todo dibujos. Es el caso, por ejemplo, de la ilustración que se muestra en la tabla 1, en la que un niño representó la cantidad “dos” con dos huevos rotos, porque así se le contextualizó dicha cantidad. Como se indica en la tabla, en esta primera fase los niños realizaron mayoritariamente una correspondencia término a término, por lo que emplearon un sistema de notación aditivo. A pesar de esta similitud a nivel conceptual, a nivel morfológico las producciones de los niños fueron muy distintas. Aunque en todos los casos se trataba de dibujos, éstos fueron diversos debido sobre todo a la contextualización que se acompañaba a la instrucción.

En el nivel 2, en la que ya aparece el código, los niños mayoritariamente usaban un signo arbitrario como por ejemplo una cruz para representar las cantidades. Durante esta fase se observó también que, a nivel conceptual, los niños estudiados eran capaces de realizar una correspondencia uno a uno, aunque a nivel morfológico hubo mucha disparidad, tanto en relación al uso de signos diversos como al tamaño de los signos y su disposición en el papel: cruces, círculos u otras figuras geométricas, palitos, etc. La tendencia más habitual, sin embargo, fue alinearlos en disposición horizontal, uno detrás de otro.

En el nivel 3 los niños utilizaban una notación numérica convencional. La tabla 2 presenta la distribución de las respuestas en los cursos objeto de estudio, de acuerdo con los tres niveles de producción notacional presentados.

	1º Educación Infantil (3-4 años)	2º Educación Infantil (4-5 años)	3º Educación Infantil (5-6 años)
Nivel 1 Ausencia de código simbólico	51 (69,9%)	6 (8%)	0 (0%)
Nivel 2 Aparición del código simbólico	9 (12.3%)	11 (14.6%)	8 (11%)
Nivel 3 Consolidación del código simbólico	13 (17,8%)	58 (77.4%)	62 (89%)
<i>Total de respuestas</i>	73 (100%)	75 (100%)	73 (100%)

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes de las respuestas para curso

Al analizar la tabla 2 se observa que las respuestas del nivel 1, básicamente dibujos, fueron muy habituales en primero de Educación Infantil, al ser necesario contextualizar, en cambio en tercero ningún niño necesitó ya una contextualización y, por lo tanto, no usaron dibujos para anotar los números. Respecto a las respuestas de nivel 2, en el que se usan representaciones pictóricas, el porcentaje de uso fue relativamente escaso en los tres grupos de edad. En relación a las respuestas del nivel 3, en primero de Educación Infantil hubo pocas notaciones convencionales, pero se incrementaba considerablemente con la edad y el curso. Por su relevancia, se quiere hacer notar que en este último nivel

La notación numérica en educación infantil: Un estudio sobre el proceso de adquisición

se detectaron dos tipos de producciones a nivel morfológico: independientemente del tamaño, un grupo reducido de niños anotaron números en su disposición convencional, mientras que la mayoría tendían a invertir alguna de las grafías de los números, como se muestra en la tabla 3 y en la figura 1.

	1º Educación Infantil (3-4 años)	2º Educación Infantil (4-5 años)	3º Educación Infantil (5-6 años)
Notación convencional	0 (0 %)	16 (27.6%)	21 (33.9%)
Notación convencional invertida	13 (100 %)	42 (72.4%)	41 (66.1%)
Total de respuestas	13 (100%)	58 (100)	62 (100%)

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes de respuestas convencionales

Aunque se observa una tendencia a disminuir las inversiones con la edad, en los tres cursos el porcentaje de producciones notacionales invertidas fue muy elevado.

1º de Educación Infantil 1-2-3	2º de Educación Infantil 1-2-3-4-5-6
	
3º de Educación Infantil 1-2-3-4-5-6-7-8-9	
	

Figura 1. Algunos ejemplos de notaciones numéricas convencionales en disposición invertida

CONCLUSIONES

Los resultados ponen de manifiesto que la adquisición de la notación numérica es un proceso que sigue diversos niveles, aunque ello no significa necesariamente que haya una relación lineal entre ellos, ni tampoco que sean niveles totalmente independientes unos de otros (Pérez-Echevarría, Martí y Pozo, 2010). Estos autores consideran que no se puede lograr una comprensión conceptual de los sistemas sin que haya cierto grado de conocimiento del código y la sintaxis, pero el aprendizaje de estos aspectos no es ajeno de los contenidos que les confieren significado. A pesar de que en los trabajos consultados no existe un acuerdo unánime respecto a los estadios de adquisición, a grandes rasgos coinciden en que durante los primeros niveles las notaciones numéricas de los niños son concretas (dibujos, etc.), y progresivamente tienden a partir de una correspondencia uno a uno; en un nivel intermedio tienden a usar notaciones pictóricas (signos diversos como cruces, etc.) en las que se mantiene todavía una correspondencia término a término y, finalmente, se usan ya las notaciones numéricas convencionales.

Los datos encontrados en nuestro estudio han puesto de manifiesto que las respuestas del nivel 1, básicamente dibujos, fueron muy habituales en primero de Educación Infantil, lo cual es lógico ya que en muchos casos se solicitaba una contextualización, en cambio en tercero ningún niño necesitó ya este tipo de ayuda por parte del adulto y, por lo tanto, no usaron dibujos para anotar los números. Consideramos que el hecho de haber contextualizado puede haber influido notablemente en la respuesta de algunos alumnos, que en caso contrario no hubiesen realizado ninguna notación o bien hubieran realizado una notación de nivel 0, es decir, un tipo de representación que no tiene ninguna relación con la cantidad que debe ser representada como ocurre, por ejemplo, en el estudio de Scheuer *et al.* (2000).

Respecto a las respuestas de nivel 2, en el que se usan representaciones pictóricas, el porcentaje de uso fue relativamente escaso en los tres grupos de edad. En un estudio actualmente en curso sobre las concepciones del profesorado en relación a la enseñanza de la notación numérica en las primeras edades, se pone de manifiesto que este hecho es debido a que existe una práctica educativa muy extendida entre el profesorado de las primeras edades que consiste en pasar directamente a la enseñanza de la notación convencional sin considerar otras formas de representación preliminares. Tolchinski y Solé (2009) ponen de manifiesto que esta práctica es debida al carácter estrictamente instrumental que tradicionalmente se ha dado a los sistemas externos de representación. En relación a las respuestas del nivel 3, en el estudio se ha puesto de manifiesto que en primero de Educación Infantil hubo pocas notaciones convencionales, pero se incrementaba considerablemente con la edad y el curso, aunque con un elevado número de inversiones. Algunos trabajos realizados desde la neuropsicología han puesto de manifiesto que esta alteración puede presentarse de forma aislada (sólo con números escritos) o en asociación con letras y palabras (Hecaen, Angelerges y Houllier, 1962). Aunque durante la Educación Infantil estas inversiones no puedan considerarse todavía un trastorno neuropsicológico, el hecho de que los niños de mayor edad y curso sigan realizando inversiones hace pensar que esta etapa educativa probablemente no sea la más óptima para realizar esta tarea, dado que implica una buena coordinación visomotriz que muchos de los niños de estas edades parecen no haber adquirido todavía. En este sentido, Berdonneau (2008) afirma que *“la caligrafía de las cifras no es indispensable en educación infantil, y es mejor esperar a la etapa sensible propia de cada niño, es decir, el momento en que está realmente maduro para este aprendizaje, que se realizará de forma más rápida, fácil y segura”* (pág. 295). Desde este punto de

La notación numérica en educación infantil: Un estudio sobre el proceso de adquisición

vista el problema no radica tanto en lo que se hace sino en lo que se deja de hacer al dedicar buena parte del tiempo a copiar, seguir el trazo o dibujar números.

Así, pues, esta tradición pedagógica repercute sobre todo de manera negativa en la alfabetización matemática en las primeras edades, por diversos motivos:

- En primer lugar, porque se propicia que los alumnos aprendan a escribir números sin haber garantizado con antelación su comprensión, cuando en realidad sólo deberían representar simbólicamente aquello que comprenden (Martí, 2003).
- En segundo lugar, porque la representación del código escrito convencional implica habilidad motriz, es decir, los niños y niñas deben aprender la direccionalidad de los símbolos, representarlos en espacios limitados, etc. Este tipo de aprendizaje “consume” mucho tiempo, puesto que los niños y niñas de las primeras edades no tienen la suficiente madurez para realizar este tipo de aprendizaje.
- Y en tercer lugar, porque algunos niños y niñas de las primeras edades tienden a invertir los símbolos que escriben.

Es necesario, pues, seguir realizando nuevos estudios que traten de analizar las concepciones del profesorado entorno a este tema y, sobre todo, indagar sobre las prácticas educativas más adecuadas durante la etapa de Educación Infantil, en la línea apuntada por Salgado y Salinas (2009).

Referencias

- Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años)*. Barcelona: Editorial Graó.
- Bialystock, E. (1992). Symbolic representation of letters and numbers. *Cognitive Development*, 7, 301-316.
- Brizuela, B.M. y Cayon, G.A. (2010). Anotar números desde pre-escolar hasta segundo grado: el impacto del uso de dos sistemas de representación en la presentación. *Cultura y Educación*, 22(2), 149-167.
- Hecaen, H., Angelerges, R. y Houllier, S. (1962). Les varietes cliniques des acalculies au cours des lesions retrorrolandiques: approche statistique du problème. *Revue Neurologique*, 105, 85-103.
- Lerner, D., Sadovsky, P. y Wolman, S. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En P. Parra y I. Sáez (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 95-184). Barcelona: Paidós.
- Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente*. Madrid: Visor.
- Martí, E. y Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 11-30.
- Pérez-Echevarría, M.P., Martí, E. y Pozo, J.I. (2010). Los sistemas externos de representación como herramientas de la mente. *Cultura y Educación*, 22(2), 133-147.
- Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S.M. y Tièche-Christinat, C. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 31-50.

- Salgado, M. Y Salinas, M.J. (2009). El número en los libros de texto de Educación Infantil. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *XII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 487-497). Santander: SEIEM.
- Sinclair, A. (1991). Children's production and comprehension of written numerical representations. En K. Durkin y B. Shire (Eds.), *Language in mathematical education* (pp. 59-68). Buckingham: Open University Press.
- Tolchinsky, L. y Solé, I. (2009). Las condiciones de aprendizaje de la lengua escrita. *Infancia y Aprendizaje*, 32 (2), 131-140.
- Zhang, J. y Norman, D.A. (1995). A representational analysis of numeration systems. *Cognition*, 57, 271-295.

APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN PRIMITIVA: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON APPLETS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

APPROCHE TO THE CONCEPT OF PRIMITIVE FUNCTION: A TEACHING EXPERIMENT USING APPLETS OF DYNAMIC GEOMETRY

Aranda, C.¹, Callejo, M. L.²

¹I.E.S. Número 3 La Vila Joiosa, ²Universidad de Alicante

Resumen. *Esta comunicación aporta información sobre cómo un experimento de enseñanza en un entorno tecnológico usando applets elaborados con el programa de geometría dinámica Geogebra, ayudó a estudiantes de bachillerato (17-18 años) a construir distintas aproximaciones al concepto de función primitiva. Los resultados muestran por una parte que los estudiantes fueron capaces de relacionar distintas ideas usando argumentos variados para asociar la gráfica de una función con la de una de sus primitivas; en estos argumentos subyace principalmente la relación de este concepto con el de derivada. Por otra parte las soluciones aportadas se apoyaron más en el pensamiento visual que en el analítico.*

Palabras clave: función primitiva, experimento de enseñanza, soluciones visuales, soluciones analíticas

Abstract. *This communication provides information about how a teaching experiment in a technological environment using applets developed with software of dynamic geometry Geogebra, helped to high school students (17-18 years) to build different approaches to the concept of primitive function. The results show on one hand that students were able to relate different ideas using various arguments to associate the graph of a function with a graph of one of its primitive; the main argument is the relationship between the concept of function primitive and function derivative. On the other hand the solutions were supported mainly in the visual thinking.*

Key words: primitive function, teaching experiment, visual solutions, analytical solutions

1. INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo ha sido objeto de debate e investigación en las dos últimas décadas y constituye una parte importante de los programas de bachillerato de tipo científico y de algunos estudios universitarios. Su estudio debe atender a la comprensión de las ideas y conceptos básicos, a su aplicación a la resolución de problemas y al manejo de las reglas y algoritmos de cálculo. Sin embargo muchas veces su presentación se focaliza en aspectos de tipo procedimental como el manejo de una serie de reglas para calcular límites, derivadas o integrales.

Muchos de los estudios sobre la enseñanza del Cálculo han indicado la necesidad de usar múltiples representaciones para presentar los conceptos y de enfatizar las conexiones entre ellos para desarrollar una comprensión más profunda de los mismos (Tall, Smith y Piez, 2008). Por otra parte un significativo número de investigaciones considera que la comprensión en matemáticas tiene que ver con la habilidad para usar el pensamiento visual y el analítico (Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996) y que en lo referente al Cálculo los estudiantes tienen una fuerte tendencia a pensar analíticamente más que visualmente (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Uno de los conceptos fundamentales del Cálculo es el de integral cuya comprensión exige coordinar las representaciones gráficas y analíticas del concepto (Ferrini-Mundi y Graham, 1994).

Actualmente las tecnologías, además de liberar a los estudiantes de realizar manipulaciones algebraicas y cálculos tediosos, ofrecen la posibilidad de identificar representaciones equivalentes del mismo concepto, además de favorecer la interacción y el dinamismo (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006). Algunas propuestas didácticas para introducir el concepto de integral usando calculadoras gráficas, programas de cálculo simbólico u hojas de cálculo han arrojado resultados importantes. Berry y Nyman (2003) investigaron acerca de la relación entre el gráfico de una función derivada y el de la antiderivada; los resultados obtenidos confirmaron que al comienzo de la actividad los estudiantes mostraron una visión algebraica del Cálculo y tuvieron dificultad para relacionar las gráficas de una función derivada y la función original, pero el uso de la tecnología permitió desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Cálculo. Hong y Thomas (1997) mostraron que el manejo simultáneo de representaciones numéricas, gráficas y simbólicas de este concepto proporcionó un entorno favorable para construir una red de ideas relacionadas. Camacho (2005) ha advertido de la necesidad de prestar atención al proceso de transformación y relación entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas.

Nuestro trabajo se encuadra en las investigaciones que consideran que comprender un concepto implica reconocerlo en diferentes representaciones, manipularlo en una representación dada y trasladarlo de una representación a otra (Lesh, Post y Behr, 1987). También en los trabajos de Presmeg (2006) que proporcionan un marco para describir distintas formas de aproximación y representación de los conceptos matemáticos y de abordar y resolver problemas. Siguiendo a esta autora identificamos elementos para categorizar como analíticas y visuales, las respuestas de los estudiantes a cuestiones relacionadas con el concepto de integral definida. Las soluciones analíticas implican habitualmente el uso de ecuaciones, de manera que una representación gráfica se traduce a una representación analítica; en algunos casos estas soluciones no utilizan ecuaciones, pero identifican el tipo de función asociado a un tipo de ecuación (por ejemplo polinómicas); también suelen incluir el uso de números, por ejemplo identificando los valores que toma una función. Las soluciones visuales son las que interpretan las propiedades de los gráficos (por ejemplo máximos, mínimos, puntos de inflexión, etc.) sin apoyarse en representaciones analíticas.

El objetivo de esta comunicación es identificar en estudiantes de Bachillerato (17-18 años) el tipo de solución (visual o analítica) y los conceptos que utilizan cuando relacionan la gráfica de una función con la de su primitiva. Estos estudiantes habían participado en un experimento de enseñanza en un entorno tecnológico con *applets* en los que se utilizaban simultáneamente representaciones gráficas y analíticas.

2. MÉTODO

▪ *Participantes*

15 estudiantes de 2º de Bachillerato (17-18 años) participaron en un experimento de enseñanza donde se trabajó la integral definida. El rendimiento académico de estos estudiantes era muy alto o medio-alto (4), medio (5) y bajo o muy bajo (6). Previamente habían estudiado el concepto de límite y de derivada usando asiduamente el lenguaje visual y *applets* diseñados con el programa *Geogebra* para ilustrar estos conceptos.

▪ *Experimento de enseñanza*

El experimento se llevó a cabo en 8 sesiones de 1 hora durante tres semanas. La secuencia de enseñanza constaba de 11 tareas, 3 de ellas relacionadas con la función integral y 1 con el Teorema Fundamental del Cálculo integral.

La secuencia didáctica plantea la integral a partir del área (Turégano, 1998) y se articula a través de los siguientes puntos:

- cálculo del área del círculo y el método de “agotamiento”;
- aproximación de manera dinámica al área bajo una gráfica mediante rectángulos cuya altura es un extremo del intervalo, haciendo que la longitud de los subintervalos (base de los rectángulos) tienda a cero;
- exploración gráfica de las propiedades de la integral;
- introducción de la función integral, del teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

Los estudiantes trabajaron por parejas o tríos de similar nivel de rendimiento académico y se les proporcionaron guías con tareas, que debían resolver con la ayuda de los *applets*, ocasionalmente con una hoja de cálculo o con calculadora, y con lápiz y papel. En algunas tareas se les pedía que experimentaran con los *applets*, escribieran sus respuestas, reflexionaran sobre ellas y anotaran sus conclusiones, con el propósito de que construyesen el concepto de integral definida y estudiaran sus propiedades; otras eran de aplicación de los resultados obtenidos a la resolución de problemas reales. Al principio de cada sesión se hacía una puesta en común de la sesión anterior.

Se diseñaron distintos tipos de *applets*. Unos aproximaban el área de figuras:

- El área de un círculo mediante n triángulos con un vértice común en el centro del círculo e igual base, inscritos y circunscritos al círculo.
- El área bajo el gráfico de funciones como $f(x) = x^2$ en un intervalo mediante n rectángulos de igual base y de altura los valores extremos de $f(x)$ en cada subintervalo.

Para introducir la función integral se propusieron tres tareas. Dos de ellas se apoyaban en un *applet* que mostraba el área de la región determinada por una recta, $y=mx+n$ (inicialmente $y=-2$) y el eje de abscisas en el intervalo $[a, t]$ y el valor de la integral $\int_a^t f(x) dx$.

Se pedía justificar, usando las fórmulas de las áreas de los polígonos, los valores de las integrales que aparecían al variar m y n ; también obtener estas mismas integrales para cualquier valor de t ($t \geq 0$), y en un tercer paso, fijos m , n y t , el valor de la integral para cualquier valor de a ($a < t$). Se pretendía así que los estudiantes obtuviesen la expresión analítica de la función que representaba el área, en este caso un polinomio de segundo grado. En la segunda tarea se pedía dibujar de forma aproximada con lápiz y papel, las gráficas de las funciones que expresaban el área bajo dos gráficas

dadas (la recta horizontal de ecuación $y=2$ y la recta oblicua $y= x+2$) en el intervalo para .

Un *applet* que generaba la función integral en tiempo real (Figura 1) se utilizó como apoyo a la tercera tarea. Cambiando los valores de m y n mediante los deslizadores se podía generar la función área $A(x)$ para otras rectas. Se podía comprobar los resultados de la tarea anterior y hallar la integral para $m \geq 0$ y $n \geq 0$ en el intervalo y en el intervalo (siendo a y t positivos).

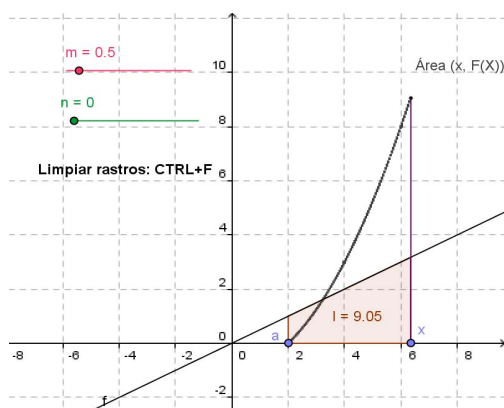


Figura 1. Trazo de la función integral

Por último para introducir el teorema fundamental del Cálculo un *applet* ilustraba que los límites de las tasas de variación media (por la izquierda y por la derecha) de la función integral son la función dada. Moviendo el deslizador, disminuyendo el valor h de amplitud del subintervalo, y para un valor de x dado, se podía ver como la tasa de variación media se aproximaba al valor $f(x)$. Con ello se podía intuir y demostrar que si f es continua, la función integral es continua y derivable, por tanto $f(x)$ es la derivada de $F(x)$.

▪ Recogida de datos

Tres semanas después de finalizar el experimento de enseñanza los estudiantes respondieron a un Test con 12 ítems seleccionados y adaptados de Hong y Thomas (1997), la mayor parte de los cuales no se podía responder si no se habían comprendido los conceptos. Los estudiantes debían contestar usando lápiz y papel y podían utilizar la calculadora gráfica

En esta comunicación presentamos los resultados del análisis de las respuestas al ítem 10 que hace referencia a la comprensión del concepto de función primitiva y al teorema fundamental del Cálculo. El objetivo de este ítem era identificar, a través de las respuestas de los estudiantes, distintas aproximaciones al concepto de función primitiva. En él se presenta la gráfica de una función $f(x)$ (Figura 2) y se pide seleccionar entre cinco gráficas (Figura 3) la que representa una primitiva de f y justificar la respuesta.

Aproximación al concepto de función primitiva: Un experimento de enseñanza con applets de geometría dinámica

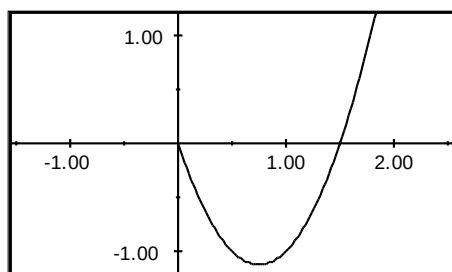


Figura 2. Gráfica de una función $f(x)$ de la que se pide identificar una primitiva.

Las gráficas para seleccionar son: (a) una traslación de $f(x)$; (b) una función creciente; (c) una función integral de f ; (d) la gráfica simétrica de (b) respecto del eje de abscisas; y (e) la gráfica simétrica de (c) respecto del eje de abscisas (Figura 3).

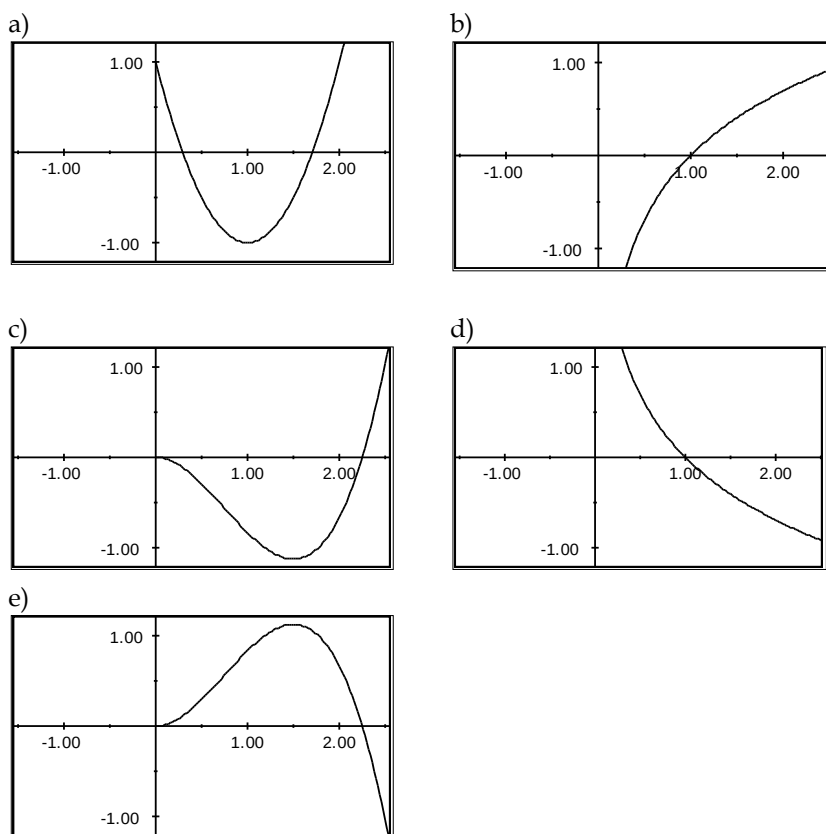


Figura 3. Alternativas de posibles funciones primitivas de $f(x)$ dadas en el Ítem 10

Dado que se trata de un ítem con formato de múltiples respuestas, se puede razonar centrando la atención en las características de $f(x)$ o en las de las posibles primitivas, apoyándose en el concepto de derivada (observando la variación de la pendiente de las tangentes en el intervalo $[0, 2]$) o en el de integral como área de la superficie la función

f cuando x varía entre 0 y 2. También se puede identificar $f(x)$ como función cuadrática y por tanto su primitiva es polinómica de grado 3.

Análisis de datos

Las respuestas de los estudiantes se analizaron identificando los conceptos e ideas utilizados y si los argumentos propuestos por los estudiantes eran de tipo visual, analítico o una combinación de ambos (armónico) (Presmeg, 2006).

Las soluciones analíticas son aquellas en las que los estudiantes identifican la ecuación de la función $f(x)$, calculan la función primitiva $F(x)$ y reconocen cuál de las posibles gráficas corresponde a $F(x)$ (es decir, asocian la ecuación obtenida con alguna de las gráficas dadas en el ítem). También se han considerado dentro de esta categoría las respuestas en las que sin escribir la ecuación de $f(x)$ o de las posibles primitivas, el estudiante identifica a qué familia de funciones pertenece $f(x)$ (cuadrática en este caso) y relaciona la ecuación de esta función y su primitiva o de una función y su derivada.

Las soluciones visuales son aquellas que operan con imágenes y determinan el aspecto de la gráfica de la primitiva de distintas formas: visualizando el cambio del valor del área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$, o el cambio del valor de la pendiente de la tangente de cada una de las posibles primitivas, o el comportamiento de $F(x)$ por el decrecimiento/crecimiento de $f(x)$ y el valor mínimo.

Finalmente, las soluciones armónicas son las que combinan elementos de tipo visual y analítico.

3. RESULTADOS

De los 15 estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza sólo 12 contestaron este ítem y 10 la justificaron. La Tabla 1 muestra los conceptos utilizados y los tipos de soluciones de estos 10 estudiantes.

Tabla 1. Conceptos utilizados por los estudiantes y tipo de solución

Solución/conceptos	Derivada	Área bajo una curva	Derivada y área bajo una curva	Total
Visual	5	0	2	7
Analítica	0	1	0	1
Armónica	0	0	2	2
Total	5	1	4	10

En la Tabla 1 se observa que la mayor parte de los argumentos de los estudiantes se basaron sólo en el concepto de derivada o en el de derivada y área bajo una curva simultáneamente. En cuanto al tipo de solución la mayor parte son de tipo visual. A continuación presentamos protocolos de los distintos tipos de soluciones encontradas.

Soluciones visuales

- 6 estudiantes se apoyaron de forma explícita o implícita en que $F(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, dando dos tipos de argumentos:
 - 2 estudiantes interpretaron que $f(1.5)=0$ nos da información sobre un máximo/mínimo de la primitiva. A partir de esta información los estudiantes

discriminaron las diferentes alternativas considerando la concavidad de $f(x)$. Estos estudiantes inicialmente seleccionaron dos posibles respuestas y discriminaron entre ellas estudiando la evolución de la función o la forma de la gráfica:

“Podrían ser la (c) y la (e) porque en el punto 1.5 $f(x)$ corta al eje x , y tanto en (c) como en (e) hay en ese punto un mínimo o un máximo relativo respectivamente, pero por la concavidad de la gráfica su primitiva es la (c).”

- 4 estudiantes hicieron el estudio del decrecimiento y crecimiento de $f(x)$ en el intervalo $[0, +\infty)$ y extrajeron consecuencias:

“La respuesta (c) es la correcta debido a que $f(x)$ es negativa en $[0, 1.5]$ y por tanto $F(x)$ tiene que ser decreciente en el intervalo $[0, 1.5]$. En el intervalo $[1.5, +\infty]$ $f(x)$ es positiva, por tanto $F(x)$ es creciente. En el punto 0 la $f(x)$ es 0, por tanto en $F(x)$ tiene que haber un punto de inflexión.”

- 1 estudiante se apoyó en que $F(x)$ representa la variación del área encerrada bajo la gráfica $f(x)$ en el intervalo $[a, x]$ siendo a fijo y $a \leq x \leq b$:

“(c) ya que es la única decreciente hasta $x=1.5$ y creciente a partir de ese punto, lo cual se corresponde con el área abarcada por $f(x)$.”

Solución de tipo analítico

- 1 estudiante identificó la expresión simbólica de la gráfica de $f(x)$ e integró dicha función:

— ———

“Utilizando los valores $x=0.5$, 1 y 2 la gráfica coincide con la (c).”

Soluciones armónicas

- Por último 2 estudiantes dieron una solución en que aparecían elementos visuales y analíticos. Uno de ellos, además de interpretar el significado de $f(1.5)=0$, en su exposición subyace la asociación entre la forma de una gráfica y su expresión analítica:

“La (b) y la (d) no pueden ser debido a que una función exponencial no puede ser la primitiva de una función polinómica. La (a) no puede ser tampoco debido a que cuando en $f(x)$ para $x=1.5$, en la primitiva ha de haber un máximo o un mínimo, ya que la derivada es igual a 0. Así que tampoco puede ser la (e). Por tanto la única que puede ser es la gráfica (c).”

En resumen, de los 10 estudiantes que justificaron sus respuestas, 7 usaron únicamente el pensamiento visual con elementos del concepto de derivada (intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión) y de función integral (valor del área bajo la gráfica), sólo 1 calculó la primitiva, dando una solución de tipo analítico y por último, 2 se apoyaron en ambos conceptos, derivada e integral, usando tanto elementos visuales como analíticos para justificar su respuesta.

4. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

El objetivo de esta comunicación era identificar en estudiantes de Bachillerato que habían participado en un experimento de enseñanza, el tipo de solución (visual o analítica) y los conceptos que ponían en juego cuando respondían a un ítem relativo a la relación entre la gráfica de una función y la de su primitiva.

Los resultados muestran que los estudiantes respondieron mayoritariamente usando soluciones visuales y relacionando diferentes ideas matemáticas: las características de una función y sus implicaciones en el comportamiento de su primitiva (que tome el valor 0; el crecimiento/decrecimiento); los conceptos de función integral asociada a los conceptos de derivada y área bajo una gráfica (cuando la función es negativa la función integral decrece porque el área bajo el eje aumenta y cuando es positiva crece). Pero también hubo estudiantes que generaron soluciones analíticas para justificar sus respuestas (una función polinómica tiene una primitiva polinómica). Asimismo se constató una tendencia mayor a apoyarse en el concepto de derivada utilizando distintos argumentos. Esto muestra que el experimento de enseñanza ayudó a la construcción del concepto de función primitiva en la medida en que los estudiantes relacionaron distintas ideas, y favoreció el desarrollo del pensamiento visual.

En el experimento de enseñanza se utilizaron *applets* para generar de forma constructiva la función integral en tiempo real, una vez fijado el intervalo de integración, y para relacionar el concepto de integral y de derivada, ilustrando que los límites de las tasas de variación media (por la izquierda y por la derecha) de la función integral son la función dada. Nosotras interpretamos los resultados obtenidos en el sentido de que estos *applets* y las tareas asociadas ayudaron a los estudiantes a relacionar diferentes conceptos y a aplicarlos a una situación nueva, pues la gráfica de $f(x)$ (Figura 2) difería de las que se habían trabajado en clase, lo cual es un indicador de la comprensión. Además parece que tanto la presentación de la cuestión como los tipos de *applets* utilizados favorecieron que los estudiantes dieran preferentemente soluciones visuales, a pesar de que disponían de los conocimientos necesarios para dar soluciones de tipo analítico, identificando los tipos de funciones que aparecían en los diferentes gráficos y la relación entre la expresión analítica de una función y su primitiva.

Finalmente, una vez más se pone de manifiesto que trabajar con distintos sistemas de representación es importante para la construcción de los conceptos matemáticos (Aranda y Callejo, 2010), pues promueve la capacidad de relacionar el pensamiento analítico y visual, que es esencial en la comprensión de la diferenciación y la integración (Haciomeroglu, Aspinwall y Presmeg, 2010). En este sentido 2 estudiantes fueron capaces de relacionar ambos tipos de pensamiento. Nos parece pues que experimentos de este tipo ayudan a mejorar la comprensión del concepto de función primitiva.

Referencias

- Aranda, C., & Callejo, M.L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: Un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 129-158.
- Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 481-497.

- Camacho, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system). En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 97-110). Córdoba: SEIEM.
- Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-138). Washington, DC: MAA.
- Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-274). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Ferrini-Mundi, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. En J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analysis and results, MAA Notes 33* (pp. 31-45). Washington, DC: MAA.
- Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L., & Presmeg, N. C. (2010). Contrasting cases of Calculus students' understanding of derivative graphs'. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 152 -176.
- Hong, Y., & Thomas, M. (1997). Using the computer to improve conceptual thinking in integration. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 3, pp. 81-88). Lahti, Finland: University of Helsinki.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M., (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense.
- Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. En M. K. Heid & G.W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. Research Syntheses*. Vol. 1 (pp. 207-258). Charlotte N.C.: NCTM-IAP.
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), 233-249.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D_4 . *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 435-457.

CARACTERÍSTICAS DE UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES ARITMÉTICO-ALGEBRAICOS⁵⁵

FEATURES OF AN INTELLIGENT TUTORING SYSTEM FOR THE SOLVING OF ARITHMETIC-ALGEBRAIC WORD PROBLEMS

Arnau, D.¹, Arevalillo-Herráez, M.², Puig, L.¹

¹ Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València

² Departament d'Informàtica, Universitat de València

Resumen. Hemos diseñado un sistema tutorial inteligente, llamado *Resolutor de Problemas Basado en Hipergrafos*, que es capaz de supervisar la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos tomando el método cartesiano como modelo de competencia. El programa a) admite resoluciones aritméticas y algebraicas; b) permite el recurso a una o más ecuaciones; y c) determina la validez de las expresiones que se asocian a las cantidades atendiendo a las restricciones del problema. La conjunción de estas características proporciona la flexibilidad necesaria para dar cuenta de múltiples posibles soluciones de un mismo problema. Además, el entorno también permite añadir nuevas colecciones de problemas, lo que posibilitaría su uso en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales tanto en primaria como en secundaria.

Palabras clave: sistema tutorial inteligente; problemas verbales; resolución algebraica; resolución aritmética; enseñanza y aprendizaje asistidos por ordenador.

Abstract. We have designed an intelligent tutoring system, called *Hypergraph Based Problem Solver*, which is capable of supervising arithmetic-algebraic word problem solving by taking the cartesian method as a component of formal competence. This software a) supports both arithmetic and algebraic solving; b) allows the use of one or multiple equations; and c) determines the validity of the expressions associated with the quantities attending to the problem's restrictions. The combination of these features provides the flexibility to account for multiple possible solutions to one problem. In addition, the environment allows adding new problems to the repository. This makes it specially suitable as a teaching and learning tool in primary and secondary school.

Key words: intelligent tutoring system; word problems; algebraic solving; arithmetical solving; computer assisted learning and teaching.

⁵⁵ Esta investigación se ha realizado dentro del proyecto EDU2009-10599 concedido por la Dirección General de Investigación Científica y Gestión del Plan Nacional I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia.

ANTECEDENTES

El diseño de entornos informáticos para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales ha sido un tema habitual de investigación en la Matemática Educativa. Algunos de estos programas pretenden sustituir el papel del profesor; otros ofrecen entornos en los que el resolutor puede recurrir a distintos sistemas de representación o puede liberarse de tareas rutinarias como el cálculo de operaciones aritméticas. Entre los primeros se incluirían los sistemas expertos y los sistemas tutoriales inteligentes (en adelante, STI) y podríamos citar como ejemplos *AnimalWatch* (Beal y Arroyo, 2002) o *MathCAL* (Chang, Sung y Lin, 2006). Entre los segundos, se encontrarían los programas de propósito general y los bancos de trabajo y podríamos citar como ejemplos *Word Problem Assistant* (Thompson, 1989), *HERON* (Reusser, 1993) y *ANIMATE* (Nathan, 1990) o el uso que se hace de las hojas electrónicas de cálculo en la resolución de problemas verbales (Arnau y Puig, 2005; Sutherland y Rojano, 1993). Los entornos que pretenden sustituir el papel del profesor habitualmente se centran en dos tareas: la tutorización del proceso de resolución y la generación de una secuencia de problemas que se adapte a las características de un estudiante.

Un ejemplo de STI que pretende tutorizar la resolución de un problema verbal sería *MathCAL* (Chang, Sung y Lin, 2006). El programa organiza el proceso de resolución aritmética alrededor de las cuatro fases de trabajo propuestas por Polya (entender el problema; concebir un plan; ejecutar el plan y revisar la solución) para lo que se hace pasar al usuario por cuatro interfaces distintas de manera secuencial. El resolutor genera el plan a partir de una secuencia de pasos prealmacenada que, durante la ejecución del plan, se representará mediante un esquema en forma de árbol (similar al empleado en otros entornos como *Word Problem Assistant* o *HERON*) que permitirá expresar la solución del problema. El programa es capaz de determinar la validez de la solución y de ofrecer una solución correcta en caso que el usuario lo solicite.

El programa *AnimalWatch* (Beal y Arroyo, 2002) sería un ejemplo de STI que dirige la atención a determinar el modelo de estudiante y a proponer una secuencia de problemas que se adapte a sus conocimientos matemáticos. El programa plantea problemas sobre animales en peligro de extinción (osos panda, ballenas, etc.) que deben resolverse de manera aritmética y está dirigido a estudiantes de últimos cursos de primaria y primeros de secundaria. A diferencia de *MathCAL*, *AnimalWatch* pone el énfasis en el resultado del problema, en lugar de hacerlo en el proceso de resolución.

OBJETIVOS Y MARCO TEÓRICO

Los entornos interactivos de aprendizaje para la resolución de problemas verbales que se han diseñado hasta el momento han debido decidir entre permitir flexibilidad al resolutor en sus decisiones y poder tutorizar sus acciones. Entre aquellos que tutorizaban realmente el proceso de resolución, la falta de flexibilidad se reflejaba en: un problema se asocia a una solución; una cantidad se asocia a una expresión; y cada problema se asocia a unos mensajes de error.

Hemos construido un sistema tutorial inteligente que es capaz de supervisar la resolución de aquellos problemas verbales aritmético-algebraicos que puedan reducirse a un conjunto de relaciones ternarias entre cantidades. Para dotarlo de flexibilidad en la respuesta hemos exigido que el programa cumpliera la siguientes condiciones:

Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético algebraicos

- *Independencia respecto al método de resolución.* El problema permite resolver problemas de manera aritmética y de manera algebraica.
- *Independencia respecto al uso de una o más ecuaciones.* Cuando se resuelve de manera algebraica, es posible el uso de una o más letras y el consiguiente recurso a una o más ecuaciones.
- *Independencia entre cantidad y su representación.* El programa no supone una asignación determinada entre una cantidad y su representación, sino que comprueba la validez de una expresión atendiendo a las restricciones del problema y a las decisiones del resolutor.
- *Independencia de funcionamiento del STI respecto del problema.* La verificación de la validez de las expresiones matemáticas que se introducen y los mensajes (básicos) de error y ayuda que proporcionará el STI son independientes del problema concreto que se está resolviendo.

Como el programa pretende tutorizar la actuación de sujetos reales cuando resuelven problemas, su diseño se fundamentará sobre un modelo de competencia en la resolución de problemas verbales que le servirá de referente. Hemos tomado como modelo de competencia la división en pasos ideales del método cartesiano (en adelante, MC) que describe las acciones de un sujeto ideal cuando resuelve un problema verbal de manera algebraica (Filloy, Puig y Rojano, 2008; Puig, 2003). De manera resumida, los pasos del MC, hasta el planteamiento de la ecuación, son: 1) lectura analítica del problema; 2) asignación de letra (o letras) a una (o varias) cantidad conocida; 3) representación del resto de cantidades desconocidas; 4) construcción de la ecuación (o de tantas ecuaciones como letras se empleen). Tomar el MC como modelo de competencia también nos permite tutorizar la resolución aritmética de problemas, ya que, desde un punto de vista algorítmico (es decir, dejando de lado los procesos cognitivos y centrándonos en las acciones que se realizan), podríamos decir que la resolución aritmética es un caso particular de la resolución mediante el MC en el que sólo se ejecutan los pasos primero y tercero.

EL FUNCIONAMIENTO DEL TUTOR

A continuación, ofreceremos ejemplos del funcionamiento del programa, cuando se resuelven los problemas *Conejos y gallinas* y *Camisas y pantalones*, que pondrán de manifiesto cómo se han integrado las distintas exigencias en un entorno informático.

Conejos y gallinas

En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

Camisas y pantalones

En las rebajas compré tres camisas y dos pantalones por 95 €. Recuerdo que el precio de un pantalón era de 25 €. ¿Cuál era el precio de cada camisa?

Podemos resumir los pasos segundo y tercero del MC como la definición de las cantidades que participarán en la resolución del problema. La definición de una cantidad conocida exigirá la asignación de un valor numérico; mientras que la definición de una cantidad desconocida supondrá la asignación de una letra o de una expresión que

materialice una relación que tiene esta cantidad con otras cantidades. Atendiendo a esto, una vez se selecciona un problema, el programa (ver Figura 2) muestra el enunciado y únicamente da al resolutor la posibilidad de pulsar el botón *Definir nueva cantidad*.

Una vez se acciona el botón, se activa el panel de declaración de cantidades, el usuario debe seleccionar el nombre de una cantidad de las que aparecen en un menú desplegable (ver Figura 3) y elegir entre tres posibles acciones: *Asignar número*; *Asignar letra* o *Asignar expresión*. Estas tres opciones responderían, respectivamente, a: dar un valor a una cantidad conocida, asignar una letra a una cantidad desconocida y asignar una expresión aritmética o algebraica a una cantidad desconocida. En caso que la asignación fuera incorrecta, el programa muestra un mensaje de error (ver Figura 3). Una vez se define una cantidad de manera correcta, se representa el nombre de la cantidad y la expresión que se le ha asociado en el cuadro *Cantidades definidas* (ver Figura 4).

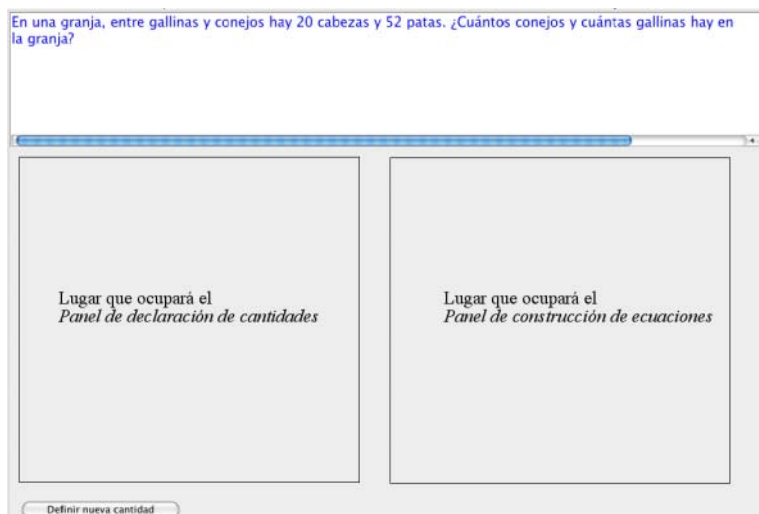


Figura 2

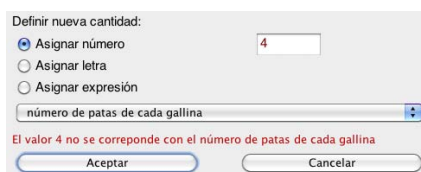


Figura 3

El usuario elige el orden en que declara las cantidades a las que se asigna un número o una letra y tiene libertad para decidir a qué cantidad desconocida asignará una letra y el número de letras que va a emplear. Así, por ejemplo, en la Figura 4, tras haber declarado que la cantidad conocida *número de patas de cada conejo* vale 4, se asigna la letra *x* a la cantidad desconocida *número de gallinas* cuando aún quedan cantidades conocidas por declarar.

Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético algebraicos

Cantidades definidas:

4 -> número de patas de cada conejo

Definir nueva cantidad:

☐ Asignar número

☒ Asignar letra

☐ Asignar expresión

x|

número de gallinas

Aceptar Cancelar

Figura 4

La definición de una cantidad a la que se le asigna una expresión aritmética o algebraica supone recurrir a una relación en la que aparece esta cantidad y exige que se hayan definido previamente las otras cantidades que participan en la relación. Así, si se declara la cantidad *números de conejos* basándose en el hecho de que la suma del número de conejos y de gallinas es igual al número de animales, deberán definirse previamente las cantidades *número de gallinas* y *número de cabezas*. Cuando se elige la opción *Asignar expresión*, el programa genera unos botones (ver Figura 6) que representan los signos de las cuatro operaciones básicas y la expresión de las distintas cantidades declaradas hasta el momento. En la Figura 5, se muestra la secuencia de botones que es necesario pulsar para asignar la expresión $20 - x$ a la cantidad *número de conejos*.



Figura 5

Para recordar a qué cantidad corresponde cada expresión se puede consultar la ventana en la que aparecen las cantidades que ya se han declarado. Además cuando se sitúa el cursor sobre uno de los botones que representa una cantidad, aparece un globo de ayuda con el nombre de la cantidad (ver Figura 6).

Figura 6

El programa gestiona la necesidad de utilizar paréntesis en el proceso de construcción de las expresiones para que, de esta forma, el usuario pueda centrarse en el proceso de resolución y no deba preocuparse de las dificultades propias del uso del lenguaje algebraico⁵⁶. Así, por ejemplo, mientras se construye la expresión para la cantidad *número de patas de todos los conejos*, el programa (ver Figura 7) no pone 4 entre paréntesis; pero sí, $20 - x$.

Figura 7

Cuando se hayan declarado todas cantidades necesarias para resolver el problema (lo que supondría haber concluido el paso tercero del MC), el programa activará el panel de construcción de ecuaciones. La construcción de una ecuación supondrá la asignación de una nueva expresión a una cantidad a la que se le había asignado otra previamente. Por esta razón, el término izquierdo de la ecuación se obtendrá del listado de expresiones construidas que aparecerán en un menú desplegable; mientras que el término derecho supondrá la construcción, mediante los botones, de una expresión que dará cuenta de la

⁵⁶ De acuerdo con Filloy, Puig y Rojano (2008), la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos depende básicamente de tres componentes: la competencia en el lenguaje natural en el que está escrito el enunciado; la competencia en el lenguaje del álgebra en el que se representará la ecuación y la competencia en el proceso de conversión del texto expresado en lenguaje natural a lenguaje algebraico. Al tomar la decisión de permitir que el programa gestione la necesidad del uso de paréntesis, estamos soslayando la exigencia de la competencia en el lenguaje del álgebra. Somos conscientes de que esta competencia será necesaria si queremos que los estudiantes puedan utilizar de manera autónoma el MC; pero al reducir esta exigencia, pretendemos que puedan centrar su atención en el proceso de conversión del enunciado del problema al lenguaje del álgebra."

Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético algebraicos

relación que queda por emplear⁵⁷. Una vez se introduce la ecuación, el programa comprueba su validez y proporciona, en su caso, un mensaje en el que informa que el planteamiento es correcto.

En el caso que nos ocupa (ver Figura 8), únicamente queda por emplearse la relación que establece que el *número de patas* (52) es igual a *número de patas de todos los conejos* ($4(20 - x)$) más *número de patas de todas las gallinas* ($2x$). Así, si tomamos la decisión de escribir de dos formas distintas la cantidad *número de patas de todas las gallinas*, construiríamos la ecuación $2x = 52 - 4(20 - x)$.

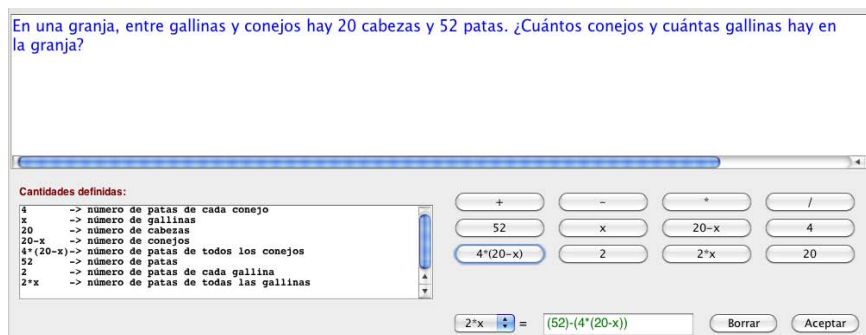


Figura 8

El programa también acepta planteamiento de sistemas de ecuaciones cuando se resuelven problemas de manera algebraica. Para ello, no se necesita dar ninguna instrucción, ni es necesario introducir una nueva información sobre el problema, sencillamente se debe asignar más de una letra en el proceso de definición de cantidades. En la Figura 9, se muestra el instante en que, en una nueva resolución del problema *Conejos y gallinas*, se asigna la letra *y* a la cantidad *número de gallinas* después de haber asignado la letra *x* a la cantidad *número de conejos*.

⁵⁷ La dificultad para expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes cuando se construye una ecuación es inherente a la resolución algebraica de problemas. No podemos decir que el entorno ayude a evitar esta dificultad, pero sí que hace explícita la necesidad de igualar una expresión existente de una cantidad (la que aparece en el menú desplegable a la izquierda del signo igual) con una nueva expresión de esta cantidad (que se deberá construir en el cuadro de texto situado a la derecha del signo igual) obtenida al emplear una relación que no se había utilizado en el paso 3 del MC.

Cantidades definidas:

4	-> número de patas de cada conejo
2	-> número de patas de cada gallina
52	-> número de patas
20	-> número de cabezas
x	-> número de conejos

Definir nueva cantidad:

☐ Asignar número
☒ Asignar letra
☐ Asignar expresión

número de gallinas

Aceptar Cancelar

Figura 9

En este caso, cuando finaliza la definición de cantidades, el programa crea espacio para la construcción de dos ecuaciones y supervisa su construcción (ver Figura 10).

Cantidades definidas:

4	-> número de patas de cada conejo
2	-> número de patas de cada gallina
52	-> número de patas
20	-> número de cabezas
x	-> número de conejos
y	-> número de gallinas
4*x	-> número de patas de todos los conejos
2*y	-> número de patas de todas las gallinas

+ - * /
 x 52 4 2*y
 2 20 4*x y

$52 = 2*y + 4*x$
 $20 = x + y$
 Planteamiento correcto

Figura 10

Si las características del problema lo permiten, el programa también es capaz de verificar una resolución aritmética. En este caso, el usuario se limitará a declarar las cantidades conocidas y a construir expresiones aritméticas para calcular las cantidades desconocidas. En la Figura 11, se ofrece el instante de la resolución aritmética del problema *Camisas y pantalones* en el que se construye la expresión que determinará la cantidad *precio de una camisa* (aquella por la que se pregunta en el enunciado). Conviene señalar que hemos decidido mostrar las expresiones aritméticas sin evaluar para hacer explícito el funcionamiento del programa.

Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético algebraicos

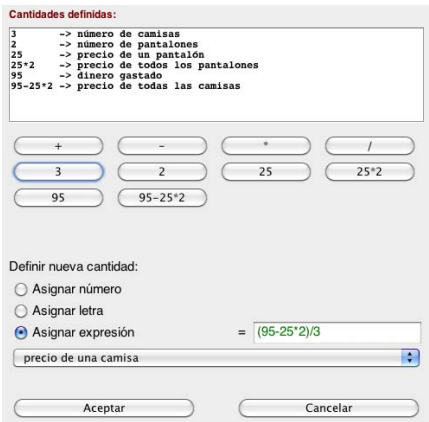


Figura 11

Sin embargo, el hecho de que realicemos una lectura aritmética de un problema no supone que no podamos resolverlo siguiendo los pasos del MC. Por ejemplo, si para la lectura anterior del problema *Camisas y pantalones*, asignamos la letra *x* a la cantidad *precio de una camisa*, el problema también calificaría de correcto el planteamiento de la ecuación $95 = 3x + 2 \cdot 25$ (ver Figura 12).

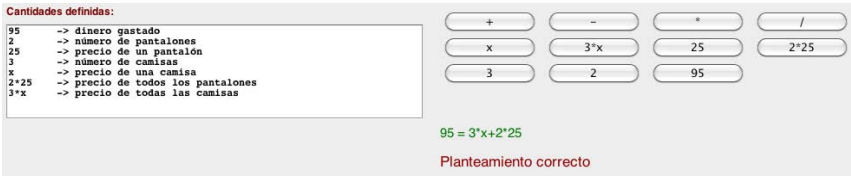


Figura 12

A MODO DE CONCLUSIÓN

El recurso al método cartesiano como modelo de competencia nos ha permitido construir un STI que examina la resolución de problemas verbales y es flexible respecto al método de resolución a emplear y la asignación de expresiones a las cantidades desconocidas. El entorno admite el recurso a soluciones aritméticas y algebraicas y permite la incorporación de nuevas colecciones de problemas. En consecuencia, podría ser posible utilizar el programa como un instrumento para el aprendizaje de la resolución de problemas en los niveles de primaria y secundaria. Por otro lado, también podemos suponer que un estudiante mínimamente instruido en su uso podrá aprovechar las características del tutorización del programa sin la presencia de un tutor humano.

A diferencia de otros entornos diseñados con intenciones similares, hemos construido un STI que es flexible con las decisiones del resolutor y tutoriza de manera detallada el proceso de resolución. Esto nos permitirá en un futuro incorporar al entorno la posibilidad de hacer un diagnóstico fino de las dificultades de un estudiante para proponer una secuencia de problemas que se adapte a sus posibilidades.

Referencias

- Arnau, D. y Puig, L. (2005). Análisis de las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del IX Simposio de la SEIEM* (pp. 153-162). Córdoba, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y la SEIEM.
- Beal, C. R. y Arroyo, I. (2002). The AnimalWatch project: Creating an intelligent computer mathematics tutor. En S. Calvert, A. Jordan y R. Cocking (Eds.), *Children in the digital age: Influences of Electronic Media on Development* (pp. 183-198). Westport, CT: Praeger.
- Chang, K. E., Sung, Y. T. y Lin, S. F. (2006). Computer-assisted learning for mathematical problem solving. *Computers & Education*, 46(2), 140-151.
- Fillooy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), 327-342.
- Nathan, M. J. (1990). Empowering the student: prospects for an unintelligent tutoring system. En *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems: Empowering People* (pp. 407-414). New York: ACM.
- Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del VII Simposio de la SEIEM* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.
- Reusser, K. (1993). Tutoring Systems and Pedagogical Theory: Representational Tools for Understanding, Planning, and Reflection in Problem Solving. En S. P. Lajoie y S. J. Derry (Eds.), *Computers as Cognitive Tools*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12(4), 353-383.
- Thompson, P. W. (1989). Artificial Intelligence, Advanced Technology, and Learning and Teaching Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 135-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE LA ESTADÍSTICA EN FUTUROS PROFESORES EN UNA TAREA ABIERTA

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G.

Universidad de Granada

Resumen. *En este trabajo se evalúa el conocimiento especializado de la estadística elemental, que una muestra de 108 futuros profesores de educación primaria, ponen en juego al analizar la idoneidad epistémica de un proyecto de análisis de datos. Utilizando la guía de análisis de la idoneidad didáctica propuesta por Godino (2009) se definen niveles de aplicación de los diferentes descriptores, estudiando el nivel alcanzado en los descriptores y componentes de la idoneidad didáctica. Los resultados muestran un conocimiento especializado escaso sobre la estadística.*

Palabras clave: Conocimiento especializado de la estadística, idoneidad epistémica, formación de profesores

Abstract. *We analyze the specialized knowledge of elementary statistics in a sample of 108 pre-service primary school teachers when analyzing the epistemic suitability of a statistical project. Using the guide to analyze the epistemic suitability proposed by Godino (2009) we define levels in the application of the different descriptors. We study the levels in the different descriptors and components of epistemic suitability. Results suggest a poor specialized knowledge of statistics.*

Key words: Specialized statistical knowledge, epistemic suitability, teacher education

INTRODUCCIÓN

El incremento actual de los contenidos de estadística en la Educación Primaria y el cambio sugerido de enfoque en la enseñanza (MEC, 2006) responden a la necesidad creciente de formar ciudadanos estadísticamente cultos. Para poder llevar a cabo estas propuestas será necesaria una formación adecuada de los profesores responsables de ponerlas en práctica.

La investigación sobre el conocimiento didáctico es iniciada por Shulman (1986) y ha sido muy amplia, como podemos ver, por ejemplo en Llinares y Krainer, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007, Wood, 2008 o el ICMI Study 15 (Even y Ball, 2009), así como en la extensa investigación del Grupo de Investigación, “Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas” de la SEIEM. Sin embargo, el caso particular de la estadística apenas ha sido tenido en cuenta, como se reconoce en el Joint ICMI/IASE Study (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

En esta investigación se evalúa el conocimiento especializado de la estadística en una muestra de 108 futuros profesores de educación primaria. Para ello se propone a los

participantes al analizar la idoneidad epistémica (Godino, Contreras y Font, 2006) de una experiencia de enseñanza de estadística, experimentada por ellos mismos. La finalidad es ampliar la escasa investigación existente y obtener información de utilidad para los formadores de profesores. A continuación presentamos los fundamentos del estudio, material y método, resultados y conclusiones.

FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO

Diferentes modelos del conocimiento del profesor se han desarrollado para la didáctica de la matemática, a partir del trabajo de Shulman (1986). Nosotros partimos de Hill, Ball y Schilling (2008), quienes definen el *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT), como “el conocimiento matemático que los profesores usan en sus clases para producir instrucción y crecimiento en los estudiantes” (p. 347) y lo caracterizan por componentes relacionadas o con el *conocimiento de la materia a enseñar* o con el *conocimiento didáctico del contenido* (figura 1).

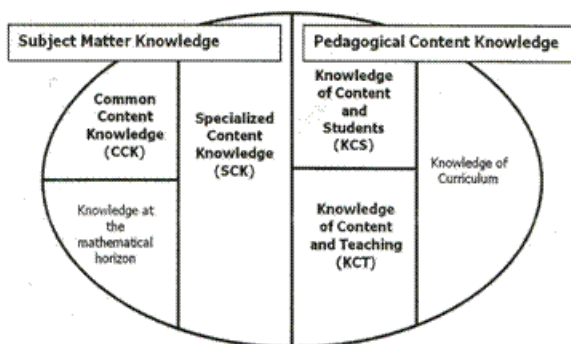


Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), Hill et al., 2007

Más específicamente, nos centramos en el *conocimiento especializado del contenido* (SCK), o conocimiento que necesita el profesor para planificar y desarrollar secuencias de enseñanza y le permite al profesor representar adecuadamente ideas matemáticas, comprender distintas soluciones para un problema dado y evaluar el conocimiento de sus estudiantes.

Entre las investigaciones que tratan de caracterizar el conocimiento del profesor para explicar estadística destacamos las de Batanero, Godino y Roa (2004); Sorto (2004), Burgess (2006) y Pinto (2010). Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) proponen un modelo del conocimiento del profesor de matemáticas, válido para la estadística, que tiene en cuenta seis dimensiones: epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, tomadas de los correspondientes componentes de la idoneidad didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006), que los autores introducen para evaluar situaciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas:

- *Idoneidad epistémica*: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como el grado en el que los significados personales

Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores en una tarea abierta

logrados por los alumnos son los significados pretendidos por el profesor.

- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional*: Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica*: Grado de adecuación del proceso de estudio llevado a cabo con respecto a los currículos oficiales, proyecto educativo del centro y sociedad.

Respecto a los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008) la dimensión epistemológica corresponde al conocimiento especializado del contenido, la cognitiva y afectiva se incluyen en el conocimiento del contenido y los estudiantes, la interaccional y mediacional en el conocimiento del contenido y la enseñanza y la ecológica al conocimiento del contenido y el currículo.

En lo que sigue utilizaremos una parte la pauta introducida por Godino (2009) para el análisis de la idoneidad didáctica. El autor indica que la valoración que los profesores realizan de un determinado proceso de estudio mediante dicha pauta puede utilizarse en la evaluación y desarrollo de los conocimientos los profesores.

Material y método

Participaron en la investigación 108 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada, distribuidos en 3 grupos (30 - 40 alumnos por grupo) en el curso 2008-2009. Los datos se tomaron a partir de los informes escritos realizados por los futuros profesores en una práctica realizada en dos sesiones de clase. En la primera sesión los participantes resolvieron un proyecto de análisis de datos que incluye el planteamiento de una pregunta, recogida y análisis de datos y obtención de una respuesta a la pregunta planteada.

En la segunda sesión, se pidió a los participantes valorar la experiencia de enseñanza que ellos mismos vivieron durante el desarrollo del proyecto. Para ello se dio a los estudiantes una *pauta de análisis de la idoneidad didáctica* (Godino, 2009), guía en la cual, para cada componente de la idoneidad didáctica se sugieren una serie de descriptores para analizar. Los participantes tuvieron una semana para completar el estudio.

En este trabajo presentamos los resultados del análisis de la idoneidad epistémica por parte de los futuros profesores (ver componentes y descriptores en la Tabla 1). Dicho análisis requiere que el profesor en formación conozca los objetos matemáticos propuestos para la enseñanza de un cierto tema y sea capaz de reconocer su presencia y uso adecuado en el proceso de estudio propuesto. En nuestro estudio, se espera que los estudiantes perciban que el proyecto planteado permite contextualizar los contenidos estadísticos elementales incluidos en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (MEC, 2006) y reconozcan las relaciones existentes entre los distintos objetos puestos en juego en la resolución del proyecto. En consecuencia, el análisis de la idoneidad epistémica permite profundizar en el conocimiento especializado de la estadística (en la terminología de Ball, Lubienskiy Mewborn, 2001).

Componentes	Descriptor
Situaciones-problemas	P1. Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. P2. Se proponen situaciones de generación de problemas.
Lenguaje	L1. Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre las mismas. L2. Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. L3. Se proponen actividades de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, propiedades, procedimientos)	R1. Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. R2. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. R3. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones propiedades o procedimientos.
Argumentos	A1. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. A2. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	RL1. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí.

Tabla 6. Pauta de análisis de la idoneidad epistémica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Una vez entregados los informes escritos de los futuros profesores, se realizó un estudio cualitativo de las respuestas en cada uno de los descriptores de las distintas componentes de la idoneidad epistémica (tabla 1). Se realizó una valoración similar para todos ellos según los siguientes niveles:

0. No se hace referencia al descriptor. Se deja la respuesta en blanco, no habiendo comprendido el descriptor o no siendo capaz de aplicarlo.
1. El estudiante se limita a copiar literalmente el descriptor, sin indicar cómo lo aplica. Por ejemplo; “*Se proponen situaciones de generación de problemas*” (Alumno MF, descriptor P2).
2. El estudiante aplica y hace referencia al descriptor pero sin centrarse en el contenido matemático o en la situación de enseñanza, centrándose en aspectos anecdóticos o no estrictamente matemáticos. En el siguiente ejemplo se hace referencia a problemas presentes en la situación. Sin embargo, aunque en el problema descrito (predecir resultados en juegos de azar) surge la idea fenómenos aleatorios, probabilidad y otros contenidos del tema, no se hace mención explícita de conocimientos matemáticos que se pongan en juego en estos problema: “*La profesora presenta situaciones de la vida cotidiana que realizamos como jugar a la lotería, la quiniela, juegos de azar, pero todas estas situaciones llevan con ella el problema el que no acertamos o no nos vaya como queramos*” (Alumna EA, descriptor P1).

3. El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a contenidos matemáticos y a la situación de enseñanza. En el siguiente ejemplo se hace referencia a diversos tipos de lenguaje matemático e incluso gráficos diferentes. El estudiante muestra su conocimiento común y especializado del contenido matemático y su capacidad de análisis. *“Otro de los aspectos es la gran variedad de modos de expresión matemáticos en los que podemos presentar una determinada información, así como su respectivo análisis estadístico (histograma, poligonal, diagrama de sectores y pictogramas; tablas estadísticas y cálculo de estadísticos que muestran la información resumida en unos valores; análisis de dichos estadísticos y posterior conclusión.)”* (Alumno SC, descriptor L1).

A continuación se resumen los resultados para cada una de las componentes

Situaciones-problemas

En esta componente se esperaba que los futuros profesores fuesen capaces de percibir que el proyecto permitía generar una muestra representativa de problemas estadísticos, como la realización de un gráfico o la selección de la representación más adecuada para el problema particular. Se puede observar (tabla 2) que pocos estudiantes que llegan a hacer una valoración, adecuada de la idoneidad epistémica del proyecto, en relación a los problemas propuestos y generación de nuevos problemas. Una parte importante no aplica los descriptores o se limita a copiar su descripción.

	P1	P2
Nivel 0	24 (22,2)	48 (44,4)
Nivel 1	28 (25,9)	20 (18,5)
Nivel 2	27 (25)	17 (15,7)
Nivel 3	29 (26,8)	23 (21,3)

Tabla 7. Nivel de aplicación de los descriptores de las situaciones-problemas

Lenguaje

Se pretendía con la aplicación de estos descriptores, que los futuros profesores fuesen capaces de determinar la gran cantidad de términos estadísticos que tuvieron que emplear en el desarrollo del proyecto, así como los distintos tipos de gráficos y tablas, además de la utilización de lenguaje simbólico a la hora de realizar los análisis estadísticos. Tuvieron que estudiar también si el lenguaje era adecuado y los procesos de interpretación de los distintos lenguajes usados. Los resultados (tabla 3) fueron muy variables, resultando mucho más fácil de aplicar el primer descriptor, relativo a la identificación de la gran variedad de lenguaje matemático presente.

	L1	L2	L3
Nivel 0	30(27,78)	40(37,04)	71(65,74)
Nivel 1	19(17,59)	28(25,93)	16(14,81)
Nivel 2	21(19,44)	21(19,44)	7(6,48)
Nivel 3	38(35,19)	19(17,59)	14(12,96)

Tabla 8. Nivel de aplicación de los descriptores del lenguaje matemático

Se vuelve a observar que el porcentaje de alumnos que no aplica los distintos descriptores, aumentando hasta el 65,74% en el descriptor L3.

Reglas (definiciones, propiedades y procedimientos)

Es importante que los futuros profesores sepan reconocer los conceptos, propiedades y procedimientos en una determinada situación de enseñanza y aprendizaje y su adecuación o no a un nivel determinado. Sin embargo se observa en la tabla 4, que salvo el primero de los descriptores, el resto han sido escasamente aplicados. Estos resultados coinciden con los obtenidos en la investigación de Chick y Pierce (2008), donde profesores participantes fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes en un proyecto estadístico, a pesar de la riqueza de los conceptos de la situación didáctica planteada.

	R1	R2	R3
Nivel 0	24(22,22)	68(62,96)	61(56,48)
Nivel 1	28(25,93)	14(12,96)	12(11,11)
Nivel 2	27(25,00)	15(13,89)	20(18,52)
Nivel 3	29(26,85)	11(10,19)	15(13,89)

Tabla 9. Nivel de aplicación de descriptores sobre las reglas

Argumentos

En este apartado el objetivo era analizar si la situación planteada promovía explicaciones, comprobaciones y demostraciones en las que el alumno tuviese que argumentar. La situación planteada es muy rica en argumentación ya que los futuros profesores deben proponer una conclusión que dé respuesta a la pregunta inicial que se planteó al inicio del proyecto estadístico, argumentando en base a los análisis estadísticos de los datos. Podemos observar (tabla 5) que ambos descriptores fueron bastante difíciles para los participantes, los cuales parecen no reconocer las situaciones de argumentación creadas en el proyecto.

	A1	A2
Nivel 0	67(62,04)	45(41,67)
Nivel 1	25(23,15)	24(22,22)
Nivel 2	9(8,33)	18(16,67)
Nivel 3	7(6,48)	21(19,44)

Tabla 10. Nivel de aplicación de los descriptores sobre argumentación

Relaciones

En relación con esta componente el objetivo de que fuesen capaces de establecer y detectar las distintas relaciones existentes entre los distintos objetos matemáticos puestos en juego en el desarrollo del proyecto. De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), los diversos objetos matemáticos aparecen ligados entre sí en las prácticas de resolución de problemas. Por otro lado, la estadística se conecta con otros bloques temáticos y los objetos matemáticos de los mismos, como se resalta en las orientaciones curriculares (MEC, 2006). En la tabla 6 se muestran los resultados de este descriptor, que resultó difícil para los futuros profesores ya que fueron una minoría los que llegaron al nivel 3 y alrededor de

Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores en una tarea abierta

un 40% no aplicaron dicho descriptor.

	Frecuencia	Porcentaje
Nivel 0	41	37,96
Nivel 1	31	28,70
Nivel 2	20	18,52
Nivel 3	16	14,81

Tabla 11. Nivel de aplicación del descriptor sobre relaciones

Síntesis de la idoneidad epistémica

En la figura 1 se presentan los valores medios obtenidos por el conjunto de los futuros profesores al aplicar los descriptores de la idoneidad epistémica, que nos permiten evaluar según Godino (2009) el conocimiento especializado del contenido estadístico en el proyecto. Los resultados muestran que este conocimiento es muy escaso, pues en promedio no llegan a alcanzar el nivel 2 de aplicación en ninguno de los componentes.

Por otro lado, se observó que muchos de los futuros profesores se dedicaron a comentar o aplicar uno o dos descriptores dentro de cada componente de la idoneidad epistémica, dejando el resto en blanco, por lo que también estudiamos la puntuación máxima obtenida por cada uno de los participantes a la hora de aplicar los descriptores de la idoneidad epistémica. Los resultados mostraron que en promedio, la puntuación máxima del conjunto de los futuros profesores en la aplicación de descriptores de la idoneidad epistémica toma el valor 2,6, lo que sugiere que los estudiantes muestran un cierto conocimiento especializado del contenido, aunque este no es homogéneo en todos los descriptores de la idoneidad epistémica.

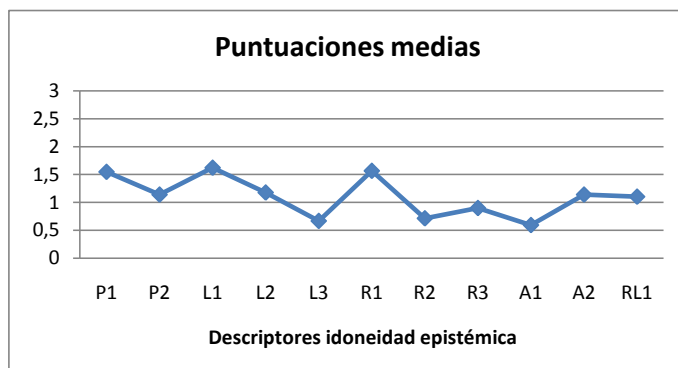


Figura 13. Puntuación media en los descriptores de la idoneidad epistémica

CONCLUSIONES

Algunas investigaciones previas muestran que el conocimiento común del contenido estadística es pobre en los futuros profesores de educación primaria (Bruno y Espinel, 2005; Arteaga y Batanero, 2010). Ello sin duda influye en nuestro caso en el escaso

conocimiento especializado de contenidos referentes a estadística elemental mostrado por los participantes.

En resumen, para mejorar el conocimiento especializado del contenido de futuros profesores y su capacidad de análisis de tareas de enseñanza, necesaria para abordar con éxito la enseñanza del tema en la educación primaria, sería necesario mejorar la preparación estadística de los futuros profesores de educación primaria, a la que en este momento se dedica un tiempo insuficiente.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 y beca FPU-AP2009-2807 (MCINN-FEDER), beca FPU-AP2007-03222 (MEC-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *XII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (p. 211-221). Lleida: SEIEM.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*. Springer, en prensa.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. On line: www.amstat.org/publications/jse/
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*, 57-85.
- Burgess, T. (2006). A framework for examining teacher knowledge as used in action while teaching statistics. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil: International Statistical Institute.
- Chick, H. L. y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: ICMI e IASE. Online: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.
- Even, R. y Ball, D. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.

- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE StudyTeaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey, Mexico: ICMI e IASE. Online: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- LLinares S. y Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 429 – 459). Rotherdam / Taipei: Sense Publishers.
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria*.
- Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.
- Shulman (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Sorto, M. A. (2004). *Prospective middle school teachers' knowledge about data analysis and its application to teaching*. Tesis doctoral. Universidad del Estado de Michigan.
- LLinares S. y Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 429 – 459). Rotherdam: Sense Publishers.

INVENCIÓN DE PROBLEMAS Y TIPIFICACIÓN DE PROBLEMA “DIFÍCIL” POR ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Ayllón, M. F.¹, Castro, E.^b, Molina, M.²

¹Escuela Universitaria La Inmaculada

²Universidad de Granada

Resumen: *Presentamos resultados de un estudio realizado con alumnos de todos los cursos de educación primaria los cuales inventan un problema difícil que ha de resolver un compañero y explicitan lo que entienden por problema difícil. En esta comunicación recogemos los resultados en cuanto al tipo de problemas inventados y los elementos que, según estos alumnos, hacen difícil un problema.*

Palabras clave: Consideración de problema difícil, Problema; Invención de problemas.

Abstract: *We present the results of a study with elementary students of all grades who posed a difficult problem to be solved by a peer and made explicit what they considered as a difficult problem. In this paper we present results regarding the type of problems invented by the students and the elements that make a problem difficult according to them.*

Key words: Conception of difficult problems; Problems; Problem posing

En la década de los ochenta, del pasado siglo, comenzaron a desarrollarse trabajos de investigación sobre invención de problemas y, si bien la producción no ha sido excesivamente amplia, sí ha sido continuada (Cruz, 2006). La investigación sobre invención de problemas ha estado muy ligada, desde sus inicios, a la resolución y aparece como uno de los temas de estudio relacionados con los problemas (Castro, 2008).

La acción de inventar problemas también denominada formular (Kilpatrick, 1987), plantear (Brown y Walter, 1990) o generar problemas (Silver, 1994), consiste en producir un enunciado que contenga un planteamiento (o historia) a partir del cual se formulan una o más preguntas que se han de contestar a partir de unos datos. Para ser inventado el problema ha de cumplir la condición de ser genuino, no tomado de otro medio, es decir, que la única ayuda para su producción la proporcionen los conocimientos del sujeto que realiza tal tarea.

La invención de problemas se considera una actividad intelectual y una forma eficaz de aprender matemáticas (Kilpatrick, 1987). A su vez se señalan aspectos positivos de la tarea de inventar problemas. Silver (1994) justifica que la invención de problemas proporciona motivación hacia el trabajo con las matemáticas, produce incremento del conocimiento matemático, mejora la capacidad para la resolución de problemas y promueve capacidades de indagación y creatividad. Todo ello sustenta la recomendación de su introducción en los currículos escolares.

La revisión de las investigaciones sobre invención de problemas muestra que una parte significativa de la misma se preocupa por la incorporación de la invención de problemas en el aula. En estos casos la invención está unida a la resolución de problemas y en algunas ocasiones relacionada con la competencia matemática (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi y Sriraman, 2005). Entre este tipo de investigaciones se encuadra la reportada por Nicolaou y Pilippou (2004) quienes llevan a cabo un estudio en el cual exploran el punto de vista de estudiantes de 5° y 6° sobre su eficacia formulando problemas, su competencia matemática y su habilidad inventando problemas. Se utilizó un cuestionario cuyas tres cuartas partes estaban destinadas a medir sus creencias sobre su eficacia y la cuarta parte restante a medir su habilidad en inventar problemas. A partir de un dibujo proporcionado como estímulo, los estudiantes debían inventar dos problemas, uno que se resolviese con la operación 2:3 y otro basado en un patrón numérico. Entre los resultados, obtuvieron que los estudiantes presentaron una alta apreciación de su eficacia y una modesta habilidad para proponer problemas. La habilidad para inventar problemas, de los estudiantes, estaba altamente correlacionada con el éxito alcanzado en otras pruebas de matemáticas.

Un grupo amplio de investigaciones se centra en estudiar la habilidad de los sujetos para inventar problemas. En este grupo están las que reportan Silver y Cai (1996) y Lowrie (2002). Silver y Cai (1996) realizaron un estudio con un gran número de estudiantes de grado 6° y 7° los cuales debían de formular tres preguntas sobre un relato dado. Los autores clasificaron los problemas en términos de solvencia matemática, complejidad lingüística y complejidad matemática. Entre los resultados de la investigación figura que los sujetos, ante una situación conocida, generaron un gran número de problemas que se podían resolver; muchos de ellos eran sintáctica y semánticamente complejos. Por ejemplo, inventaron problemas donde una solución dependía de otra previa que tenían que averiguar. Lowrie (2002) presenta un trabajo relacionado con la capacidad de niños de seis y de ocho años de edad, que no habían sido expuestos previamente a situaciones de enseñanza-aprendizaje sobre la invención de problemas. Los estudiantes debían “inventar un problema de matemáticas que quisieran solucionar” y posteriormente resolverlo. Todos los sujetos participantes en el estudio generaron problemas aritméticos, siendo la mayoría de ellos problemas verbales tradicionales. Se considera un problema verbal no tradicional aquellos que requieren más de la manipulación que de las operaciones (por ejemplo, medir la superficie de una mesa utilizando como unidad de medida un folio), poder utilizar diferentes estrategias adecuadas para solucionarlo o tener más de una solución. Todos los sujetos identificaron el tipo de operación aritmética necesaria para dar respuesta al problema planteado aunque algunos no llegaron a la respuesta correcta.

Otro grupo de investigaciones se basan en la instrucción sobre invención de problemas como es el caso de los estudios de English (1997) que indaga sobre la capacidad de estudiantes de 3°, 5° y 7° grado para generar problemas. En su estudio experimental participó un grupo que se sometió a instrucción y otro que actuó de control. Una de las conclusiones que señala, es que la comprensión de la estructura semántica de los problemas parece ser resultado de la instrucción, ya que la mayoría de los estudiantes del grupo experimental, enunciaron problemas en los que intervenían relaciones semánticas más complejas, y algunos alumnos de 5° y 7° grado desarrollaron capacidad de percibir la estructura del problema como algo independiente de cualquier contexto particular, lo que les brindó mayor flexibilidad para inventar problemas.

DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO QUE SE PRESENTA

Los antecedentes anteriormente recogidos ponen de manifiesto la capacidad de los estudiantes de primaria de generar problemas y sugieren que la complejidad de los mismos depende de la instrucción recibida. Partiendo de estos resultados, nos proponemos indagar en dicha capacidad analizando las características de los enunciados que proponen los estudiantes y distinguiendo si las mismas difieren según el nivel educativo que cursan, dada la influencia de la instrucción detectada en estudios previos. Así mismo atendemos a los elementos que condicionan la dificultad de los problemas para los estudiantes.

La información obtenida en la investigación será de interés para los agentes implicados en la educación primaria. Por ejemplo, a los profesores y a los autores de libros de texto, les proporcionará conocimiento sobre qué problemas se han de trabajar en el aula con más dedicación de lo que se ha venido haciendo, así como atender a aquellos elementos que, según los alumnos, redundan en la dificultad de los problemas.

Hemos realizado dos estudios complementarios. Un estudio exploratorio, en el año 2001⁵⁸ y un estudio, confirmatorio en el año 2010, con alumnos de los diferentes cursos de educación primaria. En ambos casos se trabajó con estudiantes escolarizados en centros escolares diferentes pero de características similares: ambos son centros concertados prestigiosos de Granada a los que acuden alumnos de variados niveles socioculturales. La investigación responde a una metodología mixta (cualitativa-cuantitativa). Los datos para el estudio exploratorio (enfoque cualitativo) se obtuvieron mediante la realización de entrevistas semiestructuradas. Los datos para el estudio confirmatorio se obtuvieron mediante un cuestionario que cumplimentaron 351 estudiantes de educación primaria.

Los resultados que aquí presentamos corresponden a parte del estudio exploratorio. En las entrevistas realizadas participaron 27 estudiantes (11 chicas y 16 chicos) de todos los cursos de educación primaria. Se agrupó a los estudiantes por parejas del mismo curso, constituyéndose dos parejas de cada curso escolar con excepción de 4º curso del que participaron tres parejas (Ayllón, Castro y Molina, 2010). La tarea de inventar problemas se propuso a través de una situación semiestructurada⁵⁹.

Las entrevistas realizadas constan de tres partes. En la primera parte se plantean una serie de cuestiones sobre la percepción que de los problemas tienen los estudiantes y su hábito de resolver problemas. En la segunda parte han de inventar un problema que le resulte difícil de resolver a su compañero de entrevista, pasando posteriormente a intercambiarse los problemas y a resolverlos. En la tercera parte, los estudiantes han de calificar como difícil o fácil una serie de problemas que el entrevistador les muestra, de uno en uno y, por último, han de indicar qué elementos hacen que un problema sea difícil.

⁵⁸ Este hecho hace que los problemas inventados por el alumnado, en los que aparecen precios, la unidad monetaria sea la peseta.

⁵⁹ Situaciones semiestructuradas son aquellas en las que se impone alguna exigencia en la tarea de inventar problemas (Stoyanova, 2000).

Organización de los datos

Una vez transcritas las entrevistas organizamos la información relacionada con los problemas inventados en fichas como la que se muestra en la Figura 1. Las respuestas a la pregunta sobre qué hace que un problema sea difícil las agrupamos por categorías.

La organización de la ficha, por filas, es como sigue. La primera fila contiene los datos del alumno. En la segunda fila aparece el problema inventado. En la tercera se recoge la coherencia del enunciado que se determina según los siguientes elementos: incluye una historia verosímil (redacción inteligible y con sentido), presencia de datos numéricos, interrogantes y relación entre los datos y el (o los) interrogantes planteados. Se considera que un problema es coherente si son afirmativas las respuestas a cada uno de los elementos señalados. La cuarta fila recoge datos referidos a las estructuras operatoria y semántica del problema, el número de etapas del mismo y datos sobre el tipo de números utilizados. La última y quinta fila se reserva para la representación esquemática del enunciado. El esquema teórico de cada problema se ha elaborado de acuerdo con la secuencia en que se presenta la información y los datos en el problema. Para realizar estos esquemas nos hemos inspirado en los utilizados en otros trabajos relacionados con problemas (Castro y col. 1998; Nesher, 1998; Puig y Cerdán, 1988) si bien la pauta seguida difiere de la de los esquemas realizados por los autores señalados.

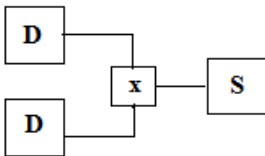
Curso 5º	Estudiante J.S.				10 años
Problema 20	Pablo va al supermercado a comprar naranjas. Las naranjas cuestan cada una 100,5 pesetas. Si compras 414 naranjas, ¿cuánto dinero gastará Pablo?				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos Numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	<u>Comentarios</u> PAEV SIMPLE 1 pregunta
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	
	1	Multiplicativa	Tasa	D cifras: 3, 4	
Esquema teórico					

Figura 1: Ficha de recogida de información sobre los problemas inventados

ANÁLISIS DE LOS DATOS

La información que hemos obtenido concerniente a los problemas inventados así como a la opinión de los estudiantes sobre qué elementos influyen en un problema para hacerlo difícil, arroja los resultados que se presentan a continuación.

Coherencia del enunciado

Entre los 26 enunciados planteados hay 21 que tienen coherencia y 6 que no la tienen. Su distribución por cursos es como aparece en la Tabla 1. Solo los estudiantes de 1º curso y uno de 4º curso no proporcionaron un enunciado coherente.

Curso						Total
1º	2º	3º	4º	5º	6º	
0/4	4/4	4/4	5/6	4/4	4/4	21/26

Tabla 1. Coherencia del enunciado

Las producciones de los estudiantes de primer curso no las consideramos coherentes ya que dos proponen operaciones ($¿39-20?$; $10+10$) y los otros dos solamente un interrogante (*¿Cuántas camisetas hay en el mercado?*; *¿Qué le falta a la fuente?*) El enunciado no coherente proporcionado por un alumno de 4º curso presenta una historia con tres preguntas, dos de las cuales no se pueden responder con la información proporcionada: *“En una carretera hay 223 coches. En el puente hay 22 coches. El puente se cae la mitad pasa y la otra mitad se cae ¿cuántos coches quedan? ¿Cuántos se caen? ¿Cuántos han pasado el puente?”* En un par de problemas hemos interpretado la falta de alguna palabra, que creemos implícita, como un olvido, considerando dichos enunciados como coherentes. Un ejemplo es el siguiente enunciado: *Miguel Ángel tiene dos bolsas de pipas cada bolsa de pipas tiene 10 pipas 8 a los niños ¿Cuántas pipas le quedan a Miguel Ángel en total?* En este caso suponemos que la falta de la expresión “le da” delante de “8 a los niños” es un descuido del estudiante.

Problemas simples y compuestos

De los 21 enunciados coherentes unos son simples (requieren una operación para su resolución) y otros son compuestos (requieren más de una operación para su resolución).

Vemos en la Tabla 2 que casi la mitad de los problemas son de cada uno de estos tipos y el balance es ligeramente favorable hacia los problemas compuestos, produciéndose problemas compuestos a partir de estudiantes de 2º curso. Por cursos, también se da, excepto en 5º, esta circunstancia.

	Curso						Total
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	
Problemas simples	0	2	2	3	1	2	10
Problemas compuestos	0	2	2	2	3	2	11

Tabla 2. Problemas simples y compuestos

Estructura operatoria involucrada en el problema

Para analizar la estructura operatoria involucrada hemos considerado, en los problemas compuestos, las veces en que ha sido utilizada cada una de las estructuras. Contabilizamos aquí los dos enunciados de 1º curso en los que se plantea una operación. Se obtienen así los datos que aparecen en la Tabla 3 los cuales indican que la estructura aditiva ha sido utilizada por los estudiantes en 23 enunciados y la multiplicativa en 18.

	Curso						Total
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	
Estructura aditiva	2	4	8	0	4	5	23
Estructura multiplicativa	0	3	1	7	4	3	18

Tabla 3. Estructura operatoria de los problemas

Se aprecia que la estructura multiplicativa no aparece en 1º curso y la aditiva tampoco lo hace en 4º curso. En cuanto a la utilización de la estructura aditiva va aumentando en los tres primeros cursos, desciende a cero en 4º curso y la vuelven a retomar los estudiantes de 4º y 5º curso. La estructura multiplicativa la usan mayoritariamente estudiantes de los tres últimos cursos. El resultado de 1º curso se explica porque aún no se han trabajado las operaciones de dicha estructura. Creemos que el resultado de 4º se debe a que en ese curso se pone mucho énfasis en la estructura multiplicativa para afianzar las operaciones de la misma. En los cursos de 5º y 6º se equilibra la presencia de las dos estructuras en los problemas inventados y son únicamente en estos cursos donde los problemas compuestos involucran ambas estructuras a la vez.

Estructura semántica de los problemas inventados

Las tablas 4 y 5 muestran la estructura semántica de los problemas aditivos y multiplicativos propuestos. Para los aditivos hemos tomado los tipos: cambio, combinación, comparación e igualación (Castro, Rico y Gil, 1992). Para los multiplicativos los tipos: isomorfismo de medidas (o razón), comparación multiplicativa y combinación o producto de medidas (Puig y Cerdán, 1988). En el caso de los problemas compuestos distinguimos la estructura de cada una de las partes que los componen.

	Curso						Total
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	
Cambio		4	8	0	3	3	18
Combinación					1	1	2
Comparación						1	1

Tabla 4. Tipos de problemas aditivos según su estructura semántica

Para los problemas aditivos la estructura semántica que predomina es la de cambio. Solamente aparecen dos problemas de combinación y uno de comparación, enunciados por estudiantes de cursos superiores (5º y 6º). No aparece ningún problema de igualación. En cuanto a los problemas de cambio, 10 corresponden a cambio1 (la incógnita es el resultado de la suma), 7 corresponden a cambio2 (cambio disminución, la incógnita es el resultado de la resta) y 1 a cambio3 (la incógnita es en uno de los sumandos).

En el caso de la estructura multiplicativa, todos los problemas corresponden al tipo de razón o isomorfismo de medidas, siendo más de la mitad de isomorfismo de medidas1 (resolución por una multiplicación). Los problemas de razón o isomorfismo de

Invención de problemas y tipificación de problema “difícil” por alumnos de educación primaria

medidas2 (resolución por una división partitiva) y el de isomorfismo de medidas3 (resolución por una división cuotitiva) son propuestos por alumnos de 4º curso.

	Curso						Total
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	
Iso.Medidas 1		3	0	2	2	3	10
Iso.Medidas 2			1	4	2	0	7
Iso.Medidas 3				1	0	0	1
Total							18

Tabla 5. Tipos de problemas multiplicativos según su estructura semántica

Manifestaciones de los estudiantes sobre problema difícil

Las respuestas de los estudiantes a la cuestión “qué hace que un problema sea difícil”, recogidas en la última parte de la entrevista tras haberles presentado diferentes tipos de problemas, quedaron clasificadas en cuatro tipos etiquetados como: enunciado, conceptos, datos, y etapas (ver Tabla 6). En la categoría de enunciado consideramos las respuestas que hacen referencia a dificultad para entender el enunciado (ej., tienen preguntas difíciles, “truquillo” o “lio” para que se confundan). En la categoría de conceptos entran respuestas que hacen referencia a la presencia de conceptos no estudiados u olvidados. En la categoría datos recogemos las respuestas que aluden a que los números del problema sean altos, de muchas cifras o bien aparecen muchos números. La categoría etapas recoge aquellas respuestas que hacen referencia a que el problema tenga varias preguntas o requerir más de una operación para hallar la solución.

Como muestra la tabla 6, el no conocer un contenido matemático involucrado en un problema, es la razón más repetida por los estudiantes para considerar que dicho problema es difícil. Dicho concepto, cuando lo señalan, varía, según el ciclo. En el ciclo 1º se nombra la división, en el 2º se habla de porcentajes y de descuentos, y en el 3º ciclo se sigue hablando de porcentajes y del cambio de pesetas a euros. Con la misma frecuencia se señalan el resto de elementos: el hecho de que un problema tenga más de una etapa, que tengan muchos datos o que los números sean de varias cifras, y no entender el enunciado.

	Curso						Total
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	
Enunciado	3	1	1	1	1	1	8
Conceptos	0	3	2	4	2	2	13
Datos	1	2	0	6	0	0	9
Etapas	0	1	0	4	1	3	9
Totales	4	7	3	15	4	6	39

Tabla 6. Elementos que dificultan un problema

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los datos recogidos, de la pequeña muestra de sujetos utilizada en este trabajo, ponen de manifiesto una tendencia en cuanto a la capacidad de estos alumnos para inventar problemas matemáticos y su percepción de lo que hace que un problema sea difícil.

Los alumnos de 1º curso han proporcionado en sus enunciados algún elemento de los que constituyen un problema matemático, si bien no han llegado a precisarlo del todo. Muestran que se están iniciando en el conocimiento de lo que es un problema matemático. En el resto de los cursos, casi todos los estudiantes hacen una propuesta coherente, proporcionando lo que consideran que es un problema difícil de resolver por su compañero de entrevista. Este resultado pone de manifiesto que conocen los elementos de que consta un problema matemático y que tienen capacidad para realizar la tarea de inventar problemas.

Respecto a los problemas propuestos se percibe, en los primeros cursos, que todos son problemas aritméticos relacionados con las operaciones que están estudiando. En los cursos superiores, si bien entran las mismas operaciones en la resolución, los problemas se hacen más sofisticados en su enunciado, ocurriendo que para responder a una sola cuestión haya que hacer varios pasos encadenados. Por ejemplo: *Ana compró un coche que vale 2.500.000 pesetas. Primero pagó 300.000 pesetas, luego pagó 400.000 pesetas, y el resto lo pagó en 25 mensualidades. ¿Cuánto pagó en cada mensualidad?* Este resultado coincide con el de Silver y Cai (1996) que referimos en la primera parte de este reporte.

Los problemas compuestos propuestos en los que solo se involucra la estructura aditiva son inventados por estudiantes de 2º y 3º curso. Solo los estudiantes de 4º curso proponen problemas compuestos que involucran únicamente la estructura multiplicativa. Se pone de manifiesto que las operaciones presentes en los problemas que proponen los estudiantes son las que se están trabajando en los diferentes cursos y que aparecen en los problemas que se les proponen para resolver. Los problemas que proponen estos estudiantes están muy influenciados por lo que resuelven en clase, no apareciendo problemas no tradicionales en el sentido que indica Lowrie (2002).

Las estructuras semánticas aparecidas son las consideradas más fáciles. En el caso de la estructura aditiva aparecen cambio1 y cambio2 que se corresponden con una suma o diferencia con resultado desconocido. En el caso de la multiplicativa solo aparece razón1 que se corresponde con un producto de resultado desconocido seguido de razón2 relacionado con la división partitiva. Lo que nos lleva a pensar que son estos tipos de problemas los que se resuelven con más frecuencia incluso cuando se trata de aplicar la operación aritmética que se está estudiando. Este resultado apoya la tesis de English (1998) sobre que la utilización de diferentes estructuras semánticas para los problemas es fruto de la instrucción. Estos resultados nos dan pie a formular la conjetura de que la estructura de cambio1 es la más utilizada en las aulas seguida de cambio2 y de combinación1. Dicha conjetura queda confirmada en un trabajo realizado en 2003 por el equipo de orientación educativa y psicopedagógica de Ponferrada. Dicho equipo analiza la frecuencia y el curso en que aparecen los problemas de un paso en libros de texto y material complementario. Concluyen que en educación primaria los problemas que más se trabajan son, por este orden, los de cambio y combinación y comparación (para la estructura aditiva) y los de razón (para la multiplicativa). Se trabajan poco la comparación multiplicativa y el producto cartesiano.

Invencción de problemas y tipificación de problema “difícil” por alumnos de educación primaria

De las respuestas dadas a lo que hace un problema difícil, concluimos que entienden los problemas ligados a un concepto matemático, si este no se posee no se podrá resolver el problema. La comprensión lectora, estudiada en ocasiones como fuente de error en la resolución de problemas, es también señalada por estos estudiantes.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, desarrollo e Innovación 20010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

- Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida y SEIEM.
- Brown, S. I. y Walter, I. (1990). *The art of problem posing* (2nd Ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: SEIEM.
- Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I. et al. (1998). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.) *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 64-77). Zamora: SEIEM.
- Castro, E., Rico, L. Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias*, 10(3), 224-253.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes. *ZDM*, 37(3), 149-158.
- Cruz M. (2006). A Mathematical Problem-Formulating Strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Descargado el 5 de Mayo de 2011 de <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramirez.pdf>.
- English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.
- Equipo de orientación educativa y psicopedagógica de Ponferrada (2003). *Resolución de problemas aritméticos en Educación Primaria. Proyecto de formación en centros*. León: CFIE de Ponferrada.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lowrie, T. (2002). Young Children Posing Problems: The Influence of Teacher Intervention on the Type of Problems Children Pose. *Mathematics Education Research Journal*, 14(2), 87-98.

- Nesher, P. (1998). Semantic Nets for Solving Word Problems. En W.-C. Yang (Ed.), *Proceedings of the Third Asian Technology Conference in Mathematics*. Descargado el 5 de Mayo de 2011 de: <http://www.atcminc.com/mPublications/EP/EPATCM98/ATCMP051/paper.pdf>
- Nicolaou, A. y Philippou, G. (2007). Efficacy beliefs, ability in problem posing, and mathematics achievement. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 308-317). Chipre: Department of Education-University of Cyprus.
- Puig, L. Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Silver, E. (1994). On Mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Silver, E. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.
- Stoyanova, E. (2000). Empowering students' problem via problem posing. The art of framing "Good" questions. *Australian Mathematics Teacher*, 56(1), 33-37.

EL ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS POR MEDIO DE TECNOLOGÍAS HÍBRIDAS ¹.

STUDYING PARAMETERS VIA HYBRID TECHNOLOGIES

Basurto, E., Gallardo, A.

Cinvestav, México

Resumen. *Los estudiantes de enseñanza media se enfrentan al uso e interpretación de los parámetros en funciones polinomiales, lugares geométricos y expresiones algebraicas. Este hecho conduce a la necesidad de diferenciar los parámetros de otro tipo de literales como variables o incógnitas. Esta investigación indaga sobre la influencia que pueden tener dos entornos tecnológicos sobre la comprensión de la polisemia de las literales, bajo el telón de fondo de los Modelos Teóricos Locales y de la Aproximación Instrumental.*

Palabras Clave: Parámetros, literales, entornos tecnológicos, Modelos Teóricos Locales y Aproximación Instrumental.

Abstract. *Middle school students generally face the use and interpretation of parameters in polynomial functions, geometric locations and algebraic expressions. This fact leads to the need to distinguish between the parameters of other types of literals, such as variables or unknowns. The research looks at the influence that two technological environments can wield on comprehension of the polysemy of literals, with a backdrop of Local Theoretical Models and of Instrumental Approximation.*

Key Words: Parameters, literals, technological environments, Local Theoretical Models and Instrumental Approximation.

A lo largo de su formación matemática, los estudiantes se enfrentan a distintos niveles de comprensión de las literales, en específico a incógnitas, números generalizados y variables, Küchemann (1981). A esta polisemia vinculada al uso algebraico, se unen otro tipo de literales llamadas parámetros surgidos al introducir a los sujetos en la exploración de entidades aún más generales, que poseen significados propios capaces de agrupar en familias a expresiones algebraicas en un nivel más abstracto.

Recurrimos a la perspectiva semiótica establecida en matemática educativa por, Filloy, Rojano y Puig (2008) y Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008) y utilizada también por Fernández, A. y Puig, L. (2002). Los “Modelos Teóricos Locales” (MTL) son apropiados sólo para fenómenos específicos pero capaces de tomar en cuenta la competencia formal, los procesos cognitivos, la enseñanza y la comunicación presentes en la observación empírica de todo fenómeno producido en situaciones de enseñanza aprendizaje. Se introduce el término: Sistema Matemático de Signos (SMS) para analizar los textos creados por los estudiantes que constituyen procesos de producción de sentido.

Además analizamos la evolución cognitiva de los sujetos desde el enfoque de la aproximación instrumental, dado que las acciones instrumentales producen una versión signífica del conocimiento. Artigue (2002) menciona que un instrumento se diferencia del artefacto físico que lo origina por ser “una entidad mixta, parte artefacto y parte procesos cognitivos”. La conversión de un artefacto en instrumento involucra una evolución de sus diferentes usos permitiéndole analizar una situación o resolver un problema. Este proceso es llamado génesis instrumental.

(1) Investigación financiada por el PROYECTO DE GRUPO - CONACYT: Génesis instrumental y modelos de competencia formal en procesos de apropiación de tecnologías digitales para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Aprobado-Nº. de ref . 80359.

Por último, respecto al contexto del “profesor a pie de aula”; Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L. (2010) mencionan la existencia de un “estado de alerta continua” para mejorar la labor docente en beneficio de los alumnos donde se encuentra situado el papel de la tecnología en la educación. En esta misma dirección, Morera, L. (2010) advierte sobre “momentos clave” en el proceso de resolución de problemas usando la ventana de Geogebra donde es posible identificar situaciones donde se produce un cambio entre los estados inicial y final en el proceso de aprendizaje. Identifica tres momentos claves: generalización de casos particulares, enriquecimiento de procesos de resolución y refutación de conjeturas con visiones distintas.

NUESTRA INVESTIGACIÓN

Nos proponemos entonces, el estudio de las producciones de los sujetos sobre tareas que involucran parámetros donde se advierte el entrecruzamiento de distintos SMS surgidos tanto en papel y lápiz como en dos entornos tecnológicos. Observamos que el fenómeno de génesis instrumental permea toda la actividad cognitiva analizada.

En nuestra investigación a partir de los modelos de competencia formal de Drijvers (2001) y Bloedy-Vinner (2001) se decodificaron los textos producidos en el intercambio de mensajes donde los actores tienen distintos grados de competencia. El primer autor afirma: *El parámetro puede ser considerado una meta – variable: la a en $y=ax+b$ puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición, una cantidad desconocida o cambiante pero que actúa en un nivel más alto que el caso de una variable.* Bloedy-Vinner (2001) menciona que los parámetros se estudian tanto de manera explícita como implícita, cuando se analizan familias de ecuaciones, familias de funciones, en problemas de enunciado verbal y tienen dos componentes, uno proveniente del contexto en que se usan y el otro se refiere a los diferentes roles de los parámetros, incógnitas y variables.

El modelo de los proceso cognitivos da cuenta de la evolución de los sujetos escolares vía la identificación de tendencia cognitivas, es decir, de hechos que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se transita de un estrato de un SMS más concreto a otro más abstracto.

Los modelos de enseñanza hacen uso del Geogebra; Software Dinámico de Matemáticas (DMS) que provee funciones básicas de un Sistema Computarizado de Álgebra (CAS) como la graficación de funciones, para proporcionar dos representaciones de cada objeto matemático, en sus ventanas gráfica y algebraica permitiendo una

retroalimentación inmediata entre ambas; y del sistema de aprendizaje TI-Navigator (Texas Instruments) consistente en una red inalámbrica de hasta 40 estudiantes conectados con el profesor a partir de calculadoras, que interactúan en un espacio común llamado centro de actividades donde cada individuo contribuye al colectivo con distintos objetos matemáticos.

Ambos entornos tecnológicos son de naturaleza híbrida debido a la forma en que han sido diseñados, Geogebra compuesto por funciones de un DMS y de CAS y TI-Navigator que a través de una red inalámbrica vincula un grupo de calculadoras entre sí. Esta tecnología es nueva para los sujetos de este Estudio, aunque se espera que sus mecanismos anticipadores surjan en estratos de SMS que les son familiares: las representaciones en papel y lápiz. En consecuencia, el ciclo de resolución de la situación problemática mediado por tecnologías híbridas, debe completarse de inicio a fin sin omitir ningún paso.

Por último, el modelo de comunicación advierte de la diferencia en las lecturas de mensajes emitidos por el sujeto competente en este caso el entrevistador y los estudiantes.

EL ESTUDIO

El desarrollo del montaje experimental en su fase piloto se realizó con dos grupos de estudiantes de entre 16 y 18 años del último año de bachillerato que desconocían la tecnología digital, es decir, aquella que no es exclusiva de papel y lápiz. Con el primer grupo se realizaron 7 sesiones de enseñanza con Geogebra y con el segundo grupo 10 sesiones utilizando el TI-Navigator. Antes de iniciar este montaje se efectuó una evaluación diagnóstica, donde se mostró dificultad en el uso de las distintas literales.

Se reportan únicamente situaciones relacionadas con rectas de la forma $y = mx + b$, eligiendo así los casos más sencillos con la finalidad de mostrar de la manera más clara posible la complejidad del entrecruzamiento de los distintos SMS mostrados en las producciones de los estudiantes. No obstante, a lo largo de la investigación en curso, fueron exploradas concatenaciones de tareas con objetos matemáticos más complejos.

DOS EXPERIENCIAS

Grupo 1. Geogebra. El grupo estaba formado por 25 estudiantes. Al referirnos a un nombre específico se hace notar una participación individual, al decir Grupo son afirmaciones escuchadas al unísono por la mayoría de los estudiantes. El análisis de las producciones transcritas de los sujetos se ubica debajo de cada fragmento en cursivas y se realiza bajo la lupa del MTL permeada por la aproximación instrumental.

Con el objetivo de que los estudiantes ingresen una función lineal en geogebra, visualicen la gráfica generada y logren diferenciar entre las variables y parámetros, se presenta la situación: *Un tinaco contiene una cantidad de 500 litros de agua, se comienza a vaciar por medio de un grifo que permite la salida de agua a razón de 10 litro por minuto.*

Propongan una expresión algebraica que represente la situación.

