

Investigación en Educación Matemática XVI

Investigación en Educación Matemática XVI

Antonio Estepa Castro, Ángel Contreras de la Fuente, Jordi
Deulofeu Piquet, M. Carmen Penalva Martínez, Francisco Javier
García García, Lourdes Ordóñez Cañada (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Ediciones

Baeza, 20, 21 y 22 de septiembre de 2012

Investigación en Educación Matemática XVI

Edita:

- © Ediciones Blanca
- © Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada,
Campus de Cartuja s/n, 18071 Granada (España)
- © Antonio Estepa Castro
- © Ángel Contreras de la Fuente
- © Jordi Deulofeu Piquet
- © M. Carmen Penalva Martínez
- © Francisco Javier García García
- © Lourdes Ordóñez Cañada

Comité científico

Dr. Jordi Deulofeu Piquet (Coordinador)
Dra. M. Carmen Penalva Martínez (Coordinadora)
Dr. Tomás Ortega del Rincón
Dr. Antonio Estepa Castro
Dra. Nuria Climent Rodríguez
Dr. David Arnau Vera

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Diseño de la portada: Lourdes Ordóñez

Impresión y encuadernación: Blanca Impresores, S.L.

Depósito Legal: J-1002-2012

ISBN: 978-84-695-4466-2

ISSN: 1888-0762

INDICE

PRESENTACIÓN	9

SEMINARIO I: APORTACIONES A LA INVESTIGACIÓN DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA

LA REVOLUCIÓN BROUSSEAUNIANA COMO RAZÓN DE SER DEL GRUPO DMDC	
Gascón, J.	15
RECORRIDOS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: EL GRUPO TAD	
Bosch, M.	23
ORIGEN Y APORTACIONES DE LA PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA	
Godino, J. D.	49

SEMINARIO II: FINES DE LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO ALGEBRAICO

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO II SOBRE FINES DE LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO ALGEBRAICO	
Palarea, M ^a .M.	71
DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR	
Castro, E.	75
OBSERVACIONES ACERCA DEL PROPÓSITO DEL ÁLGEBRA EDUCATIVA	
Puig, L.	95

COMUNICACIONES

SENTIDO NUMÉRICO DE ALUMNADO DEL GRADO EN MATEMÁTICAS	
Almeida, R., Bruno, A., Perdomo-Díaz, J.	99
PRUEBA EXPLORATORIA SOBRE COMPETENCIAS DE FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA: CONOCIMIENTO DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA	
Anasagasti, J., Berciano, A.	113
NÚCLEO COMÚN Y PERFILES DE LA ACTUACIÓN DE TUTORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN	
Arias, M., Gómez, P.	123

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LA ESTADÍSTICA Y LOS ESTUDIANTES EN FUTUROS PROFESORES Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M., Cañadas, G.R.	135
TRANSFERENCIA DEL APRENDIZAJE SITUADO DE LA SINTAXIS ALGEBRAICA: ECUACIONES LINEALES Y BALANZA VITUAL Bonilla, M., Rojano, T.	145
COMPRENSIÓN DEL TEST CHI-CUADRADO POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA Cañadas, G. R., Batanero, C., Díaz, C., Gea, M.M.	153
COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA QUE SUSTENTA EL DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD SOBRE LAS ECUACIONES DE LA RECTA EN 1º DE BACHILLERATO Carmona, E., Climent, N.	165
COGNICIÓN, AFECTIVIDAD Y DIVERSIDAD. UNA PROPUESTA DE DETERMINACIÓN DE PERFILES MATEMÁTICOS EN LOS ESTUDIANTES Cauich, A. R., Hidalgo, S.	177
LA IDENTIDAD COMO PRODUCTO DEL APRENDIZAJE EN LA PRÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN PROFESORES DE PRIMARIA Chávez, Y., Llinares, S.	187
LA FALACIA DEL EJE TEMPORAL: UN ESTUDIO CON FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Contreras, J.M., Díaz, C., Batanero, C., Arteaga, P.	197
O CONHECIMENTO DE UMA PROFESSORA QUANDO EXPLORA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA ESTATÍSTICA NUMA AULA DE 7º ANO Costa, A.C., González, M.T.	209
VALORACIÓN DE RESPUESTAS A PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO Fernández, C., Callejo, M.L., Márquez, M.	219
CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO: ASPECTOS ESTRUCTURALES Y DEFINICIONES PERSONALES Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F.	229
LA ENCAPSULACIÓN DE PROCESOS EN OBJETOS ANALIZADA DESDE LA PERSPECTIVA DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO Font, V., Badillo, E., Trigueros, M., Rubio, N.	239
ANÁLISIS HISTÓRICO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA RAZÓN Y LA PROPORCIÓN Gairín, J.M., Oller, A.M.	249
PROPUESTA DE UN MODELO PARA LA CALIFICACIÓN DE EXÁMENES DE MATEMÁTICAS Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M.	261

EL PROCESO DE DEFINIR EN MATEMÁTICAS DESDE UNA PERSPECTIVA COMOGNITIVA	
Gavilán, J. M., Sánchez-Matamoras, G., Escudero, I.	275
NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL	
Godino, J.D., Aké, L.P., Gonzato, M., Wilhelmi, M.R.	285
ANÁLISIS DE INTERPRETACIONES ESCRITAS DEL PROFESORADO SOBRE LA ARGUMENTACIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS	
Goizueta, M., Planas, N.	295
DIFICULTADES MANIFESTADAS POR PROFESORES EN FORMACIÓN EN EL APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO	
Gómez, P., Cañadas, M.C.	303
DIAGRAMAS INTEGRADOS PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES DE ESO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA	
González, F.M., Castro, E.	313
CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO E IDENTIDADES MATEMÁTICAS EN LOS PROCESOS DE TRANSICIÓN: EL ALUMNO Y LOS DEMÁS SIGNIFICATIVOS	
Gorgorió, N., Prat, M.	323
EL CASO DE LA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A OTRAS DOS. ANÁLISIS DE LA ACTUACIÓN DE UNA PROFESORA DE MAGISTERIO	
Guillén, G., Siñériz, L.	331
CONOCIMIENTO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES ESPAÑOLES DE MAGISTERIO EN TEDS-M	
Gutiérrez, A., Gómez, P., Rico, L.	341
UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA SOBRE LA INFLUENCIA DEL ABP EN LA COMPETENCIA MATEMÁTICA CON FUTURAS MAESTRAS DE EDUCACIÓN INFANTIL	
Gutiérrez, G., Berciano, A.	353
ACTIVIDAD LÓGICA Y RELACIONAL EN EDUCACIÓN INFANTIL	
Lacasta, E., Lasa, A., Wilhelmi, M.R.	363
CAMINANDO: LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADISTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL NORTE DE PORTUGAL	
Martins, J.A., Nascimento, M.M., Estrada, A.	375
DISTINTOS NIVELES DE COMPETENCIA MATEMÁTICA EN RESOLUTORES DE PROBLEMAS DE CINEMÁTICA	
Matías, F., Gallardo, A.	385
ELABORACIÓN Y APLICACIÓN DE UN INSTRUMENTO PARA MEDIR EXPERIENCIAS DE FLUJO	
Montoro, A.B., Gil, F.	397

UN ESTUDIO EXPLORATORIO DE LAS TENDENCIAS DE PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO DE LOS ESTUDIANTES DEL PROFESORADO DE BIOLOGÍA	
Moreno, A., Cardeñoso, J.M., González, F.	407
DIFICULTADES ALGEBRAICAS EN EL AULA DE 1º BAC. EN CIENCIAS Y EN CIENCIAS SOCIALES	
Pazos, A.L., Salinas, M. J.	417
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE PROFESORES EN FORMACIÓN: EXPLORANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE LA DERIVADA	
Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F., Font, V.	427
LA COMPRENSIÓN DE LA APROXIMACIÓN A UN NÚMERO EN EL ACCESO AL SIGNIFICADO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	
Pons, J., Valls, J., Llinares, S.	435
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE FUTUROS MAESTROS SOBRE FRACCIONES. EL ROL DE LA UNIDAD	
Ribeiro, C.M.	447
SOFTWARE DEMMATTOUL: UNA HERRAMIENTA PARA LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA ESTRUCTURA ARGUMENTATIVA DE LA DEMOSTRACIÓN	
Rodríguez, F., Gutiérrez, A.	457
LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN ALUMNOS DE GRADOS EN ESTADÍSTICA	
Rodríguez del Tío, P., Hidalgo, S., Palacios, A.	469
CARACTERÍSTICAS PARA IDENTIFICAR A PROFESORES DE MATEMÁTICAS EXPERTOS	
Rojas, N., Carrillo, J., Flores, P.	479
EL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO Y PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE LA REGLA DEL PRODUCTO PROBABILÍSTICO	
Sánchez E., Mayén, S., Salazar, A.	487
CÓMO ESTUDIANTES PARA PROFESOR INTERPRETAN EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	
Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., Llinares, S.	497
LISTADO DE AUTORES	509

PRESENTACIÓN¹

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), se fundó en marzo de 1996. En la segunda reunión de la Junta Directiva de la SEIEM se redactó el programa científico del I Simposio, que se celebraría los días 12 y 13 de septiembre de 1997, en la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E.G.B. de Zamora, organizado por la Universidad de Salamanca. Este Simposio se ha celebrado anualmente desde entonces. El XV Simposio tuvo lugar en Ciudad Real, organizado por la Universidad de Castilla la Mancha, durante los días 7, 8 y 9 de septiembre de 2011.

Siguiendo la tradición anual, el siguiente Simposio (XVI) tendrá lugar en la sede de Baeza de la Universidad Internacional de Andalucía (UNIA) durante los días 20, 21 y 22 de septiembre de 2012, organizado por la Universidad de Jaén, del cual, los comités científico y local quieren dar fe con el presente libro de Actas.

Los objetivos del XVI Simposio se orientan a la consecución de los de la SEIEM, en consecuencia, el propósito de este Simposio ha sido propiciar un encuentro de los investigadores en Didáctica de la Matemática donde poder debatir temas de su incumbencia, mediante la presentación, discusión e intercambio de investigaciones, junto con sus fines y objetivos, marcos teóricos, metodologías, procedimientos y resultados, que colaboren al enriquecimiento científico de los asistentes y de los que con posterioridad lean la presente publicación.

En concreto los objetivos pretendidos del XVI Simposio son:

- a) Desarrollar seminarios de investigación donde se expongan, discutan y debatan temas de actual interés en la investigación en Didáctica de la Matemática.
- b) Presentación de comunicaciones de investigaciones realizadas donde se discutan los marcos teóricos, metodologías utilizadas y los resultados obtenidos comparándolos con otros realizados. Lo que da lugar a un intercambio de información científica enriquecedora.
- c) Propiciar la reunión de los grupos de investigación, donde se presenten y debatan investigaciones en curso en dichos grupos, lo que contribuye a la mejora de dichas investigaciones, al estar circunscritos los debates entre especialistas de ese tipo de investigaciones.
- d) Favorecer en las reuniones de los grupos de investigación el intercambio de información científica y la planificación de sus actividades para el curso que comienza, delimitando prioridades.
- e) Mantener el contacto humano entre los investigadores de Didáctica de la Matemática españoles e iberoamericanos.
- f) Promover la investigación en Didáctica de la Matemática ante la sociedad y organismos e instituciones oficiales.
- g) Conseguir que este evento sea conocido en foros, medios de comunicación, otros congresos y actividades relacionados con la

¹ Como la intención es entregar el libro de actas el primer día del Simposio, esta presentación se escribe antes de su celebración, con los datos que tenemos en julio de 2012, en consecuencia, cuando me refiera a dicho Simposio utilizaré el tiempo verbal de futuro.

Didáctica de la Matemática y la Educación Matemática, tanto a nivel nacional como internacional.

- h) Transmitir y divulgar institucionalmente la actividad de la SEIEM.
- i) Celebrar la asamblea anual de la SEIEM.

Para conseguir estos objetivos la actividad desarrollada por los comités científico y local han sido las siguientes:

- Organización y búsqueda de la Sede del Simposio en la sede de la UNIA de Baeza.
- Entrevistas con organismos oficiales para solicitar co-financiación.
- Organización del programa del Simposio.
- Proposición y aceptación de ponentes invitados.
- Toma de decisiones sobre la selección de comunicaciones.
- Gestión de inscripciones y alojamiento a través de una Secretaría Técnica.
- Preparación de las presentes Actas del Simposio.

La estructura de este libro de actas es similar a la de los Simposios anteriores, en primer lugar, figuran los Seminarios de Investigación y a continuación, las comunicaciones aceptadas.

Seminario I: Aportaciones a la investigación desde la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. **Coordinador:** Dr. Josep Gascón, Universidad Autónoma de Barcelona: *“La Revolución Brousseauiana como razón de ser del Grupo DMDC”*. **Ponentes:** Dra. Marianna Bosch Casabó, Universidad Ramón Llull, *“Recorridos de investigación en Didáctica de las Matemáticas: el grupo TAD”*. Dr. Juan D. Godino, Universidad de Granada, *“Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática”*.

Seminario II: Fines de la investigación en pensamiento algebraico. **Coordinadora:** Dra. Mercedes Palarea, Universidad de La Laguna. *“Introducción”*. **Ponentes:** Dra. Encarnación Castro Martínez, Universidad de Granada, *“Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar”*. Dr. Luis Puig Espinosa, Universidad de Valencia, *“Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa”*.

Ordenadas según el apellido del primer autor, se incluyen 39 comunicaciones que han sido aceptadas mediante un riguroso proceso de revisión doble y confidencial por parte de investigadores especializados, ajenos al comité científico y coordinados por miembros de dicho comité. Desde aquí, queremos agradecer a estos revisores el trabajo desinteresado realizado, ya que con su rigor y sugerencias enviadas a los autores, aumenta la calidad de las comunicaciones presentadas.

La mayoría de las comunicaciones (15) versan sobre formación de profesores, habiendo también de otras líneas de investigación como Didáctica de la Estadística, del Álgebra, del Análisis, de la Aritmética y de otros temas transversales sobre la Didáctica de la Matemática.

La mayoría de los asistentes serán profesores del Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática, destaca también un segundo y numeroso grupo de

estudiantes de doctorado y un tercer grupo de profesores y estudiantes de doctorado de Iberoamérica

Se celebrarán dos sesiones de trabajo de los Grupos de Investigación de la SEIEM, de 90 minutos de duración cada una, procurando no simultanear las sesiones de los grupos de contenido genérico (Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica (DMDC), Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor (CDPP), Investigación en Historia de la Educación Matemática (HEM), e Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI)), con las sesiones de los grupos de contenido específico (Aprendizaje de la Geometría (AG), Didáctica del Análisis (DA); Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (DEPC) y Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA).

Las sesiones de los Grupos de Investigación estarán orientadas a debatir trabajos de investigación en curso en el seno del Grupo y a la planificación de actividades para el próximo curso. Estas reuniones son de gran utilidad para los investigadores en formación, debido a la adquisición de información que obtienen y a las orientaciones que reciben de los asistentes sobre los trabajos que presentan. Los trabajos presentados en estas sesiones se editaran en CD después del Simposio.

Los miembros del comité local somos profesores de la Universidad de Jaén del Área de conocimiento de Didáctica de la Matemática, fue para nosotros un gran honor el que la Asamblea de la SEIEM celebrada en el último Simposio, en Ciudad Real, encargará la celebración del XVI Simposio de la SEIEM a la Universidad de Jaén y, en concreto, a los profesores del Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática, en consecuencia queremos agradecer este hecho a la SEIEM.

También queremos agradecer a la Diputación Provincial de Jaén, a la Universidad de Jaén, a la Universidad Internacional de Andalucía, a los excelentísimos Ayuntamientos de Baeza y Úbeda la ayuda y colaboración recibida, sin la cual no sería posible la realización de este Simposio.

Antonio Estepa

Coordinador del Comité de Organización Local

SEMINARIO I

APORTACIONES A LA INVESTIGACIÓN DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA

Coordinador: **Josep Gascón**, Universidad Autónoma de Barcelona

La Revolución Brousseauiana como razón de ser del Grupo DMDC

Marianna Bosch Casabó, Universidad Ramón Llull

Recorridos de investigación en Didáctica de las Matemáticas: el grupo TAD

Juan D. Godino, Universidad de Granada

Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática

LA REVOLUCIÓN BROUSSEAUNIANA COMO RAZÓN DE SER DEL GRUPO DMDC¹

THE "BROUSSEAUNIAN" REVOLUTION AS RAISON D'ÊTRE FOR THE DMDC GROUP

Gascón, J.

Universitat Autònoma de Barcelona

“A este instrumento de explicación de las matemáticas y de su génesis lo llamo *didáctica fundamental*. Esto es una toma de posición teórica y supone que la teoría didáctica puede revolucionar la epistemología y transformar la descripción de la construcción de un conocimiento [matemático] [...]. Es un desafío, pero se puede comprender que este desafío está ligado a la ambición de construir la didáctica”.

Guy Brousseau (1996, p. 40)

Resumen

El grupo “Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica” (DMDC), heredero del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM), surgió con la intención de contribuir al desarrollo de la didáctica en la dirección propuesta por Guy Brousseau en la década de los 80. En particular, la ambición de construir una ciencia didáctica caracterizada como “epistemología experimental”, la transformación y ampliación de su objeto de estudio y la consiguiente inauguración del programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas constituyen, aún hoy día, la razón de ser del grupo DMDC.

Abstract

The group “Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline” (DMDC), heir of the “Interuniversity Seminar of Research in Didactics of Mathematics” (SIIDM), emerged with the aim of development of didactics in the direction proposed by Guy Brousseau in the 80s. More precisely, the ambition to build on a science of didactics characterised as an “experimental epistemology”, the transformation and enlargement of its object of study and the inauguration of the epistemological programme in didactics of mathematics represent the main rationale of the DMDC group.

Palabras clave: *Ciencia didáctica, teoría de las situaciones didácticas, epistemología experimental, programa epistemológico.*

Key words: *Science of didactics, theory of didactic situations, experimental epistemology, epistemologic programme.*

¹ XVI Simposio de la SEIEM. Seminario de investigación. Aportaciones a la Investigación desde la Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. Baeza, 20-22 Septiembre 2012

Breve historia de una comunidad de investigación: del SIIDM al DMDC

La comunidad de investigación que sustenta el grupo *Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica* (DMDC), heredero del *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (SIIDM), tiene una historia de más de 20 años (1991-2012). En esta historia podemos distinguir tres etapas:

1991-1997: En esta primera etapa sólo existía SIIDM y en ella se celebraron un total de 11 Seminarios en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la UCM.

1998-2004: La segunda etapa se inicia con la celebración en 1998 del XII SIIDM en Baeza y con la creación del grupo DMDC como grupo de trabajo de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM). Los posteriores Seminarios se celebraron en El Escorial (1999), Cangas do Morrazo (2000), Huelva (2000), Huesca (2001), Almería (2001), Castellón (2002), Córdoba (2003) y Madrid (2004). En esta etapa conviven el SIIDM y el DMDC.

2005-2012: A partir de 2005² el SIIDM se diluyó definitivamente dentro del grupo DMDC y se inició una nueva etapa a lo largo de la cual los intereses de los miembros del grupo han ido evolucionando hasta confluir, principalmente, en dos potentes subgrupos que trabajan respectivamente en el enfoque ontosemiótico (EOS) y en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD).

A lo largo de las 20 reuniones del SIIDM (1991-2004) se presentaron y discutieron una gran cantidad de comunicaciones sustentadas en los diversos enfoques y marcos teóricos que convivieron en el seno del SIIDM tal como muestra el trabajo que presentamos en Huelva en el marco del IV Simposio de la SEIEM (Ruiz et al. 2001). Se puede encontrar información bastante completa de estos trabajos en los boletines del SIIDM publicados en el sitio <http://www.ugr.es/~jgodino//siidm/>. La mayor parte de las contribuciones al grupo DMDC presentadas entre 2005 y 2011 están publicadas en las sucesivas actas de los Simposios de la SEIEM. En esta breve presentación no entraré en el contenido de dichos trabajos para centrarme en describir algunas ideas, poco difundidas, que sustentaron la constitución del SIIDM.

La revolución brousseauiana de la didáctica de las matemáticas

En los trabajos germinales de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) Guy Brousseau³ propuso una nueva y revolucionaria interpretación de la problemática didáctica. Sostengo que esta interpretación fue el acicate que impulsó la constitución de nuestra pequeña comunidad científica y que el estudio y desarrollo de dicha problemática constituye aún actualmente la “razón de ser” de nuestro grupo.

A fin de contextualizar históricamente la relación entre el origen del SIIDM y los postulados iniciales de la TSD, empezaré citando los puntos más significativos del

² En el año 2005 se celebró, también en Baeza, el primer congreso internacional sobre la teoría antropológica de lo didáctico (I CITAD) con motivo de los 25 años de la primera publicación, en 1980, sobre la teoría de la transposición didáctica, germen de la TAD.

³ En 2003 Guy Brousseau recibió la primera medalla Félix Klein otorgada por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) como reconocimiento a una vida dedicada a la construcción de una gran obra científica: la teoría de las situaciones didácticas (TSD). Aunque algunas de las interpretaciones habituales de la TSD la trivializan para hacerla compatible con los enfoques comúnmente aceptados, en realidad la TSD inaugura un nuevo programa de investigación (en el sentido de Lakatos 1978) en didáctica de las matemáticas, el *programa epistemológico* (Gascón 1998).

documento constitutivo del SIIDM que aparece en el boletín nº1 de dicho seminario (1991) (ver <http://www.ugr.es/~jgodino//siidm/>).

Los miembros del Seminario comparten un interés particular por el marco teórico de la didáctica de las matemáticas iniciado por el profesor *Guy Brousseau* sin que ello suponga el cierre a otras perspectivas que puedan servir de fundamentación para la didáctica de las matemáticas.

El principal objetivo del Seminario es el de profundizar en el estudio y comprensión de los *fenómenos didácticos*, es decir, de aquellos fenómenos relacionados con la *producción y comunicación del conocimiento matemático*.

No pretendo hacer una descripción objetiva e imparcial de la creación del SIIDM porque esta sería una pretensión ilusoria y engañosa. Únicamente expondré mi interpretación de las ideas que impulsaron el nacimiento de dicho seminario.

La ambición de construir una ciencia didáctica con un objeto de estudio propio

La TSD construye por primera vez la noción de *fenómeno didáctico*, entendido inicialmente como una regularidad no intencional que no se puede reducir a fenómenos cognitivos, sociológicos o lingüísticos⁴.

En los *Fondements* de Brousseau, publicados en 1986, se postula que los fenómenos didácticos, esto es, los fenómenos que emergen en la producción y difusión de las matemáticas, constituyen el objeto primario de investigación de la didáctica de las matemáticas. Cinco años más tarde, en 1991, el documento fundacional del SIIDM muestra que esta forma de interpretar la didáctica es compartida por los miembros de nuestra incipiente comunidad. Es importante subrayar que, en ese momento, la ambición de construir una ciencia de los fenómenos didácticos estaba prácticamente ausente de la comunidad de Educación Matemática y que, incluso actualmente, podemos constatar que la noción de “fenómeno didáctico” y su relación con los “problemas didácticos” no juegan un papel central en la mayor parte de los enfoques en didáctica de las matemáticas (Artigue, Bosch & Gascón 2011).

¿En qué sentido la TSD transforma de manera radical el objeto de estudio de la didáctica? ¿Cómo se construye y cuál es la amplitud de dicho objeto de estudio renovado? Para responder a estas cuestiones utilizaré, de forma necesariamente simplificada, un esquema propuesto en un trabajo anterior (Gascón 1998). Con ayuda de este esquema podemos decir que, una vez establecido que la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática es claramente insuficiente, se produjo la ruptura con la Pedagogía que fue obra del *programa cognitivo de investigación en didáctica de las matemáticas*⁵ (Gascón 2002). Este programa cuestionó la presunta suficiencia del

⁴ La didáctica de las matemáticas construye los fenómenos didáctico-matemáticos (como, por ejemplo, el “efecto Topaze”, el “deslizamiento meta-didáctico” o la “aritmización del álgebra escolar”) para explicar los hechos didácticos (empíricos) de manera racional y para relacionarlos con otros fenómenos. En Gascón (2011) se interpretan los fenómenos didáctico-matemáticos como “fenómenos de la vida social” que se construyen utilizando “conceptos-tipo ideales” en el sentido de Max Weber (1904/2009).

⁵ El acta de nacimiento del *programa cognitivo de investigación en didáctica de las matemáticas* puede situarse en el influyente trabajo de Bauersfeld y Skowronek (1976) en el que reivindicaban explícitamente la necesidad de tomar en consideración la construcción de una teoría del *aprendizaje específicamente matemático*, en lugar de empezar por una *teoría del aprendizaje general*. Una propuesta similar, de ampliación de lo pedagógico-cognitivo mediante la introducción de componentes “matemáticos” fue defendida, en el ámbito de la formación del profesorado, por Lee Shulman (1987) mediante la noción de *conocimiento pedagógico del contenido* (*pedagogical content knowledge*).

enfoque pedagógico y de la noción de “aprendizaje humano” para abordar los problemas matemático-didácticos y postuló la necesidad de modelizar el “aprendizaje *matemático* (del alumno)”, lo que comportó, de hecho, una *ampliación* de lo “pedagógico-cognitivo” para incluir componentes “matemáticos” y, paralelamente, una ampliación del objeto de estudio de la didáctica.

Asumiendo esta ruptura con la Pedagogía, el *programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas* surge de la convicción de que el origen del problema de la Educación Matemática está en la forma de interpretar las propias matemáticas. Y al cuestionar la transparencia de lo que es considerado como “matemático” y tomar la actividad matemática como *objeto primario* de estudio, como nueva “puerta de entrada” del análisis didáctico, se produce una segunda ruptura de la didáctica, en este caso con los modelos epistemológicos habituales.

En definitiva, el programa epistemológico⁶ constituye una respuesta a la insuficiencia manifiesta de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares (Gascón 2001) para formular y abordar los problemas didáctico-matemáticos y, en particular, reacciona contra el reduccionismo del *modelo popular de las matemáticas* (W. P. Thurston 1994) que, al limitar la actividad matemática a series del tipo: “definición-especulación-teorema-prueba”, provoca una separación radical entre el “hacer” y el “enseñar-aprender” matemáticas.

La TSD, por el contrario, postula la inseparabilidad entre lo matemático y lo didáctico al proponer que un *conocimiento matemático* está definido por las *situaciones* que lo determinan, esto es, por un conjunto de situaciones para las que dicho conocimiento es idóneo porque proporciona la solución óptima en el contexto de una institución determinada. Las situaciones contienen la “razón de ser” del conocimiento que definen, esto es, las cuestiones que le dan sentido, así como las restricciones que limitan su uso en una institución determinada y las aplicaciones potenciales del mismo. En consecuencia, el modelo epistemológico de las matemáticas en el que se sustenta la TSD unifica lo matemático y lo didáctico mediante una ampliación de lo que se considera como “matemático” en las instituciones escolares.

Simultáneamente, con esta segunda ruptura, se produce una nueva ampliación del objeto de estudio de la didáctica que pasa a incluir la actividad matemática escolar que, en consecuencia, debe ser modelizada porque toda disciplina modeliza lo que cuestiona y lo que pretende explicar. Posteriormente, la evolución interna de la TSD la ha llevado a considerar de forma aún más comprensiva el objeto de estudio de la didáctica:

DEFINICIÓN. La didáctica de las matemáticas es la ciencia de las condiciones de creación y difusión de los conocimientos matemáticos. (Guy Brousseau 1996, p. 33).

Para Guy Brousseau la didáctica de las matemáticas es una ciencia de carácter *experimental* tal como se refleja muy claramente a lo largo de toda su obra. Ya en 1972 Brousseau fundó el COREM, *Centro para la Observación e Investigación en Enseñanza de la Matemática*, dentro del marco de la Universidad de Bordeaux y en torno a la escuela J. Michelet de Talence. En dicho centro, que dirigió durante más de 25 años, llevó a cabo una ingente investigación fundamental y experimental ligada a la enseñanza efectiva de las matemáticas en el aula. Los numerosos recursos documentales producidos en el COREM han sido cedidos a la Universitat Jaume-I de Castelló,

⁶ Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau constituyen el germen del programa epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990. La página <http://guy-brousseau.com/> contiene gran parte de su producción científica.

constituyendo el Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas *Guy Brousseau* dirigido por Pilar Orús (ver <http://www.imac.uji.es/CRDM/index.php>)

La didáctica es, asimismo, una ciencia más *explicativa* que *normativa*:

La *teoría de las situaciones didácticas* se presenta en la actualidad como un instrumento científico. [...] Si bien algunos resultados de investigación han sido tomados como nuevos métodos de enseñanza, no es mi intención hacer proselitismo en este sentido. (Guy Brousseau 2007, p. 12).

Y una ciencia que, en cierto sentido, puede considerarse *predictiva* porque aspira a prever tanto las *condiciones* más idóneas para que un tipo de fenómenos matemático-didácticos emerjan en una institución determinada, como las *consecuencias* colaterales que surgirían de su implantación. También pretende anticipar las *restricciones* que aparecerían si se intentara modificar en una dirección determinada la organización didáctico-matemática existente en una institución.

El énfasis en el carácter científico-experimental de la didáctica junto a la transformación y ampliación de su objeto de estudio influyeron decisivamente en 1998 no sólo en la elección del nombre del grupo DMDC⁷ sino, sobre todo, en el espíritu fundacional del mismo.

La didáctica de las matemáticas como epistemología experimental

La TSD estudia las características de las “situaciones didácticas”, esto es, los modelos de interacción de un sujeto genérico con cierto “medio”. Una situación didáctica determina (modeliza) un conocimiento matemático dado, como el recurso óptimo del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en esta situación un estado favorable. En consecuencia, la TSD invierte el problema que planteaba la *didáctica clásica*.