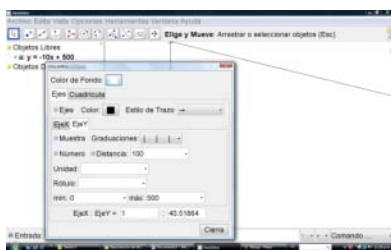
Cinco sujetos arriban primero a la expresión $y = 500 - 10x$ de manera verbal como lo hace la siguiente estudiante:

Fragmento 1

- 1: Ileana: Litros total sería y que es lo que va quedando en el tinaco, litros totales es 500 y los litros transmitidos serían 10 por minuto.
- 2: Profesor: ¿Cómo sería la expresión algebraica?
- 3: Ileana: Pues es y igual a 500 menos 10 por equis.
- 4: E: Escribela en el pizarrón.
- 5: Ileana: $y = 500 - 10(x)$

Respecto a los **procesos cognitivos**, podemos observar que Ileana pasa de un SMS menos abstracto a otros más abstractos, ya que primero menciona la situación problemática de manera verbal, después, da una descripción entre verbal y simbólica de la expresión para finalmente escribirla en el SMS algebraico en la línea 5.

Fragmento 2. Una vez que los estudiantes han ingresado la expresión en geogebra mencionan que no ven la gráfica, a lo que uno, Gabriel, manifiesta problemas con la escala.



Se les preguntó, ¿cuáles serán los valores máximos y mínimos que debe mostrar el plano cartesiano?, una estudiante afirmó:

Carmen: en x de -1 a 55 y en y de -1 a 550.

E: ¿Porqué esos valores?

Carmen: porque se va vaciar en 50 minutos y viene desde 500, pero dar un poco más de espacio para que se vean los ejes.

Respecto a los **procesos cognitivos de génesis**

instrumental:

Al tener que visualizar la gráfica de la situación, Gabriel solicita información sobre el artefacto para poder realizar la tarea. Necesita utilizar una de las potencialidades de la herramienta: el ajuste de los rangos de la ventana gráfica. Esto exige un proceso cognitivo sobre la percepción por parte del sujeto.

Una vez colocada la configuración adecuada para visualizar la gráfica, se les pregunta sobre los litros que deben quedar en el tinaco en diferentes momentos o sobre los instantes en que el tinaco tendrá cierta cantidad de litros. Se les sugiere la introducción de un deslizador para conocer los valores obtenidos con los cálculos anteriores a partir de un punto dinámico. Un punto dinámico es un punto ubicado en la gráfica cuya naturaleza móvil es debida a que sus coordenadas son definidas en términos de variables y parámetros, en este caso son deslizadores que pueden controlar el movimiento del punto, e incluso pueden estar asociados a la misma curva donde se ubica.

Fragmento 3. Deseo que exista un punto dinámico dependiente del deslizador t y capaz de recorrer la gráfica a fin de poder verificar sus coordenadas en cualquier momento. ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto dinámico? Se recibieron propuestas tales como:

- 1: Jessica: $(t, 500)$
- 2: Gabriel: Se va a mover paralelo al eje de las x.
- 3: Profesor: ¿la t va tomando los valores de?
- 4: Grupo: De la variable x.
- 5: Julia: Debe ser (t, t)
- 6: Profesor: Recuerden que el punto dinámico debe recorrer la recta que representa la situación del tinaco, si t vale cero, ¿el punto debe estar en?

- 7: Grupo: (0, 500)
8: Profesor: Y si t vale 10, ¿Dónde está el punto?
9: Grupo: (10, 490)
10: Profesor: t en el punto hace las veces de x en nuestra expresión, ¿quién sería la y ?
11: Julia: sería $-10t$
12: Profesor: ¿cuáles serían las coordenadas del punto?
13: Julia: (t , $-10t$)
14: Profesor: Introdúzcanlo a ver qué sucede, ¿corresponde?
15: Grupo: No
16: Gabriel: Sería (t , $-10t+500$)

Respecto a los **procesos cognitivos**, surgen generalizaciones correctas e incorrectas: Al solicitarles la creación de un punto dinámico dependiente del deslizador t Jessica mencionó en la línea 1: que debería ser (t , 500) con lo cual no puede generar el punto que recorra la recta. Al no obtener las coordenadas correctas del punto dinámico el profesor vuelve la situación más concreta determinando algunos lugares específicos por los que debería pasar dicho punto dinámico para lograr generalizaciones del mismo, más cercanas a la generalización correcta obtenida por Gabriel.

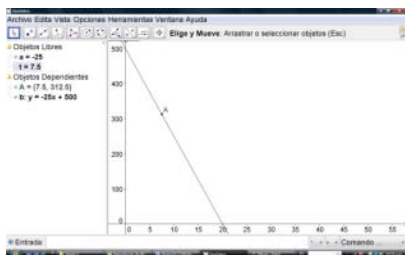
Fragmento 4. Una vez que el punto dinámico funciona correctamente sobre la gráfica se les comentó que el grifo que permite la salida de agua puede variar a fin de representarlo con un deslizador:

- 1: ¿Cómo reescribirían la expresión si el deslizador a representara el flujo del grifo?
2: Gabriel: Sería $y = ax + 500$
3: Profesor: Redefinan su expresión incluyendo al deslizador a , ¿qué sucede si cambian los valores de a ?
4: Grupo: la recta se mueve.
5: Profesor: ¿Por qué?
6: Gabriel: Porque sale más o menos agua del tinaco.
7: Profesor: Tiene sentido que a fuera -500 , ¿qué sucedería con el tinaco?
8: Julia: Se vaciaría en un minuto.
9: Profesor: ¿Por qué?
10: Julia: Porque si sustituyes 1 te da cero.
11: Profesor: ¿Qué sucede si a fuera positivo?
12: Gabriel: En vez de salir agua es como si entrara.
13: Profesor: ¿Por qué?
14: Gabriel: Porque se comenzarían a sumar litros a los 500.

Respecto a los **procesos cognitivos**, aparecen Procesos de generalización, del SMS algebraico al SMS del contexto del problema: La inserción del deslizador a en la expresión conduce a Julia y a Gabriel a un proceso de generalización permitiéndoles explorar los casos que se podrían presentar al variar el parámetro. Los estudiantes a pesar del trabajo realizado con deslizadores y expresiones algebraicas, no pierden el sentido de la situación. Además advierten el efecto que el deslizador a tiene sobre el movimiento de la recta y pueden dar un significado al movimiento dentro del contexto del problema.

Una vez lograda la dependencia del punto dinámico con respecto de t y la dependencia de la gráfica con respecto de a , se les solicita que vinculen ambos objetos a fin de que el

punto dinámico no salga de la recta independientemente del valor de a . Esta tarea se enfoca a la distinción entre variables y parámetros.



Fragmento 5

- 1: Profesor: ¿Cómo escribirían las nuevas coordenadas de A (punto sobre la recta)?
- 2: Gabriel: $(t, -a t + 500)$
- 3: Profesor: Prueben a ver si funciona.
- 4: Grupo: No funciona.
- 5: Profesor: ¿Por qué?
- 6: Grupo: Va al revés.
- 7: Profesor: Entonces, ¿cuáles deben de ser las coordenadas del punto?
- 8: Ileana: Es que pusimos $-at+500$ y en la gráfica tenemos $ax+ 500$
- 9: Profesor: ¿cómo debe ser?
- 10: Ileana: Igual a la gráfica, entonces es, $at + 500$ porque t representa a x .
- 11: Profesor: Muevan a y y t para ver qué sucede, ¿cuál deslizador deben determinar primero para utilizar el punto dinámico a ó t ?
- 12: Gabriel: Es igual.
- 13: Profesor: Si pensamos que el grifo tiene un flujo de salida de agua de 25 litros por minuto y deseamos conocer el agua que ha salido en 7 segundos y medio. ¿Qué deslizador utilizan primero?
- 14: Gabriel: Primero ajusto a en menos 25 y luego t en 7.5
- 15: Profesor: Entonces en la expresión de las coordenadas del punto dinámico, ¿qué representa t y qué representa a ?, ¿en qué se parecen y en que son diferentes?
- 16: Ileana: t representa x y a es una constante que podemos ajustar según nos convenga, pero que primero debemos determinarla antes de usar a t .

Respecto a la **competencia formal**, se manifiesta una evolución en distintos niveles: *Se observan dos expresiones algebraicas en las que intervienen tanto variables como parámetros, una de ellas es $y = ax + 500$ y la otra la correspondiente al punto dinámico $(t, at + 500)$ en la cual pueden relacionar que t y x representan la mismas variación y el deslizador a es común en ambas. Es muy importante que puedan verbalizar que para poner a trabajar t y x con la finalidad de conocer algún valor específico de la situación, primero deben determinar el valor de a y llegan a decir, es una constante que podemos ajustar según nos convenga.*

Respecto al **modelo de comunicación**: *Son evidentes diálogos de la forma Profesor – Grupo, de Profesor – Alumno, e incluso diálogos Alumno – Grupo/Profesor, pero no se presentaron diálogos de la forma Alumno – Alumno ni siquiera mediados por el profesor. Observe que la noción de parámetro se transforma en una concepción de naturaleza más continua que discretizada debido a las ventajas dinámicas de geogebra.*

Grupo 2. TI-Navigator.

El propósito de la tarea fue explorar la influencia de los parámetros m y b en la expresión de la recta $y=mx + b$, determinar los valores de los parámetros m y b de una recta que pasa por cuadrantes determinados y las condiciones de paralelismo entre dos rectas respecto a los parámetros m y b . El análisis de los fragmentos se realizará al final de la transcripción de cada diálogo.

El estudio de los parámetros por medio de tecnologías híbridas

- 1 E: Contribuyan con la expresión algebraica de una recta que pase por los cuadrantes I, II y III.
- 2 Alumno: Profesor, ¿puedo corregir mi recta?
- 3 E: Dense cuenta que en su calculadora tiene dos opciones en la pantalla, **SEND** y **GRAPH**, ¿para qué les sirve cada opción? Y ¿en qué les puede ayudar para la tarea?
- 4 Alumna: **SEND** es para enviarla y **GRAPH** es para graficarla antes de enviarla y corregir si es necesario.

Respecto al **proceso cognitivo de génesis instrumental**, se observa la necesidad de obtener información sobre la calculadora a fin corregir un error avistado por un estudiante, es decir, se genera un proceso cognitivo de percepción, en el que se destaca el potencial del artefacto en la ayuda de la actividad desarrollada por el estudiante.

- 5 E: En privado, pueden ver sus intentos antes de mostrarlos a los demás.



- 6 E: Díganme, ¿cuál o cuáles no están cumpliendo?

- 7 Alumna: La que está inclinada hacia la izquierda.

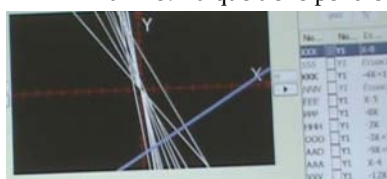
- 8 E: ¿Cuál es su ecuación?

- 9 Grupo: $y = -3x + 5$

- 10 E: Ahora van a contribuir con la ecuación de una recta que solamente pase por el cuadrante II y IV.

- 11 E: Detenemos la actividad y díganme cuáles si cumplieron y cuáles no.

- 12 Alumno: La que tiene pendiente positiva.



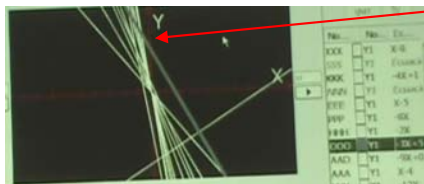
- 13 E: ¿Cuál es su ecuación?

- 14 Alumna: $y = x - 8$

- 15 E: ¿Por qué cuadrantes está pasando esa recta?

- 16 Grupo: Por el I, IV y III

- 17 E: A ver, ésta que estoy señalando, ¿en qué falló?



- 18 Grupo: El más cinco hace que la gráfica no pase por el origen.

- 19 E: ¿Por qué?

- 20 Alumna: hace que se recorra hacia arriba.

- 21 E: ¿y si fuera $y = -3x - 5$, qué sucedería?

- 22 Grupo: Se recorre hacia abajo.

- 23 E: ¿entonces la m qué controla?

- 24 Grupo: Su inclinación.

- 25 E: ¿y el parámetro b qué controla?

- 26 Alumno: Qué tan lejos esté del origen la recta.

- 27 E: A ver explícamelo mejor.

28 Alumno: Pues controla qué tan arriba o qué tan abajo está la recta del origen.

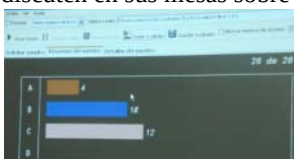
Respecto a los **procesos cognitivos**: surge una generalización del SMS algebraico al SMS geométrico. En la tarea anterior sólo un estudiante pudo relacionar el efecto de b en $y=mx+b$, y advertir la existencia de un patrón en el comportamiento de la gráfica. Además, se observa un proceso de generalización donde el grupo relaciona la medida de la pendiente con la inclinación de las rectas presentadas.

29 E: Les voy a enviar una encuesta a sus calculadoras; Si una recta pasa por los cuadrantes II y IV los valores de m y b son...elijan una opción.

Las opciones de respuesta del sondeo fueron mostradas en un pizarrón aparte:

a) $m = 0, b < 0$; b) $m > 0, b = 0$; c) $m < 0, b = 0$; d) $m = 0, b > 0$

Respecto al **modelo de comunicación**: Mientras se completa el sondeo los estudiantes discuten en sus mesas sobre la opción de respuesta a elegir, argumentan sus elecciones:



30 E: La mayoría elige la opción c como correcta afirmando: m es menor que cero y b igual a cero, pero también hay un grupo fuerte que dice que la correcta es la opción b en donde m es mayor que cero y b igual a cero.

31 E: ¿Cómo determinamos qué opción era la correcta?

32 Grupo: Vamos a la gráfica y vemos los que están bien.

33 E: ¿Cuál es la opción correcta?

34 Grupo: La c.

35 E: Muy bien, ahora van a contribuir con la ecuación de una recta que solo pase por los cuadrantes II, III y IV.

36 E: Vamos a ver qué están haciendo en su espacio privado. Por ejemplo, ¿qué sucede con este grupo de gráficas?



Esta es la imagen en el navegador cuando pedimos la captura de las pantallas de las calculadoras de los estudiantes, por ejemplo el estudiante ubicado por las letras MMM está graficando una expresión antes de enviarla al espacio público.

37 Grupo: Están mal pero todavía pueden corregir.

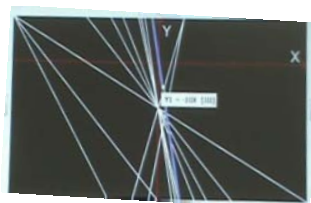
Respecto a los **procesos cognitivos de génesis instrumental**: La potencialidad que les permite cambiar sus gráficas antes de enviarlas al espacio público que fue explorada en la actividad anterior, ahora ya la han asimilado y la utilizan a su conveniencia, a fin de que si no están seguros en alguna tarea, pueden retroalimentarse ellos mismos en el espacio privado y enviar al espacio público hasta sentirse seguros. Esto conduce a un proceso de generalización en la influencia de los parámetros en el comportamiento de la gráfica.

38 E: Vamos a ver cómo quedaron sus gráficas en el centro de actividades.

39 E: A ¿cuántos no están cumpliendo?

40 Grupo: Parece que cuatro.

294



- 41 E: A ver éste que señale por qué no cumple
42 Grupo: Le falta menos algo. ($y = -10x$)
- 43 E: A ver les voy a enviar el siguiente sondeo: Si la recta pasa por los cuadrantes II, III y IV los valores de m y b son: Las opciones de respuesta son:
a) $m < 0$, $b = 0$; b) $m < 0$, $b < 0$; c) $m > 0$, $b > 0$; d) $m > 0$, $b = 0$

Iniciamos el sondeo.

Discusión grupal: A1 (alumno uno), A2 (alumno dos)...

Alumna 1: Creo que es la c pero como b es mayor que cero pasaría por arriba del origen.

Alumna 2: Si pero la que debe ser negativa es la pendiente ya que si no, no pasaría por el cuadrante dos.

Alumna 3: Entonces es la a.

Alumna 2: No porque si b es cero pasa por el origen.

Alumna 4: Pero entonces la b debe ser negativa para que baje.

Alumna 2: Entonces la correcta es la b ya que la m y la b deben ser menores que cero.

Las cuatro alumnas: Si esa debe ser la correcta.

Respecto al **de comunicación**: *Existe un intercambio de sujetos que tiene distintos grados de competencia ya que la alumna 2 distingue las relaciones de orden que permiten a los parámetros cumplir con las condiciones presentadas.*



44 E: Veamos el resumen del sondeo.

45 E: La mayoría dicen que la correcta es la b.

46 Grupo: Si.

47 Alumna: Porque la pendiente y la ordenada deben ser

menores que cero.

48 E: ¿Por qué la pendiente debe ser negativa?

49 Grupo: Para que pase por el cuadrante dos.

50 E: ¿Por qué la b debe ser negativa?

51 Alumna: Para que no pase por el centro y pueda pasar por los cuadrantes tres.

En este sondeo se observa una tendencia más definida que en el anterior, pues un número mayor de estudiantes se han dado cuenta de los efectos que m y b pueden tener sobre una recta. Al parecer existe una evolución de los niveles de competencia del sondeo anterior a éste.

Podemos afirmar que vía el TI-Navigator la comunicación es alterada al colocar a cada estudiante en una dualidad entre lo público y lo privado, espacio este último que poco a poco se desvanecía y todo se volvía público, por lo que ningún sujeto quedaba fuera de la comunicación. Esto parece influir en la multiplicación de casos de éxito ya que las contribuciones en el espacio virtual común alentaba al debate verbal y el apoyarse en los errores potencializaba la creación de significados más formales de los parámetros m y b en $y = mx + b$.

Estamos finalizando el Estudio Principal donde hemos tomado en cuenta las aportaciones de la fase piloto descrita anteriormente, y nos encontramos analizando el

tránsito de lo cognitivo perceptual a lo cognitivo formal a través del uso de las tecnologías híbridas propuestas. En este par dialéctico, lo cognitivo perceptual está referido al aprendizaje vía los sentidos, fundamentalmente la vista, aunque está involucrado el movimiento de todo el cuerpo produciéndose en el sujeto un acto de reflexión sobre la observación de lo que ocurre en el espacio virtual de la pantalla. En contraposición, lo cognitivo formal revela los procesos de generalización y abstracción que conducen al conocimiento pleno del objeto matemático en cuestión.

Cabe señalar que en el Estudio Principal, ambas tecnologías son experimentadas en la misma población por ser de naturaleza complementaria. Pretendemos arribar a una propuesta de enseñanza sobre la problemática analizada, donde el profesor basado en investigaciones sobre el uso de la tecnología, diseñe secuencias didácticas de tareas mediante trayectorias hipotéticas de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

- Artigue, M. (2002). "Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 7(3) P. 245 – 274
- Bloody-Vinner, H. (2001). *Beyond Unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra*", R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on school Algebra*, 177-189. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra environment. H. Chick et al. (eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Vol. 1. The University of Melbourne, Australia, pp, 221-227.
- Fernández, A. y Puig, L. (2002) Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. *Actas Simposio de la SEIEM*. Universidad de La Rioja. Logroño.
- Filloy, E; Rojano, T y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and Empirical Approach*. Mathematics Education Library. Springer.
- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El Estudio Teórico Local del Desarrollo de Competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), 327-342.
- Fortuny, J.M., Iranzo, N., L. (2010). Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds), *Investigaciones en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida: SEIEM
- Küchemann, D. (1981). Algebra, en K. Hart (ed), *Children's understanding of mathematics*: 11-16, Murray, London. Pp.102-119
- Morera, L., & Fortuny, J.M. (2010). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías. En *Actas del 14º Simposio de la Sociedad Española de Investigación de Educación Matemática*. Lérida. SEIEM Pp. 435-450

ESTIMACIÓN DE LA ASOCIACIÓN POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

PSYCHOLOGY STUDENTS' ESTIMATION OF ASSOCIATION

Cañadas, G.¹, Díaz, C.², Batanero, C.¹, Arteaga, P.¹

¹Universidad de Granada

²Universidad de Huelva.

Resumen. *Las tablas de contingencia son un instrumento necesario en el trabajo de los profesionales de psicología y, en general, en ciencias de la salud, pues la emisión de un diagnóstico requiere del juicio de asociación sobre dos variables cuyos datos se presentan en una tabla de contingencia. En este trabajo describimos un estudio exploratorio de la percepción de la asociación y estimación de su intensidad en tablas de contingencia en una muestra de estudiantes de psicología (62 estudiantes de la Universidad de Granada y 62 de la Universidad de Huelva). Comparamos los resultados obtenidos entre las dos Universidades, y además comparamos nuestros resultados con un estudio previo de Estepa (1993) con estudiantes de Bachillerato.*

Palabras clave: Tablas de contingencia, asociación, estimación de la asociación, teorías previas, enseñanza universitaria.

Abstract. *Contingency tables are a necessary tool for the work of psychology professionals and, in general, for health sciences, since providing a diagnostic requires from the professional an association judgment in a contingency table. This paper describes an exploratory study of the perception of the association and estimation of its intensity in contingency tables in a sample of psychology students (62 students from the University of Granada and 62 from the University of Huelva). We compare the obtained results between the two universities, and we also compare our results with a previous study of Estepa (1993) carried out with pre-university students.*

Key words: contingency tables, association, estimating association, previous theories, university teaching.

INTRODUCCIÓN

Un modo común de presentar la información estadística es en forma de tabla de doble entrada o tabla de contingencia, a la que se presta poca atención en la enseñanza universitaria, suponiendo que su lectura e interpretación son sencillas. Dichas tablas se presentan con frecuencia en las actividades de diagnóstico y evaluación psicológica, donde el especialista se enfrenta a diferentes síntomas que pueden estar asociados o no con una patología. Con esta información, se podrá evaluar si existe o no asociación entre las correspondientes variables (Díaz y Gallego, 2006). Por otro lado, el razonamiento sobre datos bivariados es uno de los temas de aprendizaje prioritarios en los cursos universitarios de estadística (Zieffler, 2006).

El objetivo de este trabajo es evaluar la comprensión intuitiva de los estudiantes que ingresan en la Licenciatura de Psicología sobre la asociación en tablas de contingencia. Más concretamente pretendemos estudiar sus juicios de asociación en función de diversas variables y la precisión con que se estiman los coeficientes de asociación. Otro objetivo es comparar los resultados con los de un trabajo previo de Estepa (1993) con estudiantes del curso preuniversitario.

INVESTIGACIONES PREVIAS

Las investigaciones iniciales sobre este tema las inician Inhelder y Piaget (1955), quienes conciben la asociación como último paso en el desarrollo del razonamiento probabilístico y describen las estrategias usadas en los juicios de asociación en tablas 2x2 similares a la Tabla 1 a diferentes edades. Los estudios sobre asociación estadística son numerosos en Psicología, algo lógico considerando su importancia en el diagnóstico y evaluación, donde se han descrito estrategias erróneas en los juicios de asociación y estimación incorrecta de la asociación. Sin embargo este tipo de estudios son muy escasos en Didáctica de la Matemática.

Síntoma	Con enfermedad	Sin la enfermedad	Total
Presente	A	B	A+B
Ausente	C	D	C+D
Total	A+C	B+D	

Tabla 1. Ejemplo de tabla de contingencia en una prueba médica

El estudio de la precisión en el juicio de asociación ha sido llevado a cabo por muchos investigadores. Un ejemplo, es la investigación de Crocker (1981), quien indica que los juicios de asociación incrementan su exactitud cuando están presentes diferentes condiciones: Cuando los datos se presentan simultáneamente y las frecuencias son bajas; se presentan en forma de tablas; los sucesos que covarían lo hacen juntos en el tiempo; se elimina de las tareas la necesidad de obtener muestras; los datos no son ambiguos y se elimina la necesidad de recordar casos o estimar frecuencias.

Allan y Jenkins (1983) se centran en dos principios en los que se basan los patrones de los juicios de asociación: (1) Se tiende a basar los juicios en la diferencia entre casos confirmatorios (celda A en la tabla 1) y contradictorios (celda D en la tabla 1), y (2) la compatibilidad causal entre las variables independiente y dependiente juega un papel crítico. En el trabajo de Erlick y Mills (1967) se expone que la asociación negativa se estima como muy próxima a cero. Además aparecen tres factores que influyen en los juicios de asociación en el trabajo de Arkes y Harkness (1983), que son: (1) El valor de la frecuencia en la casilla "A" (tabla 1) parece tener mayor impacto en las contingencias estimadas; (2) la etiquetación de las filas y columnas puede drásticamente influenciar las contingencias estimadas, y (3) la presencia de números pequeños en las casillas puede influir en una sobreestimación.

Otros autores han estudiado la influencia de las teorías previas sobre el contexto del problema en la exactitud de la estimación de la asociación (Jennings, Amabile y Ross, 1982; Wrigth y Murphy, 1984; Alloy y Tabacnick, 1984; Meiser y Hewstone, 2006). La estimación de la asociación es más precisa si las personas no tienen teorías respecto al tipo de asociación sobre los datos. Si las teorías previas del sujeto indican el mismo

tipo de asociación que reflejan los datos empíricos, los sujetos tienden a sobre estimar el valor del coeficiente de asociación. Pero cuando los datos no reflejan los resultados esperados por estas teorías, aparece en los sujetos un conflicto cognitivo y se suelen guiar por sus teorías, más que por los datos. Así puede resultar una estimación menor o mayor del coeficiente de asociación, dependiendo de los conocimientos previos sobre la situación que tengan los sujetos y de los datos proporcionados.

Chapman y Chapman (1969) describen un razonamiento común, que se denomina *correlación ilusoria*. Consiste en formarse teorías sobre la relación entre variables que impide evaluar correctamente las contingencias empíricas. Lleva a la percepción de una relación donde no existe ninguna, o bien a la percepción de una relación más fuerte que la que existe en realidad.

La asociación entre variables puede ser debida a la existencia de una relación causa-efecto unilateral (una variable es causa de la otra), pero también según Barbancho (1973), a la interdependencia (cada variable afecta a la otra), dependencia indirecta (una tercera variable afecta a otras dos), concordancia (coincidencia en preferencia u ordenación de la misma serie de datos por dos jueces) y covariación espúrea o casual. La comprensión de la asociación implicaría, además de la exactitud en el juicio, comprender estos tipos de relaciones entre las variables. Sin embargo, Estepa (1993), quien estudia las concepciones que muestran los sujetos respecto a la asociación, describe la *concepción causal*, según la cual el sujeto sólo considera la asociación entre variables si puede adjudicarse a la presencia de una relación de causa - efecto entre las mismas. También define la *concepción unidireccional* como el caso en que el estudiante no admite la asociación inversa, considerándose la intensidad de la asociación, pero no su signo y considera la asociación inversa como independencia. En un estudio posterior (Batanero, Estepa y Godino, 1997) muestran que la concepción causal no mejora con la enseñanza.

MÉTODO

La muestra estuvo formada por un total de 124 alumnos de primer año de la Licenciatura en Psicología de las Universidades de Granada (62 alumnos) y Huelva (62 alumnos), que cursaban una asignatura de Análisis de Datos I. Aunque todavía no habían estudiado el tema, los alumnos han estudiado estadística y probabilidad en la Educación Secundaria y Bachillerato. El cuestionario utilizado está adaptado de Estepa y Batanero (1995). En la Figura 1 se presenta el primero de los ítems. El resto de los ítems se presentan como anexo, exceptuando las preguntas b) y c) que son idénticas en todos ellos.

Las variables de tarea tenidas en cuenta en el cuestionario (Tabla 2) fueron las siguientes:

1. *Signo de la asociación entre las variables*, considerándose los tres casos posibles: Dependencia directa, dependencia inversa e independencia.
2. *Intensidad de la dependencia*, medida mediante el coeficiente Phi de Pearson en tablas 2x2 y con el coeficiente V de Cramer en tablas 2x3. Se eligió un ítem de intensidad moderada-baja y dos de intensidad moderada-alta.
3. *Concordancia entre los datos y las teorías previas sugeridas por el contexto*. Se usaron dos ítems en que coincide la asociación empírica en los datos con las

expectativas previas, otro donde no coincide y uno donde no hay teorías previas.

4. *Tipo de covariación.* Usamos las tres categorías de Barbancho (1973): Dependencia causal unilateral, interdependencia y dependencia indirecta.

Ítem 1. Se pretende estudiar si el sufrir insomnio tiene relación con los trastornos de estrés. En una muestra de 250 personas observadas se obtuvieron los siguientes resultados:

	Padece estrés	No padece estrés
Tener insomnio	90	60
No tener insomnio	60	40

- a. Utilizando estos datos razona si sufrir insomnio tiene relación con padecer estrés.
- b. Indica como has usado los datos de la tabla para llegar a tu conclusión
- c. Asigna una puntuación entre 0 (mínimo) y 1 (máximo) según la intensidad de esta relación, marcando una cruz en el punto de esta escala que creas adecuado:

Figura 14. Ejemplo de ítem

	Tabla 2x2			Tabla 2 x3
	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4
Dependencia	Independencia	Inversa	Directa	Directa
Valor del coeficiente de asociación	0	-0,62	0,67	0,37
Concuerda con teoría previa	No	Si	No hay teoría	Si
Tipo covariación	Interdependencia	Causal unilateral	Dependencia indirecta	Causal unilateral

Tabla 2. Variables de tarea en los ítems

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Juicio de asociación

En el apartado (a) de cada ítem se pide a los alumnos un juicio sobre la posible asociación entre las variables presentadas en la tabla. Para evaluar la competencia de los estudiantes, se presenta en la Tabla 3 el porcentaje de estudiantes que considera (o no) la existencia de relación entre las variables. Añadimos en la cuarta columna el coeficiente de asociación real calculado con los datos del ítem.

Estimación de la asociación por estudiantes de psicología

Ítem	Consideran relación	Consideran independencia	No contestan	Coefficiente de asociación	Teorías previas
1	42 (67,7)	19 (30,6)	1 (1,6)	0	En contra
2	60 (96,8)	2 (3,2)	0 (0)	-0,62	A favor
3	53 (85,5)	7 (11,3)	2 (3,2)	0,67	No hay
4	57 (91,9)	0(0)	5 (8,1)	0,37	A favor

Tabla 3. Porcentaje de sujetos según asociación considerada en cada ítem

La mayoría de los alumnos indica la existencia de asociación en todos los ítems, con mayor frecuencia cuando ésta se confirma con los datos, pero también en el ítem 1, donde los datos presentan independencia perfecta. Este resultado puede explicarse por la correlación ilusoria, descrita por Chapman y Chapman (1969). En el estudio de Estepa (1993) sólo el 31,4% de estudiantes indican que hay asociación en el caso de independencia perfecta, aunque los datos numéricos del ítem son exactamente los mismos en las dos investigaciones. La diferencia entre nuestro ítem y el de Estepa es el contexto, más relacionado con el campo de la psicología en nuestra investigación. Nuestros estudiantes muestran un mayor efecto de las teorías previas en este ítem, así como la concepción causal de la asociación, ligando los conceptos de asociación y causalidad.

Nuestros resultados son mucho mejores en el ítem 2 (asociación inversa), que en el estudio de Estepa, donde sólo el 47,1% de estudiantes consideran la existencia de asociación. El cambio en este ítem es el contexto, aumento de la intensidad en nuestro caso y del tamaño de muestra. Ello ha hecho que apenas se haya presentado en nuestros estudiantes la concepción unidireccional de la asociación descrita por Estepa.

Los resultados en los dos estudios en el ítem 3 son similares (88,2% en Estepa), donde sólo se aumentó las frecuencias, sin variar ni el contexto ni la intensidad de asociación. Finalmente mejoran un poco los resultados en el ítem 4 (88,2% de estudiantes consideran asociación en el estudio de Estepa), donde se aumentó un poco la intensidad de la asociación manteniendo fijas el resto de variables.

Estimación del coeficiente de asociación

En el apartado (c) de cada ítem se pedía al estudiante una puntuación entre 0 y 1 según la intensidad que ellos percibiesen en la asociación las variables, punto no analizado por Estepa (1993). En la tabla 4 presentamos el valor medio obtenido en el conjunto de la muestra, y en cada una de las universidades. Dicho valor sería una estimación del coeficiente de asociación (no se solicitó especificar el signo).

La mayor precisión se da en la estimación es el ítem 3, donde los alumnos no tienen teoría al respecto; el valor medio estimado es prácticamente idéntico al empírico en ambas provincias, y en la muestra global. Hay una sobre-estimación del coeficiente en los otros tres ítems para ambas provincias y la muestra global, observándose el efecto de las teorías previas de los estudiantes.

En el ítem 1, que corresponde al caso de independencia perfecta, el valor medio estimado fue 0,44, tanto en cada muestra, como en el global. Los alumnos mostraron en este ítem sus teorías previas al respecto, como mostramos a continuación en algunos ejemplos de respuestas: *“Si puede tener algo de relación, puesto que padecer estrés puede ser una causa de tener insomnio ya que las preocupaciones y de más elementos influyen”, “En mi opinión tener insomnio si tiene relación con padecer estrés, ya que la*

mayoría de personas que tienen insomnio padecen estrés”, o “Si tiene relación, pues las personas que padecen insomnio no descansan bien y les causa un estrés extra al que sumar al que puede ocasionarte otra sería de factores externos”. Por otro lado, en este ítem la mayor frecuencia aparece en la celda (A), es decir la primera de las frecuencias absolutas de la tabla que corresponde a la presencia de los dos caracteres y que, según Arkes y Harkness (1983), tiene mayor impacto sobre la atención que las otra celdas. Todo ello podría haber influido en la estimación de una asociación no existente en los datos.

Ítem	Valor medio estimado en Granada	Valor medio estimado en Huelva	Valor medio estimado en Total	Coefficiente de asociación	Teorías previas
1	0,44	0,44	0,44	0	En contra
2	0,68	0,73	0,71	-0,62	A favor
3	0,65	0,68	0,67	0,67	No hay
4	0,78	0,81	0,80	0,37	A favor

Tabla 12. Estimación del coeficiente de asociación

Para el ítem 2 (dependencia inversa), se estima un coeficiente de asociación próximo al empírico en ambas Universidades, algo inferior en Granada. De este modo en nuestros alumnos no aparece un porcentaje apreciable de concepción unidireccional descrita por Estepa (1993) ni en cada muestra parcial ni en el global, pues además, la mayoría de los alumnos indica que hay asociación (no se pidió el signo de la asociación).

En el ítem 4, correspondiendo a una tabla 2x3 con una asociación positiva, se puede observar la gran diferencia que hay entre la estimación y su valor verdadero. Los estudiantes sobre estiman la asociación, guiándose por sus teorías previas que coinciden con el tipo de asociación en los datos. Estas teorías se manifestaron en los estudiantes al ser un contexto tan cercano a ellos (horas de estudio-aprobar o suspender), se han dejado llevar por su experiencia personal. Esto ocurre en ambas Universidades, aunque la diferencia con el valor verdadero es menor en los estudiantes de Granada.

Los estudiantes de Granada en todos los ítems estiman en promedio un coeficiente más bajo que los estudiantes de Huelva. Al realizar un contraste *t* de comparación de medias relacionadas, no obtuvimos diferencias estadísticamente significativa para ninguno de los ítems y los intervalos de confianza del 95% cubrieron el valor 0. Asimismo, se realizaron contrastes *F* para comparar las desviaciones típicas de cada par de variable, y tampoco se obtuvo diferencia estadísticamente significativa ni valores apreciables en el intervalo de confianza del 95% para el cociente de varianzas. De todo ello se deduce que las respuestas de los estudiantes fueron similares, a pesar de la diferencia de contexto educativo.

CONCLUSIÓN

Los resultados muestran que en los estudiantes en su mayoría juzgan la asociación, incluso en los casos en que ésta no existe, observándose el fenómeno de la correlación ilusoria y el efecto de las teorías previas sobre la precisión en la estimación del coeficiente de asociación. Respecto a las concepciones descritas por Estepa (1993) se ha observado la concepción causal, pero no así la unidireccional. La estimación del

coeficiente de asociación mejora en nuestro caso, comparando con los resultados de Estepa (1993), en todos los ítems salvo en este caso de independencia. Los resultados son similares en las dos universidades participantes.

Según Schield (2006), una persona culta debiera poder leer críticamente las tablas que encuentra en la prensa, Internet, medios de comunicación, y trabajo profesional. Esto supone no sólo la lectura literal, sino identificar las tendencias y variabilidad de los datos, lo que incluye la emisión correcta de un juicio de asociación. Cazorla (2002) indica que las tablas 2x2 pueden utilizarse para comunicar información y como instrumento de análisis de datos, así como para retener en la memoria una gran cantidad de información en forma eficiente. Tienen también un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de transnumeración, forma básica de razonamiento estadístico que proporciona nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro (Wild y Pfannkuch, 1999).

Todas estas razones, y los resultados de nuestro trabajo indican la necesidad de continuar la investigación didáctica al respecto. Puesto que la concepción causal y la correlación ilusoria no parecen mejorar con una enseñanza tradicional (Batanero, Estepa y Godino, 1997) tenemos el proyecto de continuar este trabajo, diseñando una propuesta alternativa de enseñanza que incluyan actividades en que se enfrente a los estudiantes con estos sesgos y se les ayude a superarlos. Esta propuesta se experimentará y se evaluarán a los alumnos para comparar las concepciones intuitivas con las que adquieran como consecuencia de la enseñanza.

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-14947 y becas FPU-AP2009-2807 (MCINN- FEDER), y FPU-AP2007-03222 (MEC-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Allan, L.G. y Jenkins, H.M. (1983). The effect of representations of binary variables on judgment of influence, *Learning and Motivation*, 14, 381-405.
- Alloy, L.B. y Tabachnik, N. (1984). Assessment of covariation by humans and animals: The Joint influence of prior expectations and current situational information, *Psychological Review*, 91, 112-149.
- Arkes, H.R. y Harkness, A.R. (1983). Estimates of contingency between two dichotomous variables, *Journal of Experimental Psychology: General*, 112, 1, 117-135.
- Barbancho, A. G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Barcelona. Ariel cuarta edición, reimpresión de 1975.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Ed.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics* (pp. 191-206). Minnesota, MN: International Statistical Institute.
- Cazorla, I. (2002). *A relação entre a habilidades viso-pictóricas e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de

Campinas.

- Chapman, L. J. y Chapman, J.P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid Psychodiagnostic signs, *Journal of Abnormal Psychology*, 74, 271-280.
- Crocker, J. (1981). Judgment of covariation by social perceivers, *Psychological Bulletin*, 90, 2, 272-292.
- Díaz, J. y Gallego, B. (2006). Algunas medidas de utilidad en el diagnóstico, *Revista Cubana de Medicina General Integrada*, 22(1).
- Erlick, D.E. y Mills, R.G. (1967). Perceptual quantification of conditional dependency, *Journal of Experimental Psychology*, 73, 1, 9-14.
- Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística, *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155-170.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Jennings, D.L., Amabile, T.M. y Ross, L. (1982). Informal covariation assessment: Data-based versus theory-based judgments, en D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press: Nueva York, pp. 211-230.
- Meiser, T. y Hewstone, M. (2006). Illusory and spurious correlations: Distinct phenomena or joint outcomes of exemplar-based category learning? *European Journal of Social Psychology*, 36(3), 315-336.
- Schild, M. (2006). Statistical literacy survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Ed B. Phillips. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase>.
- Wright, J.C. y Murphy, G.L. (1984). The utility of theories in intuitive statistics: the robustness of theory-based judgments, *Journal of Experimental Psychology General*, 113(2), 301-322.
- Zieffler, A. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral. Universidad de Minnesota.

ANEXO. CUESTIONARIO

Item 2. Un psicólogo infantil estudia si existe relación entre ser hijo único (sin hermanos) y ser un niño problemático. Para ello se han observado 250 niños obteniendo los resultados siguientes

	Niño problemático	Niño no problemático
Tiene hermanos	40	100
Hijo único	100	10

- a. Utilizando estos datos razona si hay alguna relación entre ser un niño problemático y tener o no hermanos.

Item 3. Se quiere saber si sufrir o no de alergia tiene relación con llevar una vida sedentaria (llevar una vida sin realizar ningún tipo de ejercicio físico). Para ello obtuvimos los siguientes resultados de 300 sujetos:

	Sufre alergia	No sufre alergia
Forma de vida sedentaria	130	30
Forma de vida no sedentaria	20	120

- a. Utilizando estos datos razona si padecer alergia tiene o no relación con llevar una vida sedentaria en estos sujetos.

Item 4. La siguiente tabla nos indica el número de estudiantes que aprobaron o suspendieron un examen teniendo en cuenta el tiempo que cada estudiante dedicó a prepararlo

	Menos de 5 h	Entre 5 y 10 h	Más de 10 h	Total
Aprobados	5	15	51	71
Suspensos	20	7	2	29
Total	25	22	53	100

- a. Utilizando estos datos razona si aprobar o suspender el examen tiene relación con el tiempo dedicado a prepararlo.

PRUEBAS AUTONÓMICAS DE DIAGNÓSTICO PARA EVALUAR LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

THE AUTONOMIC DIAGNOSTIC TESTS USED TO EVALUATE MATHEMATICAL COMPETENCE IN SECONDARY EDUCATION

Caraballo, R. M., Rico, L., Lupiáñez, J. L.

Universidad de Granada

Resumen. Esta investigación trata sobre las características de los ítems elaborados por las Comunidades Autónomas españolas en el curso académico 2008-2009 para atender la evaluación diagnóstica de la competencia matemática básica de los estudiantes de 2º de ESO. Se centra en su adecuación al modelo de evaluación de la competencia matemática establecido por el estudio PISA de la OECD, según considera el Ministerio de Educación y Ciencia. El estudio está basado en el análisis de los ítems incluidos en una muestra de cinco pruebas de diagnóstico cuyos resultados identifican sesgos y debilidades. Se concluye que para cumplir con el grado de ajuste adecuado a las evaluaciones PISA, es necesario que las Comunidades Autónomas revalúen el diseño de las pruebas a la luz de las variables de tarea definidas en su caracterización.

Palabras clave: competencia matemática, aprendizaje funcional, evaluaciones de diagnóstico, estudio PISA, variables de tarea

Abstract. This research deals with the characteristics of the items for the diagnostics evaluation of mathematics competency of students in the 2nd course of the Compulsory Secondary Education (ESO) designed by the Spanish Autonomous Communities during the academic year 2008-2009. This study focuses on the items suitability for the competency model established by the OECD/PISA study and by the Ministry of Education and Science in Spain. The research is based on the analysis of the items included in a sample of five diagnostic tests which results identified biases and weaknesses. It can be concluded that, in order to fulfill the suitability requirements to the PISA model, the Autonomous Communities should reevaluate the tests design using the task variables as defined in their characterization.

Key words: diagnostic evaluations, mathematical knowledge functional approach, mathematical competence, PISA mathematical model, task variables

La Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo, de Educación (LOE) concibe la educación como un proceso de aprendizaje dinámico y permanente que se prolonga durante toda la vida (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006). Sobre las ideas de aprendizaje permanente y de desarrollo de las competencias básicas, la LOE introduce como novedad la realización de evaluaciones de diagnóstico, generales y autonómicas, del desarrollo de las competencias básicas al finalizar el segundo ciclo de la Educación Primaria y el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), respectivamente (Artículos 21 y 29). El Instituto de Evaluación (2009) propuso un

enmarque preciso de este tipo de evaluación referido a las competencias básicas desde las enseñanzas mínimas (especialmente criterios de evaluación y, eventualmente, contenidos). Para ello destacó, entre otros, el marco de evaluación de las pruebas PISA como punto de partida para los trabajos orientados a esta evaluación de la competencia matemática básica. Es importante señalar que el objetivo de ambas evaluaciones no es determinar si, y hasta qué grado, se ha implementado el currículo pretendido sino conocer la habilidad de los alumnos de aplicar lo aprendido para enfrentar tareas que recrean situaciones de la vida real. Uno de los objetivos principales de PISA es establecer indicadores de calidad para determinar cómo los sistemas educativos logran ese nivel de formación (Rico, 2007).

Con el propósito de conocer el trabajo que las Comunidades Autónomas han realizado en el desarrollo, el diseño y la aplicación de las primeras pruebas de diagnóstico para la competencia matemática, se analizan los ítems elaborados para dichas pruebas en el año académico 2008-2009 (Caraballo, 2010).

MARCO DE REFERENCIA

Esta investigación se enmarca, en las nociones de competencia y alfabetización matemática, en el enfoque funcional del aprendizaje matemático y en su evaluación, según el modelo matemático de PISA, desarrollados por la normativa que regula el sistema educativo español.

1.El modelo matemático de PISA

El dominio matemático que evalúan las pruebas PISA se conoce como alfabetización matemática y, en términos generales, como competencia matemática básica. PISA parte de un concepto de competencia matemática “vinculado a la capacidad de los alumnos para analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en diversas situaciones” (OCDE, 2005). Inherente al concepto de competencia se halla la necesidad de que el alumno sea capaz de aplicar sus conocimientos y su comprensión de la matemática a una amplia gama de contextos dentro y fuera de la sala de clase, proceso que involucra ideas y constructos imposibles de observar (Gallardo y González, 2005). PISA denomina matematización a la estrategia general que usan los alumnos para resolver problemas de la vida real. Matematizar es un proceso fundamental e inherente a la alfabetización matemática (OCDE, 2009). Cuando un estudiante se mueve entre el contexto real del problema y el mundo matemático necesario para resolverlo, está matematizando. La matematización permite identificar ocho competencias matemáticas específicas que describe como procesos cognitivos, mediante los cuales caracterizar y evaluar la competencia matemática básica (OCDE, 2005).

1.1. Caracterización de las pruebas PISA

En la caracterización de las pruebas PISA se distinguen tres tipos de variables: de tarea, de sujeto y de resultado o desempeño (OCDE, 2004). Las variables de tarea se usan en los instrumentos de evaluación de estas pruebas para atender al principio de matematización sobre el cual se fundamentan. En este estudio trabajamos sobre las variables de tarea, que delimitan el diseño de los ítems (INECSE, 2005).

1.2. Estudio de los ítems a partir de las variables de tarea

El proyecto PISA propone que el estudiante matemáticamente alfabetizado se enfrente a un proceso de resolución de un problema enmarcado en un contexto, un contenido matemático y atendiendo una demanda que presenta un determinado nivel de complejidad cognitiva; tales determinaciones son las dimensiones consideradas para sus instrumentos de evaluación, que describimos a continuación.

1. Contenidos matemáticos. El contenido no se ajusta a las áreas matemáticas tradicionales sino que los conocimientos se organizan desde una perspectiva fenomenológica, por ello considera las siguientes ideas para organizar los contenidos matemáticos:
 - a. Cantidad. Abarca lo relativo a las magnitudes y a la cuantificación necesaria para organizar el mundo.
 - b. Espacio y forma. Se centra en describir e interpretar el mundo físico que nos rodea.
 - c. Cambio y relaciones. Cubre las manifestaciones y los procesos de cambio abordados mediante el estudio de las relaciones que, a su vez, se abordan desde el ámbito de las funciones matemáticas.
 - d. Incertidumbre. Abarca el tratamiento de datos y el azar.
2. Contextos. PISA destaca la importancia del contexto, le otorga un papel principal para evaluar la alfabetización matemática y reconoce la necesidad de incluir una amplia gama de ellos en sus evaluaciones. Según su grado de cercanía con la situación particular del estudiante, distingue cuatro tipos de contextos:
 - a. Contextos personales. Se relacionan con las actividades cotidianas que tienen relevancia directa e inmediata para el estudiante.
 - b. Contextos educativos o laborales. Se manifiestan en situaciones a las cuales el estudiante pudiera enfrentarse en el ambiente escolar o laboral.
 - c. Contextos públicos. Aluden a situaciones que surgen en la interacción diaria del individuo con el mundo externo.
 - d. Contextos científicos. Reflejan situaciones más abstractas con las cuales el estudiante está poco relacionado.
3. Niveles de complejidad. Las competencias matemáticas específicas definidas en PISA se movilizan mediante tareas, que se pueden agrupar según tres niveles de complejidad cognitiva, atendiendo a las capacidades y conocimientos requeridos en cada caso. González, Luengo y Macías (2008) consideran esta clasificación amplia pero útil para relacionarla de forma directa con el nivel de rendimiento del alumno en la prueba:

- a. Reproducción. Preguntas que requieren que el estudiante demuestre que domina el conocimiento aprendido.
- b. Conexión. Preguntas que requieren que el estudiante muestre que puede establecer relaciones entre distintos dominios matemáticos.
- c. Reflexión. Situaciones poco estructuradas que requieren que el estudiante comprenda, reflexione y use su creatividad para reconocer las matemáticas involucradas en el problema.

2. El enfoque funcional del aprendizaje matemático

Tanto las nociones de alfabetización y competencia según se describe en el modelo PISA, como la percepción de las matemáticas como “modo de hacer”, se ajustan a un enfoque funcional del aprendizaje de las matemáticas (Lupiáñez, 2008). Este modelo centra su foco de atención en cómo los alumnos aplican sus conocimientos para enfrentarse a situaciones de la vida real que les son familiares y está conformado por tres dimensiones: tareas contextualizadas, herramientas conceptuales y sujeto cognitivo que moviliza sus capacidades.

3. Conexión entre el estudio PISA y las pruebas de diagnóstico

La importancia de las evaluaciones PISA en el sistema educativo español y su conexión con las pruebas de diagnóstico, nacionales y autonómicas, viene establecida por el sistema estatal de indicadores de la educación (Instituto de Evaluación, 2010, p.11). En dicho sistema el indicador de resultados R2.2: Competencia básica en matemáticas en Segundo Curso de Educación Secundaria Obligatoria, se establece por medio de las pruebas diagnósticas, mientras que el indicador de resultados R3.2: Competencia clave a los 15 años en matemáticas, se determina por los resultados de las pruebas internacionales del estudio PISA. De ahí el interés por la adecuación de las pruebas de diagnóstico al modelo PISA, ya que forman parte de un mismo proceso.

OBJETIVOS

El objetivo general que orienta esta investigación consiste en determinar el grado de ajuste al modelo PISA de los instrumentos elaborados por las Comunidades Autónomas para atender a la evaluación de diagnóstico en el segundo curso de la ESO. Este objetivo se articula en los siguientes objetivos específicos:

1. Localizar las pruebas de diagnóstico para evaluar la competencia matemática aplicadas por las Comunidades Autónomas a los estudiantes de 2º curso de la ESO en el año académico 2008-2009.
2. Identificar los valores de las variables de tarea en cada uno de los ítems, de acuerdo a la caracterización de las pruebas PISA.
3. Analizar los ítems de las pruebas de acuerdo a sus características y su ajuste a las evaluaciones PISA.

METODOLOGÍA

En este apartado se describe el proceso de búsqueda y recopilación de las pruebas, la definición de la muestra, el tipo de estudio, las técnicas de análisis y las limitaciones del estudio.

1. Búsqueda y recopilación de las pruebas de diagnóstico

El acceso a las pruebas autonómicas de evaluación se logró mediante una búsqueda sistemática en los portales de las Consejerías de Educación de cada comunidad. Como resultado, se logró acceso a cinco de las pruebas aplicadas. Hubo dos comunidades que no respondieron a la solicitud; tres comunidades sólo permitían acceso a la prueba aplicada en 4º de primaria; tres comunidades indicaron que la prueba no estaba disponible para divulgación; dos comunidades indicaron no haber evaluado la competencia matemática en 2º de la ESO; una comunidad publicó sólo una parte de la prueba como ítems liberados; las pruebas de otra comunidad serían liberadas en una fecha posterior y una comunidad sólo publicó ejemplos de ítems.

2. Definición de la muestra

La muestra de ítems incluida en este trabajo es una muestra por disponibilidad. A pesar de los reiterados intentos para lograr acceso a más pruebas, finalmente limitamos la muestra a los ítems procedentes de cinco pruebas. Puesto que cinco comunidades no ofrecieron pruebas de evaluación de diagnóstico en el curso 2008-2009, el banco de datos obtenido puede calificarse como suficiente, ya que comprende un porcentaje estimado del 50% de las comunidades que aplicaron pruebas.

3. Tipo de estudio y técnicas de análisis

Este es un estudio exploratorio-descriptivo. Es exploratorio porque es la primera investigación de la cual tenemos conocimiento que atiende la aplicación inicial de las pruebas autonómicas de diagnóstico; esta investigación carece de estudios previos que permitan establecer comparaciones o constatar hallazgos. Es descriptivo porque caracterizamos los ítems de las pruebas disponibles de acuerdo a las variables de tarea del modelo de PISA y al modelo funcional del aprendizaje matemático. Se identificaron sus características según el contenido, el contexto y el nivel de complejidad así como sus debilidades y fortalezas. Dada su naturaleza, el análisis de los hallazgos fue realizado mediante técnicas descriptivas.

4. Limitaciones del estudio

La investigación presenta dos limitaciones: la disponibilidad y el tamaño de la muestra. No se ha dispuesto de una parte de las pruebas aplicadas. Pese a los múltiples intentos de comunicación realizados con los encargados de las evaluaciones en las comunidades autónomas, desconocemos qué porcentaje de la totalidad de los ítems representa la muestra disponible. Puesto que nuestro objeto de estudio son los ítems individuales, para determinar la fortaleza de la muestra en términos del porcentaje de ítems sobre el total, necesitábamos conocer el total de ítems incluido en las pruebas no disponibles.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

1. Fortalezas y deficiencias de los ítems

¿Qué hace a un ítem adecuado o deficiente? Según Bell, Buckhardt y Swan (1992), se considera que una tarea que moviliza destrezas y habilidades de orden superior, como las enmarcadas en el modelo de PISA y el enfoque funcional del aprendizaje matemático, exhibe fortalezas si cumple una o más de las siguientes condiciones: las situaciones que presenta son relevantes al estudiante; la relevancia del contexto se mantiene durante el proceso de resolución; la tarea no es rutinaria; promueve que el estudiante se desplace del contexto del problema al mundo matemático necesario para resolverlo; moviliza potencialmente distintas competencias; estimula la toma de decisiones; es secuencial. Si no cumple las condiciones mencionadas y si, además, la tarea propuesta atiende estrictamente a los contenidos curriculares y no a las competencias, se considera que el ítem presenta debilidades. La Tabla 1 resume las fortalezas identificadas en los ítems evaluados y la Tabla 2, las debilidades.

Fortalezas	Total	Porcentaje (%)
Contexto relevante	111	64,2
Tarea no rutinaria	87	50,3
Moviliza distintas capacidades	80	46,2
Tiene relevancia práctica	75	43,3
Permite la toma de decisiones	50	28,9
Tarea secuencial	47	27,2
Hay desplazamiento del contexto al mundo matemático	15	8,7

Tabla 1. Porcentaje de ítems con fortalezas

Se destaca que un 64,2% de los ítems evaluados presentan un contexto relevante y necesario para resolver el problema, mostrando esta fortaleza con mayor frecuencia. La mitad de los ítems presentan una tarea que consideramos no rutinaria. Con proporciones cercanas al 50% encontramos tareas enmarcadas en la vida real con relevancia práctica para el estudiante y tareas que movilizan distintas capacidades. Por el contrario, sólo el 8,7% de los ítems permite que el estudiante se desplace del contexto del problema al mundo matemático necesario para resolverlo.

Debilidades	Total	Porcentaje (%)

Tarea corta que suprime la toma de decisiones	88	50,9
Tarea rutinaria	77	44,5
No moviliza distintas capacidades	75	43,4
Carece de relevancia práctica	73	42,2
Atiende contenidos curriculares	59	34,1
Contexto irrelevante o camuflado	47	27,2

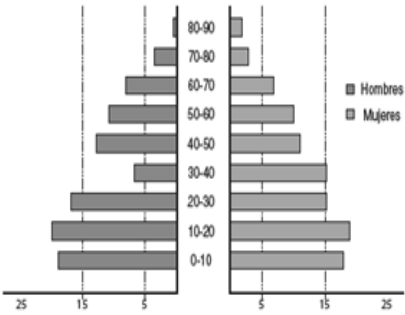
Tabla 2. Porcentaje de ítems con debilidades

Se observa que en la mitad de los ítems la tarea es corta y suprime la toma de decisiones. Cerca de este porcentaje encontramos tareas rutinarias que carecen de relevancia práctica para el estudiante y tareas que no movilizan distintas competencias. Se observa, además, que un 27,2% de los ítems presentan un contexto camuflado o irrelevante e innecesario para resolver el problema. De otro lado, aproximadamente una tercera parte de los ítems presenta tareas que en lugar de movilizar competencias, atienden contenidos curriculares.

1.1 Ejemplo de un ítem con fortalezas

- Esta pirámide de población (segregada por sexos) corresponde a cierto país con dos características muy destacadas:
 - Es una población muy joven
 - Hace 10 años el país sufrió una guerra civil

Explica cómo se ponen de manifiesto en la forma de la pirámide ambos factores.



El contexto en este ítem es relevante y necesario para resolver el problema aunque el estímulo inicial pierde su relevancia durante el proceso. La tarea es poco estructurada, no es rutinaria y exige razonamiento e interpretación. El estudiante deriva inferencias de la gráfica y explica un fenómeno. Se moviliza la toma de decisiones y la justificación de argumentos. Además, la tarea es secuencial. Moviliza distintas competencias.

2. Evaluación de los ítems según las variables de tarea

Cada ítem se clasificó de acuerdo a las variables de tarea: contexto, contenido y nivel de complejidad. Además, se identificaron las fortalezas y deficiencias del ítem y se

estudiaron las competencias potenciales que debía poner de manifiesto el estudiante para resolver el problema. Por ser una variable de desempeño y no de tarea, la identificación de las competencias se realizó como un recurso de apoyo para caracterizar el ítem. La Tabla 3 resume las observaciones en las variables de tarea.

Variable	Frecuencia	Porcentaje (%)
Contexto		
Personal	31	17,9
Educativo/Laboral	32	17,9
Público	98	57,2
Científico	12	6,9
Total	173	100,0
Contenido		
Cantidad	43	25,4
Espacio y forma	45	25,4
Cambio y relaciones	37	21,4
Incertidumbre	48	27,7
Total	173	100,0
Complejidad		
Reproducción	81	46,8
Conexión	78	45,1
Reflexión	14	8,1
Total	173	100,0

Tabla 3. Distribución porcentual de los ítems según las variables de tarea

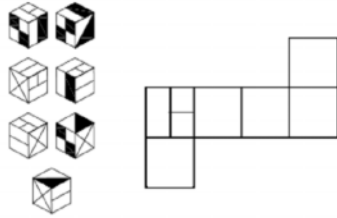
En la distribución del total de ítems de acuerdo al contexto se observa, globalmente, un desequilibrio hacia los ítems de contexto público, cuyos enunciados representan más del 50% del total. El 6,9 % del total de ítems se clasificó en la categoría de contexto científico representando esta la menor concentración. En cuanto al contenido, la distribución del total de ítems en las categorías de esta variable es equilibrada, con leves diferencias. La mayor frecuencia se observa en el contenido de incertidumbre (27,7 %). Las clasificaciones de cantidad y espacio y forma exhiben igual porcentaje (25,4%). De otro lado, en las observaciones respecto del nivel de complejidad se detecta un sesgo global, debido al bajo porcentaje de ítems de reflexión. Se observa que la mayor frecuencia ocurre en el nivel de reproducción con 46,8 % aunque muy cercano al nivel de conexión (45,1 %). Invariablemente, el nivel de reflexión se aleja considerablemente de los niveles de reproducción y conexión: sólo el 8,1 % del total de ítems se clasificó en este nivel.

3. Ejemplos de ítems estudiados

A continuación se presentan ejemplos de ítems en los que identificamos los valores que toman en las variables de tarea, junto con un balance de sus fortalezas y debilidades.

Pruebas autonómicas de diagnóstico para evaluar la competencia matemática en educación secundaria

- El siguiente ítem se clasificó en el contexto educativo porque presenta una actividad diseñada con propósitos puramente didácticos. El estímulo inicial fue titulado *Un Cubo* y consta de esta única pregunta.



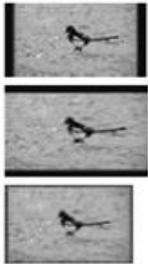
Dibuja en la plantilla que se te da la disposición de las caras del cubo que nos muestra el dibujo desde siete posiciones distintas. Ten en cuenta que se trata siempre del mismo cubo.

Contexto	Educativo.
Contenido	Espacio y forma – el estudiante decodifica información visual
Complejidad	Conexión – la tarea no es familiar ni rutinaria; el estudiante decodifica la información del diagrama para determinar el diseño del cubo. El estudiante relaciona un objeto en tres dimensiones con uno en dos dimensiones.
Competencias	Observar detalles. Decodificar información visual. Ilustrar la red final. Traducir la figura de un cubo a su representación como red. Moviliza las competencias: representar, pensar y razonar.
Fortalezas/ Deficiencias	La tarea exige una alta capacidad de visualización. Moviliza varias competencias. La tarea carece de utilidad práctica. No hay conexión entre la tarea y la vida cotidiana. Las instrucciones son confusas; según se plantea, sugiere que deben realizarse siete diagramas distintos. Tarea estrictamente matemática.

- El siguiente ítem se clasificó en el contexto personal porque presenta una situación familiar para el estudiante: el manejo de fotografías. El estímulo inicial fue titulado *Revelado online* y consta de seis preguntas.

Los negativos de las cámaras tradicionales tienen un tamaño de 24 mm x 36 mm. Si quieres hacer una ampliación de 20 cm x 45 cm:

- A. Aparecerá un margen a lo ancho
- B. Aparecerá un margen a lo largo
- C. No aparecerá ningún margen
- D. No se puede hacer porque no son del mismo tamaño



Contexto	Personal.
Contenido	Espacio y forma. El estudiante analiza la forma y dimensiones de un objeto.
Complejidad	Conexión. El estudiante reconoce la relación de proporcionalidad existente.
Competencias	Comprender la información que se ofrece y lo que pide el problema. Identificar el cambio de medidas. Reconocer la relación de proporcionalidad entre las medidas. Tomar decisiones. Moviliza: Representar, comunicar.
Fortalezas/ Deficiencias	Tarea no rutinaria. Contexto relevante. Moviliza distintas capacidades. Tarea secuencial. Permite la toma de decisiones. Tiene relevancia práctica. La tarea se desliga del estímulo inicial.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En términos generales, se encontró que los ítems diseñados responden a la caracterización del modelo matemático de PISA: Se enmarcan en un contexto, atienden un contenido matemático y muestran un nivel de complejidad reconocible. No obstante, los valores identificados en los ítems para las variables de tarea demuestran que en su redacción existe sesgo que favorece el contexto público y el nivel de complejidad de reproducción. En cambio, los ítems mantienen un equilibrio en lo que a contenido se refiere. Por los sesgos y deficiencias identificados en ellos, estos ítems no parecen contemplar tareas adecuadas para atender al propósito para el cual fueron diseñados. Se concluye que para cumplir con el grado de ajuste adecuado a las evaluaciones PISA, se requiere que las Comunidades Autónomas revalúen el diseño de las pruebas a la luz de las variables definidas en la caracterización de dichas pruebas.

Para dar continuidad a esta investigación, actualmente está en curso el estudio *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas. Una experiencia con profesores*. Desarrollar, mejorar y valorar la competencia de los profesores en formación en la redacción de ítems que se ajusten al modelo matemático de las evaluaciones de PISA constituye el objetivo general de la investigación. La actualidad del tema, la necesidad de criterios fundados para la elaboración de ítems para las pruebas de diagnóstico y el carácter innovador del marco teórico muestran la vinculación del estudio y su aportación para dar respuesta a problemas actuales de las matemáticas escolares en el sistema educativo español.

Referencias

- Bell, A., Burkhardt, H. & Swan, M. (1992). Assessment of extended tasks. En R. Lesh & S. Lamon (Eds.). *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*. Washington: American Association for the Advancement of Science.
- Caraballo, R.M. (2010). *Análisis de los ítems de las pruebas de evaluación de diagnóstico en competencia matemática para el segundo curso de la Educación*

Secundaria Obligatoria en España, 2008-2009: un estudio exploratorio. Trabajo de fin de máster sin publicar. Universidad de Granada.

- Gallardo, J. & González, J. L. (2005). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds.): *Actas del IX Simposio de la SEIEM*, pp. 197-204. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- González, J., Luengo, R. & Macías, M. (2008). Diseño y evaluación de la prueba de competencia curricular Proc-Hab para la diversificación curricular en Extremadura. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y J.L. Blanco: *Actas del XIII Simposio de la SEIEM*, pp. 435-451. Badajoz: Universidad de Extremadura.
- INECSE (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Instituto de Evaluación (2009). *Evaluación General de Diagnostico 2009: Marco de la Evaluación*. Madrid: Ministerio de Educación.
- Instituto de Evaluación (2010). *Sistema estatal de indicadores de la educación*. Madrid: Ministerio de Educación
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Ley Orgánica de Educación. Boletín Oficial del Estado, BOE núm. 106. Madrid: Autores. www.educacion.esOECD (2004). *Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003*. www.oecd.org
- OCDE (2005). Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana. Madrid: Santillana.
- OECD (2009). *Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA*. www.oecd.org
- Rico, L. (2007). "La competencia matemática en PISA". *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza Editorial, Madrid.

INTERPRETACIÓN DE INDICADORES DISCURSIVOS EN SITUACIONES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN PAREJA

INTERPRETING DISCURSIVE INDICATORS IN THE LEARNING OF MATHEMATICS THROUGH PAIR WORK

Chico, J., Planas, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen. *En este informe, presentamos el análisis de datos de una pareja de estudiantes durante la resolución de un problema de generalización en una clase de matemáticas de secundaria (15-16 años). De acuerdo con las teorías interaccionistas del aprendizaje matemático, asumimos que el discurso establecido en la interacción en pareja es un factor clave de influencia en los procesos de construcción de conocimiento matemático. Hasta ahora, los resultados ponen de relieve la relación entre el uso de ciertos indicadores discursivos y los avances en la “intención argumentativa” de las estudiantes. La mayoría de intercambios con intención argumentativa vienen precedidos o acompañados por refutación y cuestionamiento, y en menor grado, validación. La refinación del análisis actual se está realizando dentro del trabajo de tesis doctoral de la primera autora.*

Palabras clave: interacción; aprendizaje matemático; trabajo en pareja; argumentación discurso.

Abstract. *This report brings up data analysis from pair work by two students while solving a generalization problem in their secondary mathematics classroom (15-16 years). Drawing on interactionist theories of mathematical learning, we view discourse that comes in pair work interaction as a key influence on processes of construction of mathematical knowledge. So far, findings point to relationships between the use of particular discursive indicators and the progress in the students’ “argumentative intention”. Most exchanges with “argumentative intention” are either preceded by or simultaneous to refutation and questioning, and to a fewer extent, validation. Tasks of refining current analyses are being examined by the first author in her doctoral research work.*

Key words: interaction; mathematical learning; pair work; argumentation; discourse.

INTRODUCCIÓN

Son múltiples los estudios que vinculan la construcción de aprendizaje matemático con la participación en entornos de interacción social. Krummheuer (2011), por ejemplo, fundamenta la metáfora del aprendizaje matemático como participación en situaciones de interacción orientadas a la resolución de problemas. También Steinbring (1998), en una de sus obras más citadas, habla de las oportunidades de generación de aprendizaje matemático asociadas a la facilitación de la interacción entre estudiantes y entre estos y

el profesor. Este último autor apunta a la interacción no solo como mediador sino además como obstáculo ocasional en el aprendizaje.

En el estudio de tesis doctoral de la primera autora, suponemos que cualquier actividad cognitiva de comprensión matemática está vinculada al contexto social en el que se produce y, en particular, al micro contexto de interacción en el aula (Chico, Planas, Morera y Fortuny, en prensa). Desde esta perspectiva, se está llevando a cabo el análisis de seis sesiones de clase con trabajo en pareja seguido de puesta en común orquestada por el profesor. En una primera fase, únicamente se examinan los datos del trabajo en parejas con el propósito de entender mejor *cuáles son algunas de las relaciones entre aprendizaje matemático e interacción en pareja*. Buscamos identificar “momentos” de aprendizaje matemático asociados a “momentos” del discurso en el aula que evidencien algún tipo de intercambio sustancial entre estudiantes en relación con avances en la resolución del problema correspondiente. Como se verá en las próximas secciones, adoptamos el término “momento de aprendizaje” como criterio de selección de episodios de clase y, por otro lado, el término “avances en el aprendizaje” para marcar progresos en la resolución del problema dentro de cada episodio.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Varios autores han estudiado la interacción en pareja asociada a la construcción de conocimiento matemático. Algunos de ellos han adoptado una perspectiva psicológica centrada en el papel de la interacción en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, como es el caso de Zittoun, Perret-Clermont y Pontecorvo (2004). Otros autores apuntan a la relación simultánea entre la experiencia social de la interacción y el desarrollo cognitivo que lleva al aprendizaje matemático. En Cobo y Fortuny (2000) se resume parte del análisis del discurso en parejas de estudiantes durante su avance en el aprendizaje matemático. La identificación de intercambios del tipo pregunta-respuesta, validación, repetición... lleva a caracterizar modelos de interacción en parejas vinculados con “beneficios cognitivos” concretos. Los trabajos de Cobo y Fortuny sirven de marco para nuestro estudio actual, centrado en la delimitación de secuencias breves de intercambios con contenido matemático y en la caracterización de algunos de estos intercambios por medio de indicadores discursivos. El objetivo es conseguir relacionar avances en el aprendizaje matemático con interacciones entre estudiantes caracterizadas con indicadores. Tomamos la noción de *indicador discursivo* para referirnos al descriptor que condensa información sobre cómo al menos una de las partes se posiciona respecto a contenidos matemáticos expresados en un intercambio. A diferencia de otros autores (ver, por ejemplo, la “acción” y la “naturaleza de la acción” en Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2010), nuestros indicadores se definen a partir de intercambios y no a partir de la función comunicativa de cada contribución. El indicador discursivo nos da información sobre la cohesión de la comunicación expresada en un intercambio con contenido matemático; habla, por tanto, de qué tipo de conexiones se establecen entre lo que un estudiante expresa en relación a las matemáticas y la reacción de otro estudiante.

Explorar relaciones entre aprendizaje matemático e interacción es una tarea amplia que concretamos con la noción de *intención argumentativa*. En nuestro trabajo, la distinción entre argumentación, que en un sentido estricto se acostumbra a encontrar en pocas conversaciones de aula (Fortuny, Iranzo y Morera, 2010) e intención argumentativa es crucial. Entendemos que hay intención argumentativa en los textos con contenido

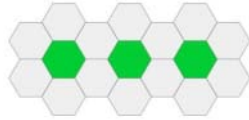
matemático en los cuales al menos uno de los interlocutores tiene la “intención” de convencer o hacer cambiar una posición que ha sido expresada, aunque esto no implica necesariamente que aporte ni razones matemáticas ni inferencias suficientes. Como Krummheuer (2011), insistimos en la dimensión comunicativa de toda argumentación matemática, que en el día a día del aula se muestra con la presentación de razones, que a menudo son reacciones a otras razones y que no siempre se enuncian de modo estructurado ni completo. El dominio sintáctico de la argumentación matemática viene, por tanto, precedido de la práctica social de la intención argumentativa en la medida en que ésta tiene sentido en una situación de enseñanza y aprendizaje. Ya en los trabajos de Perelman (1970) se sugiere esta dimensión comunicativa al diferenciarse la demostración, que no requiere asentimiento, de la argumentación, que se funda sobre premisas que requieren la explicitación de acuerdos. El tipo de acuerdos que requiere la argumentación continúa siendo, desde el punto de vista de la matemática, muy exigente; en este sentido, la intención argumentativa representa un grado de exigencia cercano pero menor.

DISEÑO Y MÉTODOS DE ANÁLISIS

Los datos se han recogido en un aula de matemáticas con estudiantes de 15 y 16 años de un colegio de Barcelona. Se trata de un aula asociada al “Taller de problemas”, donde se resuelven problemas de ediciones anteriores de una competición local. Al tratarse de un taller optativo paralelo a otros, hay tan solo 14 estudiantes. La dinámica de las sesiones siempre consiste en trabajo en pareja durante unos 20 minutos, para pensar el problema y producir un informe escrito consensuado, y puesta en común durante unos 30 minutos, para confrontar públicamente formas de resolución y dificultades de las parejas; se finaliza con un tiempo para introducir modificaciones en los informes. La profesora gestiona la puesta en común, desatascando momentos de silencio y proponiendo, cuando conviene, cuestiones que contribuyen a ampliar la discusión. En esta ocasión, comentamos datos en torno al trabajo de una de las parejas con uno de los problemas (Figura 1).

Todos los problemas plantean contextos imaginables fuera de las matemáticas, que tienen que facilitar conjeturas y generalizaciones desde la formulación de casos particulares. Los enunciados incluyen texto escrito y dibujos que ayudan a representar el inicio de una sucesión. Las cuestiones del enunciado siguen tres criterios: 1) generalización próxima, se pide un elemento de la serie que se pueda calcular mediante un procedimiento de recuento directo; 2) generalización lejana, se pide un elemento de la serie cuyo cálculo resulte difícil mediante recuento directo; 3) generalización matemática, se pide el paso del pensamiento aritmético y/o geométrico al pensamiento algebraico para expresar el caso general. Esta estructura da lugar a razonamientos inductivos, por lo que se espera que las argumentaciones aparezcan vinculadas a la búsqueda y explicación de patrones, o la valoración de conjeturas a través de casos particulares, entre otras estrategias.

BALDOSAS Y JARDINERAS. El Ayuntamiento quiere ornamentar una plaza colocando jardineras hexagonales (verdes en el dibujo), rodeadas de baldosas también hexagonales.



1. ¿Cuántas baldosas harán falta para cinco jardineras? Explícalo.
2. ¿Cuántas baldosas serán necesarias para 100 jardineras? Explícalo.
3. Y para un número cualquiera n de jardineras, ¿cuántas baldosas harán falta? Explícalo.

Figura 1. Enunciado de uno de los problemas

Cada sesión se graba en video y audio. Se realiza un primer visionado de la sesión para decidir qué fragmentos del trabajo en pareja y de la puesta en común se transcriben. Se escogen momentos de la discusión en parejas y en gran grupo donde se hable de la aproximación al problema o de su resolución, dejando de lado las intervenciones sin contenido matemático sobre gestión de la tarea u otras temáticas. El siguiente paso consiste en reducir las transcripciones a “episodios” que señalen “momentos de aprendizaje matemático” detectables en la interacción, en los cuales uno o más estudiantes modifican algún contenido para dar respuesta a demandas de la tarea. Para cada episodio y para el caso de interacción en pareja, se busca documentar tres aspectos: i) avances en el aprendizaje matemático; ii) indicadores discursivos presentes en la interacción; iii) relaciones entre indicadores discursivos e intención argumentativa. Entendemos que hay avance en el aprendizaje matemático cuando se produce un progreso matemático que permite avanzar en la resolución de la tarea. Nos son de interés momentos donde se produce avance en el aprendizaje tras un proceso de interacción en la pareja. Puede ocurrir que haya avance en el aprendizaje matemático por parte de un único alumno; aunque aquí también tenga sentido hablar sobre aprendizaje, no seleccionamos estos fragmentos para el análisis en profundidad porque no están directamente ligados a la interacción. Aunque se examina el registro transcrito, se recurre a los videos para confirmar interpretaciones que pretenden valorar si tiene sentido vincular la aparición de contenidos matemáticos con determinados usos del discurso. En lo que sigue, detallamos partes del análisis por medio de la descripción de un episodio vinculado al problema de la Figura 1.

EJEMPLO DE ANÁLISIS DE UN EPISODIO

La Figura 2 reproduce una conversación en una pareja, Montse y Maite, durante la discusión del tercer apartado de la tarea (ver Figura 1). Inicialmente, estas estudiantes dibujan el caso de cinco jardineras añadiendo baldosas pero sin seguir la dirección horizontal; el enunciado es, por tanto, ambiguo. De ahí que contando obtengan 19 baldosas para el primer apartado en lugar de 22. Más tarde, la regla de tres que aplican, “19 es a 5 como x es a 100”, tampoco es correcta. A pesar de estos errores matemáticos, hemos seleccionado este episodio porque hay evidencias de avance en el aprendizaje matemático cuando Maite entiende que para resolver el tercer apartado se requiere una

Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja

expresión algebraica que relaciona las variables n (jardineras) y x (baldosas). Si nos fijamos en el desarrollo del discurso en este fragmento, observamos indicadores que contribuyen a explicar cómo se puede haber facilitado dicho aprendizaje. Aunque no podemos concluir sobre qué hubiera ocurrido en un contexto de interacción distinto, parece razonable inferir que la interacción ha contribuido a avanzar en la comprensión matemática de una expresión algebraica. Otra cuestión es que hay un mal uso de la regla de tres, probablemente porque ninguna de las estudiantes tiene clara la aplicación de la proporcionalidad lineal en el problema. Para este informe no comentamos datos de la puesta en común, pero sí queremos hacer notar que esta dificultad vuelve a aparecer y, tras la conversación con otra pareja, se resuelve.

- 1 Montse: 19 es a 5 como...
- 2 Maite: No.
- 3 Montse: No... A ver, podemos poner 380 es a 100 como...
- 4 Maite: No.
- 5 Montse: Como x es a n , ¿como x es a n !
- 6 Maite: Pero son dos incógnitas.
- 7 Montse: No, porque la n en teoría te la tienen que dar. ¿Sabes? Para n baldosas.
- 8 Maite: Entonces no puedes encontrar la solución, simplemente...
- 9 Montse: Claro.
- 10 Maite: Simplemente es el planteamiento. No, pero que... alguien que... o sea...
- 11 Montse: ¡Pero que no lo puedes saber!
- 12 Maite: Si alguien me dice que 100, o sea que las jardineras se lo dan con 380...
- 13 Montse: Pues lo haría así [380 es a 100 como x es a n].
- 14 Maite: No, como el anterior [19 es a 5 como x es a 100].
- 15 Montse: Si le dieran el número 3 es a tantas... [señala el dibujo]
- 16 Maite: Como el dibujo, ya. Pero entonces podemos decir que 19 es a 5 como n es a tantos...
- 17 Montse: Vale, sí.
- 18 Maite: No sé, yo creo que ahí hay otra cosa.
- 19 Montse: Pero es que claro, si tú no sabes qué número es n , tampoco puedes saber qué número es x porque no lo tienes.
- 20 Maite: Pero es que siempre te darán una de las dos incógnitas.
- 21 Montse: Claro, siempre te darán una de las dos incógnitas. En teoría es así y ya está.
- 22 Maite: Siempre nos darán una de las dos incógnitas...
- 23 Montse: Para poder resolver el problema. Y ya está.
- 24 Maite: Es así, sí.

Figura 2. Fragmento de conversación entre Montse y Maite

Identificamos hasta cuatro indicadores discursivos (*refutación*, *validación*, *cuestionamiento* y *paráfrasis*) que, mirados en su conjunto, señalan implicación en la tarea matemática e intención argumentativa. Antes de comentarlos en relación con su uso en este episodio, damos nuestra interpretación de estos indicadores, que está influenciada por los respectivos significados habituales en situaciones de habla y, a su vez, inspiradas en los intercambios de Cobo y Fortuny (2000). En un intercambio con contenido matemático hay:

- *Refutación (R)* cuando una parte no acepta lo que se ha dicho, pudiendo rebatir con razones;
- *Validación (V)* cuando una parte aprueba lo que se ha dicho, pudiendo afirmar con razones;
- *Cuestionamiento (C)* cuando una parte expresa dudas o directamente pide razones en relación a lo que se ha dicho;
- *Paráfrasis (P)* cuando una parte repite o reformula lo que ha dicho el otro, pudiendo generar refutación, validación y/o cuestionamiento.

En [1-4] se ve una refutación reiterada de Maite al uso de una regla de tres, sin aportar razones. En [5-7], Maite rechaza generalizar la regla de tres porque hay “dos incógnitas”, a lo que Montse responde con una nueva refutación, esta vez acompañada de razones explícitas. A la validación sin razones de Montse [9], le sigue una primera evidencia de avance en el aprendizaje cuando Maite dice entender que el uso de x y n se refiere “simplemente a un planteamiento”. En [10-16] hay un intercambio algo confuso en tanto que, por una parte, Maite quiere sustituir $380/100 = x/n$ por $19/5 = x/n$, mientras que por otra, Montse insiste en su regla de tres hasta [17], donde acepta la fracción $19/5$ con una validación sin razones. Esta secuencia lleva hasta la formulación de un cuestionamiento [18] a Montse. Aunque no queda claro a qué se refiere Maite, en [19] Montse da una explicación de nuevo relacionada con el carácter algebraico de la respuesta. En ese momento, con la secuencia paráfrasis-validación-paráfrasis [20-22], iniciada en [7], y la validación de Maite [24], se produce lo que entendemos como un avance en la comprensión del paso al álgebra.

En este episodio, no hay argumentación matemática en sentido estricto, pero sí existe intención argumentativa ya que las dos estudiantes aportan razones que dan fuerza a algunas de sus proposiciones (por ejemplo en [19]). A este respecto, resultan interesantes las conclusiones de Cañadas (2007), quien analizó procesos inductivos en problemas de generalización matemática con estudiantes de 15 y 16 años. En su caso, los estudiantes trabajaban individualmente y tenían que justificar la resolución por escrito. Cañadas documentó la tendencia en muchos estudiantes a no justificar respuestas ni conjeturas manteniendo así patrones erróneos. Nuestros datos ilustran la interacción como un escenario en el cual Maite resuelve una duda y Montse explica razones. Del análisis, se desprende que Montse contribuye a resolver la duda y Maite fuerza la explicación de razones. Esta oportunidad de avanzar en colaboración no se da en las dinámicas de trabajo individual. Aunque tal como se ve en la utilización equívoca que Maite y Montse hacen de la regla de tres, el trabajo en pareja no es por sí solo garantía de resolver cualquier concepción errónea.

Queremos resaltar que en el total de episodios analizados hasta ahora hay numerosas situaciones de aprendizaje con intención argumentativa. En las distintas parejas, se dan razones matemáticas por medio de explicaciones que contribuyen a avanzar en la resolución del problema. Desde la perspectiva de los indicadores discursivos que preceden y/o acompañan la mayoría de intercambios con intención argumentativa, destacan la refutación y el cuestionamiento, y en menor grado la validación. El episodio anterior da dos ejemplos de esto. En [6-7] hay una refutación ligada a la intención argumentativa “No, porque la n en teoría te la tienen que dar”. Por otra parte, en [18-19] hay un cuestionamiento ligado a la intención argumentativa “Pero es que claro, si tú no

Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja

sabes qué número es n , tampoco puedes saber qué número es x porque no lo tienes”, donde se insiste en la relación de dependencia entre x y n .

RESUMEN DE RESULTADOS PARCIALES DE UNA SESIÓN

En la Tabla 1 se resumen resultados del análisis de los episodios de cuatro parejas en la primera sesión, donde se trabajó en la tarea de la Figura 1. Se observa el tipo y la frecuencia de cada indicador discursivo dentro de los episodios de cada pareja. En la columna IA, se muestra el número de veces que el indicador aparece acompañado por intención argumentativa.

Pareja	Episodio	Aprendizaje matemático	Indicador discursivo		IA
			Tipo	Frecuencia	
Maite Montse	E ₁₁	Establecimiento de relación entre dos variables	R	4	2
			V	4	
			P	2	
			C	1	1
Gabriel Josep	E ₂₁	Simplificación de expresión algebraica	R	1	
			V	2	1
			P	1	
			C	3	2
			A	3	
	E ₂₂	Dotar un patrón de significado	R	8	4
			V	1	1
			P	1	
			C	1	
			A	1	
	E ₂₃	Dar sentido a expresión algebraica	A	1	
Cristina Mercè	E ₃₁	Búsqueda de regularidades	V	2	
			P	1	
			C	1	
			A	1	
Irene Óscar	E ₄₁	Dar sentido al contexto del problema	C	2	1
			P	1	
	E ₄₂	Dar sentido a la proporcionalidad lineal	R	1	1
			V	6	1
			P	2	
			C	2	1
			A	3	2
	E ₄₃	Validación de conjetura con caso particular	C	2	1
			R	1	1
	E ₄₄	Búsqueda de regularidades	C	2	1
			A	1	
			V	1	1
	E ₄₅	Dotar un patrón de significado	V	1	1

			P	1	
			A	1	

Tabla 13: Síntesis de resultados de la primera sesión

Los indicadores que aparecen con más frecuencia son refutación y cuestionamiento, que a menudo aparecen asociados a momentos de avance en el aprendizaje matemático donde se examinan, valoran y deciden conjeturas. En la pareja formada por Irene y Óscar esto ocurre durante la resolución del segundo apartado. Se conjetura como respuesta una regla de tres que, tras un cuestionamiento, se examina con un caso particular y se rechaza. El fragmento de la Figura 3 (que representa parte del episodio E₄₃ de la Tabla 1) lo ilustra:

Óscar:	Podríamos hacer si para una es a 4 (...) x son a 100. Son... saldrían 400 baldosas.
Irene:	Pero si lo haces, por ejemplo, con 1 es a 4 y 3 es a x , ¿cuánto te sale?
Óscar:	Doce.
Irene:	No da porque son catorce.
Óscar:	¡Ay! Vale.

Figura 3. Fragmento de conversación entre Irene y Óscar

Respecto a la sección anterior, observamos que aparece un indicador todavía no definido, *Ampliación* (A). Consideramos que en un intercambio con contenido matemático hay *Ampliación* cuando una parte amplía o completa lo que ha dicho la otra parte, pudiendo adjuntar/complementar con razones. Ampliación y paráfrasis a menudo vienen asociados a momentos de avance en el aprendizaje matemático donde se explican, se buscan o se dotan de significado patrones a través del contexto de la tarea. En la Figura 4 se muestra un fragmento de conversación entre Irene y Oscar, perteneciente al episodio E₄₂, que lo ilustra:

Irene:	Porque es que los lados los comparten [señala las dos baldosas en medio de dos jardineras] (...) Cada una lleva un lado de..., cada una lleva esta y esta, eso sí, no las comparten.
Óscar:	Entonces podríamos decir que una de estas [primera jardinera] tiene cuatro [baldosas], esta también tiene cuatro [segunda jardinera], esta tiene todas [última jardinera]
Irene:	Cuatro, cuatro...no, esta [última jardinera] también tiene cuatro porque aquí vendría la siguiente. O sea que en cada una añadimos cuatro.
Óscar:	Ah claro, bueno pero la última siempre tendrá dos más.

Figura 4. Fragmento de conversación entre Irene y Oscar

REFLEXIONES FINALES

Los ejemplos aportados ilustran situaciones con intención argumentativa, que facilitan avances en el aprendizaje matemático. Refutación, validación, cuestionamiento, paráfrasis y ampliación se han caracterizado como elementos que contribuyen a hacer efectiva la intención argumentativa, sin que todos ellos intervengan con la misma intensidad en la elaboración de razones. Por otro lado, también se ha visto que la interacción en pareja no siempre está orientada a la resolución de todas las dificultades matemáticas. Aún así, es razonable pensar que las prácticas dirigidas a convencer son un buen preámbulo de las prácticas de argumentación matemática.

Nuestros datos sugieren el carácter intersubjetivo de los procesos de intención argumentativa. Los esfuerzos de un estudiante por convencer tienen que ver con las representaciones que los unos tienen de los otros. Se darán más o menos razones en función de cómo se represente la capacidad de comprensión del otro y qué dificultades se le atribuyan. Esto ayuda a entender mejor el contenido de algunas de las respuestas de Montse a Maite, sobre todo cuando la primera empieza enunciando frases que no sustenta con razones. Si queremos considerar los procesos de intención argumentativa tenemos primero que situarlos desde la perspectiva de su significado en la interacción. Uno de los retos del profesorado de matemáticas en la etapa de secundaria es precisamente fomentar el aprendizaje de la argumentación en situaciones de interacción, ya sea en pareja o gran grupo.

Tenemos pendientes varias tareas para los próximos meses. Uno de los objetivos principales será explorar los datos de las puestas en común que siguen al trabajo en pareja. En el análisis de las conversaciones de las parejas hemos encontrado razones cuya enunciación se inicia pero no se completa, o bien estudiantes que no consiguen superar dificultades de comprensión matemática aún cuando las están debatiendo entre ellos. Interesará observar si ocurre algo similar en las puestas en común, donde la profesora está presente e interviene para dinamizar la discusión matemática. Se trata de un escenario cualitativamente distinto ya que cualquier intento de un estudiante por convencer estará mediado por la necesidad de convencer a la profesora. También es metodológicamente distinto ya que se requerirán formas más sofisticadas de organización y reducción de datos al intervenir varios estudiantes en los distintos episodios.

Agradecimientos

El trabajo de tesis doctoral de la primera autora, con la beca BES-2010-030877, forma parte del Proyecto ‘Estudio sobre el desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas’, EDU2009-07113/EDUC, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación. Las autoras son miembros del Grupo SGR2009-00364, AGAUR.

Referencias

- Cañadas, C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Trabajo de Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Chico, J., Planas, N., Morera, L. y Fortuny, J. M. (en prensa). Mathematical practices inside the classroom: An episode of cooperative interaction in pair work. *Actas en preparación del 63 Congreso de la CIEAEM*. Barcelona: Universidad de Barcelona.
- Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 115-140.

- Fortuny, J. M., Iranzo, N. y Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (69-85). Lleida: SEIEM.
- Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion “learning-as-participation” in everyday situations of mathematics classes. *The International Journal on Mathematics Education -ZDM*, 43(1), 81-90.
- Muñoz-Catalán, M. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2010). Modelo de análisis de interacciones en un contexto colaborativo de desarrollo profesional. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (451-460). Lleida: SEIEM.
- Perelman, C. (1970). *La lógica jurídica y la nueva retórica*. Madrid: Civitas.
- Steinbring, H. (1998). Epistemological constraints of mathematical knowledge in social learning settings. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (513-526). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Zittoun, T., Perret-Clermont, A. N. y Pontecorvo, C. (2004). Overview of the Volume. En A. N. Perret-Clermont y otros (Eds.), *Joining society: Social interaction and learning in adolescence and youth* (26-38). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

IDENTIDAD PROFESIONAL Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE MAESTROS EN FORMACIÓN

PROFESSIONAL IDENTITY AND MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR THE TEACHING OF PRE-SERVICE TEACHERS

Contreras, P., Penalva, M. C., Torregrosa, G.

Universidad de Alicante

Resumen. *En este estudio se pretende obtener una mayor comprensión sobre la identidad profesional en formación de estudiantes para maestro y las implicaciones para los programas de formación del profesorado. Se indaga sobre las reflexiones realizadas por estudiantes para maestro de Educación Primaria concernientes a sus experiencias relativas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y a conocimientos que estiman necesarios para enseñar matemáticas. Los resultados obtenidos revelan los aspectos que estos estudiantes destacan como elementos constitutivos de la identidad profesional del maestro haciendo mención a los componentes propios del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se propone una aproximación de la caracterización de la identidad profesional a través del conocimiento matemático para la enseñanza.*

Palabras clave: Identidad profesional, conocimiento matemático para la enseñanza, experiencias de aprendizaje, formación de maestros, educación primaria.

Abstract. *The focus of this study is to obtain a better understanding of the professional identity of pre-service teachers that it is forming and its contribution for teachers training program. We investigate the reflections of pre-service primary teachers concerning their experiences in the teaching and learning of mathematics and the necessary knowledge to teach mathematics. Results show aspects that pre-service teachers emphasize as elements of the professional identity of teachers mentioning the own components of the process of teaching and learning mathematics. We propose an approach to characterize the professional identity through the mathematical knowledge for teaching.*

Keywords: Professional identity, mathematical knowledge for teaching, learning experiences, teachers training, pre-service teachers, primary school.

INTRODUCCIÓN

La declaración conjunta de los Ministerios Europeos reunidos en Bolonia en 1999 confiere a las instituciones españolas de Educación Superior un rol importante en la organización y homologación de sistemas educativos, equivalentes a otros países de la Unión Europea. Los constantes cambios y desafíos que se están desarrollando

promueven temas relevantes de investigación sobre la formación del profesorado de matemáticas, como los relacionados con el *conocimiento del profesor* necesario para una práctica efectiva y las *identidades* del profesor, ya que éstas enriquecen la comprensión de aprendizajes específicos (Penalva, Rey y Llinares, 2011). Aunque estos dos campos de investigación han sido a menudo considerados separadamente, diversos estudios examinan la interacción entre *conocimiento* e *identidades* desde la perspectiva del conocimiento personal del profesor o del estudiante para profesor (Beijaard, Verloop y Vermunt, 2000; Krzywacki-Vainio y Hannula, 2008; Smith, 2007).

Sfard y Prusak (2005), consideran que la *identidad* es una herramienta para el aprendizaje y que se manifiesta a través del discurso. La *reflexión* se muestra como una componente relevante en la formación de la *identidad del profesor* de los futuros profesores, ya que permite explorar las interacciones del estudiante con otros (profesores y alumnos) en diferentes contextos, la integración de significados y la toma de decisiones para la enseñanza, contribuyendo a una reorientación y autorregulación de la imagen del profesor ideal.

Para Gómez-Chacón (2010) los relatos de los estudiantes sobre sus profesores y compañeros, proporcionan, por una parte, la comprensión personal del propio desarrollo de su formación profesional, y por otra, la reconstrucción subjetiva de su “historia de vida”, poniendo de manifiesto la influencia de la dimensión personal del futuro profesor en su *identidad profesional*.

Diversos estudios han tratado de dar respuesta a los aspectos que enmarcan la *identidad profesional* del profesor de matemáticas, destacando la importancia que tiene para la comprensión y reconocimiento de lo que significa ser profesor. Las investigaciones analizadas ponen de manifiesto que la *identidad profesional* se construye mediante un proceso continuo, dinámico de interpretaciones de situaciones personales y sociales de los estudiantes, respondiendo a preguntas como ¿quién soy en este momento? y ¿qué quiero llegar a ser? (Beijaard, Meijer y Verloop, 2004).

Esta investigación explora sobre las *identidades profesionales* en formación de estudiantes para maestro de Educación Primaria, que emergen cuando reflexionan sobre su propia experiencia formativa en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La información obtenida se utiliza para investigar sobre elementos relevantes de la *identidad profesional* del maestro relacionados con el conocimiento matemático necesario para enseñar matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Desde una perspectiva sociocultural, la clase de matemáticas puede ser pensada como un entorno social concreto. Boaler y Greeno (2000) consideran el aprendizaje como un proceso de formación de la *identidad* en *mundos figurados*, determinados por las prácticas sociales dentro del aula, los alumnos y los profesores asumen roles que ayudan a definir quiénes son. Evidenciaron dos mundos figurados: Uno lo describen como estructurado, individualizado y ritualizado, las clases de matemáticas son consideradas entornos de aprendizaje basados en la repetición y memorización de procedimientos, el alumno recibe y absorbe los conocimientos de los profesores y de los libros. Y el otro mundo figurado se percibe como relacional, comunicativo y conectado, los profesores alientan a debatir, a trabajar de forma colaborativa y a examinar las matemáticas desde diferentes puntos de vista.

Desde una aproximación discursiva, Sfard y Prusak (2005) tratan de hacer operativo el concepto de *identidad* y para ello adoptan la idea de *identidad* como práctica discursiva: “la identidad hace posible que relacionemos nuevas situaciones en términos de experiencia pasada y nos da herramientas para planificar el futuro” (p.16). Para las investigadoras, una narrativa define la *identidad* de un conjunto de personas o de una persona individual si:

- 1) expresa formas de ser, de hacer, de posibilidad de hacer. Y por ello está relacionado con la repetición de una acción o estado (*reifying*)
- 2) refleja fielmente el estado en un mundo en particular (*endorsable*), y
- 3) cualquier cambio que se haga sobre ella, es posible que afecte a los sentimientos del que está narrando la historia (*significant*). Las historias más significativas son las que implican pertenencia o no a varias comunidades.

Diferentes investigaciones analizadas no sólo caracterizan la *identidad* del profesor a través de un enfoque narrativo, sino que destacan la influencia del contexto en la formación de la *identidad profesional*. Se asume que la *identidad* se desarrolla y evidencia de formas diferentes y en lugares y momentos distintos, y por tanto, se percibe como dinámica y en construcción. Si bien, un estado de la *identidad* puede ser reconocido en un momento y contexto específico, y por tanto es posible reflexionar e investigar sobre la *identidad*. En un tiempo y contexto específico, la *identidad* se puede caracterizar a través de propiedades cognitivas individuales que están relacionadas con la profesión de profesor (Krzywacki-Vainio y Hannula, 2008)

Desde un punto de vista cognitivo, Beijaard y colaboradores (2000), relacionan *identidad profesional* y *conocimiento* personal de los profesores, considerando las categorías de “conocimiento de la materia”, “conocimiento pedagógico” y “conocimiento didáctico”. A través de las percepciones de un grupo de profesores de secundaria sobre sus *identidades profesionales*, los autores distinguen cinco tipos de profesores, la mayoría se ven con una identidad que es combinación de aspectos de distintas categorías de conocimiento.

En esta investigación, realizamos un estudio exploratorio, usando una “multiplicidad conceptual” de la *identidad* (Walshaw, 2010), para obtener una mayor comprensión sobre la *identidad profesional* de estudiantes para maestro y sus implicaciones en la formación del profesorado. El interés se centra en integrar *identidad* y *conocimiento profesional*, a través de las reflexiones que realizan un grupo de estudiantes para maestro sobre sus experiencias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en su etapa escolar y formación universitaria.

La *identidad profesional* del profesor está caracterizada con hechos asociados con la profesión. Basados en sus experiencias como aprendices de matemáticas y de didáctica de la matemática, los estudiantes para profesor perciben qué significa una buena enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y por tanto, distinguen los conocimientos y destrezas necesarios para ser buen profesor. La formación de la *identidad* de un profesor puede ser vista como un proceso de llenar el “vacío” entre la imagen presente e ideal del profesor (Sfard y Prusak, 2005).

Además, consideramos el *conocimiento matemático para la enseñanza* (*mathematical knowledge for teaching*, MKT) definido como “el conocimiento matemático que utiliza

el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el estudiante” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Lo subdividen en dos grandes grupos, uno denominado *subject matter knowledge* (*common content knowledge, CCK; specialized content knowledge, SCK* y *knowledge at the mathematical horizon*) y el otro, *pedagogical content knowledge* (*knowledge of content and students, KCS; knowledge of content and teaching, KCT, y knowledge of curriculum*).

En este trabajo, con el fin de obtener una aproximación de la caracterización de la *identidad profesional* del maestro a través de percepciones previas y actuales de estudiantes para maestro, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- a. ¿Qué aspectos de la *identidad* del maestro destacan los futuros maestros de Educación Primaria según sus experiencias escolares en el área de matemáticas?
- b. ¿Qué *conocimientos profesionales* consideran relevantes los estudiantes para ser un buen maestro en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

METODOLOGÍA

Los participantes en la investigación son 79 estudiantes de 3^{er} curso de Magisterio de Educación Primaria de la Universidad de Alicante. El instrumento de recogida de datos diseñado consta de cinco preguntas que generan *ensayos reflexivos* (Contreras, 2010), referidos a:

1. Experiencias escolares de enseñanza aprendizaje de las matemáticas escolares de los estudiantes para maestro.
2. Experiencias como estudiantes de Magisterio de Primaria desde la Educación Matemática.

El enfoque de la investigación es cualitativo y se usa el análisis de contenido como técnica de análisis de datos. El análisis de las narrativas obtenidas (cinco por estudiante) permite indagar sobre formas de participación de los estudiantes y sus interacciones con otros en un contexto específico. Connely y Clandinin (1990) destacan el potencial de la narrativa en la investigación y la describen como método y también como resultado.

Primeramente, se realiza una lectura global de las narrativas, que describen la historia escolar del estudiante para maestro, su forma de participación como alumno y la de sus profesores en las clases de matemáticas (N1 y N2), con el propósito de localizar temas comunes y agrupar las *narrativas personales* en unidades de significado relevantes (Barrantes y Blanco, 2004). Posteriormente, se elaboran *narrativas sociales*, identificando, desde una dimensión social, diferentes categorías (figura 1) que manifiestan formas distintas de “hacer” del maestro y del alumnado, es decir, aspectos sociales relativos a *identidades* del maestro (Sfard y Prusak, 2005).

Asimismo, se realiza una lectura de las narrativas N3, N4 y N5, estableciendo unidades de análisis significativas y formando categorías del MKT (figura 2). A partir de un proceso inductivo de análisis, se integra toda la información obtenida y se establecen relaciones entre la *identidad profesional* y el *conocimiento profesional* (Beijaard, et al., 2000, Godino, 2009), posibilitando una aproximación a la caracterización de la *identidad profesional* personal del maestro de Primaria manifestada por los estudiantes para maestro en términos de *conocimiento matemático para la enseñanza*.

Identidad profesional y conocimiento matemático para la enseñanza de maestros de formación

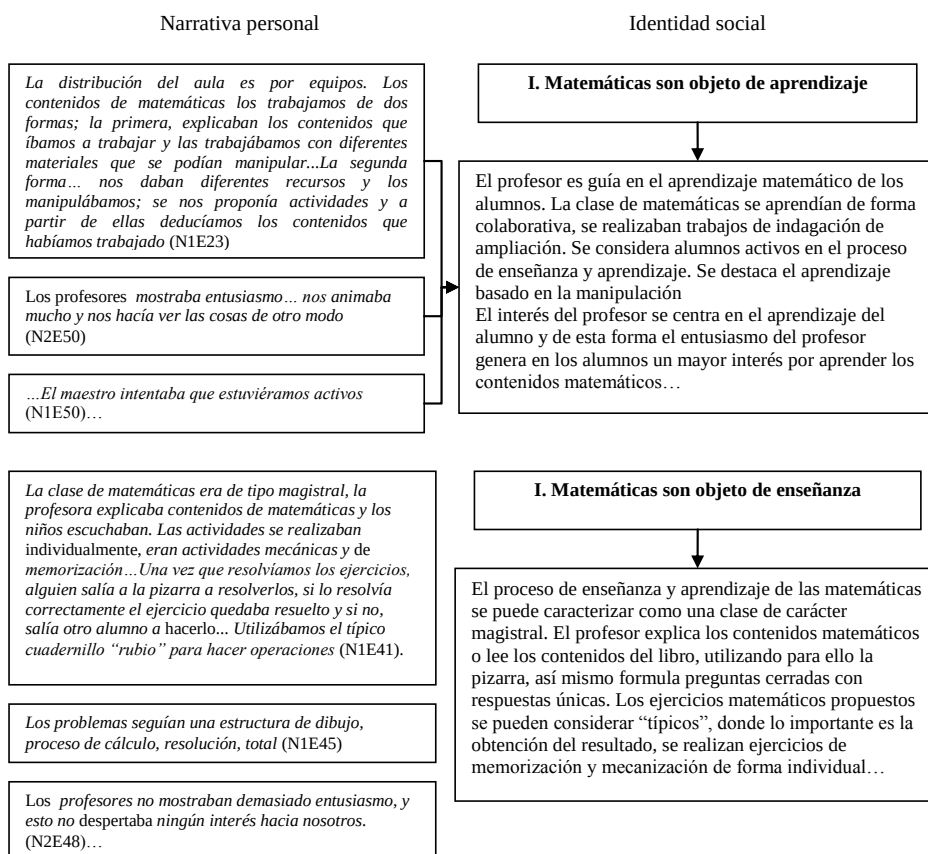


Figura 1. Proceso de análisis (dimensión social)

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Primeramente exponemos los resultados correspondientes al análisis de las historias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares de los estudiantes para maestro, muestran indicadores de la *identidad* desde una dimensión social. En segundo lugar, los relativos a las narrativas que aportan conocimientos relevantes que los estudiantes han obtenido durante su formación universitaria y que deben tener los maestros de Primaria, reflejan una aproximación a la *identidad profesional* del maestro desde una dimensión personal en términos de *conocimiento profesional*.

Identidad del profesor (dimensión social)

Las narrativas sociales muestran historias conectadas con la práctica discursiva y presentan elementos constitutivos de la definición de *identidad* (Sfard y Prusak, 2005). Se diferencian dos tipos de *identidades* asociadas a las clases de matemáticas, es decir, dos mundos figurados diferentes donde alumnos y maestros asumen ciertos roles que ayudan a definir quienes son (Boaler y Greeno, 2000) (figura 1):

Identidad - matemáticas son objeto de aprendizaje

Identidad - matemáticas son objeto de enseñanza.