Desde la perspectiva de la teoría de las situaciones, los alumnos se convierten en los reveladores de las características de las situaciones a las que reaccionan (es importante señalar esta inversión de posición con respecto a las aproximaciones de la psicología, donde las situaciones suelen estudiarse como dispositivos para revelar los conocimientos del alumno). (Guy Brousseau 2007, p. 24)

Esta inversión del objeto de estudio requiere cuestionar las formas habituales de describir e interpretar los “conocimientos matemáticos”. La TSD cuestiona los modelos epistemológicos (de los diferentes ámbitos de las matemáticas) dominantes en las diversas instituciones y construye modelos propios para abordar los problemas didácticos en los que intervienen los conocimientos en cuestión. Así, por ejemplo, la TSD cuestiona los modelos epistemológicos relativos a los números decimales, el contar, la medida de magnitudes, la geometría o la relación entre la estadística y la probabilidad. En cada caso elabora un modelo epistemológico específico del correspondiente ámbito de la actividad matemática formulado en términos de *situaciones*.

Nace así la TSD como una *epistemología experimental*⁸ (de las matemáticas) con la ambición de explicar la génesis, el desarrollo y la difusión de las matemáticas. En

⁷ Uno de los grupos de trabajo del ICME 8, celebrado en Sevilla en julio de 1996, el Working Group 25 (en el que participamos Juan D. Godino y yo mismo) se denominó precisamente *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Malara 1997).

⁸ La “epistemología experimental” asume implícitamente que los datos de la psicogénesis, completados con los que proporciona la historia de las matemáticas, son insuficientes para describir e interpretar la

esto consiste, precisamente, el principio metodológico fundamental de la TSD: definir un “conocimiento matemático” mediante una “situación”, esto es, por un autómata que modeliza los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima (Brousseau 1994).

Aparece así un nuevo modelo epistemológico general de las matemáticas que sustituye a los modelos epistemológicos conceptualistas dominantes. En la TSD la actividad matemática escolar es siempre una actividad en situación. Aunque se habla de “conocimiento matemático”, no se consideran los conceptos aislados sino la actividad matemática como tal.

La TSD cambia las antiguas cuestiones que constituían el objeto primario de investigación de la Educación Matemática:

- ¿Cómo aprenden matemáticas los alumnos? ¿Qué dificultades ponen de manifiesto?
- ¿Mediante qué mecanismos o procesos cognitivos adquieren los conceptos matemáticos los alumnos (o cómo los construyen)?
- ¿Qué métodos son los más adecuados para enseñar dichos conceptos?

Substituyéndolas por otras cuestiones de diferente naturaleza:

- ¿Qué condiciones debe satisfacer una situación para poner en funcionamiento los conocimientos específicos que la propia situación modeliza?
- ¿Cuáles son los efectos previsibles de dicho funcionamiento sobre los protagonistas y sobre sus producciones (fenómenos didácticos)?
- ¿Qué juego debe jugar el sujeto para necesitar un conocimiento determinado?

La TSD transformó así un problema centrado en la enseñanza-aprendizaje en otro de *epistemología experimental de las matemáticas*. La ruptura con el enfoque cognitivo dominante, centrado en el sujeto que aprende y, después, en el que enseña, supone una audacia difícil de asumir aún hoy día. La didáctica clásica pretende demostrar que tal método de enseñanza es mejor que tal otro, pero nadie había pretendido hasta entonces que, para estudiar los problemas didácticos, era esencial la redefinición del álgebra, de la geometría, de la estadística, etc., mediante modelos que difieren abiertamente de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares (y en la institución “sabia”). El misterio, lo que debe ser explicado en primera instancia, pasa de los procesos (cognitivos) de enseñanza-aprendizaje a la forma de interpretar el saber matemático. En la TSD el misterio está, en primer lugar, en las situaciones consideradas como modelos de los conocimientos matemáticos.

En mi opinión, los citados rasgos característicos de la TSD: la ambición de construir una ciencia didáctica, la transformación y ampliación de su objeto de estudio y la consiguiente inauguración del programa epistemológico, constituyen, aún hoy día, la razón de ser de nuestro grupo de investigación.

Referencias

Artigue, M., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). La TAD face au problème de l’interaction entre cadre théoriques en didactique des mathématiques. In M. Bosch, J.

génésis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos en las instituciones escolares. La *base empírica para abordar el problema epistemológico* debe incluir los “hechos” que se producen en las instituciones didácticas porque la epistemología debe dar cuenta de fenómenos que dependen esencialmente de la institución didáctica en el seno de la cual tiene lugar la denominada génesis “personal”, el desarrollo y la difusión de los conocimientos matemáticos (Gascón 2001).

- Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 33-55). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Bauersfeld, H. y Skowronek, H. (1976). Research related to the mathematical learning process, en Athen y Kunle, (eds.) *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (Universität Karlsruhe, Zentralbatt für didaktik der Mathematik: Karlsruhe, RFA), 231-245.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). UNC, Córdoba.
- Brousseau, G. (1994). Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, ICMI Study 94: Washington.
- Brousseau, G. (1996). La didàctica en la formació del professorat, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, Institut d'Estudis Catalans, 11(1), 33-45. (Conferencia pronunciada en las *Segones Jornades de Matemàtiques i Didàctica de les Matemàtiques*, celebradas en febrero de 1993 en la Universitat Autònoma de Barcelona).
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Eds.). La pensée sauvage: Grenoble.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, [Traducción de Dilma Fregona]. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7-34.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 4(2), 129-159.
- Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5(3), 673-698.
- Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la Teoría Antropológico de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31 (1), 9-50.
- Lakatos, I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes: Philosophical Papers*, Vol 1. Cambridge: Cambridge University Press.
- Malara, N. A. (1997). *An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Modena, Italia: University of Modena.
- Ruiz, L., Orús, P., Godino, J.D. & Gascón, J. (2001). Perspectiva de la investigación del grupo didáctica de las matemáticas como disciplina científica. En L. Contreras et al. (eds.). *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. pp. 175-182. (Collectanea nº54). Huelva: Universidad de Huelva.

- Shulman, L. S. (1987): Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform, *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Thurston, W. P. (1994): On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30/2, 161-177.
- Weber, M. (2009) *La “objetividad del conocimiento en la ciencia social y en la política social”* [Traducción de J. Abellán]. Madrid: Alianza Editorial (Edición original: 1904).

RECORRIDOS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: EL GRUPO TAD¹

RESEARCH PATHS IN DIDACTICS OF MATHEMATICS: THE ATD GROUP

Bosch, M.

IQS School of Management, Universitat Ramon Llull

Resumen

El grupo TAD de investigación en la teoría antropológica de lo didáctico nace en 1990 cuando iniciamos nuestra cooperación con el equipo que dirige Yves Chevallard en la universidad de Marsella. En la actualidad, este grupo integra una veintena de investigadores españoles, portugueses y latinoamericanos cuyas aportaciones al desarrollo de la didáctica pueden agruparse en cinco grandes recorridos de investigación que se entrecruzan constantemente y que surgen de cuestiones vinculadas a los diferentes ámbitos institucionales de la práctica educativa. La reconstrucción que proponemos aquí prioriza los tipos de problemas abordados durante estos años, que son los que marcan los hitos de cada recorrido. Visto retrospectivamente, sorprende cuán ligados pueden aparecer los problemas internos al desarrollo de la propia teoría con aquellas cuestiones que acechan al investigador en su entorno docente y que aparecen como los principales motores de la investigación.

Abstract

The ATD group of research in the Anthropological Theory of the Didactic was born in 1990 when we started cooperating with the team led by Yves Chevallard in the university of Marseilles. Nowadays, this group integrates about 20 Spanish, Portuguese and Latin American researchers whose contributions to the development of didactics can be organised around five big constantly intertwined strands emerging from questions related to different institutional settings in the educational practice. The reconstruction here proposed gives priority to the type of problems approached during these years, which mark the milestone of each research course. In retrospective, it is remarkable to see such a strong relation between the problems internal to the development of the didactic theory itself and the questions that haunt the researcher in its teaching environment and that appear as the real driving force of research.

Palabras clave: *Teoría antropológica de lo didáctico, recorridos de estudio e investigación, proceso de algebrización, formación del profesorado, teoría de las situaciones didácticas.*

Key words: *Anthropological Theory of the Didactic, study and research course, algebraisation process, teachers' training, Theory of Didactic Situations.*

¹ XVI Simposio de la SEIEM. Seminario de investigación. Aportaciones a la Investigación desde la Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. Baeza, 20-22 Septiembre 2012.

El grupo TAD

En los inicios de los años 90, cuando se crea el Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM), algunos de sus miembros estábamos empezando a colaborar con el investigador francés Yves Chevallard en lo que entonces se conocía como “enfoque antropológico en didáctica” y que más tarde daría lugar a la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD). En el momento de la creación del grupo de la SEIEM “Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica” en 1998, el equipo de investigadores que nos inscribíamos en el programa de investigación de la TAD contaba con ocho personas de distintas universidades españolas. Hoy día nuestro equipo agrupa a más de veinte investigadores de España, Portugal, Chile, México y Argentina, cuyas aportaciones se han desarrollado a lo largo de una decena de proyectos de investigación, dando lugar a la realización de 15 tesis doctorales (algunas todavía en curso) y a un gran número de publicaciones que presentamos al final de este trabajo. Se debe a este equipo la organización del primer Congreso Internacional sobre la TAD, en Baeza en 2005, un congreso que en abril del 2013 celebrará su cuarta edición y que agrupa casi un centenar de investigadores, principalmente de Europa y América Latina, que trabajan en la TAD o se interesan por sus desarrollos (Ruiz-Higueras, Estepa y García 2007, Bronner et al. 2010, Bosch et al. 2011).² El reconocimiento que supuso la concesión de la medalla Hans Freudenthal a Yves Chevallard en 2009 por la creación de lo que la *International Commission of Mathematics Instruction* calificó como “*a major program of research in mathematics education*” ha generado últimamente un impulso importante para la difusión internacional de nuestros trabajos, que siempre hemos llevado a cabo bajo el liderazgo científico de este gran investigador.

El objetivo de este artículo es presentar a grandes rasgos las aportaciones del grupo TAD a la investigación didáctica, proponiendo una reconstrucción de los distintos recorridos que hemos ido desarrollando durante estas dos últimas décadas. Es difícil recrear retrospectivamente una dinámica de la investigación colectiva marcada por múltiples circunstancias personales e institucionales que no siempre encajan dentro de lo que podríamos concebir como la “lógica propia a la investigación” (lógica que supone, en particular, una concepción previa de lo que es la investigación didáctica). Como toda narración, la que propondré requiere además una descontextualización, linearización, destemporalización y despersonalización relativas de esta dinámica, proceso que forma parte del trabajo de síntesis y evaluación de la producción científica y cuyos criterios no son siempre fáciles de explicitar.

Mi propuesta pretende complementar, desde un punto de vista alternativo, la que realizó recientemente Josep Gascón (2010). He elegido como eje estructurador cinco grandes recorridos de investigación caracterizados por las “grandes cuestiones” que podemos situar en su origen. Con ello intentaré exponer las contribuciones del grupo de forma comprensible, haciendo especial hincapié en los problemas que han dirigido las investigaciones y dejando en un segundo plano los desarrollos teóricos que las han acompañado, aunque en algunos casos estos hayan sido determinantes en la manera de plantear estos problemas y en la metodología seguida para abordarlos. En contra de una visión ingenua de la evolución científica, que tiende a considerar las herramientas teóricas como preexistentes a sus “aplicaciones prácticas”, veremos aquí que los trabajos

² La mayoría de publicaciones, materiales y proyectos de investigación producidos por el grupo TAD se encuentran en la web: www.atd-tad.org

de investigación que sirven de hilo a mi presentación, especialmente los que han dado origen a las diversas tesis doctorales, lejos de ser meras aplicaciones de una teoría didáctica establecida de antemano, constituyen verdaderas aportaciones al desarrollo del enfoque que propone la TAD.

Del álgebra elemental a la modelización funcional

El proceso de algebrización en la enseñanza secundaria

Ya desde sus inicios con el estudio de los procesos de transposición didáctica (Chevallard 1985), el desarrollo de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) ha estado estrechamente vinculado al problema de la enseñanza del álgebra elemental en secundaria. Este problema se formula y aborda siguiendo los principios que rigen el cuestionamiento básico del enfoque epistemológico en didáctica, es decir preguntándose sobre la naturaleza y el modo de existencia o funcionamiento de esta entidad llamada “álgebra” en las distintas instituciones sociales, especialmente en la escuela y en la llamada “matemática sabia”. Preguntarse qué es el álgebra elemental, qué actividades se asocian a este ámbito matemático y cuáles se podrían asociar, qué álgebra se enseña en la escuela y por qué, y también qué aspectos del álgebra quedan excluidos de la enseñanza, constituye, en cierto modo, un cuestionamiento anterior al problema docente de cómo enseñar el álgebra y cómo ayudar a los alumnos en sus dificultades de aprendizaje. Las diversas contribuciones de nuestro grupo al estudio de este problema han quedado recientemente recogidas en Gascón (2011) y Bosch (2012), así como en el primer número especial de la revista *Recherches en didactique des mathématiques* dedicado a la enseñanza del álgebra elemental (Chevallard y Bosch 2012; Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch y Gascón 2012).

El inicio del recorrido que aquí presentaremos se remonta a mi trabajo de tesis *La dimensión ostensiva en la actividad matemática* (Bosch 1994), que propone una nueva conceptualización para estudiar el papel de los distintos sistemas de signos (lenguaje verbal oral y escrito, escrituras, simbolismos, grafismos, gestos, etc.) en la actividad matemática, a través de las nociones de objeto *ostensivo* y *no ostensivo* y de la consideración de la *valencia instrumental* de los ostensivos en el desarrollo de la actividad. El caso del álgebra elemental juega en este estudio un papel primordial, especialmente cuando se contrasta con la aritmética, que tradicionalmente antecede al álgebra en la organización curricular (Bosch y Chevallard 1999, Bosch 2001).

El análisis de las principales características del álgebra como saber enseñado, sus relaciones con la aritmética y su papel como herramienta de modelización se lleva a cabo partiendo especialmente del estudio de los procesos transpositivos sufridos por estos grandes ámbitos matemáticos desde la enseñanza clásica anterior a la matemática moderna hasta nuestros días. Los trabajos de Yves Chevallard (1985, 1989a, 1989b) abordaban esencialmente el caso del sistema educativo francés, aunque muchos de los fenómenos detectados tienen una universalidad mucho mayor. A pesar de haber ampliado una parte de este estudio a la aritmética y álgebra de la enseñanza clásica española (Bosch 1994), faltaba abordar el caso, sin duda más complejo, del estatuto y las relaciones entre estos ámbitos en la enseñanza actual, que se presentaba a primera vista como una amalgama de organizaciones matemáticas en diferentes “estados transpositivos”, donde las razones y proporciones y las reglas de tres tan características del universo clásico coexisten con temas más propios de la matemática “postmoderna”, como las “aplicaciones lineales” o las “funciones de proporcionalidad”. De este

problema surge el trabajo de tesis de Pilar Bolea (2003). Una de sus principales aportaciones fue el poner de manifiesto que el análisis didáctico de un ámbito de enseñanza como el álgebra elemental requiere por parte de la investigación didáctica la elaboración de un punto de vista propio sobre el contenido matemático considerado.

Desde esta perspectiva, y tomando como ingredientes fundamentales los trabajos iniciales de Y. Chevallard en este ámbito, se elabora un *modelo epistemológico de referencia del álgebra escolar* que presenta este contenido, no como una obra matemática acabada y relativamente autónoma (como podría serlo, por ejemplo, la teoría de las razones y proporciones, o la geometría con regla y compás), sino como un instrumento de modelización de obras matemáticas previamente construidas, lo que designamos como *proceso de algebrización* (Bolea, Bosch y Gascón 2001a, 2001b, 2004; Gascón 1994-95). El análisis de las organizaciones matemáticas estudiadas en la enseñanza secundaria española puso entonces en evidencia el carácter fragmentario de este proceso, marcado en particular por la restricción del álgebra a la resolución de ecuaciones de una variable y por la ausencia de un trabajo mínimamente funcional con fórmulas y parámetros. También evidenció la algebrización abrupta que sufre la matemática enseñada en el paso de la secundaria obligatoria al bachillerato y a la universidad, sin que se hayan proporcionado previamente a los estudiantes las herramientas necesarias para llevar a cabo este proceso modelizador.

Proporcionalidad y modelización funcional

Cuando se formula el problema de la enseñanza del álgebra en Secundaria en términos del proceso de algebrización, surge la necesidad de profundizar en las relaciones que plantea esta perspectiva con la visión, propia de la TAD, de la matemática como herramienta de modelización. Los trabajos iniciales de Y. Chevallard (1989b) habían aportado una primera conceptualización del proceso de modelización matemática, evidenciando en particular la ausencia, en la escuela, de una relación a los modelos matemáticos como herramientas productoras de conocimientos. En efecto, la epistemología escolar dominante tiende a presentar los contenidos matemáticos como entidades con interés por sí mismas, que se trata de conocer y aprender a utilizar, en lugar de verlas como herramientas concretas para expresar hipótesis sobre los sistemas considerados, que pueden convertirse, a su vez, en nuevos sistemas para ser modelizados. De ahí que las situaciones extramatemáticas que se plantean como sistemas para ser matematizados acaben funcionando más como “modelos de los modelos” que como sistemas en sí mismos: por ejemplo cuando se considera la relación entre precio y cantidad o entre distancia y tiempo como prototipo de relación de proporcionalidad, en lugar de ver que la linealidad es una forma particular de expresar esta relación, aunque sea de forma aproximada. Los estudios de los fenómenos transpositivos relativos a la noción de función (Ruiz-Higueras 1994, 2001) y a la de proporcionalidad de magnitudes (Bosch 1994 y Bolea, Bosch y Gascón 2001b) se inscribían en esta problemática sin abordarla de frente. El trabajo de tesis de Francisco Javier García (2005) la retomó, aportando avances fundamentales. En primer lugar, mostró de qué manera el modelo general sobre la actividad matemática que propone la TAD, y que incluye la consideración de la modelización intramatemática como proceso esencial de desarrollo de las matemáticas, permitía articular dos ámbitos que la mayoría de investigaciones de la corriente internacional sobre “Mathematical modelling and application” consideran totalmente disjuntos: la enseñanza y aprendizaje de “contenidos” y el de la “práctica de modelización”. En particular, se propuso una reconceptualización de la “modelización matemática” en términos de construcción de

praxeologías de complejidad creciente, integrando así la modelización de sistemas extra-matemáticos con la de sistemas intra-matemáticos. Asimismo, apoyándose en un modelo epistemológico de referencia sobre los modelos funcionales elementales, diseñó un proceso didáctico para la introducción de la relación de proporcionalidad como una relación más dentro de un conjunto de relaciones posibles entre dos magnitudes discretas como un intento de romper el aislamiento y la atomización del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria (García, Bosch, Gascón y Ruiz-Higueras 2006 y 2007; Bosch, García, Gascón y Ruiz-Higueras 2007). Finalmente, llevó a cabo un estudio experimental de dicho proceso con alumnos de segundo ciclo de la educación secundaria obligatoria (14-16 años) partiendo de la planificación de un plan de ahorro, dentro del paradigma incipiente de los “recorridos de estudio e investigación” sobre el que volveremos más adelante.

La introducción del álgebra elemental como herramienta de modelización

Al proponer una conceptualización del álgebra elemental como proceso de modelización de organizaciones matemáticas previamente construidas, surge el problema de determinar qué tipo de organizaciones pueden resultar más efectivas para introducir este proceso en la enseñanza secundaria. Esta nueva línea de avance se basó en la propuesta de Y. Chevallard de considerar una organización matemática en torno a los *programas de cálculo* que, en cierto sentido, recubre la mayor parte del trabajo aritmético realizado en primaria y contiene todas aquellas técnicas de resolución de problemas basadas en la realización sucesiva de operaciones aritméticas básicas (sumas, restas, productos y divisiones). Al trabajar con programas de cálculo, surge en seguida un gran número de cuestiones que no pueden resolverse en el ámbito de esta organización y permite motivar un trabajo de algebrización progresiva de estos programas que conduce rápidamente a la construcción de las distintas herramientas algebraicas, desde el cálculo ecuacional con una incógnita, a las ecuaciones e inecuaciones con parámetros, pasando por la manipulación de fórmulas y culminando en el trabajo con funciones de varias variables. La propuesta de un modelo epistemológico de referencia para este rico proceso de algebrización que recubre, y excede, el trabajo algebraico de la enseñanza secundaria, al tiempo que lo articula con la matemática de la enseñanza primaria y con la modelización funcional del bachillerato, es una de las principales aportaciones de la tesis de Noemí Ruiz-Munzón (2010). Siguiendo la vía abierta por el trabajo de F. J. García (2005) y la modelización funcional, esta investigación también se basa en el diseño, experimentación y desarrollo de distintos procesos didácticos con un doble objetivo. El primero es poner a prueba experimentalmente el modelo epistemológico de referencia propuesto y poderlo refinar localmente. El segundo consiste en estudiar las restricciones institucionales que pesan sobre estas propuestas y las necesidades tanto matemáticas como didácticas que su funcionamiento pone en evidencia. Entre las restricciones detectadas, algunas provienen de la *epistemología escolar dominante* en Secundaria, es decir en la manera cómo se interpreta este ámbito en los documentos curriculares, libros de texto y otros materiales didácticos, mientras que otras están más ligadas al contrato didáctico y pedagógico imperantes, es decir a la manera de interpretar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de organizar en general la enseñanza de cualquier disciplina. Podemos citar al respecto el hecho que las cuestiones abordadas en clase sean siempre problemas “pequeños” que se pueden resolver en un corto espacio de tiempo, que las validaciones de las respuestas sean responsabilidad casi exclusiva del profesor y que raramente se

retomen conocimientos previamente contruidos para desarrollarlos, modificarlos o incluso desmentirlos.

Tomando en cuenta estas restricciones, la implementación de un proceso de algebrización funcional y articulado en el currículum obligatorio puede convertirse en una propuesta “realista” siempre y cuando se cumplan unas condiciones y se colmen unas necesidades en infraestructuras matemáticas y didácticas que van más allá del voluntarismo de los profesores y de sus necesidades formativas (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón 2010, 2011; Bosch 2010). Este tipo de estudio corresponde a lo que en la TAD se considera el problema de la *ecología* escolar de los saberes y que se formula en términos de la *problemática posibilista* en didáctica: “¿Qué elementos del álgebra elemental tienen cabida hoy día en la escuela, cuáles están prácticamente ausentes y qué nuevas condiciones permitirían su existencia?” (Chevallard y Bosch 2012).

En relación con esta problemática, el caso de la enseñanza de los números negativos aparece como un ejemplo paradigmático de las restricciones transpositivas que pesan sobre los contenidos matemáticos enseñados en la escuela. Basándose en un análisis epistemológico iniciado en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, Eva Cid (2000, 2001, 2004) muestra cómo la vinculación de estos números al ámbito de la aritmética conduce a una estrategia de enseñanza basada en la utilización de modelos concretos para su construcción y en la anteposición de una problemática teoricista que da prioridad a la definición del concepto de número negativo y a su “significado”, frente a la problemática práctica que les dio origen históricamente como herramientas necesarias para el desarrollo del trabajo algebraico —en efecto los números negativos (también llamados “algebraicos”) tardaron muchos años en ser considerados como “números verdaderos” por los propios matemáticos... En una investigación reciente que toma como punto de partida el proceso de algebrización de los programas de cálculo aritmético (Cid y Bolea 2010; Cid y Ruiz-Munzón 2011), se propone una construcción alternativa a la escolar tradicional haciéndolos aparecer como una necesidad técnica del trabajo de manipulación de expresiones algebraicas. Las experimentaciones llevadas a cabo con alumnos de primer ciclo de la educación secundaria obligatoria (12-14 años) muestran que el modelo adoptado es una herramienta productiva desde el punto de vista del diseño de propuestas de enseñanza, permitiendo llevar a cabo en el aula una introducción funcional de los números enteros situándolos en un entorno algebraico. Dicha introducción simplifica enormemente el aprendizaje de sus reglas de manipulación y conduce al final del proceso a una construcción a posteriori del conjunto de los enteros, mucho más coherente desde el punto de vista matemático y que permite además superar los obstáculos didácticos producidos por su vinculación a los modelos concretos (Cid 2001).

De la modelización algebraico-funcional al cálculo diferencial

La interpretación del álgebra escolar como un proceso de algebrización que afecta a la mayoría de organizaciones matemáticas enseñadas permite, no sólo proponer una introducción de este instrumento matemático que facilita el trabajo de modelización de situaciones matemáticas y extramatemáticas, sino también articular ámbitos que el currículum escolar actual presenta de manera atomizada y cuyas conexiones ausentes son fuente de dificultad para los alumnos. El caso que acabamos de comentar de los números enteros es un buen ejemplo de este fenómeno, como también lo es el de las relaciones —hoy día prácticamente inexistentes en la matemática enseñada— entre la geometría sintética y la analítica (Gascón 2002, 2003 y 2004), problema que aborda la tesis en curso de Bernat Ancochea. Como ya he comentado, el modelo epistemológico

de referencia que proponemos sobre el proceso de algebrización y que recubre el trabajo con expresiones algebraicas, se extiende hacia la consideración de los modelos funcionales como herramientas para superar las limitaciones del trabajo con fórmulas y la resolución de inecuaciones basados únicamente en las manipulaciones algebraicas. Esta extensión del modelo propone un proceso de generalización progresivo que parte de las funciones de una variable, pasa por las familias de funciones de una variable y culmina en las funciones de varias variables.

Ahora bien, también el trabajo con modelos funcionales se ve rápidamente limitado si uno prescinde de esa herramienta básica que es el cálculo diferencial. El trabajo actual de Catarina Lucas (2010) se centra en esta segunda ampliación del modelo epistemológico de referencia inicial, con el objetivo de poderlo contrastar experimentalmente mediante el diseño de recorridos de estudio e investigación para el bachillerato. Este modelo no puede obviar una gran dificultad que recorre —aunque se mantenga siempre oculta— el conjunto de las matemáticas enseñadas en Secundaria: lo podemos llamar el problema del estatuto de los números reales en la enseñanza o, más precisamente, el problema del conjunto numérico en el que se basa la matemática escolar y su relación con la problemática de la medida de magnitudes. Tomando como punto de partida el trabajo de tesis de Tomás Sierra (2006) que comentaremos más adelante, Mabel Licera (2008) propuso abordar este problema elaborando un modelo epistemológico de referencia para relacionar los números reales con la medida de magnitudes que sigue, en cierto sentido, la propuesta del matemático Henry Lebesgue (1931/1975). Dada la dificultad para abordar este problema en la enseñanza secundaria actual, M. Licera está actualmente elaborando una propuesta para la formación de profesores de secundaria, partiendo del postulado que algunos de los obstáculos con que se encuentran los alumnos no están necesariamente vinculados a la propia matemática en juego sino a la epistemología dominante en el sistema de enseñanza (Licera, Bastán, Bosch y Gascón 2011).

De los talleres de prácticas a los recorridos de estudio e investigación

La segunda gran línea de investigación que recoge una parte importante de las contribuciones de nuestro grupo se inscribe dentro del gran problema de la enseñanza universitaria de las matemáticas. Que surja este tema como una cuestión viva es cuando menos comprensible, dado que una parte importante de los investigadores del grupo son también profesores universitarios asignados a departamentos de matemáticas. Es sin embargo menos común que se decida abordar estas cuestiones desde el punto de vista de la investigación didáctica, con el esfuerzo de problematización que ello supone, así como de distanciamiento respecto de la propia problemática docente. En nuestro caso, además, este recorrido de investigación vino marcado por una importante evolución de la TAD al incorporar en primer lugar la noción de *praxeología* como modelo básico para describir la actividad matemática y, más en general, cualquier actividad humana (Chevallard, Bosch y Gascón 1997). Esta noción —unión de los términos griegos *logos* y *praxis*— sirve para referir a cualquier estructura posible de actividad y conocimiento, asumiendo que toda práctica o “saber hacer” (toda *praxis*) aparece siempre acompañada de un discurso o “saber” (un *logos*). Sin querer entrar en mayor detalle, sólo señalaré que el bloque práctico de una praxeología se compone de *tipos de tareas* y de *técnicas* o maneras de realizar estas tareas y que el bloque teórico se declina también en dos componentes: la *tecnología* o discurso razonado sobre la técnica, que aparece como un primer nivel descriptivo y justificativo de la práctica y un segundo nivel de fundamentación que se designa simplemente por *teoría*.

A la noción de praxeología le siguió un modelo específico para los procesos de enseñanza y aprendizaje en términos de *momentos didácticos* o *dimensiones del proceso de estudio* (Chevallard 1999). La noción de momento está estrechamente relacionada con la de praxeología puesto que hace referencia a la dinámica de construcción de los distintos componentes praxeológicos a partir del estudio de una cuestión problemática. Esta primera descripción de los procesos didácticos se complementa posteriormente con las nociones solidarias de *actividades* y *recorridos de estudio e investigación* (Chevallard 2005, 2006 y 2007).

Los talleres de prácticas matemáticas

Durante el curso académico 1990/91, el departamento de matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona nos planteó un problema que podríamos considerar como un ejemplo claro de “asesoría didáctica”. Dado que la licenciatura de matemáticas formaba parte de una facultad de ciencias, al lado de otras licenciaturas como física, química, biología y geología, se abrió la posibilidad de organizar, también para los estudiantes de matemáticas, unos “laboratorios de prácticas” a semejanza de sus compañeros de ciencias experimentales. Se pasó así de un sistema bimodular de organización escolar que distinguía las “clases de teoría” (con marcado carácter expositivo) de las “clases de “problemas” (con un mayor componente práctico) a un sistema trimodular al añadirse los llamados “talleres de prácticas”. ¿Qué se podía proponer, desde la didáctica, como actividad a desarrollar en estas nuevas clases?

Abordamos este problema en colaboración con Y. Chevallard, quien estaba llevando a cabo en aquel momento los desarrollos de la TAD que acabamos de mencionar. El modelo de los momentos didácticos ponía de manifiesto la ausencia institucional —tanto en la universidad como en el resto de instituciones escolares— de dispositivos específicos para dar lugar y visibilidad al *momento del trabajo de la técnica*. Las experimentaciones realizadas con los estudiantes universitarios pronto pusieron en evidencia la potencia productiva y articuladora de este dispositivo, al ofrecer un espacio de trabajo muy rico para la generación de nuevas cuestiones teóricas y para la elaboración de instrumentos de prueba y de contraste, aspectos altamente valorados de la actividad matemática que raramente surgen de forma espontánea en el trabajo de los alumnos. Desde el punto de vista del desarrollo interno de la teoría didáctica, estas experimentaciones también mostraron la importancia del *trabajo de ingeniería matemática* necesario para elaborar el material que da sustento y permite gestionar estas sesiones de prácticas: estábamos, en cierta manera, elaborando modelos epistemológicos de referencia de los distintos contenidos matemáticos que los estudiantes debían trabajar, desde la clasificación de grupos finitos, la descomposición de matrices y la geometría lineal, hasta la convergencia de series, el estudio de integrales impropias o las funciones de variable compleja (Bosch y Gascón 1994, 2010).

La experimentación de los talleres de prácticas se inscribía en una organización universitaria de la enseñanza de las matemáticas que, como toda organización, propone unas condiciones e impone al mismo tiempo unas restricciones para llevar a cabo los procesos didácticos, restricciones que permanecen relativamente desconocidas. Al otorgar importancia y visibilidad al trabajo de la técnica, los talleres ya suponían una ruptura respecto al “conceptualismo” y al “teoricismo” imperantes en este nivel de estudios. Asumían sin embargo muchos rasgos del contrato didáctico que en ese momento nos resultaban totalmente transparentes, por ejemplo el hecho que fuera el profesor el responsable de elegir el tema y elaborar el material que se proponía a los alumnos, así como muchas de las pautas para dirigir el propio proceso. Aunque resultara

productivo a un nivel poco experimentado, el trabajo que se pedía realizar a los alumnos no dejaba de ser muy dirigido por parte del profesor, lo que ocultaba una gran parte de la funcionalidad de los conocimientos involucrados. Los nuevos desarrollos de la conceptualización de los procesos didácticos en términos de *recorridos de estudio e investigación*, así como las experimentaciones parciales de estos recorridos en el trabajo de F. J. García (2005) y su relación con la problemática de la modelización matemática impulsaron una evolución importante de esta línea de investigación.

Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática

El trabajo de tesis de Berta Barquero (2009) y el de Lidia Serrano en curso desarrollan esta línea en el caso de la enseñanza universitaria de las matemáticas para las ciencias experimentales y para las ciencias económicas y empresariales respectivamente. El punto de partida de ambos trabajos es la constatación de que las matemáticas no se introducen en la enseñanza universitaria como una herramienta de modelización sino como un conjunto de contenidos que los alumnos deben conocer para, posteriormente, aprender a “aplicar” en situaciones extramatemáticas de las ciencias experimentales o económicas y sociales. Sorprende, en efecto, la gran uniformidad que existe en los distintos programas de matemáticas de las distintas carreras de ciencias experimentales y económicas de las universidades españolas, todos organizados según la lógica de la construcción teórica de los conceptos (los números reales antes que los límites y estos antes que las derivadas, etc.) sin ninguna relación con la lógica de los problemas de los distintos ámbitos científicos que las matemáticas contribuyen a clarificar.

El método de estudio seguido en estas investigaciones combina por un lado la observación “naturalista” del sistema universitario actual (análisis de los programas, entrevistas y cuestionarios a alumnos y profesores, etc.) con lo que se puede considerar como una observación “intervencionista” para detectar el margen de actuación posible en este ámbito, lo que supone tomar en cuenta tanto las condiciones que se requieren para modificar el funcionamiento actual del sistema como las restricciones institucionales que dificultan el llevar a cabo estas modificaciones. Siguiendo con la línea de investigaciones anteriores del grupo (García 2005, Rodríguez 2005 y Sierra 2006), en ambos casos se propuso introducir en la asignatura de matemáticas un nuevo dispositivo denominado “Taller de modelización matemática” en el que los grupos de estudiantes, bajo la dirección del profesor, deben abordar una cuestión problemática relativa a algún ámbito científico o empresarial cuyo estudio se prolonga durante por lo menos 8 o 10 sesiones semanales a lo largo de un trimestre del curso y para cuya resolución se requieren las herramientas principales del programa. Este tipo de dispositivo responde a lo que la TAD designa como *recorridos de estudio e investigación* (REI) y se plantea como una herramienta de análisis didáctico para describir, crear y analizar procesos didácticos de distinta índole, desde los focalizados en el aprendizaje de un contenido concreto y bien delimitado, hasta aquellos más cercanos a la problemática del investigador, en los que se parte de una cuestión más o menos definida y no se sabe de antemano qué tipo de herramientas se necesitarán ni qué proceso es conveniente seguir para su resolución.

Las experimentaciones llevadas a cabo durante varios cursos académicos (cinco en el caso del trabajo de B. Barquero, seis en el caso de L. Serrano) ponen en evidencia que, bajo ciertas condiciones poco habituales pero viables, los REI se pueden integrar, al menos localmente, en la organización actual de la enseñanza de las matemáticas y permiten desarrollar actividades prolongadas de estudio e investigación que muestran la

funcionalidad de los contenidos matemáticos del programa, así como sus posibles articulaciones, haciendo que los alumnos desarrollen un trabajo de cuestionamiento, construcción y búsqueda de modelos, contraste empírico y validación de soluciones muy propio de la actividad de modelización matemática y que raramente puede existir en los dispositivos de enseñanza habituales. Al mismo tiempo, se observa de qué manera los nuevos talleres introducidos son capaces de influir a medio y largo plazo sobre el resto de dispositivos de enseñanza —las clases de “teoría” y de “problemas”—, haciendo que las cuestiones planteadas motiven la introducción de los contenidos y, en algunos casos, interfieran en el orden de exposición de los mismos.

Al modificar el funcionamiento habitual del sistema de enseñanza, las experimentaciones también sacan a relucir lo que se podría considerar en primera instancia como “dificultades” por parte de los estudiantes y profesores (o, mejor, por parte del sistema de enseñanza) para adaptarse al nuevo tipo de actividad, pero cuyo análisis detallado muestra como verdaderas *restricciones institucionales* que actúan en distintos niveles. Algunas de estas restricciones provienen de los contratos pedagógicos y didácticos dominantes en la enseñanza universitaria, según los cuales se espera del profesor que presente a los estudiantes unos contenidos predeterminados previamente “validados” por la comunidad científica y que estos se limiten a asumirlos y a aprender a manejarlos. Otras provienen de la epistemología dominante en las instituciones universitarias sobre el papel de las matemáticas en el desarrollo de las ciencias, que hemos designado como “aplicacionismo” (Barquero, Bosch y Gascón 2011). Y aún otras, más generales, provienen de una concepción de la construcción y transmisión del conocimiento que Y. Chevallard designa como *el paradigma de la visita de las obras* en oposición al *paradigma del cuestionamiento del mundo*.

En el caso de las matemáticas para las ciencias experimentales como para las ciencias económicas y empresariales, se pone de manifiesto que la implementación de nuevos dispositivos didácticos para organizar la enseñanza en torno a actividades de investigación y estudio de cuestiones problemáticas requiere la elaboración, desde la didáctica, de modelos epistemológicos de referencia para los distintos ámbitos matemáticos en que pueden inscribirse las cuestiones abordadas. Si la implementación de los REI requiere la creación de dispositivos didácticos ad hoc para facilitar ciertos gestos del estudio habitualmente ausentes en la enseñanza tradicional, también se necesitan nuevas maneras de organizar los contenidos matemáticos —nuevas *infraestructuras matemáticas*— que permitan dar sustento a estos procesos didácticos. Las investigaciones de B. Barquero y L. Serrano proponen algunos de estos desarrollos, mostrando por ejemplo que se puede estructurar el contenido de un curso estándar de matemáticas para las ciencias experimentales alrededor de tres grandes recorridos de estudio sobre los modelos de poblaciones (Barquero 2009; Barquero, Bosch y Gascón 2010 y 2011) o sobre problemas de previsión empresarial (Serrano, Bosch y Gascón 2010). Desde un punto de vista más local, C. Fonseca analiza las nuevas condiciones que se requieren en distintos entornos universitarios para la implementación y gestión de los recorridos (Fonseca, Casas, Bosch y Gascón 2009; Fonseca, Bosch y Gascón 2010; Fonseca 2011; Fonseca, Casas y Insua 2011; Fonseca, Pereira y Casas 2011).

El paso de la enseñanza secundaria a la universidad

Los fenómenos didácticos que se destacan en esta línea de investigación tienen una generalidad que va sin duda más allá de la enseñanza universitaria de las

matemáticas. Su extensión al caso de otras disciplinas y, sobre todo, a otros niveles de enseñanza como la secundaria o primaria son algunas de las nuevas cuestiones que quedan pendientes de exploración. Nuestras investigaciones sobre la enseñanza de la modelización algebraica y funcional en secundaria han aportado contribuciones valiosas al respecto, pero sólo hemos realizado hasta el momento experimentaciones a pequeña escala, muy propicias para el análisis clínico de este nuevo tipo de procesos, pero insuficientes para dar cuenta de la *ecología didáctica* de los REI, es decir de sus condiciones de posibilidad y evolución en los actuales sistemas de enseñanza. El proyecto actual de nuestro grupo se propone abordar de frente esta gran problemática considerando de algunos ámbitos matemáticos prototípicos de los distintos niveles de enseñanza —la construcción de conocimientos numéricos en la educación infantil, la numeración y los problemas aritméticos en primaria, la modelización algebraico funcional en secundaria, el cálculo diferencial y los números reales en el bachillerato—, haciendo especial incidencia en la formación inicial y continua del profesorado. A nivel internacional, la participación de F. J. García en los proyectos europeos COMPASS (www.compass-project.eu) y PRIMAS (www.primas-project.eu) centrados en la difusión a gran escala de la modelización matemática y de metodologías para una enseñanza de las matemáticas y las ciencias por investigación (*inquiry-based learning*) permitirá ampliar la base empírica de estudio del problema, así como analizar las intervenciones basadas en otros enfoques teóricos, en estrecha articulación con la TAD.

He mencionado una función importante de los REI: permitir que los contenidos matemáticos curriculares se introduzcan en los procesos didácticos de manera funcional, es decir para aportar respuesta a cuestiones que se plantean y no como entidades a las que se les supondría un valor por sí mismas y cuya utilidad aparece siempre postergada a una supuesta necesidad futura, que a veces no acaba nunca por llegar. Otra función importante que he destacado menos es su capacidad para articular distintos contenidos y poder así elaborar respuestas apropiadas a las cuestiones que se estudian. Este potencial articulador de los REI responde también, parcialmente, a otro gran problema de investigación que formuló Cecilio Fonseca en su tesis doctoral (Fonseca 2004) en términos de las discontinuidades matemáticas y didácticas que encuentran los estudiantes de secundaria cuando ingresan en la universidad y que permiten explicar un gran número de las dificultades que plantea la transición entre estas dos etapas educativas.

A partir de un cuestionario pasado a varios centenares de estudiantes de primer curso universitario de distintas carreras de ciencias y distintas universidades españolas, completado con un análisis de los libros de texto más utilizados en el bachillerato español, C. Fonseca muestra en qué sentido las organizaciones matemáticas que se estudian en secundaria se pueden considerar “incompletas”, definiendo un conjunto de indicadores definidos a priori y que permiten definir la noción clave de *organización matemática local relativamente completa*. Se ve así que, en general, las praxeologías matemáticas que se ponen a disposición de los alumnos tienden a privilegiar una única técnica para resolver cada tipo de problemas, sin plantearse nunca el problema de decidir qué técnica se debe utilizar ni con qué criterio. Además, las técnicas matemáticas que se utilizan son muy dependientes de la nomenclatura básica utilizada (las incógnitas siempre se designan por x , las funciones $f(x)$, etc.), el dominio de una técnica de resolución casi nunca va asociado con la posibilidad de utilizar la técnica inversa, no se plantean nunca problemas abiertos que requieren un mínimo trabajo de modelización, ni se plantean cuestiones teóricas sobre el ámbito de validez de las técnicas utilizadas, su justificación o su fiabilidad. La gran concordancia entre los

errores de los alumnos y las propuestas de los libros de texto muestra la dimensión institucional de este fenómeno, al tiempo que explica tanto su extensión y robustez como la imposibilidad de abordarlo incidiendo únicamente en los actores del sistema (profesores y alumnos).

Al llegar a la universidad, el “aislamiento” de las organizaciones matemáticas de secundaria no se toma como un punto de partida para realizar construcciones más amplias y “completas”, sino que se trabaja principalmente con los componentes teóricos de dichas organizaciones, dejando al estudiante gran parte de la responsabilidad de la reconstrucción de los componentes prácticos, es decir de su “completación”. El análisis de este tipo de “discontinuidades matemáticas”, que sólo he mencionado brevemente aquí, se completa con un estudio sobre las discontinuidades que aparecen entre los contratos pedagógicos y didácticos de ambas instituciones de enseñanza (Bosch, Fonseca y Gascón 2004; Fonseca, Bosch y Gascón 2010).

En España, a finales de los años 90, un gran número de universidades de ciencias propusieron una serie de “cursos cero” de matemáticas como posible remedio a las dificultades que planteaba la transición del bachillerato a la universidad. En la investigación de Lidia Serrano (2007) sobre la enseñanza de las matemáticas en economía y ciencias empresariales se analiza esta respuesta institucional espontánea, mostrando en qué sentido la remediación propuesta puede llegar a acentuar la atomización de los contenidos matemáticos, agravando así en lugar de atenuar las discontinuidades observadas. Para la investigación en didáctica, es evidente que las soluciones propuestas basadas en un diagnóstico poco elaborado del problema didáctico que se pretende resolver difícilmente pueden tener la efectividad deseada, más aún cuando lo que está en juego es más un intento de imposición de una estrategia didáctica considerada adecuada por parte de la universidad a unos estudiantes que se supone insuficientemente preparados. La línea de trabajo que propugna la investigación de L. Serrano se centra más en explorar las condiciones de posibilidad de un cambio didácticamente fundamentado, tanto en la enseñanza universitaria como en los anteriores niveles educativos (Serrano, Bosch y Gascón 2007).

La formación del profesorado y las relaciones TSD-TAD

Al lado de los problemas que plantea la enseñanza universitaria de las matemáticas y que, como hemos visto, motivan uno de los principales recorridos del grupo, el otro gran ámbito de cuestionamiento ligado a nuestra práctica docente es el de la formación del profesorado. Cuando se constituyó el SIIDM, uno de los vínculos principales, al lado del desarrollo de la investigación en didáctica tal como la preconizaba Guy Brousseau, era el de la utilización de los materiales y resultados fruto de esta investigación en la formación de maestros. Se contaba en efecto con un gran número de experiencias de clase basadas en ingenierías didácticas experimentadas en la escuela Jules Michelet de Burdeos y, sobre todo, se contaba con unos análisis epistemológicos y metodológicos que las convertían en un material muy rico para la formación.

La presencia en el grupo de investigadores que, por decirlo de una manera un poco coloquial, “por la mañana enseñaban la TSD y por la tarde investigaban en la TAD”, nos condujo a plantearnos un proyecto de trabajo que se proponía ahondar en las relaciones entre estos dos enfoques analizando, desde la TAD, las propuestas de ingeniería didáctica elaboradas por la TSD. Nuestra hipótesis inicial, que se fue reforzando a medida que avanzábamos en los análisis, es que las herramientas de la

TAD pueden resultar muy útiles para explicitar los modelos epistemológicos de referencia que la TSD formula en términos de situaciones matemáticas (o de secuencias de juegos contra un medio en evolución). El principio modelizador de la TSD para redefinir los conocimientos matemáticos desde la propia didáctica, con el objetivo de mejorar nuestra comprensión y control de los fenómenos didácticos consiste en asociar a cada “conocimiento” una situación fundamental capaz de generarlo a partir de los distintos valores que se pueden dar a sus variables. Esta proximidad entre el tipo de modelo epistemológico propuesto y las situaciones de enseñanza, que es parte de la potencia modelizadora de la TSD en cuanto le permite prescindir de la descripción sabia del conocimiento y, por lo tanto, emanciparse de ella, es a su vez una debilidad en la difusión y comprensión de esta teoría. Los modelos epistemológicos que se construyen aparecen en realidad como propuestas para la enseñanza, meras innovaciones que se trataría de adaptar a cada sistema educativo y cuyas ventajas habría que determinar.

A raíz de un trabajo colectivo en el marco del SIIDM sobre el análisis del artículo de Guy y Nadine Brousseau “El peso del recipiente” (Brousseau y Brousseau, 1991-92) desde distintas perspectivas (BAHUIJAMA 2000, 2005), nos propusimos describir la secuencia de situaciones didácticas propuestas por G. y N. Brousseau elaborando un modelo epistemológico de referencia formulado en términos propios a la TAD. Este modelo se concreta en una secuencia de praxeologías matemáticas que parten de la comparación de magnitudes a partir de la manipulación de objetos y acaban con una organización matemática isomorfa al conjunto de los números reales. La tesis doctoral de Tomás Sierra prosiguió en esta vía añadiendo al caso de la medida de magnitudes el de la numeración. Me gustaría destacar dos aportaciones importantes de este estudio. En primer lugar, los modelos epistemológicos de referencia que en todos los casos se podían expresar en términos de secuencias de praxeologías matemáticas permitían analizar y diseñar procesos didácticos para distintos “niveles educativos”, desde la educación infantil y el primer ciclo de primaria, hasta la secundaria obligatoria y la formación de maestros. El modelo construido debía, obviamente, adaptarse a cada ámbito institucional, desarrollando más o menos algunos de sus elementos, manteniéndose relativamente invariante en su núcleo, aportando así nuevos elementos para la comprensión del fenómeno de la relatividad institucional del conocimiento matemático (Sierra 2006). En segundo lugar, en coherencia con el principio modelizador de la TSD, los modelos epistemológicos propuestos en términos de secuencias de praxeologías matemáticas, al integrar una dinámica propia de la actividad matemática, acaban siendo difícilmente separables de los procesos didácticos a los que daban lugar. En otras palabras, es prácticamente imposible proponer un modelo epistemológico sin proponer, al mismo tiempo y de forma inseparable, un modelo didáctico sobre la emergencia y evolución de este conocimiento. Lo didáctico y lo matemático aparecían así intrínsecamente entrelazados y la dinámica entre praxeologías nos permitía dar cuenta de ello.

Los esfuerzos de difusión a la comunidad de los maestros e investigadores de los trabajos realizados en el marco de la TSD, así como su interpretación y desarrollo en términos de la TAD, han sido permanentes entre los miembros del grupo cuya docencia se centra principalmente en la formación de maestros de educación infantil y primaria (García y Ruiz-Higueras 2010, 2011; Ruiz-Higueras 2001b, 2004, 2008, 2011a, 2011b, 2011c; Ruiz-Higueras y García 2010; Sierra 2011; Sierra, Bosch y Gascón 2011; Bosch, Gascón y Sierra 2009; Gascón y Sierra 2009). Las investigaciones llevadas a cabo han permitido ampliar considerablemente el ámbito matemático de muchas hipótesis y resultados obtenidos en experimentaciones con estudiantes de educación secundaria y

universitaria. En particular, los procesos didácticos basados en la actividad de modelización matemática y estructurados en recorridos de estudio e investigación se han revelado como un instrumento de análisis, diseño y desarrollo de actividades de enseñanza para la educación infantil, así como para la formación del profesorado de este nivel educativo. Una riqueza muy importante de nuestro grupo, que me gustaría destacar aquí, es que la diversidad de sus miembros nos abre la posibilidad de enfocar una misma problemática didáctica hacia distintos entornos institucionales y niveles educativos, aspecto clave para el estudio de los fenómenos relacionados con la *ecología* de los REI, es decir el análisis de las condiciones de posibilidad de determinadas formas de estudio y de las restricciones que pesan sobre su desarrollo. Esta riqueza queda plasmada tanto en los resultados que hemos ido obteniendo como en nuestra contribución al propio desarrollo de la TAD.

Actualmente, los esfuerzos del grupo se centran en desarrollar un nuevo dispositivo de formación que denominamos *recorridos de estudio e investigación de formación del profesorado* (REI-FP) como respuesta al problema de la formación del profesorado tal como lo formula la TAD (Cirade 2006, Bosch y Gascón 2009). Partiendo del principio que una de las principales restricciones que pesan sobre la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización es la epistemología dominante en la escuela, que se concreta en la rígida organización curricular de la matemática escolar, los REI-FP intentan superar estas restricciones tomando como punto de partida la vivencia por parte de los profesores en formación de recorridos de estudio e investigación adaptados al nivel educativo considerado (infantil, primaria o secundaria según el caso). Esta experiencia sirve entonces de medio empírico para iniciar a los profesores al análisis de los procesos didácticos y poder llegar, eventualmente, al diseño y experimentación de nuevos recorridos (Ruiz-Olarría y Sierra 2011).

Análisis de las organizaciones didácticas y del papel del profesor

Los tres recorridos que hemos presentado previamente tienen su origen en el propio sistema educativo que nos proponemos analizar. En todos ellos hemos visto que, en un momento u otro, jugaba un papel fundamental la reconstrucción que se realiza desde la investigación didáctica de los contenidos matemáticos que están en juego, así como de la manera de concebir lo que es la actividad matemática y su dinámica. Sólo mediante la construcción de lo que hemos llamado modelos epistemológicos de referencia puede el investigador abordar su objeto de estudio sin “contaminarse” de la visión de este objeto que le proponen las instituciones observadas. La explicitación de estos modelos permite además su contraste experimental y su discusión y puesta a prueba según las reglas del debate científico.

Este gesto de emancipación, que resulta metodológicamente crucial para la investigación en la TAD, se puede extender desde la propia actividad matemática a la actividad didáctica de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este caso, podemos hablar de *modelos didácticos de referencia*, cuya elaboración requiere de herramientas teóricas apropiadas. Son estas herramientas las que proporcionarán entonces los elementos necesarios para describir la práctica docente, así como la práctica “discente” (del alumno), englobándolas en un modelo general de la *actividad de estudio y de ayuda al estudio*.

Partiendo del modelo general de actividad matemática formulado en términos de *praxeologías*, y con el objetivo de integrar en él la dinámica de la (re)construcción de

praxeologías matemáticas previamente establecidas, Y. Chevallard (1999) propuso un primer modelo de análisis de las organizaciones didácticas compuesto por seis *momentos* o dimensiones del estudio. Este modelo fue en un principio lo que guio las investigaciones que llevábamos a cabo mediante el diseño y experimentaciones de procesos didácticos. En la tesis doctoral de Lorena Espinoza (1998), se utilizó de forma sistemática para la descripción y análisis de las organizaciones didácticas establecidas por dos profesores de bachillerato en la enseñanza de la noción de límite de función. La propuesta de un modelo epistemológico de referencia en torno a esta noción permitió mostrar las contradicciones que encierra su enseñanza en este nivel educativo al proponerse de hecho una organización matemática “bicéfala” en la que la dimensión teórica respondía a la problemática de la fundamentación de la noción de límite, mientras que su componente práctico se limitaba a una mera álgebra del cálculo límites. Pero, independientemente de esta gran restricción matemática presente en el currículo de bachillerato, el análisis clínico realizado en términos de los momentos del estudio permitió distinguir diferencias importantes en las organizaciones didácticas implementadas (Bosch, Espinoza y Gascón 2003; Barbé, Bosch, Espinoza y Gascón 2005). Este tipo de análisis dio lugar a una propuesta de clasificación de las organizaciones didácticas espontáneas en términos de grandes “prototipos” determinados cada uno por dos momentos dominantes (Gascón 2001; Bosch y Gascón 2004 y 2005). F. J. García y L. Ruiz-Higueras (2011) han propuesto recientemente una metodología de análisis de las praxeologías didácticas del profesor (su *praxis* y su *logos*) que combina el modelo de los momentos del estudio con una caracterización de la praxis didáctica del profesor en términos de técnicas *meso*, *topo* y *crono-genéticas*, partiendo de los trabajos de Gérard Sensevy et al. (2000, 2005).

El modelo de los momentos didácticos se subsumiría posteriormente en un modelo más general, el del “esquema herbartiano” (Chevallard 2008) que está en la base de los recorridos de estudio e investigación y que constituye el *modelo didáctico de referencia* que usa actualmente la TAD. Este esquema pretende describir cualquier proceso en la que un grupo de personas, los “estudiantes”, bajo la dirección de un “director de estudio”, consideran una cuestión problemática y deciden hacer algo para elaborar una respuesta propia a dicha cuestión. El esquema herbartiano incluye los episodios en los que el director pone a disposición del grupo de estudiantes herramientas teórico-prácticas para la elaboración de la respuesta, así como la consideración y crítica de respuestas previas a la cuestión, episodios que se enmarcarían dentro de la concepción corriente de la enseñanza. Pero también incluye la consideración de “medios experimentales” para contrastar la validez de las respuestas parciales aportadas, así como la inclusión de nuevas cuestiones o subcuestiones generadas por la dinámica del proceso de estudio. Las investigaciones científicas, policiales, periodísticas o judiciales también se pueden subsumir en dicho esquema, así como las actividades de aprendizaje basadas en la investigación, que aparecen aquí conectadas con el propio aprendizaje de “contenidos” preexistentes a la problemática del estudio.

Así como el modelo de los momentos parte siempre de una organización matemática como objetivo del proceso de enseñanza, en el esquema herbartiano que sirve de modelo de los REI es siempre una cuestión problemática la que origina el estudio, sin que se pueda determinar totalmente de antemano cuáles serán las herramientas nocionales y técnicas que se necesitarán ni las subcuestiones que surgirán a medida que avance el proceso de estudio. En Bosch y Gascón (2010) se presenta una síntesis de las relaciones entre estos distintos modelos y las nociones asociadas de

actividades de estudio e investigación (AEI) y recorridos de estudio e investigación (REI).

Interacción con otros enfoques en didáctica

Reformulación de problemas del enfoque cognitivo en términos de la TAD

A diferencia de lo que ocurre en las disciplinas científicas más maduras, en la investigación didáctica conviven actualmente muchos enfoques que se distinguen, no sólo por el tipo de problemas que abordan y las herramientas elaboradas para ello, sino, además, por algunas de las asunciones básicas que fundamentan el trabajo de investigación. En esta situación, el debate en la comunidad investigadora es a la vez permanente y necesario, pero no siempre fructífero, en particular cuando se parte de enfoques muy distantes que tienden a priorizar variables muy diferentes del universo didáctico que se toma como objeto de estudio. Incluso la propia delimitación del objeto de estudio es fuente de disconformidad. Un hecho que caracteriza a la TAD frente a otros enfoques es, en primer lugar, el gran número de precauciones que toma para evitar dar por sentado asunciones propias de las instituciones sociales que participan en los procesos didácticos. Y lo es también por adoptar un punto de vista institucional muy amplio, que permite tomar en consideración condiciones y restricciones de naturaleza variada que se postulan como fuertemente explicativas de los fenómenos didácticos.

He optado por incluir en un último recorrido aquellas investigaciones relacionadas con otros marcos teóricos, ya sea porque parten de “cuestiones exógenas”, es decir formuladas fuera de la TAD, ya sea porque se proponen abordar directamente el propio problema de la interacción entre enfoques diversos. En relación al primer tipo mencionado, la tesis doctoral de Luisa Ruiz-Higueras (1994) es el primer trabajo del grupo que reformula, en términos de la TAD, una problemática propia de los primeros desarrollos del paradigma cognitivo de la didáctica, en este caso, la del estudio de las concepciones de los alumnos y sus efectos en los aprendizajes. El contenido matemático abordado es el de las funciones de una variable. En la investigación de L. Ruiz-Higueras se muestra en qué sentido las “concepciones” de los alumnos corresponden a características propias del saber enseñado que se pueden interpretar a la luz de los procesos transpositivos. El problema cognitivo de las concepciones se convierte así en el problema institucional de caracterizar el saber matemático que se quiere enseñar y explicar sus peculiaridades a partir del análisis de los fenómenos de transposición didáctica asociados.

El trabajo de tesis doctoral de Lorena Espinoza (1998) también partía de un problema propio del paradigma cognitivo: el del “pensamiento del profesor” sobre el tema de los límites de funciones y su influencia sobre la enseñanza. Como ya he comentado anteriormente, este problema se formuló en términos de la descripción de las organizaciones didácticas activadas por los profesores en la impartición de este tema. La dinámica de dichas organizaciones se estructuró siguiendo el modelo de los momentos del estudio y tomando en consideración el discurso teórico que explicita el profesor como elemento descriptor y justificador de su práctica docente. Además, esta descripción se fundamenta en un modelo epistemológico de referencia del contenido matemático en juego, modelo que toma en consideración los procesos transpositivos, siguiendo una metodología de análisis similar a la de L. Ruiz-Higueras.

Cuando el modelo de los momentos didácticos se amplió para integrarse en el de los recorridos de estudio e investigación, la tesis doctoral de Esther Rodríguez (2005)

abordó desde esta perspectiva otro problema paradigmático del enfoque cognitivo: el de las funciones de la metacognición en la capacidad de los alumnos para resolver problemas. La experimentación de un REI sobre la comparación de tarifas telefónicas mostró que un gran número de elementos de la actividad que se atribuyen a los procesos metacognitivos (por ejemplo la planificación del proceso a seguir, el control de estos procesos o la evaluación de resultados a corto y largo plazo) corresponden en realidad a aspectos de la actividad matemática que el contrato didáctico tradicional asigna en exclusiva al profesor y que, al ser una actividad “didáctica”, no se consideran como genuinamente matemáticos. Se ve así hasta qué punto muchas investigaciones del enfoque cognitivo asumen de forma acrítica la concepción escolar de las matemáticas y la separación cultural entre lo matemático y lo didáctico o, más en general, la interpretación común de “lo cognitivo” y de lo está “más allá de lo cognitivo” (Rodríguez, Bosch y Gascón 2007, 2008).