Identidad profesional (dimensión personal)

Los conocimientos que los estudiantes para maestro consideran relevantes para el desarrollo profesional del maestro de Primaria, y sus percepciones sobre los conocimientos que han adquirido durante su formación inicial universitaria, han sido analizados considerando los dominios del MKT (Hill et al., 2008) (figura 2):

Identidad profesional y conocimiento matemático para la enseñanza de maestros de formación

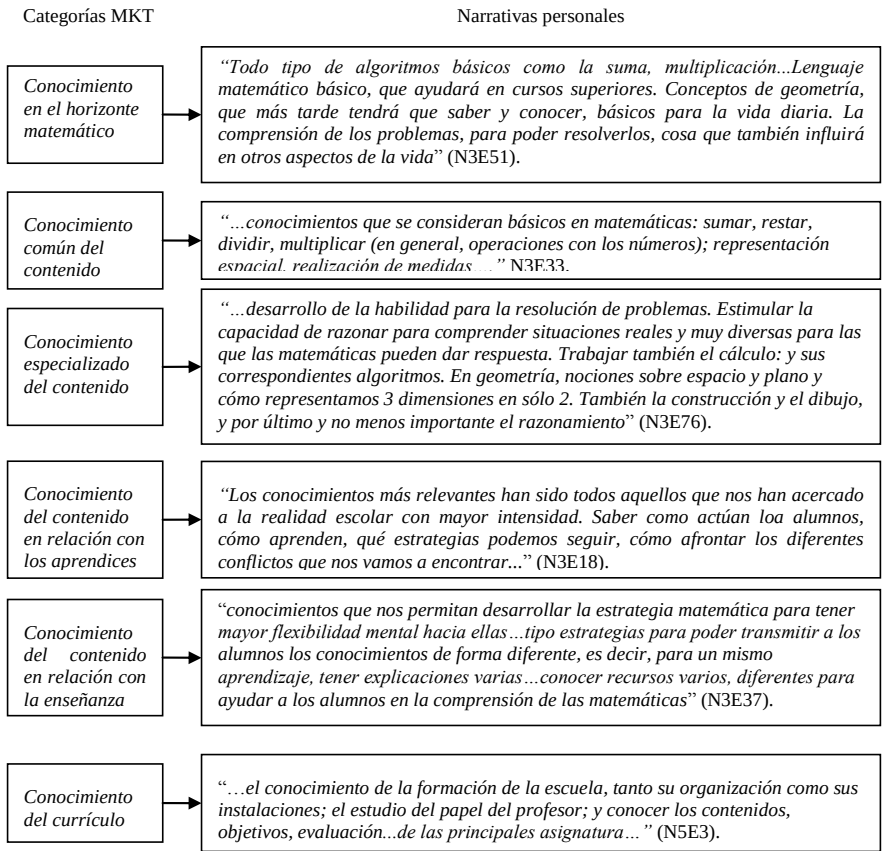


Figura 2. Categorías del MKT

Posteriormente, se identifican tres posibles *identidades profesionales* (IP) del maestro de Primaria, caracterizadas por alguno de los dominios de MKT:

IP - El maestro de matemáticas

Denominamos así a la identidad manifestada por los estudiantes que resaltan la importancia del estudio del contenido matemático en alguna de las tres categorías: el conocimiento común del contenido, el conocimiento del contenido especializado o el conocimiento en el horizonte matemático. El conocimiento del contenido matemático es una parte relevante del conocimiento base del profesor. Si bien, la enseñanza es mucho más que la transmisión de conocimiento matemático. La mitad de los estudiantes muestran en sus narraciones indicadores relativos al conocimiento en el horizonte, pudiendo expresar también indicadores de otros tipos de conocimiento del contenido, en algunas narraciones de los estudiantes identificamos ese aspecto dinámico indicado por Fernández y Figueiras (2010) que incluye elementos de otras categorías de conocimiento, por ejemplo del KCS, al igual que el SCK, frente al CCK de aspecto estático, véase figura 2.

IP - El maestro facilitador del aprendizaje de las matemáticas

Los estudiantes destacan las competencias relacionadas con el diagnóstico de dificultades de aprendizaje, con la dinamización de la comprensión del contenido matemático. Cabe indicar que, al igual que en la investigación de Sosa y Carrillo (2010), un único estudiante ha manifestado sólo indicadores de esta identidad.

IP- El maestro centrado en la enseñanza de las matemáticas y en el currículo

Realizado el análisis de las narrativas, asociamos la misma categoría a los indicadores del KCT y a los del conocimiento del currículum, debido a las características de los elementos de este conocimiento expuestos por los estudiantes y a la escasa manifestación del mismo. Los modelos que prescriben la planificación, implementación y evaluación del contenido matemático tienen gran aceptación entre los estudiantes para maestro. Cabe destacar, también, los aspectos didácticos relacionados con la comunicación, con la interacción en el aula.

Al igual que en la investigación de Beijaard et al. (2000), los resultados muestran una combinación de las tres *identidades profesionales* en relación con el conocimiento del profesor, se identifican cinco grupos de estudiantes para maestro: estudiantes que sólo hacen mención a una de las identidades profesionales (tres grupos), estudiantes que de forma equilibrada manifiestan las tres identidades profesionales y estudiantes que presentan dos de las tres identidades profesionales señaladas.

Los resultados correspondientes a la dimensión personal de la *identidad profesional*, amplían, como era previsible, los tipos de *identidades* correspondientes a la dimensión social, obtenida a partir de las experiencias previas escolares de los estudiantes para maestro, y aportan la imagen del maestro ideal que tienen los estudiantes.

Krzywacki-Vainio y Hannula (2008) caracterizan también la *identidad* del profesor en términos cognitivos. En sus resultados, los futuros profesores de matemáticas destacan mayoritariamente el estudio del contenido matemático sobre los otros conocimientos, de forma similar a resultados obtenidos por los estudiantes para maestro (*IP - El maestro de matemáticas*), es decir, desarrollan una visión de la imagen de profesor ideal a través de la percepción que tienen del conocimiento matemático.

Por otra parte, los resultados muestran la importancia que tienen para los estudiantes los dominios de conocimiento profesional, “lo que se conoce”, y el “saber usarlo” (Llinares, 2009). Desde la caracterización que realiza Llinares a través de los sistemas de actividad, se distinguen de forma parcial ciertos acercamientos entre los resultados obtenidos y “la organización del contenido matemático para enseñar”, “el análisis e interpretación de producciones matemáticas de los aprendices” y “la gestión del contenido matemático en el aula”, en la mayoría de los estudiantes para maestro, no evidenciando que hayan integrado dichos conocimientos.

CONCLUSIONES

Desde una aproximación multiconceptual de la *identidad*, se obtiene una mayor comprensión sobre la *identidad profesional* del maestro según las percepciones de los estudiantes para maestro que tiene implicaciones para la formación del profesorado. El estudio realizado examina la interacción entre *identidades y conocimiento profesional* a partir de las experiencias formativas de estudiantes que se encuentran en el último curso

de su formación como maestros, antes de realizar sus prácticas docentes. Los resultados presentan *identidades profesionales* basadas en experiencias educativas pasadas con perspectivas de futuro que están relacionadas con trayectorias de aprendizaje usadas en comunidades de práctica (Smith, 2007). Según Smith los programas de formación del profesorado de Primaria deben hacer énfasis en los procesos que facilitan la integración de los diferentes registros de conocimiento para la enseñanza de la materia específica.

A la luz de los resultados obtenidos -la mayoría de los estudiantes muestran una combinación de las tres IP- y considerando las características de sus planes de formación, identificamos dos sub-identidades que emergen de las narrativas de los estudiantes y que abarcan los diferentes dominios de conocimiento:

- *Identidad profesional generalista* (caracterizada por CCK, KCS y KCT)
- *Identidad profesional específica* (caracterizada por SCK/knowledge at the mathematical horizon, KCS y KCT)

Por todo ello, consideramos que los formadores de profesores deben proporcionar a los estudiantes, en su último año de formación inicial, ensayos reflexivos para que puedan realizar un feedback de sus *conocimientos para la enseñanza* que facilite la integración de los mismos, reconociendo sus *identidades profesionales* a través de sus propias narrativas sobre tareas específicas de aprendizaje de las matemáticas en distintos niveles educativos. Se potencia así la construcción de una *identidad profesional específica*, o el cambio de identidad, de una *identidad profesional generalista* a una *identidad profesional específica* que facilitará el uso y la comprensión del conocimiento matemático en la práctica.

Agradecimientos

Al apoyo otorgado por la beca CONICYT (Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, Chile) y a la UST, Chile.

Referencias

- Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 241-250.
- Beijaard, D., Meijer, P. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education*, 20, 107-128.
- Beijaard, D., Verloop, N. y Vermunt, P. (2000). Teachers' perceptions of professional identity: an exploratory study from a personal knowledge perspective. *Teaching and Teacher Education*, 16, 749-764.
- Boaler, J. y Greeno, J. (2000). Identity, Agency, and knowing in Mathematics worlds. En J. Boaler, *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp.171-200). Westport, CT: Ablex.
- Connely, F. M. y Clandinin, D. J. (1990). Stories of experience and narrative inquiry. *Educational Researcher*, 9(5), 2-14.

- Contreras, P. (2010). *Formación de la identidad profesional de estudiantes para maestro de primaria desde la educación matemática*. Trabajo de investigación tutelada. Universidad de Alicante.
- Fernandez, S. y Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291-301). Lleida: SEIEM.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Krzywacki-Vainio, H., y Hannula, M. (2008). Development of mathematics teacher students' teacher identity during teaching practice. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (pp. 281-288). Mexico: Cinvestav –UMSNH.
- Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 92-101.
- Penalva, M.C., Rey, C. y Llinares, S. (2011). Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis de un contexto e-learning en didáctica de la matemática. *Revista Española de Pedagogía*, 248, 101-118.
- Sfard, A. y Prussak A. (2005). Telling Identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34 (4), 14-22.
- Smith, R. (2007). Developing professional identities and knowledge: becoming primary teachers. *Teachers and teaching: theory and practice*, 13 (4), 377-397.
- Sosa, L., Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.
- Walshaw, M. (2010). Conceptual Multiplicity: A Useful Strategy for Thinking about Identity: A Review of Mathematical Relationships in Education: Identities and Participation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 424-429.

ANÁLISIS DE LAS RESOLUCIONES DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL MEDIANTE GRAFOS. UN EJEMPLO

ANALYSIS OF STUDENTS' RESOLUTIONS OF CONDITIONAL PROBABILITY PROBLEMS BY MEANS OF GRAPHS. AN EXAMPLE

Edo, P.¹, Huerta, M. P.², Cerdán, F.²

¹ IES Cueva Santa (Segorbe, Castelló)

² Universitat de València.

Resumen. *En este trabajo mostramos el potencial de los grafos trinomiales como herramienta para el análisis de las resoluciones de problemas ternarios de probabilidad condicional. Mostramos el análisis de dos resoluciones correspondientes a sendos estudiantes de 4º de ESO resolviendo un problema de probabilidad condicional de nivel N_0 .*

Palabras clave: Problemas ternarios, probabilidad condicional, Resolución de problemas, grafos trinomiales, Educación Secundaria.

Abstract. *In this paper we show to what extent trinomial graphs is a useful tool for analysing students' resolutions of ternary problems of conditional probability. We also show the results of the analysis of two 15-year old students' resolutions of one L_0 -level ternary problem of conditional probability.*

Key words: Ternary problems, Conditional probability, Problem solving, Trinomial graphs, Secondary School.

INTRODUCCIÓN

La investigación en resolución de problemas puede abordarse en más de un escenario, en función de los protagonistas que en ella intervienen, ya sea de una manera independiente o en la relación de unos con otros. En el escenario 1, el objeto de estudio son los propios problemas; en el escenario 2 el objeto de estudio son los problemas y los resolutores; mientras que en el escenario 3 son los problemas, los resolutores y los profesores que enseñan a resolver dichos problemas.

Hemos desarrollado distintas investigaciones⁶⁰ en el escenario 1, centrando el objeto de estudio, los problemas ternarios de probabilidad condicional, clasificándolos en familias y subfamilias para un estudio más detallado, identificando y midiendo sus dificultades (Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo, 2009; Carles y Huerta, 2007; Huerta, 2009; Edo y Huerta, 2010).

Gran parte de este trabajo se ha realizado con la ayuda de una herramienta que trata de modelizar este mundo de problemas, los grafos trinomiales (Cerdán y Huerta, 2007;

⁶⁰ En el marco del proyecto de EDU2008-03140 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación del gobierno de España.

Huerta, 2009). Esta herramienta se ha mostrado útil en el escenario 1, permitiendo un estudio más detallado de las estructuras de las diferentes clases de problemas, identificando los problemas que son representantes de dichas clases, complejidades, clases de isomorfía, etc. Además, este estudio nos ha permitido construir cuestionarios de problemas para su posterior administración y análisis.

De los problemas que hablaremos en este trabajo son problemas que llamamos de nivel N_0 , problemas que, en términos generales, siendo ternarios, se caracterizan porque se enuncian, en algún contexto, conociendo tres cantidades, ninguna de ellas refiriéndose a probabilidades condicionales, y preguntando, en cambio, por una cantidad que se refiere a una probabilidad condicional. Dichas cantidades se escogen convenientemente entre probabilidades absolutas e intersecciones, de modo que lo enunciado es realmente un problema.

El escenario en el que nos situaremos será el escenario 2 y, por tanto, tomaremos en cuenta a los problemas y a estudiantes de secundaria resolviéndolos. Mostraremos cómo analizamos la resolución de estos problemas mediante los grafos trinomiales, mostrando, con un ejemplo, el potencial de esta herramienta. Es continuación de otros trabajos de los mismos autores presentado con anterioridad en un simposio anterior (Edo y Huerta, 2010) y que está en curso.

OBJETIVOS

En concreto, en este trabajo, perseguimos dos objetivos:

1. Mostrar el uso de los grafos trinomiales para el análisis de las resoluciones de los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0 .
2. Identificar en el grafo actuaciones competentes y errores de los estudiantes en la resolución de un problema.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en el que se sitúa nuestra investigación está en construcción. No obstante, aspectos de él pueden consultarse en Huerta (2009). Comparte elementos del marco teórico en el que tradicionalmente se ha investigado en resolución de problemas y en concreto la consideración de las variables que afectan a la resolución de un problema de matemáticas (Golding y McClintock, 1979; Kulm, 1979), junto con la consideración de los problemas ternarios y grafos trinomiales que Cerdán (2007) introdujo para el estudio de los problemas de la familia de problemas aritméticos-algebraicos y que hemos adaptado para el estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional (Lonjedo, 2007; Carles y Huerta, 2007; Huerta, 2009). Comparte la posición de Watson y Kelly (2007) y de Jones, Langrall y Mooney (2007) de que los estudiantes razonan mejor con frecuencias condicionales que con probabilidades, lo que condiciona el formato de los datos con el que formulamos los problemas, y la consideración de situaciones que son susceptibles de ser modelizadas mediante probabilidades condicionales, en la perspectiva de lo que Henry (2005) llama situaciones cronológicas, causalistas y conjuntistas. Un ejemplo de análisis de una de estas situaciones mediante el empleo de grafos puede verse en Carles y Huerta (2007).

Análisis de las resoluciones de problemas de probabilidad condicional mediante grafos: Un ejemplo

En tanto que probabilidades condicionales formuladas en contexto, nuestra investigación se sitúa en el marco de las matemáticas realistas, donde el papel de los contextos y de los fenómenos que están presentes en ellos se considera crucial para la comprensión de la probabilidad condicional como medio de organización de dichos fenómenos. Podemos situarnos pues en la corriente fenomenológica propuesta por Freudenthal (1983).

Como metalenguaje en el que se traducen los problemas para un mejor análisis teórico de sus estructuras, mediante lo que llamamos lecturas analíticas de los problemas, es decir, lecturas en las que a lo único que se presta atención es a los datos y a las relaciones entre los datos, Cerdán y Huerta (2007) consideran los grafos trinomiales y traducen el mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional al grafo que puede verse en la Figura 1. Cada vértice representa una cantidad, es decir, representa tanto a un número como al suceso cuya probabilidad está midiendo dicho número. Este número, además, admite más de un formato de expresión: frecuencias, absolutas y relativas, porcentajes o probabilidades. Una arista a trazos discontinuos representa una relación ternaria aditiva entre cantidades y una arista sólida una relación ternaria multiplicativa. Un vértice oscuro representa una cantidad conocida y un vértice claro una cantidad desconocida, preguntada o no.

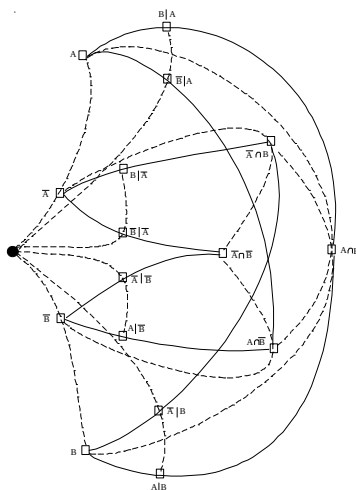


Figura 1. Grafo trinomial del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional.

Metodología

Los aspectos relacionados con la elaboración de los cuestionarios que resolvieron los estudiantes pueden verse en Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo (2009), y el cuestionario y la muestra de estudiantes de la que hablamos en este trabajo en (Edo y Huerta, 2010). Del problema que nos sirve de ejemplo y de su análisis, en el anexo. Nos centraremos, pues, en exponer la forma en que hacemos uso del grafo trinomial descrito para el análisis de las resoluciones de los estudiantes.

Un problema de probabilidad condicional queda determinado en el grafo (independientemente del contexto) cuando se colorean tres vértices convenientemente

escogidos y la pregunta del problema. Partiendo de ellos, mediante un algoritmo, que llamamos de destrucción del grafo, podemos identificar rutas o caminos de resolución, es decir, conjuntos ordenados de aristas encadenadas, con sus respectivos vértices, que representan las relaciones que se usan y las cantidades intermedias obtenidas para resolver el problema. Denominamos grafo de una resolución al grafo que contiene toda esta información acerca de dicha resolución, y resulta útil, por ejemplo, para el estudio de competencias, errores y dificultades.

Llamamos competencia formal en la resolución de un problema a la del resolutor ideal, cuya actuación ante un problema de N_0 se caracteriza por: 1) Organizar la información contenida en el enunciado del problema, 2) aplicar el método de análisis-síntesis. Como consecuencia, usar el menor número posible de relaciones y de cantidades intermedias, 3) describir cada nuevo resultado numérico obtenido y 4) dar una respuesta completa a la pregunta del problema, informando no sólo del número (porcentaje) pedido sino también de su significado como medida de un suceso.

Una resolución de estas características dará lugar a un grafo mínimo (el grafo que representa la ruta más corta posible) y será considerada como una resolución eficiente. No obstante, dado un problema, también declararemos como actuaciones competentes en dicho problema a otras actuaciones que compartan gran parte de los rasgos de la competencia formal considerada para ese problema y que conducen a la resolución del problema con éxito. Las actuaciones que declararemos no competentes para resolver ese problema no comparten esos rasgos y se caracterizarán por contener lo que llamaremos errores en la resolución del problema. En nuestro catálogo de errores (todavía en desarrollo) distinguimos varios tipos de errores: Interpretación equivocada de un dato o de la cantidad por la que se pregunta, uso de una relación falsa entre cantidades, uso de un mismo número para dos sucesos distintos, uso de dos números diferentes para un mismo suceso, proporcionar como resultado una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta y discordancia entre el valor numérico y la descripción de una cantidad.

Generalmente, los errores vienen motivados por las dificultades que presentan los estudiantes en relación con la resolución de este tipo de problemas. Ejemplos de dificultades identificadas hasta el momento son dificultades en la interpretación correcta de la información dada en el enunciado, dificultad para encontrar relaciones entre las cantidades conocidas para llegar a las desconocidas, dificultades de expresión, escaso dominio de la proporcionalidad numérica, etc.

Cualquier resolución, tanto si es declarada competente como si no, puede ser traducida a un grafo que informará, de manera sintética, de las principales características de la actuación del estudiante. El primer paso de la traducción consistirá en oscurecer los vértices correspondientes a las cantidades dadas en el enunciado y la cantidad por la que se pregunta: las primeras en negro y la segunda, en verde⁶¹. Si el estudiante organiza la información del enunciado de alguna manera, escribiremos junto a cada uno de estos vértices los números correspondientes, las descripciones que hace de ellos y el formato de datos (f para frecuencias, % para porcentajes y p para probabilidades). A partir de ahí, por cada nueva cantidad intermedia obtenida se oscurecerá en azul un nuevo vértice y junto a él se escribirán también el valor numérico de la cantidad, su descripción y el formato de datos. A la hora de asignar un vértice a una cantidad

⁶¹ La paleta de colores que aquí se presenta es opcional, no así los significados.

Análisis de las resoluciones de problemas de probabilidad condicional mediante grafos: Un ejemplo

intermedia se tendrán en cuenta la forma en que se ha obtenido, la descripción que hace el estudiante del número y, si hay discordancia entre éstos, el uso posterior que hace de esa cantidad. Cuando hay una discordancia entre el número y la descripción (es decir, cuando la descripción que el estudiante hace del número no es la del referente de dicho número), el vértice se oscurecerá en rojo y se escribirá en rojo el elemento de la cantidad (número o descripción) que se identifica como erróneo, es decir, el que no se corresponda con el vértice oscurecido. Cuando la cantidad intermedia obtenida no se corresponda con ningún vértice del grafo, se añadirá uno nuevo, que generalmente será producto de un error y deberá oscurecerse en rojo. Pero también puede ser que el nuevo vértice se asocie a una cantidad con sentido en el contexto del problema y pueda incorporarse al grafo, dando lugar a una ampliación correcta del mismo.

Por otra parte, cada vez que el estudiante obtiene una nueva cantidad, a partir de las ya conocidas, hace uso de una relación entre éstas. Si la relación es correcta se resaltará en negro la arista correspondiente en el grafo. Puede que el estudiante use una relación correcta que no se corresponda con ninguna arista del grafo antes mostrado. Entonces, se incorporará una nueva arista, también resaltada en negro.

Si la relación que usa es falsa, es seguro que la relación no estará representada en el grafo. En este caso también se añadirá una arista pasando por los vértices correspondientes a las cantidades que se relacionan, pero resaltada en color rojo para indicar que el estudiante ha cometido un error de relación.

En los problemas objeto de estudio, la pregunta del problema es un porcentaje, que se corresponde con una condicional, para cuyo cálculo es necesario poner en razón una intersección y una marginal. Asociaremos a esta operación la arista multiplicativa correspondiente y la resaltaremos en negro o en rojo, según el estudiante cometa o no un error de relación. En el caso de que el resolutor responda a la pregunta del problema con una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta, el vértice que represente a dicha cantidad será rodeado de verde. Con ello, se completa el proceso de traducción de una resolución al grafo.

Resultados y análisis de los resultados. Un ejemplo

En las figuras 2 y 3 mostramos los resultados de traducir las resoluciones (Anexo II) de dos estudiantes, Víctor y Ramón, a un grafo trinomial. A la derecha de ambos, el grafo mínimo, es decir el grafo que contiene un número mínimo de aristas necesarias para resolver el problema, que puede verse en el Anexo I. Ambos grafos van a ser comparados con el grafo mínimo.

La actuación de Víctor en la resolución del problema, observada a través de lo representado en el grafo, la declaramos competente para el problema en cuestión. Esta actuación competente puede describirse, básicamente, por: oscurecerse los vértices apropiados y establecerse las relaciones pertinentes entre las cantidades consideradas. Comparada con la actuación representada por el grafo mínimo, la de Víctor proporciona una relación aditiva más, la señalada con 1 en su grafo, innecesaria desde el punto de vista del grafo mínimo. Es decir, su grafo contiene al grafo mínimo. Lo señalado en rojo para los números de las cantidades que representan esos vértices indica un error de cálculo, dado que tanto el referente como el formato de expresión de dicho número son los pertinentes y no es un error demasiado destacable. Es destacable también el hecho

de que realice una lectura del problema describiendo los números de las cantidades conocidas en el enunciado por las iniciales de los referentes: C. (por curados), A. C. (por antibiótico y curados) y N. C. (por no antibiótico y no curado), como puede verse en el grafo de la Figura 2.

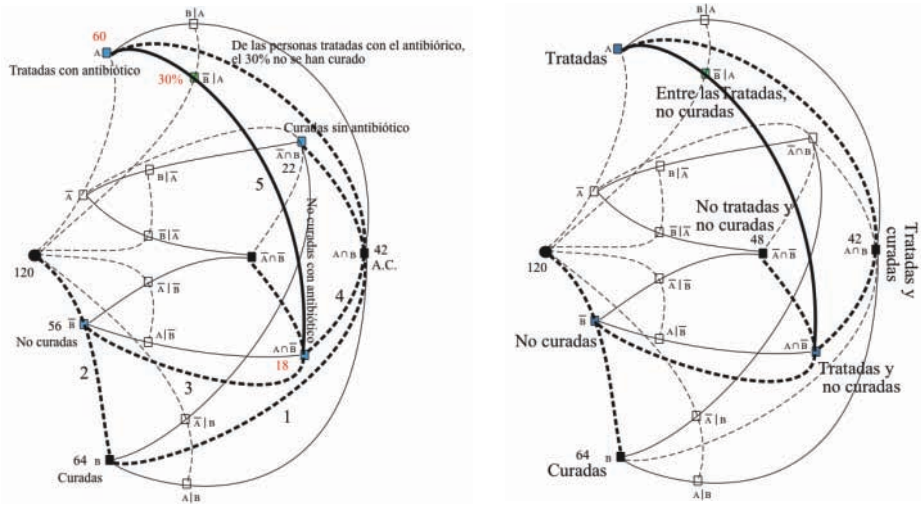


Figura 2. Grafo de la resolución de Víctor comparada con una resolución del mismo problema representada por el grafo mínimo

La tabla siguiente (Tabla 1) resume la actuación de Víctor en términos de cantidades y relaciones entre cantidades usadas a lo largo de la resolución, determinando una ruta de resolución en el grafo.

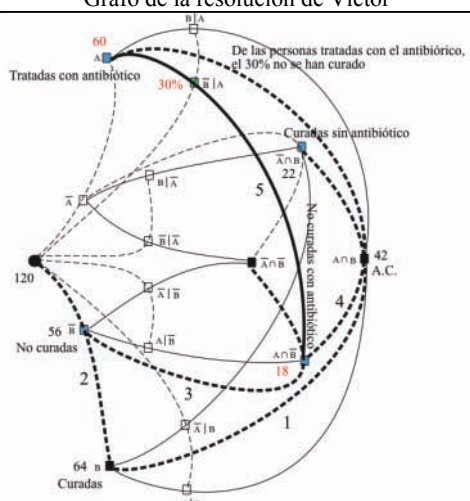
Grafo de la resolución de Víctor	Análisis de las cantidades y relaciones.
	Cantidades conocidas: (42, A.C., f) (48, N.C.,f) (64, C, f) Cantidad desconocida: (30%, De las personas tratadas con el antibiótico el (porcentaje) no se ha curado; %) Cantidades intermedias: (22, curadas sin Antibiótico, f) (18, No curadas con antibiótico, f) (60, Tratadas con antibiótico) Relaciones ternarias: Cuatro relaciones aditivas (una de complementariedad) y una relación multiplicativa (de la definición de probabilidad condicional).

Tabla 1: Cantidades y relaciones entre cantidades en la resolución de Víctor.

Análisis de las resoluciones de problemas de probabilidad condicional mediante grafos: Un ejemplo

En cambio, la actuación de Ramón en el problema la declaramos no competente (ver Figura 3). Su grafo no contiene al grafo mínimo. Existen, por tanto, lo que definimos como errores en la resolución del problema que conducen a la no obtención de una respuesta correcta a la pregunta del problema. Ramón interpreta correctamente las cantidades conocidas en el problema, vértices oscuros en los que las tres componentes de las cantidades son consideradas correctas, incluso los referentes de los números: *sí cura sí ant.*, *no cura no ant.*, para las intersecciones y a pesar de que no introduzca ningún referente para el número 64.

En la obtención de cantidades intermedias comete dos errores que llamamos de relación, es decir, usa dos relaciones falsas entre cantidades:

1) “Total de personas” – “nº de no tratadas y no curadas” = “nº de tratadas”.

Este error podría deberse a una creencia equivocada ligada al contexto: “Las (personas) no tratadas y no curadas son el total de (personas) no tratadas porque si una persona no ha sido tratada no ha podido curarse”. Esto equivale a identificar la intersección “no tratadas y no curadas” con la marginal “no tratadas”.

2) “Tratadas” – “Curadas” = “Tratadas y no curadas”

Al igual que antes, este error también proviene de una creencia falsa que se deduce de la anterior: “Todas las personas curadas han sido tratadas”. En efecto, si de las no tratadas, no se ha curado ninguna, todas las curadas han sido tratadas. Equivale a identificar la marginal “curadas” con la intersección “tratadas y curadas”.

Por otra parte, la respuesta a la pregunta del problema tampoco es correcta, ya que hay una discordancia entre el número obtenido y su descripción. El número dado como respuesta está equivocado por errores arrastrados, si bien la relación multiplicativa mediante la cual se ha obtenido es la correcta. En cuanto a la descripción de dicho número es incorrecta (e incoherente con el número dado) porque es la descripción de la intersección directamente relacionada con la condicional buscada. Este error viene motivado por una dificultad de tipo semántico estudiada con detalle en Lonjedo (2007): la dificultad de distinguir (tanto en la lectura como en el uso) entre las expresiones que se refieren a una intersección y las que se refieren a una condicional. Y ésta, a su vez, ligada con el contexto en el que se formula el problema.

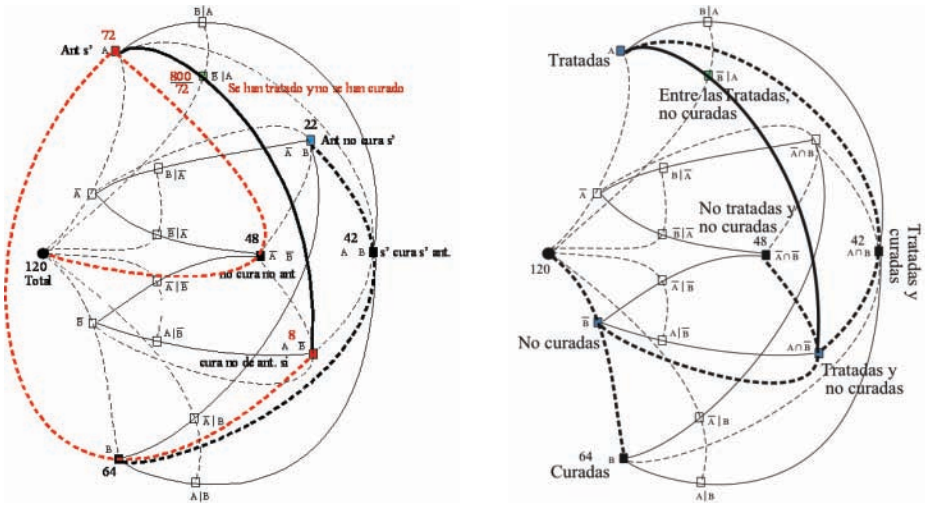


Figura 3. Grafo de la resolución de Ramón (izquierda) comparada con una resolución del mismo problema representada por el grafo mínimo (derecha).

La tabla siguiente resume la actuación de Ramón en términos de cantidades y relaciones entre cantidades usadas a lo largo de la resolución, determinando una ruta de resolución en el grafo.

Grafo de la resolución de Ramón	Análisis de las cantidades y relaciones Cantidades conocidas: (120, total, f) (42, tratadas y curadas, f) (48, no tratadas y no curadas) (64, -, f) Cantidad desconocida: (800/72, se han tratado y no se han curado; %) Cantidades intermedias: (22, Ant. No cura sí, f) (72, Ant si, f) (8, cura no de ant. si, f) Relaciones ternarias Una relación aditiva correcta. Dos relaciones aditivas incorrectas. Una relación multiplicativa (de la definición de probabilidad condicional)

Tabla 2: Cantidades y relaciones entre cantidades en la resolución de Ramón.

CONCLUSIONES

El grafo trinomial del mundo de los problemas de probabilidad condicional diseñado por Cerdán y Huerta (2007) no sólo se ha revelado como una herramienta de gran utilidad en el estudio teórico de los problemas ternarios de probabilidad condicional en el escenario 1, sino que también en el escenario 2. Lo que llamamos resolución escrita de un problema se muestra en un grafo tras un proceso de traducción y se encuentra a la disposición del investigador o del profesor para posteriores análisis. La traducción de una resolución al grafo permite sintetizar la información más relevante de la actuación del resolutor: el camino seguido, las cantidades intermedias obtenidas (no sólo en su dimensión numérica, sino también en cuanto a la descripción de sucesos se refiere), competencias mostradas y errores cometidos. Así, el uso de los grafos para investigar la resolución de estos problemas proporciona información de dos tipos: global, si lo que se pretende es comparar actuaciones de estudiantes por los grafos de las resoluciones o la de un estudiante en un conjunto de problemas; y local, si el análisis que se pretende corresponde a la actuación de un estudiante en un problema y para el que los elementos del grafo (vértices y aristas) se convierten en elementos básicos para dicho análisis.

Referencias

- Carles, M.; Cerdán, F., Huerta, M. P.; Lonjedo, M^a A.; y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y el contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0 . Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*, 173-185. Santander: SEIEM.
- Carles, M.; Huerta, M. P. (2007). Conditional probability problems and contexts. The diagnostic test context. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5*, 702-710.
- Carles, M.; Huerta, M. P. (2007). El mundo de los problemas de probabilidad condicional en el contexto del test de diagnóstico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 249-260. Tenerife: SEIEM.
- Cerdán, F.; Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19 (1), 27-62.
- Edo, P; Huerta, M. P. (2010). Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0 . Comunicación presentada en el grupo de Probabilidad y Estadística. Lleida: SEIEM. Edición en CD.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrech: Reidel.
- Henry, M. (2005). Modélitation en Probabilités conditionnelles. In M. Henry (Ed.) *Autour de la modelisation en probabilités*. IREM de Franche-Comté, (6) 173 - 185.
- Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research —Structures and Context, en M. Borovcnik & R. Kapadia (2009), Special issue
- 347

on “Research and Developments in Probability Education”. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4 (3), 163-194.

Jones, G. A.; Langrall, C. W.; Mooney, E. S. (2007). Research in Probability (Responding to Classroom Realities). En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on mathematic teaching and learning*, 909-956. NCTM.

Kulm, G. (1979). The classification of Problem-Solving Research Variables. En G. A. Golding & C. E. McClintock (Ed.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, 1-22. ERIC

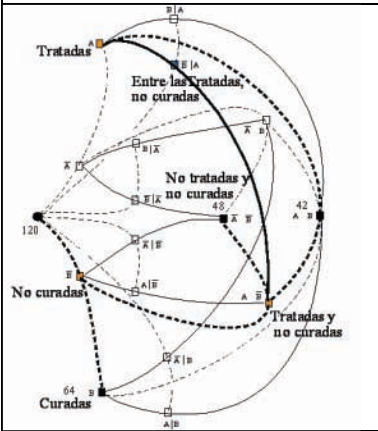
Lonjedo, M. A. (2007). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis Doctoral. Universitat de València.

Watson, J. M.; Kelly, B. A. (2007). The development of conditional probability reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38:2, 213-235.

ANEXO I: GRAFO MÍNIMO DEL PROBLEMA.

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Se han curado un total de 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

Familia: $N_0 C_1 T_1$, descrito por los datos conocidos: $p(B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$, $p(A \cap B)$ y la probabilidad preguntada $p(\overline{B} | A)$. El contexto en el que se formula el problema: estadístico salud (situación causalista).

Grafo mínimo	Análisis de las cantidades y relaciones
	Cantidades conocidas: (64, curadas, f) (42, tratadas y curadas, f) (48, no tratadas y no curadas) Cantidad desconocida: (x, entre las Tratadas no curadas; %) Cantidades intermedias: (y, Tratadas, f) (z, No curadas, f) (t, Tratadas y no curadas) Relaciones ternarias: Tres relaciones aditivas (una de complementariedad) y una relación multiplicativa (de la definición de probabilidad condicional).

Análisis de las resoluciones de problemas de probabilidad condicional mediante grafos:
Un ejemplo

ANEXO II: RESOLUCIONES ESCRITAS DE RAMÓN Y VÍCTOR DEL MISMO PROBLEMA.

Ramón

3.
total = 120

Así:
 $\frac{64}{120}$ de No cura son = ~~64~~ 42 = 22
 42 si cura si ant.
 48 ~~42~~ (No cura ant.
 48 ~~42~~
 Ant si = $120 - 48 = 72$
 Cur no de ant si = $72 - 64 = 8$

$$\begin{array}{r} 120 \\ - 48 \\ \hline 72 \\ - 64 \\ \hline 8 \end{array}$$

$72 = 100\%$
 $8 = x \Rightarrow x = \frac{800}{72} \% \text{ se han curado y no se han curado.}$

Victor

3.
 $64 - 42 = 22 \text{ curados sin Anticipo}$
 42 A. C.
 48 N.C.
 64 C

$120 - 64 = 56 \text{ No curados}$
 $56 - 48 = 8 \text{ No curados con Anticipo}$

$42 + 18 = 60 \text{ curados con Anticipo}$

De las personas curadas con el anticipo
 el 30 % no se ha curado.

$60 \quad 100\%$
 $18 \quad x$
 $x = \frac{1800}{60} = 30\%$

$\frac{180}{00} \quad \frac{18}{30}$

$\frac{120}{56} \quad \frac{100\%}{x}$
 $\frac{56}{120} \quad \frac{5600}{120}$
 $x = \frac{5600}{120}$

**EL DESARROLLO DE UN ESQUEMA PARA CARACTERIZAR LA
COMPETENCIA DOCENTE “MIRAR CON SENTIDO” EL PENSAMIENTO
MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES**

**THE DEVELOPMENT OF A FRAMEWORK TO CHARACTERIZE THE
PROFESSIONAL NOTICING OF CHILDREN’S MATHEMATICAL
THINKING**

Fernández, C., Valls, J., Llinares, S.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Resumen. *La competencia docente del maestro “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes implica identificar los hechos relevantes e interpretarlos para dotarlos de significado y poder tomar decisiones de acción. Este estudio se centra en caracterizar la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio específico del razonamiento proporcional. Los análisis realizados han permitido identificar y caracterizar cuatro niveles de desarrollo considerando la manera en la que los estudiantes para maestro identifican e interpretaban aspectos del razonamiento proporcional a partir de las respuestas de estudiantes a problemas proporcionales y no proporcionales.*

Palabras clave. Mirar con sentido, razonamiento proporcional, aprendizaje del estudiante para maestro, registros de la práctica.

Abstract. *Professional noticing of children’s mathematical thinking involves the identification of noteworthy events, the interpretation of them and deciding how to respond on the basis of these observations. The goal of this study is to characterize pre-service primary teachers’ professional noticing of children’s mathematical thinking in a particular context: the proportional reasoning. We have considered how pre-service primary teachers identified and interpreted relevant aspects of pupil’s proportional reasoning when they are analyzing pupils’ answers to proportional and non-proportional problems. This analysis has allowed us to identify and characterize four levels of the development of pre-service primary teachers’ professional noticing of children’s mathematical thinking.*

Key words. Professional noticing, proportional reasoning, pre-service primary teacher’s learning, classroom artifacts.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas subrayan la importancia que tiene para la enseñanza de las matemáticas la competencia docente denominada “mirar con sentido” (*professional noticing*) (Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002). Un foco particular de esta competencia es “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes que implica identificar los aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes e interpretarlos para tomar decisiones de acción en la enseñanza de las matemáticas (Jacobs et al., 2010). La necesidad de caracterizar y comprender mejor el desarrollo de esta competencia está vinculada a que los profesores de matemáticas adopten sus decisiones de acción considerando la manera en la que los estudiantes parecen que están aprendiendo las matemáticas (Hiebert, Morris, Berk y Jansen, 2007). De esta manera, aprender a “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes resulta particularmente relevante para el desarrollo de una enseñanza de las matemáticas que se apoya en cómo los estudiantes aprenden.

Las investigaciones previas han indicado la relevancia que tiene lo que los profesores observan y también la manera en la que interpretan lo observado para determinar la calidad de la enseñanza de las matemáticas (Callejo, Valls y Llinares, 2010; Sherin, 2001). De ahí que se derive la necesidad de focalizar nuestra atención en cómo los estudiantes para maestro identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes en dominios particulares de contenido matemático.

Uno de estos ámbitos específicos lo constituye la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo en el contexto del desarrollo del significado de la idea de razón en estudiantes de educación primaria (Fernández, 2009). Las estructuras multiplicativas tienen algunos aspectos en común con la estructura aditiva pero también tienen su propia especificidad que no es reducible a aspectos aditivos, como por ejemplo, la idea de razón como un índice comparativo. Además, un hecho que muestra las dificultades de los estudiantes de educación primaria en construir el significado de la idea de razón es la dificultad en diferenciar situaciones de estructura multiplicativa de situaciones con estructura aditiva como pone de manifiesto el uso de métodos aditivos erróneos para resolver situaciones proporcionales y, al mismo tiempo, el uso de métodos multiplicativos erróneos para resolver situaciones aditivas (Fernández y Llinares, 2010, 2011; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010). Por otra parte, las características de las actuaciones de los maestros en formación cuando resuelven problemas de proporcionalidad directa (Valverde y Castro, 2009) o plantean problemas de estructura multiplicativa (Castro y Castro, 1996) también ponen de manifiesto sus dificultades en comprender la relación entre las estructuras multiplicativas y aditivas. Esta situación constituye un contexto idóneo para estudiar lo que los estudiantes para maestro observan y cómo lo dotan de sentido como aspectos característicos del desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes.

Con estas referencias previas en este estudio nos centramos en caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico del desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes para maestros. Las preguntas de investigación son:

- ¿Qué aspectos de la comprensión de los estudiantes de la relación entre situaciones aditivas y proporcionales identifican los estudiantes para maestro?

El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes

- ¿Cómo los estudiantes para maestro interpretan los aspectos del pensamiento matemático de los estudiantes?

Un resultado adicional de esta investigación lo constituye la caracterización de criterios y su organización mediante un esquema para describir la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes que se particulariza en el ámbito de la identificación e interpretación de los diferentes aspectos del razonamiento proporcional en la educación primaria.

MÉTODO

Participantes

Los participantes del estudio fueron 39 estudiantes para maestro (EPM) que estaban cursando el último semestre de su programa de formación. Estos EPM todavía no habían realizado las prácticas en las escuelas y consideramos que caracterizar su competencia para identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes era relevante para su aprendizaje durante las prácticas de enseñanza (Rodríguez, 2006).

Instrumento

A partir de los resultados de las investigaciones previas sobre el razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2011; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2011) diseñamos un cuestionario formado por las respuestas de 6 estudiantes a 2 problemas proporcionales y 2 no proporcionales. Las dos situaciones proporcionales correspondían a la función $f(x) = ax$, y las dos situaciones no proporcionales a la función $f(x) = x + b$, con $b \neq 0$ (llamadas en esta investigación “situaciones aditivas”). En cada tipo de problema consideramos que las relaciones multiplicativas entre las cantidades fueran enteras o no enteras. Las respuestas de los 6 estudiantes a estos cuatro problemas fueron seleccionadas teniendo en cuenta los diferentes perfiles de comportamiento de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas proporcionales y aditivos obtenidos en las investigaciones previas (Fernández y Llinares, 2010; Van Dooren et al. 2010). Estos perfiles son:

- Perfil aditivo. Estudiantes que utilizan relaciones aditivas entre las cantidades en todos los problemas proporcionales y no proporcionales.
- Perfil proporcional. Estudiantes que utilizan relaciones multiplicativas entre las cantidades en todos los problemas proporcionales y no proporcionales.
- Perfil donde influye el tipo de relación multiplicativa. Estudiantes que responden utilizando relaciones multiplicativas o aditivas en función de si la relación multiplicativa es entera o no entera.
- Perfil correcto. Estudiantes que utilizan correctamente las relaciones aditivas o multiplicativas en cada tipo de problema.

Para cada problema consideramos las respuestas de 6 estudiantes: 4 estudiantes cuyo comportamiento correspondía a uno de estos perfiles y las respuestas de 2 estudiantes que utilizaban procedimientos sin sentido. Estas últimas respuestas se incluyeron como distractores.

Además, para evitar que los resultados estuvieran afectados por variables específicas del cuestionario se varió el orden de los problemas y el orden en que aparecían las respuestas de los estudiantes generando 20 versiones diferentes. La Figura 1 muestra los 4 problemas y las respuestas consideradas.

Problema 1 Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?		
Estudiante 1 $\begin{array}{r} 60 \\ -40 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 100 \\ +20 \\ \hline 120 \end{array}$ Tomás ha cargado 120 cajas.	Estudiante 2 $\begin{array}{r} 60 \\ -40 \\ \hline 20 \end{array}$ Tomás ha cargado 120 cajas.	Estudiante 3 $\begin{array}{r} 40 \mid 60 \\ 100 \mid 120 \end{array} \quad 60+60$ Tomás ha cargado 120 cajas.
Estudiante 4 $\begin{array}{r} 60 \\ -40 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 100 \\ +20 \\ \hline 120 \end{array}$ Tomás ha cargado 120 cajas.	Estudiante 5 Pedro $40 + 20 = 60$ Tomás $100 + 20 = 120$ Tomás ha cargado 120 cajas.	Estudiante 6 $60 + 60 = 120$ Tomás ha cargado 120 cajas.
Problema 2 Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas ha plantado Juan?		
Estudiante 1 $\begin{array}{r} 4 \\ \times 5 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array}$ Juan ha plantado 60 flores.	Estudiante 2 $\begin{array}{r} 12 \\ + 12 \\ \hline 24 \end{array}$ Juan ha plantado 24 flores.	Estudiante 3 $\begin{array}{r} 4 \mid 20 \\ 12 \mid 28 \end{array}$ $12 - 4 = 8 + 20 = 28$ Juan ha plantado 28 flores.
Estudiante 4 $\begin{array}{r} 12 \\ -4 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ +8 \\ \hline 28 \end{array}$ Juan ha plantado 28 flores.	Estudiante 5 Raquel $4 \times 5 = 20$ Juan $12 \times 5 = 60$ Juan ha plantado 60 flores.	Estudiante 6 $20 = 4 \times 5$ Juan ha plantado 60 flores.
Problema 3 Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 24 muñecas. Si Ana ha fabricado 48 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David?		
Estudiante 1 $\begin{array}{r} 48 \\ \times 2 \\ \hline 96 \end{array}$ David ha fabricado 96 muñecas.	Estudiante 2 $\begin{array}{r} 24 \\ + 24 \\ \hline 48 \end{array}$ David ha fabricado 48 muñecas.	Estudiante 3 $\begin{array}{r} 24 \mid 48 \\ 48 \mid 96 \end{array}$ David ha fabricado 96 muñecas.
Estudiante 4 $\begin{array}{r} 24 \\ -12 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ +12 \\ \hline 60 \end{array}$ David ha fabricado 60 muñecas.	Estudiante 5 Ana $12 \times 4 = 48$ David $24 \times 4 = 96$ David ha fabricado 96 muñecas.	Estudiante 6 $24 - 12 = 12 \cdot 48 = 576$ David ha fabricado 576 muñecas.
Problema 4 Laura y Luis están pegando sellos en postales. Empezaron al mismo tiempo pero Laura es más lenta. Cuando Laura ha pegado 80 sellos, Luis ha pegado 280 sellos. Si Laura ha pegado 120 sellos, ¿cuántos sellos ha pegado Luis?		
Estudiante 1 $\begin{array}{r} 120 \\ -80 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 280 \\ +40 \\ \hline 320 \end{array}$ Luis ha pegado 320 sellos.	Estudiante 2 $\begin{array}{r} 280 \\ -80 \\ \hline 200 \end{array}$ Luis ha pegado 200 sellos.	Estudiante 3 $\begin{array}{r} 80 \mid 280 \\ 120 \mid 400 \end{array}$ Luis ha pegado 400 sellos.
Estudiante 4 $\begin{array}{r} 280 \\ -80 \\ \hline 200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120 \\ +200 \\ \hline 320 \end{array}$ Luis ha pegado 320 sellos.	Estudiante 5 $\begin{array}{r} 280 \mid 400 \\ 120 \mid 200 \end{array}$ Luis ha pegado 200 sellos.	Estudiante 6 $120 \cdot 280 = 33600$ Luis ha pegado 33600 sellos.

Figura 1. Problemas y respuestas de estudiantes utilizados en el cuestionario

El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes

Los EPM debían responder a las siguientes cuestiones que están relacionadas con los aspectos relevantes de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010):

- Describe detalladamente la resolución del estudiante en cada uno de los problemas.
- Observando las respuestas dadas por cada estudiante a cada uno de los problemas, ¿es posible identificar alguna característica?
- Ante las respuestas dadas por cada estudiante a los problemas, como maestro de estos estudiantes, ¿qué harías ante tal comportamiento?

Las dos últimas cuestiones tenían como objetivo determinar en qué medida los EPM tenían una visión global de las respuestas dadas por un mismo estudiante a los cuatro problemas y ver si eran capaces de identificar los perfiles de comportamiento de los estudiantes.

Análisis

Utilizamos un procedimiento inductivo de generación de categorías en el que los resultados de los diferentes pasos fueron chequeados de manera independiente por tres investigadores, discutiéndose las discrepancias iniciales. A partir de un análisis preliminar de una muestra de respuestas, generamos un sistema inicial de categorías para hacer visible aspectos que podíamos considerar relevantes en la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito del razonamiento proporcional. Estas categorías iniciales fueron refinadas según avanzaba el análisis. Finalmente generamos descriptores en cuatro niveles que aplicamos a todas las respuestas:

Nivel 1. No discriminan.

Nivel 2. Discriminan y describen las operaciones sin justificar la diferencia entre las situaciones.

Nivel 3. Discriminan justificando las operaciones pero sin identificar los perfiles.

Nivel 4. Discriminan justificando, describen identificando el tipo de relación entre las cantidades e identifican los perfiles

En una primera etapa del análisis clasificamos a los EPM en dos grupos, separando los que eran capaces de discriminar las dos situaciones de los que no eran capaces. En una segunda etapa, y centrada solo en aquellos EPM que habían discriminado las situaciones, nos centramos en determinar si los EPM justificaban los procedimientos usados por los estudiantes a través de los elementos matemáticos que caracterizan las situaciones proporcionales y aditivas (Figura 2) (Freudenthal, 1983), y si eran capaces de identificar los perfiles de comportamiento de los estudiantes (esto último se analizó a través de las respuestas dadas por los EPM a las cuestiones 2 y 3 del cuestionario).

Situación proporcional $f(x) = ax, a \neq 0$	Situación aditiva (no proporcional) $f(x) = x + b, b \neq 0$
La función pasa por el origen <i>“Empiezan al mismo tiempo”</i>	La función no pasa por el origen <i>“Empiezan antes o después”</i>
El valor de la pendiente es distinto (cambia) <i>“es más rápido o más lento”</i>	El valor de la pendiente es constante <i>“la misma velocidad”</i>
Las razones externas son constantes y las razones internas son invariantes	La diferencia entre las cantidades permanece constante

Figura 2. Elementos matemáticos que caracterizan los problemas del cuestionario

Este procedimiento de análisis hizo emerger un esquema que permitió describir los rasgos característicos de la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes que estos EPM podían llegar a usar para dotar de sentido al aprendizaje de las matemáticas en el ámbito del desarrollo del razonamiento proporcional. En la próxima sección caracterizaremos y ejemplificaremos los niveles identificados.

RESULTADOS

De los 39 EPM, 3 no pudieron ser clasificados en ninguno de estos niveles pues dejaron el cuestionario en blanco o sus argumentos no tenían sentido.

Nivel 1. No discriminan (25 de 39 EPM)

En este nivel se encuentran los EPM que no discriminan las situaciones aditivas de las proporcionales. Los EPM que se encuentran en este nivel consideran

- que todos los problemas planteados son proporcionales y por tanto consideran solo correctas las respuestas dadas por los estudiantes en las que se usan relaciones multiplicativas

o bien

- que todos los problemas planteados son aditivos y por tanto consideran solo correctas las respuestas dadas por los estudiantes en las que usan relaciones aditivas.

Por ejemplo, ante la respuesta dada por el estudiante 5 al Problema 2 (no proporcional) (Figura 1), un EPM situado en este nivel argumentó: *“Es correcto. Ha averiguado por cuánto Raquel pasa de 4 a 20 y ha repetido el proceso con Juan”*. Este EPM identifica la relación multiplicativa entre las cantidades usada por el estudiante 5 para resolver el problema y la considera correcta aunque el problema no es proporcional. De la misma manera, ante la respuesta del estudiante 5 al Problema 3 (proporcional) este mismo EPM indicó *“Correcto. Averigua por cuánto hay que multiplicar para pasar de 12 a 48 y luego multiplica el 24 por este número para obtener el total”*, siendo en este caso una argumentación adecuada.

Otro EPM contestó en relación a la respuesta dada por el estudiante 4 al Problema 2 (no proporcional): *“Este estudiante ha seguido un procedimiento correcto obteniendo también el correspondiente resultado. Primeramente ha restado las 12 flores que plantó Juan con las que plantó Raquel y obtuvo un resultado de 8 flores que es la diferencia de flores que plantó uno y otro. Seguidamente, sabiendo la diferencia, ha sumado a esas 8 flores las 20 flores que plantó después Raquel para obtener las flores que Juan había*

El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes

plantado”. Sin embargo, al interpretar la respuesta del estudiante 4 al problema 3 (proporcional) de la siguiente forma: *“Es correcto. A las 24 muñecas de David le ha restado las 12 de Ana para comprobar la diferencia de muñecas que hay. Tras ello, a esa diferencia le ha sumado 48, que son las muñecas que ha fabricado después Ana”* puso de manifiesto que no discriminaba las situaciones aditivas de las proporcionales.

Nivel 2. Discriminan y describen las operaciones sin justificar la diferencia entre las situaciones (2 de 39 EPM)

En este nivel están situados los EPM que discriminan las situaciones proporcionales y no proporcionales lo que les permite evaluar correctamente las estrategias usadas por los estudiantes en estas situaciones. Estos EPM describen las operaciones que realizan los estudiantes pero no justifican dichas operaciones en relación con los elementos característicos de cada situación. Por ejemplo, ante la respuesta del estudiante 1 al Problema 1 (Figura 1) un EPM indicó: *“Correcto. Determina cuántas cajas han cargado los dos. Es decir, 60 cajas de Pedro menos 40 ya cargadas son 20. 20 son las que ha cargado Tomás también, $100+20=120$ ”*. Este EPM solo describe las operaciones que aparecen en la respuesta del estudiante pero no indica por qué esas operaciones son adecuadas atendiendo a las características de la situación.

Nivel 3. Discriminan justificando las operaciones pero sin identificar los perfiles (6 de 39 EPM)

En este nivel situamos a los EPM que son capaces de discriminar las dos situaciones y de evaluar correctamente las respuestas dadas por los estudiantes en cada una de ellas. También son capaces de describir las operaciones realizadas justificándolas desde alguna característica de la situación.

Por ejemplo, ante la respuesta del estudiante 1 al Problema 1 (Figura 1) un EPM indicó: *“Respuesta correcta. Este estudiante ha restado las cajas que ha cargado Pedro antes y después y ha visto que son 20 cajas. Como el problema dice que los dos cargan a la misma velocidad pero que ha comenzado antes, si ha cargado 20 cajas el otro también. Luego sólo hace falta sumar 20 cajas a Tomás”*. Este EPM justifica las operaciones realizadas por el estudiante mencionando la característica de la situación aditiva “cargan a la misma velocidad pero ha comenzado antes”.

No obstante, los EPM en este nivel no identifican todos los perfiles al no relacionar globalmente el comportamiento de un estudiante en los cuatro problemas. El EPM anterior identificó el comportamiento global del estudiante 3 (perfil correcto): *“ha resuelto todos los problemas correctamente”*, pero no fue capaz de identificar el comportamiento global del estudiante 4 (perfil aditivo) *“los problemas 1 y 3 que eran del mismo tipo no ha sabido responderlos correctamente. Los problemas 2 y 4 que eran de otro tipo si los ha resuelto”*, ni del estudiante 5 (perfil proporcional) *“los problemas 1 y 3 que eran del mismo tipo no ha sabido responderlos correctamente. Los problemas 2 y 4 que eran de otro tipo si los ha resuelto”*. Este dato indica que el reconocimiento por parte de los EPM de los diferentes perfiles no es un asunto de todo o nada sino que parece ser más fácil de identificar el perfil correcto que los perfiles que muestran rasgos

peculiares en la resolución de los problemas por parte de los estudiantes (perfil aditivo y proporcional).

Nivel 4. Discriminan justificando, describen identificando el tipo de relación entre las cantidades e identifican los perfiles (3 de 39 EPM)

En este nivel los EPM evalúan correctamente las situaciones aditivas y proporcionales y justifican sus decisiones desde las características de cada situación (van a la misma velocidad, van más rápido o más lento, empiezan al mismo tiempo o empezó más tarde o empezó antes). También son capaces de identificar los perfiles de comportamiento de los estudiantes a través de las respuestas dadas por éstos a los cuatro problemas planteados.

Por ejemplo, ante la respuesta del estudiante 1 al Problema 1 (Figura 1) un EPM argumentó: *“El procedimiento utilizado ha sido ver la diferencia entre las dos cantidades que se conocen de Pedro y sumarla a la cantidad de Tomás. El procedimiento es correcto ya que si van a la misma velocidad la diferencia de cajas debe ser la misma”*.

Este EPM fue capaz de identificar los perfiles planteados en el cuestionario observando todas las respuestas dadas por los estudiantes a los 4 problemas. Así ante las 4 respuestas dadas por el estudiante 3 a los 4 problemas (perfil correcto) argumentó *“conoce los procedimientos a utilizar y los aplica correctamente en los dos tipos de problemas”*, ante las respuestas del estudiante 4 (perfil aditivo) *“sólo sabe hacer los problemas en los que la velocidad es la misma y no se empieza a la vez. Aplica a los dos tipos de problemas el mismo procedimiento”* y ante las respuestas del estudiante 5 (perfil proporcional) *“Este estudiante sólo sabe hacer los problemas en que la velocidad es distinta y siempre aplica el mismo procedimiento sea cual sea el enunciado”*.

CONCLUSIÓN

Los resultados de este estudio muestran la dificultad que tienen los EPM para identificar los aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes sobre la relación entre la estructura aditiva y multiplicativa. Esta dificultad fue debida a que una mayoría de ellos no diferenciaron las situaciones proporcionales de las no proporcionales (25 de 39). Por otra parte, aunque algunos EPM pudieron reconocer la diferencia entre las dos situaciones propuestas y evaluar la corrección de las respuestas dadas describiendo las operaciones que habían sido realizadas tenían cierta dificultad en justificar por qué dichas operaciones eran correctas. Además, tenían dificultades en interpretar de manera conjunta las estrategias usadas por un estudiante ante los problemas proporcionales y no-proporcionales planteados. La dificultad de los EPM de ir más allá de relacionar la estrategia usada en un problema a considerar conjuntamente las estrategias usadas por un estudiante a los cuatro problemas viene determinado por lo que implica relacionar diferentes ítems de conocimiento (estrategias con características de los problemas) desde la perspectiva de obtener información para interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes que están resolviendo los problemas. Este resultado muestra la complejidad del conocimiento que debe usar un EPM para identificar e interpretar la manera en la que los estudiantes resuelven los problemas.

El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes

Un segundo resultado relevante que aporta este estudio es la caracterización de un esquema para dar cuenta del desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes. Este esquema está formado por cuatro niveles que permiten identificar indicadores de calidad del desarrollo de esta competencia docente. El paso del nivel 1 al 2 viene determinado cuando los EPM son capaces de analizar las características de los problemas y así diferenciarlos, el paso del 2 al 3 porque los EPM son capaces de relacionar las estrategias de los estudiantes con las características de los problemas para justificar si el procedimiento es correcto. Finalmente, el paso del 3 al 4 viene determinado cuando los EPM son capaces de ver el comportamiento global del estudiante ante un determinado tipo de problemas. Los indicadores de esta naturaleza aportan medios para describir y comprender el desarrollo de esta competencia docente y por tanto el aprendizaje de los EPM.

Además, estos resultados aportan información para el diseño de materiales en los programas de formación de maestros que tengan en cuenta las características del aprendizaje de los EPM. En este sentido, el instrumento diseñado en esta investigación puede ser adaptado como material docente para crear entornos de aprendizaje en los programas de formación que tengan como objetivo el desarrollo en los EPM de las destrezas de identificar e interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes. Esta situación puede definir nuevas cuestiones de investigación relativas al aprendizaje de los estudiantes para maestro.

Reconocimientos. Este trabajo ha recibido el apoyo del proyecto del Plan Nacional de Investigación I+D+i, del Ministerio de Educación y Ciencia, nº EDU2008-04583, y del proyecto emergente de la UA, nº GRE10-10.

Referencias

- Callejo, M.L., Valls, J. y Llinares, S. (2010). Aprender a mirar con sentido situaciones de enseñanza de las matemáticas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicación a los grupos de investigación. Seminario conocimiento profesional del profesor. XIV simposio de la SEIEM*. Lérida.
- Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares, y V. Sánchez (eds.), *El Proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp.119-141). Comares: Granada
- Fernández, A. (2009). *Razón y Proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de Valencia, España.
- Fernández C. y Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de Primaria y Secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M.M. Moreno, a. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM.

- Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia & Aprendizaje*, 34(1), 67-80.
- Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning. *Studia psychologica*, 53(1), 69-81.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.
- Hiebert, J., Morris, A.K., Berk, D. y Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58, 47-61.
- Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Londres: Routledge Falmer.
- Rodríguez, R. (2006). Interpretación de un proceso de prácticas. Relato de una experiencia de una alumna en prácticas. En M.C. Penalva, I. Escudero, y D. Barba (eds.), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica* (pp.70-88).Grupo Proyecto Sur: Granada.
- Sherin, M.G. (2001). Developing a professional vision of classroom events. En T.
- Wood, B.S. Nelson y J. Warfield (eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 75-93). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Valverde, A.G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-532). Santander: SEIEM.
- Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360-381.
- van Es, E. y Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571-596.

SIGNIFICADOS DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS FRACCIONARIOS EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA.

MEANINGS OF NEGATIVE FRACTION NUMBERS IN HIGH SCHOOL STUDENTS

Gallardo, A., Saavedra, G.

Cinvestav, Mexico

Resumen. *Esta investigación aporta elementos teóricos al estudio de las fracciones negativas, problemática poco abordada a nivel secundaria. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de que los estudiantes dominen el significado de fracción positiva para poder dotar de sentido a la fracción negativa en problemas no rutinarios. El significado más frecuente de la fracción positiva encontrado en los alumnos, es el de “medida”, perteneciente al mecanismo constructivo de partición, éste permite concebir la fracción negativa, al igual que los significados de “operador” y “cociente”.*

Palabras clave: Fracción negativa, significado, sentido, enseñanza.

Abstract. *This research provides theoretical elements to the study of negative fractions. The present topic has been poorly tackled at secondary school. The results point to the need for students to master the different meanings of positive fractions in order to make sense of negative fractions in non-routine problems. The most common meaning of positive fractions found in students' work is as "measure", belonging to the constructive mechanism of partition, it allows us to conceive the negative fraction, as well as the meanings of "operator" and "ratio".*

Key words: Negative fraction, meaning, sense, teaching.

PERSPECTIVA TEÓRICA

En México, la Educación Básica culmina con la Secundaria normada por el Plan y Programa de Estudio (SEP, 2006). Se ha realizado una revisión curricular de la asignatura de matemáticas y las fracciones negativas solamente son consideradas como cocientes de números con signo, en la ecuación de la recta cuando ésta presenta una pendiente fraccionaria negativa y como soluciones de ecuaciones de primero o segundo grado. Su aparición es siempre de manera súbita, es decir, sin darle mayor importancia al surgimiento de la negatividad que conduciría a reflexionar sobre su tratamiento.

Cabe señalar que en el programa de estudio, aparece la siguiente nota:

...”Además de los enteros, otros números con signo que deberán utilizarse en este grado son las fracciones y los decimales. La recta numérica es un recurso útil para dar sentido a estos números, y deberá emplearse como apoyo en la elaboración y justificación de

procedimientos para compararlos y ordenarlos. Los problemas que se planteen supondrán el conocimiento de las convenciones: la posición del cero, la unidad de medida y el orden. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que ubiquen en la recta numérica el -1 y $\frac{3}{4}$, a partir de la posición de otros números que se les proporcionen, digamos 1 y $\frac{3}{2}$. Se sugiere además introducir las nociones de números opuestos y valor absoluto”.

Secretaría de Educación Pública, 2006.
Programa de Estudio 2006 Matemáticas, pp. 51.

Esta situación curricular nos condujo a indagar sobre las posibilidades de incidir desde la investigación, sobre el hecho de la existencia ineludible de los números fraccionarios negativos y su repercusión en la mayor parte de los contenidos de matemáticas y de ciencias de la enseñanza elemental.

La interrogante que nos hemos propuesto responder ha sido:

¿Qué significados de las fracciones positivas deben poseer los estudiantes que les permitan dotar a su vez, de significado y sentido a las fracciones negativas?

En este artículo presentamos el punto de partida de nuestra investigación en curso que continua en el tiempo presente con un análisis histórico-epistemológico sobre el surgimiento y desarrollo del concepto de razón de cambio en textos matemáticos del pasado. El análisis aportará elementos teóricos para un estudio posterior con alumnos actuales. La confrontación de ambos ámbitos, el histórico y el didáctico, nos permitirá elaborar una propuesta de enseñanza sobre el tema. Este tipo de confrontación histórico – epistemológica – didáctica, ya ha sido abordado para el caso de problemas multiplicativos que involucran división de fracciones en distintos contextos (Contreras, M. y Gómez, B. 2009).

Ahora bien, para responder a nuestra primera interrogante acudimos al análisis de las nociones previas al concepto formal de número racional, fundamentadas por tres autores:

Freudenthal (1983), establece criterios que lo llevan a preferir llamar fracciones a los números racionales, dadas las implicaciones en la organización didáctica de estos números. Sostiene que constituyen el recurso organizador del número racional. Afirmar que la palabra fracción está relacionada con romper: fracturar, mientras que racional está relacionado con razón desde el punto de vista de proporción.

Uno de los fenómenos en los que Freudenthal hace hincapié, es en la polifacética sobrevivencia de las fracciones a nivel del lenguaje cotidiano; las fracciones aparecen en el ámbito lingüístico apelando a presentaciones más o menos directas.

Kieren (1983) afirma que la expresión $\frac{p}{q}$ (p, q números naturales) abarca cinco significados diferentes o subconstructos: cociente, medida, razón, operador multiplicativo y relación parte todo, aludiendo al conocimiento intuitivo de la fracción interpretado por los estudiantes.

Reconoce la fracción asociada al significado de cociente, en marcos donde se desarrollan situaciones concretas de reparto que están referidas a conjuntos discretos. Cuando la fracción permanece asociada a la medición, el soporte fundamental es la noción de magnitud, el contenido semántico es el de medida. Una razón es una comparación numérica entre dos cantidades. La fracción cumple con su función de contructor o dilatador a través del constructo de operador, cuando queda vinculada a la manipulación de un conjunto sobre otro. Este autor define la relación parte-todo como un todo dividido en partes iguales, usando a la fracción para cuantificar la relación entre el todo y un número dado de partes. Este significado se relaciona con los otros cuatro subconstructos, identificando una unidad apropiada a cada circunstancia.

Kieren considera la unidad como el elemento básico de conteo en los naturales; mientras que en las fracciones determina dos papeles muy diferenciados: por una parte, es la unidad divisible que constituye el elemento esencial para la comparación de números; y por otra parte, es la base conceptual para la formación del inverso de la multiplicación y sirve como elemento unidad u operador unidad. Afirma además, que el número racional está orientado en una doble dirección: la de proporcionar un mejor conocimiento de los diferentes sistemas de representación de fracciones y la de fortalecer las relaciones entre las notaciones fraccionaria y decimal.

Cabe señalar una investigación sobre el análisis de libros de texto donde también se evidencian carencias respecto a los distintos significados de las fracciones identificados por Kieren. (Quispe, W., Gallardo, J., 2009).

Por último, recurrimos a Gallardo (1994), que realizó una investigación histórica evidenciando una larga trayectoria de “evitamiento y reconocimiento” de los números negativos surgidos en problemas matemáticos. El análisis de textos históricos comenzó en la Antigüedad (250 a. C.) y concluyó en la segunda mitad del siglo XIX, cuando la controversia sobre la negatividad se resolvió de manera definitiva en el ámbito de las matemáticas.

Esta investigación histórica exhibió que los términos sustractivos, las leyes de los signos, así como la operatividad básica con números negativos, apareció desde épocas remotas. Los conceptos opuestos de ganancia y pérdida, propiedad y deuda, venta y compra, constituyeron interpretaciones posibles para los positivos y los negativos, sin embargo, la aceptación de las soluciones negativas de ecuaciones que modelaban problemas en contextos varios, surgió hasta el siglo XV.

Gallardo (2002), describe un problema debido a Chuquet (1484) que retomamos más adelante en la etapa empírica inicial de nuestro estudio. En el apéndice de su obra: *Triparty en la Science des Nombres*, Chuquet planteó el siguiente enunciado:

Un comerciante compró 15 piezas de ropa por la suma de 160 escudos. Algunas las pagó a 11 escudos cada una y las restantes a 13 escudos la pieza. Determinar cuántas prendas compró de cada clase.

Este autor utilizó un lenguaje sincopado avanzado muy similar al algebraico actual.

En terminología moderna el problema se plantea mediante el sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 15$$

$$11x_1 + 13x_2 = 160$$

Obtiene las soluciones: $x_1 = 17\frac{1}{2}$ $x_2 = -2\frac{1}{2}$

Después de verificar los valores en las ecuaciones, Chuquet observa que estos problemas son imposibles. Propone la interpretación siguiente:

El comerciante compró $17\frac{1}{2}$ piezas a 11 escudos cada una con dinero en efectivo, pagando $192\frac{1}{2}$ escudos. También adquirió $2\frac{1}{2}$ piezas a 13 escudos cada una para pagar a crédito la cantidad de $32\frac{1}{2}$ escudos. De esta manera contrajo una deuda de $32\frac{1}{2}$ que, al restarla de $192\frac{1}{2}$ se obtiene 160. Siguiendo el mismo razonamiento, Chuquet considera que las $2\frac{1}{2}$ piezas adquiridas a crédito deben sustraerse de las $17\frac{1}{2}$ piezas compradas y el comerciante tiene únicamente 15 piezas que realmente son de él (Appendice, núm. XXXV, pp. 424/fol. 156^v-157^r).

Chuquet consideró necesaria una interpretación adicional de los valores encontrados porque en su época no se aceptaban las soluciones negativas en problemas de enunciado verbal.

EL ESTUDIO EMPÍRICO INICIAL.

Se ha recurrido a una investigación de corte cualitativo. El Estudio se realiza en una Telesecundaria del Estado de Morelos, México (Saavedra, G., 2011)

A 40 sujetos de 13 y 14 años del tercer grado de secundaria se les aplicó un cuestionario exploratorio con la intención de conocer el pasado académico de los sujetos, relativo al tema de fracciones. A partir de los resultados del cuestionario se seleccionaron a dos estudiantes de alto desempeño para entrevista individual videograbada.

En esta etapa inicial del Estudio el objetivo general pretendió avanzar en el análisis de las estrategias que los estudiantes usan para resolver tareas que involucran números fraccionarios positivos y negativos. Específicamente indagar si los alumnos poseían los significados de la fracción identificados por Kieren (sobre el conocimiento personal de los números fraccionarios, sus procesos intuitivos y formales) y averiguar, bajo qué circunstancias emergen las fracciones negativas en situaciones cotidianas, que vuelven necesaria su inclusión en los Planes y Programas de Educación Secundaria. Con esto en mente, los ejercicios presentados a los estudiantes fueron categorizados respecto a:

1. Contenido temático: operatividad en la recta numérica, problemas de enunciado verbal, resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones
2. Predominio en el uso del lenguaje natural, lenguaje geométrico, lenguaje aritmético o lenguaje algebraico durante el proceso de resolución de las tareas planteadas.
3. Complejidad numéricas de los datos.
4. Influencia de los distintos contextos.

5. Aceptación y evitamiento de soluciones negativas.

A continuación se presentan los análisis de las respuestas dadas por los dos estudiantes a algunos de los ejercicios planteados. Se denotan con las letras G y M a cada uno de ellos.

EJERCICIO 1. Ubica en una recta numérica las siguientes cantidades:

$$1, 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{2}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{7}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{7}$$

G recurre al significado de cociente, convirtiendo a las cantidades dadas al formato de números decimales. Extendió este significado a los fraccionarios negativos y los ubicó fácilmente sobre la recta numérica, como simétricos a los positivos respecto al cero.

M utiliza el significado de Parte – Todo para identificar cuando una fracción está antes o después de algún número. Para la ubicación de la cantidad en el espacio entre enteros recurre al significado cociente del fraccionario positivo y lo extiende a los fraccionarios negativos.

EJERCICIO 2. Escribe el signo $>$ o $<$ en el recuadro, según corresponda.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{4} \square \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{5} \square & -5 & -1 \square \\ \frac{1}{4} \square -\frac{3}{7} & -\frac{11}{9} & -\frac{1}{2} \square & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \square \end{array}$$

G usa el significado de cociente de los números fraccionarios positivos y lo traslada a los negativos para poder encontrar cuál es mayor o menor de las cantidades presentadas; también puede observarse el significado de medida cuando debe comparar dos números fraccionarios con signo iguales, es decir, ambos positivos o ambos negativos.

M recurre al significado de cociente para trasladar las cantidades planteadas a números decimales. Usa también el método de fracciones equivalentes en la comparación de un par de cantidades. Apela también al significado de parte – todo para establecer que tan próximo o qué tan alejado se encuentra de un entero, esto lo hace utilizando el recurso de la recta numérica.

EJERCICIO 3. En estudios recientes realizados en el Polo Norte, se ha detectado que debido al calentamiento global, un *iceberg* reduce su peso en dos toneladas cada tres meses, encuentra la ecuación que relacione el peso en función del tiempo, si el peso inicial de un *iceberg* es de 48 toneladas, determina cuál será su peso al paso de 2 años.

Apoyándose en el lenguaje del enunciado (peso), G escribe: $\text{peso} = 48 - \frac{2}{3}t$, expresión muy similar a la ecuación de la recta $y = mx + b$. Identifica a la pendiente como un número fraccionario negativo, reconociendo los significados de operador y de razón.

Al resolver este ejercicio, M recurre a un planteamiento aritmético y decide relacionar el número de meses transcurridos (24) entre el lapso de tres meses durante los cuales el *iceberg* pierde dos toneladas. M sólo obtiene el número de veces en que se pierde el peso que correspondería a la fracción $\frac{24}{3}$. M la escribe como $24 \div 3$ que muestra el significado de cociente y obtiene 8. A continuación, multiplica el valor obtenido de la fracción por 2, esto es, la cantidad de toneladas que pierde cada tres meses. M escribe: $48 - (24 \div 3)2$; $48 - (8)2$; $48 - 16$; 32 toneladas.

Obsérvese que M no comprendió el significado de razón de cambio $\frac{2}{3}$, es decir dos toneladas cada tres meses.

EJERCICIO 4. Sofía tiene un paquete de hojas, de ellas, da la cuarta parte a Javier, del resto comparte la tercera parte con Adrián, de las que sobran da dos terceras partes a Omar y le quedan para ella 36 hojas, ¿cuántas hojas tenía el paquete?

G recurre al significado de operador del número fraccionario negativo, utilizando una notación donde la variable es el numerador de la fracción, el significado de operador le permite identificar y establecer números fraccionarios negativos como sustraendos de la cantidad previa de hojas.

M hace uso de la aritmética con un proceso denominado por él mismo “de regreso”. Realiza operaciones a partir “del resto al paquete original” y logra establecer la cantidad de hojas. En este procedimiento pone en juego los significados de operador y cociente para interpretar las fracciones negativas. A petición del entrevistador de resolverlo “de otra manera”, M recurre espontáneamente al álgebra utilizando el significado parte-todo para las fracciones negativas.

EJERCICIO 5. Un comerciante compró 15 piezas de ropa por la suma de 160 escudos. Algunas las pagó a 11 escudos cada una y las restantes a 13 escudos la pieza. Determinar cuántas prendas compró de cada clase. (Problema de Chuquet descrito anteriormente en este artículo).

G utiliza álgebra para resolverlo mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$11x + 13y = 160; \quad x + y = 15$$

Encuentra: $x = 17\frac{1}{2} \quad y = -2\frac{1}{2}$

G verifica de manera espontánea las soluciones obtenidas.

Para volver más explícitos los procesos cognitivos del alumno, se transcribe un fragmento del diálogo sostenido durante la entrevista. El entrevistador es referido por la letra E.

G: Se obtiene $y = -2\frac{1}{2}$ (verifica espontáneamente en las ecuaciones y afirma:) “Sí se puede”

E: ¿Me puedes explicar qué significa $-2\frac{1}{2}$?

G: En lugar de comprar, le dieron 2 piezas y media y se las llevó a vender. Y compró 17 piezas y media de la otra. En lugar de comprar le dio dos piezas y media al que se las llevó a vender. Compró 17 y media del precio de 11 y le dio 2 telas y media del de 13.

E: ¿A quién?

G: Al que le vendió las piezas del precio de 11.

E: Quieres decir entonces que no se las compró.

G: No.

En el diálogo anterior, el estudiante es capaz de dar una interpretación adicional en lenguaje natural de la solución negativa. Pensamos que le es necesario ya que el lenguaje algebraico no lo tiene aún consolidado.

EJERCICIO 5. Una persona ha comprado 3 piezas de ropa de dos clases distintas y ha pagado por ellas 5 monedas. Si una de las clases de ropa cuesta 2 monedas la pieza y la otra cuesta 4 monedas la pieza. ¿Cuántas piezas compró de cada precio?

Se presentó a M una “versión simplificada” del problema de Chuquet donde los datos del enunciado eran números muy pequeños con el propósito de que el estudiante advirtiera la imposibilidad de soluciones positivas y pudiera “aflorar la negatividad”.

M no lo resuelve por el método algebraico, lo realiza por tanteo del número de piezas, el precio de cada una y el importe pagado por las tres. M escribe:

M: [escribe] 2 de 2 monedas y $\frac{1}{2}$ de dos monedas [afirma:] Serían dos de dos monedas y la mitad de una de dos. [Vuelve a escribir] $2\frac{1}{2}$ de dos monedas.

E: ¿Qué te lleva a plantear esta solución?

M: Porque tomando la paga de cinco monedas y son tres piezas [en este momento, M se dirige al enunciado del problema], cinco monedas sería dos más dos da cuatro más uno da cinco; porque uno es la mitad de dos, y ahí serían las tres piezas, bueno en realidad serían dos piezas y media.

E: Muy bien, dijiste media pieza, ¿cómo se podría tener media pieza?

M: Le está cobrando media pieza, porque son de dos monedas.

E: ¿Cómo le puede estar cobrando media pieza?

M: Por algún descuento tal vez.

E: ¿Algún descuento?

M: Podría ser. [El estudiante escribe] $\frac{1}{2}$ de dos monedas por cualquier tipo de descuento.

Aunque M no está considerando soluciones negativas, advierte el posible contexto de ganancia-pérdida propio de cantidades opuestas: positivas y negativas, cuando menciona tenuemente: “Por algún descuento tal vez”.

Por último, se les presentó a los dos estudiantes la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas con soluciones negativas fraccionarias. Ni G, ni M tuvieron dificultades con la sintaxis algebraica, encontraron y aceptaron los valores negativos que verificaron vía sustitución en las ecuaciones correspondientes.

REFLEXIONES FINALES

En este estudio inicial, primera etapa de una investigación más amplia, se encontró que dos alumnos de alto desempeño recurrieron a describir las fracciones vía el lenguaje natural para explicar sus resultados, hecho ya mencionado por Freudenthal. Además extendieron cuatro de los significados de las fracciones positivas identificados por Kieren en la resolución de las tareas planteadas. El significado de razón de cambio no fue concebido por M.

Podemos afirmar que el tema abordado no lo comprenden a plenitud la mayoría de los estudiantes de secundaria. Esta problemática presenta grandes dificultades no solo en la asignatura de matemáticas sino también en la física. Hemos encontrado, por ejemplo, que los alumnos no resuelven problemas de cinemática utilizando álgebra porque no entienden entre otros los conceptos de velocidad y aceleración como razones de cambio ni como cantidades relativas que involucran números positivos y negativos. Afrontan los problemas que describen el movimiento generalmente con acercamientos aritméticos o gráficos.

El uso del lenguaje algebraico es determinante en la extensión del dominio numérico de los naturales a los reales durante la transición de la aritmética al álgebra. En consecuencia, los estudiantes deben adquirir un dominio aceptable en el uso del lenguaje algebraico para poder resolver los problemas planteados por el sistema educativo de las escuelas secundarias en sus distintas asignaturas. Por tratarse de un estudio en ciernes, todavía no hemos abordado los temas curriculares de física, química y biología entre otros, ni siquiera hemos logrado aún una reflexión profunda dentro de los contenidos propiamente de las matemáticas. Sin embargo, el poder plantear el tema en su complejidad, evitará llegar a conclusiones esquemáticas que no reflejarían hechos reales, donde entendemos la realidad como aquellas situaciones consideradas interesantes y posibles que emergen en los procesos de enseñanza aprendizaje surgidos entre profesores y estudiantes ubicados en instituciones educativas.

Aunque esta investigación ha sido realizada en México, muestra una problemática universal, ya acontecida históricamente como exhibimos en forma somera en este artículo, con el episodio de las piezas de ropa en sus formas original y simplificada (Chuquet, siglo XV).

Referencias

- Contreras, M. y Gómez, B. (2009), Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. En *Investigación en Educación Matemática X*. Huesca: SEIEM.
- Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company, pp. 133 – 177.
- Gallardo, A. (1994), *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis doctoral. México, Cinvestav, IPN.
- _____(2002), “The extension of the natural – number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra”, *Educational Studies in Mathematics*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, vol. 49, pp. 171 – 192
- Kieren, T. (1983), Partitioning, equivalence and the construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, pp 506-508.
- Marre, A. (1880), “Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres”, *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matem. e Fis*, núm. 13, pp. 555-659 y 693-814.
- _____(1881), “Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet parisien”, *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matem. E Fis*, núm. 14, pp. 413-460.
- Quispe, W., Gallardo, J. (2009). Una aproximación a la comprensión de la fracción en Perú a través de los libros de texto. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 389-401). Santander: SEIEM.
- Saavedra, G. (2011), *Estudio de las Fracciones Negativas en Educación Básica*. Tesis de Maestría. México, Cinvestav, IPN
- S. E. P. (2006), *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudio 2006*.
- _____(2006), *Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*.

ANÁLISIS TEMÁTICO DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN ESPAÑA A TRAVÉS DE LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM

THEMATIC ANALYSIS OF MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH IN SPAIN THROUGH THE SEIEM SYMPOSIA

Gómez, P., Cañadas, M. C., Bracho, R., Restrepo, A. M., Aristizábal, G.

Resumen. *En este trabajo presentamos un análisis temático de los trabajos publicados en las actas de los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) entre 1997 y 2008. Estos trabajos fueron codificados con base en una clasificación conceptual específica a la Educación Matemática. Los resultados de la codificación se analizaron en términos de frecuencias y porcentajes y nos permitieron concluir que la educación secundaria, las matemáticas escolares y la resolución de problemas fueron los focos principales de la investigación en este periodo.*

Palabras clave: Análisis temático; Educación Matemática; Investigación; Productividad; SEIEM

Abstract. *In this paper we present the results of a thematic analysis of the papers published in the proceedings of the Spanish Research Society in Mathematics Education (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática —SEIEM—) between 1997 and 2008. These papers were coded with a mathematics education specific conceptual classification. The coding was analyzed in terms of frequencies and percentages. The results show that the main foci of research during this period were secondary education, school mathematics and problem solving.*

Key words: Mathematics education; Productivity; Research; SEIEM; Thematic analysis

La Educación Matemática como área de conocimiento en España cuenta con unas décadas de corta historia (Rico y Sierra, 1994). Sin embargo, existen indicios suficientes que nos hacen pensar que en la actualidad se puede considerar una disciplina científica emergente en torno a la cual existe una delimitada comunidad de investigadores que vienen produciendo conocimiento científico. Es por ello que parece apropiado analizar la producción en Educación Matemática en nuestro país con la idea de estudiar el nivel de consolidación de esta área de conocimiento y conocer las tendencias en materia de investigación en este campo.

Existen trabajos previos que se han centrado en el análisis de la evolución de la investigación española en Educación Matemática en los últimos tiempos a través de la visibilidad internacional (Llinares, 2008), la producción de tesis doctorales (Fernández-Cano, Torralbo, Rico, Gutiérrez y Maz, 2003; Vallejo, Fernández-Cano, Torralbo, Maz y Rico, 2008) y la publicación de artículos científicos en revistas españolas (Bracho, 2010). No obstante, creemos que el análisis del comportamiento de esta disciplina

tomando como población de estudio los congresos especializados podría complementar dichos trabajos, ya que como afirman Blanco y Luengo (2008) en relación con estos: “...las comunicaciones constituyen un calidoscopio que refleja los temas de interés de lo investigadores...” (p. 14).

En este documento analizaremos los trabajos presentados en los simposios de la SEIEM desde sus inicios en 1997 hasta 2008, desde una perspectiva conceptual o temática con la idea de complementar los trabajos de Maz, Bracho, Torralbo y Gutiérrez (2011) — que se centraron en el análisis cuantitativo de dichos documentos con énfasis en el estudio de las redes de colaboración en la autoría e institucional— y de Ortiz (2009) — que se centró en el análisis de la producción en educación estadística en estos simposios—. Haremos un diagnóstico de la diversidad de temas en los que se centran las investigaciones en Educación Matemática en nuestro país, permitiéndonos esbozar el mapa temático de la investigación en esta área en España e interpretar las tendencias investigadoras.

En lo que sigue formulamos la problemática de la clasificación de documentos en Educación Matemática, definimos el problema de investigación, establecemos el esquema metodológico y presentamos y resumimos los resultados.

CLASIFICACIÓN DE DOCUMENTOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Las operaciones de análisis temático de documentos y las acciones de clasificación o indización pueden parecer a veces relativamente inconsistentes como consecuencia de la definición vaga e imprecisa de lo que se entiende por tema documental y de la subjetividad intrínseca de este tipo de actuaciones (Castañón, 1992). Por ello resulta especialmente importante el establecimiento de un marco conceptual y una metodología adecuados al tipo de estudio que se pretende realizar.

A la hora de abordar un análisis temático existen, a grandes rasgos, tres alternativas de clasificación de documentos: (a) la utilización de sistemas generales de organización y representación temática documental; (b) los estudios basados en los términos claves referidos por los autores; y (c) el uso de tesauros más o menos validados dentro de las distintas áreas de conocimiento.

La utilización de sistemas generales de organización y representación temática documental para estudios específicos, como la Clasificación Decimal de Dewey, los encabezamientos de materia de Cutter o la Library of Congress Classification (LCC), falla en el propósito principal de sistematización, al omitir una definición precisa de lo que se considera tema documental. La inexistencia de una taxonomía universal cerrada de términos claves en el área que nos ocupa hace que los estudios basados en estas clasificaciones resulten difíciles e imprecisos por lo que suelen emplearse únicamente cuando el tratamiento de la información resulta inabordable por su magnitud y es necesario recurrir a criterios de búsqueda en las bases de datos. Sin duda para el análisis temático que nos proponemos parece más acertado recurrir a una clasificación conceptual específica a la Educación Matemática.

En algunos estudios temáticos sobre Educación Matemática en España, como los realizados por Torralbo (2002), Vallejo (2005) y Bracho (2010), se han utilizado las variables definidas en la Mathematics Education Subject Classification (MESC), diseñada por *FIZ Karlsruhe* (Zentralblatt) para la base de datos *MathEduc*. Sin

embargo, nosotros hemos optado por basar nuestro análisis en la clasificación temática empleada en el repositorio digital abierto de documentos sobre Educación Matemática *Funes*⁶², ya que pensamos que proporciona un nivel de análisis más específico para la Educación Matemática.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El objetivo de esta investigación fue identificar conceptualmente la producción en investigación en Educación Matemática a través de los trabajos presentados en los simposios de la SEIEM en el periodo comprendido entre 1997 y 2008. Para ello nos propusimos los siguientes objetivos específicos:

Establecer los indicadores conceptuales que caracterizan los trabajos de investigación en Educación Matemática.

Catalogar temáticamente estos documentos.

Analizar diacrónicamente los documentos de acuerdo a su temática.

Nuestro estudio es exploratorio de tipo descriptivo explicativo longitudinal y en él se utilizan técnicas cuantitativas y cualitativas en concordancia con el análisis cienciométrico. Se han analizado todos los trabajos presentados en los simposios de la SEIEM en el periodo que se estudia, por lo que este trabajo puede considerarse censal.

METODOLOGÍA

Los documentos publicados en las actas de los simposios de la SEIEM están etiquetados como registros pertenecientes a la SEIEM en los metadatos de *Funes*, junto con la versión (año) en el que fueron publicados. Algunos de los autores de este trabajo, como editores de *Funes*, codificaron estos documentos.

Estructura de Códigos

La estructura de códigos utilizada en este trabajo se basa en dos grupos de códigos relativos a la información que se utiliza en *Funes* para clasificar documentos: nivel educativo y términos clave. La estructura de términos clave de *Funes*, como vocabulario controlado (NISO, 2005), permite catalogar cualquier documento relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El diseño y desarrollo de esta estructura se basó en cuatro principios: (a) eliminar la ambigüedad, (b) controlar los sinónimos, (c) establecer relaciones entre términos, cuando se considere apropiado, y (d) verificar y validar los términos (p. 4). Esta estructura está basada en un marco conceptual sólido y específico a la Educación Matemática que permite el registro y búsqueda eficiente de documentos (Pinto, 2008). Partiendo de las estructuras de TIMMS (Mullis, Ruddock, O'Sullivan, Arora y Eberber, 2005) y TEDS-M (Tatto, Schwille, Schmidt, Ingvarson y Beavis, 2006), establecimos una primera distinción de términos clave entre los referidos a Educación Matemática y los que conciernen a contenidos matemáticos. Para estos últimos, diferenciamos los términos de las matemáticas avanzadas de los de

⁶² <http://funes.uniandes.edu.co/>

matemáticas escolares. Para los términos clave de Educación Matemática seguimos un enfoque curricular (Rico, 1997), que nos permitió definir los siguientes códigos correspondientes a términos clave de primer nivel: (a) *sistema educativo*, (b) *centro educativo*, (c) *aula*, (d) *alumno*, (e) *profesor*, (f) *aprendizaje*, (g) *enseñanza*, (h) *evaluación* e (i) *currículo*. Además de estos nueve códigos, incluimos tres códigos directamente relacionadas con la Educación Matemática: (a) *Educación Matemática y otras disciplinas*, (b) *investigación e innovación en Educación Matemática* y (c) *otras nociones de la Educación Matemática*.

Cada código correspondiente a los términos clave está compuesto por códigos de niveles inferiores. A manera de ejemplo, los códigos correspondientes al segundo nivel de términos clave de matemáticas escolares son: (a) *números*, (b) *medida*, (c) *geometría*, (d) *álgebra*, (e) *estadística*, (f) *probabilidad* y (g) *cálculo*. Se incluye un código para otros temas no incluidos en los anteriores. En la Figura 1 recogemos la estructura de los códigos de niveles 3 y 4 para *números* como primer código de las *matemáticas escolares*.

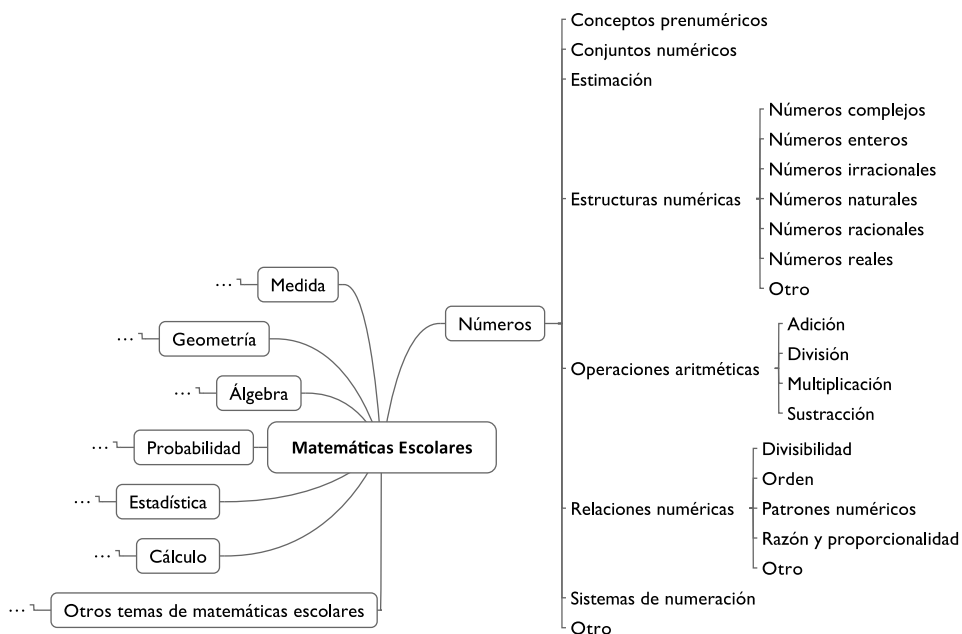


Figura 1. Términos clave de números

En el diseño de la estructura de términos clave seguimos un proceso cíclico en el que revisamos revistas de investigación, memorias de congresos y bases de datos nacionales e internacionales con dos propósitos centrales: (a) que los términos clave que estas fuentes consideraban tuvieran un equivalente en la estructura de términos clave de *Funes* y (b) que los documentos de esas fuentes pudieran ser etiquetados en la estructura de *Funes* de forma adecuada. Además, pedimos a varios expertos internacionales que revisaran nuestra propuesta de estructura e intentaran asignar términos clave a sus

propios documentos. Este proceso produjo varias modificaciones de estructura y contenido de la jerarquía de términos clave (Gómez, Cañadas, Restrepo y Soler, 2010).

Otro criterio para clasificar documentos es el nivel educativo al que se corresponde el contenido del documento. Con base en el estudio TEDS-M (Tatto et. al., 2006) y en la estructura educativa de varios países iberoamericanos, *Funes* considera las siguientes opciones: (a) educación infantil, (b) educación primaria, (c) educación secundaria y bachillerato, (d) educación de adultos, (e) educación de posgrado, (f) formación profesional, (g) todos los niveles educativos, (h) título de grado universitario y (i) otro nivel educativo.

Codificación

Los autores que realizaron la codificación revisaron los documentos y codificaron los documentos objeto de estudio. En particular, asignaron entre 3 y 6 códigos de la estructura de términos clave descrita previamente. El número de códigos se ha impuesto siguiendo el criterio de la mayoría de las revistas y congresos de nuestra disciplina. Los términos claves pretenden ser descriptores temáticos del documento y por ello decidimos que debían ser lo más precisos posibles dentro de la estructura, asignando códigos del mayor nivel de detalle posible. Por ejemplo, si un documento trata sobre los números naturales, no es suficiente con asignarle el código *números*, puesto que dentro de éste existe otro más específico: *números naturales* (ver Figura 1).

Para cada documento, los investigadores estudiaron su contenido, interpretando los códigos de la estructura de *Funes* y asignando los que consideraron más apropiados. Al inicio de este trabajo, se realizó una triangulación entre los investigadores para verificar la validez del procedimiento. Esto permitió establecer una serie de acuerdos y procedimientos para interpretar los códigos y los documentos y establecer los códigos que se asignaron a cada documento.

Los investigadores también codificaron los documentos de acuerdo con el nivel o niveles educativos a los que hace referencia su contenido.

Análisis de la Información

Se construyó una base de datos en la que cada registro corresponde a un documento de las actas de un simposio. En cada registro se incluyó la fecha del simposio, el nivel educativo y los términos clave con los que se codificó ese registro. Adicionalmente, para cada código correspondiente a un término clave de un registro, se incluyeron los códigos de los que ese código dependen (niveles superiores). Por ejemplo, si un registro estaba codificado con el término clave *números naturales*, se incluyeron en el registro correspondiente los códigos *estructuras numéricas* y *números*.

Se realizó un análisis de los datos basado en la frecuencia con que los valores de los dos tipos de códigos considerados (nivel educativo y términos clave) aparecen en los años estudiados. El propósito del análisis era presentar la evolución en tiempo de los documentos incluidos en las actas de acuerdo con estos códigos.

RESULTADOS

A continuación presentamos los resultados del análisis atendiendo a los códigos de nivel educativo y términos claves. Para los códigos correspondientes a términos clave, presentamos algunos resultados de códigos de segundo nivel. En el análisis de los resultados incluimos información que surge del análisis histórico de los datos, que no presentamos necesariamente en el texto o las figuras.

Nivel Educativo

La Figura 2 presenta el porcentaje de códigos para los diferentes niveles educativos.

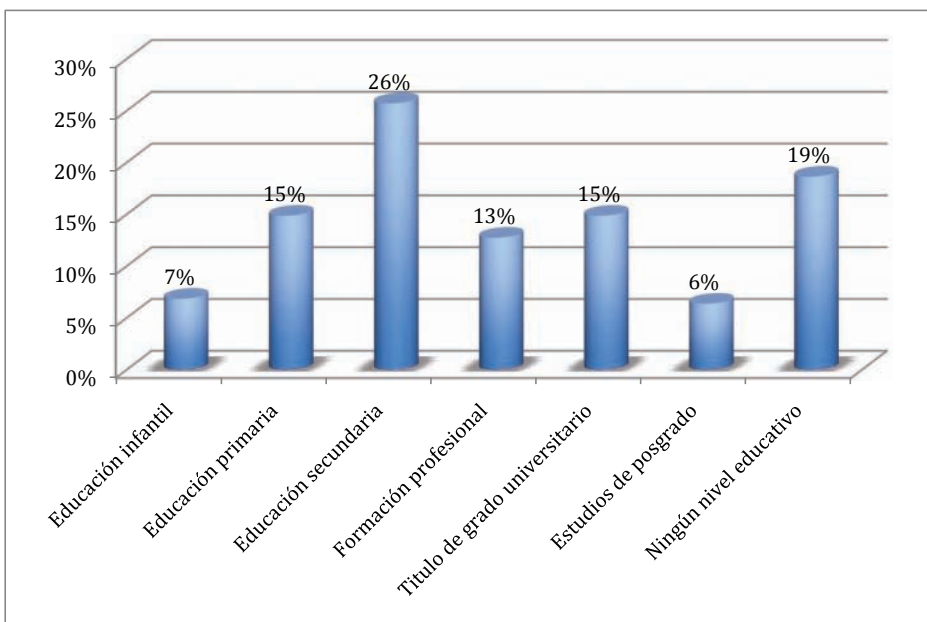


Figura 2. Nivel educativo

Los resultados ponen en evidencia la importancia de los trabajos que se refieren a la educación secundaria. La educación primaria, la formación profesional y el título de grado universitario aparecen en segundo lugar de importancia. Destaca la reducida proporción de documentos que se refieren a la educación infantil, apareciendo trabajos de este nivel únicamente en 1997, 2002, 2003 y 2008. La proporción de trabajos que no se refieren a ningún nivel educativo específico representan también una proporción importante de la totalidad de los trabajos (19%).

Términos Clave de Nivel 1

Los siguientes códigos de primer nivel de la estructura de términos clave representan un máximo de 2,5% del total: (a) sistema educativo (0,4%), (b) centro educativo (0,1%), (c) alumno —relacionado principalmente con la atención a la diversidad— (0,7%), (d) evaluación (0,6%), (e) currículo (2,3%), (f) Educación Matemática y otras disciplinas (2,5%) y (g) matemáticas superiores (1,6%). Hemos agrupado estos códigos una única

Análisis temático de la Investigación en Educación Matemática en España a través de los simposios de la SEIEM

etiqueta —denominada *máximo 2,5%*— a efectos de la presentación de los resultados en la Figura 3.

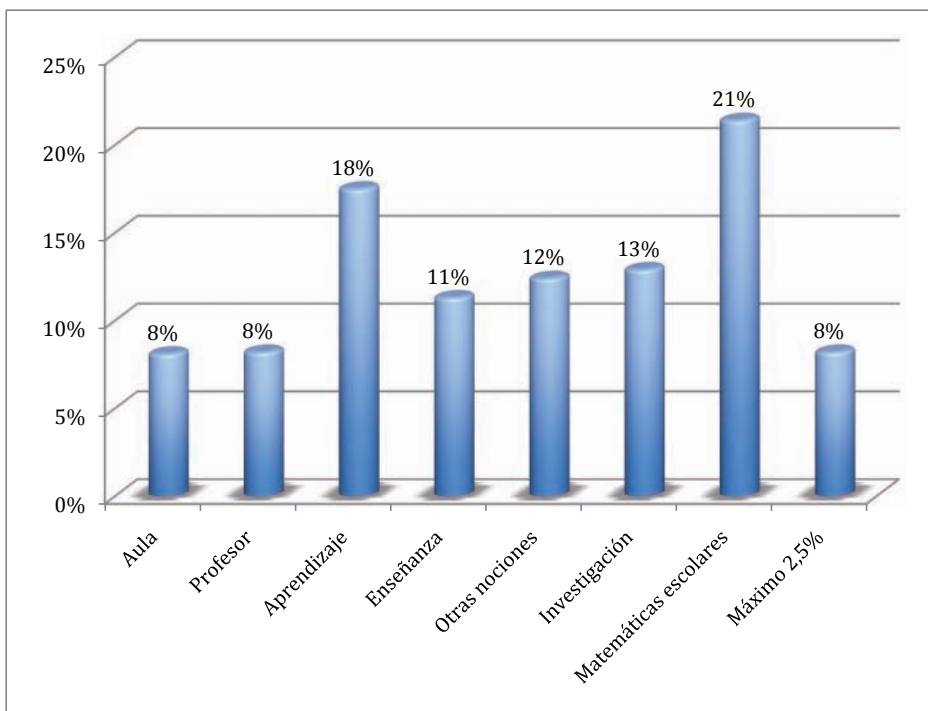


Figura 3. Términos clave de primer nivel

Aprendizaje y *matemáticas escolares* son los códigos que presentan los mayores porcentajes (18% y 21% en el total, respectivamente). Los códigos correspondientes a *enseñanza* (11%), *otras nociones de Educación Matemática* (12%) e *investigación* (13%) aparecen en segundo lugar. De estos códigos, hemos seleccionado —por razones de espacio— *matemáticas escolares*, *otras nociones de la Educación Matemática* y *aprendizaje* para un análisis más detallado.

Matemáticas Escolares

La Figura 4 presenta la evolución histórica de los porcentajes de códigos correspondientes a las *matemáticas escolares*.

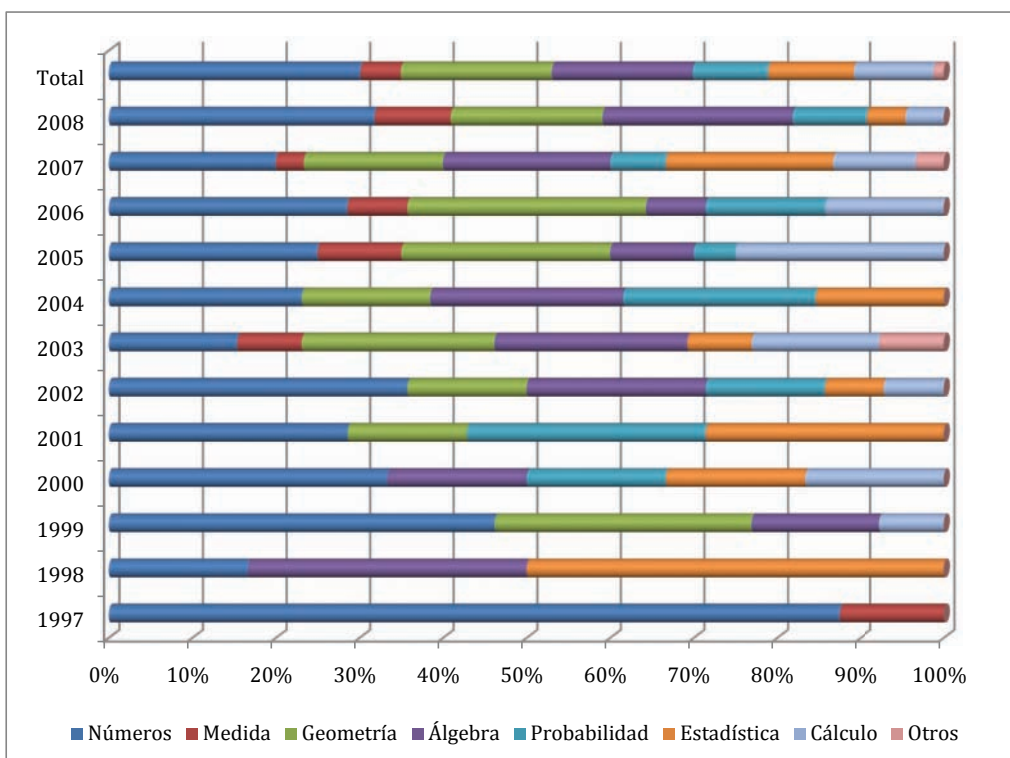


Figura 4. Matemáticas escolares

Se constata que, a partir de 1999, los temas de números, geometría y álgebra son predominantes, con la excepción del 2000, año en el que no se publicó ningún trabajo de geometría. En el total, estos tres temas cubren el 65% de los códigos. Los temas de probabilidad y estadística conjuntamente representan el 19% de los códigos y el tema de medida aparece esporádicamente en los últimos años, mientras que hay trabajos sobre cálculo desde 1999, con excepción del 2001.

Otras Nociones de la Educación Matemática

La Figura 5 presenta la evolución histórica de los porcentajes de códigos correspondientes a *otras nociones de la Educación Matemática*. Este código incluye códigos para *finés de la Educación Matemática* y *enfoques de la Educación Matemática* con los que no se codificó ninguno de los documentos analizados.

Análisis temático de la Investigación en Educación Matemática en España a través de los simposios de la SEIEM

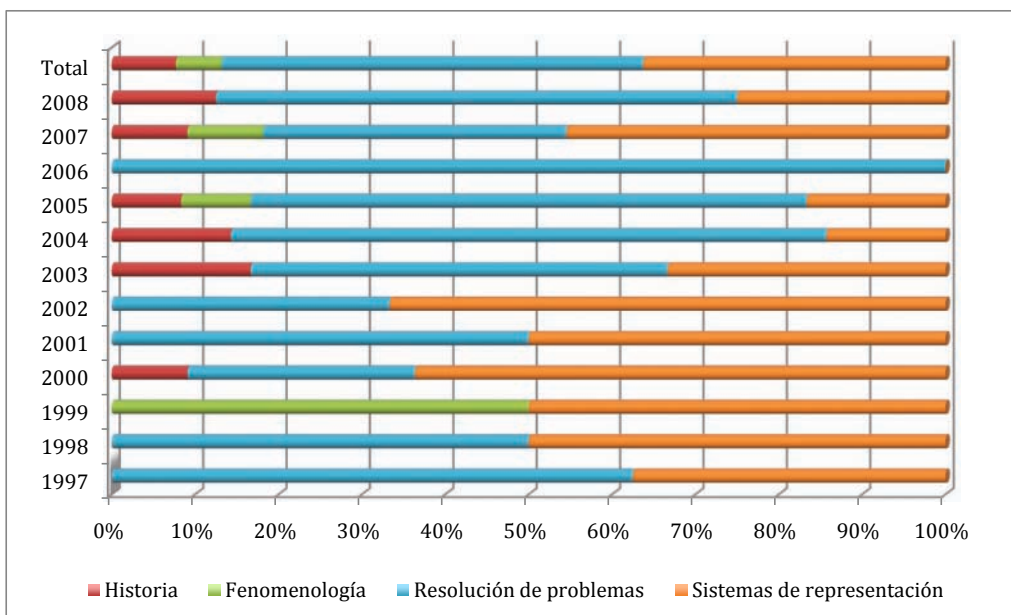


Figura 5. Otras nociones de la Educación Matemática

Los resultados ponen en evidencia la importancia de la resolución de problemas dentro de los trabajos publicados en las actas de la SEIEM, aunque entre 1998 y 2002, los sistemas de representación fueron el tema predominante (más del 50%). A partir del 2003 se aprecia la aparición de trabajos de historia, mientras que los trabajos relacionados con la fenomenología aparecen esporádicamente.

Aprendizaje

El código *aprendizaje* tiene tres códigos de nivel 2: *aspectos cognitivos*, *cognición* y *procesos cognitivos*. La Figura 6 presenta los resultados para este código.

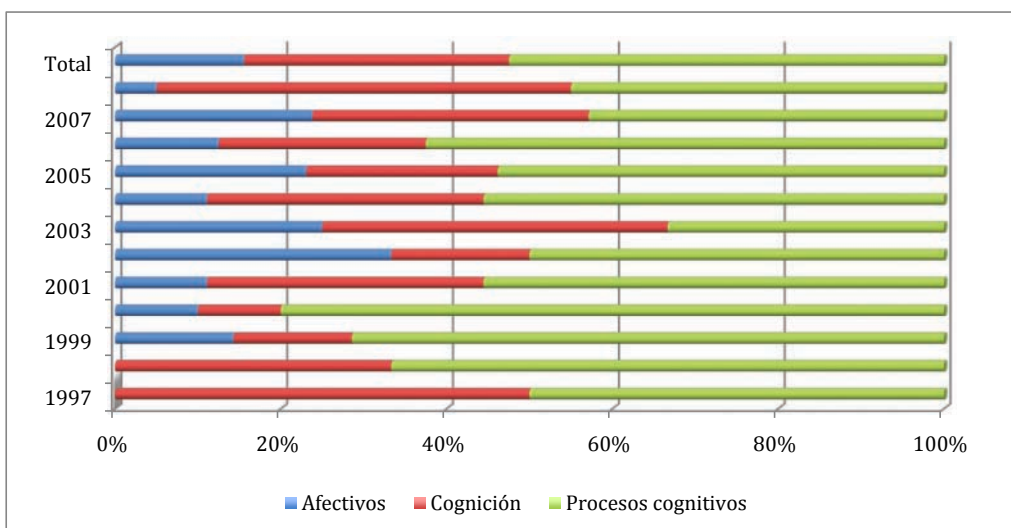


Figura 6. Aprendizaje

Los resultados muestran una predominancia de los códigos correspondientes a procesos cognitivos, entre los que se incluyen *abstracción, aplicación, comprensión, cálculo mental, formulación de conjeturas, generalización, modelización, pensamiento matemático, procesos de justificación y razonamiento*. Los códigos relacionados con la cognición (*conocimiento, dificultades, errores y rendimiento*) aparecen en segundo lugar. Los códigos de *aspectos afectivos* tienen en todo caso una presencia relevante dentro de este código.

RESUMEN DE LOS RESULTADOS

Los resultados anteriores nos permiten caracterizar los documentos publicados en las actas de la SEIEM entre 1997 y 2008, de la siguiente manera:

Se refieren predominantemente a la educación secundaria, mientras que los trabajos relacionados con la educación primaria, la formación profesional y el título de grado universitario aparecen en segundo lugar de importancia, destacándose la reducida proporción de documentos que se refieren a la educación infantil.

El centro de atención son las matemáticas escolares, desde la perspectiva de su aprendizaje.

Dentro de las matemáticas escolares, la mayor proporción de trabajos tratan los temas de números, geometría y álgebra.

La resolución de problemas y los sistemas de representación son las nociones de la Educación Matemática abordadas con mayor frecuencia.

Destaca la proporción reducida de trabajos que tienen que ver con la relación entre la Educación Matemática y el sistema educativo o el centro educativo, y la atención a la diversidad.

DISCUSIÓN

Hemos presentado los resultados del análisis temático de los documentos publicados en las actas de la SEIEM desde 1997 hasta 2008 desde una perspectiva temática con base en una clasificación conceptual específica a la Educación Matemática y a partir de unos procedimientos sistemáticos de codificación. Ese procedimiento y los resultados obtenidos nos han permitido caracterizar la investigación española en Educación Matemática en este periodo, tal y como se expresa en las actas de la SEIEM.

Si se tiene en cuenta que en los primeros simposios de la SEIEM se presentaron trabajos únicamente por invitación y se publicaron réplicas a esos trabajos y descripciones de los grupos de investigación y que, por consiguiente, estos simposios centraron su atención en temáticas específicas, no hemos identificado, con contadas excepciones, evoluciones importantes en los focos de interés de los investigadores y grupos de investigación cuyos trabajos han sido publicados.

Por razones de espacio no nos ha sido posible presentar análisis detallados (niveles 3 y 4) de algunos temas incluidos en los resultados. Es posible que este tipo de análisis pueda dar lugar a una caracterización más fina de los documentos.

Agradecimientos

Funes es un proyecto parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Referencias

- Bracho, R. (2010). *Visualización de la investigación en Educación Matemática en España. Análisis cuantitativo y conceptual de la producción de artículos científicos (1999-2008)*. Tesis doctoral. Universidad de Córdoba, Córdoba, España.
- Blanco, L. y Luengo, R. (2008). Introducción. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*. (pp. 13-15). Badajoz, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Castañón, B. (1992). Análisis temático documental. *Investigación Bibliotecológica*, 6(12). Descargado el 17 de marzo de 2011 de <http://www.ejournal.unam.mx/contenido.html?r=13&v=006&n=012>
- Fernández-Cano, A., Torralbo, M., Rico, L., Gutiérrez, M. P. y Maz, A. (2003). Análisis cuantitativo de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática (1976-1998). *Revista Española de Documentación Científica*, 26(2), 162-176.
- Gómez, P., Cañadas, M. C., Restrepo, Á. M. y Soler, C. (2010). Repositorios digitales y taxonomías de términos clave en educación matemática. En D. Benítez, O. B. Mederos y E. Padrón (Eds.), *Memorias del Primer Seminario Internacional Sobre Resolución de Problemas y Uso de Tecnología Computacional* (pp. 22-30). Torreón, Coahuila, México: Universidad Autónoma de Coahuila.

- Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2010, 27/12/2010). *Términos claves de Funes*. Descargado el 27/12/2010, de <http://funes.uniandes.edu.co/643>.
- Llinares S. (2008). Agendas de Investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde “ISI-web of knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*. (pp. 25-53). Badajoz, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Maz, A., Bracho, R., Torralbo, M. y Gutiérrez, M. P. (2011). La investigación en educación matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 163-185.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O’Sullivan, C. Y., Arora, A y Eberber, E. (2005). *TIMSS 2007 assessment frameworks*. Chestnut Hill, GA: Boston College.
- NISO (2005). *Guidelines for the construction format, and management of monolingual controlled vocabularies*. Bethesda, MD: Autor.
- Ortiz, Juan J. (2010). La educación estadística en los simposios de la SEIEM (1997-2009). En M. Moreno, J. Carrillo y A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 475-486). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Pinto, M. (2008). A user view of the factors affecting quality of thesauri in social science databases. *Library & Information Science Research*, 30(3), 216-221.
- Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación Matemática en la España del siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, *Educación Matemática e Investigación* (pp. 92-207). Madrid, España: Síntesis.
- Rico, L. (Ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.
- Tatto, T. Schwille, J., Schmidt, W., Ingvarson, L. y Beavis, A. (2006). *IEA Teacher Education Study in Mathematics (TEDS-M). Conceptual framework*. Documento no publicado. Michigan State University: Teacher Education International Study.
- Torralbo, M. (2002). *Análisis cuantitativo, conceptual y metodológico de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática*. Córdoba, España: Universidad de Córdoba.
- Vallejo, M. (2005). *Estudio longitudinal de la producción española de tesis doctorales en Educación Matemática (1975-2002)*. Tesis doctoral no publicada. Granada, España: Universidad de Granada.
- Vallejo, M., Fernández-Cano, A., Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L. (2008). History of Spanish mathematics education focusing in Ph D. theses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(2), 313-327.

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE LA VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES EN MAESTROS EN FORMACIÓN

ASSESSING PRE-SERVICE TEACHERS' KNOWLEDGE ABOUT VISUALIZATION OF THREE DIMENSIONAL OBJECTS

Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, J. M.

Universidad de Granada

Resumen. *Este trabajo se centra en el estudio de los conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales de maestros en formación. Se reportan los resultados obtenidos con la aplicación de un cuestionario a 241 futuros profesores de educación primaria, identificando los principales errores y dificultades en aspectos relacionados con el conocimiento común y ampliado del contenido matemático.*

Palabras clave: *evaluación conocimientos profesores, visualización espacial, conocimiento común y avanzado.*

Abstract. *In this work we consider the problem of assessing pre-service teachers' knowledge about visualization of three dimensional objects. We report the application results of a questionnaire to 241 pre-service elementary school teachers, identifying the main errors and difficulties in aspects related to the common and extended mathematics knowledge.*

Key words: *assessing teachers' knowledge, spatial visualization, common and extended knowledge.*

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES

Existe concordancia en afirmar que la visualización es una componente básica en el aprendizaje y enseñanza de la geometría espacial (Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996). La visualización espacial figura en las directrices curriculares como contenido a tratar en los distintos ciclos de educación primaria. Por ejemplo, en el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria en España (MEC, 2006) se indica que: “Con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), los niños y las niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de gran utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etc.”

Esto justifica que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la visualización espacial sean objeto de atención por parte de la investigación en didáctica de la matemática (Battista, 2007; Bishop, 1980; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996) y, de manera particular, pone en evidencia la importancia del tema en la formación de profesores.

Un aspecto importante de la problemática de la formación de profesores en este campo es identificar y evaluar las “habilidades espaciales” de los maestros y su relación con aspectos de la enseñanza. Consideramos la visualización de objetos tridimensionales como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto (Battista, 2007, p. 843).

Observamos que la interpretación y la comunicación de la información espacial de manera figural, verbal o mixta, son importantes habilidades relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998).

Aunque la visualización de objetos tridimensionales puede ocurrir en ausencia de una estimulo visual (Bishop, 1983; p. 184) centramos su estudio en presencia de una representación plana del objeto. Con respecto a este tema Guillén (2010) sugiere, como posible dirección en la investigación, el estudio de los diferentes tipos de representaciones planas de los sólidos y el uso que se hace de ellas en la enseñanza.

Siguiendo a Ben-Chaim, Lappan, y Houang (1985) consideramos que “la habilidad de “leer” una representación bidimensional de un objeto sólido forma parte de la visualización espacial” (p. 390). De hecho interpretar y producir de forma correcta una representación plana de un objeto tridimensional requiere, además de conocimientos básicos de dibujo técnico, una buena capacidad de visualización, que permita asociar la representación bidimensional al concepto geométrico correspondiente, y viceversa.

Suponemos que un profesor de escuela primaria además de tener buena visualización espacial, tenga el conocimiento para desarrollarla en sus alumnos, lo que incluye la capacidad de dibujar e interpretar de forma clara y correcta diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales.

El objetivo de este trabajo es evaluar aspectos específicos de los conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales (representados en el plano) de maestros en formación. Se reportan los resultados obtenidos con la aplicación de un cuestionario sobre el tema a 241 futuros profesores de Educación Primaria.

2. MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

En el análisis de las investigaciones previas relacionadas con el tema, no hemos encontrado un cuestionario comprensivo que evaluase adecuadamente los conocimientos de los profesores de educación primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En consecuencia se decidió iniciar la construcción de un nuevo cuestionario teniendo en cuenta dos criterios en la selección de las tareas:

- Según los aspectos de los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales que nos interesan estudiar.
- Según los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que se quieren evaluar.

Describimos brevemente estos dos criterios de selección.

Con el fin de identificar los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales, hemos analizado las tareas incluidas en las investigaciones sobre el tema en el campo de la educación matemática y de la psicología. Los

contenidos principales emergentes de dicho análisis se compararon con los contenidos presentes en las tareas presentadas en los libros de textos de educación primaria y en el currículo español para la educación primaria.

El cuestionario final consta de 5 ítems de respuesta abierta (de papel y lápiz), que cubren los siguientes aspectos del tema:

1. Coordinar e integrar vistas de objetos:
 - Dibujar o identificar algunas vistas de un objeto a partir del dibujo del objeto en perspectiva (ítem 1)
 - Dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales (ítem 2)
2. Plegar y desplegar desarrollos (ítem 3)
3. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (ítem 4)
4. Generar cuerpos de revolución (ítem 5)

Para seleccionar los aspectos del conocimiento que queremos evaluar nos hemos apoyado en el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor descrito en Godino (2009), que tiene en cuenta las diferentes facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos. Hemos decidido evaluar aspectos específicos del *conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)* y del *conocimiento del contenido en relación a la enseñanza*⁶³.

Cada ítem del cuestionario se compone de cuatro partes (sub-ítems), según el aspecto del conocimiento que se quiere evaluar. En este trabajo describimos únicamente las partes del cuestionario relativas a la evaluación de aspectos relacionados con el conocimiento común y ampliado del contenido (sub-ítems *a* y *c*) y los resultados obtenidos.

Para evaluar el conocimiento común del contenido (sub-ítem *a*) hemos seleccionado tareas de libros de texto de primaria. Los libros de textos utilizados fueron las últimas ediciones disponibles de las colecciones Anaya, SM y Santillana, que están a disposición de los profesores en formación.

Por lo que se refiere a la evaluación del conocimiento ampliado del contenido (sub-ítem *c*) proponemos resolver una tarea relacionada con la *a* pero de un nivel más alto, que involucra un conocimiento más avanzado del contenido específico. Estas tareas provienen de investigaciones y fueron en su mayoría propuestas a alumnos de escuela secundaria.

El cuestionario fue respondido por 241 futuros profesores del segundo curso de la especialidad Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011, en una sesión de dos horas de duración⁶⁴. Los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema fueron los relativos a sus formaciones básicas y los que profundizaron durante el año anterior en el estudio del bloque temático de geometría para maestros.

⁶³ Terminología introducida en los trabajos de Ball y colaboradores (Hill, Ball y Schilling, 2008). Godino (2009) propone llamar conocimiento ampliado al constructo que Ball designa como “conocimiento en el horizonte matemático”.

⁶⁴ En una segunda sesión de otras dos horas se implementó una acción formativa con los futuros profesores en la que se discutieron las soluciones dadas a algunos ítems.

En el siguiente apartado describimos los resultados obtenidos, teniendo en cuenta la variable cuantitativa “grado de corrección de las respuestas” (2 si correcta, 1 si parcialmente correcta, 0 si incorrecta) y las variables cualitativas “tipo de errores” y “tipo de representación plana utilizada”, por lo que nuestra investigación se inscribe en un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

3. RESULTADOS

Presentamos los resultados obtenidos en los sub-ítems a), que evalúan aspectos relativos al conocimiento común del contenido, los resultados de los sub-ítems c), que evalúan aspectos relativos al conocimiento ampliado del contenido; y algunas observaciones con respecto a la relación entre estas dos componentes del conocimiento evaluadas.

3.1. Conocimiento común del contenido

Para analizar las soluciones de los estudiantes a las tareas de libros de textos de primaria partimos de la hipótesis de que un futuro profesor pueda resolver de manera óptima dichas tareas. Consideramos entonces que la puntuación total relacionada con la variable del grado de corrección de la respuesta tenga que ser elevada: valoramos como insuficiente una puntuación total inferior a 8 (sobre 10).

Observamos que solo el 62% de los estudiantes consigue alcanzar dicha puntuación.

La Tabla 1 muestra las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta.

Grado de corrección	Ítem				
	1a	2a	3a	4a	5a
Correcto	226 (94)	159 (67)	73 (30)	160 (69)	227 (94)
Parcialmente correcto	0 (0)	50 (21)	97 (40)	15 (7)	0 (0)
Incorrecto	15 (6)	28 (12)	71 (30)	56 (24)	14 (6)

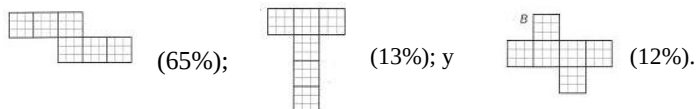
Tabla 1. Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas a los sub-ítems tipo a (n=241)

Describimos brevemente los principales errores y los porcentajes de los estudiantes que los han manifestados, con relación a los sub-ítems 2a, 3a y 4a (sub-ítems que resultaron de más difícil resolución).

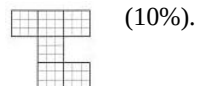
Observamos que el sub-ítem que resultó más difícil fue el 3a, relativo al contenido “plegar y desplegar desarrollos”, en el cual se pedía identificar los desarrollos correspondientes a un cubo: sólo el 30% de los estudiantes contestó de forma correcta a dicha pregunta.

Hemos identificados los siguientes errores principales:

- No identifican los siguientes desarrollos entre los posibles desarrollos de un cubo:



- Identifican el siguiente como posible desarrollo de un cubo:



Mesquita (1992) observa que los desarrollos en cruz o en T, son asociados con más facilidad al cubo que los demás, por su regularidad y su simetría, mientras que en los otros desarrollos las identificaciones de los segmentos equivalentes son menos evidentes. Esta última observación concuerda con los resultados obtenidos con respecto al desarrollo 3-3, que fue de más difícil reconocimiento (el 65% de los alumnos no lo reconocieron).

Por lo que se refiere al sub-ítem 2a relacionado al contenido “coordinar e integrar vistas de objetos (dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales)” hemos identificados los siguientes errores:

- Errores relativos a la técnica de dibujo utilizada para representar el objeto (28%): no se respetan las propiedades de la proyección utilizada.
- Errores en las proporciones (27%): la forma global del objeto es correcta pero hay grandes errores en las proporciones relativas de las partes que componen el objeto.
- Errores de coordinación e integración de las vistas (8%): no consiguen dibujar la forma global del objeto, dibujan un objeto por cada vista.

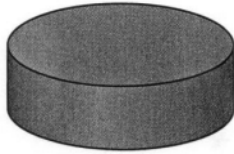
En el contexto de formación de profesores señalamos el trabajo de Malara (1998), que también destaca dificultades de coordinación de las vistas de un objeto tridimensional de un grupo de profesores de escuela secundaria.

Otros investigadores que trabajaron con alumnos de escuela primaria y secundaria reportaron errores, dificultades y conflictos relacionados con la representación plana de objetos geométricos (Colmez y Parzys, 1993) y errores de coordinación e integración de las vistas de un objeto tridimensional (Battista y Clements, 1996; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

Se observa que la mayoría de los estudiantes (78%) dibujaron el objeto en perspectiva caballera, que es muy frecuentemente utilizada en el dibujo de los sólidos en los libros de textos de primaria.

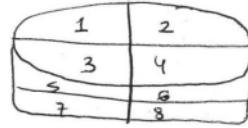
En el sub-ítem 4a, relativo a la “composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional” la mayoría de errores fueron en la interpretación de la representación plana del objeto: el sujeto lee el dibujo como un dibujo en sí mismo sin ponerlo en relación con el objeto que representa (el alumno “corta la representación” y no el objeto que representa) (9%). Presentamos un ejemplo de este tipo de error:

Enunciado: ¿Cómo podemos partir este cilindro en 8 partes dando solo 3 cortes?



Respuesta de un alumno:

De esta forma nos quedar 8 partes



En otros trabajos se reportan “dificultades de comprender la naturaleza de los objetos tridimensionales representados en dos dimensiones” por parte de estudiantes de escuela secundaria (Parzysz, 1991; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

3.2. Conocimiento ampliado

Por lo que se refiere a la evaluación del conocimiento ampliado del contenido, la puntuación total en la variable del grado de corrección de la respuesta c) observamos que el 54% de los alumnos tuvieron una puntuación total inferior a 5 sobre 10 (considerado insuficiente), 27% entre 5 y 6 (suficiente), 14% entre 7 y 8 (bueno) y 12% entre 9 y 10 (muy bueno).

En la Tabla 2 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta.

Grado de corrección	Ítem				
	1c	2c	3c	4c	5c
Correcto	122 (53)	36 (16)	108 (47)	87 (37)	32 (15)
Parcialmente correcto	10 (4)	67 (30)	64 (28)	64 (28)	19 (9)
Incorrecto	101 (43)	118 (54)	59 (25)	82 (35)	160 (76)

Tabla 2. Frecuencias absolutas (porcentajes) de las respuestas a los sub-ítems tipo c (n=241)

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento avanzado relacionado con la pregunta 2c (de coordinación e integración de las vistas para formar un objeto) y 5c (generar un cuerpo de revolución con eje exterior a la figura). Resumimos los principales errores y dificultades identificadas en dichos sub-ítems.

Por lo que se refiere al sub-ítem 2c, observamos que la mayoría de los errores identificados están relacionados con la dificultad de visualizar los cambios en las tres vistas de un objeto a partir de la variación de la estructura del objeto (33%). Esta dificultad podría estar relacionada con la incorrecta concepción de que las tres vistas ortogonales de un objeto definen de forma unívoca un objeto tridimensional. Muchos alumnos afirman que cambiando parte de la estructura del objeto por lo menos una vista tiene que cambiar (incorrecto en general y de manera particular en el caso de la tarea propuesta).

En el sub-ítem 5c los errores identificados van asociados a una concepción incorrecta de cuerpo de revolución, como sólido generado por la rotación de una figura alrededor de un eje únicamente interior o tangente a ella.

Una posible causa de éste error puede ser las representaciones de los cuerpos de revolución en los libros de textos de primaria: se representan las figuras planas pegadas a barras que giran.



3.3. Comparación del conocimiento común y ampliado del contenido

Comparando los análisis anteriores podemos hacer algunas observaciones generales:

- Las puntuaciones totales relacionadas con la variable del grado de corrección de la respuesta muestran una gran diferencia entre el conocimiento común del contenido (puntuación media = 7,7) y conocimiento ampliado del contenido (puntuación media = 4,1).
- Esta diferencia se ve reflejada en todas las tareas (las preguntas c resultaron más difíciles de resolver que la a) excepto en la tarea 3. En las tareas 2 y 5 la diferencia entre conocimiento común y ampliado resulta considerable.
- Tanto en las respuestas de las tareas a (conocimiento común) como en la c (conocimiento ampliado) se observan diferentes errores de interpretación y comunicación de una representación plana del objeto tridimensional.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado los resultados obtenidos al analizar las respuestas de 241 futuros profesores de educación primaria a un cuestionario de evaluación de conocimientos comunes y ampliados sobre visualización de objetos tridimensionales.

Observamos que el conocimiento común sobre visualización de objetos tridimensionales de los futuros profesores evaluados no es el esperado: el 62% de los alumnos no contesta de forma óptima a las tareas sacadas de libros de textos primaria sobre los diferentes aspectos del tema. Solo dos tareas fueron resueltas por los alumnos de forma satisfactoria (1a y 5a); sin embargo, en las dos respectivas tareas sobre el conocimiento ampliado los alumnos manifestaron diferentes dificultades.

Se observan considerables dificultades relacionadas con el conocimiento ampliado sobre los contenidos “coordinar e integrar vistas de objetos” y “generar cuerpos de revolución”. De manera particular los estudiantes no están capacitados para la resolución de una tarea que requiere reflexionar sobre la pluralidad de objetos que pueden corresponder a tres vistas ortogonales determinadas y de una tarea que requiere

generar un cuerpo de revolución en el cual el eje de rotación es externo a la figura plana que lo engendra.

Observamos que dichos contenidos específicos no están contemplados en los libros de textos de primaria. Los ejercicios relacionados con el contenido “coordinar e integrar vistas de objetos” que proponen los libros de textos piden dibujar o identificar *el* objeto correspondiente a tres vistas ortogonales, lo que excluye la reflexión sobre una posible pluralidad de objetos. En las representaciones de la generación de los cuerpos de revolución en los libros de textos se dibujan las figuras planas *pegadas* a barras que giran, lo que involucra la “idea” de que el eje, girando, “permite” la rotación de la figura plana; procedimiento que no se puede generalizar para el caso de eje externo a la figura.

Puesto que los respectivos sub-ítems (2a y 5a) relacionados con el conocimiento común de dichos contenidos han sido resueltos de forma correcta (o parcialmente correcta), sería interesante analizar si los conocimientos adquiridos por los estudiantes a lo largo de su escolaridad sobre estos temas puedan resultar conflictivos en el momento de resolver tareas que involucren conocimientos más avanzados.

De forma general el conocimiento ampliado del contenido de estos estudiantes puede ser calificado como insuficiente. Diferentes dificultades van asociadas a la interpretación de representaciones planas de objetos tridimensionales. Estas dificultades pueden obstaculizar y a veces impedir un procedimiento de tipo visual sobre el objeto.

De otra parte la incapacidad de producir de forma correcta una representación plana de un objeto tridimensional no siempre refleja una escasa habilidad de visualizar el objeto. Sin embargo, creemos que para un futuro profesor de escuela primaria sea importante no solo visualizar el objeto sino también poder comunicar su forma con diferentes tipos de representaciones planas, para desarrollar dicha habilidad en sus alumnos.

De aquí el interés y la importancia de realizar futuras investigaciones centradas en el desarrollo de la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación que incluya actividades de interpretación y elaboración de diferentes tipos de representaciones planas y la reflexión sobre sus respectivas funciones y límites. Como afirma Parzysz (1991, p. 591) “una base científica podría ser dada a las reglas del dibujo técnico (que en general son dadas como simples convenciones, sin una justificación real), con lo que la educación matemática estaría más cerca al tipo de problemas que se encuentran en la vida cotidiana o profesional”.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), fondos FEDER y de la Beca FPU, AP2008-04560.

Referencias

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Battista, M. T. y Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), 258-292.

- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solid made of small cubes: analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 389-405.
- Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.
- Bishop, A. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Colmez, F. y Parzysz, B. (1993). Le vu e le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 a la seconde. En A. Bessot y P. Verrilon (Eds), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (pp. 35-55). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática XIV*, 21-68. Lleida: SEIEM.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education, Vol 1* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Johnson, B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33 (7), 14-26.
- Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.
- Mesquita, A. L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural Topology*, 18, 19-30.
- Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.

- Pittalis, M., Mousoulides, N. y Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 385-392. Thessaloniki: PME.

INCORPORACIÓN DE TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EL AULA: LA PRÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL TRAMO ESCOLAR DE 15 A 18 AÑOS DE EDAD

INCORPORATING DIGITAL TECHNOLOGIES INTO THE CLASSROOM: MATHEMATICS TEACHING PRACTICE WITH STUDENTS FROM 15 TO 18 YEARS OLD

Hoyos, V.

Universidad Pedagógica Nacional, México

vhoyosa@upn.mx

Resumen. *El trabajo que aquí se presenta contribuye a la investigación sobre el aprendizaje de los maestros sobre la incorporación de la tecnología matemática en su práctica docente. Se utilizó un diseño relativamente nuevo para la elaboración de un curso en línea (OLC) que permitió a los profesores en servicio que participaron en el mismo, aprender a usar herramientas digitales y a hacer matemáticas con la tecnología. El diseño del curso y el marco teórico de análisis (Zbieck & Hollebrands, 2008) están relacionados con la introducción de innovación en la escuela. Los datos principales se obtuvieron de videos de los maestros que participaron en el curso, los cuales fueron tomados durante sus prácticas en el salón de clase. Los videos de las prácticas de enseñanza revelaron cinco formas distintas de concretar el uso de la tecnología matemática en los salones de clase.*

Palabras clave: Uso de tecnologías digitales en el aula; desarrollo profesional de maestros en servicio; brecha digital en el ámbito educativo.

Abstract. *The work we present here contributes to research on teacher learning on the issue of incorporation of mathematics technology into their classroom practice. We approached relatively new in-service teacher training design and used a Zbieck & Hollebrands (2008) revisited theoretical framework of analysis related to introducing innovation at school. The main data were obtained from videos of the participant teachers taken during their classroom practice. These teaching videos revealed five different ways the participant teachers realized how to use mathematics technology into their classroom practice.*

Key words: Use of digital technologies into the classroom; in-service teacher professional development; digital gap in the educational field.

INTRODUCCIÓN

Desde el punto de vista de Cobo (2009), la educación es una de las disciplinas que más se han beneficiado con la irrupción de las nuevas tecnologías, especialmente a partir de la irrupción de la Web 2.0., pues esto ha permitido el acceso a cantidad de software libre y la posibilidad de potenciar competencias y habilidades sociales, como la inter-creatividad y el aprendizaje colaborativo.

Sin embargo, como el mismo autor plantea, el advenimiento de las nuevas tecnologías genera la posibilidad de nuevas habilidades y destrezas de los estudiantes. Lo que entonces plantea grandes retos para el profesorado, retos de actualización en el uso de los nuevos recursos digitales y de aprender cómo integrar estas herramientas tecnológicas en su práctica docente.

En este contexto, es conveniente reconsiderar las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cuál ha sido en realidad la influencia de las tecnologías digitales en la escuela, especialmente en cuanto al aprendizaje de las matemáticas?
2. ¿Qué piensan los maestros del uso de las tecnologías digitales en las clases de matemáticas?
3. ¿Cómo concretan los maestros de matemáticas, en sus prácticas escolares, el uso de las tecnologías digitales?

El trabajo que aquí se está presentando contribuye a responder la tercera pregunta, partiendo de trabajos previos realizados principalmente por Zbieck and Hollebrands (2008), Ruthven (2007; 2002) y Ruthven & Hennessy (2002).

Específicamente, se llevó a cabo un estudio exploratorio sobre las maneras de concretar el uso de nuevas tecnologías, o de herramientas digitales, por parte de 15 profesores en servicio, quienes normalmente atienden a estudiantes ubicados en el tramo escolar que va de los 15 a los 18 años de edad. Se les observó especialmente cuando trataron de incorporar tecnología matemática (Zbieck and Hollebrands, 2008) en su práctica docente.

Por otro lado, en relación con las dos primeras preguntas planteadas en los puntos (1) y (2), aquí únicamente se hará una pequeña revisión de algunos de los resultados más relevantes de algunas de las investigaciones recientes sobre los temas en cuestión.

Influencia de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas

Según Olive et al. (2010) a fines de los 80's y a lo largo de los 90's hubo un gran optimismo en cuanto al potencial de las nuevas tecnologías para transformar las formas en que se aprendían y enseñaban las matemáticas (Howson & Kahane, 1986, citado por Olive et al, en la obra mencionada).

Sin embargo, en opinión de algunos de los diseñadores de software revolucionarios (como S. Papert, el creador del software LOGO), y en contraposición a sus más caras ambiciones en cuanto al uso de lo que ellos crearon, “las computadoras tan sólo han sido usadas para transferir el currículum tradicional de los impresos a la pantalla de la computadora” (Kaput, 1992). Incluso sucede que, “los profesores más entendidos y que trabajan ahora en escuelas convencionales, comprenden que lo que están haciendo [con la tecnología] no es lo que desearían hacer” (Papert, 1997, citado por Ruthven, 2007).

En realidad, Papert ve el trabajo cotidiano que realizan los profesores con las computadoras en la escuela, como las semillas a partir de las cuales crecerá el cambio (Ibidem, Ruthven, 2007). En su análisis de las tecnologías en la escuela y su relación con la enseñanza, Ruthven también menciona que las teorías contemporáneas del cambio educativo, como el que involucra la innovación tecnológica, reconocen que estos procesos están moldeados por la elaboración de sentido de los agentes involucrados (Spillane, Reiser & Reimer, 2002, citado por Ruthven, 2007).

Sin embargo, es necesario decir que son pocas las investigaciones que tratan de manera conjunta las cuestiones de la incorporación de la tecnología por parte de los profesores en las prácticas escolares, y cómo esto afecta al aprendizaje de los estudiantes (Zbiek y Hollebrands, 2008). Más bien, estas dos líneas de investigación en general se han considerado de manera separada, lo que en realidad actualmente llama a avanzar en investigaciones en las que se consideren ambos aspectos a la vez, como la realizada por Kendal y Stacey (2001).

Algunas de las Concepciones de los Profesores acerca del Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas

En su trabajo del 2002, K. Ruthven y S. Hennessy investigaron acerca de las ideas de los profesores sobre lo que constituye una experiencia exitosa de uso de herramientas y recursos computacionales en el salón de clase.

Estos autores realizaron un gran número de entrevistas grupales a profesores en Inglaterra, las cuales se llevaron a cabo en los departamentos de matemáticas de varias escuelas preparatorias (tramo 15 a 18 años de edad) en distintas localidades de esa región. A través de análisis cuantitativos y cualitativos, Ruthven y Hennessy (2002) identificaron una serie de temas centrados en el éxito y la operatividad que los profesores asociaban al uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación), y encontraron también subtemas relacionados. Por ejemplo, uno de los temas de éxito del uso de las TIC fue el de que aseguraban el trabajo en el salón de clases y mejoraban la participación de los estudiantes en el mismo. A su vez, esto estuvo relacionado con el cambio, la diferencia y la variedad del trabajo en el salón de clase. Los otros temas de éxito fueron el ritmo y la productividad del trabajo; y, finalmente, la progresión en el aprendizaje que de ahí se derivaba. A continuación se enlistan diez temas encontrados por estos autores en los relatos de los profesores, los cuales se relacionan con la operatividad del uso de las TIC.

- i) *Mejorar el ambiente* a través de cambiar la forma general y el sentir de la actividad en el salón de clase;
- ii) *Asistir en sus intentos a los estudiantes*, ayudando a corregir errores y experimentando con posibilidades;
- iii) *Facilitar la rutina*, permitiendo que tareas subordinadas sean llevadas a cabo fácil, rápidamente y disponiendo de recursos;
- iv) *Acentuar elementos clave* de los temas en estudio, proveyendo imágenes vívidas y efectos impactantes, para resaltar propiedades y relaciones.

Los temas que se relacionan con el uso de la tecnología y las principales metas de la enseñanza son:

- v) *Intensificación del compromiso* de los estudiantes en las tareas, lo que se refiere a asegurar la participación de los alumnos en las actividades en el salón de clase;
- vi) *Producción de la actividad*, lo que refiere al mantenimiento del ritmo y la productividad de los estudiantes durante las lecciones;
- vii) *Establecimiento de ideas*, lo que refiere a apoyar el desarrollo de la comprensión y la capacidad del estudiante.

Los temas claves del aprendizaje que vinculan los usos de la tecnología y las metas de la enseñanza, son:

- viii) *Aumento de motivación*, a través de generar ánimo e interés de los estudiantes, y construyendo confianza de los estudiantes en sí mismos;
- ix) *Disminución de restricciones*, a través de mitigar factores que inhiben la participación de los estudiantes, tales como la ejecución de tareas laboriosas, así como las demandas y los requerimientos que impone la presentación en papel y lápiz, además de la vulnerabilidad a la exposición de errores;
- x) *Aumento de atención*, a través de crear condiciones para que los estudiantes enfoquen a los temas principales.

En otro artículo de su autoría, Ruthven (2007) señala los diez constructos recién mencionados (marcados en cursivas), y observa que cada uno de ellos representa un estado de hechos deseable, al que los maestros aspiran lograr en su salón de clases, pensando en que el uso de la tecnología contribuiría a ello.

Este autor también indica que considerando que la investigación que realizó junto con Henessy sólo fue un estudio sobre el tema, el modelo de práctica exitosa (en el uso de tecnología en el salón de clase) que de ahí se deriva tendría que ser considerado como tentativo. Además, también avanza que para lograr alcanzar este modelo ideal, en la práctica se requiere que los profesores desarrollen conocimiento a partir de sus propias prácticas (“craft knowledge”), y que de ahí construyan las maneras en que desean utilizar las nuevas tecnologías. Según Ruthven, este conocimiento artesanal (*craft knowledge*), adquirido a partir de la práctica, es un gran sistema de reflejos, de iniciativas o descubrimientos poderosos que los maestros desarrollan en su trabajo en la clase; el cual se construye sobre rutinas y procedimientos automatizados, cortados o hechos a la medida de las circunstancias particulares en las que el profesor trabaja. También menciona que, específicamente, muchas de las innovaciones tecnológicas propuestas involucran modificar este sistema.

Finalmente, para cerrar esta sección, se hará mención de dos observaciones del mismo autor (Ruthven, 2007) acerca de la complejidad del tema de la incorporación de la tecnología en las prácticas escolares: Ruthven llama a desarrollar un enfoque holístico para abordarlo, y a considerar que para informar desde tal enfoque, el campo de investigación en educación matemática necesita ampliar su perspectiva. Esto es, es necesario no enfocar de manera exclusiva sobre las dimensiones distintivamente matemáticas de la práctica escolar, pues se pueden perder líneas de trabajo críticas sobre el tema.

Incorporación de las tecnologías digitales en la práctica del docente en el aula

Como arriba se mencionó, el trabajo que aquí se está presentando contribuye a responder a la tercera pregunta arriba planteada. Específicamente se parte de algunas de las investigaciones que se acaban de reseñar (i.e., Ruthven, 2007 y 2002; Ruthven y Hennessy, 2002), así como de la realizada por Zbieck and Hollebrands (2008).

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Diseño de un curso piloto en línea, para la actualización de maestros en matemáticas y tecnología

Del trabajo realizado por Zbieck and Hollebrands (2008), el cual sintetiza diez años de investigación sobre la incorporación de la tecnología matemática en las prácticas de los docentes en el salón de clases, se extrajo una estructura racional para la organización de un curso en línea (OLC) de seis meses de duración, para maestros en servicio, los cuales atendían a estudiantes de 15 a 18 años de edad.

En el OLC se abordaron temas de matemáticas y de tecnologías de la información, los cuales se han especificado en trabajos publicados anteriormente (Hoyos, 2009-2010). Los constructos teóricos de Zbieck y Hollebrands (2008), específicamente su re-conceptualización del modelo PURIA de Beaudin & Bowers (1997), permitieron analizar los datos que se obtuvieron en este estudio como si se derivaran de la introducción de innovaciones tecnológicas en la escuela.

Vale la pena hacer notar que el OLC que aquí se instrumentó se planteó como un curso de actualización (i.e., de educación continua, o para el desarrollo profesional del docente) en el contexto general de las políticas educativas oficiales vigentes en la mayoría de los países, según las cuales el profesorado en servicio debe de aprender como incorporar la tecnología matemática en sus prácticas escolares, para tratar de acortar la brecha digital actualmente existente entre los estudiantes (nacidos ya en la era digital) y gran parte del profesorado en servicio, entre quienes se encuentran dificultades e incluso resistencia a asimilar el cambio tecnológico (ver, por ejemplo, Assude et al. 2006). También en México, políticas educativas semejantes apoyan la integración de las nuevas tecnologías en la enseñanza, poniendo énfasis particularmente en que esto se haga en la enseñanza de las matemáticas.

Para que los maestros pudieran acometer la tarea de incorporar la tecnología matemática en sus salones de clase, se instrumentó un curso piloto (ver <http://upn.sems.gob.mx>) en línea de seis meses de duración, en el que participaron 120 maestros en servicio. En ese momento los maestros se hacían cargo de diferentes cursos, y, de acuerdo con el curso, el rango de las edades de los estudiantes varió entre los 15 y los 18 años. Una de las hipótesis del diseño del curso fue que éste permitiría que los maestros participantes aprendieran a usar tecnología y a hacer matemáticas con la tecnología.

Aunque se mencionó que en total hubo 120 participantes, en esta comunicación sólo se reportan las prácticas docentes que se observaron en 15 de los participantes, los cuales formaron parte de uno de los grupos que cursaron el OLC, el cual se eligió de manera aleatoria.

En realidad, los dos propósitos hipotéticos del diseño del curso (aprender a usar tecnología y usarla para hacer matemáticas) constituyen dos de los modos del modelo de desarrollo para docentes PURIA, un modelo que da cuenta de un continuum de aprendizaje (Zbiek & Hollebrands 2008). De hecho, seguir este modelo implica que los profesores deben de experimentar modos distintos de desarrollo para avanzar hacia una incorporación exitosa de la tecnología en sus salones de clase: los modos de Jugar (Play), Usar (Use), Recomendar (Recommend), Incorporar (Incorporate) y Evaluar (Assess).

Como Zbiek and Hollebrands mencionan (2008, p.295), el crecimiento durante los modos P (Jugar) y U (Usar) incluye la transición de la tecnología como la herramienta del desarrollador, en el instrumento del maestro para hacer matemáticas. Luego, en los modos de Incorporación y de Evaluación, la atención del maestro se vuelve, implícita o conscientemente, hacia el uso de la tecnología como una herramienta pedagógica, incluyendo el desarrollo de orquestaciones instrumentales (Trouche 2000, citado en Zbieck & Hollebrands 2008) o de planes elaborados considerando el uso de la tecnología desde las dimensiones sociales del salón de clases. Finalmente, el modo Recomendar parece estar marcado por una transición entre los aspectos matemático y pedagógico de la tecnología (Zbieck & Hollebrands, *ibid*, p. 295).

Obtención de los datos

A lo largo del OLC hubo cuatro semanas de actividades (dos al final de las primeras diez semanas de actividades, y dos más al final de las siguientes diez), en donde los maestros tuvieron que ejecutar la siguiente serie de tareas: (a) Elegir un tópico de matemáticas del bachillerato, junto con el software, herramientas o materiales digitales, de tal manera que se pensara que lo elegido sería útil al usarlo para su enseñanza; b) llevar a cabo una sesión de trabajo con los estudiantes de la manera en que se creyera conveniente, de acuerdo con el material digital elegido; c) video-grabar la sesión de trabajo; d) subir una versión de la grabación de siete minutos a YouTube; y finalmente, e) subir a la plataforma (recuérdese que el curso y todas las actividades en cuestión se llevaron a cabo a través de Internet, en un curso completamente en línea, montado sobre una plataforma *moodle*) un reporte descriptivo del contenido del video junto con la dirección electrónica del mismo en YouTube (i.e., URL del video).

Del último segmento de actividades del diseño del OLC que se acaba de describir, se extrajeron los datos principales de este estudio y se generaron los resultados que enseguida se van a presentar.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

A lo largo de la implementación del OLC se obtuvieron evidencias de los profesores desplegando los modos de Jugar (Play), Usar (Use) y Recomendar (Recommend) del Modelo PURIA, las cuales quedaron registradas en la plataforma del curso. Sin embargo, en este espacio no se presentarán los datos de los participantes relacionados con el despliegue de estos modos, esto se hará en una comunicación más amplia actualmente en preparación. Por el momento, aquí nos avocaremos a la presentación de las diferentes maneras en que los profesores participantes comenzaron a Incorporar las herramientas digitales en sus salones de clase.

Descripción de las diferentes formas en que los profesores incorporaron las herramientas digitales en sus clases

De los quince profesores participantes, solo nueve completaron todas las tareas que se les requirieron a lo largo del OLC. Enseguida se presenta un resumen de sus ejecuciones en la siguiente tabla:

Incorporación de tecnologías digitales en el aula: la práctica de la enseñanza de las Matemáticas en el tramo escolar de 15 a 18 años de edad

Caso	Datos Generales (a) Iniciales del nombre del profesor (b) Ciudad de residencia	Tema; herramienta digital elegida; URL del video	Forma en que la tecnología se incorporó en la clase
1	(a) HA (b) Veracruz	- Resolución de ecuaciones - Software PowerPoint http://www.youtube.com/watch?v=PILYsIO-Vh0	El profesor usa un LCD, una computadora portátil y software para explicar o introducir un tema matemático (forma "clásica").
2	(a) AG (b) Baja California	- Relación entre una función y su derivada - Software GeoGebra http://www.youtube.com/watch?v=Lk2yVHDjexA	Misma ejecución que en el caso 1.
3	(a) AM (b) Guanajuato	- Simplificación de expresiones algebraicas racionales - Software Java and HTML http://www.youtube.com/watch?gl=MX&hl=es-MX&v=N1FwbEo5KGI	El profesor agrega a la <i>forma clásica</i> de enseñanza una formulación general de preguntas dirigida a los estudiantes, sobre temas matemáticos incidentales.
4	(a) HM (b) Baja California	- Cálculo del área de figuras geométricas en 2D - Software GeoGebra http://www.clipshack.com/Clip.aspx?key=CDF72468862861A8	El profesor agrega a la <i>forma clásica</i> de enseñanza una elección de herramientas digitales apropiadas para justificar o confirmar cálculos complejos.
5	(a) FM (b) Veracruz	- Gráficas, ecuaciones y funciones - Software GeoGebra http://www.youtube.com/watch?v=BXAE2b5U3M4	Misma forma que en el caso 4.
6	(a) AL (b) Sinaloa	- Diseño de figuras geométricas y cálculo de áreas. - Software GeoGebra http://www.youtube.com/watch?gl=ES&hl=es&v=yhXs8BLMFIM	El profesor es capaz de orquestar el trabajo de los estudiantes con la computadora, dirigiendo el trabajo de los estudiantes por medio de una plantilla (hoja de trabajo) a llenar con las respuestas de los mismos.
7	(a) SM (b) Colima	- Ecuación de una línea recta - Software GeoGebra http://www.youtube.com/watch?gl=MX&hl=es-MX&v=X4c8IHEzQsM	Misma ejecución que en el caso 6.
8	(a) OV (b) Baja California	- Resolución de desigualdades - Software Aplusix http://mx.youtube.com/watch?v=gwGcPtyXYbs	El profesor orquesta el trabajo de los estudiantes con la computadora pero agrega al uso de las herramientas digitales el uso del lápiz y el papel (o el pizarrón) para comparar las ejecuciones y los resultados de los estudiantes.
9	(a) FG (b) Hermosillo	- Propiedades y construcción de instrumentos en Física - Software PowerPoint http://fcogurrola.blogspot.com	El profesor es capaz de orquestar trabajo autónomo con la computadora por parte de los estudiantes, basándose en el trabajo de los estudiantes y en la cooperación en el aula en pequeños grupos.

En síntesis, el análisis de los videos de enseñanza reveló cinco formas de enseñanza en donde se comienza a usar la tecnología matemática en los salones de clase:

- (a) Un patrón de incorporación (*forma clásica*) que probablemente se deriva de la manera clásica de enseñanza, la cual de manera esquemática consiste en que el profesor explica un tema frente al grupo apoyándose exclusivamente en el uso del pizarrón y la tiza. Utilizando ahora las herramientas computacionales, esto se traduce al uso del cañón (un *LCD* por sus siglas en inglés), una computadora portátil que él manipula y un software para explicar o introducir un tema matemático en la clase. Se podría decir que esta forma de incorporar la tecnología en el salón de clases sigue un *patrón* de incorporación *clásico* (ver casos 1 y 2 en la tabla).
- (b) Una *versión modificada del patrón de incorporación clásico* que añade la interacción del maestro con los estudiantes, básicamente a través del planteamiento de preguntas (por parte del profesor) a toda la clase (ver caso 3). También en esta categoría (como una versión modificada del *patrón* de incorporación *clásico*) aquí se están considerando las ejecuciones del profesor en donde añade al *patrón clásico* de enseñanza la elección de herramientas digitales apropiadas para justificar o confirmar cálculos complejos (ver casos 4 y 5).
- (c) En esta categoría lo que se aprecia en las ejecuciones del maestro es un enfoque de enseñanza basado en la instrumentación de la actividad (Verillon and Rabardel, 1995; Assude et al., 2006), en este caso dirigida por el uso de un guión (*script*) o *plantilla* (hoja de trabajo ó *template* en inglés). En estos casos (ver casos 6 y 7 en la tabla), el profesor es capaz de orquestar el trabajo en el aula con las computadoras, y principalmente dirige el trabajo de los estudiantes por medio de guías o *plantillas*.
- (d) En esta cuarta categoría de ejecuciones de los maestros también se aprecia, como en la categoría anterior, una orquestación (Trouche, 2004) del trabajo de los estudiantes con la computadora pero se añade el uso de otras herramientas tecnológicas (en este caso el lápiz y el papel, ó la tiza y el pizarrón) y se busca la conciliación de resultados (i.e. hay *negociación de significados*). Esto es, en la orquestación que realiza el profesor se usan tanto herramientas digitales como otros artefactos tecnológicos para comparar las ejecuciones de los estudiantes y sus resultados (ver caso 8).
- (e) En esta categoría de ejecuciones de enseñanza del profesor se puede observar un cambio drástico del centramiento de la actividad en el aula, pues pasa de centrarse en las ejecuciones del profesor a centrarse completamente en las ejecuciones de los estudiantes (en particular, en el video ya no se ve la injerencia del profesor). Sintéticamente, se puede apreciar que la enseñanza gira en torno de un trabajo cooperativo centrado en la apropiación de la tecnología por parte de los estudiantes.

Desde nuestro punto de vista, esto muestra que el profesor ha sido capaz de orquestar un trabajo computacional autónomo con los estudiantes, buscando la apropiación de los estudiantes de la tecnología y basándose en una organización del trabajo en el aula por proyectos y en la cooperación en pequeños grupos (ver caso 9).

Finalmente, este apartado termina presentando algunas de las imágenes de las ejecuciones de los profesores, tomadas de los videos, las cuales sintetizan de manera gráfica las últimas cuatro categorías que se acaban de mencionar.

Incorporación de tecnologías digitales en el aula: la práctica de la enseñanza de las Matemáticas en el tramo escolar de 15 a 18 años de edad



Figura.1. Al *patrón clásico* de enseñanza se agrega el planteamiento de preguntas por parte del profesor a toda la clase (ver caso 3).



Figura.2. El maestro dirige una instrumentalización de la actividad conducida por el uso de una plantilla o guía de trabajo (ver casos 6 y 7).

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

Las diferentes formas en que los profesores desplegaron su enseñanza en el aula, haciendo uso de herramientas digitales y/o de tecnología matemática para abordar los temas de su elección, permiten una apreciación cualitativa del desarrollo de su conocimiento artesanal (*craft knowledge*) en cuanto a la incorporación de las innovaciones tecnológicas en la escuela (Ruthven, 2007 y 2002).

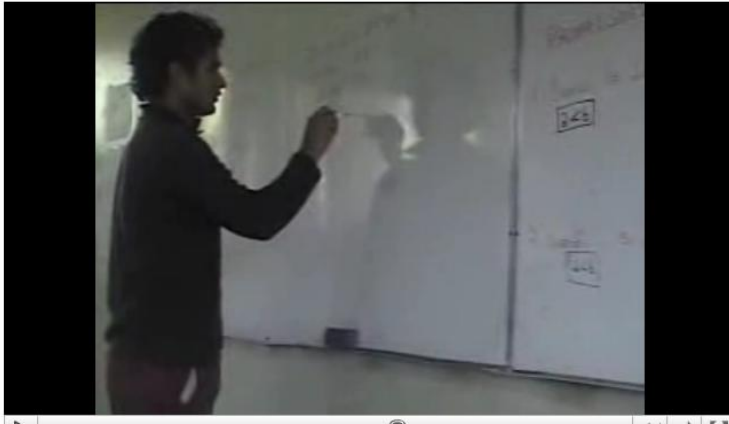


Figura.3. El profesor orchestra la actividad usando distintas herramientas tecnológicas y estableciendo comparaciones entre las ventajas y desventajas de la utilización de los diferentes artefactos (ver caso 8).

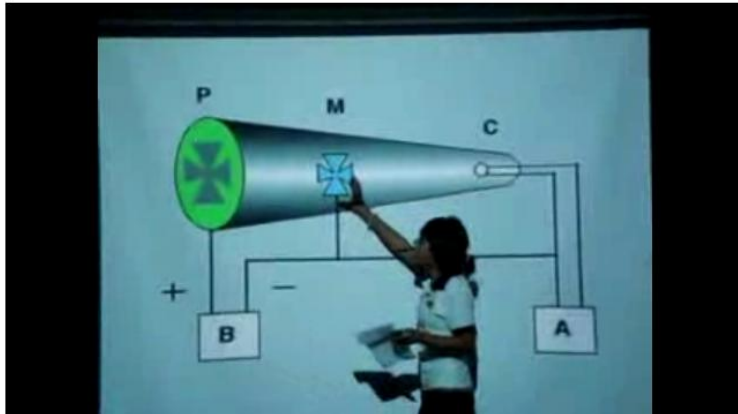


Figura.4. El profesor organiza trabajo cooperativo en su clase centrado en la apropiación de los estudiantes de la tecnología y en el aprendizaje por proyectos (ver caso 9).

Después de la realización de este estudio exploratorio es factible predecir el progreso de los profesores en relación con el aprendizaje del uso de tecnología para enseñar matemáticas.

De acuerdo con el Modelo PURIA (Zbieck and Hollebrands, 2008) extendido, los profesores que participaron en el OLC podrían alcanzar el ultimo modo de incorporación de la tecnología matemática, el modo Evaluar (Assess), después de haberse involucrado en la evaluación de las ejecuciones de sus estudiantes con la tecnología, ó notando cómo se despliega el pensamiento matemático de sus estudiantes mediado por la orquestación que previamente planea. Pero no es evidente el logro de la última fase del Modelo PURIA. Desde el punto de vista del investigador que esto suscribe, es posible pensar en el diseño de un nuevo (o adicional) ambiente de aprendizaje para el maestro en el que se promueva su desarrollo hacia la fase de evaluación del modelo PURIA, y en donde se usen herramientas metodológicas, digitales y pedagógicas recientes que permitan que los profesores se involucren en

Incorporación de tecnologías digitales en el aula: la práctica de la enseñanza de las Matemáticas en el tramo escolar de 15 a 18 años de edad

actividades centradas en el desarrollo del tipo de competencias que reclama la fase en cuestión (ver, por ejemplo, Jacobs, Lamb & Philipp, 2010; Herbst, 2010).

Referencias

- Assude, T., Grugeon, B., Laborde, C. & Soury-Laverge, S. (2006). Study of a teacher professional problem: How to take into account the instrumental dimension when using Cabri-geometry? In Hoyles, C., J.B., Lagrange, Le Hung Son and Sinclair, N. (eds.), *Proceedings of ICMI17, Part 2*. Hanoi: Hanoi University of Technology.
- Beaudin, M. & Bowers, D. (1997). Logistics for facilitating CAS instruction. In J. Berry et al. (eds), *The state of computer algebra in Mathematics Education*. UK: Chartwell Bratt. (Encontrado en <http://website.lineone.net/~davidbowers/Logistic/Logistic.htm> el 05/05/2011).
- Cobo, C. (2009). Aprendizaje colaborativo. Nuevos modelos para usos educativos. En M. L. Garay (ed.), *Nuevas Tecnologías de la información: horizontes interdisciplinarios y perspectivas de investigación*. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Herbst, P. (2010). Practical rationality and the justification for actions in teaching. En P. Brosnan, D. Erchick and L. Flevaris (eds.), *Proceedings of the 32th PMENA*, p. 46-54. Columbus, Ohio: Ohio State University.
- Hoyos, V. (2009). Recursos Tecnológicos en la Escuela y la Enseñanza de las Matemáticas. En M. Garay (coord.), *Tecnologías de Información y Comunicación. Horizontes Interdisciplinarios y Temas de Investigación*. México: Universidad Pedagógica Nacional
- Hoyos, V. (2009). Recursos Tecnológicos en la Escuela y la Enseñanza de las Matemáticas. En M. Garay (coord.), *Tecnologías de Información y Comunicación. Horizontes Interdisciplinarios y Temas de Investigación*. México: Universidad Pedagógica Nacional
- Jacobs, Lamb & Philipp, (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. **41**, No. 2, p. 169-202.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan
- Kendall, M. & Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **6**: 143-165. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Ruthven, K. (2007). Teachers, Technologies and the Structures of Schooling. En *Proceedings of CERME 5*. Larnaca: University of Cyprus. (Encontrado en <http://ermeweb.free.fr/CERME5b> el 02/15/09).

- Ruthven, K. (2002). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. En L.D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, p. 581-630. New Jersey: LEA.
- Ruthven, K. & Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 49 (1), 47-88.
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.
- Verillon, P. and Rabardel, P. (1995). Cognition and Artefacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*. Vol. 10, No. 1, pp. 77-101.
- Zbiek, R. & Hollebrands, K. (2008). A research-informed view of the process of incorporating mathematics technology into classroom practice by in-service and prospective teachers. En *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Vol. 1. Research Syntheses*, pp. 287-344. USA: Information Age Publishing.

LOS VIDEOJUEGOS COMO UNA ALTERNATIVA PARA EL ESTUDIO Y DESARROLLO DE LA ORIENTACIÓN ESPACIAL

Macías Gutiérrez, G., Quintero Zazueta, R.

gmacias@cinvestav.mx; quintero@cinvestav.mx

DME, CINVESTAV-IPN

Resumen. El objetivo principal de la investigación es explorar el uso de ambientes virtuales de videojuegos comerciales, para el estudio y desarrollo de la orientación espacial. Después de que los niños navegaron en los ambientes de los videojuegos realizaron las actividades escolares más frecuentes de orientación espacial: elaboración de representaciones y descripciones de trayectos. Las representaciones elaboradas por los estudiantes fueron clasificadas en dos grupos: tipo historieta, enfocadas en el proceso de navegación y espaciales, que proyectaron la ubicación espacial de puntos de referencia y sus relaciones. En las descripciones, los niños emplean como puntos de referencia personajes y elementos del paisaje natural y artificial, combinaron sistemas informales y convencionales de referencia y sólo algunos proyectaron su esquema corporal en el personaje del videojuego.

INTRODUCCIÓN

La orientación espacial cumple una función epistemológica, porque para el individuo constituye un medio para la reflexión y el conocimiento del mundo que lo rodea (Yakimanskaya, 1991). También se justifica el interés en la orientación espacial porque es fundamental para variadas actividades profesionales, por ejemplo para los pilotos de avión, topógrafos, ingenieros, arquitectos, etc. Pero hay otras profesiones en las que esta relación no es tan evidente, como con los cirujanos que requieren orientarse dentro del cuerpo del paciente cuando lo intervienen, para localizar el órgano o la parte enferma que van a tratar.

De igual forma, el manejo de maquinaria requiere de la orientación espacial, pues el operador observa diagramas y esquemas que le permiten imaginar los movimientos de las máquinas, para determinar la distribución o posición relativa de las partes y manejarlas a través de paneles de control. Asimismo, algunos científicos requieren orientarse no sólo en el espacio físico, sino también en el espacio abstracto, cuando trabajan con modelos gráficos y expresiones matemáticas (fórmulas, ecuaciones, notación simbólica), es decir sistemas de representación basados en abstracciones teóricas (Yakimanskaya, 1991). Gonzato y Godino (2010) han señalado y justificado la aplicación de habilidades de orientación espacial en otras profesiones, oficios y en la vida cotidiana.

En la escuela elemental en México, también es reconocida la relevancia de la orientación espacial; lo que puede ser notado en el Plan y Programas de Estudio de

Educación Primaria (1993), que indica que “a través de la formalización paulatina de las relaciones que el niño percibe y de su representación en el plano, se pretende que estructure y enriquezca su manejo e interpretación del espacio y de las formas” (p. 53). Sin embargo, a pesar de que se reconoce su importancia las actividades sobre orientación espacial que se incluyen en los libros de texto son pocas y repetitivas.

En Matemática Educativa también ha despertado interés la orientación espacial, la revisión de literatura en esta área revela una gran cantidad de investigaciones en las que se estudia de forma tácita, como en los estudios de capacidad espacial (Arrieta, 2003, 2006), visualización espacial (Hershkowitz, 1989, Gutiérrez, 1991, 1996), habilidades espaciales (Bishop, 1980, 1983), sentido espacial (Del Grande, 1990), etc. Pero las investigaciones en las que la orientación espacial se aborda directa y explícitamente son escasas y en algunas de ellas esta noción es tratada de forma limitada, como la habilidad para imaginar un objeto desde perspectivas diferentes (Arrieta, 2003). Las tareas que se han empleado en estos estudios involucran la organización, el reconocimiento y hacer sentido de una sola representación, desde un ángulo diferente (Tartre, 1990).

Sin embargo, la orientación espacial puede ser estudiada como se presenta en la vida diaria cuando el individuo se desplaza por su medio ambiente. Esta aproximación ha sido adoptada en la psicología y en Matemática Educativa por Gálvez (1985), quien desarrolló situaciones didácticas para que los niños se orientaran en el ambiente urbano, empleando como recursos mapas que ellos mismos elaboraron y es también la forma en que es abordada en la escuela primaria (Plan y Programas de Estudio de Educación Primaria, 1993). Gonzato y Godino (2010) consideran estos acercamientos al estudio de la orientación espacial, como dos tipos de tareas: tareas que involucran la habilidad de orientarse en el espacio y tareas de orientación del propio cuerpo y de los objetos, como la presentada por Tartre (1990) y Arrieta (2003).

En la presente investigación la orientación es definida como el proceso que efectúa el individuo para desplazarse a través de su entorno, esta concepción se fundamenta en estudios psicológicos (Bowman, Davis, Hodges & Badre, 1999; Darken, Allard, & Achille, 1998) y se considera que la orientación espacial está integrada por la ubicación y la navegación. La ubicación espacial se refiere a la identificación del sitio en que se encuentra el individuo y del cual parte hacia el lugar que tiene como meta y la navegación es el proceso de moverse a través del ambiente.

Cabe aclarar que la ubicación espacial no se realiza sólo al inicio del traslado, porque la persona tiene que estar monitoreando constantemente el lugar en que se encuentra durante la navegación, para constatar el progreso hacia su objetivo. También que en la determinación de la ubicación espacial el individuo utiliza tres elementos diferentes: los puntos de referencia, los sistemas o marcos de referencia, y la proyección del esquema corporal. Los puntos de referencia son los elementos que sobresalen en el ambiente, generalmente por sus características físicas, y el individuo los usa para ubicarse y para determinar su recorrido. En tanto que la función de los marcos o sistemas de referencia es precisar la distribución o la posición relativa de los objetos.

Respecto a la proyección del esquema corporal se puede afirmar que el sistema de orientación natural en el ser humano se basa en su imagen corporal, que emplea para su orientación en relación a objetos, de manera que las relaciones espaciales son identificadas en relación a su propia posición (más cerca-más lejos, a la izquierda-a la derecha, enfrente -detrás, encima-debajo).

Los videojuegos como una alternativa para el estudio y desarrollo de la orientación espacial

El segundo aspecto de la orientación espacial, es decir la navegación, está integrada por el proceso cognitivo de tomar decisiones (wayfinding) y el viaje, marcha o locomoción que consiste en el movimiento de la localización actual a la nueva localización.

Las principales actividades sobre orientación que se llevan a cabo en la escuela primaria son la descripción de la ubicación de objetos, la elaboración de planos y mapas y la descripción de desplazamientos en mapas, por lo que se propone el uso de los escenarios de videojuegos comerciales, vinculados con este tipo de actividades.

La propuesta del uso de estos escenarios responde a que algunos videojuegos se desarrollan en entornos complejos que simulan ambientes físicos reales y sumamente atractivos. Además son un medio de entretenimiento masivo y forman parte de una nueva cultura que se caracteriza por un desarrollo constante y acelerado, en la cual los niños y jóvenes viven inmersos.

METODOLOGÍA

La investigación que se reporta es de carácter cualitativo y sus principales objetivos son:

- Explorar el uso de ambientes virtuales de videojuegos comerciales para el estudio y desarrollo de la orientación espacial.
- Analizar las representaciones y las descripciones elaboradas por niños de quinto y sexto grado de Educación Primaria de videojuegos comerciales.

Participantes:

9 estudiantes cuyas edades varían entre 10 y 12 años de edad, de quinto y sexto grados de Educación Primaria.

Escenarios:

Los videojuegos seleccionados para llevar a cabo la investigación fueron Fable y Sacred, que son representaciones realistas de ambientes rurales tridimensionales.

Procedimiento

La investigación fue llevada a cabo en cuatro fases, las cuales se describen a continuación:

Fase de familiarización, cuya finalidad fue que los niños exploraran el ambiente virtual del videojuego y conocieran los elementos necesarios para su desplazamiento en el entorno virtual.

Fase de Navegación, en la que los alumnos se desplazaron para cumplir las misiones (Sacred) u obtener las monedas necesarias para comprar el regalo (Fable).

Fase de Representación, tenía la finalidad de que los niños elaboraran un dibujo del ambiente virtual, para lo que se les presentó la siguiente situación: “Se va a integrar un

nuevo miembro a tu equipo, pero tienes que hacer un dibujo con lo necesario para que logre cumplir las misiones en el menor tiempo posible”.

Fase de Comunicación, con el propósito de que los niños describieran trayectos, se les dio la siguiente instrucción: “Van a describir el camino que tiene que seguir su nuevo compañero, para que pueda cumplir la misión, proporcionando la mayor cantidad de detalles para que no se pierda”.

Las fases de Exploración, Navegación y Comunicación fueron realizadas en equipos de tres integrantes y únicamente en la Fase de Representación los niños trabajaron individualmente.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los productos de las actividades que se llevaron a cabo como parte de esta investigación son: las representaciones espaciales de los ambientes virtuales, que fueron elaboradas de manera individual y las descripciones de las rutas que hicieron en equipo los participantes del estudio.

En cuanto a las representaciones de los entornos virtuales, se esperaba que los niños hicieran uso de los conocimientos matemáticos, comprendidos en el eje de Ubicación Espacial, que han adquirido en la escuela, en específico en la elaboración de mapas podrían aplicar la proyección ortogonal del plano desde un punto de vista superior, la observación de objetos desde diferentes perspectivas, la representación en el plano de desplazamientos, e incluso el uso de la proporción y escala en la construcción de planos y mapas. Sin embargo, no todos los estudiantes aplicaron estos contenidos.

Las representaciones se clasificaron en dos grandes grupos: representaciones que muestran relaciones espaciales entre los lugares relacionados con la aparición de personajes en Fable o con el cumplimiento de las misiones en Sacred y representaciones cuyo interés central es la historia del videojuego y que se denominaron tipo historieta.

Representaciones de las relaciones espaciales

Los niños que elaboraron representaciones que reproducen las relaciones espaciales entre los lugares en los que se encuentran los personajes, en Fable, o a los que se tiene que acudir para cumplir una misión, en Sacred, pueden considerarse que logran el tercer nivel de representaciones según la clasificación de Gálvez (1985). Estas representaciones a su vez se dividieron en dos grupos, los que elaboraron dibujos que pretenden ser realistas y los que trazaron mapas.

Las representaciones de los entornos virtuales catalogados como dibujos realistas, en general presentan vistas laterales superiores, con gran cantidad de detalles, con dibujos frontales de objetos y personajes. Un ejemplo de este tipo de representación es la de Ramón (Figura 1), quien dibujó el entorno de Sacred. Representa puntos de referencia que permiten identificar los diferentes lugares asociados a las misiones que cumple la heroína en el videojuego: el templo, el río, el bosque, etc.

Además Ramón indica mediante una línea el recorrido que hicieron para llegar a los lugares que tenía como meta. De igual forma representa a los personajes que solicitan ayuda a la heroína con dibujos sencillos, formados por líneas y son identificados porque sobre la cabeza tienen signos de interrogación como en el videojuego. Completa su

Los videojuegos como una alternativa para el estudio y desarrollo de la orientación espacial

dibujo con otros elementos: puentes, animales, los soldados que vigilan el paso por el puente, árboles, rocas, aves, etc.

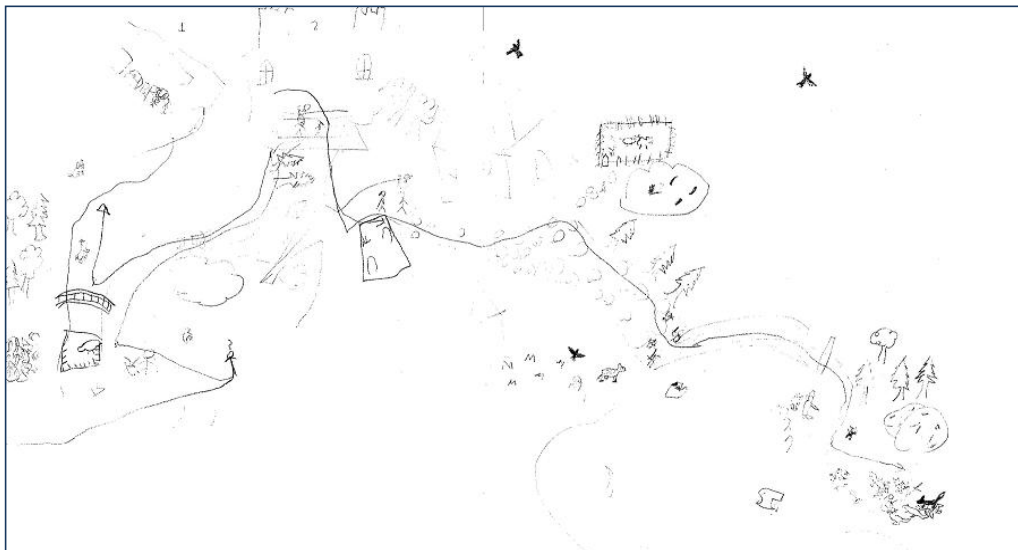


Figura 1: Representación de Ramón del entorno de Sacred

Las representaciones de Alexis (Figura 2) y Enrique (Figura 3) pueden ser consideradas como mapas, pues logran la proyección ortogonal del plano desde un punto de vista superior, además de que los personajes no son dibujos completos sino puntos colocados en el lugar en el que aparecen por primera vez en el videojuego y asociados a un letrero con el nombre del personaje que representan. En el caso de Alexis, únicamente dibuja una casa de frente con el letrero “casa de papá”, lugar que corresponde al punto de partida del videojuego, lo cual puede explicarse por la relevancia de este lugar para el juego, pues el personaje tiene que regresar a él constantemente después de hacer acciones buenas.

Respecto al mapa de Enrique es posible notar que es muy completo, pues incluso dibuja elementos que en el mapa del videojuego no aparecen, como el mar, un árbol, casas y un espantapájaros, lo que muestra que los niños incluyen en sus representaciones los elementos que por diversos motivos son relevantes para ellos, ya sea por su papel en el videojuego o como puntos de referencia.

Es conveniente hacer notar que tanto las representaciones tipo mapa como las consideradas como realistas, tienen la característica de que son representaciones estáticas, centradas en la ubicación de puntos de referencia y la representación de las relaciones espaciales entre ellos.

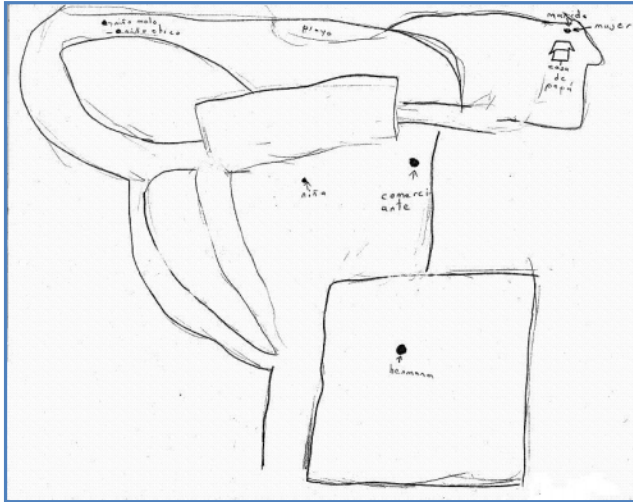


Figura 2: Representación de Fable de Alexis

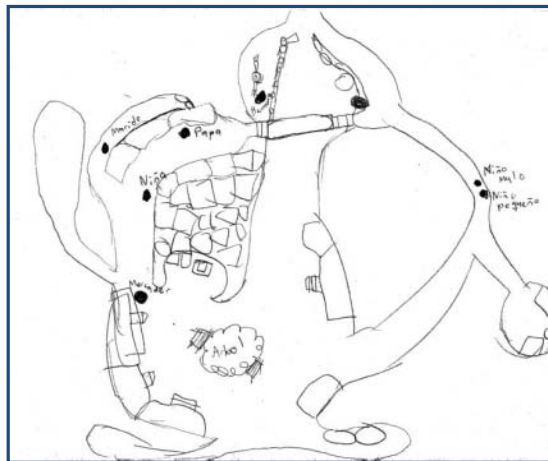


Figura 3: Representación de Enrique de Fable

Representaciones tipo historieta

Las representaciones en forma de historieta se caracterizaron porque reproducen el desarrollo del videojuego en el tiempo y están integradas por una secuencia de dibujos que relatan la historia del videojuego y reflejan el orden que siguieron los niños cuando lo jugaron. Algunas de ellas fueron elaboradas en forma lineal, de izquierda a derecha (Figuras 4) y en otras los dibujos fueron ubicados alrededor de la hoja (Figura 5).

Los niños que elaboraron representaciones tipo historieta emplearon principalmente el dibujo para hacer explícita la historia del videojuego, pero niños como Alitzel (Figura

Los videojuegos como una alternativa para el estudio y desarrollo de la orientación espacial

5) incluyeron también mensajes. Esta niña escribe un mensaje en cada uno de los cuadros que integran su historieta, en los que señala el papel que desempeña cada personaje dentro del videojuego, en el orden que ella siguió.

Sin embargo, lo que caracteriza principalmente a las representaciones tipo historieta es en primer lugar que introducen el tiempo y al representar la historia de las misiones que llevan a cabo en el videojuego, reflejan el proceso de navegación, ya que presentan la secuencia de sus desplazamientos a través del ambiente virtual. De manera que las representaciones tipo historieta nos muestran el proceso de navegación como lo experimenta el niño mientras juega.



Figura 4: Representación de Sacred elaborada por Luis

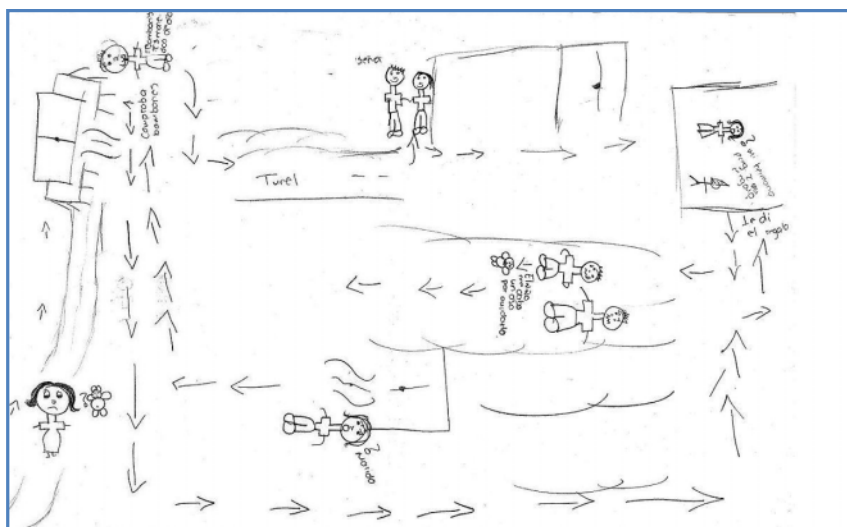


Figura 5: Representación de Fable elaborada por Alitzel

Navegación y descripciones

Respecto a la navegación se observan algunas diferencias, pues aún cuando se les indica que deben realizar los desplazamientos en el menor tiempo posible, algunos niños muestran preferencia por explorar nuevas rutas. En otros casos siempre siguen el mismo camino aún cuando impliquen rodeos innecesarios. En particular una niña fue cuestionada por realizar un rodeo para llegar a un puente, el diálogo se presenta a continuación.

I: ¿No crees que si cruzas el bosque por el camino de piedras lograrás llegar más rápido al puente?

M: No, se tiene que caminar por acá, pasar por donde están entrenando y dar toda la vuelta para poder llegar.

En el diálogo se nota que incluso la niña reconoce que “da toda la vuelta”, pero a pesar de ello, considera que es el camino correcto.

Se observó también que la descripción de los recorridos requirió que los niños emplearan puntos de referencia, que no habían indicado en las representaciones. Además todos los niños utilizaron el mismo tipo de elementos: personajes, como guardias y una niña, elementos del paisaje tanto natural como artificial como, río, plantas, casas, puentes y espantapájaros, como puede verse en la descripción y en la transcripción que siguen.

(P) Segunda misión
Sales del castillo caminando ^{caminando a la izquierda} todo derecho hacia un castillo con plantas, llegas al río ^{sigues todo derecho} y pasas por el puente y siges el camino gris y en la primer casa das buelt(1) calle das vuelta hacia la izquierda hasta rodear el río por la derecha y chusas el puente y te metes al castillo

“Vete primero a la... todo derecho y ves un montón de casas, como tres casas, luego vete a la derecha y vas a encontrar así como un pueblito...

Luego...vete todo hacia el puente y vas a encontrar guardias.

Luego voltea a la derecha y ahí ves como... ahí ves un espantapájaros y ahí ves una niña, ahí como jugando, es tu hermana.”

Los videojuegos como una alternativa para el estudio y desarrollo de la orientación espacial

En relación a los sistemas de referencia, que los estudiantes emplearon en las descripciones de los trayectos que hicieron, es posible notar en la transcripción, que alternan un sistema informal, como cuando un equipo dice “te sigues derecho” y convencional cuando dice “a la derecha” o “a la izquierda”, y en la descripción utilizan los puntos cardinales: “oeste”, “sur” y “este”.

1 Misión.- sales del convento te sigues derecho hasta el jardín caminas hacia el frente detrás de una roca está la planta medicinal regresas y se la das a la novicia.
2 Misión.- sales del convento y te das vuelta a la derecha y te sigues derecho.
3 Misión.- pasas un puente y te sigues derecho hasta llegar con un señor para que te dé la misión y luego te sigues derecho hasta llegar a un puente grande y te das la vuelta a la izquierda derecho y llegas con los lobos

Salimos de la cueva caminamos al oeste y caminamos al sur pasamos un puente caminamos al este matamos al lobo pasamos otro

Cuando el primer equipo emplea el sistema de referencias convencional lo hace en relación con su esquema corporal, es posible que se deba a que no logra proyectarlo sobre el personaje del juego. En términos de Lurçat (1979) se diría que la forma de proyección del esquema corporal que emplea es por traslación, porque “la izquierda corresponde a la proyección de la siniestra del sujeto y la derecha a la proyección de la diestra del mismo”.

Sin embargo, otros niños si logran proyectar su esquema corporal en el personaje del videojuego e identifican la izquierda-derecha respecto a él. Un ejemplo se observa en el siguiente diálogo que se dio en la Fase de Comunicación.

JC: ¿Esa es la izquierda o la derecha?

H: La izquierda de la muñeca, hasta llegar al pozo, caminas todo derecho hasta llegar al río, rodeas el río hasta llegar a los bandidos.

CONCLUSIONES

Este trabajo permite comprobar que algunos videojuegos son escenarios apropiados cuando se asocian a actividades que dirigen la atención de los niños hacia las propiedades y relaciones espaciales para el desarrollo de la orientación espacial. Esto se debe principalmente a que dichos escenarios presentan ventajas dinámicas sobre las representaciones estáticas como los mapas, para llevar a cabo tareas como descripciones de trayectos y elaboración de representaciones.

En las representaciones de los alumnos de los espacios virtuales de los videojuegos, se encontró que algunos reproducen las relaciones espaciales entre los lugares y objetos

relevantes en los videojuegos, es decir que se enfocaron más en la ubicación espacial de puntos de referencia de forma estática. Algunas de estas representaciones fueron dibujos realistas y otros mapas.

Otras representaciones fueron catalogadas como tipo historieta, en las que los estudiantes muestran una secuencia los lugares a los que fueron en su recorrido, representando el proceso de navegación que llevaron a cabo. Este tipo de representaciones resultó un recurso natural para hacer evidente el proceso de navegación en el ambiente del videojuego, lo cual rara vez aparece en las actividades de orientación espacial que se hacen con medios tradicionales.

Por último, en las descripciones de trayectos los niños emplearon tanto términos del sistema de referencia informal como convencional y como puntos de referencia elementos del paisaje, tanto natural como artificial. Respecto a la proyección del esquema corporal, sólo algunos logran proyectarlo sobre el personaje del videojuego.

Referencias

- Arrieta, M. (2003). Capacidad Espacial y Educación Matemática: Tres problemas para el futuro de la investigación, *Educación Matemática*, 15(3), 57-76.
- Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la Educación Matemática: estructura y medida, *Educación Matemática*, 18 (1), 99-132.
- Bishop, A. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.
- Bishop, A. J. (1983). Spatial abilities and mathematical thinking, en Zweng y otros (ed), *Proceedings of the 4th ICME* (Birkhauser; Boston), 176-178.
- Bowman, D., Davis, E., Hodges, L. & Badre, A. (1999). Maintaining spatial orientation during travel in an immersive virtual environment. *Presence*, 8 (6), pp. 618-631.
- Calvo, S. A. (1995). Videojuegos: del juego al medio didáctico. *EDUTEC 95* [En red]. Disponible en: <http://www.uib.es/depart/gte/calvo.html>
- Darken, R., Allard, T. & Achille, L. (1998). Spatial orientation and wayfinding in large-scale virtual space: An introduction. *Presence* 8 (6).
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37.6, 14-20.
- Gálvez, G. (1985). El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria. *Tesis doctoral*. DIE, CINVESTAV, México
- Gonzato, M. & Godino, J. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 45-58
- Gutiérrez, A. (1991), Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias del 3er. Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, 44-59.

Los videojuegos como una alternativa para el estudio y desarrollo de la orientación espacial

- Gutiérrez, A. (1996), Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. *En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the 20th PME Conference 1*, 3-19, Valencia.
- Hershkowitz, R. (1989) Visualization in geometry- two sides of the coin, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 63-75
- Lurçat, L. (1979) *El niño y el espacio. La función del espacio*. Fondo de Cultura Económica México.
- SEP (1993) *Plan y programas de estudio 1993*. Primaria. México
- Tartre, L. (1990), Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (3), 216-229.
- Yakimanskaya, I. S. (1991). *The development of Spatial Thinking in Schoolchildren*. Soviet Studies in Mathematics Education 3. National Council of Teachers of Mathematics Reston, Virginia.

CÓMO ESTUDIANTES PARA MAESTRO INTERPRETAN SOLUCIONES DE ALUMNOS DE PRIMARIA A PROBLEMAS DE DIVISIÓN CON RESTO

HOW PRE-SERVICE TEACHERS INTERPRET PRIMARY SCHOOL STUDENTS' ANSWERS TO QUOTITIVE DIVISION WORD PROBLEMS

Márquez, M., Callejo, M. L., Fernández, C.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Universidad de Alicante

Resumen. *El objetivo de este estudio es caracterizar cómo estudiantes para maestro (EPM) analizan e interpretan soluciones dadas por alumnos de 6º curso de Primaria a problemas de división-medida en los que es preciso interpretar el resto de la división. Los resultados muestran que algunos EPM que no resolvieron correctamente los problemas, supieron interpretar las soluciones dadas por los estudiantes de Primaria y que, en general, los EPM valoraron más las soluciones basadas en la división que las soluciones basadas en otros métodos alternativos.*

Palabras Claves: Problemas de división medida, conocimiento del profesor

Abstract. *The focus of this study is to characterize how pre-service teachers analyze and interpret six grade primary school students' answers to quotitive division word problems. Results show that some students who did not solve problems correctly were able to interpret primary school students' answers correctly. Related to the interpretation of primary school students' answers, pre-service teachers grade better the division than other alternative methods.*

Key Words: Quotitive whole number division problems, teachers' knowledge

INTRODUCCIÓN

Un gran número de las investigaciones sobre problemas de estructura multiplicativa (Castro, 2008; Vergnaud, 2004) han prestado especial atención a problemas de división-medida con magnitudes discretas (en estos problemas hay que hacer agrupamientos de los elementos de un conjunto dado en subconjuntos con igual número de elementos) en los que es preciso interpretar el significado del resto de una división entera en el contexto del problema. Algunas investigaciones han mostrado que muchos estudiantes responden a este tipo de problemas haciendo cálculos sin atender a la relación entre el contexto del problema y el significado de las operaciones (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983).

Por otro lado, aunque el procedimiento más empleado en los problemas de división-medida suele ser la división y la respuesta más frecuente el cociente de esta división,

con o sin decimales, también se han identificado otros procedimientos alternativos. Silver, Shapiro y Deutsch (1993) obtuvieron en sus investigaciones que los estudiantes que usaban una estrategia alternativa como sumas o restas repetidas o una multiplicación tuvieron un nivel de éxito mayor que los que utilizaron la división, pues aunque estos métodos son de difícil aplicación cuando los datos del problema son números grandes, son más intuitivos para relacionar los cálculos con la situación descrita en el problema.

En relación a los problemas de estructura multiplicativa los resultados de las investigaciones constatan algunas debilidades en el conocimiento profesional de los profesores. Ball (1990) mostró que el conocimiento sobre la división de los profesores en formación de Primaria y Secundaria estaba más basado en la memorización de algoritmos que en la comprensión conceptual. Campbell (1996) mostró que los estudiantes para maestro (EPM) tenían dificultad para resolver tareas que exigían una adecuada comprensión de los conceptos básicos relacionados con el uso del “teorema de la división”, es decir, la igualdad que relaciona los términos de la división ($\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto}$), pues no fueron capaces de aplicar conocimientos relativos a la relación entre los términos de la división a nuevas situaciones. Kaasila, Pehkonen y Hellinen (2010) mostraron que en algunas situaciones los EPM no fueron capaces de calcular el resto de una división o de relacionar diferentes operaciones. Verschaffel, De Corte y Borghart (1997) mostraron la tendencia de los EPM a excluir conocimiento del mundo real para resolver problemas en los que era necesario interpretar el resto de la división, así como en interpretar las soluciones de los alumnos a estos problemas.

La mayoría de estos estudios se centran en cómo los EPM resuelven problemas relacionados con la división y no en cómo analizan, interpretan y valoran las soluciones dadas por alumnos de Primaria a este tipo de problemas, siendo ésta última una tarea profesional del futuro maestro (Llinares y Krainer, 2006). Nuestro estudio tiene como objetivo caracterizar cómo estudiantes para maestro (EPM) analizan e interpretan soluciones dadas por alumnos de 6º curso de Primaria (11-12 años) a problemas de división-medida en los que es preciso interpretar el resto de la división, en las que emplean el algoritmo de la división y otros métodos alternativos.

MÉTODO

Los participantes del estudio fueron 84 EPM que cursaban el primer año de la titulación de “Maestro de Primaria” y que no habían recibido ninguna instrucción específica relacionada con los problemas de estructura multiplicativa.

Estos EPM respondieron a dos cuestionarios. El Cuestionario 1 estaba formado por 4 problemas de división-medida de diferentes características que fueron seleccionados y modificados de otras investigaciones (Callejo y Vila, 2009; Verschaffel et al., 1997) y que pueden ser resueltos mediante una división o por otros métodos alternativos. De ellos *Farolas* y *Albergue* presentan características comunes pues las magnitudes son discretas y hay que añadir una unidad al cociente de la división para responder a la pregunta. En los otros dos problemas las magnitudes son continuas; en *Pasteles* es preciso interpretar el significado de la fracción que resulta de dividir un entero por una fracción para responder cuánto sobra; en *Cuerdas* hay que hacer consideraciones de tipo realista y añadir una unidad al cociente. En esta comunicación presentamos los resultados obtenidos para los problemas *Farolas* y *Albergue* (Figura 1).

Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto

Farolas. Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?
Albergue. 103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Figura 1. Problemas *Farolas* y *Albergue*

El Cuestionario 2 estaba formado por 4 soluciones de estudiantes de Primaria a cada uno de los problemas. Para diseñarlo, el Cuestionario 1 fue resuelto por estudiantes de 6° curso de Primaria. La Figura 2 muestra las soluciones seleccionadas del problema *Albergue*. Las soluciones A y D se basan en el procedimiento de la división presentando la solución A un error técnico. Las soluciones B y C se basan en el método de sumas o restas repetidas (métodos alternativos) conteniendo la solución C un error técnico.

Solución A $\begin{array}{r} 103 \overline{) 20} \\ 00 \ 5 \end{array}$ $5 \times 15 \text{ km} = 75$ Ocupan 5 mesas	Solución B $\begin{array}{r} 20 \\ + 20 \\ \hline 40 \\ + 20 \\ \hline 60 \\ + 20 \\ \hline 80 \\ + 20 \\ \hline 100 \\ + 3 \\ \hline 103 \end{array}$ Ocupan 6 mesas
Solución C $\begin{array}{r} 103 \rightarrow \text{"Estudiantes"} \\ - 20 \\ \hline 083 \\ - 20 \\ \hline 63 \\ - 20 \\ \hline 43 \\ - 20 \\ \hline 03 \end{array}$ Necesitan 5 mesas	Solución D $\begin{array}{r} 103 \overline{) 20} \\ 03 \ 5 \end{array}$ $5 + 1 = 6$ Son 6 mesas

Figura 2. Soluciones que fueron seleccionadas en el problema *Albergue*

En el problema *Farolas*, dos de las soluciones seleccionadas utilizaban una división (una de ellas con un error debido a la no interpretación del resto) y las otras dos se basaban en estrategias alternativas (una de ellas con un error técnico).

Los EPM respondieron el Cuestionario 1 resolviendo los 4 problemas y 15 días más tarde respondieron al Cuestionario 2 donde debían puntuar las soluciones de los alumnos de Primaria con un 0, 0.5 o 1 justificándolas. Los EPM dispusieron de 50 minutos para responder cada uno de los cuestionarios, y se les explicó el objetivo del estudio y la forma de responder.

Las respuestas de los EPM al Cuestionario 1 fueron analizadas y clasificadas como correctas, regulares o incorrectas en cada uno de los problemas. Se clasificaron como correctas cuando los EPM realizaban una división e interpretaban el resto o cuando utilizaban otros métodos alternativos correctos, como regulares cuando los EPM realizaban una división e indicaban “lo que sobra” pero sin darle una interpretación adecuada y como incorrectas cuando no tenían en cuenta el resto de la división o la respuesta no tenía sentido. La Figura 3 muestra un ejemplo de cada una de las respuestas en el problema *Albergue*.

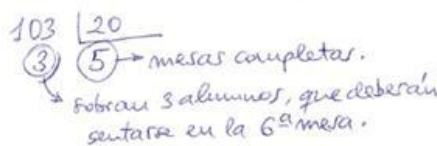
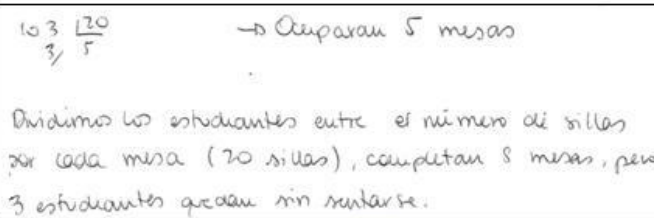
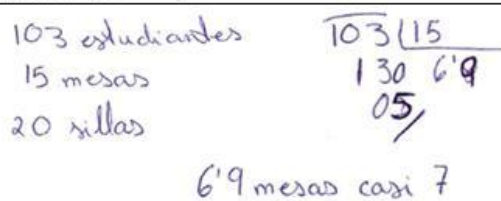
	Ejemplo
Respuesta correcta	
Respuesta regular	
Respuesta incorrecta	

Figura 3. Ejemplos de las respuestas de los EPM al problema *Albergue*

Una vez analizadas y clasificadas las repuestas al Cuestionario 1 y revisadas las puntuaciones y justificaciones dadas a las soluciones de los estudiantes de Primaria en el Cuestionario 2, se estudió el comportamiento global del grupo centrando la atención en la comparación, en cada problema, de las dos soluciones correctas y las dos soluciones que emplean la división. Posteriormente se agruparon los EPM que habían tenido el mismo comportamiento en la puntuación de las soluciones para cada problema. Esta agrupación llevó a identificar perfiles de comportamiento de los EPM, en cada problema, que fueron corroborados mediante la realización de un análisis Clúster.

RESULTADOS

Presentamos los resultados atendiendo a: (a) el comportamiento de todo el grupo en relación a las puntuaciones dadas a las soluciones con división y a las soluciones correctas y (b) la identificación de distintos perfiles.

a) Estudio del grupo

La Tabla 1 muestra el número de EPM que resolvieron de manera correcta, regular o incorrecta los problemas en el Cuestionario 1 y las puntuaciones dadas por éstos a las soluciones de los alumnos de Primaria en el Cuestionario 2.

Problema	Soluciones EPM	Puntuaciones EPM											
		Solución A			Solución B			Solución C			Solución D		
		1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0
Farolas	Correcta (64)	21	39	4	0	28	36	59	5	0	30	29	5
	Regular (5)	1	2	2	1	3	1	5	0	0	2	2	1
	Incorrecta (15)	7	4	4	1	8	6	12	2	1	5	5	5
	Total	29	45	10	2	39	43	76	7	1	37	36	11
Albergue	Correcta (62)	0	5	57	38	23	1	3	34	25	51	10	1
	Regular (1)	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
	Incorrecta (21)	0	0	21	6	12	3	1	8	12	18	3	0
	Total	0	6	78	44	36	4	5	42	37	69	14	1

Tabla 1. Soluciones dadas por los EPM a los problemas (Cuestionario 1) y las puntuaciones dadas a las soluciones de los alumnos de Primaria (Cuestionario 2)

Problema Farolas

Soluciones con división (B y C): Destacamos que de los 64 EPM que resolvieron correctamente el problema, 59 puntuaron con un 1 la solución C (división con interpretación correcta del resto). Sin embargo 5 dieron 0.5 puntos a esta solución; las justificaciones se basaban en que la explicación no les parecía suficiente. Por otro lado, 28 de los 64 dieron 0.5 puntos a B (solución que no interpretaba el resto de la división) justificando que se había utilizado un procedimiento correcto (división). Destacamos también que los 5 EPM que habían resuelto el problema de manera regular y 12 de los 15 EPM que lo habían resuelto incorrectamente puntuaron la solución C con 1, lo que indica que estos EPM no fueron capaces de resolver el problema correctamente pero sí de identificar la solución correcta basada en el método de la división.

Soluciones correctas (C y D): Hubo más estudiantes que puntuaron la solución C como correcta (76 de 84) que la D (alternativa, 37 de 84). Los que puntuaron con 0.5 la D (36 de 85) se basaron en la falta de explicación o de competencia de esta estrategia para un alumno de 6º curso, y los que la puntuaron con un 0 (11 EPM) no entendieron la solución del alumno de Primaria. Por otra parte de los 15 que resolvieron el problema de forma incorrecta, sólo 5 identificaron la solución D como correcta.

Problema Albergue

Soluciones con división (A y D): Destacamos que de los 62 EPM que resolvieron bien el problema *Albergue*, 5 puntuaron la solución A (con error técnico) con 0.5; estos EPM le dieron importancia al hecho de que los alumnos de Primaria habían resuelto el

problema con una división. Además 10 de estos 62 EPM puntuaron la solución D con 0.5 argumentando que los alumnos de Primaria no daban una explicación clara sobre la unidad que se agregó al resultado.

Soluciones correctas (B y D): Por otro lado, la solución B basada en una suma repetida y D basada en una división son ambas correctas. 38 de los 62 EPM puntuaron la solución B con 1 y 51 puntuaron la solución D con 1; 23 de los 62 EPM que puntuaron la solución B con 0.5 aportaron los siguientes argumentos: la falta de justificación en la solución y el hecho de que un alumno de 6° debiera resolver el problema por otro método más competente. Por otra parte de los 21 que dieron una solución incorrecta, 6 identificaron la solución correcta en B y 18 en D.

b) Identificación de perfiles

El análisis de la puntuación dada a las soluciones (Cuestionario 2) teniendo en cuenta las justificaciones, permitió identificar distintos perfiles en cada problema (Tablas 2 y 3). Se observó que la resolución del problema en el Cuestionario 1 no influyó en la definición de estos perfiles ya que estudiantes que resolvían de forma correcta, incorrecta o regular el problema, puntuaban de la misma forma las soluciones de los alumnos de Primaria.

Problema Farolas	Número de EPM que resolvieron el problema correctamente, regular o incorrectamente (Cuestionario 1)			Puntuación soluciones Cuestionario 2			
Perfil	Correcta	Regular	Incorrecta	A	B	C	D
F1	9	0	0	0.5	0.5	1	1
F2	9	1	3	1	0.5	1	1
F3	3	0	1	1	0	1	1
F4	6	0	1	0.5	0	1	1
F5	6	0	1	0.5	0.5	1	0.5
F6	13	0	1	0.5	0	1	0.5
F7	5	0	1	1	0	1	0.5

Tabla 14. Perfiles de comportamiento de los estudiantes identificados en el problema Farolas

Problema Albergue	Número de EPM que resolvieron el problema correctamente, regular o incorrectamente (Cuestionario 1)			Puntuación soluciones Cuestionario 2			
Perfil	Correcta	Regular	Incorrecta	A	B	C	D
A1	31	0	6	0	1	0.5	1
A2	5	0	0	0	1	0.5	0.5
A3	5	0	2	0	0.5	0.5	0.5
A4	15	0	10	0	0.5	0	1
A5	4	0	0	0.5	1	0.5	1

Tabla 15. Perfiles de comportamiento de los estudiantes identificados en el problema Albergue

Problema Farolas

Se identifican dos grandes grupos: el formado por los EPM que puntuaron con 1 las soluciones correctas (C y D) y el formado por los EPM que puntuaron mejor la solución correcta con división (C) que la alternativa (D) (Tabla 2). El análisis Clúster agrupó a 60 de los 84 EPM en alguno de estos perfiles.

a) Perfiles de comportamiento de los EPM que puntuaron con 1 las soluciones correctas (C y D):

- F1: Valoraron positivamente el procedimiento seguido por el alumno identificando los errores.

Por ejemplo un EPM argumentó en la solución A: *“0.5, porque a pesar que la estrategia elegida y el resultado son correctos, se ha equivocado con el conteo repitiendo el número 21”* y en la solución B *“0.5, porque a pesar de que la división está bien realizada, no ha llegado a ver que le sobran dos farolas para pintar, solo ha hecho 11 grupos de 3, por lo que el resultado está mal”*.

- F2: Puntuaron con 1 las soluciones con resultados correctos (A, C y D), independientemente de si había error técnico, y con 0.5 la que no interpreta el significado del resto de la división (B).

En la solución A *“1, ya que está resuelto correctamente porque ha escrito grupos de 3 números y les ha asignado a cada grupo un color distinto”* y en la solución B *“0.5, ha sabido que hay que hacer grupos de tres. Pero no ha tenido en cuenta que el resto no es cero. Por lo tanto para pintar las 2 farolas del resto necesita otro color”*.

- F3: Puntuaron con 1 las soluciones con resultado correcto (A, C y D) y la solución con resultado no correcto con 0, por tanto penalizaron más el hecho de no haber conseguido un resultado correcto.

En la solución A *“0.5, repite 2 veces el número 21, pero consigue llegar a la solución final y la técnica o estrategia no es incorrecta”*. En la B *“0, es incorrecto ya que no tiene en cuenta el resto 2, el cual significaría añadir un color más”*.

- F4: Puntuaron las soluciones correctas con 1 (C y D) y de las soluciones con errores técnicos puntuaron mejor la estrategia alternativa (A) que la de la división (B) ya que el resultado de la estrategia alternativa era correcto.

En la solución A *“0.5 porque a pesar de que el problema está bien planteado, repite una farola para que le den grupos exactos de tres, y el último grupo se tendría que haber quedado con 2 farolas”*. En la solución B *“0 porque no se ha dado cuenta que las 2 farolas restantes (aunque no sean 3) que están pintadas de un nuevo color, por lo que serían 12 colores distintos”*.

b) Perfiles de comportamiento de los EPM que puntuaron mejor la solución correcta con división (C) que la alternativa (solución C con 1 y solución D con 0.5):

- F5: Ante las respuestas con error técnico valoraron más un resultado correcto que el procedimiento aunque penalizaron el hecho de que la estrategia de la enumeración no es competente.

En la solución A *“0.5, el resultado es correcto, pero se puede utilizar otra estrategia para resolver en menos tiempo”* y en la solución B *“0, porque el resultado no es correcto. El planteamiento está bien pero le ha faltado matizar que el resto equivale a otro color y por lo tanto sería 12”*.