Diálogo entre teorías y praxeologías de investigación

Nuestra aportación al problema de las relaciones entre la TAD y los demás enfoques en didáctica no se ha limitado a la reformulación de problemas “exógenos” como los que acabamos de presentar. Desde 2005, hemos participado en el grupo europeo *Networking theories in mathematics education* liderado por Angelika Bikner-Ahsbahr (Bikner-Ahsbahr et al. 2010; Prediger, Arzarello, Bosch y Lenfant 2008) centrado en estudiar el problema general de las relaciones entre teorías didácticas. En el marco de la TAD, la reflexión sobre la actividad de investigación se hace en términos de *praxeologías*, en consonancia con el postulado general mencionado anteriormente por el que toda actividad humana se puede describir en estos términos. El hecho de hablar de *teorías* cuando nos referimos a distintos marcos o enfoques de investigación resulta entonces de una sinécdoque muy común en el campo del conocimiento: la de designar toda una actividad —aquí las *praxeologías de investigación*— por su componente teórico, considerado normalmente en nuestra cultura como el emblema y principal vía de acceso a las praxeologías relacionadas con el saber.

Cuando se aborda el problema de las interacciones entre teorías restableciendo todo el *espesor praxeológico* del trabajo de investigación, se pueden identificar algunas grandes “modalidades de diálogo” según el nivel de la praxeología en el que nos situamos (Artigue, Bosch y Gascón 2011a, 2011b). Hemos realizado este tipo de trabajo de cooperación con investigadores de la TSD (Artigue, Bosch, Lenfant y Gascón 2010), diálogo que tiene características muy especiales debido a la gran proximidad entre ambas praxeologías, en especial al nivel de los fundamentos teóricos y tecnológicos de la investigación didáctica. Más allá del enfoque epistemológico en didáctica, hemos llevado a cabo diálogos con teorías más “lejanas”, que se sitúan dentro del enfoque cognitivo, como es el caso de la teoría APOS (Trigueros, Bosch y Gascón 2011) y dentro del enfoque semiótico (Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena 2008). Al poder distinguir distintos niveles praxeológicos en el diálogo, estos trabajos han permitido identificar las principales estrategias adoptadas en el trabajo de *networking*, así como algunas ausencias significativas.

Al margen del propio contenido de las investigaciones realizadas en interacción con otros enfoques didácticos, una contribución importante de nuestro grupo ha sido la difusión internacional de la TAD como praxeología de investigación, tanto en América Latina como en los países europeos de lengua no francesa. Cabe destacar al respecto la participación de algunos miembros del grupo en proyectos financiados por la Unión Europea, como son el proyecto LEMA sobre la enseñanza de la modelización y la

formación del profesorado, el proyecto COMPASS sobre la interdisciplinariedad y el proyecto PRIMAS ya citado. Es de hecho en el trabajo regular de investigación y desarrollo educativo a medio y largo plazo donde tiene lugar la interacción real entre praxeologías de investigación y donde se pueden difundir y debatir las metodologías y resultados obtenidos en el marco de la TAD (García y Wake 2010; García, Mass y Wake 2010; Grigorás, García y Halverscheid 2011).

Fuera de recorrido: el desarrollo teórico de la TAD

Los recorridos de investigación que hemos presentado muestran las aportaciones de nuestro grupo en la formulación y tratamiento de problemas didácticos que surgen de cuestiones ligadas a distintos ámbitos educativos, desde la educación infantil hasta la enseñanza universitaria y la formación del profesorado. Como ocurre con la mayoría de problemas didácticos, los aportes de la investigación no se limitan a proponer respuestas parciales a estas cuestiones, sino que ofrecen nuevas conceptualizaciones del universo didáctico que en algunos casos exceden, incluso, el mundo de la enseñanza para adentrarse en la consideración de fenómenos más generales, tanto epistemológicos como sociales.

Por lo tanto, si retomamos la idea de interpretar la TAD como una praxeología de investigación, podemos decir que nuestra descripción de los aportes del grupo se ha centrado en el *bloque práctico*, es decir, en los tipos de problemas que hemos formulado, en la manera de abordarlos y en las respuestas parciales obtenidas. Han quedado implícitas las contribuciones que se sitúan en el *bloque teórico* de la praxeología de investigación y que, como ya hemos comentado anteriormente, siempre están íntimamente ligadas a las anteriores. El avance de la investigación es siempre solidariamente un avance teórico y práctico. No queríamos acabar esta reseña sin mencionar, aunque sea brevemente, algunos de los principios teóricos y metodológicos que forman parte de las asunciones básicas de la TAD y que nuestras investigaciones han contribuido a desarrollar.

El primer aporte hace referencia a la noción de *modelo epistemológico de referencia* expresado en términos de praxeologías. Constituye una de las herramientas metodológicas clave para construir un punto de vista propio a la didáctica sobre los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La construcción de estos modelos como alternativa a la visión de la matemática que proponen tanto la escuela como la institución “sabia” de los investigadores, requiere una delimitación del ámbito empírico de investigación que excede el ámbito de la enseñanza, para poder tomar en consideración el conjunto de instituciones que intervienen en los procesos transpositivos. Así, la investigación en la TAD no sólo considera como objeto de estudio las actividades de los alumnos, o la de los alumnos y profesores en el aula, sino que se interesa por un universo empírico mucho más amplio, que va desde la multitud de documentos relacionados con los contenidos de enseñanza y la propia producción de las praxeologías matemáticas, tanto en el presente como en el pasado, hasta las prácticas y discursos que surgen en distintos ámbitos de la sociedad y que afectan, de manera muchas veces insospechada, la manera en que estas praxeologías se difunden (o dejan de difundirse) en la escuela. La mayoría de nuestras investigaciones han contribuido a ejemplificar la importancia y la fecundidad de esta ampliación de la *unidad de análisis* de los procesos didácticos, elaborando a menudo herramientas metodológicas ad hoc para el estudio.

En relación con la noción de *recorrido de estudio e investigación* que, como hemos visto, funciona como un modelo didáctico de referencia ampliando y generalizando la noción de modelo epistemológico de referencia, cabe mencionar que las investigaciones del grupo han sido pioneras en el diseño, experimentación y análisis de distintos REI en el ámbito de la enseñanza secundaria y en la formación del profesorado, permitiendo así progresar en el conocimiento de las dinámicas que rigen este tipo de procesos de estudio.

Quiero destacar finalmente nuestro aporte a la *problemática ecológica* en didáctica, es decir al estudio de las condiciones que facilitan y de las restricciones que dificultan la difusión de las praxeologías matemáticas en las instituciones sociales. Esta es la problemática principal que dirige las experimentaciones llevadas a cabo con la implementación de distintos REI en instituciones educativas diferentes, aparte de constituir un contraste experimental tanto para los modelos que los fundamentan como para las propias propuestas didácticas. Su objetivo es, en efecto, explorar los tipos de necesidades que suscitan y los *niveles* en los que surgen estas necesidades (pudiendo ser matemáticas, didácticas, pedagógicas, escolares o sociales), así como los principales impedimentos que frenan su desarrollo. Sólo conociendo bien el “espacio de posibilidades” que ofrecen los sistemas educativos actuales y, sobre todo, las fuentes de las principales “resistencias”, podremos introducir cambios controlados en un sistema de enseñanza al que le cuesta evolucionar. En la actualidad, la ecología escolar de las matemáticas está profundamente marcada por el paradigma de lo que Y. Chevallard designó como “la visita de las obras” (Chevallard 2005), aunque recientemente son más las corrientes y presiones sociales que proponen hacerla evolucionar hacia un modelo más adecuado con el paradigma del “cuestionamiento del mundo” en el que tiene una función preponderante la actividad de estudio e investigación. Profundizar en el análisis de la ecología escolar de los REI, sus posibilidades de evolución y, en particular, explorar las posibles funciones que pueden desempeñar en la formación del profesorado es uno de los grandes retos que nuestro grupo se propone abordar a corto y medio plazo.

Referencias

- Artigue, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011a). La TAD face au problème de l'interaction entre cadre théoriques en didactique des mathématiques. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 33-55). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Artigue, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011b). Research praxeologies and networking theories. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME7* (pp. 2381-2390). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.
- Artigue, M., Bosch, M., Gascón, J. y Lenfant, A. (2010). Research problems emerging from a teaching episode: a dialogue between TDS and ATD. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1535-1544). Lyon, Francia: INRP.
- Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. y Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches, *ZDM – Mathematics Education*, 40, 179 -188.
- BAHUJAMA (Bolea, P, Bosch, M., García, J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L., Sierra, T. A.) (2000) Análisis didáctico del artículo "El peso del recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM" en le marco de la teoría antropológica. *Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm>

- BAHUJAMA (Bolea, P.; Bosch, M.; García, J.; Gascón, J.; Ruiz Higuera, L.; Sierra, T. A.) (2005) Analyse de « La mesure en CM1 » d'après la TAD. En M. H. Salin, P. Clanché y B. Sarrazy (Eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp. 153-166). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage
- Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice. The case of limits of functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235-268.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 235-244). Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales, *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(3), 339-352.
- Bikner-Ahsbals, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., y Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. En M. M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of PME 34*, Vol. 1 (pp. 145-175).
- Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Zaragoza: Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001a). Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 13(3), 22-63.
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001b). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133.
- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Bosch, M. (2001). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "elementos de representación" en la actividad matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Coords.), [Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática](#) (pp. 15-28). Huelva: Universidad de Huelva.
- Bosch, M. (2010). L'écologie des parcours d'étude et de recherche au secondaire. En G. Gueudet, G. Aldon, J. Douaire, J. Traglova (Eds.), *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques: quels effets des ressources?* (pp. 19-23). Lyon, Francia: Éditions de l'INRP
- Bosch, M. (2012). Doing research within the Anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. *12th International Congress on Mathematical Education, Seoul (Korea), 8-15 July 2012*.
- Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Bosch, M. y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Coords.), *Balises en Didactique des Mathématiques* (pp. 107-122), Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la Formación del Profesorado de Secundaria. En M. L. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

- Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 49-85), Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). [El profesor como director de procesos de estudio](#): análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(1), 79-135.
- Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 205-250.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J. y Ruiz Higuera, L. (2007). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37-74.
- Bosch, M., Gascón, J. y Sierra T. A. (2009). Análisis de los manuales escolares para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 139 - 150). Santander: SEIEM.
- Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. y Larguier, M. (Eds.). *Un panorama de la TAD*. CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. y Ladage, C. (Eds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Brousseau, G. y Brousseau, N. (1991-92). Le poids d'un récipient. Étude des problèmes du mesurage en CM. *Grand N*, 50, 65-87.
- Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75.
- Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 25, 5-38.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtieux y P.-L. Hennequin (Eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. Publications de l'APMEP n° 168* (pp. 239-263). Paris: APMEP.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruiz-Higuera, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence: la dialectique des media et des milieux. En G. Gueudet y Y. Matheron (Dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2007* (pp. 344-366). Paris: IREM de Paris7, ARDM.
- Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en prensa).

- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.
- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*.
- Cid, E. (2001). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas 2* (pp.529-542). Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.
- Cid, E. (2004). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. En E. Palacián, E. Cid, J. Gascón, C. Batanero y C. Azcárate (Eds.), *Aspectos Didácticos de Matemáticas*, 9 (pp. 35-80). Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.
- Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Languier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier, Francia: Université de Montpellier
- Cid, E. y Ruiz Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Languier (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM* (Tesis doctoral). Université de Provence, Francia.
- Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función". Del "pensamiento del profesor" a la gestión de los momentos del estudio* (Tesis doctoral), Universitat Autònoma de Barcelona.
- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo.
- Fonseca, C. (2011) Los Recorridos de Estudio e Investigación en las Escuelas de Ingeniería. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(3), 547-580.
- Fonseca, C., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios, *Educación Matemática*, 22(2), 5-35.
- Fonseca, C., Casas, J. M. y Insua, A. (2011). El matemático como un profesional en los recorridos de estudio e investigación. *Revista Arbor*, 187, 279-284.
- Fonseca, C., Casas, J. M., Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII. Comunicaciones de los grupos de investigación* Santander: SEIEM.
- Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los recorridos de estudio e investigación. *Educación Matemática*, 23(1), 97-121.
- García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén.
- García, F. J. y Ruiz-Higueras, L. (2010). Exploring the use of theoretical frameworks for modelling-oriented instructional design. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2166-2175). Lyon, Francia: Service des Publications, Institut National de Recherche Pédagogique.
- García, F. J. y Ruiz-Higueras, L. (2011). Modifying teachers' practices: the case of a European Training Course on Modelling and Applications. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 569-578). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

- García, F. J. y Wake, G. (2010). Estableciendo diálogos entre diferentes marcos teóricos: de los procesos narrativos a la teoría antropológica de lo didáctico. *Investigación en Educación Matemática*, 14, 315-326.
- García, F. J., Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz Higuera, L. (2007). Integración de la proporcionalidad escolar en una organización matemática regional en torno a la modelización funcional: los Planes de ahorro. En L. Ruiz-Higuera, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 439-40). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 226-246.
- García, F. J., Maass, K., y Wake, G. (2010). Theory Meets Practice: Working Pragmatically within Different Cultures and Traditions. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). New York: Springer.
- Gascón, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *RELIME*, 4(2), 129-159.
- Gascón, J. (2002). Geometría *sintética* en la E.S.O. y *analítica* en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 39, 13-25.
- Gascón, J. (2003). Efectos del “autismo temático” sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 44, 25-34.
- Gascón, J. (2004). Efectos del “autismo temático” sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 45, 41-52.
- Gascón, J. (2010). Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 9-35.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *RELIME*, 14 (2), 203-231.
- Gascón, J. y Sierra, T. A. (2002). Reconstrucción escolar de la numeración para la formación de maestros. En M. Peñalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.) *Aportaciones de la Didáctica de las Matemáticas a Diferentes Perfiles Profesionales* (pp. 213-227). Alicante: Universidad de Alicante.
- Grigoras, R., García, F. J. y Halverscheid, S. (2011). Examining mathematizing activities in modeling tasks with a hidden mathematical character. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 85-96). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Lebesgue, H. (1931/1975). *La mesure des grandeurs*. París: Blanchard.
- Licera, R. M. (2008). *La construcción del número real y el problema de la medida de magnitudes continuas en la enseñanza media. Análisis epistemológico y didáctico* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina).
- Licera, R. M., Bastán, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). La construcción del número real y el problema de la medida de magnitudes continuas en la enseñanza secundaria. Análisis epistemológico y didáctico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Languier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 695-718). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo.

- Prediguer, S., Arzarello, F., Bosch, M., Lenfant, A. (2008). Comparing, combining, coordinating – networking strategies for connecting theoretical approaches. *ZDM – Mathematics Education*, 40(2), 163-164.
- Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.
- Rodríguez, E., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Los recorridos de estudio e investigación en la reformulación didáctica del problema de la metacognición. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 481-506). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Rodríguez, E., Bosch, M. y Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the anthropological theory of the didactic. *ZDM Mathematics Education*, 40, 287-301.
- Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Ruiz-Higueras, L. (2001) La didactificación de un objeto matemático: el caso de la noción de función. En R. Cantoral (Ed.) *El futuro del Cálculo Infinitesimal* (pp. 265-295). México, DF: Editorial Iberoamericana.
- Ruiz-Higueras, L. (2001) La invisibilidad institucional de los objetos matemáticos. Su incidencia en el aprendizaje de los alumnos. En Chamorro, C. (Ed.) *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp. 229-263). Madrid: Instituto Superior de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Ruiz-Higueras, L. (2004) Construcción de los decimales. De las fracciones a la notación decimal. En Chamorro, C. (Ed.) *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 189-250). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ruiz-Higueras, L. (2008) Modelización matemática en la Escuela Primaria: La reconquista escolar de dominios de realidad. En R. Pérez (Ed.) *Competencia Matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87-120). Madrid: Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.
- Ruiz-Higueras, L. (2011a). Aprendizaje y Matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 1-38). Madrid: Pearson Educación.
- Ruiz-Higueras, L. (2011b). La actividad lógica en la Escuela Infantil. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 101-140). Madrid: Pearson Educación.
- Ruiz-Higueras, L. (2011c). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 181-219). Madrid: Pearson Educación.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2010). La competencia de modelización matemática. Sistemas y modelos en el ámbito escolar. *Multiarea revista de didáctica*, 5, 239-296.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *RELIME*, 14(1), 41-70.
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Languier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en prensa).

- Ruiz-Olarria, A. y Sierra, T.A. (2011). La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Languier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 465-483). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Sensevy, G., Mercier, A. y Schubauer-Leoni, M. L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la Course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20, 263-304.
- Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L., Mercier, A., Ligozat, F. y Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 153-181.
- Serrano, L. (2007). *La modelització matemàtica en els estudis de Ciències Econòmiques i Socials: disseny d'organitzacions didàctiques per a l'articulació curricular entre l'ESO, el Batxillerat i la Universitat. Memòria de investigació* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universitat Ramon Llull (Barcelona).
- Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Diseño de organizaciones didácticas para la articulación del bachillerato con el primer ciclo universitario. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 757-766). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Cómo hacer una previsión de ventas. Propuesta de un recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. In A. Bronner, M. Languier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 835-857). Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.
- Sierra, T. A. (2011). La formación matemático-didáctica en el Grado de Maestro de Educación Infantil. Análisis y propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En *Seminario sobre La formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en infantil, primaria y el máster de secundaria*. Castro Urdiales: SEIEM.
- Sierra, T.A., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de «cómo enseñar a contar». *Revista de Educación*, 357, 231-256.
- Trigueros, M., Bosch, M., Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Languier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 77-116). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

ORIGEN Y APORTACIONES DE LA PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA ¹

ORIGIN AND CONTRIBUTIONS OF THE ONTO-SEMIOTIC APPROACH TO RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION

Godino, J.D.

Universidad de Granada

Resumen

El enfoque ontosemiótico de investigación en didáctica de la matemática (EOS) fue iniciado en la Universidad de Granada a principios de los noventa, como resultado de la interacción de investigadores de dicha universidad con los desarrollos teóricos de la didáctica de la matemática iniciados en Francia. Así mismo, la diversidad de teorías usadas para estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas llevó a la convicción de la necesidad y utilidad de tratar de clarificarlas, y compararlas. La estrategia de articulación de las teorías y el desarrollo de la aproximación ontosemiótica ha sido fruto del análisis racional de los fundamentos, cuestiones y métodos de diversos marcos teóricos existentes y de la aplicación de las herramientas teóricas que se fueron produciendo en trabajos experimentales. En esta ponencia se presenta una síntesis histórica del origen y desarrollo del EOS, sus principales aportaciones para la investigación en didáctica de las matemáticas, el estado actual a nivel internacional y algunas reflexiones sobre su potencial futuro.

Abstract

The onto-semiotic research approach to mathematics education (EOS) was started at the University of Granada in the early nineties, as a result of the interaction of researchers from this university with the French theories of mathematics education started in France. Likewise, the diversity of theories used to study the teaching and learning of mathematics processes led to the conviction of the necessity and usefulness of clarifying and comparing them. The networking of theories strategy and the development of the onto-semiotic approach resulted from the rational analysis of principles, issues and methods of various existing theoretical frameworks and from the application of the theoretical tools developed to experimental research. In this paper, a historical overview of the origin and development of EOS, its main contributions to research in mathematics education, its current international state and some reflections on its future potential development are presented.

Palabras clave: Investigación didáctica, fundamentos teóricos, enfoque ontosemiótico, teorías didácticas, articulación de teorías

¹ XVI Simposio de la SEIEM. Seminario de investigación. Aportaciones a la Investigación desde la Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. Baeza, 20-22 Septiembre 2012

Key words: *Didactic research, theoretical foundations, onto-semiotic approach, didactical theories, networking theories.*

Introducción

Desde hace 20 años la problemática de fundamentación teórica de la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha interesado a nuestro grupo de investigación (e.g., Godino, 1991) donde se han estudiado distintos enfoques y teorías propuestas en el área de conocimiento y disciplinas relacionadas. A principios de los años noventa se tuvo la oportunidad de conocer con detalle los trabajos publicados por Brousseau, Douady, Vergnaud, Chevallard, entre otros investigadores, en el marco de los cursos y seminarios de doctorado que impartieron en la Universidad de Granada. Así mismo, la impartición desde 1988 del curso “Teoría de la Educación Matemática” y la participación en los Seminarios de Investigación del programa de doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, permitieron situar las aportaciones de la *didáctica fundamental* en un contexto más amplio, en interacción con autores como H. Steiner, J. Kilpatrick, A. Bell, E. Fischbein, P. Ernest, entre otros.

Esta experiencia, y el contexto académico de la dirección de tesis doctorales, llevaron a la convicción de la necesidad y utilidad de clarificar, comparar y articular las principales teorías existentes, problemática de investigación que ha tomado recientemente un notable impulso a nivel internacional (Bikner-Ahsbah, et al., 2010). Fruto de este trabajo de fundamentación teórica es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), cuyo origen, motivación, aportaciones y perspectiva de futuro se presenta en esta ponencia.

Se comenzará describiendo en la sección 2 los problemas epistemológicos y didáctico-matemáticos que motivaron el EOS. En la sección 3 se resumen las etapas de desarrollo de esta línea de investigación y las principales nociones teóricas elaboradas. En la sección 4 se indican algunos resultados aportados sobre la comparación y articulación de marcos teóricos usados en didáctica de la matemática. Dado que uno de los objetivos de este seminario consiste en presentar las aportaciones de las líneas de investigación desarrolladas en el seno del Grupo DMDC de la SEIEM, en la sección 5 se describen las publicaciones en revistas indexadas con trabajos en los cuales se extienden y aplican las herramientas teóricas que componen el EOS, ofreciendo de este modo la proyección internacional de este marco teórico. Se concluye la ponencia indicando una previsión de nuevas ampliaciones y aplicaciones.

Problemas epistemológicos y didáctico-matemáticos que motivaron el EOS

Las cuestiones que motivaron nuestras reflexiones iniciales sobre los fundamentos teóricos de la investigación en didáctica de las matemáticas corresponden a la epistemología de las matemáticas y a la epistemología de la didáctica de la matemática. A continuación se describen someramente los supuestos de algunas de las teorías que sirvieron inicialmente de base al EOS.

El enfoque de la Didáctica Fundamental de las Matemáticas (DFM) (Gascón, 1998) se caracteriza por problematizar la propia matemática, al considerarla como punto de entrada para la indagación didáctico-matemática, mientras que las dimensiones cognitivas e instruccionales se consideran derivadas o dependientes de la anterior. La epistemología matemática debe ser, por tanto, un objeto prioritario de reflexión y

análisis para la DFM, aunque los supuestos epistemológicos sobre las matemáticas de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 1978), punto de partida de la DFM, son en gran medida implícitos y escasamente elaborados. En la TSD se asume el postulado de que para cada objeto matemático existe una situación matemática (o una colección de situaciones) cuya resolución ha dado origen y sentido a dicho objeto, y que, por tanto, el aprendizaje escolar de dicho objeto debe partir de tales situaciones, o de adaptaciones apropiadas de las mismas. De manera implícita se está asumiendo que los objetos matemáticos (cuya naturaleza no se explicita) son, emergentes de las prácticas matemáticas, siendo éste uno de los postulados esenciales de las aproximaciones antropológicas (Wittgenstein) y pragmatistas (Peirce) en filosofía de las matemáticas.

En la última década del siglo pasado comienza a gestarse la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), como una evolución y extensión de la noción de transposición didáctica (Chevallard, 1985), en la que se comienza a adoptar de manera explícita una epistemología matemática sobre bases antropológicas. Nociones básicas de la TAD en esta fase constitutiva son las de práctica matemática, praxema, objeto matemático, relación institucional y personal al objeto. En una fase posterior se introducen las nociones de técnica, tecnología y teoría, que junto a la de tarea configuran la noción central de *praxeología*. Se elabora de este modo una epistemología matemática explícita y más detallada sobre la que fundamentar el estudio de los fenómenos didáctico-matemáticos.

La Dialéctica Instrumento - Objeto y el Juego de Marcos (DIO-JM) (Douady, 1986) es una propuesta teórica que también incluye una posición epistemológica sobre las matemáticas de naturaleza antropológica. Para Douady los conceptos matemáticos tienen una doble dimensión: por un lado, posibilitan la acción (instrumento); por otro lado, son conceptualizados como entidades reutilizables en otros procesos similares (no se vinculan necesariamente a una situación determinada) y que pueden formar parte de un discurso más general (objeto). De esta forma, la distinción instrumento – objeto descrita por Douady se puede interpretar en términos de subsistema de prácticas operatorias y discursivas, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas de mutua interdependencia. Además, la noción de *marco* supone el reconocimiento de una relatividad de las prácticas matemáticas respecto de los “contextos de uso” internos a la propia matemática. El uso de un marco u otro afecta a los procedimientos de solución, su eficacia relativa e incluso al planteamiento de nuevos problemas.

Dentro del programa cognitivo en didáctica de la matemática destaca la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990), que también incluye algunas herramientas de naturaleza epistémica. La primera descripción que hace Vergnaud de un campo conceptual es la de “conjunto de situaciones”. Pero a continuación aclara que junto a las situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones. Así, por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

Los problemas epistemológico y cognitivo en didáctica de la matemática

Es en este contexto de reflexión epistemológica sobre las matemáticas, ofrecido por la TSD, la TAD, DIO-JM, TCC, en el que se planteó el problema central que da

origen al EOS, al considerar que no hay una respuesta suficientemente clara, satisfactoria y compartida en las teorías de referencia citadas. Dicho problema se puede formular en los siguientes términos:

PE (problema epistemológico): ¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media, ...) en un contexto o marco institucional determinado?

Este problema epistemológico, esto es, referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica:

PC (problema cognitivo): ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Una primera respuesta a estas cuestiones *onto-semióticas* fue presentada en el congreso celebrado en París en 1993, *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (Godino y Batanero, 1993), trabajo posteriormente ampliado y publicado en *Recherches en Didactique des Mathématiques* (Godino y Batanero, 1994). Partiendo de la noción de objeto propuesta por Chevallard (1991, p. 8) se consideró necesario hacer un esfuerzo por clarificar las nociones introducidas hasta ese momento por la TAD, hacerlas operativas y poner de manifiesto las semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente, como son, por ejemplo, las de concepción y significado.

Vemos, por tanto, que en la problemática inicial abordada por el EOS hay una cuestión epistemológica de base (precisar y explicitar la naturaleza del objeto matemático y su emergencia a partir de las prácticas matemáticas), y un problema cognitivo (caracterizar el conocimiento desde el punto de vista subjetivo), que se abordan simultáneamente y en relación dialéctica. Posteriormente se abordará la elaboración de una ontología matemática explícita (tipos de objetos y procesos matemáticos) que permita describir en términos operativos el significado del objeto matemático, tanto desde el punto de vista institucional como personal.

El par <*sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos*> (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2012) se consideran nociones claves para abordar los análisis epistemológicos y cognitivos requeridos en didáctica de la matemática. Estas herramientas teóricas permiten reformular el problema epistémico (conocimiento institucional, socio-cultural) y cognitivo (conocimiento personal) de la didáctica de la matemática en los siguientes términos:

- ¿Cuáles son las prácticas matemáticas institucionales, y las configuraciones de objeto y procesos activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? (Significado institucional de referencia)
- ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (Significado personal)
- ¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional? (Competencia, conocimiento, comprensión del objeto por parte del sujeto).

El problema del diseño instruccional

Una vez obtenidas herramientas teóricas para analizar las dimensiones epistemológica y cognitiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las

matemáticas, el EOS debía abordar cuestiones centrales para el diseño instruccional, que se pueden formular en los siguientes términos:

PIM (Problema de la instrucción matemática significativa): ¿Qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos?

PN (Problema normativo): ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?

Estas cuestiones instruccionales de nuevo se estudiaron partiendo de las teorías disponibles, en particular, la TSD, en la que la secuencia de situaciones adidácticas y didácticas (institucionalización), junto con la noción de contrato didáctico, se pueden interpretar como el esbozo de una teoría de la instrucción matemática significativa. Pero el "constructivismo y positivismo excesivos" que asume la TSD nos ha llevado a elaborar herramientas más flexibles de análisis de los procesos instruccionales (Godino, Contreras y Font, 2006), como se describe en la sección 3.

El problema de la comprensión, comparación y articulación de teorías

La existencia de diversas teorías para abordar los problemas didáctico-matemáticos puede ser un factor positivo, dada la complejidad de tales problemas. No obstante, si cada teoría aborda un aspecto parcial de los mismos, con lenguajes y supuestos distintos, se pueden obtener resultados dispares y contradictorios, que pueden dificultar el progreso de la disciplina. Parece necesario tratar de comparar, coordinar e integrar dichas teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes, respetando el principio fundamental de la parsimonia metodológica. Este problema se puede formular en los siguientes términos:

PEDM (Problema de epistemología de la didáctica de la matemática): Dadas las teorías $T_1, T_2, \dots, T_n$, focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿es posible elaborar una teoría T que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las T_i ?

Este es otro de los problemas centrales que dio origen al EOS: el intento de comprender, comparar, coordinar e integrar la TSD, TCC, DIO-JM, TAD, entre otras usadas en didáctica de la matemática, como, por ejemplo, la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1996).

Etapas de desarrollo del EOS y principales nociones teóricas

Las herramientas que componen el EOS se han construido en tres etapas, en cada una de las cuales hemos ido refinando progresivamente el objeto de indagación. Estas herramientas se describen a continuación sucintamente, junto con los problemas abordados en cada una de ellas.