- F6: Ante las respuestas con error técnico valoraron más un resultado correcto que el procedimiento.

En la solución A *“1, está bien resuelto y además ha empleado un esquema donde queda clara la resolución del problema”* y en la solución B *“0, la solución no es correcta, ya que el cociente hay que agregarle un color más debido a que el resto es mayor que cero”*.

- F7: Valoraron por igual el hecho de haber cometido un error técnico y no ser la estrategia competente (A) y el de no haber interpretado el resto en la división (B).

En la solución A *“0.5, ha utilizado una técnica larga que si hubiese sido con un número mayor de farolas no lo habría solucionado pero el problema está bien. Aún así, le falta explicar de alguna manera de donde saca el 12, además ha repetido el nº 21 y no le quedaría así de exacto y por lo tanto debería explicar que aunque sobran 2 sin agrupar se necesita otro color más”* y en la B *“0.5, el problema está bien planteado pero se debería haber dado cuenta que sobran 2 farolas y éstas aunque no formen 3 también han de ser pintadas. Por ello se necesitan 12 colores”*. Problema Albergue

Se identificaron 5 perfiles de comportamiento de los estudiantes (el análisis Clúster agrupó a 78 de los 84 EPM en uno de estos perfiles). Estos perfiles son:

- A1: A diferencia del resto, puntuaron las soluciones correctas con un 1 independiente del procedimiento utilizado.

En la solución B *“1, es correcto el proceso y la solución. Ha ido agregando las personas hasta conseguir las 103 del enunciado”* y en la solución D *“1, el proceso y el resultado son correctos, ya que el alumno ha tenido en cuenta que las 3 personas del resto necesitan 1 mesa más”*.

- A2: Puntuaron mejor la solución correcta basada en sumas repetidas que la solución basada en la división.

En la solución B *“1, el problema resuelto de esta forma es un poco largo y pesado, pero como lo ha resuelto bien y la solución es correcta, le coloco la máxima nota”* y para la solución D *“0.5, aunque el resultado está bien, no ha explicado por qué le suma un 1 al resultado que le ha dado la división”*.

- A3: Puntuaron las dos soluciones correctas con 0.5 por la falta de justificación.

En las soluciones B y D *“0.5, considero que ha realizado bien el problema pero debe justificar que 5 son mesas completas y la otra solo está ocupada por 3 alumnos”*.

Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto

- A4: Valoraron más la división que la estrategia alternativa.

En la solución B *“0.5, ha sabido resolver correctamente pero no con la estrategia más adecuada”* y en la solución D *“1, ha escogido la estrategia correcta y ha reflexionado sobre el resultado”*.

- A5: Puntuaron la división con error técnico con 0,5. A diferencia de los otros perfiles, estos EPM valoraron el hecho de hacer una división aunque con error técnico (0.5 en A) y sin conocer si sabían o no interpretar un resto distinto de cero.

En la solución A *“0.5, la estrategia es adecuada pero la división no está bien hecha. El resto debería ser 3 en lugar de cero. “ $5 \cdot 15 \text{ km} = 75$ ” no tiene sentido. Falta sumar una mesa”*.

DISCUSIÓN

El presente estudio se centra en el análisis, interpretación y valoración por parte de EPM de las soluciones de estudiantes de 6° de Primaria (11-12 años) a problemas de división con resto. Estas soluciones se basaban en el algoritmo de la división y en otros métodos alternativos a la división.

En primer lugar, los resultados muestran que un alto porcentaje de EPM resolvió los problemas propuestos correctamente (76,2 % *Farolas* y 73,8 % *Albergue*) y que entre ellos se observa una tendencia a valorar más las soluciones con división que el empleo de otros métodos alternativos, aunque éstos sean correctos, pues valoraron el hecho de realizar una división, aunque no supieran interpretar los datos (solución B de *Farolas*), y por otra parte consideraron que un alumno de 6° curso debería resolver estos problemas por un método más competente que sumas o restas repetidas (soluciones B y C de *Albergue*) o que deberían explicar mejor cómo llegan a la solución (solución D de *Farolas*). Estos comportamientos responden a los perfiles F5, F6 y F7 del problema *Farolas* (27 EPM) y a los perfiles A4 y A5 de *Albergue* (29 EPM). Esto se puede explicar porque a lo largo de la educación Primaria los niños comienzan modelizando o contando de uno en uno, luego cuentan a saltos o usan la adición o sustracción repetida y finalmente aplican la multiplicación y la división (Li y Silver, 2000), por tanto la división sería el procedimiento más adecuado para alumnos de 6° de Primaria.

Sin embargo las investigaciones indican que aunque la estrategia utilizada con más frecuencia por los alumnos de Primaria al resolver este tipo de problemas es la división, éstos tienen más éxito cuando emplean estrategias alternativas a la división porque les ayudan a relacionar los cálculos con la situación descrita en el problema (Silver, Shapiro y Deutsch, 1993). Por ello, en lo que se refiere al conocimiento profesional del profesor de matemáticas, es importante identificar las distintas estrategias de resolución de problemas de estructura multiplicativa, su adecuación y pertinencia a lo largo de la educación Primaria y las ventajas e inconvenientes que presenta resolver los problemas de división-medida con el algoritmo de la división o usando otras estrategias.

En segundo lugar, hemos observado que algunos EPM que no resolvieron un problema correctamente, supieron identificar la solución correcta en el caso de que la estrategia empleada era una división (12 de 15 en *Farolas* y 18 de 21 en *Albergue*) y en menor medida cuando era una estrategia alternativa (5 de 15 en *Farolas* y 6 de 21 en

Albergue). Esto podría interpretarse por no saber establecer un vínculo entre las situaciones y las operaciones matemáticas así como por la atribución de más “corrección” a los métodos formales. Por otra parte, el que EPM que no resolvieron bien el problema pero identificaron correctamente las soluciones puede explicarse por la propia naturaleza de la tarea propuesta en el Cuestionario 2, pues la calificación de tareas se utiliza en el marco de la “enseñanza diagnóstica en matemáticas” (Bell, 1993) en los niveles obligatorios de la enseñanza, ya que es potencialmente útil para provocar lo que Piaget denomina conflicto cognitivo y adecuada para provocar la reflexión y la discusión. En nuestro caso, el análisis de cuatro soluciones a un mismo problema, ha podido ayudar a los EPM a comprenderlo, a discriminar las soluciones correctas de las que no lo son y a identificar los errores cometidos. En este sentido creemos que proponer este tipo de tarea profesional puede ayudar a los EPM a profundizar en el conocimiento profesional, en este caso los diversos métodos de resolución y los tipos de errores. La reflexión y discusión sobre las mismas podría llevar a profundizar en las tipologías de problemas de estructura multiplicativa atendiendo a distintas variables didácticas, a estudiar los niveles de dificultad de los distintos tipos de problemas y a las formas de abordar los errores cometidos por los alumnos de Primaria.

Referencias

- Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 115-137.
- Callejo, M. L. y Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two cases studies. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 111-126.
- Campbell, S. (1996). On pre-service teachers' understanding of division with remainder. En L. Puig, y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 177-184). Valencia, España: PME.
- Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W. y Silver E. A. (1983). Result of the third NAEP Mathematics Assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*, 76(9), 652-659.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de de la SEIEM* (pp. 113-140). Badajoz: SEIEM.
- Kaasila, R., Pehkonen, E. y Hellinen (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 247-261.
- Li, Y. y Silver, E.A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 19(2), 233-246.
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) teacher and teacher educator as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the*

Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto

Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

- Silver, E.A., Shapiro, L.J. y Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: an examination of middle school students' solution processes and their interpretation of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), 117-135.
- Vergnaud, G. (2004). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.
- Verschaffel, L., De Corte, E. y Bogart, E. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 339-359.

EL CONOCIMIENTO DEL HORIZONTE MATEMÁTICO: MÁS ALLÁ DE CONECTAR EL PRESENTE CON EL PASADO Y EL FUTURO

HORIZON CONTENT KNOWLEDGE: BEYOND CONNECTING PRESENT WITH PAST AND FUTURE

Martínez, M.¹, Giné, C.², Fernández, S.², Figueiras, L.², Deulofeu, J.²

¹Secretaría de Educación del Estado de Nuevo León

²Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen. *Este trabajo se inscribe en el contexto de un estudio longitudinal dirigido a investigar factores relacionados con el conocimiento del profesor que intervienen en la adquisición de la competencia matemática desde la educación primaria a la secundaria. Partimos de la conceptualización del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) y concretamente el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK), cuya caracterización en términos de conexiones es una de las aportaciones teóricas de nuestro trabajo. Las Trayectorias Hipotéticas en el Horizonte Matemático que hemos construido a partir del análisis de la práctica del aula han resultado ser una herramienta metodológica adecuada para conceptualizar teóricamente el Conocimiento del Horizonte Matemático.*

Palabras claves: Transición primaria secundaria, horizonte matemático, MKT, conexiones matemáticas.

Abstract. *This work is embedded in the context of a longitudinal study focused on investigating the factors related to teacher's professional knowledge that have an effect on the progressive acquisition of mathematical competence from Primary to Secondary school. Our starting point is the conceptualization of Mathematical Knowledge for Teaching ((MKT) and, more specifically the Horizon Content Knowledge (HCK), whose characterization in terms of connections becomes one of the theoretical contributions of this work. Non-participant observations - carried out during two have lead to the development of Hypothetical Trajectories in the Mathematical Horizon, which have become a useful methodological tool to conceptualise the Horizon Content Knowledge.*

Keywords: Primary-Secondary transition; Mathematical Horizon; MKT; Mathematical connections.

INTRODUCCIÓN

La transición entre etapas educativas ha sido una problemática que la investigación educativa ha estudiado desde perspectivas muy diversas, atendiendo a la influencia de

factores tanto internos como externos a la escuela (Kajander and Lovric, 2005; Coad and Jones, 1999; Ferguson and Fraser, 1998). Algunos resultados concluyen que los factores relacionados con la práctica docente y el aprendizaje tienen una gran influencia en el rendimiento del estudiante a largo plazo. Interesados en el estudio de esta problemática, hemos trabajado durante dos años en un proyecto de investigación cuya finalidad es diagnosticar y analizar aquellos factores que, desde la instrucción, facilitan una mejora de la continuidad en la competencia matemática de los estudiantes desde la educación primaria a la secundaria. Consideramos que este tipo de investigaciones puede contribuir a minimizar efectos derivados de procesos de transición tales como el fracaso académico o el abandono del interés por el conocimiento matemático.

El problema de investigación al que nos referimos en este trabajo tiene que ver con la búsqueda de una definición del conocimiento profesional del profesor que permita abordar la problemática de la transición. En último término nuestro objetivo es informar sobre qué conocimiento profesional es importante para atender el crecimiento intelectual de los estudiantes, matemáticamente hablando, desde la educación primaria a la secundaria.

Hemos tomado como marco de referencia conceptual de partida el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) desarrollado por Ball et al. (2008, 2005), y utilizado en algunos trabajos sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Sosa y Carrillo, 2010; Ribeiro, Carrillo y Monteiro, 2008). Uno de los subdominios de dicho modelo, el Conocimiento del Horizonte Matemático, nos parece particularmente vinculado a nuestro problema de investigación. Esta es la razón por la cual hemos profundizado en el estudio de esta componente tratando de identificar manifestaciones de la presencia o ausencia de este conocimiento a través de la observación y análisis de la práctica de profesores de primaria y secundaria.

En concreto, en esta comunicación tomamos en consideración las conexiones matemáticas como un elemento para la caracterización del Conocimiento del Horizonte Matemático. Partiendo del análisis de Episodios de clase, desarrollamos trayectorias hipotéticas en el horizonte matemático (THH) con el fin de identificar aquellas conexiones que nos muestran la presencia del Conocimiento del Horizonte Matemático en la práctica del profesor.

CONOCIMIENTO DEL HORIZONTE MATEMÁTICO

Para Ball, Thames y Phelps (2008), el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK) es un subdominio del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) que se refiere a la conciencia del profesor sobre los conocimientos matemáticos previos y futuros presentes en el currículum de matemáticas. Fernández y Figueiras (2011, 2010) sugieren que el HCK requiere una visión global de la educación matemática de los estudiantes, de manera que pueda ser utilizada por el profesor al enseñar matemáticas en el aula. Por esta razón lo consideran como un conocimiento matemático mucho más amplio, que da forma al MKT desde un punto de vista de continuidad de la educación matemática.

De las investigaciones llevadas a cabo por nuestro equipo se ha concluido una caracterización del Conocimiento del Horizonte Matemático en términos de conexiones matemáticas que parecen fundamentales desde el punto de vista de la construcción del

significado de los contenidos matemáticos escolares en términos de continuidad. El análisis de los datos que ilustramos en detalle más adelante ha concluido en la definición de tres categorías de conexiones en el Conocimiento del Horizonte Matemático y que constituyen la principal aportación teórica de este trabajo. Estas conexiones son de diferente naturaleza e implican enlaces hacia el interior de un mismo concepto (intraconceptuales), entre ideas o conceptos matemáticos diferentes (interconceptuales) y entre conocimientos previos y futuros (temporales):

Conexiones intraconceptuales. Tienen lugar en la proximidad de un único concepto: equivalencia entre caracterizaciones de un concepto; prueba de la equivalencia entre dos definiciones; distinción entre una condición suficiente de una necesaria, o la expresión de un concepto en un caso particular.

Conexiones interconceptuales. Los conectores son ideas matemáticas que permiten vincular diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento.

Conexiones temporales. Se dan entre conocimientos previos y futuros. Derivan del conocimiento del profesor sobre los conocimientos previos y futuros de los estudiantes. Estas conexiones posibilitan estudiar otras propiedades de un concepto o procedimiento, o aplicar el conocimiento aprendido a situaciones nuevas y/o más complejas.

Más allá de contribuir teóricamente a la conceptualización del Conocimiento del Horizonte Matemático, nos interesa profundizar en los mecanismos que bloquean o potencian dichas conexiones y, para lograr este fin, identificar y analizar cómo se manifiestan en la práctica del aula.

EPISODIOS CLAVE Y TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS EN EL HORIZONTE MATEMÁTICO

Durante los dos últimos años escolares se han realizado observaciones no participativas y grabaciones en vídeo de las clases de matemáticas en aulas de sexto de primaria y primero de secundaria en centros educativos públicos de la ciudad de Barcelona. El primer paso en la selección de los datos ha sido la identificación de fragmentos extraídos de la práctica del profesor en el aula que nos aportan información sobre el Horizonte Matemático. A estos fragmentos los hemos denominado *Episodios Clave en el Horizonte Matemático* (ECH). Estos episodios son reproducciones de fragmentos breves de la práctica reconstruidos por el investigador a partir de su diario de observaciones o la visualización de las grabaciones, en las cuales el propio investigador identifica cierto potencial para profundizar en el conocimiento del profesor del Horizonte Matemático. Generalmente, los episodios presentan una situación problemática en la cual aparecen intervenciones tanto del profesor como de sus estudiantes. Si bien nuestra preocupación inicial era identificar episodios en los que se pusieran de manifiesto conexiones matemáticas, nos encontramos en general con la situación contraria: episodios marcados en su mayoría por el bloqueo o débil presencia de dichas conexiones. En consecuencia, la mayoría de los ECH identificados narran situaciones en las que la intervención de alguno de los estudiantes genera una respuesta poco adecuada o insuficiente por parte del profesor en términos de la continuidad del aprendizaje. Este hecho nos obligó a generar herramientas metodológicas que permitan hacer visible la ausencia o bloqueo de tales conexiones.

A partir de la identificación y descripción de los episodios clave construimos lo que hemos denominado *Trayectorias Hipotéticas en el Horizonte Matemático (THH)*: Una THH es una representación de alguna de las diferentes formas en las que podría haberse conducido el episodio modificando puntualmente una intervención del profesor.

Las THH tratan de explorar diferentes rutas de actuación del profesor y son una herramienta útil para caracterizar y afinar conceptualmente el Conocimiento del Horizonte Matemático del profesor en términos de conexiones matemáticas, ya que nos permiten: a) visualizar dónde se ha producido un bloqueo para la conexión y preparar los datos para investigar posibles fuentes; b) comprender los mecanismos que permiten al profesor desplegar en la práctica tales conexiones; c) describir el contenido matemático que se construye en la clase mediante las conexiones matemáticas que pudieran establecerse.

Es importante señalar que estas trayectorias hipotéticas no tienen como objetivo convertirse en propuestas de un modelo de intervención o de actuación del profesor, sino plantear diferentes alternativas para profundizar en la conceptualización del conocimiento del profesorado del Horizonte Matemático.

CONSTRUCCIÓN DE TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS A PARTIR DE EPISODIOS CLAVE

En cada uno de los ECH se señalaron puntos críticos en los que se hacía evidente el bloqueo (no manifestación) de alguna conexión matemática. A partir de estos puntos se continuó narrando la práctica del aula de manera hipotética, pero potenciando dichas conexiones (THH). Ilustramos cómo se llevó a cabo este proceso a partir del episodio real que se narra en la Figura 1. Para este episodio, la THH correspondiente se muestra en la Figura 2. El episodio está tomado de las observaciones de una clase de matemáticas de primero de secundaria. El instituto divide a los estudiantes en dos grupos según el nivel y el grupo observado es el que se considera de nivel alto. La mayoría de los estudiantes proceden de un mismo centro educativo de primaria. El profesor tiene formación universitaria en matemáticas y una experiencia de más de treinta años como profesor de bachillerato.

El profesor corrige ejercicios rutinarios de cálculo de perímetros y áreas. En este caso, de un rectángulo de lados 22 y 28 cm. En la pizarra, dibuja el rectángulo y dicta en voz alta mientras escribe:

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 22 + 2 \cdot 28 = 100$$

A continuación, se establece el siguiente diálogo:

Anna: ¿Por qué cien?

Profesor: Haz esta operación de aquí y verás cómo te sale a 100.

Marc. ¡Ah! Es como si el 28 le da 3 al 22 y tienes cuatro lados de 25, o sea 100.

Profesor: Vale. Ahora el área.

Marc: Pues 25 por 25.

Profesor: ¡No! El área es 22 por 28. [Resuelve la operación en la pizarra]. 616 centímetros cuadrados.

A continuación se pasa a la corrección del siguiente ejercicio.

Figura 1. Narración del episodio “Perímetros y áreas”

En el episodio de la Figura 1 se detectaron tres momentos críticos. El primero de ellos se inicia con la pregunta que formula una de las estudiantes: “¿Por qué 100?” y el profesor le contesta “Haz esta operación y verás por qué te sale a 100”. El segundo momento crítico lo encontramos cuando otro de los estudiantes interviene reformulando el procedimiento de cálculo del perímetro del rectángulo “¡Ah! Es como si el 28 le da 3 al 22 y tienes cuatro lados de 25, o sea 100.” El tercer momento se inicia con la respuesta errónea del estudiante atribuyendo a un rectángulo no cuadrado de perímetro 100 el área del cuadrado de lado 25. A partir de estos puntos críticos se construyeron las THH que se muestran en la Figura 2, resaltando vías plausibles de intervención del profesor. El análisis de estas trayectorias nos ofrece la oportunidad de analizar la actuación del profesorado en relación a la gestión de las aportaciones o preguntas de los estudiantes, sus errores y, particularmente, las conexiones matemáticas que se realizan en el aula.

Las figuras elípticas de la Figura 2 identifican los momentos en los que encontramos evidencia de conexión matemática; los recuadros de texto con fondo gris describen esta conexión en términos de la acción profesional del profesor y que representarían acciones efectivas desde una perspectiva de continuidad. En los otros cuadros de texto con fondo blanco se recogen el resto de las intervenciones del profesor y los estudiantes, tanto reales como hipotéticas.

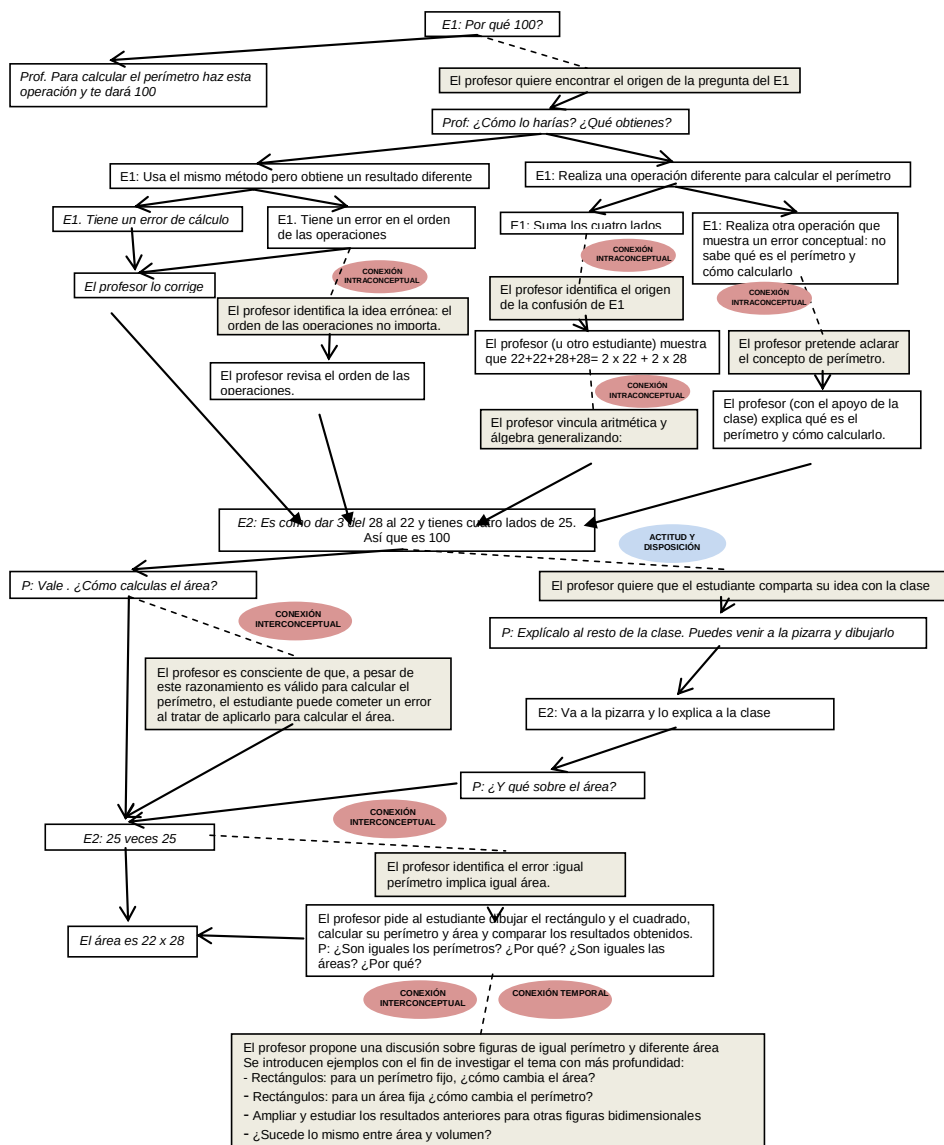


Figura 2. Trayectoria Hipotética en el Horizonte Matemático

En este ejemplo de THH podemos identificar las siguientes manifestaciones del Conocimiento del Horizonte Matemático, que organizamos de acuerdo a los diferentes tipos de conexiones matemáticas que hemos definido previamente:

El Conocimiento del Horizonte Matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro

1. Conexiones intraconceptuales

1.1 Identificar una idea errónea: el orden de las operaciones no importa cuando se realizan operaciones combinadas.

1.2 Mostrar la relación de igualdad entre dos expresiones aritméticas: $(22+22+28+28=2 \times 22+2 \times 28)$.

1.3 Generalizar mediante la vinculación de aritmética y álgebra: $a+a+b+b=2a+2b$.

1.4 Relacionar una intervención [la de Anna] que cuestiona una operación aritmética con un error conceptual sobre el perímetro.

2. Conexiones interconceptuales

2.1 Hacer explícito para el estudiante que un razonamiento es válido para calcular el perímetro de la figura $(22+22+28+28 = 25 + 25 + 25+25)$ pero no para calcular el área de la misma.

2.2 Identificar una idea errónea: figuras del mismo perímetro tienen la misma área.

2.3 Relacionar las medidas del perímetro y el área de figuras en casos particulares, como por ejemplo triángulos de la misma base y altura y diferente perímetro.

3. Conexiones entre conocimientos previos y futuros:

3.1 Ampliar y estudiar los resultados anteriores en figuras semejantes.

3.2 Extender el estudio a las relaciones entre área y volumen.

Del análisis realizado se desprende que parece existir una relación directa entre las intervenciones de los estudiantes y la manifestación de las conexiones matemáticas en la clase. Dicho de otra manera, son las intervenciones de los estudiantes lo que el profesor debe recoger y analizar con el fin de desarrollar su capacidad para establecer conexiones matemáticas, y, consecuentemente, poner en evidencia su Conocimiento del Horizonte Matemático. La forma en que interviene el profesor ante las intervenciones de los estudiantes está en el origen del bloqueo de oportunidades para la conexión.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La construcción y análisis de THH a partir de episodios ha resultado ser una herramienta metodológicamente útil para identificar conexiones alrededor de los contenidos matemáticos de la práctica escolar. El análisis conjunto de las conexiones matemáticas que se revelan importantes y las intervenciones de los profesores, aportan información acerca del conocimiento profesional que el profesorado pone en evidencia, fomentando o bloqueando dichas conexiones. En ningún caso estamos diciendo que en situaciones en las que no se manifiesta una determinada conexión sea porque el profesor, que es nuestro sujeto de análisis, carezca de dicho conocimiento (por ejemplo, el que figuras del mismo perímetro tienen distinta área, o que los estudiantes concluyen habitualmente que figuras del mismo perímetro tiene igual área). La investigación en educación matemática ha evidenciado cómo las creencias que los profesores tienen

sobre la naturaleza de las matemáticas, el aprendizaje y enseñanza o las restricciones que impone el contexto de desarrollo curricular al profesor, son determinantes en su práctica. Nuestro interés no es obviar la relevancia de estos aspectos para la práctica profesional, sino caracterizar un conocimiento profesional que, si no existe, bloquea situaciones potencialmente ricas para conectar el contenido matemático que se construye en el aula. Este conocimiento profesional es al que nos venimos refiriendo como Conocimiento del Horizonte Matemático. Entendemos que este conocimiento permitiría al profesor establecer conexiones matemáticas antes y durante la clase, abriéndole un abanico de posibilidades de gestión del aula que potencie las conexiones dentro de los contenidos matemáticos escolares desde una perspectiva de continuidad.

Agradecimientos

Este trabajo de investigación se ha llevado a cabo en el contexto del proyecto: EDU2009-07298 “Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre primaria y secundaria”

Referencias

- Ball, D.L.; Hill, H.C.; Rowan, B. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), 371-406.
- Ball, D.L.; Thames, M.H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Coad, J.; Jones, K. (1999). *Curriculum continuity in mathematics: a case study of the transition from primary to secondary school*. University of Southampton, Southampton: Center for Research in Mathematics Education.
- Ferguson, P.D.; Fraser, B.J. (1998). Student gender, school size and changing perceptions of science learning environment during transition from primary to secondary school. *Research in Science Education*, 28(4), 387-397.
- Fernández, S.; Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M.M. Moreno, A Estrada, J. Carrillo & T. A Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291-301). Lleida: SEIEM.
- Fernández, S.; Figueiras, L. (2011). Re defining HCK to approach transition. Comunicación presentada en el *Séptimo Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática* (CERME-7) Rzeszów, Poland.
- Kajander, A.; Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36 (2-3), 149-160.
- Ribeiro, C.M.; Carrillo, J.; Monteiro, R. (2008). Uma perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática no 1º ciclo: um exemplo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. En L. Blanco et al. *XII Simposio de la Sociedad española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 545-555). Badajoz: SEIEM.

El Conocimiento del Horizonte Matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro

- Sosa, L.; Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A Estrada, J. Carrillo & T. A Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

EL SENTIDO DEL NÚMERO EN LOS FUTUROS PROFESORES DE 1.^{ER} CICLO DOS ESTUDIOS DE CASO

THE NUMBER SENSE OF PRESERVICE ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS, TWO CASE STUDIES

Menino, H., Tavares, D., Quaresma, A., Rodrigues, M.

NIDE – Instituto Politécnico de Leiria (Portugal)

Resumen. *Esta comunicación pretende presentar algunas evidencias del trabajo de investigación que se lleva a cabo en el proyecto SNUMERO, del Núcleo de investigación y Desarrollo en Educación (NIDE) del Instituto Politécnico de Leiria. Se pretende caracterizar el sentido del número en los futuros profesores de 1.^{er} ciclo de enseñanza básica, y percibir la forma en que planifican y llevan a cabo tareas en ese ámbito, en el contexto de la práctica pedagógica. En la construcción de casos se ha empleado una metodología cualitativa de naturaleza interpretativa. Se presentan los casos de dos futuras profesoras pertenecientes al mismo núcleo de práctica. Los resultados permiten apreciar que las futuras profesoras tienen diferentes niveles de desarrollo del sentido del número, aunque ambas planifican tareas muy pertinentes en ese ámbito. La exploración de esas tareas con los alumnos presenta, en los dos casos, características propias.*

Palabras clave: Sentido del número, práctica pedagógica.

Abstract. *This communication seeks to present a number of results from the research work being conducted in the SNUMERO project by the Centre for Research and Development in Education (NIDE) at the Leiria Polytechnic. The aim is to characterize the number sense of future primary school teachers and understand how they plan and carry out tasks in this area within a context of pedagogical practice. A qualitative-interpretative methodology was employed, with the construction of cases. The cases presented are of two future teachers belonging to the same centre. The results allow us to see that future teachers have different levels of number sense development, however, both plan very pertinent tasks in this field. The implementation of these tasks with the students presents its own characteristics in both cases.*

Key words: Number sense, pedagogical practice.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del sentido del número se acepta hoy como uno de los grandes objetivos de la educación matemática (NCTM, 2000; Brocardo, Serrazina y Rocha, 2008). Investigaciones recientes (Kaminski, 2002; Tsao, 2005; Perry, Dockett y Harley, 2007; Whitacre y Nickerson, 2006) destacan la importancia de un buen sentido del número en

los profesores de los primeros años de escolaridad, toda vez que consideran que, en su ausencia, los profesores tendrán dificultad para comprender y valorar las estrategias informales utilizadas por sus alumnos cuando resuelven problemas numéricos. En este sentido, es pertinente integrar en los currículos existentes oportunidades para elaborar, discutir y analizar aspectos relacionados con el desarrollo del sentido del número, contribuyendo a una reconstrucción de los conceptos y creencias de los futuros profesores, así como al desarrollo de su conocimiento matemático.

El presente estudio se desarrolló en el ámbito del proyecto SNUMERO, en desarrollo en el Núcleo de Investigación y Desarrollo en Educación (NIDE) del Instituto Politécnico de Leiria (IPL). El propósito del estudio fue caracterizar el sentido del número en los futuros profesores de los primeros años lectivos, en el contexto de la realización de tareas matemáticas en que ese sentido está presente. Igualmente, se trató de describir las ideas y los conceptos de los futuros profesores en relación con ese constructo en el aprendizaje de los alumnos y en los currículos, pretendiendo, de este modo, analizar la forma en que los futuros profesores planifican y actúan en este ámbito, en el contexto de su práctica pedagógica final. En esta comunicación pretendemos presentar de forma muy sucinta el caso de dos futuras profesoras.

1. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Sentido del número

La terminología *number sense* ha sido empleada por diversos investigadores para significar un conjunto de competencias numéricas cuyo desarrollo en los alumnos se considera de gran relevancia en la actualidad (Greeno, 1991; McIntosh, Reys y Reys, 1992; NCTM, 2000; Treffers y Buys, 2001; Dolk y Fosnot, 2001; Tsao, 2005; Kraemer, 2008). Para nosotros, el significado adoptado por McIntosh, Reys y Reys (1992) incluye los aspectos fundamentales. Estos autores consideran que el sentido del número incluye: (a) conocimiento y destreza con los números; (b) conocimiento y destreza con las operaciones; (c) aplicación del conocimiento y la destreza con los números y las operaciones en situaciones de cálculo.

En términos conceptuales, el sentido del número incluye el reconocimiento de la magnitud relativa de los números, el efecto de las operaciones sobre los números y el desarrollo de puntos de referencia relativos a cantidades discretas y continuas. En términos operacionales, implica la capacidad de utilizar los números de modo flexible en cálculos y estimaciones, evaluar la razonabilidad de los resultados, la facilidad para lidiar con diferentes representaciones numéricas y para relacionar números, símbolos y operaciones. Todavía debe añadirse una tercera dimensión, que habla sobre los aspectos afectivos y que puede ser determinante en la actitud de los sujetos ante los números en particular y las matemáticas en general, y que se reflejará en los conceptos que se van formando relativos a esa ciencia.

Un estudio desarrollado por Kaminski (2002) implementó, en una clase de futuros profesores de matemáticas, un programa de formación integrado en una unidad curricular relacionada con Números y Operaciones, valorando el desarrollo del sentido del número. Este programa, utilizando una aproximación social-constructivista, proporcionó oportunidades de adquisición y desarrollo de estrategias y procedimientos matemáticos, facilitando el establecimiento de interrelaciones entre aspectos diversos del conocimiento matemático.

Incumbe pues, en el contexto portugués, estudiar la naturaleza, la estructura y el contenido del sentido del número de los futuros profesores, así como la forma en que lo llevan a cabo cuando prevén su práctica profesional.

Sentido del número en los futuros profesores

Los pocos estudios que investigan el conocimiento matemático de los futuros profesores a nivel del sentido del número muestran que muchos de ellos presentan dificultades, utilizando erróneamente procedimientos matemáticos y no comprendiendo el verdadero significado de los conceptos. Los estudios de Ball (1990), Hungerford (1994) y Tsao (2005) evidencian que los futuros profesores de los primeros años lectivos tienden a generalizar las propiedades de los números enteros a los números decimales y las fracciones. Con frecuencia son buenos ejecutores de algoritmos de cálculo, pero tienen dificultades en abordar de forma comprensiva problemas no estandarizados en que esos números u operaciones elementales están presentes.

Los estudios sobre ideas y conceptos de los profesores que se han llevado a cabo en las últimas décadas destacan su influencia en la práctica profesional. Como destaca Tsao (2005), las instituciones de formación tienen aquí una responsabilidad particular, especialmente en lo que respecta al diagnóstico de estas ideas en los futuros profesores y en el desarrollo de estrategias de formación que les permitan mejorar su sentido del número.

2. METODOLOGÍA

Participantes

El proyecto SNUMERO incluyó a 15 participantes, futuros profesores de 1.^{er} ciclo de enseñanza básica, todos ellos cursando el 4.º año de la Licenciatura, en el Instituto Politécnico donde los investigadores trabajan. Estos 15 participantes formaron un aula y durante todo el año practicaron distribuidos en grupos de 3 en escuelas de 1.^{er} ciclo. En esta comunicación vamos a presentar el caso de dos de esas participantes.

Procedimientos de recogida de datos

Al inicio del año lectivo 2009/2010, todos los participantes realizaron el Test Diagnóstico del Sentido del Número (TDSN). De ellos, 9 fueron seleccionados para realizar entrevistas en profundidad relativas a su sentido del número. El criterio empleado para la selección de estos 9 participantes fue la disponibilidad de todos los elementos del grupo de prácticas para participar a lo largo del año de investigación. Durante 2009/2010, los investigadores del equipo se reunieron con los grupos de futuros profesores, observando la planificación y la realización de dos tareas que implican el sentido del número.

Metodología del análisis de datos

Se categorizaron las respuestas con relación a los datos del cuestionario. Posteriormente, esa categorización se complementó con los datos obtenidos en las entrevistas, procurando clarificar las ideas y los procedimientos utilizados para responder a las preguntas del cuestionario. Los datos obtenidos por las grabaciones de las entrevistas fueron íntegramente transcritos en relación con cada participante. Lo

mismo ocurrió con los datos obtenidos a través de la grabación de las sesiones de planificación y de las clases. En función de los diferentes instrumentos y en relación con las diferentes dimensiones en estudio, todos los datos fueron categorizados y presentados en forma de estudio de caso.

3. RESULTADOS

3.1.El caso Névia

Névia aparenta tener cerca de 40 años de edad, y a lo largo de su recorrido vital ha aplazado los estudios superiores hasta este momento en función de necesidades de naturaleza económica y de opciones familiares. En ese sentido, Névia destaca por su madurez, capacidad de reflexión y de cuestionamiento.

Névia considera su relación con las matemáticas como una relación en desarrollo, donde todavía tiene mucho que aprender. Hace referencia de manera recurrente a la influencia que en su formación inicial ha tenido su forma de ver las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

El sentido del número

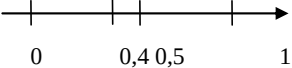
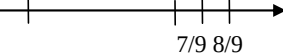
Névia manifiesta poseer un buen sentido del número, tanto a nivel de los números enteros como a nivel de los números racionales. En el cuestionario individual (cuadro 1) manifiesta un buen conocimiento de las propiedades de las operaciones y de su utilización en contexto, así como de la capacidad de realizar cálculos utilizando estrategias eficaces y adecuadas a diferentes situaciones.

Calcule, explicando los procedimientos utilizados, $26+32+9+24+18+41$.	Calcule mentalmente 6×98 .
$41+9+32+18+26+24 = 50+50+50 = 150$	$600-12$ vía $600-10-2$ $6 \times 98 = 6 \times (100-2) = 600-12 = 588$

Cuadro 1. Evidencia del sentido del número entero

En la primera situación, Névia emplea las propiedades conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo. En la segunda, utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación y la estrategia de las aproximaciones de 10 en 10 para sustraer. En ambas situaciones, ojea globalmente los números, los analiza y establece relaciones antes de efectuar el cálculo. Consigue justificar su razonamiento con facilidad y claridad.

Esta realidad es similar en el ámbito de los números racionales (cuadro 2):

De entre los números $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$, ¿cuál es el mayor? ¿Por qué?	¿Cuántos números existen entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$?	¿750:0,98 es mayor o menor que 750? Justifique su respuesta.
$\frac{2}{5}=0,4$; $\frac{1}{2}=0,5$ de donde $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$ Porque $\frac{2}{5}=\frac{2:2}{5:2}=\frac{0,4}{1}$ $0,5>0,4$ 	Existen infinitos números entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$. 	$750:0,98$ es mayor que 750, pues vamos a dividir por un valor inferior a la unidad. Ejemplo sencillo: $10:0,5=20$, 10 pasteles divididos en mitades, 20 mitades.

Cuadro 2. Evidencia del sentido del número racional

En el primer caso, Névia opta por comparar números racionales en forma de fracción recurriendo a su representación decimal, y en el segundo contextualiza su razonamiento demostrando comprender bien el efecto de la operación división.

A pesar de tener el sentido del número bien desarrollado, Névia tiene dificultad para explicar con claridad lo que entiende por sentido del número. Sus ideas se asientan fundamentalmente en la valoración de los contextos de utilización de los números. Desde el punto de vista curricular, hace referencia a la importancia de establecer conexiones entre contenidos del ámbito de los números y las operaciones, con los restantes ámbitos del currículo. Destaca también la importancia de números de referencia, como el 5 y el 10, y su asociación a modelos concretos.

Esta futura profesora es consciente de que posee un buen sentido del número y siente que eso le ayuda a planificar su práctica pedagógica, previniendo el desarrollo de ese sentido en sus alumnos. Para Névia, un profesor debe tener la capacidad de percibir cuáles son los contextos adecuados al desarrollo del sentido del número que hagan participar a los alumnos y al mismo tiempo les motiven al aprendizaje.

Planificación de tareas que implican sentido del número

Una de las tareas que Névia planificó fue elaborada a partir de un contexto relacionado con las experiencias de los alumnos, remitiéndoles a un recorrido por el río de la localidad. Cada alumno partiría de un punto diferente y llegaría, en un tiempo determinado, a un punto también diferente. El contexto se simplificó con el fin de que los alumnos imaginasen que el recorrido se realizaba en línea recta y, de esa forma, establecer una analogía con la recta numérica.

En términos de secuencia, cada alumno debía obtener aleatoriamente un número de partida y un número de llegada de su barco, y situarlos en la recta. Posteriormente, debía calcular la distancia entre un punto y otro, y presentar la estrategia utilizada.

Inicialmente esta futura profesora procuró dar voz a los alumnos, planteando cuestiones de exploración relativas a las estrategias empleadas para situar los números en la recta. A medida que la clase fue avanzando esas cuestiones fueron siendo cada vez menos evidentes y Névia acabó por conducir el trabajo de los alumnos de manera muy directiva.

Fue posible observar una gran preocupación por el tiempo de realización de las actividades, en la medida en que no permitió profundizar en la exploración de las estrategias utilizadas por los alumnos. Esto es particularmente visible cuando el alumno da rápidamente una respuesta correcta y Névia nunca plantea preguntas, limitándose a confirmar que la respuesta es correcta. Ante las dificultades de los alumnos, Névia tiende a responder, conduciendo el razonamiento del alumno y sin darle tiempo para razonar sobre el contexto y los números. En la última parte de la clase, en que los alumnos calculan la distancia recorrida por su barco, Névia opta por llamar a los alumnos con dificultad a la pizarra. Aun así, esta estrategia poco reflexiva se mostró desorganizada y difícil de dirigir. Una evidencia de este hecho es la estrategia utilizada, sin éxito, con el objetivo de ayudar a una de las alumnas.

3.2. El caso Carla

Carla, aparenta tener cerca de 30 años de edad, revela tener responsabilidades y preocupaciones añadidas respecto a la mayoría de los colegas que formaron parte del estudio. Se define como una persona aplicada y con interés, aunque considera que no lo era en su etapa de alumna de enseñanza básica y secundaria.

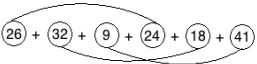
Afirma que factores como la oportunidad de haber contactado con los profesores adecuados a lo largo de su recorrido escolar, así como el incentivo y valor que su madre atribuyó siempre a las matemáticas, contribuyeron a que haya desarrollado una buena relación con esa materia. A pesar de ello, afirma que la destreza en el cálculo mental no la adquirió por sí misma, y que tan solo en la Institución de Enseñanza Superior entró en contacto con el término “sentido del número”.

El sentido del número

Para Carla, el término “sentido del número” está asociado a la capacidad de establecer una secuencia lógica en su mente, utilizando “los números como objetos mentales”.

Carla piensa únicamente en el sentido de número en términos operacionales, como en la capacidad para utilizar los números de modo flexible en cálculos operacionales y en estimaciones. Como situaciones concretas, describe únicamente aquellas asociadas a las compras, a la necesidad de realizar cálculos del precio a pagar.

Mediante el test diagnóstico es posible reconocer que Carla revela cierta facilidad para lidiar con diferentes representaciones numéricas, para relacionar números enteros, símbolos y operaciones, y consecuentemente seleccionar estrategias adecuadas para la resolución de las distintas situaciones.

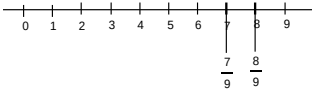
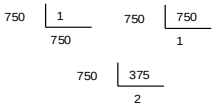
Calcule, explicando los procedimientos utilizados, 26+32+9+24+18+41.	Calcule mentalmente 6x98.
 50+50+50 = 150 Junté las unidades y las decenas de los números que darían 10, para calcular mejor.	6 x 100=600 6 x 2=12 600-12=588

Cuadro 3. Evidencia del sentido del número entero

El sentido del número en los futuros profesores de 1.º ciclo dos estudios de caso

Observando globalmente los números, Carla los combina y establece relaciones numéricas entre ellos antes de efectuar el propio cálculo. Implícitamente, consigue manifestar la estrategia de cálculo con claridad, pero evidencia alguna dificultad en su explicación, mencionando, en la primera respuesta, que junta “las unidades y las decenas de los números que darían 10”.

El desarrollo del sentido del número de Carla comienza a revelar algunas lagunas cuando los contextos implican números racionales.

De entre los números $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$, ¿cuál es el mayor? ¿Por qué?	¿Cuántos números existen entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$?	¿ $750:0,98$ es mayor o menor que 750? Justifique su respuesta.
$\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{2}{5}$ porque $\frac{1}{2}$ es 1 parte de dos; o sea, la mitad. $\frac{2}{5}$ son 2 partes de 5, que es menos que la mitad.	 Todos los números entre 7 y 8.	 $750 : 0,98$ es menor que 750

Cuadro 4. Evidencia del sentido del número racional

A pesar de que en la primera tarea Carla reconoce fácilmente las fracciones como partes de una unidad entera, la comprensión de la magnitud de los números racionales representados en forma de fracción se facilitó por el uso de fracciones de referencia, como es el caso de $\frac{1}{2}$. En el segundo caso, Carla intenta trasladar su intuición sobre el orden y la magnitud de los números enteros a los números quebrados, situándolos en la recta numérica, aunque su respuesta es totalmente inadecuada. Es evidente que no consigue percibir cuántos números están comprendidos entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$, y esa dificultad persiste en la entrevista, toda vez que solo llega a comprenderlo con algunas pistas que le da la entrevistadora.

En su entrevista, Carla menciona la importancia de que los alumnos adquieran estrategias de cálculo que favorezcan la comprensión del número como un todo, permitiendo al alumno ser crítico en cuanto al resultado de las operaciones. Carla reconoce que el programa de matemáticas induce a que se proporcionen a los alumnos situaciones diversas que les permitan desarrollar el cálculo mental, afirmando que “el sentido del número apela al cálculo mental”. Menciona como ejemplos de estrategias que facilitan el cálculo mental la utilización de la recta numérica vacía y la aproximación de un número a la decena más próxima.

Carla reconoce que para conseguir desarrollar el sentido del número en sus alumnos tendrá que comenzar por profundizar en ese tema. Considera que es importante que un profesor tenga un buen sentido del número y que es fundamental que además demuestre firmeza y conocimiento científico y didáctico para que los alumnos sientan agrado y confianza en lo que aprenden y desarrollen así un buen sentido del número.

Planificación de tareas que implican el sentido del número

Una de las tareas planificadas por Carla fue en el ámbito del tema *números racionales no negativos*, titulada “Dividiendo Pizzas”, destinada a alumnos de 1.º y 2.º curso.

Después de organizar la clase en cinco grupos de 4 y un grupo de 3, cada grupo tenía que presentar a los compañeros la estrategia seguida por sus miembros para dividir un conjunto de 2 o de 3 pizzas en partes iguales. Esta tarea suponía una fase anterior de trabajo en grupo en la que sus integrantes, con recurso a representaciones de pizzas, debatieron entre ellos sus estrategias y elaboraron un esquema con ellas.

En la presentación de los resultados de cada grupo, se evidencian dos momentos distintos. Un primer momento, en que los alumnos presentan las estrategias empleadas para la división de las pizzas (presentación del esquema) y las argumentan con la ayuda de Carla, a través de preguntas dirigidas solo al grupo. Los restantes alumnos escuchan en silencio el diálogo entre profesora-grupo. Un segundo momento, en que Carla, con la ayuda del resto de la clase, realiza una síntesis de esas estrategias, debatiéndolas y registrándolas a través de la representación en forma de fracción, en una tabla resumen reproducida en la pizarra.

	Grupo 1 2 pizzas 4 niños	Grupo 2 2 pizzas 4 niños	Grupo 3 2 pizzas 4 niños	Grupo 4 3 pizzas 4 niños	Grupo 5 3 pizzas 4 niños	Grupo 6 2 pizzas 3 niños
¿Qué comió cada niño?	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8}$	$\frac{2}{6} + \frac{2}{6}$

Cuadro 5. Tabla síntesis construida por Carla en el transcurso de la clase

En algunos momentos Carla fue bastante directiva, planteando a los alumnos preguntas directas que, de alguna forma, daban ya alguna pista sobre la respuesta pretendida. Es evidente la preocupación por formular preguntas que ayuden al alumno a explicar su razonamiento; aun así, algunas veces no les da tiempo para pensar y expresarse con sus propias palabras. En el transcurso de la clase, Carla consiguió en parte superar esa dificultad, pasando a dar algún tiempo para que los alumnos pensaran antes de responder y para formular preguntas de respuesta no directa, estimulando a los alumnos a que profundizaran en las exploraciones de sus estrategias.

Con la intervención del primer grupo Carla tuvo un papel fundamental en la introducción contextualizada de la representación, a través de una fracción, de la parte que comió cada niño, en este caso de la fracción $\frac{1}{2}$, que explica que se lee “una parte de dos”. Siguiendo ese razonamiento, Carla pretendía que tras cada presentación, cada grupo interpretara la parte de las pizzas que correspondía a cada elemento a través de una fracción. No obstante, en el transcurso de la clase, esa exploración se mostró insuficiente por el hecho de no haberse reforzado debidamente lo que representa el denominador.

En el transcurso de la clase, Carla recurre fácilmente a la representación concreta de las pizzas en la pizarra, divididas en partes iguales, lo que facilita el desarrollo del razonamiento de los alumnos, permitiéndoles razonar de forma correcta.

Como es evidente en el cuadro anterior, las presentaciones orales de los grupos siguientes pusieron de manifiesto diferentes estrategias válidas para la resolución del problema propuesto, presentando esquemas que explicaban claramente el razonamiento desarrollado. En el ejemplo que se presenta en el lado derecho, es evidente la parte que comió cada niño del grupo.

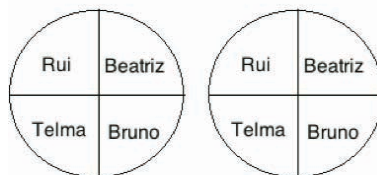


Fig. 1 – Esbozo del esquema del grupo 2

Aunque las estrategias de resolución empleadas por los grupos fuesen diferentes, al final de cada exploración Carla estimula a los alumnos a comparar y a obtener conclusiones sobre las cantidades de pizza que corresponden a cada elemento del grupo.

Un ejemplo surge tras la presentación del segundo grupo, en que los alumnos concluyen que “cada uno comió una parte de cuatro” de cada pizza, comiendo “dos porciones iguales”, que son la “mitad de la pizza”: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Y, comparando con la resolución del primer grupo, los alumnos llegan fácilmente a la conclusión de que el resultado es el mismo: “la mitad de una pizza”.

En las diversas presentaciones, Carla valoró en todo momento las estrategias de los alumnos, así como los materiales que elaboraron; por ejemplo: “En tu esquema, ¿qué parte de la pizza comió cada niño?”. “¿Fue la mitad? Leed los nombres que hay escritos en las pizzas”.

Cabe subrayar también la preocupación de Carla por registrar en la tabla resumen las expresiones asociadas a las estrategias empleadas por los alumnos. No obstante, a partir del segundo grupo, podría haber estimulado a los alumnos a ser ellos mismos quienes las registraran, lo que ocurre una sola vez.

CONSIDERACIONES FINALES

En el caso de estas dos futuras profesoras, nos parece que la relación entre el sentido del número y la práctica pedagógica no está exenta de tensiones. Si por un lado Névia parece manifestar claramente un dominio de los aspectos a priorizar en términos del desarrollo del sentido del número, principalmente: (a) la importancia de los contextos y de los modelos (por ejemplo la recta vacía); (b) la importancia de números de referencia; (c) la importancia de estrategias de cálculo estructurado para la adición y la sustracción (principalmente, la aproximación a la decena más próxima y los avances de 10 en 10); por otro lado, presenta claras dificultades en promover adecuadamente ese desarrollo en la exploración de tareas con los alumnos. Carla, al contrario que Névia, y a pesar de situarse en un nivel intermedio en cuanto al desarrollo del sentido del número, consigue en su práctica estimular y motivar a los alumnos para el desarrollo del sentido del número a medida que explora las estrategias que han empleado.

Ambas muestran inquietud por la planificación de las tareas a través de la elección de un contexto conocido por los alumnos: en el caso de Névia, el recorrido por un río, y en el caso de Carla, el reparto equitativo de pizzas, fundamentales para motivar a los alumnos a definir estrategias adecuadas, a exponer sus ideas matemáticas y a establecer

relaciones. Sin embargo, en la implementación de las tareas, Névia evidencia dificultades a nivel de la secuenciación de la clase (presentación de la tarea, trabajo de los alumnos, discusión), y en su gestión, particularmente en las dimensiones relacionadas con el discurso en la lección de matemáticas. Contribuyen a esta realidad probablemente concepciones previas relativas al papel del profesor, que impiden a Névia dejar más espacio y voz a los alumnos.

El análisis de estos dos casos apoya una idea que surge y se manifiesta en las evidencias recogidas en el proyecto SNUMERO, que es la de que el dominio de ideas matemáticas relacionadas con el sentido del número por los futuros profesores es fundamental para que en la práctica pedagógica exista una planificación y actuación conducente al desarrollo de ese sentido en los alumnos. Con todo, esa condición, aunque necesaria, no es suficiente, lo cual se evidencia claramente en el caso de Névia aquí presentado. Los trabajos desarrollados en otros países apoyan también estas ideas (Tsao, 2005; Kraemer, 2008).

Referencias

- Ball, D. (1990). Breaking with experience in learning to teach mathematics: the role of a preservice method course. *International Journal of Mathematics Education*, 10 (2), 10-16.
- Brocardo, J., Serrazina, L. & Rocha, I. (Eds.). *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Coleção Educação. Lisboa: Escolar Editora.
- Dolk, M. e C. Fosnot (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heineman.
- Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education*, 22 (3), 170-218.
- Hungerford, T. (1994). Future elementary teachers: the neglected constituency. *The American Mathematical Monthly*, 101 (1), 15-21.
- Kaminski, E. (2002). Promoting Mathematical Understanding: Number Sense in Action. *Mathematics Education Research Journal*, 14 (2), 133-149.
- Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Eds.) *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.
- Mcintosh, A.; Reys, B. J. e Reys, R. R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8, 44.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Perry B., Dockett, S., Harley, E. (2007). Preschool Educators' Sustained Professional Development in Young Children's Mathematics Learning. *Mathematics Teacher Education and Development*, 8, 117-134.
- Treffers, A. e Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3) – calculation up to 100. In: M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO). 61-88.

- Tsao, Y. (2005). The number sense of preservice elementary teachers. *College student journal*, 39 (4), 647-679.
- Whitacre, I. and Nickerson, S. (2006). Pedagogy that makes (number) sense: A classroom teaching experiment around mental math. *PME-NA*, 2, 736-743.

CONCENTRACIÓN Y DISFRUTE CON ACTIVIDADES MATEMÁTICAS.⁶⁵

FLOW IN MATHEMATICS: CONCENTRATION AND ENJOYMENT IN THE MATH CLASSROOM

Montoro Medina, A. B., Gil Cuadra, F.

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias experimentales
Universidad de Almería

Resumen. *Cuando una persona experimenta flujo se encuentra tan concentrada en la actividad que está llevando a cabo que nada más parece importarle: se aísla de lo que sucede a su alrededor, pierde la noción del tiempo y disfruta de la actividad. Esto provoca que el sujeto repita la actividad para volver a vivir dicha experiencia. En este trabajo se analizan, a través de un cuestionario y entrevistas, los tipos de actividades matemáticas que producen flujo en una muestra de estudiantes universitarios, y algunas de las características que hacen más atractivas a las matemáticas.*

Palabras clave. *Experiencia de flujo, motivación en matemáticas, educación matemática, experiencias de aprendizaje, estudiantes universitarios*

Abstract. *When someone experiences flow they are so concentrated in the activity at hand that nothing else seems to matter. They forget everything around them, lose track of time and enjoy the activity. This feeling provokes the subject to repeat the activity so that they experience it again. The present study analyzes the kind of math activities that produce flow in a sample of university students, and some characteristics that make Mathematics more attractive. For this purpose the research uses a questionnaire and some interviews.*

Key words: *Flow experience, mathematics motivation, mathematics education, learning experiences, University student.*

INVESTIGACIONES PREVIAS

Introducción

Las creencias que tenemos sobre nosotros mismos y sobre las matemáticas, la actitud y motivación con la que afrontamos una tarea y las emociones que sentimos mientras la realizamos son determinantes a la hora de aprender. De ahí que, en las últimas décadas, un número importante de investigaciones en Didáctica de la Matemática comenzaran a centrarse en estos aspectos (Gómez-Chacón, 2010).

⁶⁵ El presente trabajo se ha realizado gracias a la financiación de la Junta de Andalucía, que aprobó la beca predoctoral para la Formación de Personal Docente e Investigador en Áreas de Conocimiento Deficitarias por cuestiones Institucionales, en el Área de Didáctica de la Matemática.

En concreto, existen investigaciones que muestran la influencia de la motivación en el rendimiento en matemáticas (Heine, 1997) y realizan propuestas didácticas para mejorar la motivación intrínseca (Gómez-Chacón, 2005) o para trabajar conjuntamente la dimensión afectiva y cognitiva en la resolución de problemas (Caballero, Guerrero, Blanco y Piedehierro, 2009).

La Teoría de flujo afirma que la calidad de las experiencias que obtenemos al involucrarnos con una actividad está estrechamente relacionada con la necesidad o el interés de volver a realizarla (Nakamura y Csikszentmihalyi, 2002). En definitiva, trata la motivación como una respuesta a las emociones vividas mientras se realizaba la actividad en ocasiones anteriores.

Teoría de flujo

Los estados de flujo son estados de profunda concentración en la tarea que se está llevando a cabo, en los cuales el sujeto se aísla de lo que sucede a su alrededor, olvidándose de sí mismo y de sus problemas, y perdiendo, en ocasiones, la noción del tiempo. Durante este estado, la persona siente que tiene el control sobre sus habilidades y la actividad, así como una sensación de actuación sin esfuerzo. Todo esto provoca una experiencia intrínsecamente gratificante, que lleva a la persona a repetir la actividad a menudo para volver a vivir esta experiencia una y otra vez (Reeve, 1994).

Según Csikszentmihalyi (2003) la aparición de estos estados depende de la tarea, la persona y el entorno en el que se realiza. En concreto, Nakamura y Csikszentmihalyi (2002) sostienen que para que dicha experiencia se produzca es necesario proporcionar metas claras, retroalimentación inmediata y desafíos acordes con las habilidades del sujeto.

Más concretamente, afirman que una actividad es gratificante para un sujeto si le enfrenta a un desafío que puede superar. En contraste, aunque el nivel de desafío y habilidad estén en equilibrio, si el sujeto no encuentra la actividad desafiante, siente apatía; si los desafíos son demasiado altos siente frustración y ansiedad; y si son demasiado bajos en relación a sus capacidades siente aburrimiento (Csikszentmihalyi y Csikszentmihalyi, 1998). Jackson y Csikszentmihalyi (2002) representan esta situación mediante el Modelo de los cuadrantes de flujo (Figura 1).

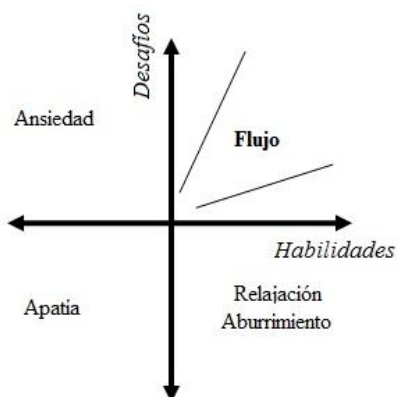


Figura 1: Modelo de los cuadrantes de flujo

Estados de flujo y educación

Desde que Csikszentmihalyi introdujo la teoría de flujo en 1975, numerosos investigadores la han aplicado al deporte (Jackson y Csikszentmihalyi, 2002), a la psicología (Csikszentmihalyi y Csikszentmihalyi, 1998), al trabajo (Rodríguez, 2009) y a la educación (Heine, 1997; Whalen, 1997; Larson, 1998; Schweinle, Turner y Meyer, 2002, 2008).

Los estados de flujo adquieren importancia en el campo de la educación debido a su influencia en la mejora del rendimiento académico (Larson, 1998) y en el compromiso con la actividad que lo produce (Whalen, 1997; Nakamura, 1998; Hektner y Csikszentmihalyi, 1996). La persona se siente atraída por actividades que proporcionan desafíos acordes con sus habilidades, lo que hace que se incrementen y desarrollen nuevas destrezas. Es decir, estaríamos ante una situación ideal para el aprendizaje.

No obstante, hay que señalar que la mayoría de estas investigaciones se han realizado con personas con especial talento en la actividad que se pretende analizar (Heine, 1997; Whalen, 1997; Nakamura, 1998), y que el modelo de los cuadrantes de flujo no se adapta bien cuando nos encontramos en una clase común. En esta situación, los mayores niveles de eficacia y afecto (motivación y emoción) se producen cuando el sujeto percibe desafíos ligeramente superiores a los que recibe normalmente pero siente que tiene grandes habilidades para superarlo. De hecho, los desafíos pueden verse como una amenaza a la eficacia, sobre todo cuando las habilidades son bajas (Wigfield y Eccles, 2001; Schweinle, Turner y Meyer, 2002, 2008).

Por otro lado, Heine (1997) analizó las diferencias en la metodología de trabajo y el nivel de complejidad de las tareas realizadas en los grupos-clases que mantuvieron o aumentaron el nivel de flujo de sus estudiantes y la de los grupos-clases que la disminuyeron. Así observaron que los que lo aumentaron dedicaban más tiempo al trabajo individual o en grupo y a los debates, así como a realizar ejercicios de nivel de complejidad medio, es decir, aplicar contenidos conocidos a una situación diferente o buscar relación con los que ya se conocen.

Hay que señalar que no existe una única forma de hacer operativa la identificación de experiencias de flujo. Dependiendo del autor, se utilizan todos o algún subconjunto de los indicadores propuestos por Csikszentmihalyi (2003), argumentando que los demás pueden considerarse como prerrequisitos para alcanzarlos.

NUESTRA INVESTIGACIÓN

Tras la revisión del marco teórico anteriormente descrito, nos surgieron los siguientes interrogantes:

1. ¿Puede un alumno sin especial talento matemático experimentar flujo realizando alguna actividad matemática?
2. ¿Cuál es la mejor forma de identificar el flujo en matemáticas?
3. ¿Qué actividades matemáticas producen flujo con mayor frecuencia en estudiantes universitarios?

4. ¿La titulación o la experiencia previa con las matemáticas son factores que determinan diferencias en las actividades con las que los estudiantes sienten flujo?
5. ¿Qué características hacen más atractivas las actividades?

Nuestro trabajo pretende dar respuesta a las cuestiones anteriores, aunque en el estudio actual nos centraremos en las dos primeras. Las restantes se tratarán en profundidad en posteriores estudios, aunque en el presente se aporten algunos datos.

METODOLOGÍA

El presente es un estudio descriptivo de tipo exploratorio e interpretativo basado en la aplicación de un cuestionario abierto y la realización de entrevistas.

Participantes

Se escogieron 121 estudiantes de la licenciatura de Matemáticas, Ingeniería y Maestro de Educación Primaria por el distinto papel que juegan las matemáticas en su titulación: elemento central, instrumental y materia a enseñar a sus futuros alumnos, respectivamente. Por cuestiones de disponibilidad, se seleccionaron sujetos que cursan estudios en las universidades de Almería y Granada. Estos estudiantes colaboraron de forma voluntaria, dedicando aproximadamente 30 minutos a rellenar un cuestionario.

Para profundizar en los datos obtenidos a través del cuestionario, se entrevistaron a seis estudiantes para Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Almería, escogidos intencionalmente: porque no sentían flujo con las matemáticas (2 participantes), porque sentían flujo con las matemáticas y les gustaban (2 participantes) y porque sentían flujo pero no les gustaban las matemáticas (2 participantes).

Cuestionario

El instrumento principal de recogida de información es un cuestionario abierto que consta de dos partes. La primera parte es una adaptación del utilizado por Whalen (1997) con la que se pide a los estudiantes que nombren las actividades matemáticas y de su vida diaria que les producen cada una de las características de flujo consideradas por Csikszentmihalyi (2003), esto es, concentración, aislamiento de lo que sucede alrededor, pérdida de la noción del tiempo, sensación de control, sensación de actuación sin esfuerzo, sensación agradable, claridad de metas, retroalimentación inmediata y equilibrio entre habilidad y reto (Anexo). Este autor declara que cuando una persona experimenta flujo con una actividad están presentes la mayoría de las características anteriores (ítem 9).

La segunda parte del cuestionario recoge información de los estudiantes sobre su experiencia previa con las matemáticas, la percepción que tienen de su habilidad en matemáticas y los aspectos positivos y negativos de las actividades matemáticas.

Entrevistas

Para comenzar, se proporcionaron ejemplos de experiencias de flujo (Csikszentmihalyi y Csikszentmihalyi, 1998, p.141) y se les pidió identificar actividades de su vida diaria que le proporcionan habitualmente estos estados.

A continuación se les instó a reflexionar sobre las actividades matemáticas que les producían estos estados, las características que las hacían distintas de las demás actividades matemáticas, y si lo sentían con el resto de actividades matemáticas que habían considerado otros estudiantes.

Análisis de datos

Para el análisis de los datos de los cuestionarios se procedió a la determinación de categorías emergentes a los datos obtenidos (Tabla 2), utilizando el análisis de contenido (Gil y Rico, 2003), y la codificación de las respuestas en función de estas categorías. Para controlar la fiabilidad de este proceso se ha realizado una categorización paralela por un experto a una pregunta (seleccionada al azar) y se detectó un índice de coincidencia del 87%.

Realización de operaciones. Ejercicios rutinarios o aplicación de algoritmos. Resolución de problemas. Pasatiempos matemáticos. Utilización de aplicaciones informáticas. Realización de exámenes. Enseñar matemáticas. Comprender ideas nuevas o demostraciones. Desarrollar ideas o demostraciones. Utilizar materiales. Participar en competiciones. Trabajar en grupo. Estudiar. Concluir la tarea. Comprobar resultados. Aprobar.

Tabla 2. Categorías de respuesta dadas por los sujetos sobre actividades matemáticas

Resultados

Resultados del cuestionario

En un primer momento, y siguiendo la idea de Csikszentmihalyi (2003), consideramos que una persona experimenta flujo con una actividad cuando la identifica en el ítem 9. Sin embargo, al estudiar con qué frecuencia los participantes del estudio señalan una determinada actividad en cada característica de la experiencia de flujo y simultáneamente como actividad de flujo (en actividades matemáticas y de la vida diaria) vemos que la concentración, pérdida de la noción del tiempo, aislamiento de lo que sucede alrededor y la sensación agradable aparecen con mayor frecuencia vinculadas al flujo que el resto de características.

Diremos por tanto, que un estudiante experimenta flujo con una actividad si le proporciona estas sensaciones (ítems 1, 4, 5 y 8). Así, por ejemplo, aunque un cuarto de

los estudiantes identifican la realización de operaciones aritméticas como actividad de flujo (ítem 9), consideramos son muchos menos los estudiantes que verdaderamente experimentan flujo realizando operaciones ya que el porcentaje de estudiantes que afirman concentrarse y disfrutar con ellas no llega al 10%.

En nuestra muestra, aproximadamente el 80% de los estudiantes identifican al menos una actividad matemática con la que experimentan flujo, siendo la resolución de problemas y los ejercicios rutinarios las actividades que con mayor frecuencia producen flujo en los participantes en el estudio (40% y 17% de los estudiantes, respectivamente).

Diferencias en función de la titulación

Debido a las actividades matemáticas a las que se enfrentan diariamente los estudiantes en sus titulaciones, vemos que mientras que las principales actividades para maestros e ingenieros son la realización de ejercicios rutinarios y resolución de problemas, los matemáticos identifican como actividades de flujo con gran frecuencia el desarrollo de ideas propias o demostraciones y las aplicaciones informáticas. Además, realizar ejercicios rutinarios no supone una actividad de flujo para los matemáticos.

Diferencias en función de la experiencia

Sólo los estudiantes con muy buenas experiencias⁶⁶ afirman experimentar flujo o estar concentrados mientras realizan exámenes. Además, el porcentaje de estudiantes con buenas experiencias que afirman sentir flujo estudiando y resolviendo problemas es mayor que el de estudiantes con malas experiencias. En contraste, no se encuentran diferencias apreciables en el porcentaje de estudiantes que experimentan flujo con ejercicios rutinarios y, con las aplicaciones informáticas experimentan flujo casi el 30% de los estudiantes con malas experiencias. Este último dato confirma el resultado de Chan y Ahern (1999) sobre la reducción de la ansiedad que provocan los entornos multimedia.

Aspectos positivos y negativos de las actividades matemáticas

Al igual que se ha detectado en otras investigaciones, las características de las actividades matemáticas que más atraen a los estudiantes de nuestra muestra son su utilidad o aplicación a situaciones reales (Heine, 1997) y que además supongan un reto mental, una forma de superación personal, de adquisición de nuevas habilidades... (Csikszentmihalyi, 2003). No obstante, hay diferencias en cuanto a la importancia que le dan los distintos colectivos al nivel de dificultad y a su capacidad para entretener.

Un tercio de los estudiantes señalan su complejidad como principal obstáculo para el disfrute de la actividad matemática. Además, afirman sentirse frustrados y desmotivados ante los fracasos o aburridos por la facilidad de la tarea. De ahí que el nivel inadecuado de las actividades, la abstracción y la falta de aplicaciones sean los principales aspectos negativos para experimentar flujo con actividades matemáticas.

⁶⁶ Hacen referencia a los éxitos logrados y el ambiente creado por el profesor.

Resultados de las entrevistas

La realización de las entrevistas nos permitió confirmar la utilidad del cuestionario para identificar actividades de flujo: los entrevistados señalaban como actividad de flujo matemáticas y de su vida diaria, las que actividades que habían considerado en el cuestionario y eran capaces de ejemplificarlas con alguna situación. En contraste, los entrevistados que no identificaban actividades de flujo matemáticas manifestaron su estrés e inseguridad al realizar actividades matemáticas y caracterizan su experiencia con las matemáticas como muy mala.

Además, los entrevistados que sienten flujo con actividades matemáticas enfatizan la necesidad de que plantee un reto que sea alcanzable. Afirman que los ejercicios más rutinarios les producen gran concentración, pero no disfrute. En cambio, los pasatiempos matemáticos y dar clases particulares o explicar contenidos a compañeros proporcionan concentración y disfrute en los entrevistados, aunque no las identificaron en los cuestionarios como actividad de flujo.

Por otro lado, las entrevistas muestran que la complejidad de las tareas, la falta de confianza en sus capacidades para afrontar la tarea y la poca utilidad de los contenidos provocan un rechazo a las matemáticas.

Discusión y posibles vías de continuación

Nuestra investigación proporciona datos empíricos que apoyan la postura de Rodríguez (2009) de identificar el flujo a través de la concentración profunda y la sensación agradable que produce.

Debido al gran porcentaje de estudiantes que han identificado actividades de flujo podemos afirmar que no es necesario tener especial talento para experimentar flujo con actividades matemáticas.

Por otro lado, aunque en nuestros cuestionarios la resolución de problemas es la actividad matemática que se identifica con mayor frecuencia por proporcionar una sensación agradable y concentración profunda (flujo), no todos los sujetos sienten flujo con el mismo tipo de actividades. Sin embargo, manifiestan preferencias por actividades que resulten novedosas, útiles, que establezcan metas claras, proporcionen retroalimentación, retos alcanzables y que permita manipular, dibujar, trabajar con otras personas... En este sentido, resulta interesante estudiar las características de las actividades y del ambiente de clase que favorecen y dificultan los estados de flujo.

En concreto, es necesario estudiar el papel de los desafíos en los estados de flujo. Son varios los estudios que afirman que en clases comunes pueden verse como una amenaza a la eficacia, sobre todo cuando nos encontramos con estudiantes con poca autoestima. En nuestros datos, los estudiantes se sentían desafiados con la resolución de problemas, y las entrevistas nos mostraron que sólo los problemas novedosos y que entrañaban un desafío le proporcionaban sensación agradable. No obstante, no se pueden obtener conclusiones generales debido al reducido número de estudiantes entrevistados y a los criterios de selección utilizados.

Por otro lado, queda pendiente para un estudio posterior analizar qué entienden nuestros estudiantes por problemas.

En varias investigaciones se ha mostrado que el modelo de los cuadrantes de flujo no se adapta bien en clases comunes. En relación a esto, Rodríguez (2009), en un estudio con docentes, modificó este modelo añadiendo la creencia de eficacia como predictor del flujo. Por ello, consideramos adecuado “testar” ambos modelos en distintos entornos académicos: estudiantes de primaria, secundaria, universitarios...

Además, sería interesante estudiar el porcentaje de estudiantes que sienten flujo con actividades matemáticas en niveles inferiores, si los estados de flujo varían a lo largo de la vida académica y si son determinantes a la hora de continuar sus estudios.

Referencias

- Caballero, A., Guerrero, E., Blanco, L.J., Piedehierro, A. (2009). *Resolución de problemas de matemáticas y control emocional*. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 151-160). Santander: SEIEM.
- Chan, T.S., y Ahern, T.C. (1999). Targeting motivation: adapting flow theory to instructional design. *Journal Educational computing research*, 21 (2), 151-163.
- Csikszentmihalyi, M. (2003). *Fluir. Una psicología de la felicidad* (N. López. Trad.) (9 ed.). Barcelona: Kairós. (Trabajo original publicado en 1990).
- Csikszentmihalyi, M., y Csikszentmihalyi, I.S. (1998). *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del Flujo en la Conciencia* (J. Aldekoa. Trad.). Bilbao: Desclée de Brouwer. (Trabajo original publicado en 1998).
- Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesor de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (1), 27-47.
- Gómez-Chacón, I.M. (2005). Motivar a los alumnos de secundaria para hacer matemáticas. En MEC (Eds.) *Matemáticas: PISA en la práctica. Curso de formación de profesores*. Recuperado el 7 de Junio de 2010, de <http://www.mat.ucm.es/~imgomez/almacen/pisa-motivar>.
- Gómez-Chacón, I.M.^a. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM
- Heine, C. A. (1997). *Tasks Enjoyment and Mathematical Achievement*. Disertación doctoral no publicada, Universidad de Chicago, Illinois.
- Hektner, J.M., y Csikszentmihalyi, M. (1996, Abril). A longitudinal exploration of flow and intrinsic motivation in adolescents. *Documento presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association*. New York.
- Jackson, S.A., y Csikszentmihalyi, M. (2002). *Fluir en el deporte* (M. Valenciano. Trad.). Barcelona: Paidotribo. (Trabajo original publicado en 1999).
- Larson, R. (1998). Flujo y escritura. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi, *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia* (pp. 151-169). Bilbao: Desclée de Brouwer.

- Nakamura, J. (1998). Experiencia óptima y las aplicaciones del talento. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi (Eds.), *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del Flujo en la Conciencia* (pp. 71-90). Bilbao: Desclée de Brouwer.
- Nakamura, J., y Csikszentmihalyi, M. (2002). The concept of flow. En C.R. Snyder y S.J. Lopez (Eds.), *Handbook of Positive Psychology* (pp. 89-105). Oxford: Oxford University Press.
- Reeve, J. (1994). *Motivación y emoción* (A.M. Lastra. Trad.). Madrid: Ed. McGraw-Hill. (Trabajo original publicado en 1992).
- Rodríguez, A.M. (2009). *The story flows on: A multi-study on the flow experience*. Tesis doctoral no publicada. Universitat Jaume I, España. Recuperado el 15 de Junio de 2010 de http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0714109-114559/index_cs.html.
- Schweinle, A., Turner, J.C., y Meyer, D. K. (2002, Agosto). Motivational and affective quality of students' experiences in mathematics classrooms. *Documento presentado en el Annual Meeting of the American Psychological Association*. Chicago.
- Schweinle, A., Turner, J.C, y Meyer, D.K. (2008). Understanding young adolescents' optimal experiences in academic settings. *The Journal of Experimental Education*, 77 (2), 125-143.
- Whalen, S.P. (1997). Assessing flow experiences in highly able adolescent learners. *Documento presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Chicago.
- Wigfield, A., y Eccles, J. S. (2001). The development of competence beliefs, expectancies for success, and achievement values from childhood through adolescence. En A. Wigfield y J. S. Eccles (Eds.), *Development of achievement motivation* (pp. 91-120). San Diego, CA: Academic Press.

ANEXO: PARTE I DEL CUESTIONARIO PARA IDENTIFICAR ACTIVIDADES DE FLUJO.

Las siguientes afirmaciones hacen referencia a experiencias que has podido tener a lo largo de tu vida. Indica qué actividades matemáticas y de otros campos te las han proporcionado.

Puedes enumerar más de una actividad para cada afirmación y repetirlas si se ajustan a más de una.

Actividades matemáticas	Otras actividades
1. “Mi atención está totalmente centrada en lo que estoy haciendo”	
2. “Me desafía a mejorar mis habilidades, y creo que tengo posibilidades de superar el reto planteado”	
3. “Realizo las acciones adecuadas de forma casi automática”	
4. “Estoy tan involucrado/a en lo que estoy haciendo que pierdo la noción del tiempo”	
5. “Hace que me aísle de lo que sucede a mi alrededor: me olvido de todo”	
6. “La actividad establece claramente lo que se pretende”	
7. “Me hace sentir que lo estoy haciendo bien”	
8. “Es una experiencia agradable, que me hace sentir bien”	
9. ¿Qué actividades combinan al mismo tiempo la mayoría de estas características?	

LA INTEGRAL DEFINIDA EN BACHILLERATO. RESTRICCIONES INSTITUCIONALES DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

THE DEFINITE INTEGRAL, INSTITUTIONAL RESTRICTIONS OF THE UNIVERSITY ACCESS TESTING

Ordóñez Cañada, L., Contreras de la Fuente, A.

Universidad de Jaén

Resumen. *En este trabajo se aportan los resultados de una investigación, realizada con cuatro grupos de estudiantes de 2º de bachillerato de la Comunidad Autónoma Andaluza, sobre la incidencia de las pruebas de acceso a la universidad (PAU) en los significados de la integral definida, en cuanto a los posibles sesgos producidos. En primer lugar se detectan los significados de referencia que se comparan posteriormente con los obtenidos en las PAU, después se analiza el significado implementado en el aula. Por último, se dan algunas implicaciones para la enseñanza de la integral definida.*

Palabras clave: integral definida, enseñanza, enfoque ontosemiótico, restricciones institucionales, pruebas de acceso a la universidad.

Abstract. *On this paper results are provided from a research conducted with four groups of students from the 2nd year of baccalaureate (precollege students) from Andalusia Autonomous Community. We evaluate the incidence the university entrance exams (Pruebas de Acceso a la Universidad - PAU) have on the meanings of definite integral in relation to the produced biases. On a first stage, meanings of reference are pinpointed; on a second stage they are compared to the ones produced in PAU exams; later on the classroom implemented meaning is analyzed. Finally, some implications are offered in order to teach the definite integral.*

Key words: Definite integral, teaching, ontosemiotic focus, institutional restrictions, university entrance exams.

1. INTRODUCCIÓN

La integral definida es una de las nociones que se tratan en el currículo de segundo de Bachillerato y por ello es objeto de una evaluación externa por medio de las Pruebas de Acceso a la Universidad⁶⁷. Diversos investigadores han puesto de manifiesto que la tendencia que se observa en la enseñanza del concepto es la de seguir un desarrollo casi exclusivamente algebraico, ligado a la operación inversa de la derivación y a un cálculo de áreas puramente geométrico basándose en métodos algorítmicos y donde la representación gráfica tiene un papel secundario. Se trata de un problema didáctico de gran importancia en los currículos de diferentes países y, por tanto, generador de

⁶⁷ PAU en lo sucesivo

diversos trabajos de investigación (Berry y Nyman, 2003; Camacho, Depool y Garbín, 2008; Carlson, Persson y Smith, 2003; Autores, 2005; Autores, 2010; Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001; Labraña, 2001; Autores, 2007; Thompson y Silverman, 2007; Turégano, 1994; Wenzelburger, 1993).

Consideramos que las PAU tienen una gran influencia en la enseñanza y aprendizaje en 2º de bachillerato y, en concreto en la integral definida, puesto que los profesores tienen que preparar a sus alumnos con el objetivo de superar estas pruebas de evaluación tras la instrucción recibida, conociendo que la nota puede tener una gran trascendencia para el alumno. Por todo lo anterior, las PAU pueden llegar a ser verdaderas restricciones institucionales. Estas consideraciones nos han llevado a proponer como problema de investigación la influencia de las PAU en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida, lo que podemos concretar en las siguientes cuestiones: ¿Cuáles son las restricciones institucionales planteadas por las PAU en cuanto al objeto integral definida en 2º de bachillerato para la comunidad autónoma andaluza?, ¿Cómo influyen dichas restricciones en los significados realmente implementados en el aula y en los significados personales de los alumnos?

Este trabajo, que desarrolla un problema de investigación original, tiene como primer apartado los objetivos a tratar y la metodología. Posteriormente, se abordan los significados institucionales de referencia, el significado en las PAU, en los manuales, en los apuntes de clase y los significados personales. Por último, se extraen conclusiones de cara a la enseñanza de la integral definida en 2º de Bachillerato.

2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Desarrollamos los objetivos complementados con la metodología pertinente. La comunicación tiene como objetivo general identificar, describir y explicar la influencia que las restricciones institucionales relacionadas con las Pruebas de Acceso a la Universidad puedan tener en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida en 2º de Bachillerato, todo ello según el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006), ya que se trata de un enfoque conceptual de tipo holístico capaz de abordar la complejidad ontosemiótica de la enseñanza de la integral definida. Se supone que dicho enfoque es suficientemente conocido por la comunidad de investigadores, por lo que no se desarrolla en detalle.

El objetivo general planteado lo hemos desarrollado según los siguientes objetivos específicos y las metodologías para su consecución que se exponen según las diferentes características de cada uno de ellos.

O1: Establecer el significado de referencia de la integral definida determinando las configuraciones epistémicas que lo forman.

Tras un estudio histórico-epistemológico del concepto de integral definida y con la oportuna adaptación de la historia de las matemáticas, se ha elaborado el significado institucional de referencia para nuestra noción objeto de estudio. Dicho significado está descompuesto en diferentes configuraciones epistémicas, cada una de las cuales puede considerarse como un “sentido” distinto de la integral definida.

O2: Estudio del significado que puede extraerse de las Pruebas de Acceso a la Universidad en la Comunidad Autónoma de Andalucía, determinando sesgos, ausencias, etc., respecto del significado de referencia.

Utilizando la terminología de Azorín y Sánchez Crespo (1986) el universo de nuestro estudio se centra, por un lado, en los ejercicios sobre integral definida propuestos en las PAU de la Comunidad Autónoma de Andalucía en los últimos 10 años; por otro lado, en los libros de texto de las editoriales de mayor difusión en la Comunidad Autónoma de Andalucía.; y, por último, la población de estudiantes, que está constituida por los estudiantes de 2º de bachillerato de la Comunidad Autónoma de Andalucía, ya que la enseñanza del concepto de integral definida pertenece a este nivel educativo. La población objetivo son los estudiantes de Jaén, de donde se han escogido cuatro grupos que consideramos estándar. *O3: Análisis de la enseñanza de la noción de integral definida a través del estudio de los libros de texto y en un contexto institucional determinado por medio del análisis de los apuntes de clase de cuatro grupos seleccionados.*

Para el estudio de las PAU, de los libros de texto y de los apuntes de clase, se ha realizado un análisis de contenido. Fox (1981) indica que dicho análisis comienza por elegir la unidad de contenido a analizar y que en nuestro caso serán las configuraciones epistémicas.

O4: Caracterización de los significados personales logrados por los alumnos tras la implementación de la enseñanza, mediante la elaboración y aplicación de un cuestionario.

Para ello realizamos un cuestionario a los estudiantes de los cuatro grupos seleccionados, el cual vino precedido de un cuestionario piloto cuyo objetivo era mejorar el cuestionario definitivo, y, seguido de unas entrevistas semi-estructuradas que pretendían clarificar ciertas respuestas de los estudiantes.

3. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN. DISCUSIÓN

3.1 Significado institucional de referencia

Describimos a continuación cada una de las configuraciones epistémicas (CE) que conformarán el significado de referencia de la integral definida atendiendo a las entidades primarias que se ponen en juego principalmente y que las caracterizan. Para determinar una configuración epistémica nos parece fundamental el tipo de situación problema que resuelve ya que estimamos que movilizará unos determinados elementos de significados distintivos y por tanto un significado parcial. Además, no diferenciar entre ellos o no movilizarlos en los diferentes momentos que se suceden en la resolución de situaciones-problema complejas lleva a conflictos semióticos. Utilizamos la integral definida en situaciones de cálculo de áreas, volúmenes, etc. (configuración geométrica); en procesos donde se estudia el cambio y el resultado de la acumulación del cambio (configuración resultado de un proceso de cambio); hay situaciones en que se interpreta como inversa de la derivada (configuración inversa de la derivada); pero en otras es necesario considerarla como el límite de una suma (configuración de aproximación al límite); por último, en ocasiones solamente aparece como un proceso

de cálculo, únicamente se pide su cálculo, son situaciones escolares donde se pretende evaluar la destreza de los estudiantes.

Es claro que en cada una de ellas se podrán utilizar diferentes métodos de cálculo integral que han surgido a lo largo del desarrollo de la noción y que sólo nos han parecido determinantes de otra configuración epistémica si sobrepasan su función de elementos necesarios para el cálculo.

Más explícitamente las configuraciones epistémicas que constituyen el significado de la integral definida son:

1. *Geométrica* (CEgeo). Asociada al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, es decir, situaciones que hacen referencia a un contexto geométrico totalmente estático, ausente de movimiento.
2. *Resultado de un proceso de cambio* (CErpc). Asociada a procesos no estáticos, de una realidad cambiante, siendo el flujo de tiempo un de los aspectos cruciales. Estamos considerando la idea de acumulación que subyace en la integral.
3. *Inversa de la derivada* (CEinvderiv). La relación original entre derivada e integral se puede asociar a los trabajos de Newton y Leibnitz. El conjunto de funciones integrables es cada vez más extenso (condiciones cada vez menos restrictivas).
4. *Aproximación al límite* (CEaproxlim). Está directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dará lugar a la nueva definición de integral definida que éste realiza. Cálculo de áreas por procedimientos de paso al límite.
5. *Algebraica* (CEalg) En la educación secundaria se emplea gran parte del tiempo a practicar las reglas de integración.

3.2 El significado en las PAU

Se ha realizado un estudio de las PAU de Matemáticas II en la Comunidad Autónoma de Andalucía desde los años 1999 hasta 2010 según las configuraciones epistémicas del significado de referencia (tabla 1). Hemos analizado 144 pruebas (cada año se elaboran 6 pruebas con dos opciones, A y B, para que el estudiante elija una de ellas), detectando si se plantea alguna cuestión sobre la integral definida y, en este caso, la configuración epistémica que es necesario conocer y utilizar para resolver la cuestión planteada.

No hay Integral Definida			31	
Integral Definida	CEalg	Directa	28	23'33%
		Aplicación	5	4'17%
	CEgeo	Directa	73	60'83%
		Aplicación	11	9'17%
	CEinvderiv		3	2'5%
			120	100%

Tabla 16. Configuraciones epistémicas en las PAU 1999-2010

En este análisis de las configuraciones epistémicas en las PAU hemos observado fuertes regularidades, en el tipo de situaciones en que aparecen las dos configuraciones epistémicas más utilizadas: la algebraica y la geométrica. En lo que respecta a CEalg

hay dos tipos de situaciones propuestas, aquella en la que se pide el cálculo de una integral definida directamente (la hemos llamado “directa”), y otro tipo de situaciones en las que utiliza dicha configuración en la resolución de una cuestión (la hemos llamado de “aplicación” figura 2) lo que se ejemplifica en las figuras 1 y 2 respectivamente.

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^0 \text{Ln}(2+x) dx$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

Figura 1: CEalg Directa (Pruebas de acceso 2005)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Se sabe que f tiene un máximo local en $x = 1$, que el punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4}$. Calcula a , b , c y d .

Figura 2: CEalg Aplicación (Pruebas de acceso 2008)

De igual forma para la CEgeo, hay situaciones en las que se pide directamente calcular un área mientras que en otras se aplica para resolver la situación y que se ejemplifica en las figuras 2 y 3.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Dadas las funciones $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Figura 3: CEgeo Directa (Pruebas de acceso 2008)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos]

Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

Figura 4: CEgeo Aplicación (Pruebas de acceso 2007)

Observamos que sólo aparecen 3 configuraciones epistémicas olvidándolas restantes. Destaca notablemente la CEgeo pues de las 120 configuraciones utilizadas, 84 corresponden a dicha configuración, esto es un 70%, generalmente utilizada en el cálculo directo de un área (el 60'83% de las configuraciones totales), lo que puede convertirlo en un método para resolver un tipo de situaciones que aparecen frecuentemente en las PAU. Sin embargo, CE-invderiv solamente aparece en tres casos (2'5%). Nos parece muy significativo el 27'5% (33 de 120) de la configuración epistémica algebraica, un porcentaje muy alto para una configuración que se basa en métodos de cálculo algorítmico.

3.3 El significado en los libros de texto

Para observar la influencia de este significado que emana de las PAU en la enseñanza nos hemos planteado en primer lugar, analizar los libros de texto, ya que es una herramienta fundamental para obtener información sobre lo significados institucionales de los objetos matemáticos como han mostrado diferentes trabajos de investigación sobre este aspecto (Ortega e Ibañes, 2004; González y Sierra, 2004; Autores, 2003). Así, hemos seleccionado las cinco editoriales de mayor difusión en la Comunidad Autónoma de Andalucía, en sus ediciones desde el 1997 al 2003 y que no han sufrido modificación en el momento de aplicación del cuestionario (2004). De cada una de ellas se ha elegido un libro de 2º de Bachillerato de Ciencias. En cada uno hemos ordenado los ejercicios propuestos al final de cada tema utilizando la misma clasificación realizada para las PAU con el fin de poder comparar ambos significados y cuyos resultados se recogen en la tabla 2.

		PAU	Oxford	Mc Graw-Hill	Edelvives	Santillana	Anaya
CEalg	Directa	23'33%	3,45%		10,29%	10,00%	6,15%
	Aplicación	4'17%	3,45%		1,47%	10,00%	3,08%
	Otras						
CEgeo	Directa	60'83%	72,41%	75,00%	52,94%	75,00%	44,62%
	Aplicación	9'17%	13,79%		11,76%		21,54%
	Otras				10,29%		6,15%
CEinvderiv		2'5%		25,00%	10,29%	5,00%	15,38%
CEaproxlim					2,94%		
CErpc			6,90%				3,08%
		100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabla 17. Distribución de CE en los ejercicios propuestos en los libros de texto

Como puede observarse, la CEgeo es la más utilizada en los ejercicios, siendo los más numerosos los casos de aplicación directa. Aunque hay pocos casos de CEalg hemos de señalar que en todos los libros se estudia primero la integral indefinida y los métodos de integración con lo que ahora sólo se ampliaría el estudio a la aplicación de la regla de Barrow. Observamos también la ausencia casi total de las configuraciones CEaproxlim y CERpc. Todo lo anterior nos indica una gran similitud con lo que sucede en las PAU.

3.4 El significado en los apuntes de clase

Para estudiar el significado implementado y los significados personales seleccionamos cuatro grupos de tres institutos de Jaén en los que impartían clase cuatro profesores diferentes. Se pasó un cuestionario a los alumnos de estos grupos, en total 48 estudiantes (5 del primer grupo, 13 del segundo, 25 del tercero y 5 del cuarto)

En cada grupo recogimos los apuntes de un alumno/a que el profesor escogió pues consideraba que recogía más fielmente lo realizado en clase. Por ello estimamos que dichos apuntes nos pueden dar una buena aproximación del significado implementado en cada grupo en cuanto a las configuraciones epistémicas que trabaja y los modos en que lo hace. En la tabla 3 se recoge la clasificación de las situaciones trabajadas en cada grupo, nuevamente según la clasificación hecha para las PAU, lo que nos permitirá su comparación.

La integral definida en Bachillerato. Restricciones institucionales de las pruebas de acceso a la Universidad

		PAU	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
CEalg	Directa	23'33%	21'43%	14'82%	15'91%	18'18%
	Aplicación	4'17%	7'14%	3'7%	0	0
	Otras		0	3'7%	0	0
CEgeo	Directa	60'83%	42'86%	51'85%	77'27%	72'73%
	Aplicación	9'17%	7'14%	0	2'27%	0
	Otras		0	11'11%	0	0
CEinvderiv		2'5%	21'43%	14'82%	4'55%	9'09%
		100%	100%	100%	100%	100%

Tabla 18. Clasificación de los ejercicios según las CE de las PAU y de los grupos

Observamos que se identifica integral con área (CEgeo es la más trabajada), con un desarrollo centrado en los procedimientos de cálculo de forma casi exclusiva, concretamente en el cálculo de la primitiva y la aplicación de la regla de Barrow. Probablemente los estudiantes de estos grupos asociarán la integral definida con un método de cálculo sin más. Se ignoran cuestiones de acumulación (no aparece CERpc) con lo que carecerán de sentido las aplicaciones donde sea necesario este significado. Así, la mayoría de los estudiantes sólo reconocen como aplicación de la integral definida el área bajo la curva (Berry y Nyman, 2003; Camacho, Depool y Garbín, 2008).

3.5 Significados personales

Como instrumento para caracterizar el significado personal nos propusimos realizar un cuestionario dirigido a los alumnos de 2º de Bachillerato que habían recibido la instrucción correspondiente a la integral definida tal y como hemos comentado en el apartado anterior. Previamente realizamos un cuestionario piloto cuyo objetivo era analizar la eficacia de la herramienta para el análisis de los significados personales. El cuestionario definitivo se completó con entrevistas semiestructuradas, que buscaban clarificar determinadas cuestiones detectadas en la corrección que nos resultaban ambiguas y que nos parecía debíamos concretar ya que podían mostrar conflictos semióticos.

Tras la corrección y codificación hemos obtenido como conclusión que los estudiantes identifican integral-área y que en muchos casos no llegan a diferenciarlas lo que les impide la correcta resolución de las situaciones donde esta diferencia es esencial. Sin embargo, consideran la integral definida como un método: cálculo de una primitiva y aplicación de la regla de Barrow, sin que haya una verdadera conexión con la noción de área estudiada en la geometría elemental. Es por tanto un área muy descontextualizada y estática que no les favorece la conexión a otros contextos. Dado que el lenguaje que más se utiliza en clase es el algebraico, ya que es el requerido en las PAU de forma casi exclusiva, los estudiantes tienen un pobre dominio del registro gráfico. Sus respuestas se basan en cálculos algebraicos que prevalecen sobre cualquier otro a la hora de decidir una solución si encuentran contradicción entre lo obtenido en dos registros distintos, algebraico y gráfico, por ejemplo.

La falta del significado de acumulación, propio de la integral definida que dota de significado, además, a la relación derivada-integral, también se ha puesto de manifiesto.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado la determinación del significado de referencia de la integral definida en el momento del primer encuentro con este concepto y en estudiantes no universitarios, el cual está constituido por las diferentes configuraciones epistémicas que se han establecido en el apartado 3.1. Concluimos que la configuración geométrica es la más utilizada y que, además, la mayoría de las situaciones que se proponen son aquellas en las que se solicita explícitamente el área entre dos curvas y cuya resolución se realiza algebraicamente. En segundo lugar está la CEalg, centrada sobre todo en el cálculo algorítmico directo. Además, no se trabaja apenas la coordinación entre las configuraciones y hay pocos cambios de registro.

Así mismo, hemos caracterizado el significado institucional que se desprende de las PAU y, su comparación con el significado de referencia, nos ha permitido poner de manifiesto que dichas PAU son una gran restricción para la enseñanza de la integral definida a través de un significado aún más sesgado que el anterior. Pero además, la determinación del significado de las PAU ha hecho posible determinar sus efectos sobre la enseñanza en 2º de Bachillerato de Ciencias en la Comunidad Autónoma de Andalucía (los apuntes de clase) y el aprendizaje (el cuestionario y las entrevistas a los estudiantes)

Los resultados de los análisis de los manuales y de los apuntes de clase muestran que hay una gran coincidencia con el desarrollo de las PAU. Se centran en CEgeo y en CEalg, proponiendo, sobre todo, situaciones en las que se pide explícitamente el cálculo del área entre dos curvas o el cálculo de una integral definida respectivamente; usan métodos algebraicos casi exclusivamente, el lenguaje geométrico tiene un papel totalmente secundario y apenas hay situaciones que se resuelvan por dos métodos o sea necesario utilizar dos configuraciones epistémicas en la resolución. Fruto de este tipo de enseñanza, encontramos que el significado personal de los estudiantes de estos grupos es muy incompleto. No podemos esperar que los estudiantes formen por sí mismos un significado de la integral completo. Creemos que es difícil que la Universidad, con una enseñanza muy formal, dote de significado a esta noción.

Referencias

- Azorín, F. y Sánchez-Crespo, J.L. (1986). *Métodos y Aplicaciones del Muestreo*. Madrid: Alianza Editorial.
- Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behaviour*, 22, 481-497.
- Camacho, M., Depool, R. & Garbín, S. (2008) Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática*, 20 (3), 33-57
- Carlson, M. P., Persson, J. & Smith, N., (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the fundamental theorem of calculus. En N.A. Pateman, B.J. Dougherty, J. Zilliox (Eds) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 165-172. Joint Meeting of PME and PMENA, Hawaii, USA.

- Autores (2005). Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Coordinadores) *Investigación en Educación Matemática*. IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, Córdoba. España.
- Autores (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 367–384.
- Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. En M. van den Heuvel-Panhuizen, (Eds), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 297-304. Utrecht, The Netherlands.
- Fox, D. (1981). El proceso de investigación en educación. Pamplona: EUNSA.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22 (2/3), 237–284.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325–355.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26 (1), 39–88.
- González, M.T.; Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza de secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389–408.
- Labraña, P.A. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral definida*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela. España.
- Autores (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (eds) *Investigación en Educación Matemática*. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Granada, España.
- Autores, (2007) *Significados históricos-epistemológicos y escolares de la Integral Definida. Restricciones planteadas por las Pruebas de Acceso a la Universidad*. Trabajo presentado en el grupo de trabajo Didáctica del Análisis en el XI Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Universidad de La Laguna, La Laguna, España.
- Ortega, T. y Ibañez, M. J. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. *Números*, 57, 19–32.
- Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ordóñez Cañada, L., Contreras de la Fuente, A.

- Turégano, P. (1994). *Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Tesis doctoral. Universitat de València, Valencia. España.
- Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral definida. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 5, 93-123.

LA ANSIEDAD MATEMÁTICA Y SU RED DE INFLUENCIAS EN LA ELECCIÓN DE CARRERA UNIVERSITARIA

MATHEMATICS ANXIETY AND ITS INFLUENCE ON THE CHOICE OF THE UNIVERSITY DEGREE

Pérez-Tyteca, P., Castro Martínez, E.

Universidad de Granada

Resumen. *En este trabajo se realiza una reflexión sobre la red de influencias de la ansiedad matemática en el proceso de toma de decisiones relacionadas con la elección de titulación universitaria. Para ello construimos un modelo que recoge las relaciones existentes entre este constructo y diversos factores como son el género, la autoconfianza, la utilidad o el rendimiento. Los resultados muestran, entre otras cosas, que aquellos alumnos con mayor ansiedad tienden a rendir menos en matemáticas lo que condiciona la elección de la carrera universitaria.*

Palabras Clave. Ansiedad matemática, titulación universitaria, modelo, género, rendimiento

Abstract. *In this paper we reflect on the influences of mathematics anxiety in the choice of university degree. We construct a model that reflects the relationship between this construct and various factors such as gender, self-confidence, utility or achievement. The results show, among other things, that those students with higher anxiety tend to underperform in mathematics which determines the choice of university degree.*

Key Words. Mathematics anxiety, university degree, model, gender, achievement

La ansiedad matemática está recibiendo atención continuada desde hace más de tres décadas, en gran parte debido al supuesto de que afecta a muchas personas y pone en peligro su rendimiento y participación (Suinn, Taylor & Edwards, 1988).

Hay diferentes definiciones de ansiedad matemática. Una de las primeras fue la de Richardson y Suinn (1972) que la definen como “el sentimiento de tensión y ansiedad que interfieren en la manipulación de números y en la resolución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones tanto cotidianas como académicas” (p. 551).

Ésta y otras definiciones de ansiedad conllevan dos asunciones inherentes. Primera, que la ansiedad matemática está relacionada con la ansiedad general (Hendel, 1980), con la ansiedad hacia los exámenes y con la producida por otras materias académicas, pero que también es específica (Hembree, 1990), es decir, la ansiedad matemática existe en personas que no tienen otros tipos de ansiedad (Morris, 1981).

En este trabajo consideramos la ansiedad matemática como un estado afectivo caracterizado por la ausencia de confort que puede experimentar un individuo en situaciones relacionadas con las matemáticas tanto de su vida cotidiana como académica, y que se manifiesta mediante un sistema de respuestas que engloban una serie de “síntomas”, como son: tensión, nervios, preocupación, inquietud, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental.

La comunidad investigadora es consciente de la influencia de los factores afectivos en el aprendizaje de las matemáticas y por este motivo en los últimos años se ha incrementado el número de trabajos que profundizan en ella (véase Gómez-Chacón, 2010).

El domino afectivo se define, según McLeod (1992), como “un extenso rango de estados de ánimo que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos las creencias, las actitudes y las emociones” (p. 245).

A estos tres componentes específicos se les denomina descriptores básicos (algunos autores añaden los valores como cuarto descriptor básico). Las creencias forman parte del conocimiento subjetivo del individuo, se forman a partir de la experiencia y son estables en el tiempo. La actitud es la predisposición que tiene un sujeto (influenciada tanto por las creencias como por las emociones) a responder de manera positiva o negativa ante un estímulo. Es más intensa pero menos estable que las creencias. Las emociones, por su parte, son reacciones viscerales a estímulos concretos, que son muy intensas pero carecen de estabilidad en el tiempo.

Con respecto a la ubicación de la ansiedad matemática dentro de este esquema, como indican Hart (1989) y Evans (2000), algunos investigadores en educación matemática consideran la ansiedad matemática como una actitud. Sin embargo McLeod (1992) hace referencia a la adopción del término actitud para referirse a la ansiedad matemática, la confianza, la frustración y la satisfacción apuntando que “no parece adecuado para describir algunos sentimientos más intensos que los estudiantes exhiben en las clases de matemáticas” (p. 576).

Por su parte, los psicólogos sociales categorizan la ansiedad matemática como una emoción, siendo considerada una respuesta visceral.

Consideramos que en el estudio de la ansiedad matemática se deben tener en cuenta ambas caracterizaciones y, por consiguiente, es importante observar tanto las reacciones emocionales viscerales que sufren los alumnos al realizar tareas matemáticas como los sentimientos interiorizados y estables que experimentan hacia la materia.

LA ANSIEDAD MATEMÁTICA Y SU RED DE INFLUENCIAS

En el campo de la educación matemática el estudio de la ansiedad se ha abordado persiguiendo diferentes fines.

Una de las cuestiones que han sido estudiadas ha sido la relación de la ansiedad y la autoconfianza: los alumnos con más ansiedad matemática también presentan menor confianza en sus habilidades matemáticas. Ambos constructos están correlacionados de forma negativa (Bursal y Paznokas, 2006; Isiksal, Curran, Koc y Askun, 2009).

Los trabajos que profundizan en la relación género-ansiedad matemática son numerosos, aunque no existe consenso en cuanto a sus resultados. Trabajos en los que se ha comprobado la existencia de una tendencia que lleva a las mujeres a reportar mayor ansiedad que los hombres son los de Valero (1999), Gil, Blanco y Guerrero (2006) o Guillory (2009). A este respecto, Perina (2002) cuestiona la existencia de diferencias de género al apuntar que aunque las mujeres, por norma general, en el momento de responder a los instrumentos de medida informan de más experiencias de ansiedad matemática que los hombres, esto puede ser debido, no tanto a que sean más ansiosas, sino a que sean más propensas a admitirlo. En la misma dirección, Reyes (1984) indica que las mujeres son más dadas a informar sobre su ansiedad en general.