En los primeros trabajos, publicados en el periodo 1993 - 98 (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998) se desarrollaron y precisaron progresivamente las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático" (entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que un determinado objeto matemático es determinante para su realización) relacionándolas con las nociones de conocimiento y comprensión. Desde supuestos pragmáticos/ antropológicos, estas ideas trataron de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos

institucionalizados, pero sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo. Como se indica en Godino y Batanero (1994) este punto de partida trató de precisar la noción de práctica matemática y de objeto introducidas por Chevallard (1991; 1992) al tiempo que se aspiró a conectarlas con ideas centrales de la teoría de situaciones (Brousseau, 1986) y la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990).

En esta primera fase se propuso como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo (dimensiones institucional y personal del conocimiento matemático) “los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas”. Puesto que en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos, ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos de prácticas, así como su estructura.

En una segunda etapa, a partir de 1998, se vio necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005). Esta necesidad surge del hecho que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo nos sentimos interesados en continuar con la elaboración de una ontología y una semiótica suficientemente ricas para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus “producciones”. Se llegó a la conclusión de que era preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En consecuencia, en este periodo se intentó progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específicas que estudiaran los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica.

Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque no se puede hablar de una solución clara para las mismas, pues las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1931-1958), Saussure (1915) y Wittgenstein (1973). El interés por el uso de nociones semióticas en educación matemática es también creciente como se muestra en Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger y Cifarelli (2003), el número monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics* (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006) y en Radford, Schubring y Seeger (2008). El EOS trata de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada introducidas en Godino y Recio (1998).

En una tercera etapa el interés se puso en los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática (Godino, Contreras y Font, 2006). En particular, se partió de algunas limitaciones de la Teoría de Situaciones derivadas de supuestos constructivistas que le sirven de base; de modo más específico del papel crítico que se atribuye a las situaciones adidácticas en dicha teoría. Se consideró necesario desarrollar nuevas herramientas e incorporar otras nociones de marcos teóricos relacionados que permitiesen describir de una manera detallada las interacciones que ocurren en el aula de matemáticas. Las nociones de patrón de interacción, negociación de significados, norma sociomatemática, aportadas por el

interaccionismo simbólico (Cobb y Bauersfeld, 1995; Godino y Llinares, 2000) se consideraron herramientas útiles para abordar esta problemática.

Como consecuencia, se propuso distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y afectiva (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas). El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporcionó criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y se adoptó la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las *configuraciones y trayectorias didácticas*.

En síntesis, el conjunto de nociones teóricas que actualmente componen el EOS se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas:

(1) *Sistema de prácticas* (operativas, discursivas y normativas), que asume una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

(2) *Configuración de objetos y procesos matemáticos*, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articulando de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos.

(3) *Configuración didáctica*, como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema, constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.

(4) *Dimensión normativa*, sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos.

(5) *Idoneidad didáctica*, como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Comparación y articulación de marcos teóricos

Como se ha indicado, el EOS se plantea desde sus inicios como problemática de reflexión e investigación la comparación y articulación de marcos teóricos. Se conciben las teorías como instrumentos que permiten definir los problemas de investigación y la estrategia metodológica para caracterizar los fenómenos didácticos, permitiendo analizar las diversas facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este sistema teórico no puede elaborarse con la simple agregación de elementos de distintos enfoques disponibles, sino que será necesario elaborar otros nuevos más eficaces, enriqueciendo algunas nociones ya elaboradas, evitando redundancias y conservando una consistencia global. Se debe aspirar a incluir en el mismo las nociones teóricas y metodológicas “necesarias y suficientes” para investigar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Como se analiza en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006), el EOS se propone articular las aproximaciones epistemológica y cognitiva, al establecer como hipótesis básica que los hechos y fenómenos didácticos tienen una doble dimensión personal – institucional. La descripción y explicación de la dialéctica personal – institucional precisa realizar análisis microdidácticos, tanto de los comportamientos de los sujetos agentes como de la ecología de los significados, en los procesos de estudio matemáticos. La finalidad del trabajo citado coincide en gran medida con el de Legrand (1996), el contraste de modelos teóricos en didáctica de la matemática, pero centra la atención en nociones más primitivas, que, en cierta medida, están en la base de la noción de *situación fundamental*: conocimiento, sentido, concepción, saber. Por este motivo los autores analizan el uso de estas nociones en los modelos teóricos en discusión, mostrando sus limitaciones y la forma en que la ontología matemática explícita que se propone en el EOS y la noción de función semiótica pueden ayudar a compararlos y progresar hacia su articulación coherente.

También en Godino et al. (2006) se sostiene la tesis de que el EOS puede ayudar a comparar los marcos teóricos descritos anteriormente y a superar algunas de sus limitaciones para el análisis de la cognición matemática. Esta expectativa se basa en la generalidad con la que se define en el EOS las nociones de problema matemático, práctica matemática, institución, objeto matemático, función semiótica y las dualidades cognitivas (persona – institución; unitario – sistémico; ostensivo – no ostensivo; extensivo – intensivo; expresión – contenido). Dichas nociones permiten establecer conexiones coherentes entre los programas epistemológicos y cognitivos sobre unas bases que se describen como ontosemióticas.

Los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se pueden describir de manera global, con la noción de “sistemas de prácticas personales”, que queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Si en este sistema de prácticas se distinguen entre las que tienen una naturaleza operatoria o procedimental ante un tipo de situaciones-problemas, respecto de las discursivas, obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de *praxeología* (Chevallard, 1999), siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente faceta institucional. También se puede incorporar la dualidad *instrumento-objeto* que propone Douady para los conceptos matemáticos.

Como respuesta a la pregunta “qué significa el objeto función”, por ejemplo, para un sujeto (o una institución) se proponen los modos de “hacer y de decir” ante un tipo

de problemas que ponen en juego, el “objeto función”. Esta modelización semiótico-pragmatista del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como configuración cognitiva asociada a un subsistema de prácticas relativas a una clase de situaciones o contextos de uso, y las nociones de concepto-en-acto, teorema-en-acto y concepción como componentes parciales (intensionales) constituyentes de dichas configuraciones cognitivas.

Las nociones de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas y misteriosas en el EOS, pues el significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica. Por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo – intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.). El sentido se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

La noción de representación y registro semiótico usadas por Duval y otros autores hacen alusión según el EOS, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos mentales (no ostensivos). La función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos.

El uso que se hace en Teoría de Situaciones Didácticas del término *sentido* queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y “le da su sentido” (podemos describirlo como “significado situacional”). Según el EOS esta correspondencia es, crucial, al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido bien en términos cognitivos o bien en términos epistémicos.

El EOS considera que la didáctica de la matemática debe identificar, no solo los fenómenos relativos a la ecología de los saberes matemáticos (objetivo principal de la TAD), o los correspondientes al diseño e implementación de ingenierías didácticas (objetivo principal de la TSD) sino también los relativos al aprendizaje de los alumnos. En última instancia los esfuerzos de los profesores e investigadores convergen en el objetivo de lograr que los estudiantes aprendan, esto es, se apropien de los conocimientos matemáticos que les permitan desenvolverse en la sociedad y, en algunos casos, contribuyan al desarrollo de nuevos conocimientos. El abordaje de cuestiones como, ¿por qué los alumnos tienen dificultades en resolver este tipo de tareas?, ¿es idónea esta tarea, este discurso matemático, para estos alumnos en unas circunstancias dadas?, etc., supone un nivel “microscópico” de análisis de fenómenos cognitivos y didácticos y requiere usar nociones teóricas y metodológicas específicas.

Los esquemas, conceptos y teoremas en actos, que proponen la TCC y la RRS (Registros de Representación Semiótica) se orientan en esa dirección. Ahora bien, ¿son suficientes estas nociones para este aspecto del trabajo didáctico? Consideramos que la “configuración cognitiva” que propone el EOS, con su desglose en entidades situacionales, lingüísticas, procedimentales, conceptuales, proposicionales y argumentativas permite un análisis más fino del aprendizaje matemático de los estudiantes. La noción de configuración, en su versión epistémica, permite también hacer análisis microscópicos de los objetos matemáticos, caracterizar su complejidad

ontosemiótica y aportar explicaciones de los aprendizajes en términos de dicha complejidad.

El EOS permite estudiar los hechos y fenómenos a nivel microscópico, incluso fenómenos que puede calificarse de singulares. ¿Qué ocurre aquí y ahora? ¿Por qué ocurre? ¿Qué aprende, o deja de aprender, este alumno en estas circunstancias? Aportar respuestas a estas cuestiones puede ser un primer paso para generar hipótesis referidas a otros alumnos y circunstancias. Para hacer este tipo de análisis el EOS introduce las dualidades cognitivas: unitaria – sistémica; ostensiva – no ostensiva; extensiva – intensiva; expresión – contenido (función semiótica). Un ejemplo de estos análisis más puntuales en el marco del EOS se puede encontrar en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005). Estos autores utilizan conjuntamente las dualidades extensivo – intensivo y expresión - contenido para explicar, en el caso de la función derivada, las dificultades de los alumnos relacionadas con la complejidad semiótica inherente al uso de elementos genéricos. Por otra parte, los sistema de prácticas, instituciones, marcos y contextos de uso, ecología de significados son nociones apropiadas para realizar análisis de tipo macroscópico (curricular, instruccional). La noción de conflicto semiótico, cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa, es también útil para la realización tanto de análisis de nivel macro como de nivel microdidáctico en la producción y comunicación matemática.

Perspectiva internacional del EOS. Aportaciones en revistas indexadas

Una manera de conocer los resultados de los trabajos realizados por una comunidad científica y valorar su contribución a un área de conocimiento es mostrando las publicaciones en revistas de alta difusión internacional. En un Anexo hemos incluido el listado de las publicaciones en revistas indexadas en las que se han presentado desarrollos y aplicaciones del EOS. En la Tabla 1 incluimos un resumen cuantitativo de dichas publicaciones, indicando las bases de datos en las que se incluyen las revistas correspondientes.

Otros trabajos con un potencial alto de difusión internacional son los capítulos de libros publicados en inglés por las editoriales Kluwer (Godino y Batanero, 1998), Springer (Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi, 2011) y Sense Publishing (Font, Godino y Contreras, 2008).

Asimismo, se vienen presentando regularmente trabajos en los principales congresos internacionales del área, tales como PME, ICME, CERME, otros latinoamericanos como RELME y CIBEM, o en los simposios de SEIEM. En Contreras, Ordóñez y Batanero (2005) se incluyen las comunicaciones y ponencias presentadas en un congreso celebrado en la Universidad de Jaén sobre aplicaciones y desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas (expresión con la se designaba en dicha fecha al EOS).

Conviene resaltar que una parte importante de los trabajos publicados, en sus primeras versiones, han sido presentados y discutidos en el seno del Grupo de Trabajo DMDC de la SEIEM, o en el Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM) constituido en 1991 y que sirvió de punto de partida del Grupo DMDC (estos trabajos están disponibles en internet en, <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm>). Las tesis doctorales apoyadas en este marco teórico, así como cursos y conferencias en universidades españolas y extranjeras son otro indicador de las aportaciones de este enfoque teórico.

Tabla 1. *Artículos publicados en revistas indexadas*

<i>Revistas indexadas</i>	<i>Bases de datos</i>	<i>Nº de artículos</i>
Educational Studies in Mathematics	ISI, ERIH, SCOPUS	9
Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME)	ISI, ERIH, SCOPUS	12
Revista de Educación (Madrid)	ISI, ERIH, SCOPUS	1
Enseñanza de las Ciencias	ISI, ERIH	6
Infancia y Aprendizaje	ISI, SCOPUS	1
Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)	ISI, SCOPUS	4
International Statistical Review	ISI, SCOPUS	1
ZDM. The International Journal on Mathematics Education	ERIH, SCOPUS	1
Journal of Statistics Education	ERIH, SCOPUS	1
For the Learning of Mathematics	ERIH	3
Recherches en Didactique des Mathematiques	ERIH	6
Statistics Education Research Journal	ERIH	1
International Electronic Journal of Mathematics Education	SCOPUS	1
Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática	LATINDEX	7
Educação Matematica Pesquisa	LATINDEX	3
Educación Matemática	LATINDEX	7
Números	LATINDEX	1
Praxis Educativa	LATINDEX	1
Paradigma	LATINDEX	4
Acta Scientiae	LATINDEX	1
Publicaciones	LATINDEX	1
TOTAL		72

Previsión de nuevos desarrollos

Una característica principal del EOS es su aspiración a construir un marco teórico integrador para la investigación en didáctica de la matemática. Mediante una estrategia de clarificación racional de las herramientas teóricas aportadas por diversas teorías se viene construyendo un sistema de nociones que consideramos “necesarias y suficientes” para abordar las diversas facetas y niveles de análisis de los problemas didáctico-matemáticos. Este objetivo, por supuesto, no lo damos por finalizado, sino que constituye un proyecto de investigación abierto a nuevos complementos y aplicaciones. Indicamos a continuación algunas ideas sobre las que pretendemos avanzar.

1. Clarificar y explicitar de manera más sistemática los presupuestos ontológicos, semióticos, psicológicos, sociológicos y pedagógicos que sirven de base al EOS. De manera particular dichos supuestos se deben apoyar de manera sólida en los supuestos filosóficos sobre las matemáticas de Wittgenstein, en el pragmatismo y la semiótica de Peirce, la psicología social de Vygotsky, la fenomenología de Husserl, entre otras.
2. Comparar y coordinar los actuales desarrollos del EOS con otros modelos teóricos usados en educación matemática, con la finalidad de refinar y completar las herramientas elaboradas. En particular se espera que un estudio más detallado de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1995; 1996), y las teorías lingüísticas de Austin (1970) y Searle (1980) mejoren el elemento *lenguaje*,

incluido como un componente primario de las configuraciones epistémicas y cognitivas. Así mismo, la fenomenología didáctica (Freudenthal 1983), la etnomatemática (D'Ambrosio, 1985) y la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003), podrían ser integradas de manera consistente y productiva desde la perspectiva del EOS. Por otro lado, en un trabajo reciente (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2012) se ha abordado la comparación y articulación del EOS con la Teoría de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995), en este caso mediante la aplicación de las respectivas herramientas al análisis de un episodio instruccional. Esta línea de trabajo se ha mostrado productiva y se prevé aplicar a otros marcos teóricos.

3. La idoneidad didáctica, sus facetas, componentes e indicadores pueden ser el punto de partida para desarrollar una teoría de la instrucción matemática significativa (Godino, 2011). Ello requiere comparar y coordinar dichas nociones con las teorías instruccionales aportadas desde la Didáctica general.
4. Las herramientas de análisis epistémico elaboradas están sirviendo para clarificar la naturaleza de distintos objetos matemáticos y estadísticos, el álgebra elemental, la visualización, entre otros. Las ideas de configuración cognitiva y conflicto semiótico están permitiendo comprender mejor los aprendizajes de los estudiantes sobre diversos temas específicos (promedios, gráficos estadísticos, cálculo infinitesimal, números decimales, proporcionalidad etc.). Las herramientas para el análisis instruccional (configuración y trayectoria didáctica) también están siendo aplicadas en algunas investigaciones (Pochulu y Font, 2011; Assis, Frade y Godino, 2012) para analizar el diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje sobre temas específicos. En resumen, la aplicación del EOS para producir nuevos conocimientos didácticos es sin duda el objetivo final de la construcción y puesta a punto de tales herramientas, por lo que deberá ser potenciada en el futuro.

Aunque las herramientas teóricas EOS han surgido en el ámbito académico de la investigación didáctica, orientadas a clarificar la naturaleza de dicha investigación y facilitar la producción de nuevas comprensiones y conocimientos, pueden ser adaptadas para su uso por parte de los propios profesores de matemáticas. Esto supone un campo de investigación en formación de profesores, ya que es necesario realizar adaptaciones de tales artefactos conceptuales a fin de convertirlos en instrumentos de reflexión y análisis de la propia práctica docente. En Godino (2009; 2011) se presentan ideas en esta dirección.

Información complementaria sobre los trabajos desarrollados en el marco del EOS, con acceso a las publicaciones respectivas, está disponible en las páginas webs de J. D Godino, C. Batanero y V. Font:

<http://www.ugr.es/local/jgodino>; <http://www.ugr.es/local/batanero>;
<http://webs.ono.com/vicencfont/>

Reconocimientos

El origen y desarrollo del EOS está estrechamente apoyado en el trabajo realizado por otros investigadores, en particular C. Batanero, V. Font, A. Contreras, M. R. Wilhelmi, U. Malaspina, M. Pochulu, entre otros, a quienes expreso mi sincero reconocimiento.

Referencias

- Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S. y Cifarelli, V. C. (Eds). (2003). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas.
- Assis, A., Frade, C. y Godino, J. D. (2012). Influencia de los tipos de interacciones didácticas en la progresión del aprendizaje matemático: análisis de una actividad exploratorio-investigativa sobre patrones. *BOLEMA* (en revisión)
- Austin, J. L. (1970). *Palabras y acciones*. Buenos Aires: Paidós. (Obra original publicada en inglés: *How to do things with words*, Oxford: Clarendon Press, 1962)
- Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, Y. Arzarello, F., Radford, R., Artigue, M. y Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. En Pinto, M. M. F. y Kawasaki, T. F. (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 145-175. Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (1). 27-40
- Castro, C. de (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación matemática*, 11, 59 - 77
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage
- Chevallard, Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Contreras, A., Ordóñez, L. y Batanero, C. (2005). *Investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.

- D'Ambrosio. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5, 44-8
- Drijvers, P., Godino, J. D. Godino, Font, V. y Trouche, L. (2012). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics* (aceptado).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitive retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (3), 349-382.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2012). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0
- Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, historicity, and culture* (pp. 157-173). Rotterdam: Sense Publishing.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-33.
- Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En: A. Gutierrez (Ed.), *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Madrid: Síntesis, 1991
- Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1993). La notion du signifié dans la didactique des Mathématiques. En M. Artigue y cols (Eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 218-224). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En: A. Sierpiska (Ed). *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150.
- Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1) 70-92
- Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R. y Wilhelmi, M.R. (2011). Models for statistical pedagogical knowledge. En, C. Batanero, G. Burrill, and C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 271-282). Berlin: Springer.
- Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3, 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.
- Legrand, M. (1996). La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), 221-280.
- Peirce, C. S. 1931-1958. *Collected Papers*, vols. 1-8. C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (3), 361-394.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand-Collin.
- Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Sáenz-Ludlow, A. y Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics* 61 (1-2), 1-10.
- Saussure, F. (1915). *Curso de lingüística general*. Madrid: Alianza, 1991
- Searle, J. (1980). *Actos de Habla. Ensayo de filosofía del lenguaje* (3a. edición). Madrid: Ed. Cátedra. (Original publicado en 1969).
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2,3), 133-170.
- Wittgenstein, L. (1973). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Anexo

Artículos publicados en revistas indexadas con desarrollos y aplicaciones basadas en el EOS

- Alsina, A. y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 7-32 .
- Arrieche, M. (2006). Papel de la teoría de conjuntos en la construcción de los números naturales. *Paradigma*, 27, (1), 349-363.
- Assis, A., Godino, J.D. y Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa- RELIME*. (Aceptado).
- Batanero, C. (2002) Discussion: The role of models in understanding and improving statistical literacy. *International Statistical Review*, 70 (1), 37-40.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12 (1).
- Castro, W. F., Godino, J. D. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25, 73-88.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18
- Contreras, A. y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 - 3, 277 - 310.
- Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa- RELIME*, 9(1), 65-84
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2), 151 - 186.
- Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 26(42B), 667-690.
- Contreras, A., Luque, L. y Ordoñez, L. (2004). Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática*, 16(1), 59-88.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordoñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherche en Didactique de Mathématiques*, 25(2), 151-186.

- Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M.R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 367-384.
- D'Amore, B. y Godino, J.D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 10(2).
- D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, XXVIII, N° 2, 49-7.
- De Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 59 - 77.
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2012). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives . *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-012-9416-8.
- Fernández, T., Godino, J. D. y Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 26 (42) (en prensa)
- Font, J. D., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.
- Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, 19,2, 95-128.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *UNIÓN*, 26, 9-25.
- Font, V. y Acevedo, J.I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 405-418.
- Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2012). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0.
- Font, V. y Peraire, R. (2001) Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación matemática*, 13(2), 55-67.
- Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de ciencias Económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-345.

- Font, V., Bolite, J. y Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 131–152.
- Font, V., Godino, J. D., Planas, N., y Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, 30(1), 15-19.
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Font, V. y Godino, J. D. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2-7.
- Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Um enfoque ontoemiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae*, 10(2), 7-37.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 3-36.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII, Nº 2, 221-252.
- Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias* (aceptado).
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.
- Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológicosemiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, nº especial, 131-155.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-49.

- Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número? *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 34-46.
- Godino, J. D., Recio, A. M., Roa, R., Ruiz, F. y Pareja, J. L. (2006). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Números*, nº 64.
- Godino, J.D. y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.
- Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa* (aceptado).
- Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23, (3), 5-37.
- Gusmao, T. C., Font, V. y Cajaraville, J. A. (2009). Análises cognitivo e metacognitivo de práticas matemáticas de resolução de problemas: o caso Nerea. *Educação Matematica Pesquisa*. 11(1), 8-43.
- Konic, P., Godino, J. D. y Rivas, M. A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números*, 74 (Julio, 2010), 57-74.
- Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 365-399.
- Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 107-130.
- Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 139- 160.
- Ortiz, J. J. y Font, V. (2011). Significados personales de los futuros profesores de educación primaria sobre la media aritmética. *Educación Matemática*, 23(2), 91-109.

- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pochulu, M. (2010) Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(3), 307-336.
- Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (3), 361-394.
- Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 11(2), 233-265.
- Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Cambio institucional, una perspectiva desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Paradigma*, XXVII (1), 237-264.
- Recio, A.M. y Godino, J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.
- Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Boletim de Educação Matemática - Bolema*, 26, 42B, 559-588.
- Roa, R., Batanero, M.C. y Godino, J.D. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, 15(2)
- Robles, M. G., Del Castillo, A. G. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática*, (en prensa)
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77 - 120.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions: The case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (2), 72-90.

SEMINARIO II

FINES DE LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Coordinadora: **Mercedes Palarea**, Universidad de La Laguna

Introducción

Encarnación Castro Martínez, Universidad de Granada

Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar

Luis Puig Espinosa, Universidad de Valencia

Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO II SOBRE FINES DE LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Palarea, M^a.M.

Universidad de La Laguna

Mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje ha de ser siempre uno de los fines de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, así como diseñar nuevos modelos de enseñanza que conduzcan a disminuir las dificultades y obstáculos en el aprendizaje que faciliten la consecución del mismo, con un mayor éxito y con menos errores cometidos.

Entre las líneas más destacadas de la agenda de investigación en Didáctica de las Matemáticas se encuentran las que tienen que ver con el Pensamiento Algebraico, con la problemática del aprendizaje del álgebra, las causas que dan origen a la misma y cómo encontrar soluciones para paliar dicha problemática.

Es necesario tener en cuenta la complejidad del álgebra para entender la pertinencia de los objetivos y cuestiones que aquí se presentan (Socas, 2010).

La adquisición del conocimiento algebraico se puede conseguir diseñando, implementando y validando entornos que tengan en cuenta los diferentes motivos que provocan la crisis de su enseñanza (Socas, 2011).

En este Seminario se presentan dos ponencias sobre investigación en álgebra que creo son una muestra de lo que se está investigando del tema en nuestro país y que han sido realizadas por la Dra. Encarnación Castro (Universidad de Granada) y por el Dr. Luis Puig (Universidad de Valencia).

Ambos autores han trabajado sobre el álgebra educativa pues reconocen la dificultad del aprendizaje del álgebra para la mayoría de los estudiantes, afirmación con la que están de acuerdo las comunidades de profesores y de investigadores, en general, en educación matemática.

La Dra. Castro en su ponencia *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar* comienza recordando diferentes publicaciones de diversos autores, relacionadas con la dificultad de los estudiantes para aprender álgebra (Nortes y Nortes, 2010; Trujillo, Castro y Molina, 2009 y Vega-Castro, Molina y Castro, 2011), para concluir que la enseñanza del álgebra está muy ligada a la concepción de la materia que tienen los diseñadores del currículo y los profesores que lo ponen en práctica.

La investigación sugiere que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos (Wagner y Parker, 1999): aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza.

Refiriéndose a motivos que provocan la crisis de la enseñanza del álgebra aporta una síntesis de resultados de investigaciones desde las de tipo cognitivo achacables al sujeto que aprende (generalización, utilización de símbolos...), hasta las relacionadas

con los métodos de enseñanza, sin olvidar otros motivos de tipo psicológico (el propio término “álgebra” los asusta), social (la sociedad asocia el álgebra a las ramas más complejas de las matemáticas) y pedagógico (menos motivación en los estudiantes...).

Se ocupa de distintos enfoques que permiten abordar la introducción y enseñanza del álgebra, citando varios autores que se han ocupado de ello e indicando la reciente propuesta curricular de Early-Algebra (Molina, 2006).

Asimismo incluye resultados de investigaciones del álgebra escolar y su relación con la aritmética (de todos es conocida la consideración del álgebra como aritmética generalizada) y del álgebra como lenguaje (explicitando diferentes componentes del lenguaje algebraico que producen dificultades: variables, símbolos, expresiones algebraicas y sus estructuras) (Socas, 2001).

Concluye afirmando que la divulgación adecuada de resultados de las investigaciones de forma que llegue a los profesores, puede ayudarles a hacer una enseñanza del álgebra más eficaz que produciría un eficiente aprendizaje en los estudiantes. Me parece muy interesante que siga la Dra. Castro experimentando propuestas de enseñanza dentro del paradigma de la metodología de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), que están enmarcadas por el análisis didáctico, sistematizado por Lupiáñez y Rico (2008) y que dan soporte científico a la preparación, implementación y análisis de los resultados de la enseñanza.

En su ponencia *Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa*, el Dr. Luis Puig reflexiona sobre algunos aspectos del álgebra educativa a partir de lo que se ha llegado a saber gracias al estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en el sistema escolar, y gracias al estudio de la historia del álgebra desde un punto de vista educativo.

En particular, reflexiona sobre los tipos diferentes de significados de campos semánticos distintos, implicados en los sistemas algebraicos de signos, y su integración en un sistema algebraico de signos más abstracto.

La información proporcionada por las ponencias aporta nuevas perspectivas a las ya publicadas en las Actas del XI Simposio, celebrado en La Universidad de La Laguna (Tenerife) en 2007, y en el que se desarrolló un Seminario cuyo título fue *Contrastando enfoques de investigación en álgebra* (Molina, 2007; Socas, 2007), así como a publicaciones en revistas de investigación en Didáctica de las Matemáticas o las presentaciones hechas en congresos o simposios.

La ponencia de la Dra. Castro destaca el hecho de que, abordar la relación entre las dificultades y obstáculos que tienen los estudiantes al aprender álgebra de manera significativa, puede facilitar, si los resultados de la investigación se difunden adecuadamente de forma que llegue a los profesores, un trabajo profesional que haga una enseñanza del álgebra más eficaz, una propuesta más efectiva para la enseñanza, que se traduciría en un aprendizaje más eficiente para los estudiantes.

El Dr. Puig añade un elemento esencial y de actualidad como es el estudio de la historia del álgebra desde un punto de vista educativo, que aún no ha sido suficientemente desarrollado en las diferentes líneas de investigación de nuestro país, aunque sí es cierto que en la última década se ha incrementado el número de trabajos relativos a las aplicaciones de los hallazgos históricos en la enseñanza de distintas ramas de la Matemática, especialmente en el álgebra que es la que nos ocupa.

Las dos ponencias tienen un valor fundamental que es el interés por tener una incidencia directa en el desarrollo del currículo y son formas complementarias de mirar la enseñanza aprendizaje del álgebra.

Referencias

- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada Disponible en: <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF>.
- Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XI*, 53-69. SEIEM. La Laguna.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de Problemas de Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*. 28(1), 317-342.
- Socas (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.125-154). Barcelona: ICE Universidad de Barcelona/HORSORI.
- Socas, M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Socas, M. M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico*. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52. SEIEM. La Laguna.
- Socas (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 10, 9-33.
- Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*. 29(2), 199-224.
- Trujillo, P. A., Castro, E. y Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII*, 511-521. SEIEM. Santander.
- Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín; G. Fernández; L. J. Blanco y M.^a M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, 575-584. SEIEM. Ciudad Real.
- Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.). *Algebraic Thinking, Grades K-12*, 328-340. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

DIFFICULTIES IN LEARNING SCHOOL ALGEBRA

Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen

En este texto asumimos que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos (aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza). Desde dicha asunción reflexionamos sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra en relación con el objeto. Nos centramos, así mismo, en dos de los enfoques que se consideran del álgebra: álgebra como generalización de la aritmética y álgebra como lenguaje. Introducimos ejemplos de datos obtenidos en investigaciones que hemos realizado y que tienen relación con el tema que nos ocupa.

Abstract

This paper argues that pitfalls in learning algebra can be classified in three: those inherent to object, those inherent to subject, and those as a consequences of the teaching modes. Here we point to students' difficulties for learning algebra inherent to object, by focusing in two concepts of algebra: algebra as a generalization of arithmetic, and algebra as a language. We use empirical data from previous research on this topic.

Palabras clave: Álgebra escolar, dificultades de aprendizaje.

Key words: Difficulty learning, school algebra.

El aprendizaje del álgebra se hace difícil a la mayoría de los estudiantes. Esta es afirmación con la que están de acuerdo las comunidades de profesores y de investigadores en educación matemática. Así se pone de manifiesto en publicaciones de diversos autores, como por ejemplo: Booth (1984), Cerdán (2010), Espinosa (2004), Fernández (1997), Herscovics (1989), Kieran (1989), Martínez (2011), Molina (2007), Nortes, y Nortes (2010), Socas (2007), Trujillo, Castro y Molina (2009), Vega-Castro, Molina y Castro (2011).

Los profesores constatan que los alumnos no llegan a obtener un conocimiento algebraico satisfactorio a pesar del empeño puesto en su enseñanza. La toma de conciencia de esta situación ha generado gran cantidad de trabajos de investigación los cuales tratan de detallar, lo más ampliamente posible, la problemática del aprendizaje del álgebra, las causas que dan origen a la misma y cómo encontrar soluciones que palien dicha problemática. Gran número de investigaciones están centradas en indagar las dificultades que encuentran los estudiantes en el trabajo algebraico escolar que les lleva a producir errores en el mismo, así como en identificar aquellos errores que son resistentes incluso a situaciones de enseñanza que se pueden considerar de “choque” (Herscovics y Linchevski, 1994; Palarea, 1998; Ruano, Socas y Palarea, 2008). Entre las nociones que producen dificultad se señalan la clausura para las expresiones algebraicas que los estudiantes sienten necesidad de hacer; el lenguaje algebraico al que no le “ven” sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobre-generalización de ciertas propiedades; la preservación de la jerarquía de la operaciones para la que no encuentran justificación; el uso de paréntesis; la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, entre otras.

La investigación sugiere que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos (Wagner y Parker, 1999): aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza.

Se señala que las dificultades y obstáculos inherentes al objeto son debidas, en gran parte, a la naturaleza misma del álgebra, su lenguaje, los elementos que lo componen, las reglas que lo rigen. Que las dificultades debidas al sujeto están relacionadas con la complejidad que supone la abstracción y la generalización, acciones que desempeñan un papel destacado en el álgebra, haciéndose hincapié en la componente abstracta de estas acciones como una de las razones que originan las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de esta materia (Breiteig y Grevholm, 2006). La generalización es considerada como un camino cuya meta está en el álgebra, una ruta hacia el álgebra (Mason, Graham y Wilder, 2005) y forma parte de su esencia. La consideración del álgebra como generalización tiene sus raíces en el uso de la notación algebraica como una herramienta para expresar demostraciones (Kieran, 2006). Se trata de un proceso psicológico cognitivo sofisticado que involucra reflexión (Amit y Neria, 2008; Dörfler, 1991) y cuyos productos son esquemas cognitivos. Este proceso requiere tiempo y esfuerzo por parte de los estudiantes, en el mismo destaca una etapa que exige “centrarse” o “prestar atención” a un invariante o relación y abstraer una posible propiedad (Castro, Cañadas y Molina, 2010; Cañadas, 2007; Lobato, Ellis y Muñoz, 2003; Radford, 2010), de ahí la dificultad asociada al proceso de generalización. La posibilidad de que las dificultades de los alumnos con el álgebra se deban al tipo de enseñanza recibida es destacada por algunos investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Booth, 1999; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Fujii, 2003), indicándose que la enseñanza tradicional ha sido tal que personas que estudiaron algún curso de álgebra durante su etapa escolar, cuando

piensan en "álgebra" recuerdan algo relacionado con solución de ecuaciones, factorización de polinomios, funciones y gráficas. En general, cosas que aprendieron y utilizaron en sus clases de secundaria en las que intervenían letras, sobre todo x e y . Incluso algún estudiante que tenía buenas notas en matemáticas recuerda que el estudio del álgebra significó el punto en el que las matemáticas dejaron de tener relación con el mundo real (Breiteig y Grevholm, 2006). La enseñanza, en todo caso, está muy ligada a la concepción que de la materia tengan los diseñadores del currículo y los profesores que lo ponen en práctica.

La enseñanza del álgebra

Se habla de crisis en la enseñanza del álgebra (Malara y Navarra, 2012) provocada por diferentes motivos. Un motivo es de tipo cognitivo, por tanto achacable al sujeto, se refiere a que la generalización y la utilización de símbolos suponen dificultad (lo hemos apuntado en el párrafo anterior). Otro motivo es de tipo psicológico, solamente oír la palabra álgebra ya asusta a los estudiantes, mucho más a aquellos que "no se le dan bien" las matemáticas. Una tercera causa es de tipo social, la sociedad tiene catalogada el álgebra entre las ramas más complejas de las matemáticas. Un motivo pedagógico también se apunta como causante de dicha crisis, actualmente la mayoría de los estudiantes están menos motivados hacia el estudio, por lo tanto su formación es más compleja. Por último se apunta una causa didáctica, los métodos de enseñanza del álgebra han quedado anticuados.

Indica Booth (1984) que el objetivo principal de la enseñanza del álgebra debe ser el que los estudiantes aprendan a representar relaciones generales y procedimientos, porque a través de estas representaciones, se pueden resolver una amplia gama de problemas y pueden desarrollarse nuevas relaciones a partir de las conocidas. Sin embargo, los estudiantes terminan viendo el álgebra como un conjunto de técnicas de manipulación arbitraria y poco más. Por su parte, los contenidos de álgebra incluidos en el currículo escolar de secundaria, que han cambiado muy poco durante el siglo pasado (Kieran, 1996), están demasiado centrados en la simplificación y la manipulación en lugar de la generalización de ideas que son la base de álgebra. El álgebra no se enseña generalmente a través de una progresión lenta, como instrumento u objeto del pensamiento (Radford, 2012) sino que se trata como un mecanismo manipulador y se enfatizan los aspectos de cálculo. En consecuencia, el álgebra pierde algunas de sus características esenciales, una de las cuales es el uso de un lenguaje preciso para describir la realidad, otra es ser un poderoso instrumento de razonamiento y pronóstico, mediante la formulación de hipótesis para construir conocimiento. Se considera por tanto necesario, no sólo realizar cambios significativos en la enseñanza del álgebra de secundaria sino también prever, en las escuelas de primaria, una aproximación a estos cambios de manera que favorezcan una aproximación temprana al pensamiento algebraico (Malara, 2003; Molina, 2007).

Se han realizado intentos por determinar enfoques que guíen la enseñanza del álgebra, por diferentes autores. Cuatro enfoques diferentes señala Usiskin (1987) mediante los que se puede trabajar el álgebra escolar: aritmética generalizada, estudio de procedimientos para resolver problemas, estudio de relaciones entre cantidades (incluyendo la modelización y las funciones) y estudio de estructuras. Kieran (1996), tomando como referencia las actividades propias que realizan los estudiantes, caracteriza el álgebra escolar de acuerdo a tres tipos de tareas: de generalizar, de transformar y tareas globales o de alto nivel (meta-nivel). Las actividades de generalizar involucran expresiones y ecuaciones que son objeto del álgebra, incluyen: ecuaciones

que contienen una incógnita que representa la solución del problema, expresiones de generalización que se presentan desde patrones geométricos o secuencias numéricas y expresiones de las reglas que rigen las relaciones numéricas. Entre las actividades de transformación incluye: factorizar, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones, trabajar con expresiones y ecuaciones equivalentes. El nivel global o meta-nivel comprende actividades en las que el álgebra se usa como herramienta, si bien las tareas no tienen que ser exclusivas del álgebra, incluye: resolución de problemas, modelización, reconocimiento de estructuras, generalización, justificación, prueba, y predicción. Después de una revisión de documentos sobre el tema, Drijvers y Hendrikus (2003) consideran que se utilizan cuatro enfoques del álgebra los cuales conforman una categorización fenomenológica. El primer enfoque se centra en el álgebra como un medio para resolver problemas. El segundo lo hace en el estudio de las funciones, es decir, de relaciones entre variables. En tercer lugar hacen referencia a un enfoque centrado en la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras. El último enfoque se centra en el lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación.

Los diferentes enfoques permiten abordar la introducción y enseñanza del álgebra escolar desde posicionamientos distintos. No obstante, en la práctica educativa, dichos enfoques no pueden ser separados radicalmente debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas relacionadas con más de un enfoque (Drijvers y Hendrikus, 2003). Un equilibrio entre las diferentes componentes del álgebra y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, puede permitir a los estudiantes comprender la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico (Bednarz y Janvier, 1996). El uso de la tecnología en la enseñanza, por su parte, proporciona a los estudiantes soporte visual sobre gráficos y representación simbólica y tablas que les posibilita la manipulación de los mismos y herramienta que les permite resolver problemas (Arnau, Arevalillo-Herráez y Puig, 2011), entendiendo que el uso de la tecnología requiere una sofisticada comprensión de los símbolos y las operaciones con los mismos.

Desde esta variedad de enfoques aparece una propuesta curricular sobre la enseñanza del álgebra denominada Early-Algebra. La concepción que se maneja en Early-Algebra es muy amplia, comprende estudio de relaciones numéricas (se incluye aritmética generalizada), de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, generalización de patrones, relaciones funcionales, desarrollo y manipulación del simbolismo y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Blanton y Kaput, 2005). El objetivo de dicha propuesta es que los estudiantes desarrollen un aprendizaje del álgebra con comprensión.

En lo que sigue tratamos sobre dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, relativas al objeto, nos centramos en dos de los enfoques que han señalado algunos autores referenciados en el párrafo anterior: álgebra como generalización de la aritmética y álgebra como lenguaje, haciéndose inevitable rozar elementos de otros enfoques. A lo largo del discurso insertaremos resultados de investigaciones que hemos realizado en relación con el tema que nos ocupa. No abordamos la resolución de problemas ni la modelización en álgebra por ser campos muy amplios que desbordarían las posibilidades de este trabajo.

Álgebra escolar y su relación con la aritmética

El álgebra es una de las principales ramas (o subárea) de la matemática y el álgebra escolar (elemental) es la forma más básica de la misma. El álgebra escolar y la aritmética (otra rama de la matemática) están tan relacionadas que en ocasiones es considerada el álgebra como aritmética generalizada. Sobre esta caracterización del álgebra se encuentran tanto defensores como detractores. Entre los autores que justifican estrechas conexiones entre aritmética y álgebra se encuentra Vallejo, (1841)¹, quien establece que las relaciones entre los números pueden ser de tipo general o particular. Las leyes de los números proporcionan relaciones generales de los mismos, por ejemplo: “la suma de dos números pares es par”, es una ley aplicable a todos los números pares, por lo tanto es una relación de tipo general. Por su parte, los hechos proporcionan la particularidad, ejemplo: “tres más cinco es igual a ocho”, es una relación solo entre los números 3, 5 y 8, por tanto es una relación de tipo particular. Divide así la ciencia de los números en dos ramas; el álgebra que trata de las leyes, y la aritmética que trata de los hechos. Más recientemente otros autores también defienden esta relación entre aritmética y álgebra, de la que venimos hablando. Gómez (1995) señala que el álgebra generaliza a la aritmética, y la aritmética, por su parte, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis. Drijvers y Hendrikus (2003) indican que existe una relación dual entre ambas ramas, la aritmética proporciona al álgebra raíces y fundamentación y el álgebra proporciona a la aritmética la posibilidad de simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Palarea (1998) se refiere al álgebra como parte de la matemática que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas y de las operaciones de esas estructuras; desde esta posición se puede ver el álgebra escolar como aritmética generalizada que involucra formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas. Subramaniam y Banerjee (2011) precisan que el álgebra no es solo generalización de la aritmética sino que proporciona una fundamentación para la misma.

Hay autores que no comparten la concepción de esa estrecha relación entre aritmética y álgebra y consideran que el álgebra es, entre otras cosas, una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructuras, para establecer conexiones y para formalizar argumentos matemáticos (Arcavi, 1994). Se considera el pensamiento algebraico y se caracteriza como aquel que permite analizar relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar cambios, hacer generalizaciones, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir (Bell, 1995; Kieran, 2006). Una aproximación a situaciones cuantitativas que enfatizan las relaciones y aspectos generales; la expresión de estas acciones no tendrían que ser letras o símbolos necesariamente, que quedarán reservadas para el discurso más tradicional del álgebra (Kieran 1989). Dos indicadores señalan Lins y Kaput (2004) con los cuales se caracteriza el pensamiento algebraico: a) entraña actos deliberados de generalización y expresión de la generalidad, b) conlleva, usualmente, razonamientos basados en formas de generalización sintácticamente estructuradas que incluyen guías de acciones sintácticas y semánticas. El pensamiento algebraico se describe en contraposición a lo que se entiende por pensamiento aritmético, en el acto de resolver problemas. Se señala que mientras que los problemas aritméticos se pueden resolver operando con los números dados en el problema y en los que las cantidades desconocidas (solución del problema) pueden llegar a obtenerse operando con las cantidades conocidas (dadas en el problema), en la resolución de los problemas

¹ (Tomado de Gómez, 1995)

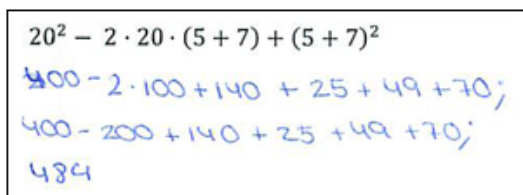
algebraicos se requiere la identificación de aquello que es desconocido (incógnita), representándolo con una letra y operando con ella como si fuese conocido (Bednarz y Janvier, 1996; Stacey y MacGregor, 2000).

Dificultades con el álgebra asociadas a la aritmética

Hay una gran tradición de enseñar, en las escuelas, aritmética antes que álgebra. El aprendizaje de la aritmética se produce en la educación primaria y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria. Esta secuencia temporal se justifica por el hecho de que el álgebra se desarrolla sobre la aritmética debido a la necesidad de sistematizar y describir propiedades, operaciones y procesos generales para resolver una clase de problemas (Banerjee, 2008). Pero las propias experiencias de profesores indican que los estudiantes muy raramente establecen conexión entre aritmética y álgebra y es que la ruta de la aritmética para llegar al álgebra está plagada de obstáculos pedagógicos (Balacheff, 2001). La manera de hacer la conexión aritmética-álgebra es, por lo tanto, una de las causas de tensiones en la enseñanza. Esto ha conducido a que en algunos currículos se introduzca el álgebra por otros métodos, a través del uso de patrones, como generalización de dichos patrones, donde la aritmética puede ayudar a la comprensión de los símbolos y las transformaciones entre ellos (Banerjee, 2008).

La relación entre aritmética y álgebra lleva a que muchas de las dificultades de los estudiantes que conducen a errores al trabajar en álgebra escolar se justifiquen, bien desde la falta de conocimiento de los estudiantes sobre el mismo asunto en aritmética o bien porque el conocimiento aritmético supone un obstáculo para el algebraico. Hacemos referencia a algunos ejemplos.

Los estudiantes presentan dificultades en relación a las convenciones algebraicas y, dado que las convenciones del álgebra rigen también en aritmética, el fracaso de los estudiantes al aplicarlas o ignorarlas en álgebra, son achacables a su desconocimiento en aritmética, nos referimos al uso de paréntesis y jerarquía (o prioridad) de operaciones. Por ejemplo, en una “cadena” de operaciones aritméticas como la que recoge la Figura 1² el estudiante muestra cometer un error al aplicar distributividad en el segundo sumando y, o bien se olvida del primer factor 2 que aparece en la multiplicación $2 \cdot 20 \cdot 7$ que debe de realizar, o se olvida de poner un paréntesis entre la suma $100 + 140$ que está multiplicada por 2 (puede que no sea solo un olvido).



$$\begin{aligned}
 &20^2 - 2 \cdot 20 \cdot (5 + 7) + (5 + 7)^2 \\
 &400 - 2 \cdot 100 + 140 + 25 + 49 + 70; \\
 &400 - 200 + 140 + 25 + 49 + 70; \\
 &484
 \end{aligned}$$

Figura 1: Aplicación incorrecta de la propiedad distributiva

Además, en las cadenas de operaciones, es necesario seguir las reglas de preferencia para realizar dichas operaciones en un cierto orden para mantener el valor de tales expresiones. Algunos estudiantes tienen dificultades para cumplir con tales reglas en aritmética. Se percibe en el caso que recoge la Figura 2, en el que el estudiante, que ha de indicar la corrección de la igualdad, suma los números 169 y 10, ignorando que 10 está multiplicado por 17.

²A menos que se señale lo contrario, los ejemplos proceden del trabajo de tesis en curso de Danellys Vega-Castro que realiza bajo la dirección de Encarnación Castro y Marta Molina.

Handwritten student work showing incorrect application of the distributive property. The student incorrectly calculates $13^2 + 10 \cdot 17 + 17^2$ as $(13 + 17)^2$. The steps shown are:

$$\begin{aligned}
 13^2 + 10 \cdot 17 + 17^2 &= (13 + 17)^2 \\
 169 + 10 \cdot 17 + 289 &= 169 + 289 \\
 179 \cdot 17 + 289 &= 458 \\
 3043 + 289 &= 458 \\
 3332 &= 458
 \end{aligned}$$

Figura 2: Uso incorrecto de la regla sobre jerarquía de operaciones

La utilización de una noción primitiva de la propiedad distributiva al transformar $(a+b)^2$ en a^2+b^2 , tiene su reflejo en la aritmética, no estando claro hacia donde está dirigida la influencia si desde la aritmética hacia el álgebra o viceversa. La Figura 3 muestra el desempeño de un estudiante a quien se le ha pedido que opere para comprobar si la expresión es correcta.

Handwritten student work showing incorrect expansion of a sum squared. The student incorrectly calculates $(13 + 17 + 10)^2$ as $(13 + 17)^2 + 2 \cdot (13 + 17) \cdot 10 + 10^2$. The steps shown are:

$$\begin{aligned}
 (13 + 17 + 10)^2 &= (13 + 17)^2 + 2 \cdot (13 + 17) \cdot 10 + 10^2 \\
 13^2 + 17^2 + 10^2 &= 13^2 + 17^2 + 2 \cdot (13 + 17) \cdot 10 + 10^2 \\
 169 + 289 + 100 &= 169 + 289 + 26 + 34 \cdot 10 + 100 \\
 558 &= 5180 + 100 \\
 558 &= 5280
 \end{aligned}$$

Figura 3: Uso incorrecto del cuadrado de una suma

La concepción de que el álgebra es la generalización de la aritmética o la terminación de la aritmética (Usiskin, 1987) lleva a poner la atención en el proceso de generalización en aritmética y se observa que este proceso supone una de las causas de dificultad frecuentes y persistentes en álgebra. En este ámbito, una de las dificultades que tienen estudiantes de (12-14 años), se observa cuando han de escribir la expresión algebraica del término general de una sucesión como puede ser la de los números impares (1, 3, 5, 7---). Se resisten a escribir una expresión compuesta, como es $2n-1$, argumentando que los términos de la sucesión presentan una forma simple y el término general debe de ser también de forma simple (Castro, 1994). La apariencia diferente entre los términos particulares y el término general es la causa de dicha dificultad. Otra dificultad, una vez llegado a encontrar un patrón como generalización, consiste en expresarlo algebraicamente, o sea, utilizar el lenguaje algebraico adecuadamente para expresar dicho patrón (Cañadas 2007, Trujillo, Castro, y Molina, 2009).

Álgebra como lenguaje

Una de las caracterizaciones que se hacen del álgebra es como un lenguaje para describir acciones y relaciones entre cantidades. En este caso, como en cualquier lenguaje, pueden surgir dificultades debidas a las características del propio lenguaje o al hacer traducciones entre lenguajes diferentes. Un conocimiento básico del lenguaje es el del vocabulario. Partiendo de esta premisa y considerando que la falta del vocabulario adecuado lleva al fracaso de los estudiantes en álgebra, Miller y Smith (1994) desarrollan su investigación. Recogen un listado de 30 términos básicos e indagan el uso que los estudiantes hacen de los mismos. Obtienen, como resultado, que los estudiantes conocen un promedio de 15 de los 30 términos recogidos.

Tanto en su sintaxis como en su semántica, el lenguaje del álgebra se aleja del lenguaje natural y también del lenguaje aritmético (Rojano, 1994), lo cual no facilita dar significado a los símbolos y expresiones del álgebra. Una de las causas de la persistencia de errores sintácticos se explica por el hecho de que el uso del lenguaje

simbólico del álgebra está restringido al aula, en desventaja con el uso de la lengua vernácula. Los errores en lengua usual tienden a desaparecer con el tiempo y uso de la misma, cosa que no ocurre con el lenguaje simbólico, del que se hace un uso restringido. A esto hay que añadir el carácter formal del lenguaje algebraico que contrasta tanto con el lenguaje aritmético (si bien este tiene cierta formalidad) como con el vernáculo, lo que impide también un traspaso entre dichos lenguajes algebraico y aritmético o vernáculo (Freudenthal, 1983).

Gran cantidad de las dificultades achacables al lenguaje del álgebra, surge en la resolución de problemas al hacer translaciones desde las expresiones verbales a las algébricas o viceversa. Apareciendo la dificultad en la formulación de ecuaciones algebraicas cuando la información se presenta con palabras (MacGregor y Stacey 1997). En la investigación que hemos realizado (y que continúa en curso) centrada en estudiar la manera de hacer traducciones entre los lenguajes simbólico y verbal por estudiantes de educación secundaria, se ha manifestado que, utilizando las mismas expresiones, los estudiantes cometen más errores al realizar la traducción de enunciados verbales a su representación simbólica, que cuando se hace desde el simbólico al verbal. Por esto consideramos que ofrece mayor dificultad la traducción de lo verbal a lo simbólico que lo contrario. A su vez, una metodología basada en el juego produce efectos positivos en el aprendizaje de estas traducciones en estudiantes poco motivados con el estudio de las matemáticas.

El dialogo que se recoge a continuación muestra la actuación de dos estudiantes cuando tratan de unir fichas de un “dominó algebraico” especialmente preparado para la ocasión (una de las fichas presenta una expresión algebraica que hay que unir con otra ficha que presente la misma expresión en lenguaje verbal) y cómo uno señala a otro el error que ha cometido (Rodríguez, 2011).

AH. Pongo ésta porque la raíz cuadrada de un número que vale x es igual a dicho número (une el enunciado leído en una ficha con la expresión simbólica $(\sqrt{x})^y$).

MP. No, está mal... porque no dice que esté elevada a dos, dice la raíz cuadrada de un número elevada a otro número.

Hacemos a continuación un recorrido por diferentes componentes del lenguaje algebraico con la mirada puesta en las dificultades que los mismos ocasionan a los estudiantes.

Variables

Las variables son símbolos literales con los que se representan números. En el álgebra escolar, las variables tienen tres usos diferentes: como incógnitas, como números generalizados y para señalar relaciones funcionales (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005), estos tres usos suponen confusión en algunos estudiantes. Las variables cuando aparecen en el estudio del álgebra, son causa de dificultades para muchos estudiantes (Küchemann, 1981). La investigación muestra que en sus primeras aproximaciones al álgebra, no entienden el significado de las letras y comúnmente las interpretan como suplencia de objetos o palabras (MacGregor y Stacey, 1997). Una explicación a este hecho indica que las aproximaciones iniciales que los estudiantes tienen con las letras puede entorpecer la construcción del concepto de variable. Se

señala como impedimento el asignar una letra como nombre de una persona (A, por Alberto) o cuando se indica cinco peras con la expresión $5p$, al dar el resultado de un problema, ya que se puede asumir que las letras son abreviaturas. Booth (1984) sostiene que las dificultades de los alumnos, al comenzar a trabajar en álgebra es el resultado de la utilización desigual de las letras en la aritmética y el álgebra. En aritmética, letras como "m" y "c" se utilizan como etiquetas para representar metros y céntimos, no un número de metros o de céntimos, como lo harían en el álgebra. La interpretación de las variables como abreviaturas afecta a la transformación de problemas orales en expresiones algebraicas aptas para obtener el resultado a través de su transformación (Wagner y Parker, 1999).

Dado que las variables operan al igual que los números de la aritmética, y conceptualmente se asemejan a sustantivos en el lenguaje común, hace que muchos estudiantes adquieran cierta facilidad en la rutina de manipular variables y pueden trabajar con ellas aunque no tengan plena comprensión de la potencialidad y flexibilidad de las mismas (Wagner, 1983). Por ejemplo, los estudiantes que se enfrentan a las variables como incógnitas en las ecuaciones a veces no entienden que las letras representan un valor específico. Una concepción ingenua acerca de las variables se ha detectado, se trata de considerar que diferentes letras deben tener diferentes valores (Kieran, 1989). Incluso cuando se asegura que cualquier letra puede ser utilizada como algo desconocido, se llega a pensar que el cambio de una letra puede cambiar la solución de una ecuación. En la enseñanza se refuerza esta idea cuando para ilustrar la propiedad distributiva, por ejemplo, los profesores tomamos números distintos para cada letra (Wagner, 1983). Küchemann (1981) encontró que solo un porcentaje muy pequeño de estudiantes de entre 13-15 años podía considerar una letra como un número generalizado. Menos aún eran capaces de interpretar una letra como una variable. La mayoría de los estudiantes tomó las letras como objetos concretos o simplemente los ignoró. En el proceso inverso de asignar letras como variables, al hacer una generalización, los estudiantes también encuentran dificultades para discernir la asignación de letras. En la Figura 4 se presenta el desempeño de un estudiante de tercero de enseñanza secundaria obligatoria que ha de escribir una expresión algebraica que generalice un patrón. Se le indica que construya dos expresiones con números y una con letras que tengan la misma estructura que las dadas. Se aprecia cómo a la constante 2, que aparece en todas las expresiones y que el alumno ha detectado, le asigna una letra como si se tratase de una variable.

$$\begin{array}{l}
 4^2 + 7^2 + 2 \cdot 4 \cdot 7 \\
 6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10 \\
 23^2 + 15^2 + 2 \cdot 23 \cdot 15 \\
 \hline
 \text{Con números } 8^2 + 12^2 + 2 \cdot 8 \cdot 12 \\
 3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \\
 \hline
 \text{Con símbolos algebraicos (letras):} \\
 x^2 + y^2 + n \cdot x \cdot y
 \end{array}$$

Figura 4: Expresión simbólica de la generalización de un patrón

Símbolos

En álgebra, los símbolos "+", "-", e "=" tienen varios significados. Pueden indicar procesos de cálculo o situación estática de respuesta final. Por ejemplo $x + 8$ indica, por una parte, la instrucción de realizar la adición de añadir 8 a cualquier número, o bien,

dar una respuesta en la cual se indica que existe la relación “cualquier número sumado con 8”. Algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra están asociadas al uso de los símbolos (Wagner y Parker, 1999), por ejemplo, considerar que en una expresión como $5x^2 - x$, la segunda x representa un número negativo en lugar del opuesto a x .

El signo $=$ en álgebra tiene significado de equivalencia cuantitativa entre los dos lados del signo (Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 1989). La correcta interpretación del signo de igualdad es esencial para el aprendizaje del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2003), porque el razonamiento algebraico se basa en la capacidad de los estudiantes para entender la igualdad en su totalidad y utilizar adecuadamente el signo de igualdad para expresar generalizaciones (Molina, Castro y Castro, 2009). La comprensión de la igualdad y la equivalencia que significa, está en el centro de la comprensión del álgebra ya que las expresiones equivalentes tienen el mismo valor numérico para todos los valores de las letras y se mantienen las aplicaciones de validez de las reglas de transformación de una expresión en la otra. Esta noción tiene relevancia en la simplificación de expresiones algebraicas en la que toda expresión intermedia y la final, simplificada, han de ser equivalentes. Al buscar la solución de ecuaciones y hacer transformaciones de las expresiones, dichas transformaciones han de seguir las normas establecidas por el álgebra, de modo que se obtengan expresiones equivalentes y no se modifique la solución. Algunos estudiantes que no tienen en cuenta la equivalencia transforman las expresiones o ecuaciones arbitrariamente. La no comprensión del signo $=$ como equivalencia hace que los estudiantes presenten dificultades en la comprensión del álgebra. Por ejemplo, en aritmética, a veces, no juzgan la igualdad de dos expresiones sin haber realizado todos los cálculos. Mostramos en la Figura 5 un ejemplo del desempeño de un estudiante de tercero de educación secundaria obligatoria ante la tarea de comprobar si la sentencia es o no correcta. Realiza todos los cálculos para decir que es incorrecta la igualdad una vez vistos los dos resultados numéricos finales, no da explicación, suponemos que lo considera innecesario, visto que los números en cada uno de los lados de la igualdad son diferentes

Handwritten student work showing a calculation and a conclusion. The work is written in blue ink on a white background. It shows the following steps:

$$30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 30 \cdot (20 - 14)$$

$$600 - 280 = 600 - 420$$

$$320 = 180$$

Below the calculations, the student has written: "Es incorrecta porque _____".

Figura 5: Valoración de la veracidad de la sentencia dada

Algunos estudiantes creen que el signo igual indica una operación que hay que hacer en el primer miembro de la igualdad para dar la respuesta a la derecha del signo, Por ejemplo, un alumno de 3º de educación primaria da las siguientes explicaciones al juzgar la veracidad de las expresiones que se le presentan (Molina, 2006, p. 623)

Tabla 1: explicaciones de estudiantes de 3º curso de primaria sobre la veracidad de expresiones aritméticas

$75 + 23 = 23 + 75$	$7 + 15 = 8 + 15$	$53 + 41 = 54 + 40$	$16 + 14 - 14 = 36$
Falsa porque $75 + 23$ no es 75 ni 23	Falsa porque $7 + 15$ no es 8 ni 15	Falsa porque $53 + 41$ no es 54 ni 40	Verdadera porque $16 + 14 - 14 = 36$

No admitiendo que en el segundo miembro de la igualdad pueda haber más de un número. Describen la igualdad en términos de operador, con una operación en el lado izquierdo y un resultado en el lado de la derecha. En aritmética, tanto la igualdad como el signo más se suelen interpretar como acciones a realizar, a veces estas acciones no

son las adecuadas. Ejemplo, escribir 17 al completar la igualdad $14 + \square = 13 + 4$ (Molina, 2006).