Pero también existen trabajos que no hallan diferencias de género en la ansiedad matemática de los participantes (Joannon-Belows, 1997; Jost, 1997; Lewellyn, 1989) y otros en los que las diferencias que se observan son a favor de las mujeres (Eshaq, 2006; De la Torre, Mato y Rodríguez, 2009).

En sus revisiones de la literatura, tanto Aiken (1970) como Reyes (1984) encuentra una clara y consistente relación entre ansiedad matemática y rendimiento, de modo que un alto rendimiento está relacionado con una baja ansiedad y esto se cumple para todos los grados; desde el colegio hasta la universidad. Ashcraft y Krause (2007) a este respecto indican que los alumnos con un alto nivel de ansiedad matemática sacrifican el ser meticuloso en la resolución de una tarea por la velocidad al realizarla; de este modo terminan la resolución lo más rápido posible reduciendo al máximo el tiempo de experimentación de la ansiedad.

Un efecto indirecto de la ansiedad matemática que pasa por el bajo rendimiento, es evitar tomar cursos relacionados con las matemáticas para así huir del sentimiento de ansiedad que éstos producen (Tobias y Weissbrod, 1980), lo que condiciona posteriormente el tipo de carrera universitaria que se puede escoger (Seaman, 1999).

Ashcraft y Kirk (2001), confirman que los alumnos con mayor ansiedad matemática se enrolan en menor número de cursos de matemáticas y alcanzan un grado de aprovechamiento menor en aquellos cursos que toman. Por su parte, Scarpello (2005) observa que aquellos alumnos que tienen menos ansiedad matemática toman itinerarios con asignaturas que requieren mayor nivel de matemáticas que aquellos con mayor grado de ansiedad. A este respecto, trabajos como el de Hackett (1985) concluye que la ansiedad matemática es predictiva del comportamiento de los estudiantes en temas relacionados con la asignatura de matemáticas. Zakaria y Nordim (2008) afirman que existe una gran correlación negativa entre la ansiedad y el grado de motivación, lo que lleva a los alumnos a evitar tomar cursos de matemáticas. De este modo, alumnos capacitados para las matemáticas deciden evitarlas reduciendo sus opciones de elección de carrera universitaria, descartando las titulaciones de ciencias.

Los antecedentes hallados en la literatura, nos dan una idea de la compleja red de relaciones que rodea a la ansiedad matemática, que generalmente son estudiadas de manera aislada. Puesto que consideramos beneficioso estudiarlas de manera conjunta nos hemos planteado como objetivo elaborar un modelo en el que tengan cabida conjuntamente los vínculos más presentes en las investigaciones realizadas en el campo, como son los que unen a la ansiedad matemática con otros factores tales como el género, el rendimiento, la autoconfianza o la elección de titulación. Además incluimos un factor que enriquece el modelo, la utilidad que los alumnos otorgan a las

matemáticas, ya que presuponemos que tiene un papel activo en la toma de decisiones relacionadas con la titulación universitaria a escoger.

METODOLOGÍA

Muestra

La muestra está formada por 1242 alumnos recién ingresados en la Universidad de Granada que cursan titulaciones que posee al menos una asignatura de matemáticas en su primer curso. Pertenecen a 26 titulaciones diferentes clasificadas en 5 niveles según su orientación científico-matemática. El nivel 1 corresponde a las carreras de corte social, el nivel 2 recoge las titulaciones científico-sanitarias, el nivel 3 las orientadas a las finanzas, el nivel 4 las enseñanzas técnicas y el nivel 5 las de marcado nivel matemático. Esta clasificación es la que tomamos como base de la caracterización de la elección de la titulación.

Instrumento

Hemos aplicado un cuestionario con las tres escalas de Fennema-Sherman (1976), la de ansiedad, la de autoconfianza y la de utilidad. Las dos primeras formadas por 12 ítems con 5 posibles respuestas cada una. La tercera fue una adaptación de 6 ítems. Las tres escalas administradas abarcan diferentes aspectos en sus ítems que hemos clasificado del siguiente modo:

- **Ansiedad Matemática**
 - Ansiedad global hacia las matemáticas
 - Ansiedad hacia los exámenes de matemáticas
 - Ansiedad hacia los problemas de matemáticas
- **Autoconfianza**
 - Consideración de las matemáticas dentro del conjunto de asignaturas
 - Seguridad en uno mismo y capacidad percibida para las matemáticas
- **Utilidad de las matemáticas**
 - Utilidad sin especificar en qué ámbito
 - Utilidad para el desarrollo de la vida

A los participantes se les preguntó también por su sexo y por la calificación media en matemáticas en sus estudios conducentes al acceso universitario.

Variables

Las variables que intervienen en el modelo son: la ansiedad global hacia las matemáticas, la ansiedad hacia los problemas y la ansiedad hacia los exámenes como indicadores de la ansiedad matemática (que es una variable latente); la capacidad percibida-seguridad en uno mismo y la consideración de las matemáticas dentro del conjunto de asignaturas como indicadores de la variable latente autoconfianza; la utilidad sin especificar ámbito y la utilidad para la vida como indicadores de la variable

latente utilidad; el género; la calificación media en matemáticas como indicador del rendimiento; y el nivel de orientación científico-matemática de la titulación como indicador de la elección de la titulación.

ANÁLISIS DE LOS DATOS: EL MODELO OBTENIDO

El objetivo que nos hemos planteado lo hemos materializado creando un modelo que comprende las interrelaciones existentes entre los factores arriba especificados. Concretamente el modelo pretende reflejar las relaciones causales establecidas entre las variables y la contribución de los indicadores a las variables latentes. Para ello hemos codificado los datos obtenidos y organizado en una matriz que hemos analizado para encontrar el modelo predictivo que mejor se ajuste a los datos. Con este fin hemos utilizado la modelización con ecuaciones estructurales, ya que permite establecer complejas relaciones que pueden ser analizadas en un solo paso. Este proceso lo hemos llevado a cabo utilizando AMOS en su versión 18, una herramienta estadística asociada al paquete SPSS.

Hemos seguido una estrategia de desarrollo del modelo en la que el propósito del esfuerzo de modelización es mejorar un modelo inicial propuesto a través de pequeñas modificaciones. De este modo hemos obtenido modelos equivalentes que hemos refinado para obtener el mejor ajuste posible a los datos observados. Finalmente, el modelo obtenido es el que se refleja en la figura 1.

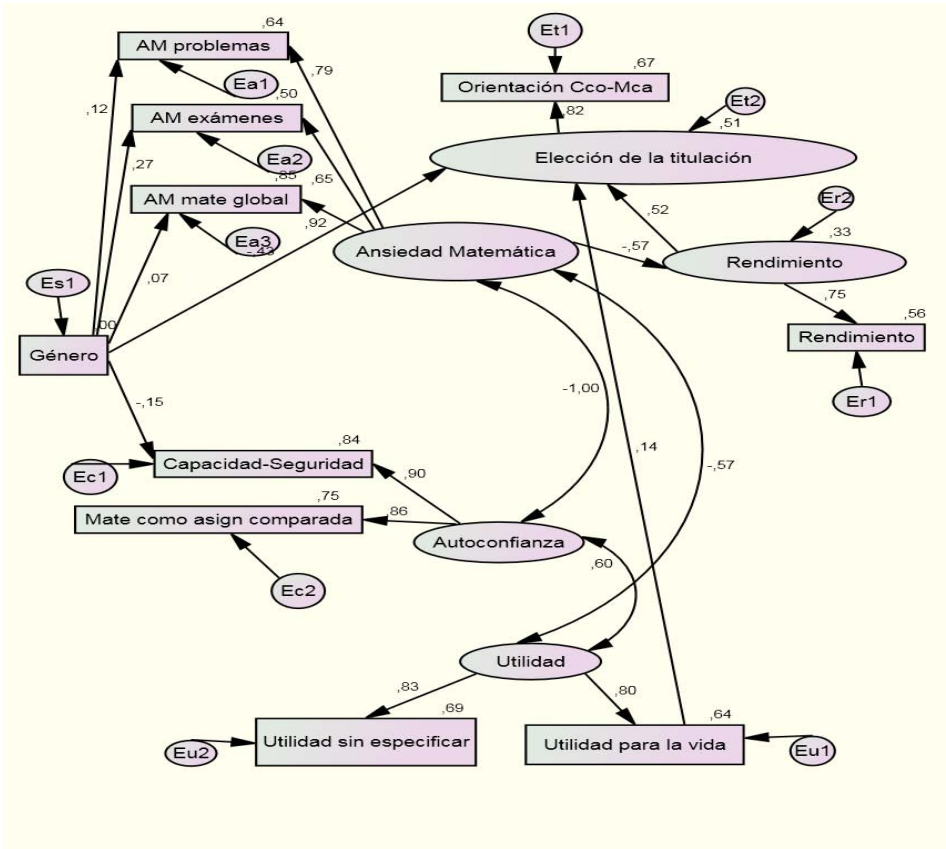


Figura 1. Modelo de interrelaciones propuesto

RESULTADOS

Nuestro modelo cumple las condiciones para poder considerarlo apropiado, ya que ha sido construido a partir de la teoría subyacente y los resultados del análisis indican por un lado que posee una bondad de ajuste aceptable (véase tabla 1) y por otro que todos los parámetros asociados a las relaciones reflejadas son significativos.

	Índice y valor		Criterio aceptabilidad	
Ajuste absoluto	GFI = 0.987	RMR = 0.039	>0.9	<0.05
Ajuste comparativo	CFI = 0.923		>0.9	
Ajuste parsimonial	RMSEA = 0.067		<0.08	

Tabla 1. Índices de bondad de ajuste del modelo

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados (efectos mayores a 0.6) apuntan a que tanto la ansiedad matemática como la autoconfianza y la utilidad están medidas de manera satisfactoria por los subgrupos de ítems anteriormente detallados.

Además, la ansiedad matemática está negativamente correlacionada con la utilidad, lo que indica que un nivel alto de ansiedad matemática está asociado con poca utilidad otorgada a la materia.

Como hemos indicado anteriormente, en la literatura se refleja la relación existente entre la ansiedad matemática y la autoconfianza. Esta relación queda patente en los resultados de nuestro modelo, al existir una fuerte correlación negativa entre ambos constructos. Así, un nivel alto de ansiedad matemática va asociado a una baja autoconfianza. Estos resultados concuerdan con los de trabajos como los de Bursal y Paznokas (2006) o Isiksal et al. (2009).

Los resultados del análisis del modelo muestran también que la utilidad que los estudiantes otorgan a las matemáticas para el desarrollo de su vida tiene un efecto significativo (de signo positivo) en la elección de la titulación según su nivel científico-matemático. Esto quiere decir que cuanto mayor utilidad les otorga un estudiante a las matemáticas en su vida, mayor es la orientación científico-matemática de la titulación que escoge. Este resultado era de esperar, ya que dos de los ítems que hacen referencia a la utilidad para la vida preguntan directamente por el futuro laboral del sujeto.

El género, por su parte, tiene efecto (de signo positivo) sobre las tres subtemáticas de la ansiedad matemática, lo que indica que cuando pasamos de los hombres a las mujeres, aumenta el nivel de ansiedad. Estos resultados coinciden con los de Valero (1999), Gil, Blanco y Guerrero (2006) o Guillory (2009) y consideramos interesante observar, en futuras fases del trabajo, si la causa de que esto ocurra es, como apuntan Reyes (1984) o Perina (2004), que las mujeres son más propensas a relatar sus experiencias de ansiedad.

Como hemos comprobado anteriormente, aquellos alumnos con más ansiedad matemáticas confían menos en sus habilidades, por tanto, era de esperar- como así ha sido- que el género tenga un efecto de signo negativo sobre la seguridad en uno mismo y la capacidad percibida. Esto es, al pasar de los hombres a las mujeres disminuye la seguridad en uno mismo y la capacidad percibida para las matemáticas.

Pero además, el género tiene también efecto significativo sobre la elección de la titulación. El hecho de que dicho efecto sea de signo negativo indica que cuando pasamos de las mujeres a los hombres, aumenta la orientación científico-matemática de la titulación escogida. Así, los hombres son más propensos a tomar carreras técnicas (arquitectura, ingeniería) y de corte matemático (estadística, matemáticas, física) que las mujeres.

Algunos de los motivos de que esto ocurra que se han barajado han sido los relacionados con los estereotipos sociales que identifican las disciplinas más científicas como campos masculinos. A día de hoy estos estereotipos deberían estar erradicados, ya que desde todos los ámbitos de la sociedad se aboga por conseguir la igualdad entre hombres y mujeres.

La relación ansiedad-rendimiento también se pone de manifiesto en el modelo. La ansiedad matemática tiene efecto negativo sobre el rendimiento de forma significativa lo que indica que cuanto mayor es el grado de ansiedad matemática experimentado por

los sujetos, menor es su rendimiento en la materia. Este resultado coincide con los aportados en otros trabajos (Tárraga, 2008; De la Torre, Mato y Rodríguez ,2009).

A su vez, el rendimiento tiene un efecto significativo (y positivo) sobre la elección de la titulación, lo que indica que cuanto mayor es la calificación obtenida por los estudiantes en matemáticas, mayor orientación matemática tiene la titulación que eligen estudiar.

Este resultado indica que la ansiedad matemática tiene un efecto (indirecto a través del rendimiento) sobre la elección de la titulación universitaria a cursar. De este modo, el hecho de que un alumno registre una alta ansiedad matemática conlleva que la carrera universitaria por la que se decante tenga una baja orientación científico-matemática.

Los resultados obtenidos son consistentes con los de trabajos de Ashcraft y Kirk (2001), Hackett (1985), Scarpello (2005) o Zakaria y Nordim (2008), y Muñoz y Mato (2007), que indican que algunas de las consecuencias de la ansiedad matemática son la evitación de cursos que contengan la materia y la limitación por parte de los estudiantes a la hora de escoger un itinerario de bachillerato o una carrera universitaria.

Aunque la creación de este modelo supone un avance en nuestro trabajo, somos conscientes de que el estudio del afecto no puede centrarse únicamente en métodos cuantitativos si quiere atender a la complejidad que lo envuelve. Por este motivo, nuestra intención es recoger información mediante métodos cualitativos que contribuya a la clarificación de la naturaleza de las relaciones propuestas en el modelo.

Referencias

- Aiken, L. R. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of Educational Research*, 40(4), 551-596.
- Ashcraft, M. H. y Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety and performance. *Journal of Experimental Psychology*, 130(2), 224-237.
- Ashcraft, M. H. y Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. *Psychonomic Bulletin y Review*, 14(2), 243-248.
- Bursal, M. y Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. *School Science an Mathematics*, 106(4), 173-180.
- De la Torre, E., Mato, M. D. y Rodríguez, E. (2009). Ansiedade e rendimento en matemáticas. *Revista Galega do Ensino*, 53, 73-77.
- Eshaq, H. A. (2006). *Student anxiety toward mathematics as a factor in the choice of the scientific or the literary study track in saudi Arabian secondary education in Jazan*. Tesis Doctoral. University of Arkansas.
- Evans, J. (2000). *Adults' Mathematical Thinking and Emotions*. Londres: Routledge Falmer.
- Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalog of Selected Documents of Psychology*, 6(31). (Ms. No. 1225).

- Gil, N., Blanco, L., y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 340, 551-569.
- Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM.
- Guillory, M. M. (2009). *A Study Of Preservice Teachers: Is It Really Mathematics Anxiety?* Tesis Doctoral. Massachusetts: University of Massachusetts.
- Hackett, G. (1985). Role of mathematics self-efficacy in the choice of math-related majors of college women and men: A path analysis. *Journal of Counseling Psychology*, 32(1), 47-56.
- Hart, L. E. (1989b). Describing the affective domain: Saying what we mean. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 37-48). New York: Springer-Verlag.
- Hembree, R. (1990). The Nature, Effects, and Relief of Mathematics Anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 33-46.
- Hendel, D.D. (1980) Experimental and Affective Correlates of Math Anxiety in Adult Women. *Psychology of Women Quarterly*, 5, 219-230.
- Isiksal, M, Curran, J. M., Koc, Y. y Askun, C. S. (2009). Mathematics anxiety and mathematical self-concept: considerations in preparing elementary-school teachers. *Social Behavior and Personality*, 37(5), 631-643.
- Joannon-Bellows, F. (1997). *The relationship between high school mathematics teachers' leadership behaviour and students' mathematics anxiety*. Tesis Doctoral. West Hartford: University of Hartford.
- Jost, O. R. (1997). *Computer anxiety, mathematics anxiety and achievement in an adult basic mathematics course*. Trabajo Fin de Máster. Regina: University of Regina.
- Lewellyn, R. J. (1989). *Gender differences in achievement, self-efficacy, anxiety, and attributions in mathematics among primarily Black junior high school students*. Tesis Doctoral. University of Akron.
- McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company.
- Morris, J. (1981) Mathematics Anxiety: Teaching to Avoid it. *Mathematics Teacher*, 74, 413-417.
- Perina, K. (2002). The sum of all fears. *Psychology Today*, 35(6), 19-19.
- Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *The Elementary School Journal*, 84(5), 558-581.
- Richardson, F. C. & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology*, 19(6), 551-554.
- Scarpello, G. V. (2005). *The effect of mathematics anxiety on the course and career choice of high school vocational-technical education students*. Tesis Doctoral. Drexel University.

- Seaman, C. R. (1999). I've got a secret: Math Anxiety. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 11.
- Suinn, RM., Taylor, S., & Edwards, RW. (1988) Suinn Mathematics Anxiety Rating Scale for Elementary School Students (MARS-E): Psychometric and Normative Data. *Educational and Psychological Measurement*, 48, 979-986.
- Tárraga, R. (2008). Relación entre rendimiento en solución de problemas y factores afectivo-motivacionales en alumnos con y sin dificultades del aprendizaje. *Apuntes de psicología*, 26(1), 143-148.
- Tobias, S. y Weissbrod, C. (1980). Anxiety and mathematics: An update. *Harvard Educational Review*, 50(1), 63-70.
- Valero, L. (1999). Evaluación de ansiedad ante exámenes: Datos de aplicación y fiabilidad de un cuestionario CAEX. *Anales de Psicología*, 15(2), 223-231.
- Zakaria, E. y Nordim, N. M. (2008). The effects of mathematics anxiety on matriculation students as related to motivation and achievement. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education*, 4(1), 27-30.

GEOMETRIZACIÓN DEL CURRÍCULUM EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

GEOMETRIZATION OF THE CURRICULUM IN THE MATHEMATICS TEACHER TRAINING

Pinto Leivas, J. C.

leivasjc@yahoo.com.br

Universidade Franciscana de Santa Maria – UNIFRA – Brasil

Resumen. *Esta comunicación es un documento teórico en el que el autor define la geometrización del currículo en la formación docente en matemáticas, cuando a partir de una cuestión sobre que geometría se debe enseñar en la formación docente y las habilidades de la imaginación, la intuición y la visualización puede ser empleado para la innovación de los planes de estudio. Al comprender cómo un proceso geométrico de la utilización de métodos geométricos como un método para entender y representar visualmente los conceptos matemáticos en diversas áreas, ofrece sugerencias a la enseñanza de los números complejos y matrices.*

Palabras clave: formación docente; geometrización del currículo; conexiones; intuición visual; matrices y complejas.

Abstract. *This communication is a theoretical paper in which the author defines geometrization of the curriculum in teacher training in mathematics, when starting from a question on which geometry should be taught in teacher education and skills of imagination, intuition and visualization can be employed for such innovation curricula. By understanding how a geometric process of using geometric approaches as a method to understand and visually represent mathematical concepts in several areas, offers suggestion involving the teaching of complex numbers and matrices.*

Key words: teacher training; geometrization of the curriculum; connections; visual intuition; complex and matrices.

INTRODUÇÃO

Courant e Robbins (2000) ao prefaciarem o livro “O que é Matemática?” fazem sua incursão numa busca de respostas a tal questionamento, afirmando que

A Matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade e o supremo valor da Ciência Matemática; (Courant; Robbins, 2000, prefácio)

Tem-se refletido sobre mudanças sociais e políticas de acesso à escola em virtude de resultados de avaliações nacionais e internacionais como, por exemplo, o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). A escola convive com altos índices de reprovação e evasão escolar e isso exige atitudes arrojadas dos professores, educadores e sociedade, com procedimentos metodológicos e comportamentais adequados, ou seja, é preciso inovar.

Pesquisas em Educação Matemática têm mostrado necessidade de que na formação inicial dos professores seja dado um tratamento adequado aos conhecimentos dos conteúdos do Ensino Fundamental e Médio. Isso não se percebe, ainda, em diversas partes do mundo, como destacam Ball e Ma (Loureiro, 2004) em relatório da *Conference Board of Mathematical Sciences*, no qual dois temas foram discutidos: “a base intelectual da Matemática escolar e a natureza específica do conhecimento matemático necessário para o ensino”. Dentre as recomendações gerais consensuais do documento destaca-se:

[...] recomendação 1. Os futuros professores necessitam de cursos de matemática que desenvolvam uma profunda compreensão da matemática que vão ensinar.

recomendação 3. Os cursos acerca das ideias fundamentais da matemática escolar devem ter por objetivo central um desenvolvimento completo de ideias matemáticas básicas.

recomendação 4. Ao mesmo tempo em que constroem o conhecimento matemático, os cursos de matemática para futuros professores devem desenvolver os hábitos de pensamento próprios a um matemático e dar a conhecer estilos de ensino flexíveis e interativos. (Loreiro, 2004, p. 51)

Este artigo é um ensaio teórico e oferece uma possibilidade para reflexão da prática educativa que o autor julga essencial na formação inicial do professor de Matemática para a Escola Básica brasileira de modo que a área de Geometria possa ocupar um papel mais relevante daquele que ocupa atualmente nessa formação e que possa contribuir para uma melhoria no desempenho do futuro professor de Matemática nos níveis fundamental e médio.

O autor caracteriza o que denomina geometrizar o currículo da Licenciatura, inserindo três aspectos: imaginação, intuição e visualização e oferece um exemplo de como um tema, em geral, desenvolvido de forma algébrica pode ter uma conotação geométrica importante, a saber, os números complexos. Sua inquietação partiu da seguinte questão: **Qual Geometria deve ser ensinada na formação inicial de professores de Matemática?**, uma vez que suas pesquisas iniciais nesse sentido apontavam que em cursos de Licenciatura em Matemática no estado do Rio Grande do Sul, Brasil, temas como Topologia, Geometria Fractal, Tecnologias, Geometria Dinâmica, tendências atualizadas para o ensino de Geometria e Geometrias Não Euclidianas não faziam parte dos currículos de forma sistemática e nem de forma interligada com outras disciplinas curriculares.

Assim, a partir do contato com a literatura, acreditou ser **possível ensinar conceitos geométricos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática a partir de abordagens que envolvam imaginação, intuição e visualização.**

REVISITANDO A LITERATURA

O parecer 9/2001 do Conselho Nacional de Educação do Brasil, institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior. Nessas diretrizes, no inciso III e IV do Art. 2º, que trata da organização curricular, encontram-se outras formas de orientação para a atividade docente, dentre elas o preparo para: “III. O exercício de atividades de enriquecimento cultural; IV. O aprimoramento em práticas investigativas;” (Brasil, 2001, p. 61)

O documento determina que se busquem competências para a atuação profissional devendo-se adotá-las como norteadoras, tanto da proposta pedagógica, em especial do currículo e da avaliação, quanto da organização institucional e da gestão da escola de formação. Para tal

O projeto pedagógico de cada curso, considerado o artigo anterior, levará em conta que:

- I. a formação deverá garantir a constituição das competências objetivadas na educação básica;
- II. o desenvolvimento das competências exige que a formação contemple diferentes âmbitos do conhecimento profissional do professor;
- III. a seleção dos conteúdos das áreas de ensino da educação básica deve orientar-se por ir além daquilo que os professores irão ensinar nas diferentes etapas da escolaridade;
- IV. os conteúdos a serem ensinados na escolaridade básica devem ser tratados de modo articulado com suas didáticas específicas. (Brasil, 2001, p. 63).

Propostas e processos de mudanças curriculares para a escola básica ou para as universidades, embora sejam realizados e divulgados por instâncias governamentais, são elaborados por professores, em geral universitários, indicados das mais diferentes formas. Schubring (1999) aponta que tais reformas não são recentes, destacando o papel desempenhado pela Alemanha, e em particular o de Félix Klein (1927), que idealizou reformas curriculares a partir das universidades, inclusive para o nível médio em escolas técnicas.

Ele percebe a necessidade de mudanças de concepções governamentais bem como dos professores, afirmando seu propósito de não somente referir-se aos estudos da Matemática universitária, mas também a todo aquele do interesse do professor que se preocupa com o seu ensino. Afirma que, desde as primeiras décadas do século XX, os professores de Matemática e de Ciências Naturais das universidades têm manifestado interesse pela formação adequada dos futuros professores, que atendam às necessidades da Ciência. Para ele,

Este fenômeno é bem recente; antes, durante e por muito tempo, se cultivava na Universidade exclusivamente a ciência superior sem levar em consideração em nada as necessidades da Escola e sem cuidar o mínimo da relação com o ensino de Matemática com ela. (Klein, 1927, p. 1).

Minha pretensão de que a área de Geometria seja atendida num currículo inovador para os cursos de Licenciatura em Matemática não segue o que consensualmente é entendido como componente curricular:

[...] matéria ou disciplina acadêmica que compõe a grade curricular de um determinado curso de um determinado nível de ensino. São obrigatórias sua inclusão e ministração com a carga horária determinada na grade, a fim de que o curso tenha eficiência e validade.⁶⁸

⁶⁸ Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Componente_curricular. Acesso em 17abr 2008.

Como pensar, portanto, nos conteúdos escolares contemplando, na Educação Matemática, uma educação geométrica? Nos cursos de Licenciatura de Matemática, se faz necessário que conteúdos de Matemática, de Educação Matemática, de Geometria e de Educação Geométrica sejam abordados de forma conjunta e complementar, buscando eliminar possíveis discriminações entre as disciplinas constituintes da proposta curricular do curso.

Klein (1927, p. 1), logo ao iniciar suas escritas sobre Geometria diz que essa ocupa um posto de honra comparativamente ao que escreveu sobre Aritmética, Álgebra e Análise. Diz que

[...] as linhas gerais de nosso plano estão traçadas, tendo em conta, em primeiro lugar, o que poderia chamar-se atualidade enciclopédica, que nos obriga a proporcionar uma olhada geral sobre a totalidade da Geometria, na qual se encontra todos os conhecimentos alterados que no decorrer dos vossos estudos tereis adquirido, ordenado, classificado e postos para qualquer aplicação que queira dar-lhes.

Diz que a formação matemática geral, além do conhecimento dos detalhes adquiridos em ação continuada, precisa ter um amplo conceito das relações de dependências, tanto técnicas quanto históricas, que existem entre eles.

Para evitar a má inteligência que pode ocasionar a aparente separação desta parte geométrica da aritmética explicada no primeiro semestre, devemos dizer que nossa tendência nestas lições, como em todas as de caráter geral, é a fusão da Aritmética com a Geometria, entendendo por Aritmética, não somente o estudo dos números, senão também a Álgebra e a Geometria. (Klein, 1927, p. 3)

Para ele, a palavra *fusão* tem um sentido muito mais amplo do que aquele utilizado na Itália, em que ela significa exclusivamente uma mistura de Geometria Plana e Geometria do Espaço. Afirmo que, ao fazer uso desse sentido para a palavra *fusão*, não está deixando que a intuição do espaço seja relegada a um segundo plano e, para que isso seja possível, propõe utilizar nas discussões abstratas da Aritmética, da Álgebra e da Análise, figuras e métodos gráficos, que tornam conceitos mais compreensíveis nessas áreas do conhecimento matemático. Acredito como Klein (1927), que a intuição espacial deve ocupar lugar de destaque nos currículos da Licenciatura em Matemática, pelo alto grau facilitador da expressão precisa dos entes e dos fatos geométricos. Uma pergunta que pode ser feita nesse momento é se a fusão preconizada por Klein (1927) não teria contribuído para a absorção da Geometria por outras áreas do conhecimento matemático?

Portanto, o autor desse artigo definiu em sua tese de doutorado **componente curricular geométrica** para um currículo de Licenciatura em Matemática como uma forma de abordar conceitos geométricos em todas as suas vertentes e possibilidades, no sentido de desenvolver um pensamento geométrico a exemplo do que é discutido pelo *Topic Group 7* do CERME-3, segundo Dorier, Gutiérrez e Strässer⁶⁹. Para eles, Duval distingue em atividades cognitivas ligadas à *semiosis*, três tipos de atividades: “a formação de uma representação, a qual pode ser identificada como pertencente a um determinado registro; processamento e transformação de uma representação no próprio registro onde foi criado; e, finalmente, conversão, isto é, a transformação de uma representação semiótica de um registro em outro”.

⁶⁹ CERME3/PROCEEDING/GROUPS/TG7. Disponível em <http://WWW.dm.unipi.it/~didattica>. Acesso 18.05.2010.

Para Guzmán (1993) a Matemática é uma atividade velha, polivalente e que ao longo dos séculos tem sido empregada com objetivos profundamente diversos, com o que concordo, uma vez que, em um grande número de instituições de ensino, há uma intersecção entre as disciplinas oferecidas aos cursos da área de ciências exatas e naturais e nas tecnologias, muito embora os objetivos do curso de formação de professores sejam completamente distintos daqueles dos cursos de formação de engenheiros, por exemplo.

Ele aponta a Matemática como ciência dinâmica e mutante, isto porque mudanças ocorrem de forma muito rápida e turbulenta nos próprios conteúdos dessa ciência, com o que concordo novamente, haja vista o que ocorreu com os Fundamentos da Matemática no século XIX e a criação das Geometrias Não Euclidianas, os estudos relativos à Topologia no século XX, bem como a Geometria Fractal nos tempos atuais e, mais recentemente, o uso de softwares exploratórios de Geometria Dinâmica.

Defino **geometrização** do currículo da Licenciatura em Matemática como um processo de utilizar abordagens geométricas como um método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, por meio de imaginação, intuição e visualização, portanto, Geometria é um ponto de vista que conduz à geometrização.

Numa primeira reformulação das normas emanadas pelo NCTM, (Princípios, 2008), foi dada ênfase ao pensamento visual identificando “a geometria e sentido espacial”, o que, segundo Costa (2000, p. 162), enfatizou no “uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas tanto dentro como fora das matemáticas”.

O grupo de Psychology of Mathematics Education tem dado atenção às questões de visualização como observado por Presmeg (Gutiérrez e Boero, 2006. p. 206) “o termo visualização tem sido utilizado de várias maneiras na pesquisa nas duas últimas décadas”. Indo mais além, afirma “A visualização é levada para concluir processos de construção e transformação tanto em imaginação visual e mental em todas as relações de natureza espacial que podem estar envolvidas no fazer matemática.”

A seguir apresento um indicativo de como a Geometria pode estar conectada a outra área do conhecimento matemático, desde que a considere como um elemento interdisciplinar na Licenciatura em Matemática. Os temas número complexo, matriz, vetor, trigonometria e operador linear, usualmente são abordados em disciplinas distintas na formação inicial do professor, sem conexões e sem produção de significado geométrico para os estudantes. A isso se pode definir como um estilo, ou seja, uma forma de tratar cada tema isoladamente, ao invés de integrar o individual num processo concreto, que, embora seja abstrato em Matemática, pode partir de uma situação concreta, ou ainda de uma experiência, e dessa, por meios intuitivos, produzir significados.

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA VISÃO GEOMÉTRICA

Quando se fala em número complexo, logo vem à mente um conjunto de operações lógicas bem definidas. Essa abordagem, na maioria das vezes, é feita em livros didáticos e até mesmo nos cursos introdutórios na formação do professor, quando esse assunto é tratado. Isso corresponde a considerar um número complexo como um par (x,y) de

números reais, estabelecendo um isomorfismo entre os dois conjuntos de naturezas diferentes, ou seja,

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$$

como uma coleção de pares de números e o complexo como

$$\mathbf{C} = \{z = x + i.y \mid i = \sqrt{-1}\}$$

em que i é a unidade dessa coleção e corresponde ao par $(0,1)$ satisfazendo a propriedade $i^2 = -1$. Pensar nesse conjunto com a mesma estrutura considerada nos reais, por exemplo, com a multiplicação, induz frequentemente a um erro que indica falta de conhecimento do conteúdo:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} \neq -1$$

O erro ocorre porque a estrutura multiplicativa em $\mathbf{C}$ corresponde a

$$z = z_1.z_2 = (x_1,y_1).(x_2,y_2) = (x_1.x_2 - y_1.y_2, x_1.y_2 + x_2.y_1)$$

o que justifica, por exemplo, $i.i = (0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = -1$.

Mas em que os aspectos intuitivos visuais podem contribuir para eliminar tais dificuldades? Pensar em $\mathbf{R}$ como um conjunto de números tem um sentido e pensar em $\mathbf{R}$ como um conjunto de pontos de uma reta r tem outro. Entretanto, de forma análoga ao que foi feito anteriormente, estabelece-se um isomorfismo entre os dois conjuntos por meio de uma bijeção que faça corresponder ao número real zero, um ponto $O \in r$, considerado ponto origem de r , a cada número real positivo, faça corresponder um ponto $Q \in r$ distante de O uma “quantidade de unidades” correspondente ao número real positivo considerado e, a cada número real negativo, faça corresponder um ponto P distante de O , à sua esquerda na figura 1, uma “quantia de unidades” correspondente ao número real negativo considerado. Daí,



Figura 1 – Isomorfismo da reta com os números reais.

De forma análoga, tem-se uma representação da função f definida do $\mathbf{R}^2$ no plano:

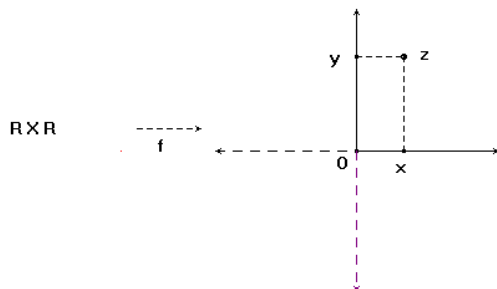


Figura 2 – Isomorfismo do plano com $\mathbf{R}^2$.

Mas, ao se estabelecer essa analogia, tem-se um isomorfismo entre o conjunto de pares ordenados de números reais e um conjunto de pontos do plano, assim, o número complexo ganha um *status* geométrico que pode ser relevante para sua compreensão. O

complexo adquire um aspecto dinâmico, pois pode ser considerado em sua forma trigonométrica e isso conduz ao envolvimento com ângulo, em geral denominado argumento do número complexo, o qual traz um indicativo geométrico até certo ponto intuitivo. Em paralelo, há um indicativo do módulo do número complexo o que induz a outra ideia, a saber, a de grandeza.

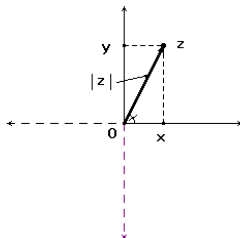


Figura 3 – Vetor.

Assim, o número complexo pode ser pensado como um elemento estático, ou seja, um vetor com seu módulo e sua direção bem definidos ou como um elemento dinâmico, ou seja, uma transformação geométrica que leva um par ordenado de números reais em um ponto do plano, sua imagem geométrica.

Os aspectos exemplificados até o presente momento podem bem ser desenvolvidos em disciplinas iniciais na Licenciatura em Matemática como, por exemplo, as de Fundamentos de Matemática Elementar ou mesmo de Introdução à Análise Matemática.

Ao denotar por θ o ângulo que o vetor forma com o sentido positivo do eixo horizontal, tem-se o vetor $z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$, com componentes $x = |z|\cos\theta$ e $y = |z|\sin\theta$, de forma que $z = (x, y)$ é um par ordenado de números reais. Dessa forma, o ente matemático denominado número complexo pode ser compreendido como um vetor, considerado um ente estático, ou como um ente dinâmico, ou seja, um operador que pode dilatar ou expandir, comprimir ou reduzir, rotacionar ou refletir o objeto, como pode ser percebido geometricamente. A primeira parte da figura 4 mostra a dinâmica da transformação do objeto conservando o seu módulo e a segunda, conservando o ângulo.

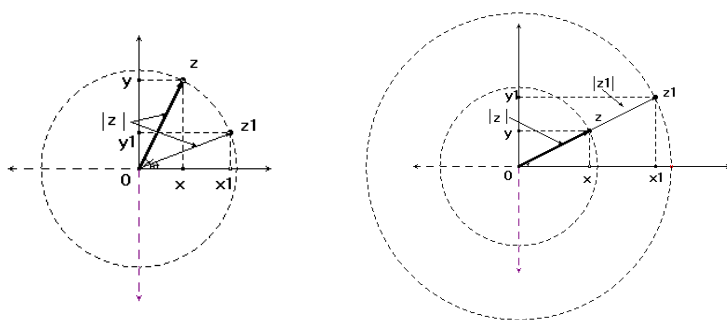


Figura 4 – Módulo do complexo.

Ao tratar com matrizes, em geral esse conteúdo é desenvolvido na introdução das disciplinas de Geometria Analítica, o que se visualiza imediatamente é numa outra estrutura, com suas propriedades operatórias algébricas sem imagens geométricas. Seja $\mathbb{R}^2$ o espaço vetorial com sua base canônica $\{(1,0), (0,1)\}$ e um operador linear T que

levar um vetor $z = (x, y)$ do $\mathbf{R}^2$ ao vetor $z_1 = (x_1, y_1)$ do $\mathbf{R}^2$, como nas figuras 4, acima. Ao dispor as coordenadas do vetor z em forma de coluna, então $T(z)$ pode ser expresso na forma $T(z) = A \cdot z$ em que a matriz canônica do operador T é $A = [T(1,0) \ T(0,1)]$, a qual pode ser representada por $[T]$.

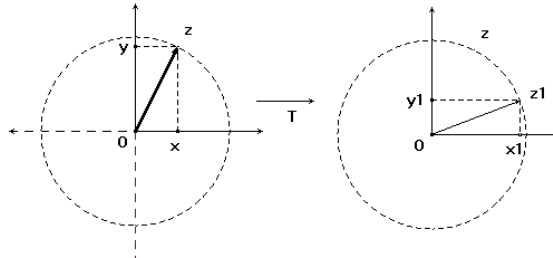


Figura 5 – Coordenadas do complexo.

Assim, considerando-se a base $\{1, i\}$ do espaço vetorial $E = (\mathbf{R}^2, .)$ em que a multiplicação é por escalar, tem-se o operador linear T conservando distâncias quando $|z| = 1$ e pode ser interpretado como uma rotação em torno da origem $O = (0,0)$ com a multiplicação por complexo de módulo 1. Dessa forma, $T(z) = [T] \cdot z$ é o operador que transforma o par (x, y) no número complexo $z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$ e tem a seguinte representação matricial

$$[T] = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Tomando-se a unidade real, isto é, o vetor $(1,0)$ essa matriz é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e para a

unidade imaginária $(0,1)$ tem-se $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

isto é, para o número complexo $z = 1 = 1 + 0.i$, tem-se, da álgebra matricial que

$$1.1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

enquanto que para o imaginário puro $i = 0 + 1.i$ tem-se

$$i.i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1, \text{ obtido por uma álgebra matricial,}$$

isto é, de uma forma diferente daquela obtida acima pelo caminho da álgebra definida por pares ordenados. Dessa forma, ao abordar vetores, em cursos de Álgebra Linear, por exemplo, pode-se produzir significado a tais objetos matemático o que, em grande parte, é feito apenas e exclusivamente de modo abstrato.

Mostram-se assim, utilizando as indicações de estilos preconizadas por Granger (1974), possibilidades de interligar vários tipos de representações ou formas de tratamento do ente matemático, o número complexo, em estruturas diferentes, mas que todas podem ter um elemento integrador que é a representação geométrica envolvida, haja vista que essas matrizes podem ser interpretadas como rotações em torno da origem do sistema

cartesiano, como reflexões em torno de eixos coordenados ou ainda como projeções ortogonais sobre uma reta passando pela origem. Cada uma das estruturas tem seu sistema bem definido e é isso que se caracteriza como um estilo, segundo Granger (1974), ou seja, é uma forma específica de linguagem ou de representação de um conceito.

Granger (1974) dizia que a intuição espacial unia os antigos, a partir da citação de Descartes de que lhe causava “escrúpulo em usar termos da Aritmética na Geometria” e que esta se encontrava conjurada. Talvez isso levasse à criação do Estilo Analítico, no qual a intuição algébrica fornece subsídios para a fundamentação da Geometria contrariamente ao pregado por Hilbert em sua primeira obra – Geometria e Imaginação, na qual tem por objetivo apresentar Geometria sob um aspecto intuitivo e visual. Entretanto, na segunda obra, segundo Hadamard, ele “elimina qualquer apelo à intuição” ao dar tratamento rigoroso em seu “Fundamentos de Geometria”.

Procurei dar uma visão sobre aspectos de imaginação, intuição e visualização em Matemática, particularmente em Geometria de forma teórica. Entretanto, entendo que, numa disciplina da Licenciatura, como Álgebra Linear, ou mesmo uma disciplina de Geometria Analítica, esta forma de desenvolver o conteúdo traria um ganho na produção de significados. Outros exemplos envolvendo conteúdos matemáticos com abordagem geométrica podem ser encontrados em minha tese de doutorado, (Leivas, 2009). Acredito como Klein (1927) que as reformas na formação do professor que atuará na escola básica devem partir da sua formação inicial na Universidade.

Na tentativa de propor uma geometrização do currículo da formação do professor de Matemática, entendo estar inovando para uma educação matemática a fim de desmitificá-la como “atividade velha”, de acordo com Gusmán (1993), desenvolvendo um pensamento geométrico como discutido por Dorier, Gutiérrez e Strässer. Além disso, entendo que, criar uma componente geométrica no Currículo da Licenciatura em Matemática da forma como sugeri em minha tese, corrobora o que Bishop (1989) salientou a importância da interligação entre os conceitos de visualização, imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, os quais são úteis para a Educação Matemática e precisam ainda ser mais bem compreendidos.

Referências

- Bishop, Alan J. (1989). *Review of research on visualization in mathematics education*. Focus on Learning Problems in Mathematics, v. 11, n. 1-2, p. 7-16.
- Brasil. (2002). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências Humanas e suas Tecnologias*. Brasília.
- Costa, C.. (2000). *Visualização, veículo para a educação em geometria*. Disponível em: <www.spce.org.ptsemCC.pdf.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2007
- Courant, Richard; Robbins, Herber. (2000). *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Editora Moderna.
- Granger, G.F. (1974). *Filosofia do Estilo*. São Paulo: Perspectiva, Editora da USP.
- , A. Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

- Guzmán, Miguel de. (1993). Enseñanza de la matemática. In: Gil Pérez, D.; Ozámiz, M. G. *Enseñanza de las ciencias y la matemática: tendencias e innovaciones*. Biblioteca Virtual OEI. p. 62-89. Disponível em: <<http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf>>. Acesso em 03 nov. 2007.
- Klein, Félix. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Trad. Roberto Araújo. Madrid: Biblioteca Matemática.
- Leivas, J.C.P. (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.
- Loureiro, C. (2004). Que formação matemática para os professores do 1º Ciclo e para os educadores de infância? In: Borralho, A.; Monteiro, C.; Espadeiro, R. *A matemática na formação do professor*. Évora, Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação. p. 89-124.
- Princípios e Normas para a Matemática Escolar. (2008). Lisboa: APM, Trad. dos Principles and Standards for School Mathematics, NCTM.

ARGUMENTOS QUE UTILIZAN LOS FUTUROS PROFESORES CUANDO SELECCIONAN TAREAS MATEMÁTICAS

ARGUMENTS GIVEN BY PRESERVICE TEACHERS WHEN SELECTING MATHEMATICAL TASKS

Polo, I.¹, González, M. J.¹, Gómez, P.², Restrepo, A.³

¹Universidad de Cantabria, ²Universidad de Granada, ³Universidad de los Andes (Colombia)

Resumen. *En algunos planes de formación de profesores de matemáticas se proporciona al profesor herramientas conceptuales y metodológicas, que llamaremos organizadores del currículo, para que analice y seleccione tareas matemáticas. En este artículo, analizamos los argumentos que emplean futuros profesores en un plan de formación de ese tipo cuando seleccionan tareas. Encontramos que sus argumentos hacen referencia a tres tipos de conocimiento: uno directamente relacionado con los organizadores, otro relacionado con elementos transversales incluidos en el plan de formación y un tercero ajeno al plan. Analizando esta clasificación, encontramos que hay un desarrollo muy desigual de los distintos organizadores, que los argumentos relacionados con los organizadores son dominantes pero se entremezclan con los demás y que, aún cuando se refieren a tareas matemáticas concretas, con frecuencia se enuncian en términos generales ajenos a la tarea analizada.*

Palabras clave: Formación inicial de profesores de matemáticas; conocimiento del profesor; selección de tareas; competencia de planificación.

Abstract. *In some mathematics teacher education programs, teachers are provided with methodological and conceptual tools (the curriculum organizers) that enable them to analyze and select mathematical tasks. In this paper we analyze the arguments given by a group of future teachers participating in a preservice teachers education program when selecting tasks. We found that their arguments make reference to three categories of knowledge: one which is directly related to the organizers, a second one related to transversal elements included in the education program, and a third one outside the program. Analyzing this classification, we found that each organizer is developed in a very different manner. We also observed that arguments related to organizers were more frequent but often mixed with other arguments, and that future teachers tend to argue in general terms even when referring to concrete mathematical tasks.*

Keywords: Preservice mathematics teacher education; teacher knowledge; task selection; planning competence.

INTRODUCCIÓN

Las oportunidades que el profesor ofrece a los escolares para que aprendan se configuran alrededor de tareas que pretenden ser estímulos para que los ellos actúen y, con motivo de esa actuación, construyan su conocimiento matemático (Christiansen y Walther, 1986, p. 260). El análisis, selección y organización de estas tareas forma parte de la actividad de planificación del profesor, siendo esta una de las competencias que algunos planes de formación inicial de profesores de matemáticas buscan desarrollar. Estos planes se basan en el modelo del análisis didáctico, como procedimiento que le permite al profesor en formación analizar un tema concreto de las matemáticas escolares (Lupiáñez y Rico, 2006; Gómez, 2007) al poner en juego un conjunto de herramientas conceptuales y metodológicas —como los sistemas de representación o los errores de los escolares— que denominamos organizadores del currículo (Rico, 1997). En estos planes se pretende que el profesor desarrolle un conocimiento didáctico con el que él pueda analizar el tema sobre el que va a planificar; producir y organizar —con motivo de ese análisis— información sobre ese tema; basarse en esa información para analizar las tareas que él considera como candidatas para formar parte de su propuesta curricular; y proponer una selección justificada de aquéllas que él considera más relevantes de cara a desarrollar en los estudiantes los objetivos que pretende.

En este artículo, exploramos los argumentos que, a la hora de seleccionar tareas, proponen los futuros profesores que participaron en un plan de formación basado en el análisis didáctico; formulamos una categorización de esos argumentos; y establecemos en qué medida esos argumentos se basan en el conocimiento didáctico que el plan de formación esperaba que desarrollaran. En lo que sigue, presentamos una breve revisión de la literatura sobre análisis y selección de tareas, establecemos nuestra posición sobre el aprendizaje de los futuros profesores, describimos el esquema metodológico que utilizamos y presentamos y discutimos los resultados que obtuvimos.

1. CONOCIMIENTOS PARA LA SELECCIÓN DE TAREAS

El análisis y selección de tareas ha sido objeto de algunos estudios en Educación Matemática. Se ha encontrado que la forma como los profesores en activo usan las tareas cambia a medida que ellos ganan experiencia en la enseñanza (Crespo, 2003); los futuros profesores ponen en juego diferentes tipos de conocimiento del contenido (Cannon, 2008); aquellos que tienen un conocimiento más sólido del contenido pueden seleccionar mejores tareas que aquellos con un conocimiento más débil (Osana, Lacroix, Tucker y Desrosiers, 2006); y la forma en que los profesores realizan la selección de tareas y las razones que dan para esas elecciones varían sustancialmente, cambiando el uso que dan a los diferentes tipos de tareas como resultado de la formación (Clarke y Roche, 2010).

Siguiendo a Liljedah, Chernoff y Zazkis (2007) consideramos que el proceso de selección y mejoramiento de una tarea consta de cuatro fases: un análisis predictivo o a priori, un ensayo o primera prueba de la tarea, un análisis reflexivo o a posteriori, y una fase de ajustes. Nosotros centramos nuestro interés en la identificación de los conocimientos que los futuros profesores ponen en juego a la hora de justificar cómo seleccionan tareas (fase de análisis predictivo). Clasificamos los tipos de conocimiento que los futuros profesores ponen en juego en tres categorías:

Argumentos que utilizan los futuros profesores cuando seleccionan tareas matemáticas

C1: el conocimiento didáctico relacionado con los organizadores del currículo.

C2: otros conocimientos que emergen dentro del plan y que no están directamente relacionados con los organizadores.

C3: conocimientos diversos que no se han desarrollado dentro del plan de formación.

2. APRENDIZAJE DE LOS ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO

Consideramos los organizadores del currículo como instrumentos conceptuales que permiten analizar un tema matemático para producir información con propósitos didácticos. Por esta razón, nuestra aproximación al aprendizaje es coherente con la perspectiva vygotskiana de considerar los instrumentos como mediadores en la actividad psicológica del individuo (Vygotsky, 1982), perspectiva que fundamenta la teoría de la génesis instrumental (Vérillon, 2000). En el contexto de esta teoría, nos interesamos por las funciones epistémica, heurística y pragmática de los organizadores del currículo (Trouche, 2005, p. 155). Estas tres funciones caracterizan los tres aspectos del uso que un futuro profesor puede hacer de un organizador del currículo: el futuro profesor (a) necesita cierta comprensión del organizador del currículo para (b) usarlo al analizar un concepto matemático y producir una información que, a su vez, (c) puede ser utilizada, posiblemente en conjunción con la información proveniente de otros organizadores del currículo, con un propósito didáctico concreto; en particular, con el propósito de seleccionar tareas matemáticas. Denominamos a estos tres procesos significado, uso técnico y uso práctico de un organizador del currículo, en correspondencia con sus funciones epistémica, heurística y pragmática (González y Gómez, 2008). En este artículo nos centramos en el uso práctico, puesto que está directamente vinculado al desarrollo de la primera de las categorías de conocimiento que hemos enumerado antes. El uso práctico se refiere a las estrategias y técnicas necesarias para poner en juego el conocimiento de un organizador del currículo con propósitos didácticos. Por ejemplo, el futuro profesor desarrolla el uso práctico de un organizador cuando selecciona, analiza o modifica tareas para los estudiantes haciendo uso de la información de que dispone sobre dicho organizador.

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este estudio pretendemos describir y caracterizar, en términos de los conocimientos que ponen en juego, los argumentos que usan los futuros profesores que han participado en un plan de formación basado en el modelo del análisis didáctico a la hora de seleccionar tareas.

Conjeturamos que el proceso de selección de tareas muestra una complejidad en la que intervienen las tres categorías de conocimiento mencionadas y que los argumentos empleados por los futuros profesores a la hora de justificar su selección de tareas dan cuenta de esta complejidad y son un indicador de los conocimientos desarrollados en el plan de formación, en particular, del nivel de desarrollo del uso práctico de los organizadores.

4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Descripción de la Experiencia

Hemos realizado una experiencia con un grupo de 9 alumnos que participaron en la asignatura “Didáctica de la Matemática en Educación Secundaria”, optativa de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Cantabria, en el curso académico 2010/2011. Los alumnos fueron divididos en tres grupos, cada uno de los cuales realizó el análisis didáctico de un tema matemático. El Teorema de Pitágoras, la Ecuación de segundo grado y la Estadística fueron los tres temas abordados.

En la asignatura se van introduciendo secuencialmente los siguientes organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación, fenomenología, historia de las matemáticas, expectativas de aprendizaje, errores y dificultades, hipótesis de aprendizaje, complejidad y funcionalidad de las tareas. Se sigue el siguiente esquema:

- El formador presenta —mediante apuntes, explicaciones o lecturas— información teórica sobre un organizador.
- Los grupos de futuros profesores analizan su tema matemático bajo la perspectiva de dicho organizador y producen información sobre el mismo.
- Una vez finalizado este proceso para todos los organizadores, los futuros profesores elaboran, de forma argumentada, una Unidad Didáctica del tema analizado para estudiantes de secundaria de un nivel concreto. Deben dar argumentos que expliquen todas las decisiones de su propuesta, incluyendo explicaciones que justifiquen por qué han seleccionado las tareas matemáticas que proponen.

De forma transversal a este proceso, se introducen elementos relacionados con el currículo normativo, la epistemología del conocimiento matemático, las teorías del aprendizaje, las metodologías basadas en la resolución de problemas y los modelos de evaluación.

4.2. Recolección y Codificación de la Información

Al elaborar la Unidad Didáctica, los grupos incorporan lo que denominamos la “Guía Didáctica”. Éste es el primer instrumento que hemos considerado ya que en él los grupos explican de forma argumentada todas las decisiones que toman sobre la selección de tareas. Además, hemos elaborado dos test específicos. En el Test 1, aportamos a cada grupo dos tareas matemáticas relacionadas con su tema matemático y les solicitamos que añadiesen una tarea propia y que explicasen cómo cada una de las tres tareas se relacionaba con tres organizadores: sistemas de representación, fenomenología, y errores y dificultades. En el Test 2, aportamos una lista de tareas a cada grupo y les solicitamos que seleccionasen tres de ellas, explicando el porqué de su selección. En este segundo test no hicimos alusión explícita a los organizadores. Los futuros profesores realizaron los dos test en días consecutivos.

En estos tres instrumentos, identificamos un total de 72 argumentos, es decir, frases en las que los futuros profesores justificaron el porqué de una decisión sobre la selección de tareas. Etiquetamos cada uno de estos argumentos según distintos códigos. En primer lugar, cada argumento se clasificó según una de las tres categorías de conocimiento consideradas —C1, C2 y C3—. Seguidamente, acompañamos cada código de una

etiqueta explicativa: los códigos C1 se acompañan del nombre abreviado del organizador al que hace referencia la argumentación⁷⁰; los códigos C2 se acompañan del nombre del tema transversal del plan de formación al que atribuimos el argumento⁷¹; y los códigos C3 se acompañan de una palabra representativa del argumento empleado que no teníamos tipificada a priori. Finalmente, distinguimos los argumentos según su nivel de generalidad respecto de las tareas: cuando el argumento hace referencia de forma expresa a una tarea matemática concreta —bien una tarea que el futuro profesor esté analizando o bien una tarea que se menciona como ejemplo—, decimos que se trata de un argumento particular [P], mientras que si el argumento se expresa sin hacer referencia a tareas, decimos que es un argumento general [G]. En algunas ocasiones, un mismo argumento incluye dos explicaciones que no se pueden separar. En estos casos, asignamos dos códigos distintos a un mismo argumento. Así, a partir de los 72 argumentos, obtuvimos un total de 90 códigos. En la Tabla 1 mostramos algunos ejemplos.

⁷⁰E=Errores, F=Fenomenología, SR=Sistemas de Representación, H=Historia, C=Complejidad.

⁷¹Aprendizaje, Currículo, Resolución de Problemas, Epistemología, Evaluación.

Codificación	Argumentos
C1-F-[P]	<i>Uno de los objetivos que nos propusimos fue que los alumnos fuesen capaces de utilizar sus conocimientos matemáticos para dar solución a problemas reales. Para ello hemos propuesto tareas sobre la vida cotidiana, como la de teleférico, que les ayuden a ver la importancia de las matemáticas en la vida real.</i>
C1-SR-[G]	<i>Hemos considerado fundamental plantear problemas en los que se trabajan distintos sistemas de representación y, por el mismo motivo, en nuestra propuesta educativa hemos decidido incluir una sesión de GeoGebra.</i>
C2-Currículo-[P]	<i>Además, el profesor puede modificar las reglas del conocido juego, con el objetivo de analizar otras capacidades de los alumnos, tales como la expresión oral y demás aspectos transversales en los que se insiste en el currículo.</i>
C2-Aprendizaje-[G]	<i>A lo largo de una serie de informes, se hace un especial hincapié en las ventajas que presenta un punto de vista constructivista en la enseñanza. Por este motivo se adopta el constructivismo como eje de los distintos sistemas de enseñanza empleados, tal y como queda visto en las sesiones propuestas.</i>
C3-Inglés-[G]	<i>Además, es importante tener en cuenta la formulación de los problemas en inglés. Este hecho, más allá de un capricho, supone el reconocimiento desde tempranas edades del inglés como lengua universal.</i>
C3-Motivación-[P]	<i>En este apartado se propone una actividad de tipo lúdico, con el objetivo de motivar a los alumnos en el estudio del tema Ecuaciones de 2º grado, tema central de estudio. Para ello, se propone jugar a Pasapalabra.</i>

Tabla 1. Ejemplos de Argumentos y su Codificación

4.3. Análisis de la Información y Resultados

Analizamos los datos atendiendo a los tres criterios siguientes:

- el tipo de conocimiento empleado, clasificado en las tres categorías C1, C2 y C3,
- el nivel general o particular del argumento, y
- el tipo de organizador empleado dentro de la primera categoría de conocimiento.

Además, distinguimos los resultados dependiendo del instrumento de recogida de datos del que provenía ya que el instrumento condicionaba, a priori, el tipo de argumento empleado.

Considerando estos criterios, hicimos un análisis cuantitativo de la codificación. Este análisis aparece resumido en la Tabla 2 y en la Figura 1.

Argumentos que utilizan los futuros profesores cuando seleccionan tareas matemáticas

	Organizadores C1		Plan de formación C2		Otros C3	
	P	G	P	G	P	G
Pitágoras						
Test 1	3	1	0	0	2	0
Test 2	7	1	1	0	1	0
Guía Didáctica	1	6	0	0	0	2
Total	11	8	1	0	3	2
Ecuaciones						
Test 1	10	0	0	0	1	0
Test 2	8	0	5	0	2	1
Guía Didáctica	0	0	2	1	3	5
Total	18	0	7	1	6	6
Estadística						
Test 1	8	0	0	0	0	0
Test 2	4	0	1	0	0	0
Guía Didáctica	8	4	0	0	0	2
Total	20	4	1	0	0	2
Totales						
	49	12	9	1	9	10

P: particular; G: general

Tabla 2. Resumen Cuantitativo de la Codificación

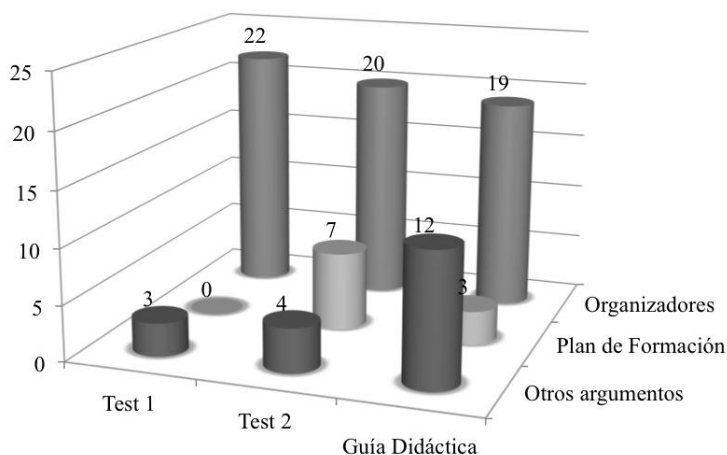


Figura 1: Argumentos clasificados según las tres categorías de conocimiento en cada instrumento

Observamos en estos datos que, si bien dominan los argumentos que utilizan los organizadores —categoría C1—, casi la tercera parte de ellos (29 de 90) no hacen ninguna mención a ellos —categorías C2 y C3—. En el Test 1 se concentran la mayor parte de los argumentos relacionados con los organizadores, como era de esperar ya que se preguntaba específicamente por ellos. Respecto a los argumentos que mencionan elementos transversales en la asignatura —categoría C2—, observamos que los alumnos no hacen referencia a la epistemología ni a la evaluación. De entre los demás argumentos, la referencia al currículo normativo es la que aparece con más frecuencia. Los argumentos ajenos a la formación recibida —categoría C3— se concentran en la Guía Didáctica (12 de 34), mientras que en el Test 1 sólo son ajenos 3 de 25 y en el Test 2, 4 de 31. Si omitimos los datos del Test 1, el porcentaje de argumentos de la Categoría C3 aumenta hasta el 40% (26 de 65 argumentos, ver Figura 2). Por otro lado, aunque los argumentos clasificados en la categoría C3 no están tipificados a priori, observamos que los argumentos relacionados con la motivación y la necesidad de repaso/refuerzo se repiten con cierta frecuencia. También aparecen aquí argumentos que mencionan el contenido matemático. Aunque, por su referencia a las matemáticas, pudiera parecer que están relacionados con el organizador estructura conceptual, interpretamos que los futuros profesores están empleando un conocimiento de las matemáticas que ya tenían y que ignora los vínculos entre las nociones y los procedimientos del tema propios del organizador estructura conceptual.

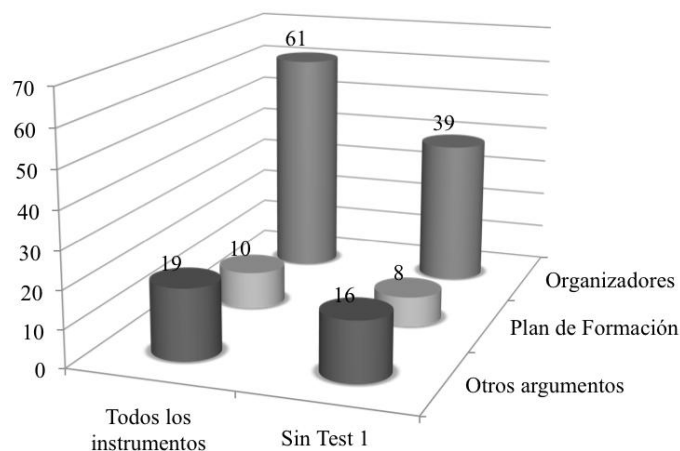


Figura 2: Argumentos clasificados según las tres categorías de conocimiento, considerando todos los instrumentos y eliminando el Test 1

Aunque en el Test 1 y el Test 2 predominan claramente los argumentos particulares — sólo 3 de los 56 argumentos son de carácter general—, cuando los futuros profesores explican sus decisiones en la Guía Didáctica hacen argumentaciones generales sin mencionar las tareas concretas que han seleccionado —de las 34 argumentaciones correspondientes a la Guía Didáctica, 20 son de carácter general—, aunque se había solicitado que explicasen sus decisiones ejemplificándolas mediante tareas (Figura 3).

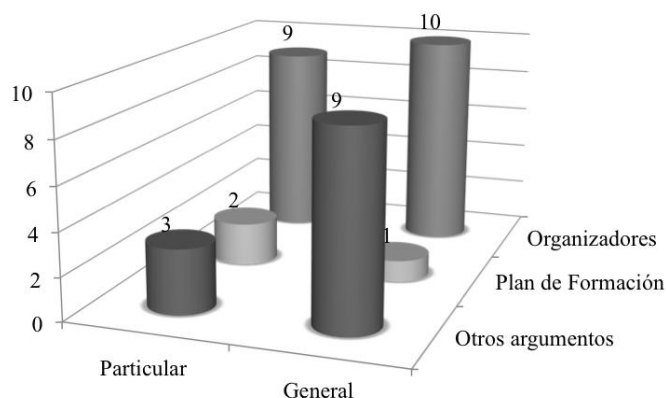


Figura 3: Argumentos en la Guía didáctica divididos en particulares y generales.

En relación con los organizadores que los futuros profesores utilizan en sus argumentos, vemos que utilizan tan solo 6 de los 9 introducidos en la asignatura (Figura 4). Esta utilización de los organizadores refleja para nosotros el nivel de desarrollo de uso práctico de cada uno de ellos. Observamos que no todos se han desarrollado con la misma profusión en los procesos de selección de tareas. Predomina el desarrollo de uso práctico de los tres organizadores sobre los que hemos preguntado explícitamente en el Test 1, ya que son estos los que más se utilizan, tanto si consideramos el total de las

respuestas, como si omitimos las del Test 1; también son dominantes en la Guía Didáctica. De esos tres organizadores, el más frecuente en los tres instrumentos es sistemas de representación. Es destacable que en la Guía Didáctica, lugar donde los futuros profesores tenían completa libertad para utilizar todos los organizadores del curso y en el que debían aparecer todos ellos, ha habido poca variedad. En relación con los organizadores menos utilizados, aparecen ocasionalmente y mediante argumentaciones de tipo general.

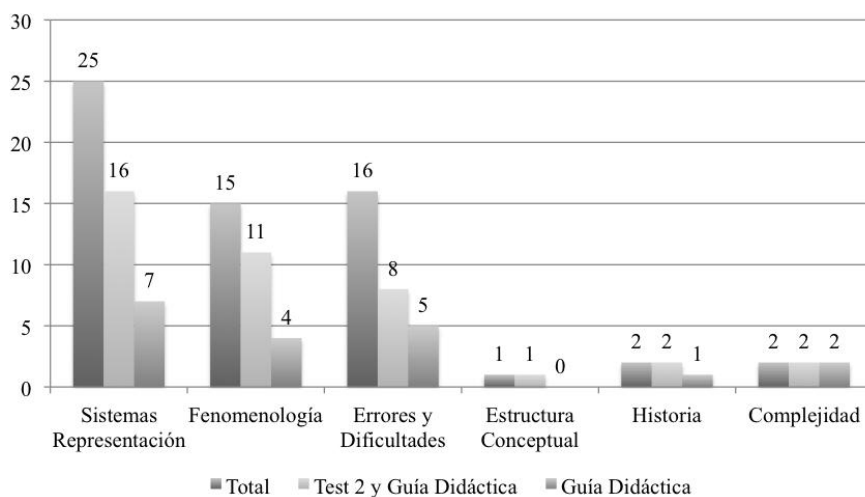


Figura 4: Organizadores empleados en los argumentos: en total y sin el Test 1

Si bien las particularidades de los tres temas matemáticos (Pitágoras, Ecuaciones y Estadística) no se han tenido en cuenta, podemos aportar, como dato adicional, que los tres grupos no se han comportado uniformemente respecto de los tipos de argumentos utilizados. Aunque el uso de los organizadores es el argumento más frecuente en los tres grupos y, de entre ellos, el organizador de sistemas de representación es el más utilizado por los tres, el número de argumentos de las otras dos categorías varía considerablemente dependiendo del grupo.

INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Un objetivo central del plan de formación implementado consiste en que los futuros profesores doten de significado a los organizadores del currículo y los utilicen como instrumentos conceptuales y metodológicos para seleccionar tareas. En otros trabajos, hemos analizado el proceso de aprendizaje de los organizadores mediante las dimensiones del significado, el uso técnico y el uso práctico. Este proceso ha mostrado una gran complejidad en su desarrollo. Por ejemplo, en Gómez y González (2009), hemos mostrado que, durante el proceso de aprendizaje de un organizador, los futuros profesores no manejan estas tres dimensiones de un modo secuencial; también hemos observado que la interrelación que se da entre las tres dimensiones depende fuertemente del tipo de organizador analizado. En este trabajo, hemos continuado analizando los

procesos de aprendizaje de los organizadores, centrándonos ahora en el uso práctico. Hemos analizado los argumentos empleados por los futuros profesores en el proceso de selección de tareas con el propósito de caracterizar el modo en que se manifiesta el uso práctico de los organizadores y de determinar qué peso tiene en relación a los otros tipos de conocimiento que los futuros profesores ponen en juego.

Como consecuencia de los resultados obtenidos hemos encontrado que las tres categorías de conocimiento enunciadas son suficientes para clasificar los argumentos empleados. El conocimiento relacionado con los organizadores es dominante, pero se desarrolla entrelazado con los otros tipos de conocimiento. Los futuros profesores usan los organizadores en sus argumentos cuando se les pregunta específicamente por ellos, pero tienden a omitirlos cuando se les deja libertad para argumentar. Interpretamos, por tanto, que el uso práctico no se desarrolla de manera espontánea y que es importante reforzar en el plan las tareas encaminadas a su desarrollo. Esta conclusión es especialmente importante en relación con determinados organizadores que no han aparecido en los argumentos. También observamos que, si bien el uso práctico más genuino de un organizador debería estar referido a tareas concretas, ha aparecido con mucha frecuencia en argumentos generales. Por ello, no podemos asegurar que el desarrollo del uso práctico esté completamente asociado al tema matemático objeto de estudio.

El desigual desarrollo del uso práctico de distintos organizadores ha sido manifiesto, siendo los sistemas de representación el organizador más utilizado. Asimismo, prácticamente no se han encontrado referencias a organizadores relacionados con la gestión de tareas en el aula (complejidad y funcionalidad de las tareas). La referencia al contenido matemático ha sido frecuente, aunque las argumentaciones encontradas hacían referencia a visiones propias de los futuros profesores sobre el tema matemático abordado, ajenas al plan de formación. No tenemos información suficiente que nos permita identificar el origen de los argumentos ajenos al plan de formación; sin embargo, en este caso, consideramos que el conocimiento matemático formal de los futuros profesores en este plan trivializa la necesidad de reformular significados de los contenidos adaptados al nivel de los alumnos para los que se planifica.

Los tres grupos de futuros profesores se han comportado de distinta forma en sus argumentaciones, pero han mantenido los esquemas comunes que acabamos de mencionar. Por esta razón hemos establecido algunos vínculos específicos con el plan de formación. Estos vínculos serán analizados con más profundidad en el futuro con profesores en ejercicio. Otro aspecto de interés relacionado con el trabajo presentado es el establecer relaciones entre los argumentos y las características de las tareas que los profesores seleccionan. Este análisis, que pretendemos desarrollar en el futuro, nos proporcionará información sobre la efectividad del plan de formación.

Referencias

- Cannon, T. (2008). Student teacher knowledge and its impact on task design. Tesis de doctorado no publicada, Brigham Young University, Brigham, Inglaterra.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 243-270.

- Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen y A. G. Howson (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht, Holanda: Kluwer.
- Clarke, D. y Roche, A. (2010). Teachers' extent of the use of particular task types in mathematics and choices behind that use. En L. Sparrow, B. Kissane y C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 153-160). Fremantle, Australia: MERGA.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Gómez, P., González, M. J. (2009). Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions. *Indivisa*, 12, 223-23 .
- González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática*, 12, 425-434.
- Liljedahl, P., Chernoff, E., Zazkis, R. (2007). Interweaving Mathematics and Pedagogy in Task Design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 239-249.
- Lupiáñez, J. L., Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. Moreno, M.J. González (Eds.), *Investigación en educación matemática: Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 225-236). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Osana, H., Lacroix, G., Tucker, B. y Desrosiers, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematics tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(4), 347-380.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ice - Horsori.
- Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 137-162). Dordrecht, Holanda: Springer.
- Vérillon, P. (2000). Revisiting Piaget and Vygotsky: in search of a learning model for technology education. *The Journal of Technology Studies*, 26(1), 3-10.
- Vygotsky, L. S. (1982). El método instrumental en psicología. En L. S. Vygotsky (Ed.), *Obras escogidas* (Vol. 1, pp. 65-70). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

EL SIGNO IGUAL Y SU SIGNIFICADO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

THE EQUALS SIGN AND ITS MEANING IN THE TEXT BOOKS DE FIRST CICLE OF PRIMARY EDUCATION

Ramírez García, M.¹, Rodríguez Marcos, P.²

¹Universidad Autónoma de Madrid

²Universidad Complutense de Madrid

Resumen. *El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto, el signo igual, es muy importante para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Existen numerosos estudios que ponen de relieve que los estudiantes tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. Este artículo recoge una revisión de algunos de estos estudios que muestran las interpretaciones y usos del signo igual de los estudiantes, así como posibles causas de una comprensión incompleta de este signo y cómo se puede desarrollar una interpretación relacional del signo a través del pensamiento relacional. Además, presenta el estudio de la revisión de algunos libros de texto de matemáticas del primer ciclo de Educación Primaria, para establecer el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes en los primeros cursos.*

Palabras clave. Signo igual, pensamiento relacional, interpretación relacional u operacional, libros de texto, Educación Primaria.

Abstract. *Learning of the meaning of the mathematical symbols and in concrete, the equal sign, it is very important to be able to understand multitude of arithmetical and algebraic expressions. There exist numerous studies that emphasize that the students have big difficulties at the moment of catching his meaning. This article gathers a review from some from these studies that show the interpretations and uses of the equal sign of the students, as well as possible reasons of an incomplete understanding of this sign and how it is possible to develop a relational interpretation of the sign across the relational thinking. Besides, it presents the study of the review of some books of text of mathematics of the first cycle of Primary Education, to establish the way and the contexts in which one presents the equal sign to the students in the first courses.*

Key words. Equal sign, relational thinking, relational and operational interpretation, text books, Primary Education.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto el del signo igual, es muy importante para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Numerosos estudios han puesto de relieve que incluso los estudiantes de secundaria tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. En este trabajo se presenta una revisión de algunas investigaciones anteriores para mostrar qué significados y qué usos le dan los escolares y algunas de las causas de estos hechos. Además, se indagará el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes de primer ciclo de Educación Primaria en los libros de texto.

SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL Y INTERPRETACIONES DE LOS ESTUDIANTES

En los últimos 20 años, las investigaciones muestran que el significado del signo igual que adquieren los estudiantes desde los primeros cursos de escolarización es incompleto, interpretándolo como una invitación a hacer algo, es decir, operar sobre los números más que un símbolo relacional. Con niños de edades correspondientes a Educación Primaria tenemos algunas investigaciones realizadas como las de Behr et al. (1980), Morris (2003), Carpenter et al. (2003) que ponían de manifiesto que los niños consideran el signo de igualdad como un operador, en vez de un símbolo relacional. Como operador el signo igual se interpreta como una instrucción para realizar una operación aritmética. Esta interpretación operacional está relacionada con el hecho de que el signo se lea únicamente de izquierda a derecha, lo que significa que se ha de operar siempre sobre los dígitos que están a la izquierda y que la respuesta se ha de situar a la derecha del signo. Estos autores afirman que para adquirir un significado más completo del signo igual, debería interpretarse como un signo bidireccional, que se pueda leer tanto de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. En igualdades numéricas el signo igual representa la relación de ‘equivalencia numérica’ entre las expresiones que se encuentran en los dos lados del signo igual (Molina, 2006). Esta autora observó cuatro significados del signo igual en niños de tercero de primaria: ‘operador’, ‘indicador de una acción’, ‘similitud numérica’ y ‘equivalencia numérica’ (p. 436). La autora confirma que a pesar de que el significado de equivalencia numérica es el adecuado para resolver todas las igualdades utilizadas, los niños utilizan en cada situación el significado que da sentido a la igualdad o sentencia numérica que se presenta. De aquí concluye que hay 3 niveles de comprensión del signo igual. El primer y menos completo sería el nivel de comprensión operacional de los niños en los que utilizan el significado de operador y expresión de una acción. Un segundo nivel no estable, en el que en algunas situaciones empieza aparecer el significado de equivalencia numérica. Y por último, el nivel de comprensión avanzado en el que se hace uso del significado de equivalencia numérica, aunque en sentencias con operaciones en el lado izquierdo utilizan el significado operador y en sentencias con operaciones en el lado derecho, utilizan el significado expresión de acción. El significado similitud numérica se mostraba de forma puntual. Con estudiantes con edades correspondientes a Educación Secundaria que trabajan con expresiones algebraicas tenemos trabajos como los de Knuth (2005), Knuth (2006), Essien et al. (2006) y Hunter (2007), en los que un gran porcentaje de los alumnos mostraban una interpretación operacional del signo igual y además, se comprobó que el éxito en la

El signo igual y su significado en los libros de texto de primer ciclo de educación primaria

resolución de ecuaciones algebraicas estaba asociado a la interpretación que tenían dichos alumnos del signo igual.

CAUSAS DE UNA INTERPRETACIÓN OPERACIONAL

Una de las causas a las que se atribuye la interpretación inadecuada del signo igual, es la experiencia que tienen los niños en la escuela con los contextos que encuentran en los libros y las explicaciones del maestro. Parece importante buscar contextos que conlleven a los estudiantes una comprensión relacional del signo igual. En esta línea, McNeil et al. (2005) comprobaron que el contexto en el que se presentaban operaciones en ambos lados del signo igual activaba la interpretación relacional del signo igual. En un trabajo posterior, McNeil et al. (2006) plantearon contextos no estándares, del tipo $8 = 8$, ó $7 = 3 + 4$, y comprobaron que son también más efectivas que las ecuaciones ‘operación igual respuesta’ para activar la comprensión relacional del signo igual.

McNeil et al. (2006) examinaron libros de texto de cuatro editoriales distintas para ver en qué contextos de los anteriormente evaluados aparece el signo igual. En concreto, evaluaron libros de texto de 6-8 grado, comúnmente utilizados en Estados Unidos. El contexto ‘operaciones en ambos lados del signo igual’ aparecía en una proporción muy pequeña en todos los libros. Los contextos no estándares sí aparecían frecuentemente en todas las editoriales, pero el más habitual era ‘operación igual resultado’. En resumen, el análisis de los textos mostró que no están bien orientados para despertar una interpretación relacional del signo igual.

La experiencia de los niños en contextos que contienen el signo igual no es únicamente la que observan en los libros de texto. Hay otros factores como es la presentación de los profesores, los contextos que utilizan para plantear actividades e intentar transmitirles los conocimientos. En el trabajo de Seo et al. (2003) estudiaron los contextos de los libros de textos y los contextos que utilizaba el profesor de un aula con niños de 7 y 8 años para finalmente recoger la interpretación que tenían estos niños del signo igual. Como en el caso anterior, el análisis de texto mostró una mayoría de contextos que implicaban una acción con operaciones aritméticas y por lo tanto implicaban una interpretación operacional del signo igual. El profesor de grupo era consciente del insuficiente significado que le dan los niños al signo igual si sólo se trabaja contextos de resolución de operaciones aritméticas, y planteó distintas situaciones como comparación de números, equivalencia de unidades de medida, y equivalencia de moneda. Se encontró que los niños tenían una interpretación operacional en contextos aritméticos que implicaban realizar una operación, pero en situaciones de medida y equivalencia de monedas, los niños si daban un significado relacional al signo igual. Al intentar relacionar las dos situaciones explicaban que era distinto en cada una de las situaciones. Se concluyó que no basta con plantear distintos contextos para ver los distintos significados del signo igual. Se debería haber trabajado la conexión de esos significados, es decir, las distintas interpretaciones que se tienen en diferentes contextos puede funcionar en un mismo contexto, es decir, la interpretación relacional que indica la misma cantidad funciona también en el contexto $2 + 3 = 5$, que habitualmente implica “el resultado”.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO RELACIONAL

Una de las ideas como solución a este problema es la propuesta Early-Algebra (Molina, 2006), que está basada en la integración de modos de pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, permitiendo enriquecer la actividad matemática de estos niveles. Trata de desarrollar los aspectos algebraicos que posee el niño y utilizar representaciones que permitan a los alumnos operar a un nivel de generalidad más alto. En Estados Unidos, la NCTM (2000) ya mostró apoyo a esta propuesta proponiendo una reforma en la enseñanza de la Aritmética para que los conceptos y las destrezas de Aritmética de la escuela elemental estén mejor coordinadas con la enseñanza del Álgebra. Este cambio curricular favorece el desarrollo conceptual y la coherencia de las Matemáticas desde los primeros cursos escolares. Brevemente, la idea central de este cambio es trabajar con actividades que faciliten la transición entre la Aritmética y el Álgebra, poniendo especial énfasis en las estructuras que subyacen a las operaciones aritméticas y sus propiedades y no tanto, en el aspecto del cálculo (Molina, 2006). El objetivo final es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, para facilitar el aprendizaje con comprensión. En otras palabras, implica que los alumnos interioricen generalidades (principios, propiedades, relaciones) que se encuentran implícitas en la estructura de la Aritmética. Autores como Carpenter et al. (2003) muestran la viabilidad de basar la instrucción de la Aritmética en el pensamiento relacional, que consiste en examinar las expresiones en su totalidad y utilizar las relaciones entre ellas.

Objetivos de la investigación

Con el presente trabajo se pretende indagar sobre los contextos en los que se presenta el signo igual en los libros de texto de Matemáticas de Primer ciclo de Educación Primaria, y basándonos en los estudios previos, poder concluir si favorecen una interpretación relacional u operacional del signo igual. Es evidente que la interpretación de los estudiantes no solo dependen de lo que ven en los libros de texto, influye también otros aspectos como la presentación por parte del profesor en el aula. En este trabajo sólo comprobaremos uno de los factores que afectan al significado adquirido por los niños como es el libro de texto utilizado en la escuela.

MÉTODO

Materiales

Se utilizará los libros de texto de primer ciclo de Educación Primaria de cuatro editoriales utilizadas en los Centros de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid (Tabla 1).

El signo igual y su significado en los libros de texto de primer ciclo de educación primaria

Editorial	Proyecto	Curso	Año
Vicens Vives	Mundo de Colores	1º y 2º	2008, 2009
Anaya	Salta a la vista	1º y 2º	2007
SM	Trampolín	1º y 2º	2007
Bruño	Lapiceros	1º y 2º	2008

Tabla 1. Editoriales y proyectos de los libros de texto analizados

Procedimiento

Un estudio descriptivo mostrará los contextos en los que aparece el signo igual. Basándonos en los estudios previos se ha elaborado una escala de los posibles contextos en los que puede aparecer el signo igual. Se agrupan en contextos aritméticos en los que aparece en alguno o ambos lados del signo igual operaciones aritméticas y contextos no aritméticos en los que no aparecen operaciones aritméticas, presentando identidades numéricas, equivalencias de unidades métricas o asignaciones de valores a variables. Los autores llevarán a cabo un recuento de cada una de las veces que aparece el signo igual en cada una de estas situaciones.

CONTEXTOS ARITMÉTICOS

1. **Contexto aritmético canónico:** ‘Operación igual resultado’ ($a + b = c$).
2. **Contextos aritméticos no canónicos.** Incluye varios:
 - a. **Operaciones en ambos lados del signo igual.** $a + b = c + d$
 - b. **‘Resultado igual operación’:** $a = b + c$

CONTEXTOS NO ARITMÉTICOS

1. **Comparación de números;** $a = a$.
2. **Contextos de medida:** p.e.: 1 metro = 10 decímetros.
3. **Contextos de equivalencia de monedas:** 1 euro = 100 céntimos.
4. **Contexto del sistema numérica decimal:** 400 unidades = 4 centenas.
5. **Otros contextos no aritméticos.** $A=5$

Los contextos aritméticos distintos al canónico (McNeil et al. 2006) y los contextos no aritméticos (Seo et al., 2003) favorecen la adquisición de un sentido relacional del signo igual, por lo que se comprobará si en el primer ciclo de Educación Primaria, los contextos que ofrecen los libros de textos de este tipo aparece en una proporción similar al contexto aritmético canónico que favorece una interpretacional operacional.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los resultados muestran que el signo igual se utiliza en contextos aritméticos con más frecuencia que en contextos no aritméticos (ver Tabla 2). Todas las editoriales utilizan el signo igual en más de un 90% de las ocasiones en expresiones aritméticas, resultado previsible ya que en estos cursos se introduce las operaciones aritméticas.

<i>Curso</i>	<i>Libro de Texto (Editorial)</i>	<i>Contexto Aritmético</i>	<i>Contexto no Aritmético</i>
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	97,58	2,42
	Anaya – Salta a la vista	93,03	6,97
	SM – Trampolín	95,85	4,15
	Bruño – Lapiceros	95,63	4,37
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	96,84	3,16
	Anaya – Salta a la vista	86,26	13,74
	SM – Trampolín	94,63	5,37
	Bruño – Lapiceros	96,76	3,24

Tabla 2. Porcentaje de contextos aritméticos y no aritméticos

Contextos Aritméticos

En la Tabla 3 se recoge los porcentajes de cada uno de los contextos aritméticos por curso y editorial. El contexto ‘operación igual resultado’ es con diferencia el más frecuente.

	<i>SM</i>		<i>ANAYA</i>		<i>BRUÑO</i>		<i>VICENS VIVES</i>	
	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>
Operación = resultado	93,43	86,58	84,43	69,53	61,88	85,98	96,54	96,67
Operación ambos lados	1,38	6,88	0	12,02	0	2,88	0	0
Resultado = Operación	1,04	1,18	8,61	4,72	33,75	7,91	1,04	0,18

Tabla 3. Porcentajes de los distintos contextos aritméticos.

En la Editorial Bruño, el porcentaje del contexto canónico en primer curso es menor debido a la aparición del signo igual en el contexto no canónico ‘resultado igual operación’ en las últimas páginas que se relaciona con el cálculo mental. El ejercicio de la forma $5 = 4 + ?$ utiliza el signo igual, y sin embargo, los ejercicios del tipo $1 + 2$ no lo utilizan, por lo que, aunque aparecía con más frecuencia la expresión $a \pm b$, al no estar presente el signo igual, se dispara el porcentaje del contexto que tiene la operación a la derecha.

El signo igual y su significado en los libros de texto de primer ciclo de educación primaria

El hecho de que hayamos encontrado un alto porcentaje de páginas en los libros de texto en las que aparece el signo igual en la forma aritmética canónica coincide con lo visto en los trabajos anteriores. Seo et al. (2003) y McNeil et al. (2006) encontraron que el contexto más frecuente era el contexto ‘operación igual resultado’, que coincide con lo aquí obtenido.

Un contexto importante para adquirir una interpretación relacional del signo igual según los estudios previos es el que tiene operaciones en ambos lados del signo igual (McNeil, 2006). De nuevo encontramos que este contexto aparece un número muy bajo de veces, a pesar de ser el contexto que más favorece la adquisición de un significado relacional del signo.

En una de las editoriales aparece en dos ocasiones una expresión clara de utilización unidireccional del signo igual. Este contexto no lo podemos considerar como operación en ambos lados del signo igual ya que en la sentencia $5 + 7 = 12 + 8 = \_ + 9 = \_ + 5 = \_$, el signo igual no significa que el valor de la operación de la izquierda sea igual al valor de la operación de la derecha. Lo que realmente se está utilizando es el contexto ‘operación igual resultado’ concatenado varias veces.

Otro de los contextos que más favorecen interpretación relacional del signo igual es el contexto aritmético ‘resultado igual operación’ según lo anterior. Todas las editoriales no superan un 10% de este tipo de contextos excepto la editorial Bruño.

En resumen, en los contextos aritméticos, el que más aparece en todos los libros de texto es la forma ‘operación igual resultado’, que lleva a una interpretación operacional según hemos visto en el marco teórico.

Contextos no aritméticos

Por lo que se refiere a los contextos no aritméticos, Seo et al. (2003) concluyeron que este tipo de contextos ayudaba a los niños a construir un significado de equivalencia numérica del signo igual. En la Tabla 4 se pueden observar los porcentajes en los que aparece el signo igual en ese contexto, respecto al total en cada libro. Como se puede observar, en ninguno de los libros analizados los porcentajes son altos.

<i>Curso</i>	<i>Libro de texto</i>	<i>Comparación</i>	<i>Medida</i>	<i>Monedas</i>	<i>Sistema decimal</i>	<i>Otros</i>
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	1,04	0	0	1,04	0
	Anaya – Salta a la vista	0	0	0	3,69	3,28
	SM – Trampolín	3,46	0	0	0,69	0
	Bruño – Lapiceros	0,63	0	3,75	0	0
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	0	0,35	0,18	1,93	0,70
	Anaya – Salta a la vista	0,29	2,58	0,29	10,44	0,14
	SM – Trampolín	0,17	2,01	0,17	3,02	0
	Bruño - Lapiceros	0,36	0,72	1,44	0,36	0,36

Tabla 4. Porcentaje de los distintos contextos no aritméticos respecto al total.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos revelan que los estudiantes del primer ciclo de Educación Primaria encuentran el signo igual en el contexto aritmético ‘operación igual resultado’ mucho más frecuentemente que en otros contextos aritméticos o no aritméticos. En mucho menos porcentaje, aparecen contextos como ‘operaciones a ambos lados del signo igual’ o ‘resultado igual operación’. Según hemos visto en el trabajo de McNeil et al. (2006), estos últimos contextos ayudan a adquirir una interpretación relacional del signo igual, todo lo contrario que el contexto ‘operación igual resultado’ que conlleva adquirir un significado operacional.

También hemos observado que hay muy pocas situaciones en la que aparezcan contextos no aritméticos, como la equivalencia de monedas, medida, comparación de cantidades, que según los trabajos de Seo et al. (2003) ayudan a percibir ese significado de relación de equivalencia que tiene el signo igual.

Hemos encontrado incluso un uso indebido del signo igual en el que se concatenan varios cálculos aritméticos, lo que conlleva un uso unidireccional del signo igual y por lo tanto, a una vez más un significado incorrecto unidireccional del signo igual.

Como conclusión obtenemos que los contextos que encontramos en los libros del primer ciclo de Educación Primaria favorecen una interpretación operacional del signo igual, lo que podría implicar una dificultad a la hora de adquirir un significado de equivalencia numérica de las expresiones situadas a ambos lados del signo igual. Esta comprensión como operador que parece provocar los libros de texto en el primer ciclo de primaria podría obstaculizar el aprendizaje de un significado más completo si no se expone a los alumnos a situaciones más variadas de uso del signo igual. Una instrucción basada en contextos que dan una imagen de operador del signo igual puede suponer problemas a la

hora de extender su significado. No obstante, la información que llega a los niños no depende sólo de los libros de texto. En la instrucción las actividades planteadas por el profesor y sus explicaciones y otros materiales complementarios que se utilizan en el aula, pueden mostrar otra imagen diferente del signo.

En trabajos posteriores, se podría comprobar de forma experimental como afecta el uso de estos libros de texto a los estudiantes del primer ciclo, registrando que significados le dan al signo igual utilizando dichos materiales. Además habría que analizar otros factores como materiales complementarios y la presentación del profesor del signo igual en el aula. Todos estos factores influyen en el aprendizaje de los estudiantes y sería necesario analizarlos en conjunto. Una vez analizadas todas estas características, sería necesario crear un programa de intervención en la instrucción de la Aritmética tal como propone autores como Molina (2009). Si realizamos una instrucción rica en diferentes contextos en los que aparezca el signo igual no sólo como el contexto aritmético canónico, sino con todos los propuestos en el trabajo, podríamos comprobar si es suficiente para conseguir ese significado relacional del signo o igual, o trabajar en la línea que la adquisición de los diferentes significados del signo igual depende del desarrollo de los niños.

Referencias

- Behr, M. J., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Carpenter, T.P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, England: Heinemann.
- Essien, A. y Setati, M. (2006). Revisiting the Equal Sign: Some Grade 8 and 9 Learners' Interpretations. University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa. *African Journal of Research in SMT Education*, 10(1), 47-58.
- Hunter J. (2007). Relational or Computational Thinking: Students Solving Open number Equivalence Problems. En J. Watson & K. Beswick, *Mathematics: Essential Research, Essential Practice 1*, (pp. 421-429). Massey University: MERGA.
- Knuth, E.J., Alibali, M.W., McNeil, N.M., Weinberg, A. y Stephens, A.C. (2005). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. *ZDM* 37(1), 68-76.
- Knuth, E.J., Stephens, A.C., McNeil, N.M., Alibali, M.W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for research in Mathematics Education* 37(4), 297-312.
- McNeil, N.M. y Alibali, M.W. (2005). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development*, 76(4) 883-899.
- McNeil, N.M., Grandau, L., Knuth, E.J., Alibali, M.W., Stephens, A.C., Hattikudur, S. et al. (2006). Middle-School students' understanding of the Equal sign: The Books They Read can't Help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367-385.

- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM072822.PDF>.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Morris, A. K. (2003, Spring Edition). The Development of Children's Understanding of Equality and Inequality Relationships in Numerical Symbolic Contexts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 25(2), 18-51.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Seo K.H., Ginsburg, H.P (2003). "You've Got to Carefully Read de Math Sentence...": Classroom Context and Children's Interpretations of the Equal Sign. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The development of arithmetic concepts and skill: constructing adaptive expertise* (pp. 161, 178). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

RELACIONES EN LA PRÁCTICA ENTRE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA (MKT) Y LAS CREENCIAS DEL PROFESOR

RELATIOSHIPS BETWEEN TEACHER'S MKT AND BELIEFS IN PRACTICE

Ribeiro, C. M., Carrillo, J.

Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidade do
Algarve, Portugal; Universidade de Huelva, España

cmribeiro@ualg.pt; carrillo@uhu.es

Resumen. *Como profesores, lo que hacemos y cómo lo hacemos se encuentra estrechamente ligado al conocimiento sobre los tópicos de enseñanza, así como al modo como encaramos todo el proceso de enseñanza. A partir del análisis de lo que sucede en un episodio de revisión en Primer Ciclo, abordamos y discutimos las relaciones intrínsecas entre las acciones llevadas a cabo, el conocimiento evidenciado (desde la perspectiva del Mathematical Knowledge for Teaching), las creencias manifestadas y su papel en el transcurso de la práctica. Las relaciones constatadas condicionan la forma como las distintas situaciones son exploradas (y las tareas preparadas) y, por tanto, las oportunidades de aprender facilitadas a los alumnos (induciendo la visión de una matemática compartimentadas y acabada).*

Palabras-clave: Conocimiento Matemático para la Enseñanza; creencias; acciones; practica lectiva.

Abstract. *As teacher's, what we do and how we do it has a straight relation with the knowledge we have got concerning each topic but also with the way(s) we envisage the whole teaching-learning process. From the analysis of what seems to be happening in an episode of reviewing content in a primary teacher classroom, we question and discuss the intrinsic relationships between actions, the evidenced knowledge (in the framework of the Mathematical Knowledge for Teaching) and the manifested beliefs and their role in practice. The observed relationships condition the way the situations are explored (and the tasks prepared) and, in consequence, the learning opportunities provided in the classroom for the pupils (enhacing a view of mathematics as a closed field, which is composed of isolated sets).*

Key words: Mathematical Knowledge for Teaching; beliefs; teachers' actions; teachers' practice.

INTRODUÇÃO

O exercício de qualquer profissão implica um conjunto de especificidades. Algumas delas, embora não conscientemente reconhecido, de natureza matemática. Porém, na docência da matemática, a especificidade do conhecimento matemático, é maior (mais

específico), pois, além de conhecimento instrumental, único necessário noutras profissões (e.g. cálculo de áreas, volumes, razões, percentis, juros ou percentagens – na construção civil, sistema bancário ou saúde), o professor tem de saber os porquês matemáticos subjacentes a cada situação, que o capacitem a tornar a Matemática compreensível para os outros. A complexidade do processo de ensino relaciona-se intrinsecamente com a multiplicidade de dimensões, e suas relações, envolvidas em todo o processo, as quais moldam a forma de encarar o ensino da matemática e de efectivar a prática, sendo sobejamente importante a sua mais ampla e profunda compreensão e do seu papel no processo de ensino.

A busca de uma tal compreensão é um dos aspectos que motivou uma investigação tendo por foco o desenvolvimento profissional do professor, centrando-se no seu conhecimento profissional. Nessa investigação mais ampla, pretende-se investigar quais as dimensões do conhecimento profissional⁷² subjacentes às acções do professor enquanto leccionam uma aula de matemática (no 1.º Ciclo⁷³); como se relacionam e “evoluem” ao longo do tempo. Alguns aspectos desta investigação têm vindo a ser apresentados e discutidos nos seminários da SEIEM desde 2008 (relações entre acções e crenças (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2008); papel dos objectivos no processo de ensino (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2009) e forma de representar o desenvolvimento profissional do professor (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2010)). Estas perspectivas e abordagens múltiplas pretendem obter um mais amplo conhecimento e compreensão do processo de ensino e dos factores que o influenciam (e como são influenciados), de modo a podermos contribuir para melhorar, simultaneamente, a formação e a prática lectiva: neste contexto investigamos sobre e para a formação docente (os participantes implicam-se na sua própria formação e pretendemos, simultaneamente, efectuar uma transferência desenhando tarefas que melhorem a formação facultada).

Aqui focaremos as relações e influência do MKT e crenças reveladas na prática de Maria, uma professora do 4.º ano (alunos com 8 ou 9 anos) num episódio cujo objectivo é rever *distintas formas de escrever uma décima com recurso ao desenho no quadro*⁷⁴. Discutiremos o papel/impacto destas dimensões na prática e no modo como influenciam as acções; terminamos reflectindo sobre as potencialidades para a formação de um mais profundo conhecimento dessas relações.

MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING E CRENÇAS DO PROFESSOR

A prática lectiva é influenciada por um conjunto de dimensões associadas/incluídas no conhecimento profissional do professor (Shulman, 1986), influenciando directamente o seu conteúdo e a importância atribuída pelo professor nas decisões tomadas e, consequentemente, no decurso da prática. Dessas dimensões fazem parte o MKT e as crenças do professor, e o modo como são exteriorizadas por via das acções levadas (ou

⁷² Aqui são consideradas nucleares as crenças, *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT)⁷², objectivos, os tipos de comunicação matemática promovidos e as acções levadas a cabo (sendo as últimas encaradas como forma(s) de exteriorizar as primeiras.

⁷³ Primeiros quatro anos de escolaridade (alunos de 6 a 9 anos).

⁷⁴ Este objectivo foi explicitado verbalmente (por estas palavras) antes do início da aula, daí a opção de o indicar exactamente dessa forma, não devendo, portanto, confundir-se com outros entendimentos sobre os mesmos termos (e.g. pictórica, numérica, discreta,...).

não) a cabo em cada instante.⁷⁵ Apresentamos, seguidamente, a forma como cada uma destas dimensões (crenças, MKT e acções) é encarada neste texto.

As “acções do professor” devem ser entendidas como a sua actuação na sala de aula ao lidar com a construção de conhecimentos por parte dos alunos.

Quanto ao conhecimento do professor, entre diversas perspectivas existentes na literatura, optámos pela conceptualização do grupo liderado por Deborah Ball – MKT (e.g. Ball, Thames e Phelps (2008) e Hill, Rowan e Ball (2005)) por permitir identificar de que conhecimento os professores fazem uso, a cada momento, durante a prática e, também, por atribuir uma orientação específica ao conhecimento matemático do professor, enfatizando o raciocínio matemático desenvolvido quando ensina. Baseados em Shulman (1986), dividem os dois grandes domínios do conhecimento – conhecimento do conteúdo e conhecimento didáctico do conteúdo – em três subdomínios cada (incluindo, até ao momento, o conhecimento curricular no conhecimento didáctico do conteúdo).

Assim, sumariamente, além do conhecimento do conteúdo que permita *saber fazer* (conhecimento instrumental) (*Common Content Knowledge – CCK*), cumpre-nos também *saber para ensinar a fazer* (*Specialized Content Knowledge – SCK*). Este último envolve, por exemplo, todo o saber necessário para não se limitar a dizer se algo está correcto ou incorrecto, cumprindo-lhe conhecer o porquê dessa (in)correção e, também, as distintas representações para um mesmo conteúdo. Incluem, ainda, neste domínio, um conhecimento da evolução dos diversos conteúdos ao longo da escolaridade (*Horizon Content Knowledge – HCK*)⁷⁶. O conhecimento didáctico do conteúdo é considerado composto por: *Knowledge of Content and Teaching* (KCT), *Knowledge of Content and Students* (KCS) e *Knowledge of Content and Curriculum* (KCC). Assumem o KCT como o conhecimento em jogo, por exemplo, na sequencialização das tarefas ou na escolha do exemplo inicial, bem como a das distintas estratégias e representações para abordar os conteúdos. Relativamente ao KCS, associam-no ao conhecimento que permite antecipar os pensamentos, dificuldades/facilidades dos alunos e ouvir/interpretar os seus comentários. Seguindo também Shulman (1986, p. 10) relativamente ao KCC, assume-se que os professores devem ter uma visão completa da diversidade de programas concebidos para o ensino de determinados temas e tópicos em determinado nível/ano de escolaridade e da variedade de materiais didácticos disponíveis.

Quanto às crenças do professor (relativamente ao ensino e aprendizagem da Matemática), na linha de Thompson (1992), assumimos o seu papel central (mas não único) na forma como a prática é efectivada – contribuem para influenciar a selecção e priorização de determinado conjunto de acções (associadas a certos objectivos

⁷⁵ Para Aguirre e Speer (2000) as crenças são a fonte fundamental para as tomadas de decisões. Essas exteriorizações ocorrem também intrinsecamente associada ao tipo de comunicação matemática promovida mas, por limitações óbvias de espaço, essa não é, aqui, foco de discussão. Para mais informações sobre o seu papel e relação com as demais dimensões aqui em análise consultar, por exemplo, Ribeiro, Carrillo e Monteiro (2009).

⁷⁶ Relativamente a este subdomínio (HCK), recentemente têm vindo a ser desenvolvidos outros estudos/conceptualizações, assumindo-o como *core* do MKT, e não “somente” como uma mais dimensão (e.g. Fernández e Figueiras (2011)).

considerados prioritários)⁷⁷. Tal como para os conhecimentos, consideramos as crenças organizadas num sistema que integra um outro mais amplo. Não pretendemos efectuar uma análise focada apenas nas mesmas; daí recorrermos, directamente, ao instrumento de Climent (2005), que refere um conjunto de indicadores de crenças (consideramo-los manifestações de crenças pois encontram-se directamente associadas às acções levadas a cabo) de professores dos primeiros seis anos de escolaridade, relativas à metodologia (prática e actividades lectivas, fontes de informação, diferenciação individual, utilização de materiais manipulativos, objectivos do processo de ensino e programação), matemática escolar (orientação, conteúdo, concepção e finalidade), aprendizagem (como se realiza, que processos se utilizam, qual o papel/importância da argumentação dos alunos, interacções professor/alunos/matéria, tipos de agrupamento), papel dos alunos (participação na planificação, responsabilidade pela aprendizagem – chave de transferência ensino-aprendizagem, o que faz, como e para que o faz) e papel do professor (o que faz/como o faz/metodologia ou atitude pedagógica/como actua e relativa à validação da informação).

CONTEXTO, MÉTODO E OPÇÕES TOMADAS

Este texto integra uma investigação consubstanciada no desenvolvimento profissional do professor, focando o seu conhecimento profissional. Centramo-nos, para isso em dois estudos de caso com uma metodologia de cariz interpretativo. A recolha de dados ocorreu em três fases de trabalho distintas (de introdução de novos conteúdos) e através de gravações áudio e vídeo da prática lectiva, centradas nas professoras (Brophy, 2004) e das sessões de trabalho colaborativo entre as duas primeiras fases. Aqui abordaremos a prática de uma das professoras (Maria, com 18 anos de experiência) num episódio de revisão da primeira fase de recolha de dados.

As aulas foram transcritas, e as interacções entre professora e alunos registadas através da visualização do vídeo (Santagata, Zannoni, & Stigler, 2007). Posteriormente dividiram-se em episódios (com um objectivo específico do professor – associado à matemática e ao seu ensino)⁷⁸. Em cada episódio identificaram-se as manifestações de crenças e os constituintes dos subdomínios do MKT. Para as primeiras recorreu-se ao instrumento de Climent (2005); posteriormente, e para garantir também a consistência interna, efectuou-se uma análise transversal a todos os episódios do mesmo tipo – associados ao mesmo tipo de objectivo da professora (e.g. revisão, apresentação). Nessa análise, identificaram-se os indicadores comuns associados a cada tipo de episódios representativos da prática da professora em cada situação concreta e exteriorizados por determinada acção.

Quanto aos subdomínios do MKT, visto os conteúdos abordados em cada fase de trabalho serem distintos, em vez de uma intercessão dos comuns, optou-se por uma reunião de todas as evidências, também para identificar (discutir e reflectir sobre os motivos subjacentes) situações matematicamente críticas reveladas na prática (não para avaliar essa prática, mas para aprender com ela, e também com o fito de iniciar a elaboração de uma “base de evidências” dessas situações).

⁷⁷ Aqui não discutiremos o nosso entendimento sobre objectivos do professor e o seu papel na prática. A sua discussão pode encontrar-se, por exemplo, em Ribeiro et al. (2009).

⁷⁸ Para mais informações sobre a divisão das aulas em episódios consultar, por exemplo Ribeiro et al. (2008).