Para construir el significado de equivalencia del signo igual, se aconseja que dicho significado comience a tratarse en el trabajo con igualdades aritméticas antes de la introducción del álgebra. Si esta idea se construye a partir del conocimiento aritmético de los estudiantes, pueden llegar a adquirir una comprensión intuitiva del significado de una ecuación y transformar dicha comprensión en conocimiento para el álgebra. Booth (1984) señala que en aritmética el signo igual no debe ser leído solo como indicación de resultado, como en el caso "2 más 3 hace 5" sino como "2 más 3 es equivalente a 5".

Relacionado con el uso de los símbolos, Arcavi (1994) introduce la noción de sentido del símbolo como una meta deseada en la enseñanza de las matemáticas. Señala que una definición explícita del sentido del símbolo no es viable debido a la complejidad y variación en todo lo que se necesita para utilizar con eficacia y razonar con diferentes formas simbólicas del álgebra. Describe una serie de descriptores que caracterizan al sentido del símbolo en el dominio de álgebra en secundaria: 1) apreciación del poder de los símbolos que incluye lo que los símbolos pueden y no pueden hacer, 2) capacidad para determinar cuándo abandonar el uso de símbolos y recurrir a otras formas de representación, 3) capacidad de leer expresiones y ecuaciones, 4) capacidad para diseñar formas simbólicas, y 5) conocimiento de los diferentes roles que los símbolos juegan en diferentes contextos. En palabras de Hoch (2003), el sentido simbólico, según Arcavi, es un conglomerado de "sensibilidades" (feeling) sobre los símbolos que incluyen reconocimiento del poder de los mismos, sentimiento de cuándo es apropiado utilizar los símbolos, capacidad de manipular e interpretar expresiones simbólicas, diferentes roles que pueden jugar los símbolos en diferentes contextos y añade que la adquisición de sentido del símbolo es un objetivo importante de la enseñanza del álgebra.

Expresiones

Una expresión algebraica es una descripción de unas operaciones que contienen símbolos y signos. Ejemplos de expresiones algebraicas son $8y$, $x + 4$, $7x^2 - 4x + 2 = 0$. En estas expresiones se emplean dos sistemas de símbolos distintos (letras y números) lo que conlleva economía en la notación pero, dado que las letras y los números se ajustan a diferentes reglas, causan dificultades a los estudiantes (Wagner y Parker, 1999).

Entre las expresiones algebraicas que forman parte del currículo escolar están las ecuaciones y las funciones. Estos dos conceptos, si bien forman parte del álgebra escolar, no son conceptualmente equivalentes sino que entre ellos existe un gran salto cognitivo. En las ecuaciones (cuando no se trata de sistemas de ecuaciones) aparece una sola variable, que representa algunos números. En las funciones hay dos o más variables que pueden asumir una infinidad de valores relacionados entre sí. Las desigualdades están entre los dos conceptos anteriores, una sola variable representa todo un continuo de números.

En las ecuaciones el signo igual adquiere especial relevancia. En la resolución de ecuaciones, el signo igual es una señal explícita de relación y los estudiantes han de operar en toda la relación para encontrar una secuencia de relaciones equivalentes. Pocos estudiantes aprecian plenamente el hecho de que la solución de una ecuación es encontrar el valor o valores de la variable para la cual los lados, izquierdo y derecho, de la ecuación son iguales. Se aconseja, en la enseñanza trabajar con igualdades aritméticas

para desarrollar el concepto de ecuación (Herscovics y Kieran, 1980) y utilizar métodos basados en el uso de la calculadora para encontrar aproximaciones con el objetivo que los estudiantes se centren más en el aspecto relacional de una ecuación y menos en la solución algorítmica.

El concepto de función es difícil de entender para muchos estudiantes (Welder, 2006) y la notación formal $f(x)$ que condensa una gran cantidad de información, de manera muy eficiente, tiene poco significado incluso para algunos estudiantes avanzados. La falta de significado puede ser debida a que la definición de función apoyada en la teoría de conjuntos, muy utilizada en la enseñanza, no expresa la riqueza del concepto de función en toda su extensión. Algunas investigaciones, centradas en el proceso cognitivo de los estudiantes al construir el concepto formal de función, concluyen que se realiza por etapas. El comienzo está en la noción de una regla o ley que determinará la función y se progresa a través del vocabulario y el simbolismo, la representación, las operaciones sobre las funciones y propiedades internas de las funciones específicas (Lovell, 1971). Otras investigaciones se han centrado en ideas intuitivas acerca de las funciones y la transición desde la intuición al simbolismo formal (Dreyfus y Eisenberg, 1982), una de las conclusiones es que algunos estudiantes de secundaria pueden comprender fácilmente la idea básica de función como regla de correspondencia ya sea en situaciones concretas o en tablas de dos columnas de números. Otras investigaciones se han centrado en estudiar las dificultades que presentan los estudiantes; una dificultad específica encontrada en estudiantes que habían trabajado funciones generales y lineales está en el uso de los términos del vocabulario relacionados con las mismas: preimagen, imagen, dominio, rango (Markovits, Eylon, y Bruckheimer, 1988), los estudiantes también ponen de manifiesto dificultades en el estudio de cierto tipo de funciones como funciones constantes y funciones cuyas representaciones gráficas es discontinua. Un conocimiento erróneo mostrado con frecuencia es considerar que todas las funciones son lineales. Según Markovits Eylon y Bruckheimer (1988), para los estudiantes de menor capacidad resulta más fácil manejar situaciones que involucran funciones que se dan dentro de una historia gráfica frente a las que sólo se presentan algebraicamente. Este resultado les lleva a sugerir que el desarrollo de las capacidades gráficas debería preceder al aprendizaje de las funciones (Welder, 2006). Pero, por otra parte, la gráfica ha sido específicamente identificada como objeto de dificultades en el aprendizaje del álgebra por los estudiantes (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

En gran parte de estas investigaciones se dan pautas para hacer la enseñanza más efectiva. Así, introducir las funciones con ejemplos sencillos y utilizar una variedad de tipos ayudará a los estudiantes a construir una más completa conceptualización de las funciones. Para el trabajo con funciones simples, identificar patrones y describir verbalmente las reglas de asociación. Establecer una relación funcional entre dos variables es también una actividad esencial en los cursos de introducción al álgebra (Welder, 2006).

Estructura de las expresiones algebraicas

Se ha argumentado que muchas de las dificultades de los estudiantes con el álgebra simbólica y las transformaciones en la misma, son debidas a la falta de comprensión de los estudiantes de la estructura de las expresiones (Hoch y Dreyfus, 2004). Sobre la estructura cabe distinguir un significado doble: la estructura externa de una expresión y la estructura interna. La estructura externa muestra los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes

elementos y las relaciones que existen entre ellos (Molina, 2012). Se trataría de la forma gramatical de las expresiones en términos de Esty (1992), la estructura superficial de una expresión en palabras de Kieran (1992) o la estructura sintáctica, según Kirshner (1989). Desde un punto de vista amplio, se puede decir que la estructura externa da cuenta de la forma en que una entidad se compone de partes (existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad). El reconocimiento de dicha estructura no requiere evocar posibles significados para los símbolos involucrados. La estructura interna describe el valor de la expresión y las relaciones entre los componentes de la expresión con el mismo, estas acciones requieren mayor implicación de conocimientos. En este mismo orden de ideas Hoch y Dreyfus (2004) distinguen entre el orden y la forma de una expresión algebraica, la forma está relacionada con la apariencia externa de la expresión y el orden con las relaciones que mantienen los componentes de dichas expresiones entre sí y con otras estructuras.

Asociado a la estructura de las expresiones algebraicas surge el constructo sentido estructural o sentido de estructura (Linchevski y Livneh, 1999). Se sugiere que algunas de las dificultades de los estudiantes con el álgebra se explican por la deficiencia de sentido estructural que presentan y que, a su vez, podrían estar ligadas a falta de comprensión de aspectos estructurales de la aritmética. Se sugiere que un estudiante muestra buen sentido estructural cuando opta por un método eficaz y elegante para resolver un problema. Un ejemplo se muestra en la Figura 6 en donde el estudiante ha de simplificar la fracción algebraica dada (Vega-Castro 2010).

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{(x-7)}$$

Figura 6: Simplificación de una fracción algebraica

Una definición de sentido estructural podría incluir la capacidad para reconocer la estructura algebraica y utilizar las funciones apropiadas de esa estructura, en el contexto dado, como una guía para elegir las operaciones a realizar. En sus investigaciones Linchevski y Livneh (1999) parten del supuesto de que el álgebra escolar hereda las propiedades estructurales de la aritmética. La tendencia a calcular las cadenas de operaciones de forma secuencial, de izquierda a derecha, en aritmética suele acarrear dificultades en álgebra y no ayuda a construir sentido estructural. La Figura 7, muestra un ejemplo del cálculo secuencial que realiza un estudiante (también se muestra la necesidad de cierre que tiene para responder que la igualdad es incorrecta) para discernir sobre la corrección de la expresión dada.

$$5 \cdot (26 - 22) + 5 \cdot 16 = 5 \cdot (26 - 22 - 16)$$

$$130 - 110 + 80 = 130 - 110 - 80;$$

$$0 = -60$$

Es incorrecta porque los dos números no son iguales

Figura 7: Comprobación de la corrección de la expresión dada

En álgebra, cuando se trata de simplificar expresiones algebraicas al reordenar los términos aplicando algunas propiedades de las operaciones para reducir la expresión a una forma de apariencia más simple que no tiene que ser necesariamente solo un

término, es necesario evaluar la expresión antes de realizar cálculos y ahí interviene el sentido estructural. Calcular secuencialmente es un escollo que a veces conduce a no alcanzar éxito en la tarea, como ocurre en el caso que se presenta en la Figura 6 en el proceso de simplificar la fracción algebraica (Vega-Castro 2010).

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x^2 + 2x + 1) \cdot (x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^3} = \frac{x^2 + 14x + 49}{x^3(-7)^3 + 3x^2(-7) + 3x(-7)^2 + (-7)^3} = \frac{x^2 + 14x + 49}{x^3 - 343 - 21x^2 + 42x}$$

Figura 8: Simplificación de una fracción algebraica

En el proceso de reconocer manejar o reproducir una estructura hay muchas demandas cognitivas que el estudiante tiene que cumplimentar para poder operar con símbolos algebraicos: comprender los diferentes significados de los símbolos, elección del que mejor se ajusta a la situación, reconocer lo que los símbolos representan, tanto para el resultado como para el proceso (Sfard y Linchevski, 1994). La falta de reconocimiento de esta complejidad puede llevar a muchos estudiantes a sentir que los símbolos del álgebra son arbitrarios y por lo tanto pueden ser ignorados.

Para concluir

Cerramos esta reflexión en la que nos hemos centrado en hacer un recorrido por diferentes dificultades que muestran los estudiantes en sus aprendizajes algebraicos, achacables a lo peculiar de esta materia, indicando que si bien han sido muchos los autores consultados y recogidos en las referencias de este documento, muchos más son los que se han quedado sin incluir. Ello puede proporcionar una idea de la cantidad de trabajos de investigación realizados en torno al álgebra escolar. Aún así, las dificultades siguen persistiendo, por lo que hay que seguir indagando. La investigación puede ayudar a comprender cómo los alumnos construyen conceptos y aprenden procedimientos complejos. Puede sugerir actividades para el aula que fomenten las conexiones y que lleven a la comprensión de conceptos. Indagar sobre maneras de hacer las ideas algebraicas accesibles a los estudiantes de manera que el álgebra se convierta en el motor que impulse a un mayor rendimiento de los estudiantes en lugar del filtro que supone actualmente. La divulgación adecuada de los resultados de la investigación, de forma que llegue a los profesores, puede ayudar a los mismos en su trabajo profesional a hacer una enseñanza del álgebra más eficaz, lo que se traduciría en un aprendizaje más eficiente por los estudiantes.

Nuestro interés, actual está centrado en experimentar propuestas de enseñanza dentro del paradigma de la metodología de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Dichas propuestas vienen enmarcadas por el análisis didáctico, sistematizado por Lupiáñez y Rico (2008), de los conceptos involucrados en las propuestas y que dan soporte científico a los tres momentos diferentes de los experimentos de enseñanza: preparación, implementación y análisis de resultados.

Referencias

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, 40(1), 111–129.

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 24-35.
- Arnaú, D. Arevalillo-Herráez, M. y Puig, L. (2011). Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.). *Investigación en educación Matemática XV*, 257- 266. SEIEM. Ciudad Real.
- Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs algebra: The core of a didactical dilemma. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (p. 249–260). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Banerjee, R. (2008). *Developing a learning sequence for transiting from arithmetic to elementary algebra*. Ph. D. dissertation Consultado 27/05/2012 en: <http://www.hbcse.tifr.res.in/research-development/ph.d.-thesis/rakhi-synopsis>.
- Banerjee R. (2011). Is Arithmetic Useful for the Teaching and Learning of Algebra? SAGE. Consultado 27/05/2012 en: <http://www.sagepublications.com>.
- Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 41–73.
- Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, 115–136. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Breiteig, T. y Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: to reason, explain, argue, generalize and justify. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 225-232. PME. Prague.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.
- Booth, L. R. (1999). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and others publications*, 299-307. Reston, VA: NCTM.
- Brizuela, B. M. y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 2, 137-144. Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
- Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Castro, E.; Cañadas, M^a. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento Inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO Competencia numérica y cálculo mental*, 55-67.

- Cañadas, M.^a C. (2007). *Descripción y Caracterización del Razonamiento Inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (2), 87-115.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99-110.
- Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. En A.J. Bishop (Ed.) *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching* 63-85. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 360-380.
- Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral. Utrecht. Universidad de Utrecht.
- Espinosa, M. E. (2004). *Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 14(4), 31-53.
- Fernández, F (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel Publishing Co.: Utrecht.
- Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 1, 49-66. Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
- Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma* 20, 61-68.
- Herscovics, N. (1989). Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra. In S.Wagner y K. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 60-86. Reston, Virginia: LEA.
- Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.

- Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, 73(8), 572-580.
- Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education (CD)*. Bellaria, Italy: CERME. M. Consultado 18/05/2012 en:
http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_hoch_cerm_e3.pdf.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3, 49-56. Bergen, Norway: Bergen University College.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.
- Kieran, K. (1989). The Early Learning of Algebra: a Structural Perspective. En S. Wagner y K. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 33-56. Reston, Virginia: LEA
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*, 271-290. Sevilla, España: S.A.E.M. Thales
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 11-49. Rotterdam: Sense Publishers.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419. New York: Macmillan
- Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20(3), 274-284.
- Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 274-287.
- Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Küchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, 102-119. London: John Murray.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1-64.
- Linchevski, L. y Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.
- Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra*, 47-70. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Lobato, J., Ellis, A. y Muñoz, R. (2003). How “focusing phenomena” in the instructional environment afford students’ generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(3), 1-36.
- Lovell, K. (1971). Some aspects of the growth of the concept of a function. En M. F. Roszkopf, L. P. Steffe, y S. Taback (Eds.), *Piagetian cognitive-development research and mathematical education*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students’ understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1–19.
- Malara, N. A. (2003). Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project. In N.A. Pateman et al. (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol.1, 33-48. Honolulu.
- Malara, N.A. y Navarra G. (2012). *Promoting an early approach to the algebraic thought in primary and middle school*. Consultado 28/05/2012 en:
http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_mal/MalNavS01.pdf
- Markovits, Z., Eylon, B.-S. y Bruckheimer, M. (1988). Difficulties students have with the function concept. En A. F. Coxford y A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12*. (1988 Yearbook, 43-60. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Martínez, M.^a V. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Mason, J., Graham, A. y Wilder, J. S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Londres, Reino Unido: The Open University.
- Miller, C. A., y Smith, B. D. (1994). Assessment of prerequisite Mathematics Vocabulary terms for intermediate and college algebra. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16(2), 39-50.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis Doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en:
<http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF>.
- Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*, 53-69. SEIEM. La Laguna.
- Molina, M. (2012). *Proyecto investigador*. Plaza de Titular de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students’ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational*, 7(1), 341-368.

- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88.
- Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de Problemas de Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1), 317-342.
- Palarea, M.^a M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.
- Rodríguez-Domingo S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica por estudiantes de secundaria*. Trabajo fin de máster. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Rojano (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1). 45-56.
- Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M.^a M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.
- Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 191-228.
- Stacey, K. y MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 149–167.
- Subramaniam, K. y Banerjee R. (2011). *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. En Jinfa Cai y Eric Knuth (Eds.). Early Springer Heidelberg Dordrecht London New York.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52. SEIEM. La Laguna:
- Trujillo, P. A., Castro, E. y Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 511-521. SEIEM. Santander:
- Ursini, S.; Escareño, F.; Montes, D.; Trigueros, M.^a. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México. Trillas.
- Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should and must be an eighth-grade course for average students. *Mathematics Teacher*, 80, 428-438.
- Vega-Castro, D. C. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Trabajo fin de máster, Universidad de Granada. Granada.
- Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín; G.

Fernández; L. J. Blanco y M.^a M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, 575-584. SEIEM. Ciudad Real.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, 76(7), 474-479.

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12*, 328-340. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Welder, R. (2006). Prerequisite Knowledge for the Learning of Algebra Hawaii *International Conference on Statistics, Mathematics and Related Fields*. Honolulu, Hawaii. Consultado 27/05/2012 en:

http://www.rachaelwelder.com/files/vitae/Welder_Prereq_Know_Algebra.pdf.

OBSERVACIONES ACERCA DEL PROPÓSITO DEL ÁLGEBRA EDUCATIVA

REMARKS ON THE PURPOSE OF EDUCATIONAL ALGEBRA

Puig, L.

Universidad de Valencia

Resumen

En este texto reflexionamos sobre algunos aspectos del álgebra educativa a partir de lo que hemos llegado a saber gracias al estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en el sistema escolar, y gracias al estudio de la historia del álgebra desde un punto de vista educativo. En particular, reflexionamos sobre los tipos diferentes de significados de campos semánticos distintos, implicados en los sistemas algebraicos de signos, y su integración en un sistema algebraico de signos más abstracto.

Abstract

In this text we reflect on some aspects of Educational Algebra using what we got to know thanks both to the study of processes of teaching and learning algebra in the school system and the study of the history of algebra from an educational point of view. Specially, we reflect on the different kind of meanings from different semantic fields conveyed by algebra sign systems, and its integration in a more abstract algebra sign system.

Palabras clave: *Campos semánticos, Álgebra educativa, Sistema matemático de signos, historia del Álgebra.*

Key words: *Semantic fields, educational algebra, mathematical systems of signs, history of the algebra.*

Nota: *La ponencia completa se encuentra en el Anexo (archivo: Anexo_Actas_XVI_SIMPOSIO_SEIEM_Luis_Puig.pdf) incluido en esta carpeta.*

COMUNICACIONES

SENTIDO NUMÉRICO DE ALUMNADO DEL GRADO EN MATEMÁTICAS

NUMBER SENSE USED BY UNDERGRADUATE MATHEMATICS STUDENTS

Almeida, R. ⁽¹⁾, **Bruno, A.** ⁽¹⁾, **Perdomo-Díaz, J.** ^(1,2)

Universidad de La Laguna ⁽¹⁾,

Universidad de Chile (Centro de Modelamiento Matemático) ⁽²⁾

Resumen

Se presenta resultados de una investigación sobre el sentido numérico de un grupo de estudiantes del Grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna. El objetivo de la investigación es estudiar las estrategias de sentido numérico que manifiestan y compararlas con las presentadas en un estudio previo realizado con futuros profesores de primaria de Taiwán. Los resultados muestran un bajo porcentaje de respuestas correctas teniendo en cuenta el nivel de conocimiento matemático de los alumnos, pero también una mayor variedad de razonamientos basados en sentido numérico, en comparación con el estudio de Taiwán.

Abstract

This paper presents some results from a research about number sense of undergraduate mathematics students from the University of La Laguna. The objective of the research is to study the number sense strategies used by undergraduate mathematics students and to compare the results with those obtained in a previous study about number sense of pre-service elementary teachers in Taiwan. Results show a low percentage of correct responses having in consideration the mathematical knowledge of students but they also display a greater variety of responses with number sense reasoning, comparing with the research in Taiwan.

Palabras clave: *Sentido numérico, futuros profesores de secundaria, futuros profesores de primaria, razonamiento.*

Key words: *Number sense, pre-service secondary teachers, pre-service primary teachers, reasoning.*

Introducción

El *sentido numérico* hace referencia a la comprensión general de una persona sobre los números y las operaciones. Sowder (1992) lo define como “una red conceptual, bien organizada, que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible” (p.381).

Un amplio grupo de investigaciones analizan el uso del sentido numérico en alumnado de educación primaria y secundaria (Alajmi y Reys, 2010; Alsawaie, 2011; Brocardo, Serrazina, Rocha, Mendes, Menino y Ferreira, 2008; Veloo, 2010; Yang, Li y Lin, 2008). Reflejan que, a pesar de la importancia otorgada al sentido numérico en los currículos de los distintos países, permanece la tendencia de los estudiantes a usar procedimientos estándar de cálculo cuando realizan actividades que podrían resolver estableciendo relaciones basadas en su conocimiento numérico (propiedades, relaciones entre las operaciones, estimación, etc.).

Sowder (1992) indica que la instrucción sobre estimación y cálculo mental es una vía para desarrollar sentido numérico. Que los estudiantes tengan un alto nivel en tareas de cálculo escrito, no implica que transfieran estas habilidades a otros métodos que dependan del sentido numérico (Veloo, 2010). Algunas de las propuestas de instrucción diseñadas para promover sentido numérico se basan en actividades que permiten la exploración, la discusión y el razonamiento, teniendo en cuenta que el sentido numérico se desarrolla a largo plazo (Markovits y Sowder, 1994; Veloo, 2010).

Los profesores juegan un papel fundamental en el desarrollo de este tipo de metodologías, sin embargo, Yang, Reys y Reys (2009) muestran que el porcentaje de razonamientos basados en sentido numérico que presenta un grupo de futuros profesores de primaria es muy bajo.

Los datos que presentamos en este trabajo pertenecen a un estudio más amplio sobre sentido numérico de futuros profesores de secundaria. Partimos de la investigación de Yang et al. (2009), utilizando algunas de las tareas propuestas en dicho trabajo, para analizar el conocimiento que presenta el alumnado del Grado en Matemáticas, muchos de los cuales serán futuros profesores de educación secundaria. El objetivo es constatar si la alta formación matemática de este alumnado se manifiesta en estrategias más ricas numéricamente.

Sentido numérico de los futuros profesores

El sentido numérico es un constructo de gran interés en la educación matemática, difícil de describir, pero reconocible en la acción al resolver tareas matemáticas. Diferentes autores lo han caracterizado, llegando a una descripción operativa que se concreta en las siguientes **componentes** (McIntosh y Reys y Reys, 1992; Tsao, 2004; Yang et al., 2008):

1. *Comprender el significado de los números*
2. *Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números*
3. *Usar puntos de referencia*
4. *Componer y descomponer los números*
5. *Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones*

6. *Comprender el efecto relativo de las operaciones*

7. *Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta*

Los estudios sobre profesores de matemáticas muestran cómo su conocimiento del contenido influye en las elecciones que realizan en su práctica de aula. Los profesores con un adecuado conocimiento del contenido matemático tienden a promover que sus alumnos establezcan conexiones matemáticas (Faulkner, 2009).

Establecer conexiones entre conceptos es una herramienta básica para desarrollar sentido numérico. Es importante que los profesores tengan una profunda comprensión de las componentes del sentido numérico. Menino, Tvares, Quaresma y Rodrigues (2011) indican que las ideas asociadas al sentido numérico del profesorado son fundamentales para que planifiquen prácticas de aula que ayuden a promoverlo.

Es una realidad, tanto en España como en otros países, que los futuros profesores no siempre poseen una rica comprensión conceptual de los contenidos matemáticos que deberán enseñar. Al igual que los alumnos de primaria, los futuros profesores de dicho nivel tienen preferencia por usar métodos basados en reglas y presentan dificultades para utilizar estrategias que conlleven otros métodos (Tsao, 2004; Veloo, 2010). Yang et al. (2009) llegaron a esta conclusión con una muestra de futuros profesores de primaria que respondieron a cuestiones relativas a las componentes: *usar puntos de referencia y comprender el efecto relativo de las operaciones*. ¿Ocurrirá lo mismo con los futuros profesores de secundaria?, ¿su formación matemática se ve reflejada en el uso del sentido numérico?

La información obtenida en otros países sobre el sentido numérico de futuros profesores de primaria es útil para extender los resultados a futuros docentes de secundaria, adaptándola al contexto educativo español. La formación que reciben los docentes de matemáticas de secundaria en España, unido a su actitud positiva hacia esta materia debe influir, *a priori*, en los tópicos que enseñan. Las tareas que fomentan sentido numérico suelen ser de respuesta abierta y no siguen una única forma de pensamiento. Se espera de ellos que utilicen métodos flexibles de pensamiento, que puedan transferir a los estudiantes en su futura actividad docente.

Objetivos y Metodología

Objetivos

El objetivo de esta investigación es indagar el sentido numérico que manifiestan futuros profesores de secundaria de matemáticas (estudiantes del Grado en Matemáticas).

Los objetivos concretos de la investigación son:

1. Analizar el éxito y las estrategias que sigue este alumnado en tareas que permiten poner en práctica diferentes componentes del sentido numérico.
2. Comparar la resolución de las tareas con resultados previos obtenidos con futuros profesores de educación primaria.

Metodología

Esta investigación se realizó con 67 estudiantes del Grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna que habían recibido formación en cursos de Análisis Matemático, Cálculo Numérico, Álgebra, Geometría, Topología y Estadística.

Configuramos un cuestionario de 10 ítems de tareas numéricas, entre ellas: ordenar fracciones y decimales (ítems A y C), estimar el resultado de operaciones con fracciones y decimales (ítem B; o estimar el resultado de $72 \div 0,0025$) y estimar medidas (estimar el volumen de la clase). Para resolver estas cuestiones es necesario manejar las componentes del sentido numérico explicitadas en el marco teórico, pues el requerimiento para contestar fue “no realizar algoritmos escritos”. Estos 10 ítems se tomaron de otras investigaciones sobre sentido numérico. Es muy extenso exponer los resultados de todos los ítems, por lo que optamos por detallar las respuestas a tres de ellos, diseñados para que se empleara el *uso de puntos de referencia* y el conocimiento sobre *efecto de las operaciones*. Los tres ítems elegidos pertenecen al trabajo de Yang et al. (2009), en el que se exponen las respuestas de 280 futuros profesores de primaria de Taiwán, lo que nos permite comparar los resultados de ambas muestras de estudiantes.

La presentación y las instrucciones para cumplimentar el cuestionario fueron las mismas que se dio a la muestra de futuros profesores de primaria de Taiwán: cada ítem se dio en un folio independiente, con espacio para indicar la respuesta y para explicar el razonamiento utilizado; tenían 3 minutos para responder cada ítem, no podían pasar al siguiente ítem sin ser avisados y no debían responder utilizando algoritmos de cálculo.

En el análisis de los datos reflejamos los porcentajes de éxito/fracaso y los razonamientos utilizados por los estudiantes.

Resultados

El porcentaje de respuestas correctas y las estrategias en los 10 ítems del cuestionario fue muy variado. Las estrategias se categorizaron de la siguiente forma:

Sentido numérico: En la justificación utiliza componentes del marco del sentido numérico ya explicitado.

Basado en reglas: Utiliza un algoritmo escrito o una regla memorizada.

Parcialmente sentido numérico: Combina en su justificación componentes del sentido numérico con el uso de reglas memorizadas o algoritmos.

Razonamiento incorrecto: Da una explicación matemáticamente incorrecta.

Razonamiento poco claro o incompleto o no argumenta.

A continuación sintetizamos las respuestas a los 3 ítems seleccionados, en cuanto a éxito y estrategias seguidas. Además exponemos los resultados de Yang et al. (2009) para los futuros profesores de primaria que se comentarán en la discusión final del trabajo.

Ítem A

Victoria y María utilizaron unas cintas de colores para una tarea de clase. Victoria utilizó $\frac{30}{31}$ m. y María $\frac{36}{37}$ m. ¿Quién usó más cinta?

El objetivo del ítem es analizar las estrategias para comparar las fracciones $\frac{30}{31}$ y $\frac{36}{37}$.

La respuesta basada en sentido numérico que se espera es la de considerar el 1 como *punto de referencia* y comparar los residuos de las fracciones, es decir, $\frac{1}{31}$ y $\frac{1}{37}$.

La siguiente tabla muestra el porcentaje de éxito y el tipo de respuesta dada por los 67 estudiantes que respondieron al cuestionario, junto a los resultados obtenidos por Yang et al. (2009).

	Grado en Matemáticas			Futuros profesores de Primaria		
	Correcta	Incorrecta	Total	Correcta	Incorrecta	Total
Sentido Numérico	37	4,5	41,5	34	0	34
Basado en reglas	15	12	27	46,5	4	50,5
Razonamiento incorrecto	-	3	3	-	0	0
Razonamiento poco claro/incompleto/no argumenta	6	18	24	14,5	1	15,5
Blanco	-	4,5	4,5	-	0	0
Total	58	42		95	5	

Tabla1: Porcentajes del ítem A

Se observa que el porcentaje de respuestas correctas (58%) del alumnado del Grado de Matemáticas es superior al de las incorrectas (42%), sin embargo lo consideramos insuficiente para su nivel matemático.

Sentido numérico

El 42% de los alumnos utilizó razonamientos que consideramos basados en sentido numérico, como:

- Averiguar los residuos de las fracciones $\frac{30}{31}$ y $\frac{36}{37}$, tomando el 1 como referente ($\frac{1}{31}$ y $\frac{1}{37}$), y compararlos.

Si una cinta la divides en 31 partes
y te llevas 30 te sobra $\frac{1}{31}$
Si la divides en 37 partes los pedacitos
serán más pequeños y te sobrará $\frac{1}{37}$
 $\frac{1}{37} < \frac{1}{31}$

- Generalizar propiedades numéricas, relacionando las fracciones $\frac{30}{31}$ y $\frac{36}{37}$ con una función racional o con los elementos de una sucesión. Estos razonamientos, utilizados por 6 estudiantes, se pueden considerar de un nivel matemático alto, y distingue el tipo de respuesta que se puede obtener de estudiantes con una fuerte formación matemática.