UM EXEMPLO DA PRÁTICA E SUA ANÁLISE (RELAÇÕES ENTRE ACÇÕES, CRENÇAS E SUBDOMÍNIOS DO MKT)

Maria pretende rever várias formas de escrever uma décima; por isso, antecipadamente os alunos identificaram diferentes quantidades de décimas e centésimas através da pintura, em distintas unidades (rectângulos) divididos em dez e cem partes iguais (com recurso a uma ficha de trabalho). Depois Maria desenha no quadro um quadrado dividido em dez partes (não todas iguais), esclarecendo-os sobre o que vão fazer de seguida e pergunta aos alunos a que corresponde cada uma das partes. Ocorre o seguinte diálogo:

Linhas		Transcrição
425	P	Oh Paulo, isto (indica o quadrado dividido em dez barras representado no
426		quadro) representa uma unidade.
427		Nós fomos partir em quantas partes?
428	A	Em dez.
429	P	Em dez. A cada parte destas dá-se o nome de...?
430	A	Décima.
431	P	Uma décima. Então vocês agora, passando para aqui (aponta para a
432		indicação $1:10=0,1=1/10$) o que é que temos?
433		Uma unidade dividida em dez partes é igual a uma...?
434	As	Décima.
435	P	Que também se pode escrever desta maneira. (P aponta para o $1/10$)

Figura 15 – Transcrição de parte de um episódio de revisão de distintas formas de escrever uma décima (P: professora; A(s): aluno(s))

Nesta situação de revisão (com recurso ao desenho no quadro), Maria desenvolve cinco acções específicas que contêm as duas nucleares de todas as situações de revisão (rever e clarificar). A estas vão sendo associadas outras que dão forma à especificidade do tipo de revisão e que se relacionam quer com os recursos utilizados quer com o(s) modo(s) como o são (neste caso correspondem a desenhar no quadro e esclarecer como se vai desenrolar a actividade), mas também com a forma de correcção: individualmente ou em grande grupo e o esclarecimento do que fazer/pretende que se faça. Cada uma destas acções exterioriza determinada crença ou crenças e, correspondendo a determinado período de tempo – associado a cada acção/objectivo específico (Ribeiro et al., 2008) – encontram-se também associadas evidencias (ou ausências) das dimensões do MKT.

Na tabela abaixo ilustram-se as relações observadas entre as acções, crenças e subdomínios do MKT relativamente à situação em discussão. (Note-se que os indicadores de crenças são identificados para este *cluster* de episódios de revisão (com recurso ao desenho no quadro), mas os subdomínios do MKT são específicos desta situação concreta e algumas dessas evidências ocorrem intrinsecamente associadas a determinado momento da aula, enquanto outras transversalmente a todo o episódio (coluna mais à direita na tabela) – e por vezes a vários episódios.)

Indicadores de crenças	Acções	Subdomínios do MKT	
(Metodologia) – Não se utilizam materiais manipuláveis (Papel do professor) – Transmite por processos tecnológicos, expõe, organiza, técnica do conteúdo e da planificação	P desenha no quadro	KCT – Maria considera importante que os alunos possam visualizar/ter uma “representação compreensível” do que ela está a dizer para que, dessa forma, possam melhor compreender o que se pretende; revela assumir que a utilização do desenho no quadro é uma estratégia adequada para rever diferentes formas de escrever uma décima	CCK – Saber que a décima é uma das dez partes iguais em que se divide a unidade
(Metodologia) – A programação é sequencial, estruturada e fechada (Aprendizagem) – realiza-se por memorístico sequencial	P esclarece como se vai desenrolar a actividade		
(Aprendizagem) – A interacção entre professora, aluno(s) e matéria tem um fluxo mais forte na direcção professora→aluno(s) que a inversa	P (...) ⁷⁹ , clarifica o conteúdo		SCK – Saber “representar/escrever” a décima de diferentes formas – utilizando a divisão, a parte inteira e decimal e a forma de fracção (1:10=0,1=1/10)
(Papel do professor) – A validação da informação é feita pela professora	P (...), recapitula o conteúdo	CCK – Maria expressa-se de um modo que pode induzir os alunos em erro, levando-os a assumir que o todo é igual às partes, não diferenciando o facto de as partes terem de ser iguais (não faz referência ao facto das partes terem de ser iguais – divisão equitativa)	
(Aprendizagem) – A argumentação serve para demonstrar a compreensão dos conteúdos	P (...), corrige a actividade em grupo		

Tabela 1 – Relações entre acções, crenças e subdomínios do MKT num episódio de revisão com recurso ao desenho no quadro

Ao escrever no quadro e esclarecer como se vai desenrolar a actividade, Maria exterioriza crenças quanto ao seu papel central no processo de ensino cuja sequência das

⁷⁹ (...), deve ser lido como: dialoga com o grupo e, com recurso ao desenho no quadro.

tarefas respeita o programado, promovendo a memorização, sem recorrer a materiais manipuláveis (nem como motivação). Estas acções associam-se às estratégias consideradas mais adequadas e à exploração, ou não, dos recursos disponíveis (KCT). As manifestações de crenças associadas às demais acções revelam que Maria se assume como a única pessoa capaz de validar a informação mobilizada na aula, condicionando, portanto, as interacções entre os demais envolvidos no processo de ensino. Aos alunos cumpre replicar o que ouvem, e como o ouvem, servindo esta “argumentação” apenas para mostrar a sua atenção ao explanado. O conhecimento do conteúdo revelado influencia o modo de exprimir-se que poderá levar a concepções erróneas por parte dos alunos.

Transversalmente a todo o episódio (esta situação fazia parte da imagem da lição), Maria revela um CCK e um SCK relacionado com o saber o que é uma décima e como a “representar”/escrever de distintas formas equivalentes.

Note-se que estas relações não podem ser generalizadas, mas um seu maior e mais rico entendimento, facultará informações críticas que podem desempenhar um papel fundamental no processo de formação de professores, norteando a própria actuação dos formadores.

ALGUMAS CONCLUSÕES E QUESTÕES PARA A FORMAÇÃO

Centrar o foco de análise na prática lectiva, no que nela parece ocorrer e em alguns dos factores que a influenciam, aprofundará a compreensão dessas dimensões e do papel desempenhado no seu decurso. A prática levada a cabo, e as aprendizagens subsequentes (oportunidades de aprender (Hiebert & Grouws, 2007) facultadas (potenciadas/limitadas)) fundamentam-se, necessariamente, no conhecimento detido pela professora ou que assume deter sobre o tema abordado. A carência (em qualquer dos subdomínios do MKT), na melhor das hipóteses, limitará o conhecimento e aprendizagens dos alunos – na pior, conduzirá a concepções/conhecimentos erróneos limitadores das aprendizagens imediatas e também condicionadores do papel que os alunos se atribuem a si próprios, à matemática e ao seu ensino.

Um melhor conhecimento das dimensões do conhecimento profissional em jogo em cada situação concreta, da forma como se relacionam, e impactam no desenrolar da prática, permitirá também (a nós, formadores de professores, mas também aos professores) uma chamada de atenção para uma mudança de foco no processo de ensino, deixando de centrar a actuação docente na busca de respostas rápidas, baseadas em questões directas (verificação) e passando a atribuir uma maior responsabilização na aprendizagem aos próprios alunos. É, assim, muito importante uma consciencialização do peso destas dimensões na prática de cada indivíduo, o que poderá despertar o desejo de enriquecimento e “melhoria”, para reduzir a prática do ensino focado no treino de procedimentos (muito frequente nas salas de aula do 1.º Ciclo (Brocardo & Serrazina, 2008)), promovendo um ensino da matemática baseado numa efectiva compreensão inicial dos conceitos e dos motivos subjacentes à realização desses procedimentos. Esta consciencialização melhorará (expectavelmente) não apenas a formação mas também a prática; para isso, cumpre aos professores consciencializarem-se do seu próprio conhecimento profissional, do papel que este efectivamente desempenha na sua

actuação (situações que potencia e/ou limita) e do impacto que tem nas oportunidades de aprender facultadas aos seus alunos.

Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Este trabalho forma parte do Projecto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha)

Referências

- Aguirre, J., & Speer, N. (2000). Examining the relationship between beliefs and goals in teacher practice. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(3), 327-356.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.
- Brophy, J. (2004). *Using Video in teacher education*. Amsterdam: Elsevier Ltd.
- Climint, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. PhD Dissertation, (Michigan: Proquest Michigan University. www.proquest.co.uk).
- Fernández, S., & Figueiras, L. (2011). El conocimiento del profesor necesario para una educación matemática continuada. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291-301). Lleida, Espanha: SEIEM.
- Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2008). Uma Perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática do 1.º ciclo: um modelo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. In R. Luengo, B. Alfonso & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 545-555). Badajoz: SEIEM.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis y influencia en la práctica de una maestra. In M. J. González & J. Murrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 415-423). Santander: SEIEM.

- Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2010). Desarrollo profesional de una maestra de primaria. Introduciendo y discutiendo un modelo de análisis de desarrollo profesional. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 511-522). Lleida: SEIEM, Universitat de Lleida.
- Santagata, R., Zannoni, C., & Stigler, J. W. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: an empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(2), 123-140.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Thompson, A. (1992). Teachers Beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

LA MAYÉUTICA Y SU APLICACIÓN A UN CUESTIONARIO DIRIGIDO A DOCENTES.

MAIEUTICS AND THEIR APPLICATION IN A QUESTIONNAIRE FOR TEACHERS.

Rigo Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México.

mrigo@cinvestav.mx

Resumen. *La mayéutica socrática, articulada en torno a la resolución de problemas, se basa en un método de conjeturas y refutaciones, y en la promoción de la auto-conciencia de la ignorancia. Dada la vigencia de estos principios, en la investigación se diseñó un cuestionario estructurado de acuerdo a los tres Momentos que conforman los procesos mayéuticos, los cuales se identificaron y caracterizaron en este estudio: el de Construcción, el de De-construcción y el de Re-construcción. El cuestionario se aplicó a 40 profesores de secundaria. Aunque la experiencia tuvo limitantes, se pudieron identificar tres patrones de respuesta al instrumento, uno de los cuales denota que los docentes alcanzaron a realizar, aunque sea en forma incipiente, alguna actividad mayéutica, lo cual muestra cierta efectividad del cuestionario y de la filosofía educativa en la que se sustenta.*

Socratic maieutics, articulated with respect to problem solving, is based on a method of conjectures and refutations, and on promotion of self-awareness of ignorance. In view of the validity of those principles, a questionnaire was designed and structured according to the three Moments that make up maieutics processes. The foregoing Moments are identified and characterized in the study, as follows: Construction, the Moment of De-Construction and that of Re-Construction. The questionnaire was applied to 40 secondary school teachers. In spite of the limitations of experience, three response patterns to the instrument were identified. One of said patterns denotes that the teachers were able to carry out, albeit incipiently, some maieutic activity, which demonstrates the effectiveness –to a certain extent- of the questionnaire and of its underlying educational philosophy.

Palabras clave. Mayéutica socrática; cuestionario dirigido a docentes; metacognición; desarrollo profesional del profesor.

Socratic maieutics; questionnaire for teachers; metacognition; professional development of teachers.

TRES MOMENTOS DE LA MAYÉUTICA SOCRÁTICA

La mayéutica, dada a conocer a través de la obra de Platón, se inscribe en la doctrina y la práctica educativa promovida por Sócrates. Su rasgo distintivo consiste en propiciar en el alumno un aprendizaje a partir del auto-reconocimiento de su ignorancia.

Sócrates administraba sus enseñanzas en forma de preguntas y respuestas a través de un intercambio verbal (Jaeger, 1987, p. 395), y basaba su práctica educativa en el ‘método por hipótesis’, el cual sigue una lógica semejante a la reducción al absurdo. Su metodología radica en que el maestro lleva a su discípulo⁸⁰ a elaborar conjeturas erradas -en el marco de la resolución de problemas que al alumno no le resultan triviales- de las que el maestro desprende contradicciones que le permiten demostrar su falsedad. La perplejidad que afecta al educando cuando se topa con los absurdos que se derivan de las hipótesis erróneas que él aduce cuando cree que sabe, lo llevan a tomar conciencia de su estado de ignorancia, condición que constituye el punto de partida para su aprendizaje: la confrontación con su propio desconocimiento produce -según Sócrates- un dolor semejante al del alumbramiento pero coloca al que no sabe en “...una mejor disposición de espíritu en relación con la cosa que ignora” (Platón, versión de 1981, p. 448). La ayuda que en ese momento el mentor le proporciona a su discípulo le permite “...descubrir en qué lugar se encuentra él en relación con la verdad...” (*Ibidem*), y alienta su gusto por la indagación: al reconocer su atraso, estará dispuesto a aprender una cosa que él no sabe, pero creía saber.

En el proceso mayéutico, que Platón recrea en el *Dialogo Menón*, se han distinguido para propósitos de esta investigación tres Momentos: el de la Construcción, en el que el tutor plantea un problema y el oyente sugiere una conjetura errónea; el Momento de De-construcción, en el que el tutor refuta la conjetura y confronta a su discípulo con su error, y el de la Re-construcción, en el que el alumno elabora la solución correcta, con la ayuda del maestro, y toma conciencia de lo que ignora. En el Anexo 2 aparece un fragmento del *Menón* en el que se resaltan estos tres Momentos.

LOS PRINCIPIOS DE LA MAYÉUTICA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE HOY EN DÍA

Los principios que rigen el quehacer pedagógico socrático están presentes en la educación matemática de hoy en día. Por ejemplo, el diálogo verbal, prototípico de la *paideia* socrática, es “un patrón muy común en la educación actual” (1997, Lemke, p. 21); la dinámica del descubrimiento matemático basada en el establecimiento de conjeturas y refutaciones, que ha sido descrita por filósofos como Lakatos, se ha reivindicado después por una gran cantidad de investigadores y educadores (v. gr. Balacheff, 2000), y el razonamiento por hipótesis se encuentra actualmente presente desde la escuela elemental (Reid, 2002, p. 110).

Por otra parte, las prácticas metacognitivas (ie, de “...auto-conocimiento de procesos y productos del propio sistema cognitivo”; Flavell, 1976, p. 232), que representan la quintaesencia de la mayéutica socrática, tienen hoy por hoy una presencia incuestionable en las agendas educativas de distintos países. El NCTM, v. gr, aconseja que “... los estudiantes de matemáticas de todos los niveles ... discutan y cuestionen su propio pensamiento y el pensamiento de otros” (cit. en Lampert, 1990, p. 33), y el plan y programa de estudio de la Escuela Secundaria Obligatoria de España formula palmariamente exhortos de corte mayéutico: ahí se sugiere que el estudiante “... sea consciente de lo que sabe y de lo que es necesario aprender...” (Real Decreto, 2007, p. 689).

⁸⁰ Que en el *Diálogo Menón* de Platón, se trata de un esclavo.

Dada la vigencia de los principios de la mayéutica socrática, la investigación que aquí se reporta se basa en el supuesto de que este método educativo puede ser pertinente y fructífero en los procesos de formación inicial y en la profesionalización del docente de matemáticas. Como un primer paso para explorar la viabilidad de esta hipótesis didáctica, se diseñó un cuestionario piloto inspirado en el método mayéutico y estructurado conforme a los tres Momentos antes descritos, el cual se aplicó a un grupo de profesores. En lo que resta del escrito se presenta el cuestionario y se describe su estructura, se precisan las condiciones de su aplicación y se exponen algunos de los resultados obtenidos.

LOS TRES MOMENTOS DE LA MAYÉUTICA APLICADOS A UN CUESTIONARIO

Las preguntas del cuestionario y la actividad que con ellas se esperaba propiciar, se describen en las Tablas 1 y 2. Ahí también se pueden apreciar las partes que integran el instrumento y cómo en éste se interpretaron y actualizaron los distintos Momentos de la mayéutica socrática: en el de Construcción se plantea un problema ‘realista’ de comparación de razones que, de acuerdo a estudios previos (Mayorga, 2011), tiene una alta probabilidad de que se responda con estrategias aditivas o erróneamente. En el Momento de De-construcción en el cuestionario se propone una solución ideal basada en operaciones multiplicativas para que el docente la contraste con la que él dio y, en su caso, tematice sus errores; en el tercero, de la Re-construcción, se espera que el profesor reflexione sobre lo que desconoce del tema así como sobre su convencimiento y seguridad en ese contenido.

<i>Síntesis de las preguntas del Cuestionario</i>	<i>Propósito de la pregunta y actividad involucrada</i>
PRIMERA PARTE	
INTRODUCCIÓN	
1. A continuación se presentan diez aspectos de la enseñanza de las matemáticas en el aula. Enuméralos del 1 al 10, en orden de la importancia que, en tu práctica docente, le das a cada uno de los aspectos. 1.c) Generación de conciencia en los alumnos de aquello que saben. 1.g) Generación de conciencia en los alumnos de aquello que no saben. 2. Para cada contenido de las matemáticas que se enlista a continuación, indica qué tan seguro te sientes en cuanto a tus conocimientos. 2.d) Razón y proporción. 3. ...	Reflexión sobre aspectos de la práctica docente. Reflexión sobre la seguridad del docente en torno a los contenidos que imparte y en su enseñanza.
MOMENTO DE CONSTRUCCIÓN	
Planteamiento del problema y Resolución (‘aditiva’) (o incorrecta)	
4. Resuelve el siguiente problema. Doña Ausencia está interesada en instalar una granja de puercos. En su pueblo sólo tiene dos opciones para comprar sus	Resolución de un problema matemático ‘realista’.

primeros animalitos: la granja de don Pancho ó la de don Luís. Las condiciones que le ofrecen son las siguientes:		
<i>Cerdos de la granja de:</i>	<i>Peso a los 6 meses</i>	<i>Peso actual (a los 12 meses)</i>
Don Luís	40 Kg.	70 Kg.
Don Pancho	50 Kg.	80 Kg.
Considerando que en ambos casos los animalitos consumen la misma cantidad de alimento y que doña Ausencia los quiere vender a los dos años ¿en qué granja le aconsejarías tú que comprara sus puerquitos? ¿O da lo mismo que compre en cualquiera de ellas? ¿O no se puede saber?		
Operaciones		
Respuesta		
4.a) El problema se te hizo: Muy accesible; Accesible; Difícil; Muy difícil		
4.b) La mayoría de tus alumnos encontrarán este problema: Muy accesible; Accesible; Difícil; Muy difícil		
4.c) ¿Qué tan convencido estás de la resolución y la respuesta que diste al problema? 100%; 75%; 50%; 25%; 0%		
4.d) ¿En qué basas tu convencimiento (o tus dudas)? Explica.		

Tabla 1. Primera Parte del Cuestionario

<i>Síntesis de los ítems que integran el Cuestionario</i>		<i>Propósito de la pregunta y actividad involucrada</i>															
SEGUNDA PARTE																	
MOMENTO DE DE-CONSTRUCCIÓN																	
Consideración de una estrategia multiplicativa, refutación de soluciones erróneas y conciencia de la ignorancia																	
5. Las respuestas más frecuentes que han dado los profesores al problema de los cerditos son las siguientes: [....] 5.a) ¿Cuál (o cuáles) de las cinco respuestas fue (fueron) la(s) que tú diste? 5.b) ¿Puedes explicar por qué la(s) diste? 5.c) ¿Diste otra respuesta? Comenta.		Identificación de la estrategia propuesta.															
6. Una forma de resolver el problema es la siguiente. Bajo el supuesto ideal de que los puerquitos de la granja de don Luís y los de don Pancho mantienen la misma tasa de crecimiento que el mostrado en los últimos seis meses (ie, de un 75% y un 60% respectivamente), a los dos años alcanzarán los siguientes pesos: <table border="1"> <tr> <th><i>Meses transcurridos</i></th><th><i>Peso de cerdos granja de don Luís</i></th><th><i>Peso de cerdos granja de don Pancho</i></th></tr> <tr> <td>6</td><td>40 Kg.</td><td>50 Kg.</td></tr> <tr> <td>12</td><td>70 Kg.</td><td>80 Kg.</td></tr> <tr> <td>18</td><td>122.5 Kg.</td><td>128 Kg.</td></tr> <tr> <td>24</td><td>214.3 Kg.</td><td>204.8 Kg.</td></tr> </table>		<i>Meses transcurridos</i>	<i>Peso de cerdos granja de don Luís</i>	<i>Peso de cerdos granja de don Pancho</i>	6	40 Kg.	50 Kg.	12	70 Kg.	80 Kg.	18	122.5 Kg.	128 Kg.	24	214.3 Kg.	204.8 Kg.	Confrontación de la estrategia dada con una de tipo multiplicativo.
<i>Meses transcurridos</i>	<i>Peso de cerdos granja de don Luís</i>	<i>Peso de cerdos granja de don Pancho</i>															
6	40 Kg.	50 Kg.															
12	70 Kg.	80 Kg.															
18	122.5 Kg.	128 Kg.															
24	214.3 Kg.	204.8 Kg.															

Bajo la anterior consideración, los puerquitos de la granja de don Luís pesarán a los 24 meses más que los de su competidor. Conviene entonces comprar en la granja de don Luís. 6.a) ¿Coincide tu respuesta con ésta? Si; No.	
MOMENTO DE RE-CONSTRUCCIÓN	
Toma de conciencia de lo que se sabe y de otros estados internos	
6.b) En el caso en que no coincida: ¿En dónde crees que radica la diferencia con tu respuesta o, en su caso, en dónde crees que estuvo tu error?	Auto-evaluación de la respuesta dada; en su caso, identificación del error.
7. Teniendo en mente la resolución propuesta así como tu resolución, reflexiona sobre la respuesta que diste a 2.d) (seguridad en el tema); 4.a) 4.b) (dificultad del problema); 4.c y 4.d) nivel de convencimiento. Comenta...	Toma de conciencia de estados internos que surgen durante la resolución de problemas matemáticos.
8. ¿Qué te dejan las reflexiones que has hecho durante la resolución de este cuestionario, y en particular las que hiciste en la pregunta 7?	Auto-reconocimiento de lo que se sabe y se ignora.
9. ¿Qué tipo de implicaciones crees que esas reflexiones tienen en el aula, tanto para la enseñanza de las matemáticas como para el aprendizaje?	Valoración de la experiencia para su posible trasposición al aula.

Tabla 2. Segunda Parte del cuestionario.

CONDICIONES DE APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO

El cuestionario fue resuelto por un grupo de 40 profesores de diversas secundarias técnicas del Estado de México (en la República Mexicana). Se trata de un grupo de docentes integrados por 28 hombres y 12 mujeres, cuyos años de servicio fluctúan entre los 2 meses y los 30 años y que imparten actualmente (o han impartido) los tres grados de secundaria.

En principio, se distribuyó sólo la primera parte del cuestionario, la que se pidió que se respondiera con pluma para que después no se modificara lo respondido. Una vez que se contestó, se proporcionó la segunda parte.

ALGUNOS RESULTADOS: PATRONES DE RESPUESTA

El cuestionario es un instrumento acotado cuya resolución no excedió las dos horas. Por esto, no se esperaba promover con él actividades de tipo mayéutico, ie, actividades metacognitivas relacionadas con el reconocimiento de lo que se ignora, que surgen como resultado de la resolución de problemas matemáticos seguida de la reflexión sobre los posibles errores en los que se incurrió y de procesos de autorregulación para la elaboración de soluciones correctas.

No obstante lo antes dicho, en el cuestionario se alcanzan a distinguir tres patrones de respuestas que resulta interesante reportar en este escrito porque es muy posible que se lleguen a encontrar en experiencias semejantes. Un primer patrón denota que los

profesores pudieron realizar, aunque sea en forma incipiente, una cierta actividad mayéutica, basada en la reflexión sobre su resolución y las sugeridas en el instrumento, y en su caso, en la identificación de su error. Uno segundo, en el que los docentes no logran tomar conciencia de su resolución o sus errores, deja ver sólo cierta reflexión de tipo mayéutico. El tercer patrón no revela actividad mayéutica alguna.

En la Tabla 3 y 4 se sintetizan las características de los dos primeros patrones y después se comentan algunas respuestas ilustrativas. Como complemento, en el Anexo 1 se describe el tipo de estrategias (de E1 a E6) a las que recurrieron los profesores (P.n) para resolver el problema enunciado en el ítem 4.

PATRONES DE RESPUESTA CON ACTIVIDAD MAYÉUTICA		
Primera Parte del cuestionario	Segunda parte del cuestionario <i>El profesor reconoce la diferencia entre su resolución y la del cuestionario, o en su caso, identifica su error</i>	
PATRÓN TIPO 1.A		
P. 2 (E5); P.33 (E2)		
El profesor manifiesta: • Que se siente (muy) seguro en sus conocimientos matemáticos; • Que el problema es accesible; • Tener alto grado de convencimiento en su resolución y respuesta.	El profesor cambia sus expresiones en torno a: • Su seguridad en el tema; • El grado de dificultad del problema; • Su nivel de convencimiento.	Hacia el cierre del cuestionario (8 y 9), el profesor hace reflexiones sobre lo que sabe y desconoce.
PATRÓN TIPO 1. B		
P.5 (E4); P. 9 (E1); P.14 (E3); P. 20 (E1); P. 24 (E2)		
Igual que en 1.A	Igual que en 1.A	
PATRÓN TIPO 1.C		
P.1 (E5)		
El profesor manifiesta: • Su inseguridad en sus conocimientos matemáticos; • Que el problema es difícil; • Bajo nivel de convencimiento en su resolución.	El profesor reafirma su inseguridad en la segunda parte del cuestionario.	Igual que en 1.A.

Tabla 3. Patrones de respuesta con actividad mayéutica.

P.n: Profesor n.

Ei: estrategia de resolución del problema 4

Las participaciones que ilustran los patrones con actividad mayéutica son varias: por ejemplo, el P.2 -quien ofreció una resolución (con errores de cálculo) basada en la consideración del peso constante de 30 kg. (estrategia E5)-, en la segunda parte del cuestionario afirma “que hizo una mala interpretación de la noción de razón; ... que sus conocimientos en ese tema son limitados y que minimizó la importancia del problema”. Al final se pregunta “¿cómo reconocer mis carencias en los conocimientos matemáticos?” y responde: “enfrentándome a problemas que reten mi conocimiento”. El P.33, con un patrón de respuesta similar Tipo 1.A (aunque con estrategia E2), en 7g cabila: “tal vez no dudé de mis respuestas” y en la pregunta siguiente sostiene “que las

matemáticas se enseñan y aprenden a través de los errores”. Siguiendo un patrón de respuesta semejante, de tipo 1.B, el P.5 (con estrategia E3) sostiene en 7g: “al encontrar la solución al problema y verificar que estaba bien tuve la certeza de contestar que mi convencimiento es al 100%; sin embargo, después observé que mis conocimientos en este tema están limitados...”.

PATRONES DE RESPUESTA CON REFLEXIÓN DE TIPO MAYÉUTICO		
Primera Parte del cuestionario	Segunda parte del cuestionario	
	<i>El profesor no logra reconocer la diferencia entre su resolución y la del cuestionario, o en su caso, identificar su error</i>	
PATRÓN TIPO 2.A		
P.7 (E4); P. 35 (E5); P. 37 (E3); P. 39 (E3)		
Igual que en 1.A	Igual que en 1.A	
PATRÓN TIPO 2. B		
P. 30 (E3); P. 40 (E5)		
Igual que en 1.A	El profesor reafirma la postura asumida en la primera parte del cuestionario.	Igual que en 1.A

Tabla 4. Patrones de respuesta con reflexión de tipo mayéutico.

Los profesores cuyas respuestas siguen los patrones con reflexión mayéutica hicieron también algunas observaciones interesantes.

El P.39, por ejemplo, quien asigna en 4c un 100% de convencimiento a su resolución, ya en 7f expresa un gran cambio: “creo que en la realidad no estoy tan seguro de la respuesta correcta...”. El P.35 manifiesta transformaciones semejantes: en 4c expresa un 75% de convencimiento pero en 7f reconoce que el cuestionario lo ha hecho “...dudar de sí mismo y de sus respuestas” y en 8 admite que “esas reflexiones nos deben hacer mejores seres humanos y mejores maestros”. El P.37, por su parte, reconoce sorprendido: “dije que el problema es accesible pero... ¡resulta que no lo entendí! El P.40, con un patrón de respuesta tipo 2.B cierra su participación sugiriendo “que se haga una generación de conciencia de lo que se cree que se sabe y lo que no se sabe...”.

CONSIDERACIONES FINALES

En el escrito se identificaron y caracterizaron tres Momentos del proceso educativo mayéutico: el de Construcción, en el que se plantea un problema y surge una conjetura errónea; el de De-construcción, que es el de la refutación, y el de Re-construcción, en el que se elabora una nueva resolución y se toma conciencia de lo que se sabe y se ignora. Estos tres Momentos sirvieron de guía para el diseño de un cuestionario, el cual fue resuelto por 40 docentes de secundaria.

La experiencia relacionada con la aplicación del instrumento mostró la necesidad de introducir en él algunas modificaciones, v. gr., plantear problemas matemáticos que no acepten más de una solución y que no estén abiertos al debate, así como la pertinencia de diseñar experiencias de mayor impacto y duración, como un taller de resolución de

problemas dirigido a docentes de matemáticas, cuya estructura se ajuste a los tres Momentos de la mayéutica. En esto se está trabajando actualmente.

La experiencia también dejó ver que, a pesar de las limitaciones, el cuestionario abrió la posibilidad de que los docentes realizaran alguna actividad mayéutica, al modificar, aunque sea en forma parcial y momentánea, algunos de sus estados de convencimiento o seguridad en torno a un contenido, y tematizar esos cambios. Esto evidencia cierta efectividad del cuestionario así como de la mayéutica, doctrina educativa con principios vigentes en la que se re-significa el papel del discípulo, al colocar en el centro del aprendizaje la contradicción y los desequilibrios cognitivos que éstas provocan (cfr. Piaget, 1990), y también se re-significa la misión del maestro, que consistiría entonces en llevar a sus estudiantes a su zona de desarrollo potencial a través del planteamiento de problemas pertinentes, de contraejemplos y de una guía certera que les permita construir sobre ese proceso sus nuevos saberes y habilidades matemáticas.

Lo aquí expuesto permite sugerir la pertinencia de adoptar a la mayéutica y a la filosofía que la sustenta como un principio organizador de procesos orientados al desarrollo profesional de docentes de matemáticas, lo cual parece no haber sido tomado actualmente en cuenta por los responsables de la formación del profesorado.

Referencias

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (P. Gómez, Trad.). Bogotá, Colombia: una empresa docente, Universidad de los Andes.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. In. L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Jaeger, W. (1987). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.
- Lemke, J. L. (1997). *Aprender a hablar ciencia*. España: Ediciones Paidós Ibérica, S. A.
- Mayorga (2011). *Estrategias de tipo relativo en la resolución de problemas que involucran situaciones de comparación de razones: una propuesta didáctica*. Tesis de Maestría en Educación en Matemáticas no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N.
- Platón (versión de 1981). *Menón o de la Virtud* (P. Samaranch, Trad.). Platón, Obras Completas (pp. 435-460). Madrid, España: aguilar s a de ediciones.
- Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas* (E. Bustos, Trad.). Madrid, España: Siglo XXI de España Editores, S. A.
- Real Decreto, 1631/2007, del 29 de diciembre (BOE del 5 de Enero), por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Obligatoria. España.

Reid, D. (2002). Describing young children's deductive reasoning. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the PME* (Vol. 4, pp. 105-112). Norwick, UK.

ANEXO 1. ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA (ÍTEM 4)

- E1** Basada en relaciones multiplicativas, en la que se considera que en el segundo año los puerquitos crecerán con la misma tasa (ó %) con la que crecieron durante el segundo semestre.
- E2** Cuantitativa, basada en relaciones aditivas, en la que se considera un crecimiento constante (de 30 Kg.) cada seis meses.
- E3** Cualitativa, basada en relaciones aditivas, en la que se considera un crecimiento constante (de 30 Kg.) cada seis meses.
- E4** Cuantitativa, considera sólo algunos datos del problema (peso a los seis meses o peso al año). Resolución con sentido.
- E5** Resoluciones incorrectas (de los tipos antes descritos); basadas sólo en el sentido común; basadas en una operatoriedad indescifrable, o respuesta sin operaciones.
- E6** No es posible dar la respuesta, ya que faltan datos en el enunciado del problema.

ANEXO 2. Fragmento del Diálogo Menón o de la Virtud (81c-85a). Platón (versión de 1981).

MOMENTO DE CONSTRUCCIÓN			
Planteamiento del problema			
S	[Al esclavo] Dime, amigo mío, ¿Sabes tú que este espacio es cuadrado?		reminiscencia? Al comienzo, sin saber cuál es el lado del cuadrado de ocho pies, cosa que por otro parte aún ignora, crea saberlo y respondía con seguridad, como quien sabe, sin tener ningún sentimiento de la dificultad existente. Ahora tiene conciencia de sus problemas, y si no sabe, al menos no cree saber.
E	Sí.	M	Tienes razón.
S	Si se dieran a este lado dos pies de longitud y a este otro también dos pies, ¿Cuál sería la dimensión del todo?...	S	Embrollándole, pues, y aturdiéndole como hace el torpedo, ¿le hemos hecho daño?
E	Cuatro, Sócrates.	M	No me parece así a mí.
S	¿No se podría tener otro espacio doble de éste, pero semejante, y que tuviera también todas sus líneas iguales?	S	O mucho me engaño ó le hemos ayudado a descubrir en qué lugar se encuentra él en relación con la verdad. Pues ahora, puesto que él ignora, tendrá gusto en investigar, mientras que antes no hubiera vacilado en repetir confiadamente que para doblar un cuadrado era preciso doblar su lado.
E	Sí.		
S	¿Cuántos pies tendría?	S	¿Crees tú que él habría estado dispuesto a investigar y a aprender una cosa que él no sabía, pero que creía saber, antes de sentirse perplejo por haber llegado a tener conciencia de su ignorancia y haber concebido el deseo de saber?
E	Ocho.		
S	Pues bien: intenta decirme cuál sería la longitud de cada línea en este nuevo espacio.		
Sugerencia de una conjetura errónea		MOMENTO DE LA RE-CONSTRUCCIÓN	
E	Es evidente Sócrates, que tendría que ser el doble.	Construcción de la solución correcta y toma de conciencia de lo que se sabe y se ignora	
S	Tú ves, Menón, que yo no le enseño nada, me limito a preguntarle sobre todo ello. En este momento él cree saber cuál es la longitud del lado que daría lugar a un cuadrado de ocho pies.	S	[Al esclavo] Respóndeme ¿tenemos aquí un espacio de cuatro pies?
S	¿Se sigue de ello que él lo sabe?	E	Sí.
M	De ninguna manera	S	¿Podemos añadirle este otro que es igual a él?
MOMENTO DE DE-CONSTRUCCIÓN		E	Sí.
Refutación de la conjetura		S	¿Y también este tercero, igual a cada uno de los dos primeros?
S	[Al esclavo] Tú dices que una línea doble da lugar a una superficie dos veces más grande ¿no?	E	Sí.
E	Así lo creo.	S	¿Y llenar luego este ángulo que queda vacío?
S	Esta línea que tú ves ¿Quedará doblada si partiendo de aquí, le añadimos otra de igual longitud?	E	Completamente.
E	Sin duda.	S	¿No tenemos aquí ahora cuatro espacios o superficies iguales?
S	Así pues, si trazamos cuatro líneas iguales, ¿Se constituirá la superficie de ocho pies sobre esta nueva línea?	E	Sí.
E	Sí.	S	Y todos juntos, ¿Cuántas veces mayores que éste son?
S	Tracemos las cuatro líneas según el modelo éste. ¿Es ésta la superficie que tú dices es de ocho pies?	E	Cuatro veces.
E	Ciertamente.	S	Ahora bien: nosotros estábamos buscando una superficie del doble ¿te acuerdas?
S	¿Acaso en nuestro nuevo espacio no hay estos cuatro, de los que cada uno es igual al primero, al de cuatro pies?	E	Enteramente.
E	Sí.	S	Si en cada cuadrado trazamos una línea de un ángulo a otro, ¿no cortará las superficies en dos partes iguales?
S	¿Cuál es, pues, según esto, la extensión del último? ¿No es cuatro veces mayor?	E	Sí.
E	Necesariamente.	S	He aquí cuatro líneas iguales que encierran un nuevo cuadrado.
S	Y una cosa cuatro veces mayor que otra ¿es el doble de ella?	E	Efectivamente.
E	¡No, por Zeus!	S	¿Cuál es la dimensión de este cuadrado?
S	¿Qué es entonces?	E	No lo sé.
E	El cuádruplo.	S	¿No hemos dicho que en cada uno de estos cuadrados, cada una de nuestra líneas ha separado dentro una mitad de ellos?
S	De manera que, doblando la línea, no obtienes tú una superficie doble, sino una superficie cuádrupla.	E	Sí.
E	Es verdad.	S	Y ¿cuántas mitades de éstas hay en el cuadrado del centro?
S	Por tanto, para el espacio de ocho pies, ¿necesitamos una línea más larga que ésta, que tiene dos pies, pero más corta que aquella, que tiene cuatro?	E	Cuatro.
E	Sí.	S	¿Y en éste?
S	Intenta decirme qué longitud le das tú.	E	Dos.
E	Tres pies.	S	¿Y qué es cuatro respecto a dos?
S	Ahora bien: si el espacio tiene tres pies de longitud y tres pies de anchura, ¿no será la superficie de tres veces tres pies?	E	Es el doble.
E	Claro que sí.	S	¿Cuántos pies tiene, entonces, este cuadrado?
S	¿Y cuántos son tres veces tres pies?	E	Ocho.
E	Nueve.	S	¿Y sobre qué línea se ha construido?
S	¿Cuál es ésta?	E	Sobre ésta.
Confrontación con el error		S	¿Sobre la línea que va de un ángulo a otro en el cuadrado de cuatro pies?
E	Pero ¡por Zeus! Sócrates, yo no sé nada de todo esto.	E	Sí.
S	¿Ves, Menón qué distancia ha recorrido ya él en el camino de la	S	Esta línea es la que los sofistas llaman la diagonal. [Así que] la diagonal es, según tú, lo que da lugar a la superficie del doble.
		E	Así es, en efecto,

S: Sócrates. E: Esclavo. M: Menón

FIABILIDAD DE UNA JERARQUÍA PARA EVALUAR EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO ACERCA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sánchez, E., Landín, P. R.

Departamento de Matemática Educativa

Cinvestav-IPN, México

Resumen. *Se describe un proceso para mejorar la fiabilidad de una jerarquía de razonamiento para evaluar las respuestas de estudiantes de bachillerato a tareas de distribución binomial. Se aplicó la jerarquía para realizar 6 evaluaciones independientes a un corpus de respuestas a un cuestionario con problemas de distribución binomial. La comparación y el análisis de las clasificaciones, en especial en las que no hubo consenso, llevaron a reestructurar la jerarquía. En una segunda clasificación, utilizando la jerarquía reestructurada, hubo un ligero aumento en la frecuencia de clasificaciones con consenso; no obstante, en conjunto hubo mayor homogeneidad de criterios que en la primera clasificación.*

Palabras clave: Jerarquía, fiabilidad, razonamiento probabilístico, distribución binomial.

Abstract. *The process followed to increase reliability of a reasoning hierarchy to evaluate the responses of high school students to tasks related to the binomial distribution is described. The process was to apply the hierarchy to perform 6 independent evaluations on a corpus of responses to a questionnaire with problems related to the binomial distribution. The comparison and analysis of the classifications, especially in the responses in that there was no consensus classification led to restructure the hierarchy. In a second classification, using the restructured hierarchy, there was a slight increase in the frequency of ratings consensus; however, there was more uniform set of criteria than the first classification.*

Key words: Hierarchy, reliability, probabilistic reasoning, binomial distribution.

INTRODUCCIÓN

La evaluación permite observar en qué medida se cumplen los objetivos institucionales y verificar si estos efectivamente son alcanzados. Su función es también informar al profesor sobre los efectos de su enseñanza, además de ser un indicador del aprovechamiento de sus estudiantes. Las jerarquías de razonamiento son instrumentos útiles para la evaluación. Reading y Reid (2010) sostienen que las jerarquías: 1) apoyan el análisis y el desarrollo del currículo desde un punto de vista cognitivo; 2) apoyan el diseño y elaboración inicial de secuencias de aprendizaje, así como su transformación y adaptación a las necesidades de los estudiantes; 3) ayudan a seleccionar tareas de evaluación del desarrollo cognitivo, y 4) permiten al profesor apreciar las relaciones entre conceptos y fomentarlas entre sus estudiantes.

Sobre el uso jerarquías, Tarr y Jones (1997) presentan una acerca de las nociones de probabilidad condicional e independencia; Jones, Thornton, Langrall y Tarr (1999) la extienden además a tareas de espacio muestral, probabilidad teórica, probabilidad experimental y comparación de probabilidades; Watson y Moritz (1999a) elaboran una para tareas de comparación entre gráficas de datos; Watson y Moritz (1999b) para la noción de promedio; Reading y Shaughnessy (2004) y Reading y Reid (2007) para la variación, mientras que Aoyama (2007) para la interpretación de gráficas al igual que las categorías de Arteaga y Batanero (2010).

Reading y Reid (2006) ofrecen una jerarquía útil para distribuciones de datos empíricos, sin embargo, en la literatura no se encontraron jerarquías para describir el razonamiento sobre distribuciones teóricas específicas. En Landín y Sánchez (2010) se ha propuesto una jerarquía acerca de la distribución binomial, en esta comunicación se describe el proceso realizado para aumentar su fiabilidad.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La jerarquía objeto de este estudio fue construida para evaluar el razonamiento probabilístico de los estudiantes acerca de y con la distribución binomial con base en las respuestas a tareas sobre el tema. Como instrumento de evaluación conviene que sea *fiable*, es decir, que se obtengan los mismos resultados, con prudente margen de error, cuando se hagan dos o más evaluaciones independientes al mismo *corpus*. Por la complejidad del razonamiento probabilístico y la variedad potencial de detalles en las respuestas de los estudiantes a tareas sobre un tema, se asume que no es posible asegurar una total fiabilidad de una jerarquía para evaluar dicho razonamiento. No obstante, es posible mejorar su aplicabilidad mediante la búsqueda de un consenso subjetivo. Esta técnica consiste en someter el mismo material a la evaluación de varios participantes competentes utilizando la jerarquía en estudio; ésta se modifica buscando un acuerdo con base en la observación y análisis de las diferencias. En la presente comunicación se informa sobre una solución al problema de mejorar la fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico sobre la distribución binomial.

METODOLOGÍA

Participaron seis profesionales competentes en educación matemática (incluyendo a los autores) y 66 estudiantes de bachillerato (17-18 años). Se utilizaron un cuestionario de probabilidad de 4 preguntas (ver Apéndice) y las respuestas de los 66 estudiantes que se clasificaron con base en la jerarquía de la tabla 1. Se siguió el procedimiento descrito en seguida:

- 1) Se ofreció un taller de 10 sesiones a los 66 estudiantes divididos en 2 grupos. En él se resolvieron problemas de tipo binomial con ayuda del software Fathom.
- 2) Al cabo del taller, los estudiantes resolvieron el cuestionario en una sesión 1:30 horas. Se observaron y analizaron las respuestas de los estudiantes.
- 3) Los 6 evaluadores independientemente uno del otro clasificaron las respuestas con base en la jerarquía.
- 4) Se reunieron las clasificaciones y se observaron las coincidencias y diferencias.

Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial

- 5) Se discutieron entre los 6 evaluadores los motivos de las divergencias y se acordaron ajustes para reestructurar la jerarquía (cuadros 3 y 4).
- 6) Los seis participantes volvieron a clasificar las respuestas con base en la jerarquía reestructurada.
- 7) Se observó el nivel de coincidencia alcanzada en esta segunda clasificación y se comparó con la primera clasificación.

Nivel 1: subjetivo	Nivel 2: transicional	Nivel 3: cuantitativo informal	Nivel 4: numérico
Aunque se reconoce la distribución de Bernoulli el razonamiento es idiosincrásico o basado en sesgos cognitivos; por ejemplo, al evaluar probabilidades binomiales se presenta el sesgo de representatividad, el de equiprobabilidad o se cae en la <i>ilusión de la linealidad</i>⁸¹.	- Se representan los elementos, no necesariamente de manera exhaustiva, mediante secuencias de E^s (éxitos) y F^s (fracasos). Se considera el parámetro n de la binomial en la longitud de las secuencias. - Para evaluar la probabilidad se utiliza, bien o mal, la definición clásica (de Laplace) de probabilidad o se utiliza el valor esperado. Revierte frecuentemente a subjetivo.	- Se reconoce el carácter combinatorio de la situación. Se considera la variable k al separar los casos favorables. - El cálculo de combinaciones se presenta en dos niveles: - mediante una lista organizada o - utilizando diagrama de árbol para calcular los casos favorables - Se aplica la definición clásica o, a veces, se aplica la regla del producto para calcular la probabilidad de una secuencia.	- Se reconocen la variable aleatoria y sus parámetros; su carácter combinatorio y se aplica la regla del producto. Se calculan las combinaciones apoyándose en el triángulo de Pascal o en la fórmula. - O se plantea la solución en términos de una instancia de la expresión general de la distribución binomial $B(n, p, k)$ o del binomio de Newton. Se obtiene la solución mediante el uso de tablas, calculadora, computadora o mediante cálculo directo en la fórmula

Tabla 1. Jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico de y con la distribución binomial

RESULTADOS

Después de que los 6 evaluadores hicieron su clasificación, se contó el número de respuestas en las que hubo consenso entre los evaluadores sobre los niveles en que se clasificaron las respuestas (137 que representa 52%) y en las que hubo diferencias (121, es decir 46%); en la tabla 2, se puede observar cómo se distribuyeron por pregunta.

⁸¹ La ilusión de la linealidad, de acuerdo con Van Dooren, et al. (2003), es una fuerte tendencia de los estudiantes a resolver problemas, con relaciones proporcionales aparentes, mediante la proporcionalidad o propiedades de las funciones lineales.

Concepto	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Total	Total (%)
Consenso	32	48	43	14	137	52%
Sin consenso	32	18	21	50	121	46%
No precisados	2	0	2	2	6	2%
TOTAL	66	66	66	66	264	100%

Tabla 2. Niveles de consenso en la 1a clasificación

Se analizaron las razones que cada evaluador arguyó para hacer sus asignaciones en las preguntas en las que no hubo consenso; como resultado se identificaron ambigüedades u omisiones en la jerarquía utilizada en la primera clasificación (tabla 1). Se encontró que las divergencias tienen su origen en que la jerarquía que se utilizó en la primera clasificación sólo establece reglas de decisión basadas en la identificación de rasgos que indican si el estudiante conoce tal o cual elemento de conocimiento, pero es neutral sobre la precisión con que se aplican o sobre la corrección de la ejecución. Así, llamamos *elementos de ejecución* a las características enumeradas en la siguiente lista, mismas que se tomaron en cuenta para reestructurar la jerarquía:

- Sin cálculos explícitos
- Errores de cálculo
- Respuestas parciales
- Inconsistencias o con componentes extrañas

En seguida se ilustra con ejemplos cómo emergieron estos elementos:

Las diferencias en la clasificación a algunas respuestas se deben a la observación de que en ellas no se presentan *cálculos explícitos*, por ejemplo, la siguiente respuesta al problema 1:

[Responde inciso c, son igualmente probables] *Porque es difícil que salga HHHHH y que salga HMMHM en ese orden así que su probabilidad es la misma (c)*

Dos evaluadores la clasificaron en T (Transicional) y cuatro en S (Subjetivo). Los que clasificaron en T observaron que el estudiante era consciente de que las representaciones forman parte de un conjunto ordenado de secuencias, manifestado en la expresión “en ese orden”, aparte de haber elegido la respuesta correcta. Uno de los que la clasificó como S comentó “aunque es la respuesta correcta no realiza cálculo”.

Otras discrepancias provienen de la omisión de reglas de decisión referentes a *errores de cálculo* en la jerarquía; un ejemplo es la siguiente respuesta al problema 2,

[El estudiante eligió como respuesta (incorrectamente) el inciso b]. $(X_2=1)=2(.5)(.5)=.045$; $(X_4 = 2) = 6 (.5)(.5)(.5)(.5) = 0.375$; *Es más probable obtener 2 águilas en 4 volados.*

Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial

Dos evaluadores la clasificaron como N (Numérica), uno dudó entre N o CI (Cuantitativo Informal) y 2 la clasificaron en T. Los primeros vieron que en la respuesta se refleja que el estudiante conoce el coeficiente binomial y la regla del producto; características que en la descripción de la jerarquía llevan a la categoría N. El evaluador que dudó entre N o CI consideró además el hecho de que el resultado no es correcto por errores en los cálculos, esto le hizo pensar que debía clasificarse en un nivel menor, pero dudó al no estar explícito dicho criterio en la jerarquía. Otros la clasificaron en T, pues consideraron los errores en el cálculo.

La respuesta al problema 4, que se muestra en seguida, produjo diferentes reacciones de los evaluadores:

$$P(X=3) = C_3^5 (70)^3 (30)^{5-3} = \frac{5!}{3(2!)} = .3087.$$

Un evaluador la clasificó como N, otro dudó entre CI o N, dos en CI y uno en T. Los primeros vieron que el segundo miembro claramente muestra que se conoce la fórmula de la distribución binomial y el tercer miembro que se conoce la fórmula para calcular los coeficientes binomiales, además 0.3087 es el valor correcto para $X=3$; la jerarquía indica que con tales características la respuesta debe pertenecer a N. El evaluador que duda entre N o CI hizo la misma observación, pero bajó una categoría debido a los errores que son evidentes. Los que lo clasificaron en T, notaron que se respondía solamente a una parte del problema, pues falta calcular $P(X=4)$ y $P(X=5)$, además se expresaron inadecuadamente las probabilidades y las igualdades no son verdaderas.

Consecuencias del análisis de las clasificaciones sin consenso

Las clasificaciones de las respuestas y opiniones de los evaluadores pusieron de manifiesto que una fuente de ambigüedad fue la ausencia en la jerarquía de indicaciones que tuvieran en cuenta *elementos de ejecución* (cálculos explícitos, errores de cálculo, respuestas parciales, coherencia y componentes extrañas). Algunos evaluadores se sintieron incómodos al clasificar dos respuestas en un mismo nivel sólo porque en la respuesta analizada se podía percibir que los estudiantes conocían los conceptos previstos en la jerarquía (por ejemplo regla del producto) pero la ejecución en un caso era correcta y en la otra no; otros tomaron decisiones de incorporar estos elementos de ejecución como criterios para su clasificación. Por lo demás, parece natural evaluar el nivel de conocimiento de un concepto no sólo por su mención o manifestación sino también por la manera en que se utiliza. La misma razón influyó en la percepción de la necesidad de incorporar un nuevo nivel de razonamiento A (abstracto) que diera un lugar a aquellas respuestas que mostraban que el estudiante tenía conocimiento de las componentes de razonamiento, previstas en la jerarquía, y además los aplicaba y organizaba de manera precisa.

En la tabla 3, se muestra la técnica que se utilizó para incorporar los elementos de ejecución en la jerarquía. Se procedió enlistando en la primera fila las componentes de razonamiento y en la primera columna elementos de ejecución. Estos fueron ordenados de la componente de ejecución más grave a la más adecuada. Después se hizo la clasificación para la fila de respuestas correctas (la última fila de la tabla) de la misma manera que en la jerarquía definida arriba. A partir de esto se convino ponderar la

presencia de fallas en la ejecución asignando niveles inferiores. La asignación es arbitraria pero permite que se refleje en la clasificación la calidad de las respuestas.

	Respuestas idiosincrásicas	Representación de las secuencias y probabilidad clásica	Regla del producto	Coficiente binomial	Fórmula binomial
Sin coherencia o con componentes extrañas	S	S	S	S	S
Sin algunos cálculos explícitos	S	S	T	T	CI
Errores de cálculo	S	S	T	CI	N
Respuestas parciales	S	T	CI	N	N
Respuesta correcta s/defectos anteriores	S	CI	N	N	A

Tabla 3. Guía para incorporar los elementos de ejecución en la jerarquía

Nivel 1. Subjetivo. • Aunque se reconoce la distribución de Bernoulli y posiblemente se elija la opción correcta no la argumenta en absoluto o la argumentación es de tipo idiosincrásico y/o con base en algún sesgo cognitivo. • Es posible que se muestren rasgos de conocimientos pertinentes, como diagramas de árbol o la regla del producto pero sin coherencia, con componentes extraños o con gran cantidad de errores Nivel 2. Transicional • Se representan los elementos del Espacio Muestral de manera conveniente aunque no necesariamente de manera exhaustiva. • Así mismo, para evaluar la probabilidad, se utiliza, bien o mal, la definición clásica de probabilidad o se usa el valor esperado. • También se clasifican en esta categoría respuestas que se apoyan en la regla del producto y/o calculan o usan coeficientes binomiales, pero de manera parcial, o sin hacer los cálculos correspondientes o con errores importantes Nivel 3. Cuantitativo Informal • Se reconocen el carácter combinatorio de la situación. Se considera la variable k al separar los casos favorables. • Se calculan combinaciones mediante una lista organizada o mediante la elaboración un diagrama de árbol • Se aplica la definición clásica de probabilidad y se llega a la respuesta correcta. • De manera alternativa, se aplica la regla del producto aunque con resultados parcialmente correctos. • En ocasiones se calculan y usan los coeficientes binomiales pero con errores de cálculo o se utiliza la fórmula binomial pero se omiten los cálculos Nivel 4. Numérico • Se reconocen la variable aleatoria, los parámetros de la distribución binomial y el carácter combinatorio de la situación. Se utiliza la regla del producto y se cuentan las combinaciones

Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial

para obtener una respuesta correcta.

- La respuesta puede ser parcialmente correcta, pero utiliza la regla del producto y calcula el coeficiente binomial con el triángulo de Pascal o con la fórmula de las combinaciones o, también puede clasificarse en esta categoría respuestas que hacen uso de la fórmula de la distribución binomial, aunque con algunos errores o con resultados parciales

Nivel 5. Abstracto

- Se reconocen los parámetros de una distribución binomial; se plantea el problema y obtiene la solución en términos de una instancia de la expresión general de la distribución binomial $B(n, p, k)$ o del binomio de Newton.

- Se reconocen la influencia de los parámetros n y p en la forma gráfica de la distribución

Tabla 4. Jerarquía para el razonamiento binomial, reestructurada a partir de la del tabla 1.

En la tabla 4 se presenta la descripción de la jerarquía reestructurada considerando los elementos de ejecución y las convenciones expresadas en la tabla 3. Después de aplicar esta nueva jerarquía el nivel de consenso se incrementó en 11%.

CONCLUSIONES

La jerarquía resultante proporciona una forma de evaluar el razonamiento probabilístico de los estudiantes acerca de la distribución binomial y es útil para clasificar las respuestas a las preguntas del cuestionario (ver Apéndice); sin embargo, el hecho de que haya sido construida con base en los elementos que componen la distribución binomial y en aspectos de la ejecución hacen que la jerarquía sea aplicable a más tareas acerca de la distribución binomial. A partir de esto, se puede extender su función a los puntos señalados por Reading y Reid (2010) relacionados con: 1) aspectos cognitivos del currículo; 2) diseño de secuencias de aprendizaje; 3) selección de tareas y 4) guía para el profesor.

En este estudio también se muestra que se puede mejorar la fiabilidad de la jerarquía mediante la búsqueda de un consenso intersubjetivo, es decir, la discusión de cómo se aplica por los participantes y de la solución de las ambigüedades que emergen en las divergencias en la clasificación. Tales soluciones pueden traducirse en la introducción de nuevos criterios en la jerarquía para capturar diferencias importantes. Sin embargo, no se debe tener la pretensión de querer prever y dar cuenta de todos los rasgos potencialmente plausibles de aparecer en las respuestas de los estudiantes, pues de esa manera la jerarquía puede volverse inmanejable; para que sea útil debe mantener un cierto nivel de generalidad.

A pesar de que el incremento del consenso fue modesto, los evaluadores consideraron que se había reducido considerablemente la incertidumbre que sintieron con la primera jerarquía a la hora de decidir. De cualquier manera, lo importante es que si un equipo utiliza la jerarquía la adecúe a las circunstancias particulares de su investigación o de sus clases.

Agradecimientos

Este trabajo es financiado por CONACYT, proyecto 101708.

Agradecemos a Silvia Mayén, Antonio Orta, Julio César Valdés, Jaime García, Fátima Rubiales y María Guzmán su colaboración.

Referencias

- Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 298-318.
Recuperado el 22/10/2010 de: www.iejme.com
- Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV (210-221)*. Lleida, España: SEIEM y Universidad de Lleida.
- Jones, G.A., Thornton, C.A., Langrall, C.W. y Tarr, J.E. (1999). Understanding student's probabilistic reasoning. En L.V. Stiff & F.R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (1999 yearbook, pp. 146-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3). [Recuperado el 01/03/11 de:
<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842>]
- Reading, C. y Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: from a variation perspective. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 46-68.
Recuperado el 27/10/2009 de: <http://www.stat.auckland.ac.nz/serj>.
- Reading, C. y Reid, J. (2007). Reasoning about variation: Student voice. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (3), 110-127.
- Reading, C. y Reid, J. (2010). Reasoning about variation: rethinking theoretical frameworks to inform practice. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*, July, 2010. Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Tarr, J. E., y Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 39-59.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 113-138.
- Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999a). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics*, 37(2), 145-168.
- Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999b). The development of the concept of average. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(4), 15-39.

APÉNDICE: Cuestionario

1. Considere todas las familias en las que hay 5 hijos. Se elige una familia al azar. Se supone que la probabilidad de ser mujer es igual a la de ser hombre y es igual a $\frac{1}{2}$. De las siguientes afirmaciones cuál es correcta:

- a) El evento HMMHM es más probable que el evento HHHHH
- b) El evento HHHHH es más probable que el evento HMMHM
- c) El evento HHHHH es igual de probable que el evento HMMHM

Donde HMMHM significa que el mayor es Hombre, el que sigue Mujer, después Hombre y los dos menores Mujeres. HHHHH significa que todos son Hombres.

Justifica tu respuesta:

2. ¿Qué es más probable?:

- a) obtener 1 águila en 2 volados
- b) obtener 2 águilas en 4 volados
- c) son igualmente probables

Justifica tu respuesta:

3. En un hospital hay dos médicos; uno atiende 3 partos al día, mientras que el otro atiende 6 partos al día. Un día hacen una apuesta: observan el número de niños varones que nacen en los partos que cada quien atiende y gana quien en los partos que atiende iguale o rebase el 60% de niños varones (se supone que la probabilidad de que el recién nacido sea varón es igual a la probabilidad de que sea mujer). ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

- a) El médico que atiende 3 partos tiene más probabilidad de ganar
- b) El médico que atiende 6 partos tiene más probabilidad de ganar
- c) Ambos tienen la misma probabilidad

Justifica tu respuesta

4. Un tirador tiene 70% de probabilidad de pegar en el blanco y 30% de fallar. En un concurso gana si le pega al blanco al menos 3 veces de 5. ¿Cuál es su probabilidad de ganar?

DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO DEL ALUMNADO DE 2º DE ESO RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE VOLUMEN Y SU MEDIDA

Sanmiguel Suárez, M., Salinas Portugal, M. J.

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen. *La presente comunicación está integrada dentro de un proyecto de investigación más amplio realizado en relación con el concepto de medida de las magnitudes geométricas longitud, área y volumen de un grupo de alumnado de 2º de ESO. Presentamos en este informe lo relativo al caso del volumen: proceso realizado, análisis de los resultados y conclusiones obtenidas. Nos proponemos conocer de qué manera se enfrenta nuestro alumnado ante diversas situaciones de medida del volumen: qué dificultades se le presentan, qué tipo de estrategias emplea y qué grado de madurez en el concepto de volumen reflejan los razonamientos y técnicas empleados.*

Palabras clave: Educación Secundaria, Medida, Volumen, Dificultades de razonamiento.

Abstract. *This communication is integrated into a wider research project related to study the concept of measure of geometric measurements length, area and volume, that had a group of students from Second Level of ESO. We present here the results related to the Volume's case: the process that we followed as well as the analysis of the results and the conclusions obtained. We aim to know the way our group of students try to solve different situations of volume measurement: what difficulties they have, what types of strategies they use and what is their volume's conception, attempting to the reasonings and techniques that they use.*

INTRODUCCIÓN

El informe que presentamos en esta comunicación forma parte de un trabajo más amplio en el que se han estudiado las dificultades del alumnado de 2º de ESO, relacionadas con el concepto de medida de las magnitudes geométricas.

La importancia del trabajo de la geometría a partir del espacio y los sólidos es señalado por autores como Guillén, quien expresa su acuerdo con las afirmaciones de Freudenthal, en que “el espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras” (Guillén, 2010: 25). Por otra parte, también debemos destacar cómo la comprensión del volumen y su conexión con la realidad permiten al alumnado un mayor entendimiento de su entorno, y, por tanto está relacionado con la adquisición de las competencias básicas por parte de los estudiantes, tal como se demanda desde los informes PISA de la OCDE (2007).

Sin embargo continúan existiendo dificultades del profesorado para afrontar la enseñanza de conceptos geométricos y de medida. De ello se hacen eco diversos

autores; por ejemplo Guillén (2010) señala la influencia de las creencias y experiencias previas del profesor. Alsina, Burgués, Fortuny (1987), Guzmán (1993), Torre (2001) o Sánchez (2004), destacan dificultades debidas tanto a la inexistencia de una formación didáctica adecuada, como a la pervivencia de cierto rechazo de origen histórico hacia la enseñanza de la propia Geometría. Vecino (2003: 302) explica: “Los intentos emprendidos por diversos colectivos institucionales para mejorar la enseñanza de la Geometría, de manera que se recuperase del olvido intencional al que la comunidad didáctica la había relegado en la década de los sesenta, no parecen haber dado los resultados didácticos apetecidos”. En particular respecto de la geometría espacial y según señala Guillén (2010: 59): “El gran reto sigue siendo que la geometría de los sólidos vuelva a *todas* las clases”.

De acuerdo a la clasificación realizada por Gutiérrez (1998) incluimos el trabajo dentro del estudio de los Procesos de Razonamiento que emplea el alumnado de 2º ESO en relación a diversos aspectos de Geometría Espacial.

El objetivo del presente informe se focaliza en: “Conocer procesos de razonamiento y en particular las dificultades, que un grupo de alumnado de 2º ESO presenta ante cuestiones relacionadas con el concepto de volumen y su medida”. Nos centraremos por tanto, en el análisis y clasificación de dichas dificultades.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En los currículos oficiales referidos a la ESO se señala que en torno a la edad en que se cursa 2º ESO se inicia el razonamiento hipotético-deductivo; por lo que se recomienda en esta etapa dar prioridad al trabajo práctico, manipulativo e intuitivo así como a la capacidad de estimar resultados y magnitudes (M.E.C., 2006). Las orientaciones del NCTM (2000) para el alumnado de nuestra etapa educativa, instan a interrelacionar y resaltar las conexiones existentes entre el Estándar de Medida y el Estándar de Geometría; tratando de que el alumnado vaya desarrollando e intuyendo las fórmulas adecuadas para el cálculo de medidas. El desarrollo de este tipo de estrategias y habilidades está en coherencia, tal como expone Rico (2007) con el actual enfoque por competencias que la OCDE evalúa a través del informe PISA. Para evaluar la Competencia Matemática, dicho Informe establece una serie de ítems basados en tres variables: el contenido matemático, el contexto del problema y los procesos específicos del problema.

Tratamos a continuación dificultades en la enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos y de medida, que hemos agrupado en torno a cuatro grandes núcleos:

Dificultades derivadas del devenir histórico de la Geometría y aquellas que suponen un paralelismo entre la historia y la didáctica de la Medida.

Si bien desde antiguo la Geometría ocupó un destacado puesto en la enseñanza, siendo la recopilación de los “Elementos” de Euclides una obra de enorme influencia didáctica durante siglos, imprime un carácter de tipo lógico y deductivo que según Alsina, Burgués, Fortuny (1987) acentúa su divorcio con la Aritmética y en cierto modo, con la Medida práctica. A pesar de que la aparición en el s. XVI de la Geometría Analítica conlleva una nueva tendencia a unir ambas vertientes, los mismos autores señalan que a nivel educativo no es totalmente aceptada. Posteriormente la reforma formalista de la

Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2º de ESO relacionadas con el concepto de volúmenes y su medida

“Matemática Moderna” en el siglo XIX, tendrá según los citados autores unas negativas consecuencias en la enseñanza. De hecho Guzmán (1993: 3) afirma que bajo este movimiento “la geometría elemental y la intuición espacial sufrieron un gran detrimento”.

En el caso de la Medida, Chamorro (2003) fundamenta dificultades de su didáctica, a través de hechos históricos. El largo tiempo que históricamente se ha tardado en llegar a un sistema universal de medida es semejante a la fuerte resistencia que durante mucho tiempo ofrece el alumnado hacia el empleo de las unidades convencionales.

Dificultades debidas a la metodología empleada. Las englobamos en cuatro apartados:

a) Derivadas de una presentación ostensiva (Chamorro, 2003). Se caracterizan por una introducción precoz de las nociones matemáticas y de un modo meramente perceptivo. En consecuencia el alumnado presenta errores ligados a una presentación estática de figuras (con frecuencia siempre en la misma posición) y a un uso abusivo del dibujo que fomenta la identificación de figura con su contorno; Castelnuovo (1963) y Chamorro (2001) critican el uso del dibujo como técnica predominante en el caso de la medida. Actividades prácticas de estimación de la medida no suelen enfatizarse suficientemente en la práctica docente, según afirma el NCTM (2000). Investigaciones recientes como la realizada por Towers y Hunter (2010) proponen cambios en la actitud del profesor: la interrelación en la clase, así como la atención a ciertas “señales”: vocabulario matemático empleado, estrategias que emplean y discusiones sobre su idoneidad por parte del propio alumnado, reflexión sobre las argumentaciones incorrectas que ofrecen.

b) Derivadas de una temprana introducción del lenguaje algebraico. Según Martínez y Rivaya (1989) se tiende a construir la Geometría a partir del lenguaje algebraico en detrimento de una Geometría de “búsqueda intuitiva”, término acuñado por Alsina y otros (1987: 43). Conlleva una falta de variedad de técnicas de resolución y la tendencia del alumnado a “emplear fórmulas memorísticamente” (Dickson y otros, 1984). Esta tendencia es corroborada por estudios como el realizado con alumnado de 12 años por Kordaki y Potari (1998: 305) quien para evitarla y “no permitirles usar las fórmulas del cálculo de áreas y otras herramientas de medida convencionales” se decide proponer al alumnado cuestiones de medida menos tradicionales.

c) Originadas por una aritmetización de la Geometría y de la Medida. En el caso de la Geometría se trata de la tendencia a identificarla con el cálculo de áreas de figuras en el plano y con el cálculo de volúmenes en el espacio, tal como señala Vecino (2003). Para el caso de la Medida, Chamorro (2003) explica que consiste en tender a sustituir magnitudes por números, con falta de suficientes experiencias necesarias para la conceptualización del sentido de magnitud y de su medida. Profundizando un poco más, aparecen estudios que además demuestran la tendencia del alumnado entre 12-15 años a emplear mecánicamente modelos lineales en la resolución del cálculo de longitudes y áreas, sin atender a su idoneidad o no. (Bock, D. y otros, 1998)

d) Derivadas de una algoritmización de la Medida. Chamorro (2003) las describe como metodologías de carácter abstracto debido a un trabajo exclusivamente formal del cambio de unidades. Conlleva errores como que el alumnado no explicita las unidades al expresar resultados o las confunde. La mayoría de los libros de texto empleados, según exponen Olmo y otros (1993) sobreentienden que el alumno ya descubrió por sí

mismo el concepto de magnitud y suelen pasar a su medida. Análogamente en su investigación, Boulton-Lewis y otros (1996) ponen en entredicho la eficacia de las metodologías y secuencias curriculares propuestas para la adquisición de la medida de la longitud.

Obstáculos ontogenéticos

Adquisición de la conservación de las magnitudes. Su adquisición para cada tipo de magnitud no parece ir ligada a una edad fija, sino que también influyen las experiencias respecto de ellas (Lovell, 1984). La autora K. Hart (citada por Olmo y otros, 1993) a través de sus experiencias, cuestiona la secuencia propuesta por Piaget de que primero se adquiere para la longitud, luego para el área y por último para el volumen. Sí existe acuerdo en general con el carácter tardío de la comprensión de la conservación del volumen.

Obstáculos de origen epistemológico. Los agrupamos en dos apartados:

a) Confusión entre área y volumen. Para Castelnuovo (1963) se trata de una tendencia natural a confundir el volumen de un sólido con su superficie.

b) El paso de las estructuras aditivas a las multiplicativas. En el caso de la comprensión de la estructura multiplicativa del volumen, Vergnaud (1983) realiza un estudio sobre la concepción del volumen en estudiantes entre 11 y 15 años analizando qué estrategias emplean. Explica que el volumen puede ser estudiado como magnitud unidimensional o como magnitud tridimensional; este último caso corresponde a la estructura multiplicativa, que puede verse obstaculizada por la estructura aditiva previamente adquirida, llevándole a errores. Las estrategias erróneas van asociadas, según el autor señala, a diversas nociones de volumen. Destacamos las estrategias de tipo perimétrico: componen aditivamente las dimensiones lineales, razonando sobre las aristas del cuerpo y las de tipo superficie: calculan el área de las caras y las suman. Vergnaud afirma que las primeras se dan en los niveles más bajos y desaparecen en los más elevados, pero las de tipo superficie “perduran más en los niños, lo que provoca que la confusión superficie-volumen sea bastante duradera” según corroboran Olmo y otros (1993: 136). La estructura multiplicativa supone un pensamiento formal que muchos alumnos aún no alcanzaron.

METODOLOGÍA

Puesto que nuestro objetivo es obtener información sobre las dificultades en el razonamiento que presenta respecto a la medida del volumen un grupo de alumnado de 2ºESO, se decide llevar a cabo un estudio descriptivo de carácter cualitativo. Se trabaja con un total de 47 estudiantes (28 chicos y 19 chicas) pertenecientes a tres clases de 2ºESO de un Instituto de Enseñanza Secundaria.

Se elabora una prueba cuyos ítems permitan descubrir y clasificar los razonamientos y estrategias que emplean. Para el caso del volumen se desea asimismo conocer, partiendo de los estudios ya mencionados de Vergnaud la noción de volumen que presentan nuestros estudiantes. Para la elección de los ítems se realiza un estudio bibliográfico, buscando que estén ya baremados y que atiendan a las cuestiones que acabamos de mencionar. De este modo para el estudio de lo relativo a la magnitud volumen, se

Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2º de ESO relacionadas con el concepto de volúmenes y su medida

escogen tres ítems que nos resultan más clarificadores, procedentes de Hart (1981) y de Vergnaud (1983), autores mencionados en la fundamentación de la presente investigación.

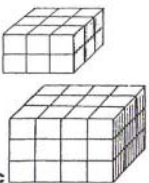
Los tres ítems seleccionados para el estudio del volumen son los siguientes:

a) Ítem nº 5 de la prueba, obtenido de Hart (1981), con dos subapartados

El **bloque A**:  istruido empleando 8 cubitos como éste:

a) Cuántos cubitos forman el **bloque B**? (No hay huecos dentro)

b) Y cuántos forman el **bloque C**? (Tampoco hay huecos dentro)

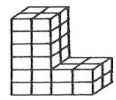
 

b) Ítem nº 6 de la prueba, empleado por Vergnaud (1983)

¿Cuántos cubitos de 1cm. de lado:  son necesarios para construir una caja llena (como una caja de zapatos), de 3 cm. de largo, 4 cm. de ancho y 2 cm. de alto?

c) Ítem nº 7 de la prueba, obtenido de Vergnaud (1983)

Aquí tienes dos **L** fabricadas con cubitos. Hemos construido la **L pequeña** con 4 cubitos, y para construir la **L** más **grande**, doblamos el largo, el ancho y la altura. ¿Cuántos cubitos forman la **L grande**?

ANÁLISIS DE RESULTADOS

a) Análisis global de los ítems relacionados con el volumen

Realizamos una primera lectura de los resultados presentando los porcentajes de acierto y error de cada ítem a través de la siguiente tabla:

	Llegan a la solución		No llegan a la solución		En blanco	
	F _i	%	F _i	%	F _i	%
Ítem nº5	25 (*)	53%	19 (**)	40%	3	6%
Ítem nº6	22	47%	21	45%	4	9%
Ítem nº7	19	40%	25	53%	3	6%

Tabla 1: Porcentajes globales de la prueba en los ítems referidos al volumen

(*) En este Ítem se considera que “Llegan a la solución” aquellos alumnos que responden correctamente los dos apartados del ítem

(**) En este Ítem se considera que “No llegan a la solución” aquellos alumnos que responden incorrectamente uno o los dos apartados del ítem.

Vemos cómo los resultados no son muy dispares entre los distintos ítems; los alumnos que respondieron correctamente al ítem nº 5 apenas superan la mitad del total, y en los restantes ya no llegan a ese porcentaje. Sin embargo, a pesar de las dificultades que han aparecido para resolverlos adecuadamente, la mayoría del alumnado ha intentado resolverlos, de lo que deducimos que estas cuestiones referidas al volumen no han sido consideradas muy difíciles.

Por cuestiones de espacio vamos a centrarnos en presentar un análisis más detallado del ítem nº 5, que nos aporta mucha información a través de los dos apartados que lo componen.

b) Análisis del Ítem nº 5

En este Ítem tratamos de conocer dificultades en el concepto de volumen que presenta nuestro alumnado, y cómo se enfrenta a su cálculo en situaciones sencillas como es el caso de los ortoedros. Se les plantean dos cuestiones que aumentan en grado de complejidad, puesto que el ortoedro del apartado “b)” tiene unas dimensiones mayores que las del ortoedro del apartado “a)”, y ninguno de ellos es ya un cubo.

En cuanto a las estrategias empleadas en cada apartado, la mayoría usó el mismo procedimiento en ambos; sólo 6 alumnos (un 14% de los que contestaron) cambiaron su estrategia para resolver el apartado “b)”

DESCRIPCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS

Se realiza un análisis descriptivo de los resultados atendiendo al conjunto de dificultades mencionado en la fundamentación teórica y tomando como punto de partida las concepciones de volumen mencionadas por Vergnaud, las cuales están vinculadas a diversas estrategias o razonamientos empleados por el alumnado. En cuanto a la clasificación de los razonamientos del alumnado, una parte son descritos por dicho autor mientras que los otros son motivados por el análisis bibliográfico expuesto en el apartado de dificultades metodológicas.

Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2º de ESO relacionadas con el concepto de volúmenes y su medida

1. Concepciones del volumen que aparecen en el grupo de alumnos cuyas estrategias les llevaron a la solución correcta

En la tabla 2 presentamos una clasificación de las respuestas correctas

SOLUCIÓN	CONCEPTO DE VOLUMEN	TIPO DE RAZONAMIENTO QUE EMPLEA	Apdo. "a")	Apdo. "b")	Total	%
1. Da la solución correcta	1.1. Basado en la trilinealidad (Tipo Volumen)	Multiplica razonadamente las tres dimensiones, explicando lo que hace, incluso completando con varios procedimientos	8	8	16	29%
	1.2. Basado en la bilinealidad (Tipo Superficie)	1.2.1. Multiplicativo: (calcula 1 capa) x (nº de capas)	14	14	28	50%
		1.2.2. Aditivo: (calcula 1 capa) y suma esa cantidad tantas veces como capas haya	1	3	4	7%
	1.3. Basado en la linealidad (Tipo Perimétrico)	Emplea el recuento (o conteo) de cubitos	2	1	3	5%
	1.4. Tipo Algebraico	Aplica la fórmula del volumen, memorísticamente, comparándola con el recuento	1	1	2	4%
	1.5. Basado en la Comparación	Por descomposición y comparación con la figura inicial	2	1	3	5%
			28	28	56	

Tabla 2: Estrategias que llegan a la solución correcta en el Ítem nº 5

1.1. Se observa que casi la tercera parte emplean la concepción “Tipo Volumen”, es decir, multiplican las tres dimensiones. Es el caso de Miguel F., que fue probando hasta encontrar una estrategia correspondiente con la estructura multiplicativa:

1.2. Sin embargo la estrategia más utilizada es la que va unida a la concepción del volumen como Tipo Superficie, es decir, lo calculan por capas: primero obtienen el nº de cubitos de una capa para luego multiplicarlo por el nº de capas.

Otros casos en los que encontramos la concepción del volumen como “Tipo Superficie”, pero en sentido aditivo, son aquellos en los que suman los cubitos de una capa, tantas veces como capas hay.

1.3. Sólo dos de los alumnos que resolvieron correctamente el Ítem, presentan la concepción de Volumen “tipo Perimétrico”, manifestada a través del conteo o recuento de cubitos. La mayoría de alumnado que empleó esta estrategia, no consiguieron

resolver el Ítem. Aún así, ambos alumnos se refieren a los cubitos como “cuadrados”. Es el caso de David que, en cada apartado explica que contó los “cuadrados” e incluso, en el apartado b) los numeró sobre la propia figura

1.4. y 1.5. Entre el alumnado que llegó a la solución correcta, apenas aparece el empleo de la fórmula del volumen sin más explicación, ni tampoco métodos de descomposición.

2. Concepciones del volumen que aparecen en el grupo de alumnado que no consigue obtener la solución correcta:

En la tabla 3 se hace una clasificación de las estrategias erróneas

SOLUCIÓN	CONCEPTO DE VOLUMEN	TIPO DE RAZONAMIENTO QUE EMPLEA	Apdo. “a)”	Apdo. “b)”	Total	%
2. Da una solución incorrecta	2.1. Basado en la bilinealidad (Tipo Superficie), pero presenta problemas con la estructura multiplicativa	Calculan bien los cubitos de una capa, pero mal el nº total de capas.	1	1	2	6%
		Calculan mal los cubitos de una capa (problema del “Cubo de la Esquina”), y el nº total de capas	1	0	1	3%
	2.2. Basado en la linealidad (Tipo Perimétrico). Emplean el conteo o recuento.	2.2.1. Problemas con los cubitos que no se ven	2	1	3	9%
		2.2.2. Confusión área-volumen: cuentan las caras de los cubitos, casi todos erróneamente	10	12	22	69%
		2.3.1. Descomponen en figuras, pero cuentan mal los cubitos	0	1	1	3%
	2.3. Basado en la Comparación de figuras	2.3.2. Intuición errónea: piensan que tiene el “doble” o “triple” de cubitos que la figura anterior, incluso usan expresión matemática	2	1	3	10%
			16	16	32	

Tabla 3: Estrategias que llegan a una solución incorrecta en el Ítem nº 5

Resaltamos cómo en este grupo nunca aparece el concepto de trilinealidad, de lo que deducimos un menor grado de comprensión.

2.1. La concepción del volumen “Tipo Superficie”, calculándolo por capas, aparece unido a dificultades de cálculo y a una escasa asimilación del paso a la estructura multiplicativa en tres dimensiones.

Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2º de ESO relacionadas con el concepto de volúmenes y su medida

2.2. Las estrategias más empleadas (más de las tres cuartas partes) van unidas al “Concepto Perimétrico” del volumen: conteo de cubitos. Hemos distinguido dos tipos de dificultades:

a) Recuento erróneo causado por “El problema de los cubitos que no se ven” Por ejemplo:

8.a) ¿Cantos cubiños forman o **bloque B**? (Non hai ocos dentro)



Resposta: 30 cubiños forman o bloque B.

Explica as razóns da túa resposta e escribe aquí tódalas operacións que realices:

$$\begin{array}{r} +16 \\ +16 \\ \hline 30 \text{ cubiños} \end{array}$$

b) Recuento erróneo causado por la confusión área-volumen: Aparece en más de las dos terceras partes. Lo que hacen es contar las caras de los cubitos en vez de los propios

8.a) ¿Cantos cubiños forman o **bloque B**? (Non hai ocos dentro)



Resposta: 23 51

Explica as razóns da túa resposta e escribe aquí tódalas operacións que realices:

Porque contamos e damos 22
Porque tendo $6+6+6+6=24$ e $9+9+9=27$
 $24+27=51$

cubitos. Además, la mayoría se refiere a los cubitos como “cuadrados”, lo que potencia más esa confusión de magnitudes. (Como ya habíamos mencionado, esta terminología también la habían empleado algunos alumnos que obtuvieron la solución correcta).

2.3. Aparecen apenas estrategias de descomposición, sugiriéndonos que no han adquirido la comprensión de la estructura multiplicativa. Básicamente realizan comparaciones erróneas entre las figuras, como Gabriel que sólo la emplea en una dimensión.

Debido a que o bloque B é o dobre do.
A. Fixen $8-2=16$ cubiños forman o ~~bloque~~ bloque B.

Y en el apartado b) afirma que la figura es el triple de la dada inicialmente.

Por último debemos destacar que, ya a nivel general, en bastantes razonamientos empleados han aparecido dificultades con la comprensión del significado de las operaciones y confusión de términos como “doble de” y “cuadrado de”. Es el caso de Antonio quien, aún llegando a la solución correcta del apartado a), se expresa de este modo:

Handwritten text in Spanish: "Por que ten 3 cuadrados de cada lado e ten dŕas alturas, 9 en cada altura. 9²."

CONCLUSIONES

La adquisición del concepto de volumen es una cuestión tardía y los resultados corroboran el desarrollo evolutivo en el que se encuentra la mayoría de nuestro alumnado, pero también se resalta la necesidad de afrontar la noción de volumen a través de una ingeniería didáctica rica y variada que les aporte nuevas estrategias de resolución.

Se obtienen malos resultados en torno a la medida de esta magnitud (como mucho el 52% del alumnado consigue resolverlos correctamente) y el porcentaje de acierto en cada uno de los tres ítems va decreciendo a medida que aumenta la abstracción requerida para resolverlo. La mayoría de este alumnado tiende a emplear estrategias de tipo aritmético (recuento o conteo) bien para calcular el volumen por capas, o cubito a cubito; frente a la escasez de otro tipo de estrategias unidas a un razonamiento más abstracto, como la estimación, la comparación (descomposición-recomposición de figuras; homotecia entre figuras) o la aplicación del concepto tridimensional del volumen.

La dificultad más destacada en estos ítems ha sido el problema de la confusión área-volumen, que se manifiesta muchas veces a través del propio vocabulario que emplean muchos alumnos: en vez de utilizar la palabra “cubitos”, los denominan “cuadrados”. Ello también denota poca familiarización con situaciones de auténtica medida y de comparación de volúmenes de cuerpos diversos.

Resaltamos por último, el hecho de que la mayoría del alumnado no ha adquirido la noción de trilinealidad ni la estructura multiplicativa del volumen, presentando fundamentalmente la noción de volumen “tipo superficie” (calculado a partir de capas). Los niveles más bajos de comprensión del volumen emplean estrategias de recuento de cubitos. A mayor abstracción del ítem, mayor índice de fracaso.

A partir del estudio realizado se plantean retos como el estudio de metodologías adecuadas para trabajar la noción de volumen en este nivel educativo, que permita subsanar errores detectados y proporcionar al alumnado variedad de estrategias de carácter inductivo y materiales de cara a una manipulación más directa de esta magnitud.

Referencias

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2º de ESO relacionadas con el concepto de volúmenes y su medida

- Assessment of performance unit (APU). (1980). *Mathematical Development. Secondary Survey Report*. London: HMSO.
- Bock, D. De, Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). "The predominance of the linear model in secondary school student's solutions of word problems involving length and area of similar plane figures", en *Educational Studies in Mathematics*, vol 35, p. 65-83
- Boulton-lewis, G.M., Wilss, L.A., Mutch, S.L. (1996). "An analysis of young children's strategies and use of devices for length measurement", en *The journal of Mathematical Behaviour*, vol 15, p. 329-347.
- Castellnuovo, E. (1963). *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas.
- Chamorro, C. (2001). "Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y ESO", en Chamorro (ed.) *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: MEC, p. 81-124
- Chamorro, C. (2003). "Las magnitudes multilíneas: la superficie y el volumen", en Chamorro (ed.) *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación, p. 221-272
- Dickson, L., Brown, M. e Gibson, O. (1984). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.
- Guillén, G. (2010). "¿Por qué usar los sólidos como contexto de enseñanza-aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?". En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida: SEIEM, p. 11-68.
- Gutiérrez, A. (1998). "Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización", en *Ponencia en TIEM-98*.
- Guzmán, M. de (1993), *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Madrid: Editorial Popular.
- Hart, K.M. (1981), "Measurement", en K.M. Hart ed. *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. London: John Murray, p. 9-22
- Kordaki, M., Potari, D. (1998), "Children's approaches to area measurement through different contexts", en *The journal of Mathematical Behaviour*, vol 17, p. 303-316.
- Lovell, K. (1984). *Desarrollo de los conceptos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Morata.
- Martínez, A., Rivaya, F.J. y otros (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- M.E.C. (2006), Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (BOE nº106, 4/5/2006). Disponible en: http://www.boe.es/aeboe/consultas/bases_datos/doc.php?coleccion=iberlex&id=2006/07899
- N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA. USA. (Traducción al castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática

- THALES (2003) . *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Granada)
- O.C.D.E. (2007) “El programa PISA de la OCDE: ¿Qué es y para qué sirve?”. Publicado polo centro da OCDE para América Latina, na web: http://www.oecd.org/document/51/0,3343,en_32252351_32235731_39732595_1_1_1_1,00.html_Disponible_en:_<http://www.oecd.org/dataoecd/58/51/39730818.pdf>
- Olmo, M.A. del, Moreno, M.F. e Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid: Síntesis
- Rico, L. (2007), “La competencia matemática en PISA”, en *PNA:Revista de Investigación en Didáctica de la Matemáticas*, 1(2), p. 47-66. Disponible en: <http://www.pna.es/Numeros/pdf/Rico2007La.pdf>
- Sanchez, J.C. (2004) “¿Por qué las matemáticas básicas cambian? Claves para entender las renovaciones curriculares”, en *Educación y futuro: revista de investigación aplicada y de experiencias educativas*, nº 11, p.161-170
- Torre, E. de la (2001) “Que xeometría queremos para a educación primaria e que xeometría queremos para os mestres”, en *Gamma nº1*, p.21-26
- Towers, J., Hunter, K. (2010) “An ecological reading of mathematical language in a Grade 3 classroom: A case of learning and teaching measurement estimation”, en *The journal of Mathematical Behaviour*, vol 29, p. 25-40.
- Vecino, F. (2003) “Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria” , cap 11, en Chamorro, M^a. C (coord), Llinares, S., Ruiz Higuera, M^a.L., Belmonte, J.M., Vecino Rubio, F. *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Education.
- Vergnaud, G. (1983) “Representation du volume et arithmatisation entretiens individuels avec des eleves de 11 a 15 ans”, en *Reserches en didactique des mathématiques Vol. 4, nº1.*, p. 27-69

LA HERRAMIENTA ARRASTRE EN FUNCIONES USANDO GEOGEBRA

THE DRAG TOOL IN FUNCTIONS USING GEOGEBRA

Silva Muslera, A.¹, De La Torre Fernández, E.²

¹Universidad Autónoma de Querétaro, México

²Universidade da Coruña

Resumen. *Este documento presenta algunos resultados del trabajo realizado con estudiantes de primer año universitario a los que se les pidió que resolvieran problemas abiertos de cálculo usando GeoGebra. Encontramos en el uso de GeoGebra que el arrastre en el trabajo con funciones, es una herramienta útil para los estudiantes a la hora de resolver problemas. Usando el enfoque instrumental hemos identificado algunas herramientas de arrastre, usadas en funciones que son fundamentales para la solución de problemas de cálculo. Presentamos dos casos que ilustran una clasificación de la herramienta arrastre al trabajar con funciones.*

Palabras clave: geometría dinámica, enfoque instrumental, modos de arrastre, GeoGebra.

Abstract. *This paper present some results of the task developed with first year university students using GeoGebra to solve open problems of calculus. Observing the students work with GeoGebra, we found out that they use the drag tool with mathematical functions as a useful resource to solve that kind of problems. From the instrumental approach we have identified different drag ways used by students when they manage functions. This is an essential way for solving calculus problems. We present two cases that illustrate different ways of using the drag tool to work with functions.*

Keywords: dynamic geometry, instrumental approach, drag tool, GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

En este documento presentamos algunos resultados de la integración de software de geometría dinámica (SGD) en la solución de problemas de cálculo por estudiantes de primer año universitario. En geometría dinámica, el arrastre es un elemento fundamental, permite pasar de una geometría estática, en la cual los objetos sobre los que se trabaja son configuraciones particulares, a una geometría dinámica en la cual las construcciones conservan sus propiedades geométricas durante el movimiento. En este trabajo usamos el SGD GeoGebra.

Desde el enfoque instrumental (Verillon y Rabadel 1995; Guin y Trouche 2002; Trouche 2005) identificamos el arrastre como una herramienta.

El objetivo de este documento es mostrar que los estudiantes usan la herramienta arrastre como un medio de resolución de un problema abierto de cálculo donde se involucra el concepto de recta tangente a una función.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico de nuestra investigación está basado en el enfoque instrumental. La primera idea es la distinción entre un artefacto y lo que se llama instrumento. Desde la ergonomía cognitiva, Verillon y Rabadel (1995) señalan la diferencia entre un artefacto, un objeto dado y un instrumento como un constructo psicológico: el instrumento no existe en sí mismo, el artefacto se hace instrumento cuando el sujeto ha sido capaz de apropiarse de él y lo ha integrado en su actividad.

El artefacto se hace un instrumento para un individuo a través de una génesis progresiva, llamada *génesis instrumental*. Trouche (2004) señala que es un proceso complejo, vinculado a las características de los artefactos (sus potencialidades y restricciones) y a la actividad del sujeto, a sus conocimientos y métodos de trabajo.

La génesis instrumental puede ser vista como la combinación de dos procesos. Un proceso de instrumentalización, orientado hacia el artefacto y un proceso de instrumentación, orientado hacia el sujeto.

A través del proceso de instrumentalización el usuario puede modificar el artefacto y éste se convierte en un medio para lograr un objetivo, resolver un problema, completar una tarea (da sentido a una situación de actividad, por lo que tiene que ser transformado en un instrumento). Esta transformación del artefacto está intrínsecamente vinculada a la transformación del usuario, a través del proceso de instrumentación el usuario desarrolla los esquemas de utilización y las técnicas mediante las cuales el artefacto puede ser implementado en la acción propuesta. Trouche (2004) señala que: *“la instrumentación es precisamente el proceso por el cual el artefacto imprime su marca en el sujeto, permite desarrollar una actividad dentro de algunas fronteras (las restricciones del artefacto)”*.

Las restricciones son vinculadas a la transposición informática, descrita por Balachef (en Trouche 2004) como el trabajo necesario en los conocimientos para permitir una representación simbólica. Para analizar esta transposición, Guin y Trouche (2002) distinguen tres tipos de restricciones: restricciones internas, vinculadas al hardware; restricciones de comando, vinculadas a la existencia y a la forma de los comandos y restricciones de organización, vinculadas a la organización de la interfaz ente el artefacto y el usuario.

En un entorno de SGD las restricciones de organización favorecen el estudio gráfico de funciones, elemento importante de nuestro estudio. En el trabajo con funciones los estudiantes, como primera acción, obtienen la gráfica de la función y, en algunos casos, infieren respuestas desde esta representación gráfica. En otros casos la gráfica de la función no les permite hacer inferencias y los conduce a usar las potencialidades del SGD, es aquí donde surge el *modo de arrastre* como una forma de hacer las inferencias. Lo que es particular al SGD es que cuando los elementos de una construcción se

arrastran, todas las propiedades geométricas empleadas en la construcción de la figura se conservan.

Diversos autores se han interesado en los usos del arrastre cuando los estudiantes están resolviendo problemas de geometría con un SGD (Olivero 1999; Arzarello et al.2002; Gutiérrez Rodríguez 2005; Iranzo y Fortuny 2008; Restepo 2009; Baccaglini-Frank y Mariotti 2010). Como resultado de este interés han establecido clasificaciones de los diferentes modos de arrastre. La clasificación de Olivero (1999) y Arzarello et al. (2002), desde una perspectiva cognitiva, distingue siete modalidades de arrastre, que consideran fundamentales para que los estudiantes pasen de las conjeturas a las pruebas. Gutiérrez Rodríguez (2005) considera útiles sólo tres tipos de arrastre para analizar la actividad de los estudiantes. Restepo (2009), apoyándose en la teoría instrumental, propone una nueva clasificación de los *instrumentos de arrastre*, definiéndolos desde las características y las restricciones del artefacto y desde la finalidad matemática que se busca alcanzar con ellos. Estos estudios convergen en el hecho de que la apropiación del arrastre es un proceso largo y complejo, que debe ser acompañada por el profesor.

En nuestra investigación, para la clasificación de la herramienta de arrastre consideramos las características de los artefactos (sus potencialidades y restricciones) y la actividad del sujeto, sus conocimientos y métodos de trabajo. Así, hemos identificado las siguientes herramientas de arrastre:

Arrastre errático de la Zona Gráfica: el arrastre se hace sin un plan específico, de forma aleatoria, con la finalidad de modificar la Zona Gráfica pero sin que importe cómo es esa modificación.

Arrastre guiado de la Zona Gráfica: el arrastre se utiliza para dar a la Zona Gráfica una forma particular.

Arrastre errático: el arrastre se hace sin un plan específico, de forma aleatoria, con la finalidad de modificar el objeto pero sin que importe cómo es esa modificación.

Arrastre guiado: el arrastre se usa para dar al objeto una forma particular.

Arrastre vinculado: vincular uno o varios objetos y moverlos.

Arrastre para validar/invalidar: mover el objeto para validar algunas propiedades.

CONTEXTO Y METODOLOGÍA

Trabajamos con los estudiantes del primer año de la licenciatura de Química de la Facultad de Ciencias de la Universidad de A Coruña. Participaron en el estudio 28 estudiantes, sus edades varían entre los 17 y los 20 años y todos son estudiantes que por primera vez están en este curso. Se destinó una clase semanal de 50 minutos a la resolución de ejercicios, en un aula con 16 ordenadores. Algunos estudiantes trabajaban en forma individual y otros lo hacían en parejas.

Los ejercicios usados en la investigación son parte integral del curso y se seleccionaron previo acuerdo con el profesor.

Empleamos el software GeoGebra, creado bajo el amparo de licencia GLP. Hohenwarter y Jones (2007) señalan que proporciona una conexión cercana entre la manipulación simbólica y las capacidades de visualización de un sistema de álgebra computacional (CAS) y la variabilidad dinámica de un SGD.

Realizamos una investigación cualitativa de corte interpretativa. Eisenhart (1988) afirma que el propósito de hacer investigación interpretativa es el de proporcionar información que permitirá al investigador ver la *"manera de hacer"* del mundo desde la perspectiva de los participantes, se trata de interpretar el significado de las acciones desde el punto de vista de los estudiantes.

El propósito de hacer una investigación cualitativa interpretativa es que es principalmente dentro de esta tradición donde se desarrollan y tienen sentido los métodos etnográficos. La etnografía permite una reflexión constante y profunda sobre la realidad, asignando significaciones a lo que se ve, se oye y se hace, desarrollando aproximaciones hipotéticas, redefiniendo continuamente, hasta llegar a construir e interpretar esa realidad sin anteponer el sistema de valores del investigador, lo cual conduce a la reconstrucción teórica.

Usamos la observación participante como una estrategia de obtención de información. Según Goetz y LeCompte (1988) *"La observación participante sirve para obtener de los individuos sus definiciones de la realidad y los constructos que organiza su mundo"*. El investigador debe pasar el mayor tiempo posible con los estudiantes y observar lo que hacen en las sesiones.

Los datos obtenidos son video-grabaciones de la pantalla de los ordenadores de los estudiantes, durante las sesiones de trabajo. Se transforman en descripciones para un mejor manejo de datos. A estas descripciones se le suman las anotaciones y diálogos que el investigador obtiene durante cada una de las sesiones. Rodríguez Romero (1992) señala que los documentos permiten acceder a un campo de información *"natural"*, en el sentido de no mediatizada por procedimientos de recogida de datos más intrusivos, que utilizan estrategias interactivas de obtención de información.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para el análisis usaremos el trabajo realizado en dos ordenadores. En el primer ordenador trabajan Luis y Cynthia y en el segundo Alberto. Los elegimos porque usan GeoGebra y la herramienta arrastre como medio de resolución del problema propuesto, sus trabajos en papel y lápiz no son significativos. Además, en ellos se identifica claramente la clasificación de la herramienta arrastre que hemos propuesto antes.

El problema que los estudiantes resuelven es:

Encontrar la ecuación de una tangente a la curva $f(x) = 3x^3 + 14x^2 + 3x + 8$ que pasa por el origen de coordenadas.

Luis y Cynthia (LC)

Descripción de video	Análisis
Inician obteniendo la gráfica de la función, en la Zona Gráfica no se ve la gráfica.	Se dan cuenta de que la gráfica de la función no aparece en pantalla.
Con el ratón generan el punto $A=(0,0)$ y obtienen $f'(x)=9x^2+28x+3$, que aparece en la Ventana de álgebra y en la Zona Gráfica	La gráfica de $f'(x)$ si se aprecia en pantalla.

La herramienta arrastre en funciones usando geogebra

se ve la gráfica y su rótulo. Ocultan la gráfica de $f'(x)$ y rescriben, por medio del comando 'Función', la expresión de $f(x)$. Borran y la rescriben varias veces, sin que se vea en la Zona Gráfica la gráfica. Usan el comando 'Tangente' y no tienen claro los argumentos que usa, lleva a una sucesión de Ventanas de error. Generan un punto A sobre la gráfica de $f'(x)$ y lo deslizan varias veces sobre la función. Usan comando 'Tangente' y generan la recta $y=3x+8$, que es una recta tangente a la función $f(x)$ en $x=0$.	Centran su atención en la gráfica de $f(x)$ que no se ve en pantalla. Error al escribir los argumentos del Comando. Restricciones de Comando. Arrastre del punto A sobre $f'(x)$. Pretenden que esta sea la recta que de solución al problema propuesto.

En el análisis anterior vemos que los alumnos tienen errores al escribir los argumentos que usa el Comando 'Tangente', los hemos identificado como *restricciones de comando*, Guin y Trouche (2002). Las ventanas de error que generan GeoGebra dan información acerca de la sintaxis de los comandos, sin embargo, los estudiantes las cierran sin leer estas informaciones.

El arrastre del punto A sobre $f'(x)$ lo identificamos como un *arrastre vinculado* debido a que el punto A se desliza sólo sobre la función $f'(x)$. También lo identificamos como un *arrastre errático* porque el deslizamiento es aleatorio y no es usado para buscar la solución del problema propuesto. Sin embargo, lo podemos identificar como un *arrastre para validar/invalidar* ya que lo usan para comprobar que la gráfica es la de $f'(x)$. Consideramos que este arrastre es consecuencia de la búsqueda de la gráfica de la función y es una acción que no es necesaria pero que los estudiantes la llevan a cabo para ver si encuentran la gráfica, Artigue (1997) lo llama *comportamiento de pesca*.

Llaman a la Observadora (Ob) y mantienen el siguiente dialogo:

Dialogo	Análisis
LC: Borramos todo y lo hemos escrito de nuevo y no se ve. Está mal este programa.	Suponen que el software tiene error.
LC: No sabemos que hacer!	
La Ob maneja el ratón, va a la Barra de herramientas, señala el modo Desplazar la Zona Gráfica.	Se hace evidente el arrastre.
LC: Si está la gráfica!!	Ven la gráfica.

En este dialogo se hace evidente que para LC la herramienta arrastre era desconocida, fue necesario que la Ob les indicara la posibilidad de usarla.

Descripción de video	Análisis
Deslizan la Zona Gráfica de forma que ahora en la pantalla se pueden ver las funciones, la recta y el punto. Accionar el segundo modo del arrastre de la Zona Gráfica que permite cambiar de escala los ejes coordenados.	Arrastre de la Zona Gráfica.
Crean el punto B=(0,8) usando el Comando 'Punto' y la función f(x), usan el Comando 'Tangente' con B y f(x). Deslizan el punto B sobre la función f(x) hasta que en la pantalla se ve que la recta pasa por el origen de coordenadas.	Arrastre del punto B sobre f(x).

El arrastre de la Zona Gráfica lo hemos identificado como *arrastre guiado de la Zona Gráfica* debido a que el deslizamiento permite ver la construcción de las funciones. También es identificado como *arrastre para validar/invalidar* porque los estudiantes lo usan para verificar las gráficas de las funciones.

El arrastre del punto B lo hemos identificado como *arrastre vinculado*, porque el punto sólo se desliza en la función f(x). También lo identificamos como *arrastre guiado* porque los estudiantes pretenden que la recta pase por el origen de coordenadas y de esa forma se identifica también como *arrastre para validar/invalidar* ya que se usa para encontrar la solución al problema propuesto (ver Figura 1). Ellos usan una estrategia visual de resolución que los puede conducir a la solución del problema.

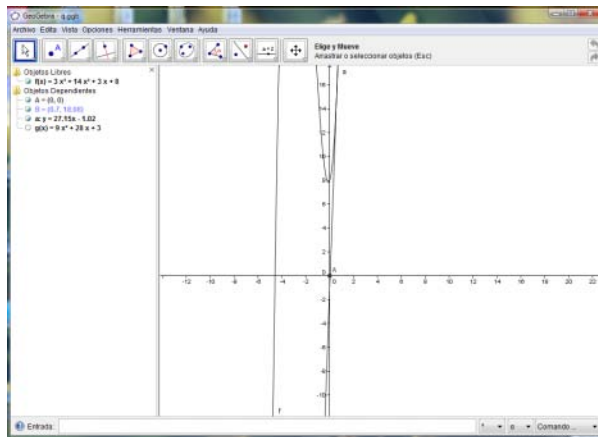


Figura 1. Trabajo final de LC. En la Zona Gráfica se aprecia que la recta pasa por el origen, sin embargo en la Ventana de álgebra no lo comprueba.

Alberto (AL)

Descripción de video	Análisis
Inicia obteniendo la gráfica de $f(x)$. Al no aparecer la gráfica de la función en pantalla va a la Zona Gráfica y la desliza usando el ratón, hasta que se ve la gráfica. Usa el Comando ‘Tangente’ y no tienen claro cuáles son los argumentos, por lo que genera una sucesión de Ventanas de Error. Con el ratón genera el punto $A=(0,8)$ y lo desliza hasta el origen de coordenadas $A=(0,0)$. Este punto queda vinculado a la función por lo que es deslizada también. Repite varias veces este deslizamiento. Genera una recta con el Comando ‘Tangente’, usando el punto A y x. Desliza el punto A, la recta no se desliza, sólo lo hacen el punto y $f(x)$. Al ver esto borra la recta y desliza varias veces el punto y $f(x)$. Repite estas operaciones varias veces	Arrastre de la Zona Gráfica. Error al escribir los argumentos del Comando. Restricciones de Comando. Arrastre del punto A. Arrastre de $f(x)$. Arrastre del punto A. Arrastre de $f(x)$.

En el análisis anterior hemos identificado que el arrastre de la Zona Gráfica lo identificamos como *arrastre guiado de la Zona Gráfica* ya que el estudiante lo usa para ver en la pantalla la gráfica de la función.

Los errores al escribir los argumentos que usa el Comando ‘Tangente’ los hemos identificado como *restricciones de comando*, Guin y Trouche (2002). Las ventanas de error que se generan en GeoGebra dan información acerca de la sintaxis, sin embargo, este estudiante no las revisa originando que se repitan varias veces.

El arrastre del punto A y de la función $f(x)$ los hemos identificados como *arrastre vinculado* porque el punto fue construido sobre la función $f(x)$. En algunos momentos los deslizamientos del punto A son identificados como *arrastrés guiados*, por ejemplo cuando el punto se desliza hasta el origen de coordenadas y en otros momentos son identificados como *arrastrés erráticos* porque se desliza de forma aleatoria. En el caso de la función $f(x)$ los deslizamientos siempre los consideramos como *arrastrés erráticos* porque la función no tiene motivo porque ser deslizada.

El maestro tutor (Mt) observa lo que aparece en la pantalla del alumno AL y llama la atención al observador (Ob), manteniendo entre los tres el siguiente dialogo:

Dialogo	Análisis
AL: La gráfica se mueve [se refiere a la gráfica de la función $f(x)$, la está trasladando] Mt: Eso no es posible, ¿qué es lo que pasa? Ob: Es verdad, si se puede mover la gráfica, pero al hacerlo debes observar [la indicación es para AL] que la función ya no es la misma [señala la expresión algebraica de $f(x)$ en la Ventana de álgebra] Mt: Por supuesto! Nos interesa la función del ejercicio. El Mt abre la Ventana Redefine de $f(x)$ y AL escribe la función propuesta en el ejercicio. AL va a la Zona Gráfica y arrastra la función $f(x)$, buscando que la recta pase por el origen, haciendo que la función $f(x)$ y la ecuación de la recta sean trasladadas nuevamente. AL: A él también le pasa!! [se refiere a sus compañeros del ordenador de al lado]	Para el Ob y el Mt este arrastre no tenía posibilidad de ocurrir. Con esta acción, el Mt le señala al estudiante que debe trabajar con la función del problema propuesto. El estudiante insiste en trasladar la función $f(x)$. Justifica la traslación de la función $f(x)$.

En el dialogo anterior encontramos que la Ob y el Mt se sorprendieron al notar que el estudiante trasladaba la función, para ellos no era evidente este arrastre. Sin embargo, el estudiante lo usa pretendiendo así encontrar la solución al problema propuesto y justifica su uso porque otros estudiantes lo están usando.

En la Figura 2 mostramos el trabajo final de AL, donde se observa que el persistió en su intento de resolver el problema planteado arrastrando la función, ignorando la ventana algebraica. La estrategia visual de resolución, en este caso, no lo va a conducir a la solución del problema.

La herramienta arrastre en funciones usando geogebra

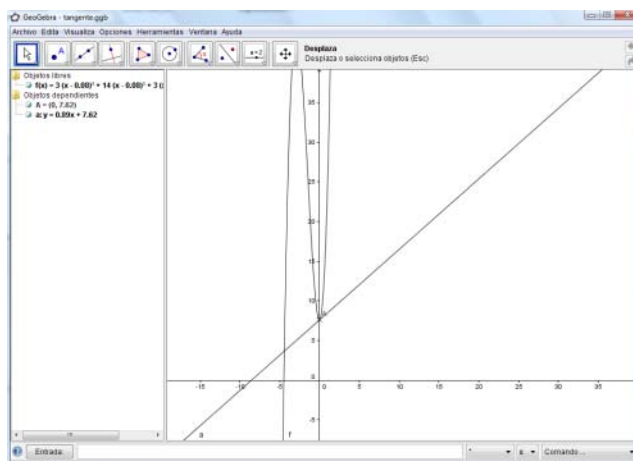


Figura 2. Trabajo final de AL.

CONCLUSIONES

De acuerdo a nuestro análisis, una vez que la herramienta arrastre es identificada por los estudiantes la usan como un único medio para la resolución del problema. Los estudiantes buscan la solución al problema propuesto de forma empírica y la gestión del profesor es importante para alentar a los estudiantes a ir más allá de la percepción y la verificación empírica en contextos de SGD, Fortuny et al. (2010).

Hemos observado que el uso de la herramienta arrastre influye en la estrategia de resolución del problema. Los estudiantes han utilizado estrategias visuales para lograr obtener que la recta tangente pase por el origen. Originando que el uso de las diversas herramientas arrastre se combinen, en algunos casos y en otros se complementen.

La apropiación del arrastre no es ni evidente ni inmediata para los estudiantes, como se señala en el dialogo con LC, ni para los profesores, como se señala en el dialogo con AL. Es un proceso largo y complejo. Aún así, es posible identificar esquemas de uso (Restrepo 2009; Baccaglini-Frank y Mariotti 2010), que permitan transformar la herramienta en un instrumento.

Es necesario llevar a cabo una investigación más exhaustiva para entender el proceso de apropiación del arrastre y analizar la posible génesis instrumental.

Referencias

- Artigue, M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics* 33(2), pp. 133-169.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), pp. 66-72.
- Baccaglini-Frank, A y Mariotti, M.A. (2010). Generating conjectures in Dynamic Geometry: the maintaining dragging model. *Int. J. Comp. Math. Learning*, vol. 15, pp. 225-253.

- De la Torre Fernández, E. y Silva Muslera, A. (2009). Conceptualization of derivate using GeoGebra. *GeoGebra Conference 2009*. Hagenberg, Austria.
- Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 19(2), pp. 99-114.
- Fortuny, J.M., Iranzo, N, Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*, pp. 69-85.
- Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata. Madrid.
- Guin, D. y Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*. 34 (5)
- Gutiérrez Rodríguez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del IX Simposio de SEIEM*. Córdoba, pp. 27-44.
- Hohenwarter, M. y Jones, K. (2007) Ways of linking geometry and algebra: the case of geogebra. *Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), pp. 126-131.
- Iranzo, N.y Fortuny, J. M. (2008). La influencia del SGD en las estrategias de resolución de problemas de geometría analítica. *Actas del XII Simposio de SEIEM*. Badajoz.
- Olivero, F. (1999). Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. *W.Maull & J.Sharp (eds), Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. University of Plymouth, UK.
- Restrepo, A.M. (2009) *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème*. París: Edilivre.
- Rodríguez Romero, M.M. (1992). La identidad de la labor de asesoramiento y el proceso de construcción del rol de agente de apoyo. Un estudio de caso en educación tecnológica. PhPTesis. UNED. (sin publicar).
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), pp. 281-307.
- Verillon, P. y Rabadel, P. (1995). Cognition and artifact: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), pp. 77-101.

AVANCES DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA SOBRE LA RAZÓN Y LA PROPORCIONALIDAD CON FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

ADVANCE ON A TEACHING EXPERIMENT IN REGARD TO RATIO AND PROPORTIONALITY WITH PROSPECTIVE ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS

Valverde Soto, A. G., Castro Martínez, E.

Universidad de Granada

Resumen. *El propósito de la comunicación es presentar avances de un experimento de enseñanza sobre el desarrollo del conocimiento del profesor diseñado con un doble propósito de estudiar las nociones iniciales que manifiestan los futuros maestros de primaria sobre algunos componentes de la razón y la proporcionalidad así como promover la comprensión de los mismos. Se enmarca dentro de un proyecto de investigación orientado a estudiar la contribución del experimento en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria. Describimos su realización y presentamos resultados que se derivan del análisis retrospectivo de una de las sesiones de experimentación.*

Palabras claves: Competencia matemática, Futuros maestros de primaria, Experimentos de enseñanza, Proporcionalidad, Razón.

Abstract

The purpose of this report is to present advances of a teaching experiment on the knowledge teacher development (Teacher Development Experiment, TDE); it has been designed according two objectives: to study the notions that future elementary school teachers show about some components of ratio and proportionality as well as to promote comprehension regarding such mathematical topics. This experiment is framed within a research project dedicated to study the contribution of this experiment in the development process of prospective elementary school teacher's mathematical literacy. We describe the experiment and present results that are derived from the retrospective analysis of one experimentation session.

Keywords: Mathematical literacy, Proportionality, Prospective elementary school teachers, Ratio, Teaching experiments.

El cambio en la educación superior derivado de la adopción del EEE⁸² ha supuesto un reto en lo referente a la creación, puesta en práctica y evaluación de experiencias de formación que se adapten a los programas de titulaciones y asignaturas basadas en el

⁸² Espacio Europeo de Educación Superior.

desarrollo de competencias. En el ámbito de la formación de maestros de primaria cabe destacar la relevancia de diseñar e incluir experiencias de aprendizaje que promuevan la adquisición de la competencia matemática (Rico y Lupiáñez, 2008). No obstante reconocemos que el desarrollo de esta competencia constituye una tarea compleja de abordar. De aquí consideramos que la investigación, ha de proporcionar indicios de calidad de materiales que contribuyan a la adquisición de la competencia matemática de los profesores en formación, así como de formas de trabajar y de evaluar. Esta situación suscitó nuestro interés por realizar un experimento de enseñanza enfocado en el estudio de algunos contenidos asociados a las nociones de razón y proporcionalidad y de desarrollarlo bajo el marco curricular propuesto en el estudio PISA (OCDE, 2004).

La investigación realizada consiste en un *experimento sobre el desarrollo del conocimiento del profesor* (Teacher Development Experiment, TDE, Simon, 2000)⁸³, enmarcado dentro del paradigma *investigación de diseño* (*design research*). Dicho paradigma persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico.

Las características básicas de los experimentos de enseñanza han sido recogidas por Molina, Castro, Molina y Castro (2011) entre las que destacamos: (a) el proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño, (b) el equipo de investigadores estudia el desarrollo del conocimiento a la vez que lo promueve, (c) estos experimentos consisten en una secuencia de episodios de enseñanza en los que intervienen investigadores, docentes y alumnos, (d) se da una ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos. La metodología TDE conlleva dos niveles de análisis de datos: los análisis continuos que ocurren entre las sesiones y el análisis retrospectivo que se enfoca en el conjunto total de las sesiones, con este último se pretende desarrollar un modelo explicativo de la evolución del conocimiento matemático del profesor en formación o en activo (Simon, 2000). Como parte de la naturaleza de este tipo de estudios se tiene que más allá de crear un diseño que resulte efectivo para algún aprendizaje, lo que se persigue es describir cómo funciona el diseño instruccional propuesto y sugerir formas en los cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias. En la ejecución de los experimentos de enseñanza han de seguirse tres fases: I. Preparación del experimento, II. Experimentación y, III. Análisis retrospectivo de los datos. Adelante describimos cada fase de nuestro experimento.

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA SOBRE LA RAZÓN Y PROPORCIONALIDAD

Nuestro experimento se sitúa en el marco curricular basado en la noción de competencia matemática propuesto en el estudio PISA (OCDE, 2004). Siguiendo esta propuesta elegimos los contenidos de la razón y la proporcionalidad porque ambos están asociados a múltiples situaciones cotidianas, permitiendo acercar la matemática a la vida. Además

⁸³ Según Simon (2000) el desarrollo del conocimiento del profesor (Teacher Development) se refiere a los cambios en los conocimientos, creencias, disposiciones y habilidades que sustentan la capacidad de implementar exitosamente los principios de las reformas de la educación matemática.

la proporcionalidad impregna al currículo de matemáticas de primaria, secundaria e incluso en niveles superiores, mantiene múltiples relaciones con otros conceptos matemáticos y conexiones con otras áreas de conocimiento.

El objetivo de nuestro experimento ha sido recoger información, en un contexto natural de formación, relativa al aprendizaje y razonamiento que manifiestan futuros maestros de primaria en relación con distintos componentes de la razón y la proporcionalidad cuando resuelven tareas en un ambiente de trabajo colaborativo. Este propósito subyace al fin último del experimento que es elaborar un modelo explicativo del desarrollo del conocimiento matemático de estos estudiantes en relación con los contenidos matemáticos anteriores.

Los participantes del experimento han sido dos grupos (G1 y G2) de alumnos que cursaron la asignatura Matemáticas y su Didáctica⁸⁴ de la Diplomatura en Educación Primaria, durante el curso académico 2009-2010 de la Universidad de Granada. En el G1 estaban inscritos 136 estudiantes y en el G2, 74 estudiantes, en cada grupo y sesión se formaron distintos equipos de trabajo. En esta comunicación nos centramos en presentar parte de los resultados relativos al análisis retrospectivo de la 1ª sesión con el grupo G1 y específicamente en relación con el objetivo 1 de investigación para esta sesión, en la que participaron 13 equipos de trabajo conformados, en su mayoría, por 4 o menos estudiantes.

Fases

Describimos las cuatro fases seguidas en nuestro trabajo que coinciden con las asociadas a esta metodología de investigación

I. Preparación del Experimento

En la preparación del experimento se realizó: (a) el análisis de contenido, cognitivo y de instrucción⁸⁵ de la razón y la proporcionalidad (Gómez, 2009; Lupiáñez y Rico, 2008), (b) estudio y elección de dinámica de aula, (c) delineación de una trayectoria hipotética del aprendizaje, (d) concreción escrita del diseño, de la secuencia de intervenciones en el aula y de su temporalización, (e) negociación con los profesores de la asignatura y, (f) el registro de las decisiones tomadas en el proceso anterior y su justificación. Destacamos que tras la negociación inicial con los profesores encargados de la asignatura se acordó que ellos no trabajarían con los estudiantes previamente los contenidos de razón y proporcionalidad, y que la puesta en práctica del experimento estaría a cargo de una de las investigadoras con la colaboración de los profesores.

Planificación de las Sesiones

Basándonos en información procedente de un estudio previo (Valverde y Castro, 2009), en el análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, en la negociación con los profesores colaboradores y de acuerdo con las consideraciones expuestas en el marco

⁸⁴ Asignatura troncal del plan antiguo de la diplomatura en Educación Primaria, ubicada en el 1º curso y de duración anual. Ha dado lugar a la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria en el actual plan de formación del curso 2010-2011.

⁸⁵ Tales análisis aportaron los criterios para la selección de las tareas y de la dinámica de aula.

curricular de la asignatura, llegamos a concretar el diseño de la experimentación en 4 sesiones, de las cuales 3 tuvieron una duración de 2 horas y una sesión de 1 hora.

Se recogieron un total de 146 tareas procedentes de investigaciones previas (Alatorre y Figueras, 2005; Fernández, 2001; Fernández y Llinares, 2010; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Lamon, 1993; Modestou y Gagatsis, 2007; Noelling, 1980a; Tourniaire y Pulos, 1985, entre otros), de estudios como PISA (OCDE, 2004) o TIMSS (IEA, 2001) y de textos de didáctica de la matemática. Después de la definición de variables⁸⁶ se eligieron y planificaron 13 tareas relativas a los siguientes focos de contenido: relaciones entre algunos subconstructos y representaciones de los números racionales, características básicas de la razón, porcentaje, relaciones de proporcionalidad directa e inversa, comparación de razones, escala, relaciones entre longitudes, área y volumen de figuras y objetos semejantes. No obstante indicamos que tras los análisis realizados en medio de las sesiones se aplicaron únicamente 7 tareas.

La programación de las sesiones se describió en términos de: objetivos de investigación para la sesión, expectativas de aprendizaje del estudiante, contenidos instruccionales y un análisis detallado de las tareas que se complementó con el enunciado de conjeturas relativas al posible desempeño de los estudiantes en la resolución de las mismas así como de errores potenciales asociados a la tarea.

Para la primera sesión se enunciaron 8 objetivos de investigación, concretamente, el objetivo 1 de investigación estuvo orientado a conocer las nociones iniciales mostradas por los estudiantes en torno a la noción de razón, fracción y porcentaje así como sobre la relación entre los mismos. Para trabajar los contenidos y expectativas de aprendizaje correspondientes a esta sesión se planearon dos tareas introductorias: (1) “Fracción, razón y porcentaje” que incluye una comparación parte-todo en la que se conocen los datos de cada una de las partes y el total, (2) “Preferencia en el refresco de cola” en la que se muestran afirmaciones relativas a comparaciones entre las dos partes de un todo cuyo dato no se conoce, la razón se representa verbalmente, incluye una situación pública, las cantidades son de una misma magnitud e implica dos razones equivalentes (Anexo 1).

II. Experimentación

Para llevar a cabo el trabajo de aula se aplicó una adaptación de la metodología ACODESA⁸⁷, de enfoque socio-constructivista y que ha sido utilizada en el estudio de Hitt (2007). Ésta se basa en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión. Entre las características de esta metodología están: la inclusión de tareas abiertas, complejas que promuevan la reflexión y el debate, el interés por estudiar la evolución en la resolución de la tarea y en general cómo se reelabora un concepto a partir de la experiencia colaborativa. La adaptación realizada de ACODESA condujo a considerar 4 fases: (1) individual, (2) trabajo colaborativo, (3) puesta en común, (4) reconstrucción individual de la tarea fuera de clase. La información se recogió mediante distintos registros: papel, audio y video.

⁸⁶ Variables de las tareas: (a) número y tipo de magnitudes implicadas, (b) representación, (c) tipo de tarea (introductoria, valor ausente, comparación, ampliación o de escala, porcentaje), (c) tipo de comparación (parte-parte o parte-todo) y (d) tipo de situación (personal, laboral, pública o científica).

⁸⁷ Apprentissage Collaboratif, Débat Scientifique y Auto-réflexion.

III. Análisis Retrospectivo de la 1ª Sesión

En este análisis se procedió a observar los alcances conseguidos tanto de los objetivos de investigación como de las conjeturas planteadas para la primera sesión. Se han buscado evidencias del alcance de los objetivos de investigación para la sesión en dos momentos de la misma: en el trabajo colaborativo y en la puesta en común de la resolución de las tareas. El análisis de las respuestas ha proporcionado interpretaciones y (o) concepciones⁸⁸ que los estudiantes muestran en relación con algunos elementos relativos a la razón.

*Alcance del Objetivo 1 de Investigación*⁸⁹

Como se indicó en el apartado relativo a la planificación de las sesiones en la 1ª sesión se trabajaron dos tareas, comentamos resultados procedentes del análisis de las manifestaciones mostradas en la resolución de la tarea 2. Debido a la demanda cognitiva de esta tarea tuvimos la oportunidad de conocer y estudiar, en las producciones de los estudiantes, las nociones iniciales relativas a los siguientes aspectos: (a) Interpretación de la expresión “La razón es de 3 a 2” y (b) Concepciones sobre las propiedades de la razón.

La Tabla 1 recoge las interpretaciones que los estudiantes concedieron a la expresión “La razón es de 3 a 2” y los equipos (codificados con Ei, i=1,2,...,13) en que se manifestaron; para afirmar que en un equipo se mostró cierta interpretación basta con que alguno de los estudiantes integrantes del mismo la exhibiera. Detallamos las interpretaciones que se mostraron con mayor frecuencia.

Interpretaciones de la Expresión “ <i>La Razón es de 3 a 2</i> ”												
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
IR1	*		*	*			*	*		*		*
IR2	*	*	*			*	*				*	
IR3					*							
IR4									*			
Interpretaciones												
IR1: Tres es a dos.												
IR2: Tres de cada dos.												
IR3: En tres, hay dos y uno.												
IR4: Ninguna.												

Nota: El equipo E13 no participó en la resolución de la Tarea 2.

Tabla 1. Alcance del Objetivo 1 en la Tarea 2

IR1. Tres es a dos. En este caso los estudiantes hicieron una interpretación adecuada de la expresión, considerando por ejemplo que en un conjunto de 5 elementos, 3 son de un tipo y 2 son de otro tipo. En 7 de los 12 equipos que realizaron la tarea se mostró esta interpretación. Como ejemplo un fragmento del trabajo del equipo E1: “...tres a dos... **tres** prefieren una y **dos** prefieren otra... eso es **de cada cinco tres** quieren una y **dos** quieren otra, de **cada diez seis** quieren una y **cuatro** quieren otra...”

⁸⁸ Compartimos la idea expuesta por Hitt (2007) quien expresa que una concepción es un conocimiento que ha sido construido por un individuo, de manera personal o en interacción con pares, y que no es “equivalente” al conocimiento reconocido por una comunidad académica.

⁸⁹ Apartado: Planificación de las sesiones.

IR2. Tres de cada dos. Algunos de los integrantes de seis equipos leyeron la expresión “la razón es de 3 a 2” como “tres de cada dos”. A partir de las manifestaciones de los estudiantes reconocemos distintos matices. Consideramos que existe una diferencia entre las expresiones “tres de cada dos” y “tres por cada dos”, esta última podría interpretarse como que hay tres elementos de un tipo por cada dos elementos de otro tipo, lo que sería análogo a lo expresado en el acercamiento IR1, sin embargo analizando las conversaciones dadas en estos equipos observamos que no dieron muestra de esta posibilidad. La lectura “tres de cada dos” podría deberse a la expresión cotidiana y frecuente en la publicidad o medios de comunicación en general, por ejemplo *3 de cada 5 españoles...*, asociada a la relación parte-todo solo admisible en el caso de que la primera cantidad sea menor que la segunda. En la situación que estudiamos consideramos que una débil reflexión de la frase “*tres de cada dos*” unido al uso frecuente de la relación parte-todo podría ser la causa de esta interpretación. La ejemplificamos con las intervenciones de dos estudiantes (B6 y F6) del equipo E7:

B6: *tres de cada dos niños meriendan Cola Bola...*

F6: *es que no, porque ya estás diciendo otra afirmación diferente a ésta...*

El reconocimiento de que “tres de cada dos” resulta ser una expresión que no tiene sentido se manifestó en el equipo E11. Estos estudiantes mostraron implícitamente esta idea al utilizar la expresión “tres a dos”.

B5: *... a mí me parece que ninguna de las tres... porque si tú coges a una persona... y le dices tres a dos, pues cómo va ser tres a dos,... cómo van a decirle el total son dos personas, cómo va ser que tres personas si no más que hay dos...*

La Tabla 2 recoge los acercamientos mostrados en cada uno de los equipos, en relación con las propiedades de la razón, posteriormente describimos la concepción representada con el código CP3.

Concepciones Mostradas en Relación con las Propiedades de la Razón											
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E12
CP1	*	*	*			*	*	*		*	*
CP2						*	*	*			
CP3	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*

Concepciones sobre las Propiedades de la Razón

CP1: Equivalencia de Razones

CP2: Diferencia y la Suma de los Elementos de Razones Equivalentes

CP3: Concepción sobre la Suma de Elementos de la Razón.

Nota: El equipo E13 no participó en la resolución de la Tarea 2 y el equipo E11 no manifestó alguna de las concepciones anteriores.

Tabla 2. Alcance del Objetivo 1 en la Tarea 2

CP3. Concepción sobre la Suma de los Elementos de la Razón. Ésta es una concepción particular relacionada con la razón, se refiere a que a partir de los datos de la relación $a:b$ infieren que el número de elementos del conjunto sobre el que se ha aplicado esa relación es $a+b$. Observamos que en diez de los doce equipos se hace presente la concepción señalada. Por ejemplo en el equipo E1:

A1: *el total es cinco*

B1: *pero es cinco porque sumas tres más dos, porque aquí no te habla nada de cinco, ¿no?*

A1: *claro, porque te está diciendo que la relación es de tres frente a dos*

Mostramos otro ejemplo procedente de la transcripción del trabajo realizado en el equipo E10:

B12: *pues tenemos, en una de ella tenemos una muestra muy pequeña que serían 5 personas y de ellas 3 prefieren una marca y 2 prefieren otra marca, luego tenemos la segunda afirmación, tenemos una muestra más grande estamos hablando ya de miles de personas y la tercera muestra... lo que sería... la diferencia*

Creemos que la concepción descrita responde a una construcción parcial del concepto (Hitt, 2007) de razón que funciona en algunos contextos o casos particulares pero no en otros. En relación con esta concepción destacamos que:

- a. La inferencia mostrada por los estudiantes responde a una visión estática de la razón pues no han logrado reconocer el carácter “variable” de esta noción en la situación de la tarea, ésta es una característica intrínseca al concepto que en términos generales describe una relación entre múltiples pares de cantidades.
- b. La aplicación de esta idea a la razón 17139:11426, de la segunda afirmación de la tarea, puede responder a una sobre-generalización de lo observado y aplicado en la primera afirmación al sumar 3 y 2, esto es que a partir de un caso sencillo extrapolan a otros casos con cantidades mayores. A partir de la concepción se infiere que por un lado se encuestó a 5 personas en total y por otro a 28565 personas, dándose así una contradicción evidente ante la cual algunos estudiantes no reaccionaron.
- c. Esta concepción apareció en los razonamientos mostrados en la resolución de toda la tarea por la mayor parte de los estudiantes, o sea se utilizó frecuentemente.
- d. Tal concepción podría estar íntimamente asociada con el tipo de magnitud (discreta) y además asumir como conocido el total de encuestados transforma la comparación parte-parte de la tarea en una comparación parte-todo. Esta transformación facilita el razonamiento de las distintas cuestiones implicadas en la tarea ya que se cambia una relación dinámica entre las partes por una relación estática entre las partes y el todo.
- e. A partir de lo observado, nos cabe la sospecha de que esta concepción podría constituir un obstáculo epistemológico, debido a que satisface algunas de las características de los mismos (Bachelard, 1976) entre las que reconocemos: (a) la concepción detectada es un conocimiento, (b) funciona en algunos casos pero no en otros, de manera general, (c) se manifiesta aunque su consideración implique contradicciones. Tendríamos que verificar que a pesar de la toma de consciencia de la inexactitud de esta concepción ésta seguiría manifestándose intempestivamente en las producciones de los estudiantes al resolver tareas con las mismas características, y habría además que confirmar una característica trascendental de los obstáculos epistemológicos, y es determinar de qué conocimiento proviene o de cuál contexto matemático frecuente es producto; esta tarea constituye una línea abierta detectada en nuestra investigación.

CONCLUSIONES

El experimento de enseñanza realizado ha posibilitado explorar una experiencia de enseñanza-aprendizaje alternativa, se ha recogido una extensa cantidad de información contextualizada acerca de la comprensión y negociación de ideas matemáticas asociadas a la razón, a partir de la cual se están elaborando algunos aportes acerca de este dominio de aprendizaje. La observación del primer objetivo nos permitió conocer de qué manera estos estudiantes interpretan una expresión común de las razones como lo es “la razón es de 3 a 2”, además llegamos a detectar una concepción de los estudiantes en relación a la razón que no ha sido expuesta en otras investigaciones, ésta se refiere a que a partir de los elementos de la razón se infiere el total de elementos comparados. Consideramos que esta concepción podría corresponderse con un obstáculo epistemológico no obstante la confirmación de este supuesto requiere de un estudio más a fondo. En los análisis retrospectivos siguientes corresponde observar si en las producciones de los estudiantes, relativas a tareas de sesiones posteriores, tales interpretaciones y concepciones siguieron manifestándose, observar de qué manera o bajo qué otras condiciones se hicieron presentes, con el objetivo de llegar a describir la evolución así como la diversidad de conocimientos asociados a distintos componentes de la razón y la proporcionalidad de estos futuros maestros.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, desarrollo e Innovación 2008-2011 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

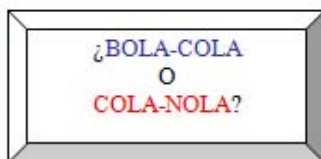
Referencias

- Alatorre, S., Figueras, O. (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 25-32. Melbourne: PME.
- Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. Quinta edición. México: Siglo Veintiuno.
- Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. España.
- Fernández, C., Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM.
- Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 471-498.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. 572

- Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.
- International Association for the Evaluation of Educational Achievement (2001). *TIMSS 1999 Mathematics Items. Released set for eighth grade*. Descargado el 2/07/2009 de http://timss.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math_items.pdf
- Karplus, R., Pulos, S., Stage, E. (1983). Early adolescent's proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 219-233.
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, pp. 41-61.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Modestou, M., Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, Vol. 27, No. 1, pp. 75-92.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*. 29(1), 75-88.
- Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part1. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, pp. 217-253.
- OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.
- Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Tourniaire, F., Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, pp. 181-204.
- Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-531). Santander: SEIEM y Universidad de Cantabria.

ANEXO

Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola



Las siguientes afirmaciones podrían ser parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- *La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.*
- *El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.*
- *5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.*

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

b. Elige la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

c. Si necesitaras divulgar los resultados en un anuncio publicitario, ¿cuál afirmación podría ser más efectiva? ¿Por qué?

d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

**ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL SENTIDO ESTRUCTURAL EN
TAREAS DE SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS**

**AN EXPLORATORY STUDY ON STRUCTURAL SENSE IN THE CONTEXT
OF SIMPLIFYING ALGEBRAIC FRACTIONS**

Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen: *Analizamos el sentido estructural que estudiantes de entre 16 y 18 años de edad ponen de manifiesto al trabajar con expresiones algebraicas, en el contexto de la simplificación de fracciones algebraicas que involucran las igualdades notables cuadrado de la suma, cuadrado de la diferencia, diferencia de cuadrados y propiedad distributiva/factor común. La identificación y clasificación de las estrategias empleadas por los estudiantes nos permite diferenciar tres modos de actuación que evidencian diferentes niveles de sentido estructural. Este análisis nos permite distinguir un amplio espectro de niveles de sentido estructural y avanzar en la comprensión del constructo sentido estructural que informa sobre las habilidades necesarias para hacer un uso eficiente de las técnicas algebraicas en tareas escolares.*

Palabras clave: igualdades notables, sentido estructural, estrategias, expresiones algebraicas, simplificación.

Abstract. *We analyze the structural sense evidenced by 16-18 years old students when working on algebraic expressions within the context of simplifying algebraic fractions that involve the algebraic identities square of a sum, square of a difference, difference of squares and distributive property/common factor. The identification and classification of the strategies employed by the students allow us to differentiate three actuation modes that evidence different levels of structural sense. This analysis let us to distinguish a wide spectrum of levels of structural sense and to progress in the understanding of the structural sense construct which informs about the needed skills for an efficient use of algebraic techniques in school tasks.*

Key words. algebraic expressions; algebraic identities, simplification, strategies structural sense.

Existe gran coincidencia entre diversos autores (Cerdán, 2010; Nortes y Nortes, 2010; Novotná y Hoch, 2008) en destacar la falta de capacidad de los estudiantes de educación secundaria para aplicar las técnicas algebraicas básicas en contextos distintos de los que han experimentado. En especial cabe destacar las dificultades que manifiestan para

reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas y comprender su significado; ambas capacidades se corresponden con objetivos de aprendizaje de la educación matemática en educación secundaria (NCTM, 2000; Ministerio de Educación y Ciencia, 2006). La reiterada percepción de éstas y otras dificultades puestas de manifiesto por los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas de diferentes tipos, ha ocasionado un interés creciente en la investigación en Educación Matemática por conocer cuál y cómo es el conocimiento que sobre el Álgebra escolar poseen o desarrollan los estudiantes de educación secundaria (Kieran, 2007; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Trujillo, Castro y Molina, 2009; Vega-Castro, Castro y Molina, 2010). Esta misma preocupación ha dado lugar al surgimiento del constructo *sentido estructural*, que persigue precisar las habilidades necesarias para hacer un uso eficiente, en las tareas escolares, de las técnicas algebraicas aprendidas.

En esta línea de trabajo se enmarca el estudio que aquí presentamos en el que analizamos la aplicación que de las igualdades notables hacen alumnos de primer curso de Bachillerato en la simplificación de fracciones algebraicas. Centramos nuestra atención en las igualdades notables debido a su destacada presencia en los programas de estudio de matemáticas a nivel de educación secundaria y bachillerato como consecuencia de sus frecuentes aplicaciones en otros contenidos matemáticos (ej., la simplificación de expresiones, operaciones con fracciones algebraicas, límites), en otras áreas como la física, y en estudios superiores o de nivel universitario.

SENTIDO ESTRUCTURAL

En la última década Hoch y colaboradores (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006; Novotná y Hoch, 2008) han avanzado significativamente en el análisis de las habilidades que intervienen en el trabajo con expresiones algebraicas, y han realizado varios estudios centrados en la noción de *sentido estructural*. Dicha noción surge del análisis del trabajo con expresiones algebraicas, al distinguir entre las posibles actuaciones aquellas que hacen un uso efectivo de la estructura particular de las expresiones y de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. El término *sentido estructural* refiere, de forma general, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permite hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas (Linchevski y Livneh, 1999). No se trata de un concepto nuevo, sino que enfatiza cierta forma de “poseer” el conocimiento. Se manifiesta a través de unos signos externos cuando el sujeto trabaja con expresiones aritméticas y, sobre todo algebraicas.

En 2006, Hoch y Dreyfus presentaron una definición operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de educación secundaria. La Tabla 1 recoge la definición y un ejemplo de cada uno de dichos descriptores.

Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas

Descriptor	Definición de Hoch y Dreyfus (2006)	Ejemplos (Igualdad notable: Diferencia de Cuadrados)
SS1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.	Al factorizar $81 - x^2$, • reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, • e identificar los factores.
SS2	Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.	Al factorizar $(x - 3)^4 - (x + 3)^4$ • tratar los binomios $(x - 3)^2$ y $(x + 3)^2$ como una sola entidad, • reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, • e identificar los factores implicados.
SS3	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.	En las tareas anteriores, • aplicar la igualdad notable diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ para factorizar dichas expresiones.

Tabla 1. Definición y ejemplos de los descriptores del Sentido Estructural.

ESTUDIOS PREVIOS SOBRE EL SENTIDO ESTRUCTURAL Y EL TRABAJO CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Las dificultades que los estudiantes manifiestan con las estructuras algebraicas fueron inicialmente estudiadas por Booth (1982), Wagner, Rachlin y Jensen (1984) y por Steinberg, Sleeman y Ktorza (1990) quienes pusieron de manifiesto que alumnos de educación secundaria tenían dificultades para concebir una expresión compleja como un todo y reconocer semejanzas en las estructuras de ecuaciones equivalentes, pese a mostrar facilidad para resolver dichas ecuaciones siguiendo procedimientos estándares. Booth (1982) investigó el tipo de expresiones algebraicas que los alumnos consideraban equivalentes y observó que interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto aplicando la siguiente regla: “Una expresión algebraica se resuelve siempre de izquierda a derecha, a menos que el contexto especifique que debe realizarse otra operación previamente”. Según esta regla un par de expresiones pueden ser equivalentes en un contexto y no serlo en otro.

Herscovics y Linchevski (1994) y Ruano, Socas y Palarea (2008) señalan dificultades y errores concretos que manifiestan los estudiantes al transformar expresiones algebraicas tales como la necesidad de clausura que muestran, la particularización de expresiones algebraicas dándoles valores numéricos al no encontrar sentido en el uso del lenguaje algebraico en algunos contextos, el uso inadecuado o no uso de paréntesis, la concatenación de igualdades, el fallo en la percepción de la cancelación de expresiones, falta de aceptación del signo igual como expresión de una equivalencia, un orden incorrecto de las operaciones y la separación de un número del signo operacional que le precede.

Trabajos más recientes que analizan específicamente el sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2004; 2005, 2006) destacan el escaso uso que hacen del mismo estudiantes de entre 16 y 17 años al resolver ecuaciones algebraicas especialmente diseñadas para facilitar su resolución a partir de la apreciación de estructuras dentro de la ecuación o de

uno de sus miembros, y de relaciones entre ellas (ej. $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + (\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1})$). El uso del sentido estructural fue algo mayor en el caso de alumnos de un curso previo que habían trabajado más recientemente la resolución de ecuaciones lineales, lo cual sugiere que la enseñanza tiene efecto en el desarrollo del mismo. Los autores citados identificaron la presencia de la variable en ambos miembros de la igualdad así como la presencia de paréntesis como elementos facilitadores de la percepción de estructuras por parte de los estudiantes. También observan un bajo sentido estructural en tareas de factorización de expresiones complejas utilizando la igualdad notable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ en las que los estudiantes mostraron falta de capacidad para aplicar una fórmula conocida cuando los términos implicados eran compuestos (Hoch y Dreyfus, 2005). También detectaron cierta correlación entre el sentido estructural y la habilidad para la manipulación de expresiones algebraicas, en especial en niveles bajos de ambos, y observaron que los alumnos que utilizan sentido estructural cometen menos errores de manipulación (Hoch y Dreyfus, 2006; Novotná y Hoch, 2008).

DISEÑO DEL ESTUDIO EMPÍRICO

El trabajo que hemos realizado es un estudio exploratorio cuyo objetivo es analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato al simplificar fracciones algebraicas que involucran igualdades notables, y paralelamente avanzar en la comprensión y caracterización del constructo sentido estructural.

La recogida de datos se realizó durante el curso académico 2009-2010 en un centro de educación secundaria de Granada. Los alumnos objeto de estudio fueron un grupo de 1º de bachillerato, formado por 33 estudiantes de entre 16 y 18 años, los cuales nos permitieron recoger los datos empíricos sobre los que realizamos el análisis que aquí presentamos. Previo al trabajo con este grupo se realizó una recogida de datos piloto en la que participaron dos grupos de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, con edades comprendidas entre 15 y 17 años. Esta primera recogida de datos permitió poner a punto el instrumento e identificar la necesidad de trabajar con alumnos de un curso posterior para que proporcionara más cantidad de información.

Diseño y aplicación del instrumento

Elaboramos una prueba escrita compuesta por cuatro tareas. Cada una de ellas presentaba una fracción algebraica (ver Tabla 2) que los alumnos tenían que “modificar para obtener una expresión equivalente más sencilla”. Además debían explicar lo que habían hecho.

El diseño de la prueba estuvo guiado por los descriptores de sentido estructural que señalan Hoch y Dreyfus (2006) (ver Tabla 2). El tercero de dichos descriptores nos condujo a seleccionar la simplificación de fracciones algebraicas como contexto en el cual tiene un propósito explícito plantear la manipulación de expresiones algebraicas. En este contexto la aplicación de las igualdades notables era necesaria para simplificar las fracciones propuestas. Los otros dos indicadores, SS1 y SS2, se consideran

Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas

adicionalmente, de forma separada, en el diseño de las tareas. La fracción considerada en la primera tarea está compuesta por términos simples (SS1) y las correspondientes a las tres tareas restantes están compuestas por términos compuestos, en concreto potencias y productos (SS2).

Una de las variables considerada en el diseño de las tareas fue las igualdades notables incluidas (ver Tabla 2). Las tres primeras fracciones algebraicas involucran una de dichas igualdades, mientras que la cuarta fracción algebraica involucra dos igualdades, aunque sólo una de ellas es de utilidad para simplificar la fracción.

Tarea		1	2	3	4
Igualdades Notables		Cuadrado de una diferencia	Propiedad distributiva / Factor común	Suma por diferencia	Suma por diferencia Cuadrado de una suma
Fracción Algebraica		$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x - 7)^2 (x - 7)}$	$\frac{2m(2m - 1)}{4m^5 - 2m^4}$	$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{(2x + 1)(2x - 1)}$	$\frac{(5a^2 - 1)(5a^2 + 1)}{25a^4 + 1 + 10a^2}$
Descriptores del Sentido Estructural	SS 1	X			
	SS 2		X	X	X
	SS 3	X	X	X	X

Tabla 2. Descriptores del SS utilizados en cada fracción algebraica.

RESULTADOS

Detallamos tres modelos de actuación que se detectan al analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes los cuales nos permiten describir su rendimiento en la tarea propuesta y distinguir niveles de sentido estructural puestos de manifiesto.

Modelos de actuación de los estudiantes

Clasificamos las estrategias que utilizaron los estudiantes en cada una de las tareas según tres modelos de actuación. El modelo A consta de dos pasos, con un estado intermedio además del inicial y el final (ver Figura 1). El estado intermedio presenta una fracción equivalente a la inicial en la cuál es más explícita la existencia de factores comunes entre el numerador y el denominador, y por tanto la posibilidad de realizar una cancelación de los mismos.

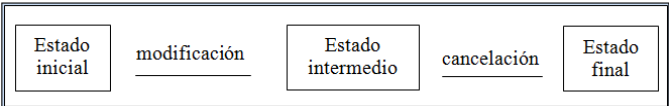


Figura 1. Esquema Modelo A

En el modelo B, en cambio, tienen lugar tres pasos: un primer estado de tránsito, otro intermedio y, un estado final (ver Figura 2). El estado de tránsito es una expresión equivalente a la fracción inicial en la cual aún no es explícita la posibilidad de cancelación de términos en el numerador y denominador o bien consiste en la ejecución de un procedimiento estándar que conduce al desarrollo o factorización de alguna de las expresiones. El estado intermedio, al igual que en el modelo A, manifiesta con mayor claridad la posibilidad de cancelación de algunos términos.

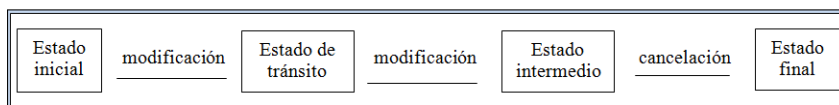


Figura 2. Esquema Modelo B

Por último distinguimos el modelo C que consta de más de tres pasos y engloba casuísticas diversas en cuanto al número de pasos y los estados que lo componen. A diferencia de los otros dos modelos éste no conduce a una simplificación de la fracción dada debido a que algunas de las transformaciones realizadas en la expresión no son correctas o no permiten la simplificación. Las diferentes estrategias que se distinguen en las producciones de los alumnos⁹⁰, se enmarcan todas dentro de alguno de estos tres modelos. Entre las estrategias distinguimos exitosas y no exitosas según conduzcan o no a la simplificación de la fracción algebraica dada, si bien en las exitosas es posible que no se llegue a tal por cometer errores de procedimiento.

Estrategias del modelo A

Las estrategias correspondientes al modelo A que se presentaron en las tareas 1, 3 y 4 consisten en la aplicación directa de una igualdad notable —cuadrado de una diferencia, suma por diferencia y cuadrado de una suma, respectivamente— tras reconocer el alumno, en el numerador o denominador, la forma extendida o desarrollada de dicha igualdad. Dicha aplicación conduce al desarrollo o factorización de una de las expresiones contenida en la fracción (ver ejemplo en Tabla 3). En la tarea 2 tuvo lugar una estrategia correspondiente a este modelo consistente en la extracción en el denominador del máximo común divisor de los monomios ($2m^4$), lo que permite simplificar en un solo paso los dos factores que aparecen en el numerador con factores comunes del denominador (ver Tabla 3).

Estado inicial	modificación	Estado intermedio	Estado final
$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$	numerador	$\frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)}$	$\frac{1}{x-7}$
$\frac{2m(2m-1)}{4m^5 - 2m^4}$	denominador	$\frac{2m(2m-1)}{2m^4(2m-1)}$	$\frac{1}{m^3}$

Tabla 3. Ejemplos de estrategias correspondientes al modelo A (tareas 1 y 2)

⁹⁰ Ver Vega-Castro, Castro y Molina, 2010 para una descripción de cada una de las estrategias que los estudiantes utilizaron en las tareas propuestas.

Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas

Estrategias del modelo B

Las estrategias correspondientes al modelo B son también exitosas en la simplificación de la fracción dada, pero requieren más de dos pasos. Este tipo de estrategias tuvieron lugar en las tareas 1, 2 y 3. En el caso de las tareas 1 y 3 dichas estrategias no implican el uso de ninguna igualdad notable. Las dos estrategias presentadas en la tarea 1 corresponden a la factorización del numerador mediante la técnica de Ruffini o mediante el uso de la fórmula de la ecuación cuadrática (ver ejemplo en Tabla 4). En la tarea 3 las estrategias difieren dependiendo de si la manipulación afecta únicamente al denominador o también al numerador, distinguiéndose dos casos. En el primer caso la estrategia consiste en el uso de la propiedad distributiva para desarrollar el denominador, y en el segundo, también implica el desarrollo del producto de suma por diferencia que aparece en el numerador.

En cuanto a la tarea 2, se presenta una situación diferente ya que la estrategias correspondiente a este modelo es análoga a la correspondiente al modelo A en tanto que sólo modifica el denominador de la fracción y se basa en el uso de la igualdad notable propiedad distributiva/factor común. Sólo difiere en la factorización del denominador. En este caso se extrae como factor común el menor de los divisores (2m), lo que implica el uso de un paso más para simplificar la fracción al no extraer en el primer paso los dos factores comunes existentes entre las expresiones del numerador y del denominador.

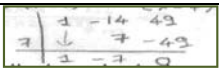
Estado inicial	Mod.	Estado de tránsito	Mod.	Estado intermedio	Canc.	Estado final
$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$	N		N	$\frac{(x-7)(x-7)}{(x-7)^2(x-7)}$		$\frac{1}{x-7}$
$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{(2x + 1)(2x - 1)}$	D	$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{4x^2 + 2x - 2x - 1}$	D	$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{4x^2 - 1}$		$4x^2 + 1$

Tabla 4. Ejemplos de estrategias correspondientes al modelo B (tareas 1 y 3)
Mod. = modificación; Canc.= cancelación; N= numerador; D=Denominador

Estrategias del modelo C

Las estrategias que se recogen dentro del modelo C no son exitosas. En este caso el estudiante realiza transformaciones que no parecen estar guiadas por ninguna anticipación de una posible simplificación de la expresión o bien cometen errores en la manipulación de las expresiones que les conducen a expresiones no equivalentes a las dadas. La Figura 3 muestra ejemplos de estrategias correspondientes a este modelo, las cuales tuvieron lugar en todas las tareas.

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^3} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^3}$$

$$\frac{2m(2m-1)}{4m^5 - 2m^4} = \frac{4m^2 - 2m}{4m^5 - 2m^4}$$

Figura 3. Ejemplos de estrategias del modelo de actuación C

Rendimiento de los estudiantes

En primer lugar describimos el rendimiento de los estudiantes en cada tarea. La Tabla 5 muestra el número y porcentaje de estudiantes que resuelven correctamente o no cada tarea. Distinguimos entre estrategias exitosas o no exitosas señalando, a su vez, los casos en los que la estrategia empleada por el alumno fue exitosa pero se cometieron algunos errores en la manipulación de las expresiones o no se concluyó la simplificación de la fracción algebraica.

El número de estrategias exitosas utilizadas fue muy alto en las tareas 1 y 3 (30 y 29 de los 33 estudiantes, respectivamente) si bien en la tarea 3 fue mayor el número de estudiantes que interrumpieron dichas estrategias o cometieron algún error en la manipulación, posiblemente debido a la dificultad de trabajar con términos compuestos, en concreto potencias. En el caso de las tareas 2 y 4 el número de estrategias exitosas utilizadas fue 23 y 15 (70% y 45%), respectivamente. En la tarea 2, un 30% de los estudiantes simplificó parcialmente la fracción algebraica siendo también alto el número de estudiantes que cometieron errores en la manipulación de las expresiones. Es de destacar el alto número de estrategias no exitosas utilizadas por los estudiantes en la tarea 4. La complejidad de esta tarea radica en que además de requerir trabajar con términos compuestos, involucra dos igualdades notables pero sólo la aplicación de una de ellas conduce a la simplificación de la fracción dada.

Estrategias Tarea	Exitosas	Exitosas Interrumpidas	Exitosas con errores	No Exitosas	No realizadas
1	21 (63.6%)	3 (9.1%)	6 (18.2%)	3 (9.1%)	0
2	4 (12.1%)	10 (30.3%)	9 (27.3%)	9 (27.3%)	1 (3.0%)
3	12 (36.4%)	7 (21.2%)	10 (30.3%)	3 (9.1%)	1 (3.0%)
4	10 (30.3%)	1 (3.0%)	4 (12.1%)	17 (51.5%)	1 (3.0%)

Tabla 5. Estrategias utilizadas en cada tarea

Niveles de sentido estructural

Teniendo en cuenta los descriptores de sentido estructural, consideramos que las estrategias que corresponden a los tres modelos descritos ponen de manifiesto diferencias de sentido estructural en los estudiantes que las utilizan, estando en orden decreciente A, B, C.

Estableciendo esta jerarquía, una vez analizados los datos, según las estrategias utilizadas en el desempeño de las tareas hemos identificado cuatro niveles de sentido estructural puestos de manifiesto por los estudiantes: nivel alto; nivel medio; nivel bajo y nivel muy bajo (ver Figura 4). Dichos niveles se han establecido en función de la cantidad de estrategias y tipo de estrategias que utilizan de los modelos indicados anteriormente.

- Nivel Alto: utilizan sólo estrategias del modelo A o todas del tipo A y una del tipo B.
- Nivel Medio: utilizan sólo estrategias tipo A y B, excluyendo los casos del nivel alto, o utilizan una estrategia tipo C y al menos dos estrategias tipo A.
- Nivel Bajo: utilizan dos estrategias tipo C y al menos una tipo A o una estrategia tipo C y menos de dos estrategias tipo A.
- Nivel Muy Bajo: utilizan al menos dos estrategias tipo C y ninguna tipo A

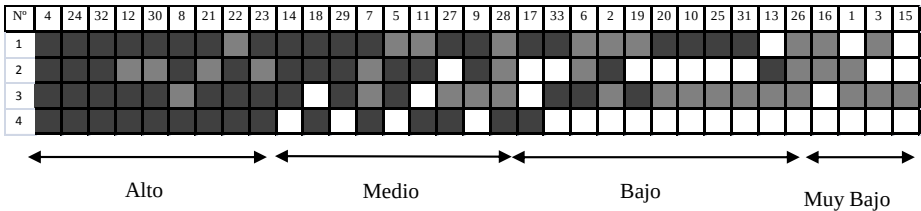


Figura 4. Nivel de sentido estructural (SE) mostrado por cada estudiante en las cuatro tareas. Cada columna corresponde a un alumno.
■=estrategia del modelo A; ▒= estrategia del modelo B; □= estrategia del modelo C

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo en este estudio es analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1° de Bachillerato en la simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. Para este objetivo la prueba diseñada ha sido de utilidad permitiendo distinguir diferentes niveles de sentido estructural a partir de las actuaciones de los estudiantes. Se observa una mayor presencia de errores de manipulación cuando las expresiones incluyen términos compuestos y una mayor presencia de estrategias no exitosas (modelo C) en las fracciones en las que entra en juego la propiedad distributiva/factor común (tarea 2) o que involucran dos igualdades notables (tarea 4).

La mayoría de los estudiantes (28) aplican las igualdades notables en una de las tareas (estrategias del modelo A y estrategia tipo B en tarea 2), siendo este uso más frecuente en la primera tarea que incluía términos simples. Detectamos un amplio espectro de niveles de sentido estructural que sugiere muy diferentes niveles de desarrollo de habilidades tales como considerar expresiones como entidades, reconocer relaciones entre las mismas tales como la igualdad, o ser factor/múltiplo una de la otra, reconocer estructuras familiares, y anticipar el efecto de una transformación en la posibilidad de cancelar términos en una expresión. Estas habilidades, identificadas e incluidas al menos implícitamente en los descriptores del sentido estructural de Hoch y Dreyfus (2006), son necesarias para hacer un uso eficiente de las técnicas algebraicas básicas en el contexto de las tareas propuestas y son un aporte de este trabajo a la caracterización del sentido estructural. Así mismo nuestros resultados contribuyen a fortalecer la validez de dicho constructo.

El modo en que se aborde el trabajo algebraico en la educación secundaria y bachillerato condicionará el grado de desarrollo del sentido estructural de los estudiantes. En el contexto de las igualdades notables, contenido que suele ser tratado como reglas fijas a memorizar, el sentido estructural destaca como un elemento clave que condiciona la utilidad y aplicabilidad de dicho contenido.

Partiendo de trabajos previos que evidencian el efecto de la enseñanza en su desarrollo, futuros trabajos que impliquen recogidas de dato más extensas y ambiciosas, se hacen necesarios para informar de cómo promover el desarrollo del sentido estructural en la educación obligatoria, seguir caracterizando dicho constructo a partir de la identificación de las habilidades que lo componen e identificar los elementos que condicionan su uso ya sean variables de tarea, aspectos cognitivos o elementos relativos al contrato didáctico, suponiendo previo su desarrollo.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

- Booth, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School*, 11(3), 5-6.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99-110.
- Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (CD). Bellaria, Italia: ERME.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th*

- Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 707- 762). NCTM.
- Linchevski, L. y Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)*, 5, 677-773.
- NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de Problemas de Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1), 317-342.
- Novotná, J., y Hoch, M. (2008). How Structure Sense for algebraic Expression or Equations is related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 93-104.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.
- Steinberg, R.M., Sleeman, D.H. y Ktorza, D. (1990). Algebra Students' Knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 112-121.
- Trujillo, P.A., Castro, E. y Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 511-521). Santander: SEIEM.
- Vega-Castro, D., Castro, E. y Molina, M. (2010). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. *Presentado en el XIV simposio de la SEIEM dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico*. Lérida, 7 al 10 de Septiembre de 2010.

Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E.

Wagner, S., Rachlin, S.L. y Jensen, R.J. (1984). *Algebra learning project: Final report*.
Athens: Department of Mathematics, University of Georgia.

**ALGUNAS IDEAS DEL PROFESORADO SOBRE ASPECTOS
RELACIONADOS CON LA INSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE
FUNCIONAL.**

**OPINIONS OF THE SECONDARY SCHOOL TEACHERS RELATIVE TO THE
INSTRUCTION OF THE CONCEPT OF “FUNCTIONAL LIMIT”**

Vidal Conde, L. A., Salinas Portugal, M. J.

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen. *Se muestran los resultados de una encuesta sobre las opiniones del profesorado de Matemáticas de secundaria en Galicia, relativa a la instrucción sobre el concepto de “Límite funcional”. En esta comunicación se presentan sólo tres aspectos relacionados con el tema de una investigación más amplia: El profesorado opina sobre el nivel adecuado en que considera se debería impartir la noción de límite de funciones en los itinerarios del Bachillerato o en la ESO; se identifican algunos referentes que utiliza en su introducción, y finalmente, se recuentan instrumentos, técnicas y herramientas que el profesorado utiliza habitualmente en la instrucción de este objeto matemático. Transversalmente se trata de ver en qué grado el contexto general del aula condiciona las estrategias, herramientas y procedimientos.*

Palabras clave: Educación Secundaria, límite de funciones, opinión del profesorado.

Abstract. *The results of a survey on the opinions of the Secondary School teachers of Mathematics in Galicia are shown, relative to the instruction of the concept of “Functional limit”. Of a wider work, only three appearances related with the subject are shown in this communication: The teachers' view on the suitable level in which it considers would have to give notion of limit of functions in the itineraries of the Secondary School; the referents that teachers use in their introduction are identified, and, finally, instruments, technical and tools that the teacher uses usually in the instruction of the mathematical object are analyzed. At the same time, the influence of the general context of the classroom in the strategies, tools and procedures is considered.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en otro más amplio sobre el concepto de límite funcional en el que se plasma, esencialmente, la descripción, aplicación y valoración de una encuesta diseñada para profesores y profesoras de Matemática de la enseñanza secundaria y Bachillerato de Galicia. En esa encuesta se buscaba información al respecto de la instrucción que realizan dichos profesores sobre el concepto de “límite funcional”. Se recogen las opiniones acerca de diversos aspectos relativos al concepto del límite de

funciones, como pueden ser: el nivel adecuado para su introducción, el rigor en la definición, las representaciones más utilizadas, los instrumentos, recursos y estrategias predominantes, etc. Por otra parte, a través de las respuestas de los entrevistados y de forma transversal, se realizó un primer análisis de la importancia que tendría, en la aplicación de los aspectos anteriormente citados, la modificación del marco actual institucional en el sentido de mejora para un marco ideal, donde las restricciones a la acción educativa fueran prácticamente inexistentes. La comunicación presentada en este congreso, se centra sólo en la explicación de la metodología, elección de muestra, diseño de la prueba y, finalmente, en el análisis de sólo tres ítems de los 16 propuestos.

Según Guillén y Figueras (2004) “hay diferentes situaciones relacionadas con la práctica educativa en las que es útil conocer las concepciones y creencias que los profesores tienen en relación con una materia escolar, los contenidos que los profesores dan, aquellos a los que les dan más importancia, aquellos para los que enfrentan dificultades”. Porque los y las profesionales que se dedican a la labor docente, especialmente en el ámbito científico, se encuentran frecuentemente con situaciones en las que la acción didáctica debe ser tremendamente cuidadosa. En el campo de la matemática y en la enseñanza secundaria, en el momento de la instrucción y dentro de las dificultades que se suponen a la comprensión de los diversos objetos matemáticos y sus propiedades, siempre incluyen algunos a los que históricamente caracterizamos como “complejos” o “de difícil comprensión”. Infelizmente, por lo general, sólo contamos con poco más que la formación académica, nuestros recuerdos y nuestra reflexión didáctica sobre la experiencia docente. Al final, en ocasiones, la práctica diaria en el aula no se corresponde con las concepciones didácticas que el propio profesorado considera más adecuadas para la labor docente.

Un hecho que nos puede iluminar en este aspecto es, por ejemplo, la diferencia entre los enfoques de los Diseños Curriculares, que insisten en la importancia de la comprensión de los conceptos matemáticos a través principalmente de métodos conectados a la resolución de problemas y la realidad de una debilidad semiótica (Cajaraville et al., 2003) del aula “decantándose para la práctica rutinaria de ejercicios algorítmicos, con clara predominancia del marco aritmético-algebraico” (p. 69)

El objeto de estudio fue hacer un diagnóstico inicial de la situación: ¿Cómo considera el profesorado que debe ser impartido el concepto de límite funcional? ¿A qué edad considera más adecuada su instrucción? ¿Con qué rigor y bajo qué representaciones? ¿Con qué instrumentos y estrategias? En el campo de la práctica docente, a menudo reflexionamos sobre el grado de mejora significativa del proceso de enseñanza-aprendizaje si el marco de referencia o institucional en el que nos movemos cambiase considerablemente. Programas amplios, horarios reducidos, atención a la diversidad, disminución del nivel de exigencia, falta de apoyos y recursos tecnológicos, ratios elevadas, desprestigio social del profesorado... son muchas veces señaladas como causas o impedimentos para una mejor práctica docente. En este trabajo se evaluó, transversalmente, la importancia que el profesorado otorga a estas cuestiones.

OBJETIVOS

El objetivo principal es avanzar en el conocimiento de los factores y fenómenos didácticos que acompañan al profesorado de Enseñanza Media de Galicia, al poner en práctica los mecanismos para la instrucción del objeto matemático “Límite funcional”.

Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional

Como objetivo secundario y transversal, aportar elementos de comparación en la disfuncionalidad referida por el profesorado en el momento de la instrucción, motivada por condicionantes de tiempo y materiales de apoyo.

Se analiza comparativamente las opiniones del profesorado desde una perspectiva realista (situación actual), condicionada por los elementos de la Institución, frente a otra que denominamos *situación ideal*, donde las dificultades técnicas, de materiales, tiempo y programa serían las “ideales” para la acción instructiva. Interesa saber en qué grado el contexto general del aula condiciona las estrategias, herramientas y procedimientos, susceptibles de ser aplicados en una situación hipotética de mejora de las condiciones. Como objetivos específicos para el estudio, en esta comunicación, resaltaremos: 1. Determinar el nivel adecuado en que considera que debe introducirse la noción de límite de funciones. 2. Identificar algunos referentes reflexivos que el profesorado utiliza previamente a su introducción. 3. Analizar instrumentos, técnicas y herramientas que el profesorado utiliza realmente en la instrucción del objeto matemático. La comparación con las que afirma utilizaría en una hipotética “Situación ideal”, aportaría una medida aproximada de las carencias advertidas, desde el punto de vista programático, organizativo o tecnológico.

MARCO TEÓRICO

El plan de trabajo debe estar estructurado desde el inicio para obtener las respuestas a los interrogantes de un estudio en el sentido en el que Kerlinger (1979:83) llama diseño de una investigación. Por sus objetivos, el presente trabajo de investigación abarca una variedad de aspectos, todos relacionados con la instrucción del concepto, pero a su vez de diversa naturaleza. De la misma forma en que el concepto de límite funcional fue evolucionando a lo largo del tiempo, desde una presencia no explícita hasta una formalización rigurosa, si atendemos a la didáctica del concepto, es decir, a la forma en que el concepto de límite funcional es tratado en la instrucción docente, observamos claramente que esta se vio condicionada por la concepción de la enseñanza de las matemáticas en cada momento histórico. Las variaciones se relacionan directamente con las producidas en el contexto (cambios de programas, reorganizaciones del sistema educativo, decretos ministeriales, debates didácticos, etc.). Sierra, González y López (1999) analizan la evolución en un periodo de más de 70 años del concepto de límite funcional a través de los libros de texto, que marcarían la pauta de muchas representaciones del concepto por parte del profesorado. La siguiente tabla resume algunas características de esta evolución.

	<i>Periodo 1940-1967</i>	<i>Periodo matemáticas modernas (1967-75)</i>	<i>Periodo BUP-COU (1975-1995)</i>	<i>Periodo LOPEG-LOCE-LOGSE-LOE (actual)</i>
<i>Ley en vigor</i>	<i>Plan de 1938 y plan de 1953</i>	<i>Decretos con modificaciones puntuales de planes anteriores.</i>	<i>Ley General de Educación y Financiación de la Reforma Educativa (Villar Palasí) (1970)</i>	<i>LOE, una norma que funde la LOGSE, la LOPEG y la LOCE,</i>
<i>¿En qué momento se introduce el concepto de límite? Curso/edad</i>	<i>6º curso / 16 años</i>	<i>5º curso (introducción) 6º curso (desarrollo)</i>	<i>2º curso de BUP/ 15-16 años.</i>	<i>1º curso de Bachillerato / 17 años</i>
<i>¿Con qué rigor?</i>	<i>Fuerte componente intuitivo</i>	<i>Avance a un mayor formalismo</i>	<i>Formalista quedado con representaciones gráficas.</i>	<i>Intuitiva en matemáticas aplicadas las CC.SS; formalista en Matemáticas II</i>
<i>¿Qué tipo de definición predomina?</i>	<i>Infinitésimos/ sucesiones unidas a variables</i>	<i>Topológica.</i>	<i>Métrica. Secundariamente, por sucesiones.</i>	<i>Métrica / por sucesiones</i>
<i>¿Basadas en qué teorías de enseñanza-aprendizaje?</i>	<i>Enseñanza tradicional: memorización de definiciones, propiedades y práctica.</i>	<i>Teoría bourbakista: Estructuras algebraicas, de orden y topológicas</i>	<i>Formalista estructuralista. Influida por psicólogos cognitivos (Piaget, Bruner)</i>	<i>Constructivista (el alumnado debe aprender solo y el profesor debe ayudarlo a descubrir las cosas)</i>
<i>Fenomenología.</i>	<i>Escasa y unida a la geometría.</i>	<i>Sólo de casos relativos a las matemáticas.</i>	<i>Abundante, relativo la vida real y otras ciencias</i>	<i>Abundante, pero poco utilizada en la práctica.</i>

Tabla nº 1: Evolución de la didáctica del concepto en los libros de texto.

La investigación educativa tiene como uno de los principales focos de interés las creencias de los profesores como “factores determinantes de su práctica profesional y de sus acciones en el aula” (Gil, Rico y Fernández, 2002: 50). La incertidumbre o descontento en el resultado hace que el profesor analice su experiencia, durante y después de la acción educativa. La reflexión se producirá si el profesor cuenta con actitudes acordes al proceso reflexivo (responsabilidad, interés, mente abierta) y con herramientas de pensamiento ordenado. En palabras de Dewey (1989: 98), “La función del pensamiento reflexivo es la de transformar la situación en la que se experimenta

Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional

oscuridad, duda, conflicto o algún tipo de perturbación, en una situación clara, coherente y armoniosa”. En este sentido “la memoria didáctica son claves para interpretar las decisiones del profesor con vistas a la determinación de procesos idóneos de estudio de las matemáticas” (Lacasta y Wilhelmi, 2010: 382).

Resulta esencial el papel de la reflexión epistemológica sobre la naturaleza de la Matemática y de sus consecuencias para el aprendizaje (Ponte, 1994). El autor considera que es necesario dar un lugar de preponderancia a las prácticas reales frente a las concepciones. En este aspecto el papel de las nuevas tecnologías será la mediadora en la transformación de las prácticas pedagógicas, siempre bajo una orientación didáctica. Por eso se deben primar los proyectos profesionales individuales, la reflexión y el intercambio de experiencias. Autores como Contreras y García, (2008) estudian la trayectoria instruccional de clases en el concepto de límite funcional para concluir la complejidad ontosemiótica del proceso de enseñanza.

El material didáctico es entendido por Gimeno, (2000) como recurso para el aprendizaje o para el desarrollo de alguna función de la enseñanza. Viseu y Ponte (2009) distinguen entre materiales manipulables (cosas que el alumno es capaz de sentir, tocar, manipular y mover) y materiales tecnológicos. La fuerte presencia en la sociedad actual aconseja la utilización de estos últimos en las clases de Matemáticas; más allá de permitir la realización “de cálculos de un modo eficiente, facilita la organización y análisis de datos, suministra imágenes visuales de los conceptos matemáticos y apoya la actividad exploratoria e investigadora de los alumnos en la realización de sus trabajos”.

METODOLOGÍA

Se utilizó una metodología descriptiva de tipo encuesta en la que se administró un cuestionario para ser respondido de forma *on-line* por una muestra de la población en estudio. Partimos de un cuestionario previo abierto, donde se recogen las preguntas básicas objeto de estudio relacionadas con el concepto de límite funcional. Este fue elaborado sobre una serie de posibles respuestas obtenidas de las diferentes concepciones que el profesorado normalmente manifiesta en lo que concierne al tema en cuestión.

Una vez elaborado este cuestionario previo y depurado, eliminando cuestiones repetitivas, redundantes, o poco significativas, fue aplicado por primera vez a un conjunto pequeño de profesores del entorno de los autores, para determinar tanto posibles fallos en la estructura de la encuesta *on-line* como incoherencias manifestadas en la formulación de las respuestas.

Cuestionario

A) Elaboración: Las etapas seguidas quedan resumidas en los siguientes pasos: A1) Modificación del cuestionario inicial con las modificaciones de esta primera aplicación. A2) Validación del cuestionario inicial por parte de un comité de expertos. A3) Versión definitiva del cuestionario abierto, con las incorporaciones y modificaciones apuntadas por el comité de expertos.

B) Aplicación del cuestionario. Pasos seguidos: B1) Estructuración y elaboración de la encuesta *on-line*, e incorporación a una página web insertada en el aula virtual del IES San Paio. B2) Elección de la muestra entre los institutos de enseñanza media públicos, con enseñanza de Bachillerato, de Galicia. B3) Elaboración de un documento explicativo del proyecto para ser enviado a los diferentes directores/as de Departamento de Matemáticas de los institutos que forman parte de la muestra. En ese documento también se indica el proceso mediante el cual el profesorado puede acceder a la encuesta *on-line* con el objeto de ser aplicado. B4) Contacto personal y/o telefónico con todos los directores del Departamento de los centros de la muestra. Se envió un resumen del proyecto, junto a las indicaciones de acceso a la encuesta *on-line*. Mediante una clave y un código de control que relacionaba el tipo de centro de enseñanza de la muestra con el entrevistado, este procedía a llenar el cuestionario. El proceso tuvo lugar durante 10 días del mes de Junio de 2010.

Población y muestra

La población objeto de nuestro estudio está formada por los profesores y profesoras de Matemáticas de los centros públicos de enseñanza de ESO y Bachillerato de Galicia.

La elección de la muestra fue hecha a partir de conglomerados, una forma de selección muy utilizada porque “en muchos casos facilita la recogida de información (...) y puede utilizarse combinada con otros procedimientos” (Etzeberria y Tejedor, 2005: 254). Se procedió de la siguiente forma:

1) Se hizo un recuento del número de centros de enseñanza públicos, que imparten la ESO y el Bachillerato en Galicia. Son 219.

2) Se ordenaron y clasificaron los centros atendiendo a las siguientes categorías:

Provincias. La población se considera configurada por cuatro estratos que se corresponden con cada una de las provincias gallegas.

Núcleos de población. Estos, por su parte, distribuidos en *villas* y poblaciones de cada provincia y en las siete grandes ciudades gallegas. La mayor parte de la población gallega se encuentra agrupada en torno a las siete grandes ciudades, que actúan como polo en una distribución poblacional que abarca principalmente la costa y algunas poblaciones medianas del interior.

4) Actuando proporcionalmente y considerando que deberíamos elegir al menos un IES en cada una de las siete ciudades gallegas, la muestra de centros escogidos comprendía un total de 32, distribuidos de la siguiente forma:

Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional

Coruña				Lugo		Ourense		Pontevedra		
Coruña	Ferrol	Compostela	Resto provincia	Lugo	Resto provincia	Ourense	Resto provincia	Vigo	Ponte vedra	Resto provincia
2	1	1	8	1	4	2	3	2	1	7
12				5		5		10		
32										

Tabla nº 2: Distribución de los Centros de la muestra.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

De los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario a los 112 profesores y profesoras de Matemática finalmente encuestados, sólo incluimos aquí los de los ítems seleccionados para esta comunicación.

1º ¿En qué nivel o curso considera que se debería introducir el concepto de límite funcional?

	SITUACIÓN ACTUAL (A)	SITUACIÓN IDEAL (B)
	Porcentaje	Porcentaje
En el primer ciclo de la ESO	1	1
En tercero de ESO	1	11
En cuarto de ESO	37	52
En 1º de Bachillerato de ciencias	68	46
En 2º de Bachillerato de ciencias	12	12
En 1º de Bachillerato de CC.SS.	59	41
En 2º de Bachillerato de CC.SS.	14	11
No debería introducirse.	0	1

Tabla nº 3: Porcentaje de respuestas al ítem: ¿A qué nivel debería introducirse el concepto?

El análisis de las respuestas a esta pregunta aporta un dato significativamente interesante: Observamos que, con las condiciones y entorno actuales, sólo 37% de los profesores consideran posible iniciar la instrucción del concepto de límite funcional en 4º curso de la ESO. Ese porcentaje aumenta más de la mitad si las condiciones fueran ideales (hipotéticas situaciones de flexibilidad programática, horaria, e instrumentos de apoyo convenientes). Obviamente, dadas esas condiciones ideales, y al aumentar el porcentaje del profesorado decidido a introducir el concepto en 4º de ESO, disminuirá la de aquellos que escogerían los niveles que la legalidad actual contempla (1º de Bachillerato, tanto de Ciencias como de Ciencias Sociales).

2ª. ¿Cuáles son los instrumentos (material didáctico) que usualmente utiliza (o utilizaría en la situación ideal) para la instrucción del objeto matemático “Límite Funcional”?

	ACTUAL	IDEAL		ACTUAL	IDEAL
	(A)	(B)		(A)	(B)
Tiza blanca	78%	50%	Calculadora gráfica	6%	29%
Tiza de colores	47%	39%	D. V. D.	4%	11%
Libro de texto	61%	37%	Encerado Digital	21%	70%
Cuaderno de actividades del alumnado	43%	37%	Proyector	21%	38%
Cuaderno de actividades de editoriales	6%	6%	Presentaciones de elaboración propia	13%	45%
Encerado tradicional	79%	46%	Presentaciones de elaboración ajena	7%	30%
Calculadora científica	60%	52%	Aula de informática	20%	61%
Calculadora científica programable	1%	14%	Programas informáticos	27%	69%

Tabla nº 4. Instrumentos para la instrucción.

Las respuestas permiten formular las siguientes hipótesis:

1) El profesorado utiliza preferentemente instrumentos tradicionales en la actualidad (pizarra tradicional, calculadoras científicas, cuaderno de actividades...) para la instrucción del concepto. Sólo uno de cada cinco utiliza en la actualidad las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías, como encerado digital, salas de aulas de informática o programas informáticos.

2) El profesorado admite -como observamos en la columna dos- que si las circunstancias del contexto mejoraran, en una situación ideal, la tecnología tradicional podría verse sustituida por las nuevas tecnologías. Los porcentajes de

Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional

utilización de estas últimas se triplicarían al menos, en el peor de los casos. Las comparaciones entre las columnas A y B, parecen apuntar en ese sentido.

3. Evalúe de uno a cinco la importancia en que considera están presentes, en su caso, los siguientes referentes en el momento de la instrucción del concepto de “Límite funcional”: (1- poco presente; 5- muy presente)

		$\bar{X}$	s	C.V(%)	C.a.	CK
P14.1	La forma en que me ha sido explicado en el Bachillerato	2,57	1,18	46,05	0,2	0,17
P14.2	Mis propias lagunas o dificultades al aprender en el Bachillerato	3,19	1,25	39,35	-0,38	0,25
P14.3	Lo aprendido en mis estudios universitarios	3,06	1,12	36,42	-0,09	0,33
P14.4	Lo que aparece en los libros de texto	2,64	1,02	38,84	0,13	0,17
P14.5	Las dificultades, reacciones y resultados de mi alumnado los años precedentes	4,47	0,78	17,5	-1,73	0,25
P14.6	Lo aprendido en cursos de formación y actualización del profesorado	2,04	1,08	53,05	0,82	0,33
P14.7	La ayuda de la informática y de las nuevas tecnologías	3,37	1,2	35,5	-0,44	0,17
P14.8	La lectura e investigación personal	3,49	1,11	31,9	-0,47	0,17
P14.9	Otros	2,89*	1,79*	62,02*	0,05*	0,5*

Tabla nº 5: Referentes en la instrucción del concepto.

Claves: $\bar{X}$ Media; s, desviación típica; CV, Coeficiente variación; Ca, coeficiente asimetría; CK, coeficiente curtosis de Kelley

*Nota:- Los parámetros obtenidos para P14. 9, son calculados sólo para los 18 entrevistados que escogieron esta opción

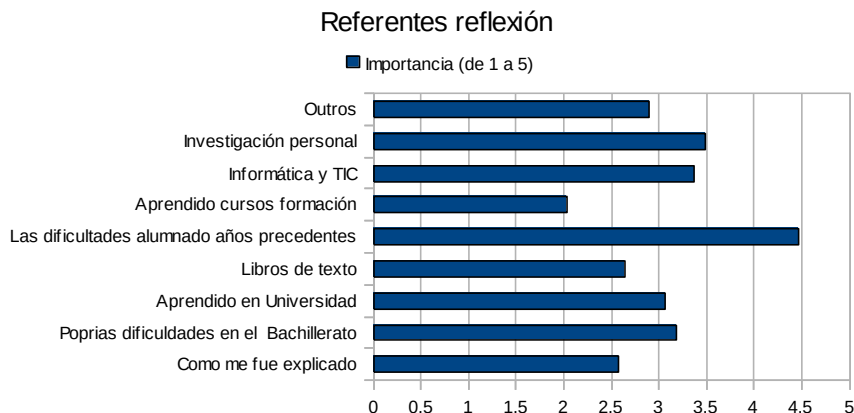


Figura nº 1: Gráfica de referentes en la instrucción del concepto

En el campo de los referentes utilizados en la práctica diaria a la hora de abordar la instrucción del concepto de límite funcional, podemos observar claramente que la reflexión -que Van Manen (1977) calificaría como técnica- se centra fundamentalmente en las dificultades y reacciones del propio alumnado en los cursos precedentes. Con una puntuación media muy alta, próxima a 4,5, y una desviación significativamente baja, se sitúa muy por encima de los demás referentes indicados. Podemos formular la hipótesis de que el profesor actúa en cada curso, reflexiona sobre los resultados obtenidos y modifica los elementos que considera adecuados para mejorar la instrucción en los cursos siguientes. Por otra parte destacan los referentes relacionados con la lectura e investigación personal sobre el tema, acerca de las nuevas tecnologías y el llamado “efecto recuerdo” de las dificultades que el profesor tenía en el momento en que se enfrentó con el concepto en sus estudios de Bachillerato.

En una media muy inferior a 3 se sitúan los relacionados con los libros de texto, la forma en que fue instruido el propio profesor durante el Bachillerato, y sobre todo, lo aprendido en cursos de formación y actualización del profesorado. Estos últimos tampoco parecen ser efectivos para los profesores entrevistados en lo que concierne al tema investigado (2,04). En el apartado de *P14.9 Otros*, las respuestas especificadas son, por lo general, reiterativas, algunas de las cuales deberían haber sido marcadas, por los entrevistados, en apartados anteriores.

CONCLUSIONES

Casi la totalidad del profesorado se manifiesta a favor de introducir el concepto de límite funcional en la Educación Secundaria. La mayoría de ellos incluso consideran adecuado el nivel correspondiente al último curso de la ESO, si se dieran las condiciones adecuadas. Tenemos así una clara divergencia entre las opiniones de los docentes y la planificación del currículo en relación con la educación secundaria.

En la situación actual, el profesor utiliza preferentemente para la instrucción objetos manipulables y no tradicionales en el sentido de Viseu y Ponte (2009). Sólo el 60% considera el uso de calculadora científica, y en torno al 20% el de los instrumentos relacionados con las nuevas tecnologías.

Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional

Los factores de motivación en el proceso de reflexión pedagógica son, con diferencia, los derivados de las dificultades, reacciones y resultados del alumnado durante la acción educativa.

Referencias.

- Cajaraville, A., y otros (2003). Evaluación del currículo de Matemáticas en el 2º ciclo de la ESO. ICE. USC, 2003.
- Contreras de la Fuente, A y García Armenteros, M. (2008). Trayectoria instruccional de un proceso de estudio sobre el límite de una función. *Actas del Investigación en Educación Matemática XII* Badajoz. SEIEM
- Dewey, John (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona, Paidós
- Etxeberria, J. y Tejedor, F.J. (2005) *Análisis descriptivo de datos en educación*. La Muralla. 2005
- Gil, F., Rico, L. e Fernández, A. (2002). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre evaluación en matemáticas. *Revista de Investigación Educativa*. Vol. 20, nº 1, pp. 47-75
- Gimeno, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed.
- Guillén, G. y Figueras, O. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta. *Actas del octavo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)*. Coruña: Universidade da Coruña.
- Kerlinger, F. (1979). Enfoque conceptual de la investigación del comportamiento. México : Nueva Editorial Interamericana
- Lacasta, E., Wilhelmi, M.R. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379-394). Lleida: SEIEM.
- Ponte, J. P. (1994). O professor de Matemática: Um balanço de dez anos de investigação. *Quadrante*, 3(2), 79-114
- Sierra Vázquez, González Astudillo, y López Esteban (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias*, 1999, 17 (3), 463-476
- Van Manen, M. (1977). Linking ways of knowing with ways of being practical. *Curriculum Inquiry*. 6, pp. 205-228.
- Viseu, F y Ponte, J.(2009). Desarrollo del conocimiento didáctico del futuro profesor de Matemática con apoyo das TIC's. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Relime v.12 ,n.3. México.2009.

NIVEL DE ÉXITO Y FLEXIBILIDAD EN EL USO DE ESTRATEGIAS RESOLVIENDO PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PAUTAS LINEALES

LEVEL OF SUCCES AND FLEXIBILITY IN THE USE OF STRATEGIES SOLVING PROBLEMS OF GENERALIZATION OF LINEAR PATTERNS

Zapatera Llinares, A., Callejo, M. L.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Universidad de Alicante

Resumen. *En esta comunicación se analizan, se clasifican y se comparan las estrategias que han utilizado 96 alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) en el proceso de generalización de una situación en la que debían identificar un patrón y continuar el proceso. Se ha analizado el nivel de éxito y la flexibilidad en el uso de estrategias para responder a los distintos apartados. Los resultados muestran que las estrategias más utilizadas han sido las aditivas y las más eficaces las funcionales, y que la dificultad mayor de los estudiantes fue encontrar una regla general. Por otra parte los alumnos con mayor nivel de éxito presentaron una mayor flexibilidad en la utilización de las estrategias.*

Palabras clave: estrategia, generalización, pauta lineal, flexibilidad, resolución de problemas

Abstract. *This communication describes, classifies and compares the strategies used by 96 students of secondary school (12-16 years) in the process of generalization of a situation in which the students have to identify a pattern and continue the process. We analyzed the level of success and the flexibility in the use of the strategies to respond to different sections. The results show that the strategies most used have been the additives and the most effective the functional, and that the greatest difficulty for students was to find a general rule. Moreover the students with greater level of success showed greater flexibility in the use of strategies.*

Key words: strategy, generalization, lineal patterns, flexibility, problem solving

1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas se considera una parte importante de la actividad matemática (Polya, 1965) y Santaló (1985) equiparaba enseñar matemáticas a enseñar a resolver problemas. La generalización, es decir la observación de pautas y la obtención de una regla general, es una de las estrategias más interesantes para resolver problemas. Generalizar consiste en universalizar una propiedad observada en un número limitado

de casos al caso general, lo que exige identificar pautas y regularidades en casos particulares, expresar una regla general en lenguaje verbal o algebraico y justificar por qué funciona la regla. Un tipo particular de generalización es la generalización lineal, que consiste en identificar en una sucesión numérica, o en figuras, un patrón que equivale a una función lineal o afín.

La identificación de patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre diferentes lenguajes son fundamentales desde los primeros cursos de la Educación Secundaria (BOE número 5 de 5/1/2007). Esta comunicación trata del proceso de generalización en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) al enfrentarse con un problema de generalización lineal; en concreto, se estudian los niveles de éxito, las estrategias que utilizan y la flexibilidad en su uso.

2. MARCO TEÓRICO

La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática. Para Mason, Burton y Stacey (1992), “las generalizaciones constituyen el verdadero nervio de la matemática” (p. 21) y para Polya (1965) “la generalización consiste en pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado” (p. 97).

Dörfler (1991) ha acuñado el concepto de *generalización operativa* a partir del concepto de *abstracción reflexiva* de Piaget (1987), por medio del cual se explica el desarrollo y la construcción de la generalización. Ellis (2007) ha elaborado una taxonomía de la generalización en la que establece dos categorías: las acciones de generalización, que describen los procesos mentales de los estudiantes (relacionar, buscar y extender) y las generalizaciones de reflexión, con las que los estudiantes explican propiedades, patrones o relaciones de similitud y las aplican a nuevas situaciones (identificación, definición y transferencia).

Denominamos “problemas de generalización lineal” a aquellos que describen una situación que contiene en el enunciado un dibujo o figura que proporciona los primeros términos $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... de una progresión aritmética y se pide a los alumnos calcular $f(n)$ para n “pequeño” y para n “grande” y obtener la regla general. El término general viene dado por una función lineal o afín.

En este tipo de problemas, Stacey (1989) distingue entre tareas de “generalización cercana” que piden buscar el siguiente término u otro término que puede ser obtenido mediante recuento, o haciendo un dibujo o una tabla, y las tareas de “generalización lejana”, que requieren la identificación de un patrón o pauta general. Esta autora ha identificado tres tipos de estrategias de generalización: (1) aproximación recursiva, (2) expresión matemática de una relación funcional y (3) utilización de un razonamiento proporcional incorrecto.

García-Cruz (1998), utilizando la descomposición genética (Dubinsky, 1991) ha identificando tres niveles de generalización: (1) actividad procedimental: reconocimiento del carácter iterativo o recursivo del modelo lineal que se traduce en hacer un recuento o añadir la diferencia constante; (2) “generalización local”: uso de una regla para un cálculo específico y (3) “generalización global”: transformación de la regla usada en tareas anteriores en un objeto que se aplica en nuevas situaciones. El paso de un nivel a otro exige cambiar de estrategia, por lo que un aspecto importante en

Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategia resolviendo problemas de generalización de pautas lineales

la resolución de problemas de generalización lineal es la flexibilidad en el uso de estrategias.

Gran parte de las investigaciones sobre la generalización han estudiado las estrategias empleadas por los alumnos, los niveles de generalización, los obstáculos, el papel de los ámbitos numérico y visual-geométrico en el desarrollo de la generalización y la introducción del lenguaje algebraico (Cañadas, Castro y Castro, 2007; García Cruz, 1998; García Cruz y Martínón, 1999; Orton y Orton, 1994; Rivera y Becker, 2008; Roig y Llinares, 2008; Stacey, 1989). En la resolución de problemas de generalización lineal se han identificado diferentes estrategias; algunas de estas estrategias son válidas para tareas de generalización cercana, pero no son competentes en tareas de generalización lejana y en la obtención de la regla general. Por ello es importante investigar la flexibilidad de los alumnos para cambiar de estrategia y su conocimiento para usar el lenguaje algebraico y funcional en determinadas estrategias.

El objetivo de esta investigación es identificar las estrategias que utilizan alumnos de 1º a 4º de la ESO (12-16 años) para responder a un problema de generalización lineal donde se propone un cuestionario con creciente grado de dificultad y analizar el éxito de cada una de ellas y la flexibilidad de los alumnos para cambiar de estrategia.

3. MÉTODO

3.1 Participantes

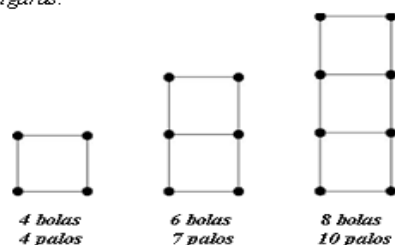
La investigación se ha realizado con 96 alumnos de 1º a 4º de la E.S.O. del IES “Malladeta” de la Vila Joiosa (Alicante). Las cuatro clases analizadas pertenecen a la opción PEV (Programa de Enseñanza en Valenciano) y el área de matemáticas está impartida por el mismo profesor.

Cuando se aplicó el cuestionario, los alumnos de 1º no habían trabajado aún el lenguaje algebraico y a los de 2º se les había hecho una introducción a las funciones y los distintos lenguajes con los que se pueden representar.

3.2 Instrumento de recogida de datos

Los datos son las respuestas de los estudiantes a un problema de generalización lineal similar a los propuestos en otras investigaciones (Stacey, 1989; García Cruz, 1998) (Figura 1).

Observa las siguientes figuras:



Como puedes ver en la imagen, la figura de un cuadrado necesita 4 bolas y 4 palos, la figura de dos cuadrados necesita 6 bolas y 7 palos y la figura de tres cuadrados necesita 8 bolas y 10 palos.

1. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadrados?
2. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadrados?
3. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadrados?
4. Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el número de bolas
5. Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el número de palos

Figura 1. Problema propuesto

Las tareas 1 y 2 piden una “generalización cercana”, se pueden resolver de forma sencilla mediante recuento, apoyándose en un dibujo o haciendo una tabla, y ayudan a observar el patrón. La tarea 3, de “generalización lejana”, se puede resolver con las mismas estrategias, pero son poco eficientes por lo que es más conveniente buscar una relación entre el número de cuadrados y el de bolas o de palos. Las tareas 4 y 5 piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica.

Elegimos este problema porque está expresado en forma verbal y gráfica y pueden resolverlo con éxito todos los alumnos de secundaria, desde 1º a 4º. La forma gráfica puede servir de apoyo en las estrategias aditivas y los alumnos de 1º y 2º, que no conocen o no dominan suficientemente el lenguaje algebraico, pueden expresar la regla general en lenguaje verbal.

3.3 Análisis de datos

Las respuestas se analizaron con base a dos criterios: corrección de las respuestas y estrategias de solución. Las respuestas se consideraron correctas si tanto el procedimiento como la solución eran correctos, aunque el procedimiento no fuese el más eficiente; en cualquier otro caso se han considerado incorrectas. Las estrategias empleadas se han clasificado en cuatro categorías (García Cruz, 1998).

I. Estrategias aditivas [EA]	{	1. Recuento [R]	{	a. Con f(1)	[C1]
		2. Proceso iterativo [PI]		b. Sin f(1)	[S1]
		3. Proceso recursivo [PR]			
II. Estrategias funcionales [EF]	{	1. Generalización local [GL]			
		2. Generalización global [GG]			
III. Razonamiento proporcional [RP]					
IV. Otros (O)					

Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategia resolviendo problemas de generalización de pautas lineales

Figura 2. Estrategias de resolución

I. En la **estrategia aditiva** el estudiante observa que en cada paso aumenta una diferencia constante. Se distinguen tres tipos:

I.1. Recuento: se cuentan directamente los elementos de uno en uno sobre un dibujo o se construye la sucesión hasta el término requerido

I.2. Proceso iterativo: se reconoce y se utiliza el carácter iterativo de la pauta lineal

I.2.a. Con $f(1)$: a partir de los elementos del primer cuadrado, se suma la diferencia, es decir, el estudiante suma 2 bolas o 3 palos por cada cuadrado que añade

I.2.b. Sin $f(1)$: no se observa la particularidad del primer cuadrado y el estudiante se limita a sumar 2 bolas, o 3 palos, por cada cuadrado que añade

I.3. Proceso recursivo: se reconoce y utiliza el carácter recursivo de la pauta lineal y se halla el número de elementos sumando 2 bolas o 3 palos a los elementos del término anterior o de un término conocido

II. En la **estrategia funcional** el estudiante utiliza una expresión para hallar el número de elementos de cada caso. Puede ser:

II.1. Generalización local: se utiliza la expresión para hallar los elementos de un determinado número de cuadrados

II. 2. Generalización global: se utiliza la expresión para hallar los elementos de cualquier número de cuadrados

III. En el **razonamiento proporcional** el alumno halla, erróneamente, el número de elementos mediante razonamientos proporcionales con multiplicaciones o reglas de tres.

4. RESULTADOS

Los resultados obtenidos en los apartados referidos al recuento de bolas y palos en las distintas tareas son muy semejantes por lo que se presentarán los resultados obtenidos en los apartados de recuento de bolas.

4.1 Niveles de éxito por tareas y curso

	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	Media
Tarea 1	96	89	95	97	95
Tarea 2	74	68	81	83	77
Tarea 3	41	42	43	45	43
Tarea 4	11	16	19	38	22

Tabla 1.- Niveles de éxito por tareas y curso en porcentajes

Se puede observar en la Tabla 1 que el éxito obtenido descende al aumentar la

dificultad de las tareas, siendo este descenso muy pronunciado al llegar a la tarea 4 (hallar la regla general). Prácticamente la totalidad de los alumnos, 95%, responde correctamente a la primera tarea, mientras que sólo el 22% responde correctamente la tarea 4. Por otra parte el éxito aumenta a medida que aumentan los cursos, siendo la diferencia más significativa el salto que se produce en la tarea 4 al pasar de 3º a 4º curso

4.2 Utilización y éxito de las estrategias

La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos por los alumnos de los cuatro cursos en todas las tareas planteadas en el problema y clasificadas según las estrategias utilizadas. Estas estrategias están representadas por las abreviaturas del apartado 3.3 y en la columna 'B' se recogen las respuestas en blanco. El primer número de cada celda corresponde a los alumnos que han realizado cada tarea usando la estrategia correspondiente, y el número que aparece entre paréntesis al número de alumnos que han realizado correctamente la tarea.

Tarea	Curso	B	EA				EF		RP	O	Total
			R	PI		PR	GL	GG			
				C1	S1						
1	1º		21(20)	3(3)		3(3)					27(26)
	2º		18(16)			1(1)					19(17)
	3º		16(16)			4(4)			1(0)		21(19)
	4º		20(19)	1(1)		7(7)	1(1)				29(28)
	Total		75(71)	4(4)		15(15)	1(1)		1(0)		96(90)
2	1º		21(15)	3(3)	1(0)	2(2)					27(20)
	2º		15(12)			1(1)			3(0)		19(13)
	3º		15(14)			3(3)			3(0)		21(17)
	4º		19(16)	1(1)		4(4)	3(3)		2(0)		29(24)
	Total		70(57)	4(4)	1(0)	10(10)	3(3)		8(0)		96(74)
3	1º		20(7)	3(3)	1(0)	1(1)			2(0)		27(11)
	2º		12(6)	2(2)					5(0)		19(8)
	3º		12(7)	1(1)		1(0)	1(1)		6(0)		21(9)
	4º		14(6)	3(1)		3(3)	3(3)		6(0)		29(13)
	Total		58(26)	9(7)	1(0)	5(4)	4(4)		19(0)		96(41)
4	1º	10(0)		4(3)	11(0)				2(0)		27(3)
	2º	5(0)		3(3)	11(0)						19(3)
	3º	3(0)		1(1)	6(0)			3(3)	2(0)	6(1)	21(4)
	4º	1(0)		6(5)	8(0)			5(5)	2(0)	7(1)	29(11)
	Total	19(0)		14(12)	36(0)			8(8)	6(0)	13(2)	96(21)

Tabla 2.- Frecuencias absolutas de las estrategias utilizadas por tareas y cursos

Destacamos de la Tabla 2 que la estrategia más utilizada en todas las tareas y en todos los cursos ha sido la estrategia aditiva (EA), cuyo uso desciende al aumentar la dificultad de la tarea y el curso. Por el contrario, la utilización de la estrategia funcional (EF) aumenta a medida que aumenta la dificultad de la tarea y el curso.

Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategia resolviendo problemas de generalización de pautas lineales

La estrategia más eficaz ha sido la estrategia funcional, aunque muy pocos alumnos y sólo los de 3º y 4º, han sido capaces de utilizarla. La eficacia de la estrategia aditiva ha sido muy similar en los cuatro cursos, aunque resulta laboriosa para aplicarla en la generalización lejana y no ayuda a obtener la regla general. El éxito del razonamiento proporcional ha sido nulo, al tratarse de una función afín.

Dentro de la estrategia aditiva, el recuento es el procedimiento más usado en las tres primeras tareas, descendiendo su utilización al aumentar la complejidad de éstas y siendo nula su utilización en la obtención y expresión de la regla general.

En las tres primeras tareas ningún alumno responde en blanco (B), en cambio el 20% de los alumnos deja en blanco la tarea 4. El razonamiento proporcional (RP) se utiliza sobre todo en la tarea 3 a partir de 2º. Estrategias distintas a las esperadas se utilizan exclusivamente para obtener y expresar la regla general en 3º y 4º de la ESO.

4.3 Uso de estrategias en la secuencia de tareas

La Tabla 3 muestra las estrategias utilizadas por los alumnos en las diferentes tareas. Entre paréntesis figuran los alumnos que han conseguido realizar bien todas las tareas del problema propuesto. Se han identificado 18 itinerarios diferentes de los cuales sólo 6 tienen frecuencia igual o superior a 4.

Itinerarios	Tarea				Curso				Total
	1ª	2ª	3ª	4ª	1º	2º	3º	4º	
I	EA		EA	EA	13 (3)	10 (3)	4(1)	12(5)	39 (12)
II				EF			2(2)	2 (2)	4 (4)
III				RP	2		2	1	5
IV				O			3(1)	4 (1)	7 (2)
V				B	10	3	3	1	17
VI			EF	O			1		1
VII				EA	2	2	2	2	8
VIII			RP	O			1	2	3
IX				B		1			1
X			RP	EA	EA	1			1
XI				EA		1	1		2
XII				EF			1		1
XIII				RP				1	1
XIV				O				1	1
XV				B		1			1
XVI			EF	EF	EF			2 (2)	2 (2)
XVII		EF	EF	EF	EF			1 (1)	1 (1)
XVIII		RP	RP	RP	O		1		1
Total					27(3)	19(3)	21(4)	29(11)	96(21)

Tabla 3.- Estrategias utilizadas por los alumnos por tareas y cursos

El número de itinerarios utilizado por los estudiantes se incrementa en cursos superiores: se han identificado 4 itinerarios en 1º, 7 en 2º y 11 en 3º y 4º; de ellos condujeron al éxito 1 en 1º y 2º, 3 en 3º y 5 en 4º. Esto muestra una cierta relación entre flexibilidad en el uso de estrategias y el éxito alcanzado.

El itinerario con mayor número de frecuencias es el itinerario I que corresponde al uso de la estrategia aditiva en las cuatro tareas (39 estudiantes, 41%). Le sigue el itinerario V, que corresponde a la utilización de la estrategia aditiva en las tres primeras tareas y dejar en blanco la cuarta (17 estudiantes); su frecuencia disminuye en los cursos superiores. La estrategia que más se combina con la aditiva es el razonamiento proporcional, pues el 25% de los alumnos mezcla estas dos estrategias (itinerarios III, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV y XV).

Algunos itinerarios son utilizados exclusivamente por los alumnos de 3º y/o 4º curso y se caracterizan por combinar la estrategia aditiva con la funcional y/o con el razonamiento proporcional (II, IV, VI, VIII, XII, XIII, XIV, XVI, XVII y XVIII). Estos alumnos, a diferencia de los de 1º y 2º, habían estudiado las funciones y su expresión algebraica.

Un total de 57 alumnos, el 59%, utilizan la misma estrategia en todas las tareas o dejan en blanco la última tarea. De estos alumnos, 39 han utilizado el itinerario I (estrategias aditivas), 17 el V (aditivas y en blanco) y 1 el XVII (funcional), por tanto la rigidez se pone más de manifiesto en el uso de la estrategia aditiva. Los cursos inferiores son menos flexibles para cambiar de estrategia, ya que el 78% de los alumnos de 1º y 2º utiliza una única estrategia en las cuatro tareas, o deja en blanco el 4º apartado. Este porcentaje desciende al 42% en los alumnos de 3º y 4º.

De los 21 alumnos que han conseguido completar correctamente todo el problema, 12 han utilizado exclusivamente la estrategia aditiva expresando la regla general en lenguaje verbal, 6 han combinado las estrategias aditivas y funcionales, 2 han combinado la estrategia aditiva con “otra” estrategia y 1 alumno ha utilizado exclusivamente la estrategia funcional.

Sólo el 21% de los alumnos que han utilizado la estrategia aditiva, en exclusiva o combinada, ha resuelto correctamente el problema. Sin embargo este porcentaje asciende al 88%, 7 de 8, en los alumnos que han utilizado la estrategia funcional. El único alumno que ha realizado todas las tareas con la estrategia funcional, ha resuelto correctamente el problema.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestros resultados confirman que existe una relación clara entre la “distancia” de la generalización y el éxito conseguido: el 94% de los alumnos resolvieron la primera tarea de generalización cercana, el 43% resolvieron la tercera tarea de generalización lejana y el 22% encontró la regla general (Tabla 1).

El éxito obtenido en las tareas de generalización cercana y lejana (tareas 1, 2 y 3) es similar en los cuatro cursos de la Educación Secundaria Obligatoria, sin embargo hay un crecimiento del éxito en la obtención y expresión de la regla general (tarea 4) que se acentúa en 4º curso, pasando del 19% en 3º al 38% en 4º (Tabla 1). Esto se puede explicar, en parte, por la utilización de la estrategia funcional en la generalización lejana, ya que la expresión numérica que relaciona el número de cuadrados y de bolas es

Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategia resolviendo problemas de generalización de pautas lineales

más fácil de traducir a una regla general, que cualquiera de las expresiones relacionadas con las estrategias aditivas. En nuestra investigación ningún alumno de 1º y 2º utiliza la estrategia funcional en la generalización lejana y la utilizan 1 de 3º y 3 de 4º (Tabla 2).

Los alumnos de 4º curso siguieron 11 itinerarios diferentes en los que combinaron diversas estrategias para obtener la regla general, siendo los más flexibles; de estos, 5 itinerarios condujeron al éxito, que fue del 100% cuando usaron la estrategia funcional. Dicho resultado nos permite afirmar que los alumnos con mayor nivel de éxito muestran una mayor flexibilidad.

Algunos alumnos intentaron responder utilizando erróneamente el razonamiento proporcional, especialmente en la tarea 3 de generalización lejana; esta tendencia se acentúa en cursos superiores. Se confirma así los resultados de García Cruz y Martínón (1999) que afirman que los alumnos a veces usan métodos inapropiados, especialmente la proporcionalidad. El abuso de este método en tareas de no proporcionalidad por parte de alumnos de secundaria ha sido puesto de manifiesto en diversas investigaciones (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2002), por lo que se hace necesario proponer a los estudiantes de esta etapa tareas variadas para que distingan situaciones de proporcionalidad de las que no lo son.

De los 94 alumnos (sobre 96) que comenzaron con estrategias aditivas utilizando especialmente el recuento, 38 cambiaron a otras estrategias mostrando así su flexibilidad. La mayoría de ellos basaron su estrategia aditiva en el carácter iterativo del patrón lineal y observaron cómo aumenta el número de bolas al añadir cuadrados, y aunque en las tres primeras tareas también observaron la particularidad del primer cuadrado, sólo una minoría (12 de 39) fue capaz de tener en cuenta esta particularidad al expresar la regla general. Como afirman Orton y Orton (1994) “la fijación en enfoques recursivos puede obstaculizar seriamente el progreso hacia una regla universal”.

Sólo un alumno, de 4º de la ESO, ha utilizado el método deconstructivo, en el que interviene la sustracción, para resolver las tareas planteadas en el problema. A los alumnos de esta investigación les resulta más fácil sumar elementos en cada término que restar los elementos comunes coincidiendo con Rivera y Becker (2008) que afirman que “el método deconstructivo es el más difícil de alcanzar” (p. 81)

Nuestro trabajo muestra la importancia de que los profesores de matemáticas reconozcan y valoren la importancia de la generalización en la construcción del conocimiento matemático, planteen en clase ‘problemas de generalización’ para trabajar distintas estrategias, discutan las ventajas e inconvenientes que presenta cada una de ellas y estimulen la flexibilidad en el uso de las mismas. La identificación de patrones en este tipo de tareas puede facilitar el paso de la aritmética al álgebra de manera natural usando diferentes lenguajes. En este sentido es importante, como señala el Currículo de Educación Secundaria, el trabajo con patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre los lenguajes aritmético, verbal y algebraico a lo largo de esta etapa educativa, así como desarrollar la capacidad de ver ‘lo particular en lo general’ (Mason y Pimm, 1984).

Referencias

- Cañadas, M.C., Castro, E. y Castro, E. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Actas del XI Simposio de de la SEIEM* (pp. 283-294). Tenerife: SEIEM.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors, *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 311-314.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop et al. (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*, (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, 16 (2), 221-262.
- García Cruz, J.A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de la Laguna.
- García Cruz, J. A. y Martínón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (1), 31-43.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Editorial Labor (Or. 1982).
- Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 277-289.
- Orton, A. y Orton, J. (1994). Students' perception and use pattern and generalization. J.P. da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, (pp. 407-414). Lisboa: University of Lisbon.
- Piaget, J. (1987). *Introducción a la epistemología genética: el pensamiento matemático*. México D.F. : Paidós (Or. 1950).
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas (*How to solve it*. Princenton University Press, 1945)
- Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 40, 65-82.
- Roig, A.I. y Llinares, S. (2008). Fases en la abstracción de patrones lineales. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de de la SEIEM* (pp. 195-204). Badajoz: SEIEM.
- Santaló, L.A. (1985). *Enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires:

Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategia resolviendo problemas de
generalización de pautas lineales

Editorial Docencia.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems.
Educational Studies in Mathematics, 20 (2), 147-164.

LISTADO DE AUTORES

Aké, L.	227
Alsina, A.	237
Aranda, C.	247
Arevalillo-Herráez, M.	257
Aristizábal, G.	371
Arnau, D.	257
Arteaga, P.	267, 297
Ayllón, M. F.	277
Basurto, E.	287
Batanero, C.	267, 297
Bracho, R.	371
Callejo, M. L.	247, 417, 599
Camacho Machín, M.	195
Cañadas, G.	267, 297
Cañadas, M. C.	371
Caraballo, R. M.	307
Carrillo, J.	33, 77, 513
Castro Martínez, E.	471, 565
Castro, E.	277, 575
Castro, W. F.	33, 99, 227
Cerdán, F.	7, 339
Chico, J.	319
Contreras de la Fuente, A.	461
Contreras, J. M.	383
Contreras, P.	329
De La Torre Fernández, E.	555
Deulofeu, J.	429
Díaz, C.	297
	611

Edo, P.	7, 339
Fernández, C.	351, 417
Fernández, S.	429
Figueiras, L.	429
Font, V.	165
Gallardo, A.	287, 361
Gascón, J.	125
Gil Cuadra, F.	451
Giné, C.	429
Godino, J. D.	31, 33, 99, 227, 383
Gómez, P.	371, 491
González, M. J.	491
Gonzato, M.	383
Hoyos, V.	393
Huerta, M. P.	7, 339
Lacasta, E.	33, 51
Landín, P. R.	533
Llinares, S.	351
Lupiáñez, J. L.	307
Macías Gutiérrez, G.	405
Márquez, M.	417
Martínez, M.	429
Menino, H.	439
Molina, M.	277, 575
Montoro Medina, A. B.	451
Muñoz-Catalán, M. C.	31, 77
Ordóñez Cañada, L.	461
Penalva, M. C., ...	329
Pérez-Tyteca, P.	471
Pinto Leivas, J. C.	481
Planas, N.	319
Polo, I.	491
Puig, L.	257
612	

Quaresma, A.	439
Quintero Zazueta, R.....	405
Ramírez García, M.	503
Restrepo, A.	491
Restrepo, A. M.	371
Ribeiro, C. M.	513
Rico Romero, L.	15
Rico, L.	307
Rigo Lemini, M.	523
Rodrigues, M.	439
Rodríguez Marcos, P.	503
Saavedra, G.....	361
Salinas Portugal, M. J.	543, 587
Sánchez, E.	533
Sanmiguel Suárez, M.....	543
Sierra, T.A.	125
Silva Muslera, A.	555
Tavares, D.....	439
Torregrosa, G.....	329
Valls, J.	351
Valverde Soto, A. G.	565
Vega-Castro, D.	575
Vidal Conde, L. A.	587
Wilhelmi, M. R.....	31, 51
Zapatera Llinares, A.	599