El cociente $\frac{a}{a+1}$ se aproxima más a 1 cuanto mayor es a .

Porque $\frac{30}{31} < \frac{36}{37}$. La sucesión $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{(n+1)n} = \frac{1}{(n+1)n}$

Basado en reglas

Un 27% de los estudiantes utilizaron razonamientos basados en reglas para responder a este ítem, por ejemplo, reduciendo las fracciones $\frac{30}{31}$ y $\frac{36}{37}$ a común denominador:

Suponemos:

$$\frac{30 \cdot (37)}{31 \cdot (37)} = \frac{1110}{31 \cdot 37}$$

$$\frac{36 \cdot 31}{37 \cdot 31} = \frac{36 \cdot (30+1)}{37 \cdot 31} = \frac{1080+36}{37 \cdot 31} = \frac{1116}{31 \cdot 37}$$

Obviamente

$$\frac{1110}{31 \cdot 37} < \frac{1116}{31 \cdot 37}$$

Razonamiento incorrecto

En este ítem dos alumnos utilizaron un razonamiento incorrecto del tipo:

“María utilizó mayor cantidad de cinta que Victoria porque de 31 cintas, (Victoria) utilizó 30 y María, de 37 utilizó 36. De lo que disponían utilizaron la misma cantidad. Pero María utilizó 36 y Victoria 30”.

Ítem B

Carlos utilizó una calculadora para efectuar la operación

$$0,4975 \times 9428,8 = 4690828$$

Pero olvidó escribir la coma decimal. Usa estimación para encontrar el lugar de la coma decimal.

- a) 46,90828
- b) 469,0828
- c) 4690,828
- d) 46908,28
- e) No puedo elegir la respuesta sin realizar el cálculo exacto.

El objetivo del ítem es analizar el uso de *puntos de referencias* para estimar un producto de números decimales (0,4975 como 0,5 ó 9428,8 como 10.000). Se esperaban argumentos del tipo:

- a) $0,4975 \cong 0,5$ luego, $0,4975 \times 9428,8 \cong 0,5 \times 9428,8 = \frac{9428,8}{2} \cong 4690,828$.
- b) $9428,8 \cong 10000$ luego, $0,4975 \times 9428,8 \cong 0,4975 \times 10000 \cong 4690,828$.

Obsérvese que si se efectúa la operación, los dos últimos dígitos del resultado son ceros. Esto hay que tenerlo en cuenta si se aplica la regla de decidir el número de decimales del resultado, en función del número de decimales de cada uno de los factores.

La tabla 2 muestra los resultados obtenidos, junto a los de Yang et al. (2009), clasificando las respuestas correctas o incorrectas según el tipo de razonamiento:

	Grado en Matemáticas			Futuros profesores de Primaria		
	Correcta	Incorrecta	Total	Correcta	Incorrecta	Total
Sentido Numérico	30	3	33	24,5	0	24,5
Parcialmente sentido numérico	1,5	7,5	9	2,5	12,5	15
Basado en reglas	0	43	43	2	52	54
Razonamiento incorrecto	-	1,5	1,5	-	0	0
Razonamiento poco claro/ incompleto/ no argumenta	4,5	9	13,5	2,5	4	6,5
Total	36	64		31,5	68,5	

Tabla 2: Porcentajes del ítem B

Teniendo en cuenta la dificultad de la pregunta y el nivel de conocimiento matemático de los alumnos, el porcentaje de respuestas correctas (36%) está fuera de los resultados esperados, aunque la mayoría usa razonamientos basados en sentido numérico. En las respuestas incorrectas predominan las basadas en reglas (43%), aunque encontramos una mayor variedad de razonamientos.

Sentido numérico

Las respuestas con razonamientos de sentido numérico combinan los *puntos de referencia* con otras componentes del sentido numérico, como la *estimación* o el *efecto de las operaciones*.

Uno de los razonamientos empleado consiste en usar *puntos de referencia*, aproximando 0,4975 a 0,5 y aplicar *relaciones entre las operaciones* para simplificar la *estimación*.

c)
 Porque la cantidad $9428'8$ se está multi-
 plicando por una cantidad muy proximo a $\frac{1}{2} =$
 $= 0'5$, de ahí que su estimación se la mitad
 de $9428'8$.

Las respuestas de dos alumnos fueron clasificadas como incorrectas con razonamiento de sentido numérico, porque siguieron un razonamiento análogo al ejemplo presentado, pero inexplicablemente eligieron una opción incorrecta.

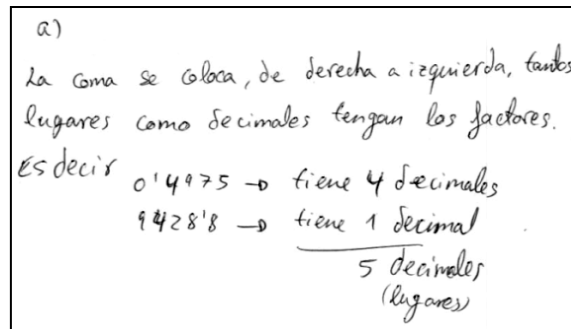
Parcialmente sentido numérico

Las estrategias en las que se combinan una regla con un razonamiento de sentido numérico se clasifican como parcialmente sentido numérico. En este ítem, 5 alumnos hicieron uso del sentido numérico y al mismo tiempo emplearon una regla, aunque no obtuvieron la respuesta correcta:

b) $469;0828$
 Después de multiplicar, se mueve
 la coma, pero como $8 \times 5 = 40$, el
 último término de la solución es 0,
 por lo que la coma se mueve
 5 lugares contando el cero.

Basado en reglas

Un 43% de los alumnos utilizaron un razonamiento basado en reglas, usando técnicas memorizadas, relacionadas con averiguar el número de decimales del resultado en función del número de decimales de los factores multiplicados. En este caso, los alumnos no observaron que el producto de los dos factores acaba en dos ceros y eligieron una opción errónea.



Los errores en el ajuste del valor posicional de la cifras se han detectado en trabajos previos sobre estimación y cálculo mental (Gómez, 1995; De Castro, Castro y Segovia, 2004). Indican los autores que estos tipos de errores reflejan una debilidad de la comprensión del valor posicional y sobre la coma decimal, que queda oculta cuando el trabajo se realiza con algoritmos escritos.

Ítem C

Tomás caminó $0,4828$ km., Juan caminó $\frac{13}{38}$ km., María caminó $\frac{8}{15}$ km., Julia caminó $\frac{17}{16}$ km., David caminó $0,966$ km. y José caminó $\frac{7}{29}$ km.
 Ordena las distancias que recorrieron de mayor a menor.

En el ítem C se dan medidas expresadas con fracciones y decimales, con el objetivo de ordenarlas de mayor a menor. Se esperaba que los alumnos tomaran puntos de referencia para comparar los números (por ejemplo, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$), sin necesidad de expresar todas las medidas en forma decimal o con fracciones de igual denominador.

De las respuestas obtenidas más de la mitad fueron incorrectas (58%), tal y como se muestra en la tabla 3.

	Grado en Matemáticas			Futuros profesores de Primaria		
	Correcta	Incorrecta	Total	Correcta	Incorrecta	Total
Sentido Numérico	30	13	43	24	0	24
Basado en reglas	7,5	7,5	15	64	7	71
Razonamiento incorrecto	-	12	12	-	0	0
Razonamiento poco claro/ incompleto/ no argumenta	4,5	19,5	24	3	2	5
Blanco	-	6	6	-	0	0
Total	42	58		91	9	

Tabla 3: Porcentajes del ítem C

Como en los ítems anteriores, son porcentajes de éxito bajos para estudiantes del Grado de Matemáticas. Analizamos a continuación algunas estrategias.

Sentido numérico

Un 43% de las respuestas presentan argumentos de sentido numérico, como hacer uso de los *puntos de referencia* 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ para comparar las medidas.

$$\begin{array}{l} \frac{7}{29} \approx \frac{1}{4} = \frac{7}{28} \\ 0.4328 \leq \frac{1}{2} \\ \frac{13}{38} \approx \frac{1}{3} = \frac{13}{39} \\ \frac{8}{15} \approx \frac{1}{2} \\ \frac{17}{16} > 1 \\ 0.966 \approx 1 \\ \text{ordenar las fracciones} \end{array}$$

Varios alumnos utilizaron estos razonamientos olvidando alguna medida en la respuesta final, por lo que se clasificó como incorrecta, con razonamiento de sentido numérico.

Basado en reglas

Las respuestas que usaron algoritmos para obtener la forma decimal de todas las medidas se clasificaron como basadas en reglas.

$$\begin{array}{lll} \begin{array}{r} 130 \overline{) 138} \\ \underline{0'3} \\ \text{Juan} \end{array} & \begin{array}{r} 80 \overline{) 115} \\ \underline{5} \quad 0'5 \\ \text{María} \end{array} & \begin{array}{r} 17 \overline{) 16} \\ \underline{1} \quad 1 \\ \text{Julia} \end{array} \\ \begin{array}{r} 30 \overline{) 29} \\ \underline{0'2} \\ \text{José} \end{array} & & \end{array}$$

Razonamiento incorrecto

Este ítem presenta un alto porcentaje de respuestas con razonamiento incorrecto (12%). Una respuesta común en este grupo es la siguiente:

Lo ordenamos según la distancia que hay entre el numerador y el denominador. Cuando la distancia es más grande, el número es más pequeño.

De nuevo es este un argumento de una bajo nivel para estudiantes de formación matemática superior.

Discusión final

Si se compara las respuestas de los estudiantes del Grado en Matemáticas con las de los futuros profesores de primaria (Yang et al., 2009) en los tres ítems, se observa que los porcentajes de éxito de estos últimos son considerablemente superiores en los ítems A y C, y ligeramente inferior en el ítem B (tablas 1, 2 y 3). Este resultado es llamativo por la diferencia que existe entre los dos grupos, en cuanto a formación matemática.

Este hecho coincide con que el porcentaje de razonamientos basados en reglas es también mucho mayor en los ítems A y C, en los futuros profesores de primaria. La relación entre un mayor porcentaje de respuestas correctas y un mayor porcentaje de razonamientos basados en reglas nos lleva a considerar que, una posible causa del menor éxito de los estudiantes del Grado en Matemáticas puede estar en que se esforzaron por cumplir con la consigna de “no usar algoritmos”.

Sin embargo, los alumnos de matemáticas no siempre tuvieron éxito cuando utilizaron reglas. En el caso del ítem B creemos que los alumnos aplican una regla aprendida (“rodar la coma”) y no reflexionan sobre si el resultado obtenido tiene sentido. Es decir, no demuestran el uso de la componente: *Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta*.

En el caso del ítem C, los errores de reglas de los alumnos se deben a que en alguna de las divisiones de las fracciones cometen errores de cálculo, quizás provocado por ser un cuestionario realizado con limitación de tiempo o porque están ya poco habituados a realizar algoritmos escritos, pues en su actividad académica emplean otras herramientas de cálculo.

El hecho de usar menos reglas refleja que los estudiantes del Grado en Matemáticas se esforzaron por buscar estrategias diferentes, aunque en algunos casos no fueron correctas. Destacan los porcentajes de respuestas que presentan razonamientos incompletos, incorrectos o poco claros.

Encontramos respuestas de un nivel matemático muy bajo o con razonamientos incorrectos (por ejemplo, relacionar la cantidad de decimales del resultado de un producto, en función de los decimales de cada factor, o bien, ordenar las fracciones por la diferencia entre el numerador y el denominador, sin analizar otros condicionantes). Vemos que hay ideas incorrectas arraigadas en el conocimiento numérico de los alumnos que no les impiden avanzar en su formación matemática superior, ya que no se presentan en las tareas matemáticas que realizan habitualmente.

Frente a esas respuestas básicas, aparecen otras de nivel más alto del requerido, llegando a una generalización propia de la Matemática. Estas respuestas no se dieron en la muestra de Yang et al.(2009), lo que nos lleva a concluir que una mayor formación matemática puede favorecer el uso de estrategias ricas para resolver este tipo de situaciones.

Es de interés que los formadores de futuros profesores de secundaria conozcamos que este alumnado puede presentar determinadas carencias en el sentido numérico. Seguramente estas carencias no sean complejas de superar, dada la formación de los estudiantes. Como indican Markovits y Sowder (1994), se trata de reorganizar el conocimiento que se posee de manera diferente. También se debe tratar este tópico en asignaturas relacionadas con Didáctica de las Matemáticas de su formación como

futuros profesores de secundaria. Esto implica analizar tareas y metodologías de aula que fomenten el sentido numérico, tomando conciencia de su importancia en la enseñanza obligatoria.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación. Ministerio de Ciencias e Innovación. Madrid.

Referencias

- Alajmi, H.; Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 117-139.
- Alsawaie, O.N. (2011). Number sense- based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 26, 1-27.
- Brocardo, J.; Serrazina, L.; Rocha, I.; Mendes, F.; Menino, H.; Ferreira, E. (2008). Um projecto centrado no sentido do número. En R. Luengo et al. (eds.) *Actas XII Simposio de la SEIEM*. Badajoz.
- De Castro, C.; Castro, E.; Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. de la Torre (eds.) *Actas del VIII Simposio de la SEIEM*, pp.183-194. A Coruña: Universidade da Coruña.
- Faulkner, V. (2009). Components of Number sense: An instructional model for teachers. *Teaching Exceptional Children*, 41(5), 24-30.
- Gómez, B. (1995). Tipología de errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(3), 313-325.
- McIntosh, A.; Reys, B. J.; Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8.
- Markovits, Z.; Sowder, J. (1994). Developing number sense: an intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematic Education*, 25(1) 4-29.
- Menino, H.; Tvares, D; Quaresma, A.; Rodrigues, M. (2011). El sentido del número en los futuros profesores de 1^{er} ciclo, dos estudios de caso. En M. Marín et al. (eds.) *Actas XV Simposio de la SEIEM*, pp. 439-449. Ciudad Real.
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 245-275. MacMillan Publishing Company. New York.
- Tsao, Y. (2004). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of College Teaching and Learning*, 1(12), 71-90.

- Veloo, P.K. (2010). *The development of number sense and mental computation proficiencies: An intervention study with secondary one students in Brunei Darussalam*. Dr. Ph. University of Otago, Dunedin. New Zealand.
- Yang, D.C.; Li, M.N.; Lin, C.I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6, 789-807.
- Yang, D.C.; Reys, R.; Reys, B.J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 383-403.

PRUEBA EXPLORATORIA SOBRE COMPETENCIAS DE FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA: CONOCIMIENTO DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

EXPLORATORY TEST ON COMPETENCIES OF PROSPECTIVE PRIMARY TEACHERS: KNOWLEDGE OF BASIC CONCEPTS OF STATISTICS

Anasagasti, J., Berciano, A.

Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco

Resumen

En este trabajo se evalúa una de las competencias específicas propuestas en el nuevo currículo de Grado para la docencia de estadística elemental en una muestra de 144 futuros profesores de educación primaria. En particular, la competencia evaluada ha sido “Conocer, analizar y aplicar conocimientos básicos para la práctica de aula en EP, tanto en sus aspectos conceptuales como didácticos”. Para ello, hemos diseñado y pasado un cuestionario con el fin de detectar las carencias de dicha competencia en la muestra mencionada, evaluando los conocimientos básicos de estadística para la práctica de aula en EP, en sus aspectos conceptuales. Los resultados obtenidos muestran un escaso nivel competencial, debido a que hay parcelas de la materia en las que se aprecian importantes errores en un alto porcentaje.

Abstract

This paper evaluates one of the specific competences proposed in the curriculum of the new Undergraduate Degree for teaching elementary statistics in a sample of 144 Prospective Primary Teachers. Furthermore, the competence evaluated is “To know, analyze and to apply basic knowledge for practicing at the class of Primary Education, both conceptual aspects and didactics”. For this purpose, we have designed a questionnaire to detect the lack of such competences, evaluating the basic knowledge for the work in a Primary Education classroom, on its conceptual aspects. The results show a little level of competence, because of a high percentage of important failures can be noticed in some areas of the subject.

Palabras clave: *Estadística, competencias, conocimiento, formación de profesores.*

Key words: *Statistics, competences, knowledge, teacher training education.*

Introducción

En la sociedad actual las personas deben enfrentarse diariamente a textos repletos de datos, estudios estadísticos, o interpretar gráficas para una correcta toma de decisiones.

La estadística ha pasado a considerarse una de las ciencias metodológicas fundamentales y base del método científico experimental (Batanero, 2011). El uso de la estadística se ha extendido a multitud de ámbitos de la vida cotidiana a pesar de que en muchos casos algunas personas no puedan hacer una lectura apropiada al carecer de un correcto razonamiento estadístico.

El razonamiento estadístico puede ser definido como la manera en que la gente razona con conceptos estadísticos y da sentido a la información estadística (Garfield y Chance, 2000). Dada la importancia que tiene este razonamiento estadístico y teniendo en cuenta que su aplicación también se extiende al resto de las asignaturas, actualmente y en la mayoría de los países desarrollados, la estadística forma parte del currículo de matemáticas desde la educación primaria (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004). En el currículo vasco así sucede, conformando un bloque propio de contenido (Decreto 97/2010).

La realidad muestra que siendo escaso el profesorado que enseña la estadística en la escuela, la mayoría lo hace de un modo abstracto y reduciéndolo al cálculo rutinario de fórmulas (Estrada, 2004). Nuevamente se incide en el aspecto matemático sin darle importancia al aspecto lógico e interpretativo. Un porcentaje grande del alumnado que es capaz de calcular correctamente la media aritmética no comprende el significado de su algoritmo de cálculo y lo aplica de forma mecánica; y en muchas ocasiones no relaciona los resultados del trabajo matemático con la situación problemática (Arteaga, Batanero y Ruiz, 2009). Gran parte del profesorado tiende a enseñar conceptos y procedimientos, dándole la oportunidad al alumnado para que trabaje con datos y programas estadísticos, y esperando que el razonamiento surja como resultado de todo lo anterior (Garfield, 2003), pero desgraciadamente esto no suele ocurrir así. En muchas ocasiones sucede que las actividades propuestas en clase no contribuyen al desarrollo del conocimiento conceptual adecuado, necesario para la enseñanza de la estadística en educación primaria (Leavy, 2010).

Es por este motivo, que actualmente tome mayor relevancia el desarrollo de las competencias como maestro, al margen del conocimiento teórico de la materia. Es importante proponer en las escuelas de Magisterio actividades en las que el futuro profesorado aprenda la materia de estadística al mismo tiempo que relacione los conceptos con su pedagogía (Ball, 2000). De esta manera se consigue el conocimiento necesario para “trabajar la matemática” (Hill, Rowan y Ball, 2005) explicando conceptos y términos, ofreciendo ejemplos conceptuales y de algoritmos, seleccionando y construyendo actividades o evaluando las respuestas del alumnado. En este contexto, los procesos de identificación, análisis y desarrollo de competencias son necesarios para conseguir una educación de calidad para todos e integrar la educación y la formación dentro de un sistema de ciencia, tecnología y gestión del conocimiento (Salinero y Fernández, 2006).

Teniendo en cuenta todo ello, no se debe olvidar que una de las competencias básicas es precisamente “Conocer, analizar y aplicar conocimientos básicos para la práctica de aula en EP, tanto en sus aspectos conceptuales como didácticos” (EHU/UPV, 2011).

Problemática

La importancia conferida a la estadística en la enseñanza obligatoria contrasta con la escasa formación que sobre la materia parece tener el futuro profesorado (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004). En los actuales planes docentes de gran parte de las universidades estatales la presencia de asignaturas de Matemáticas y en concreto de Estadística es muy escasa, lo cual provoca que en general los futuros profesores tengan unos limitados conocimientos y habilidades acerca de la materia. Por esta razón resulta necesaria la formación en estadística y un mayor apoyo al futuro profesorado por parte de los departamentos y grupos de investigación (Batanero, Godino y Roa, 2004).

En cuanto a estudios previos sobre el conocimiento y las habilidades de Estadística gran parte son mencionados por Estrada (2004). Encontramos estudios dedicados a la lectura de gráficos y tablas (Curcio, Wainer, Reading y Pegg, Gal), comprensión de promedios (Pollasek y cols., Strauss y Bichler, Batanero, Navas y Godino, Carvalho), características de dispersión (Mevarech, Loosen), los estadísticos de orden (Barr, Zawojewski, Schuyten) o la valoración del razonamiento estadístico (Garfield, 2003). Muchos de ellos se centran en los errores y dificultades que el alumnado tiene en el aprendizaje de la Estadística (Campbell, Li y Shen, Cai) ya que, como menciona Radatz (en Estrada 2004), considera el análisis de errores como “una estrategia de investigación prometedora para clarificar cuestiones fundamentales del aprendizaje matemático”.

Mediante la prueba exploratoria se ha tratado de identificar aquellas competencias en las que los futuros profesores presentan mayores carencias, y para este estudio en particular, se ha centrado la atención en la primera competencia, la cual está relacionada con el conocimiento de la materia. A pesar de que las demás competencias también resultan imprescindibles para el correcto desempeño de sus funciones como docentes, hay estudios que muestran que el conocimiento específico de los contenidos sigue siendo la competencia más valorada por el profesorado (Albacete, C., Miralles, P., Delgado, C., 2007). En futuras investigaciones se pretende relacionar la competencia adquirida por el futuro profesorado con su actitud hacia la materia midiéndola mediante el cuestionario SATS, ya que parece ser uno de los cuestionarios que ofrecen mayor garantía (Carmona, 2004).

Metodología

El objetivo de esta investigación es principalmente ofrecer un diagnóstico de la situación para recabar datos que sean útiles en futuras intervenciones, por lo que el carácter del estudio es predominantemente cuantitativo. Para realizarlo se ha pasado un cuestionario a alumnado de Magisterio de la UPV/EHU. Una vez recogidos los datos han sido clasificados y analizados mediante el programa informático PASW Statistics 18, obteniendo los resultados objeto de estudio y discusión.

Participantes

Participan en este estudio 144 de los 200 alumnos de primer curso del nuevo Grado en Magisterio de la especialidad de Educación Primaria (72%), con edades comprendidas entre los 18 y los 33 años. De ellos 38 (26.4%) eran hombres y 106 (73.6%) mujeres, procedentes todos ellos de la Escuela Universitaria de Magisterio de Bilbao de la UPV/EHU. Puesto que en anteriores estudios sobre este tema no se han observado diferencias respecto al modelo lingüístico y teniendo en cuenta que el

número de estudiantes que cursan en castellano es bajo, el cuestionario objeto de estudio ha sido pasado por conveniencia en dos grupos de primer curso, y ambos grupos cursan sus estudios en Euskera.

Variables e instrumentos de medida

Para la investigación se ha construido un cuestionario propio que pretende valorar de 0 a 10 las competencias que el alumnado de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica I tienen acerca de la enseñanza de la estadística. Para ello se han redactado 10 ítems que valorarán las cuatro competencias básicas que para esta asignatura indica la nueva Guía de Grado de Educación Primaria de la UPV. Los ítems redactados para cada competencia varían en número, por lo que algunas competencias tienen mayor peso que otras sobre el resultado total.

Para la primera competencia “Conocer, analizar y aplicar conocimientos básicos para la práctica de aula en EP, tanto en sus aspectos conceptuales como didácticos” los cinco ítems propuestos pretenden evaluar la capacidad de lectura, de comprensión y de resolución, a partir de conocimientos básicos de estadística.

Para el resto de competencias, “Conocer el currículo escolar de matemáticas y aplicarlo al análisis de propuestas del área en la EP y, al diseño y desarrollo de nuevas actividades”, “Conocer y utilizar de manera adecuada los materiales didácticos y medios tecnológicos para modelizar diferentes situaciones de aprendizaje” y “Reconocer el papel de las matemáticas como elemento fundamental en el desarrollo del pensamiento lógico, precisión, rigor y capacidad de valorar decisiones” se plantean otros cinco ítems.

Los ítems referidos a la competencia sobre los conocimientos básicos que debiera tener el profesorado en formación, han sido tomados de distintos estudios como el de Garfield (2003) y el de Castellanos (2011) o basados en preguntas de pruebas PISA (OECD, 2009), seleccionando aquellos ítems que evalúan conocimientos básicos acerca del cálculo de la media aritmética, la moda, la mediana, la dispersión o la interpretación de gráficas. Los ítems referidos a las otras tres competencias han sido creados explícitamente para este cuestionario.

En esta comunicación solamente se presentan los resultados obtenidos para la primera competencia, los obtenidos en los cinco primeros ítems, por lo que la puntuación total de cada alumno se realiza sobre un total de 5 puntos. Cada ítem respondido correctamente suma un punto. También se pretende observar en qué parcelas la puntuación global es más baja y en cuál más alta.

Resultados

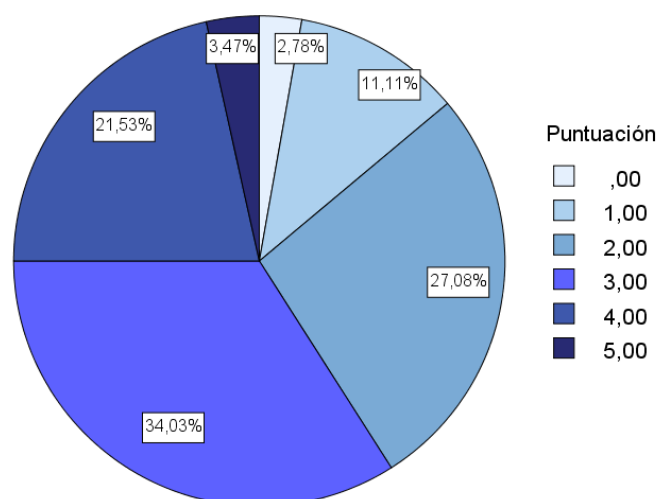
Los resultados se exponen inicialmente de modo global como resultado de sumar las puntuaciones de los 5 primeros ítems, y a continuación se presentan los resultados de cada ítem, dando una pequeña explicación de lo que quiere evaluar cada uno y mostrando los resultados más significativos en cada caso. Se adjunta para cada ítem un cuadro con su enunciado y las respuestas dadas (totales y ponderadas) por el alumnado.

Resultados global

La puntuación media que sobre estos cinco ítems presenta el grupo investigado es de 2.71 puntos sobre 5, con una desviación típica de 1.11. Respecto al número de

respuestas acertadas se aprecia que solamente el 3.47% del alumnado ha respondido correctamente a las cinco preguntas. En el gráfico 1 se muestra qué porcentaje del alumnado ha obtenido distinto número de aciertos (de 0 a 5).

Gráfico 1: Porcentajes de alumnado según el número de respuestas correctas.



En la Tabla 1 se muestran los porcentajes de acierto y error que ha obtenido la muestra para cada ítem. Se puede observar que el ítem 1 ha sido en el que mayor porcentaje de errores se ha cometido llegando a alcanzar el 88.2% de respuestas incorrectas.

Tabla 1: Porcentajes de respuestas correctas e incorrectas para cada ítem.

	Ítem 1	Ítem 1	Ítem 1	Ítem 1	Ítem 1
Respuestas Correctas	11.8%	69.4%	67.4%	58.3%	63.9%
Respuestas Incorrectas	88.2%	30.6%	32.6%	41.7%	36.1%

Resultados por ítem

Ítem 1: Se pretende evaluar el concepto de dispersión mediante una comparación de dos conjuntos una vez que se conoce la media y la desviación típica de cada uno. Los resultados obtenidos son muy significativos, ya que la opción correcta ha sido la menos elegida por un 11.8%. La opción más seleccionada (50.7%) ha sido la c, en la cual se relaciona directamente la dispersión con la desviación típica, independientemente de cuál sea la el peso medio de los dos grupos. También hay gran parte del alumnado que selecciona los otros dos distractores (34.8%).

Cuadro 1: Enunciado, frecuencias y porcentajes de respuesta en el ítem 1.

Tenemos dos grupos de alumnos de 11 y 18 años, de los cuales hemos calculado su peso medio y su desviación típica.

	Peso medio	Desviación típica
11 años	40kg.	3kg.
18 años	60kg.	3kg.

En términos relativos ¿qué grupo de alumnos tiene el peso más disperso respecto a su media?

	N	%
A El grupo de alumnos de 11 años.	17	11.8
B El grupo de alumnos de 18 años.	23	16.0
C Los dos grupos tienen la misma dispersión	73	50.7
D Hacen falta más datos	27	18.8
No sabe/No contesta	4	2.8

Ítem 2: Evalúa el cálculo de media aritmética y la correcta aplicación de las ponderaciones para su cálculo. En esta ocasión la mayoría elige la opción d (69.4%), aplicando la fórmula oportuna y dando una correcta explicación de su cálculo. No obstante se aprecia que un 19.4% del alumnado elige la respuesta b, excluyendo los porcentajes a la hora de hallar la media y centrándose únicamente en las distintas horas que emplean para hacer los trabajos sin ponderarlos. La respuesta incorrecta c, elegida por el 6.9%, suele deberse a errores de cálculo.

Cuadro 2: Enunciado, frecuencias y porcentajes de respuesta en el ítem 2.

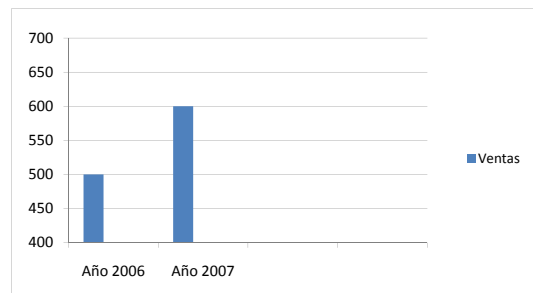
El 10% del alumnado de una clase dedica una hora en casa a hacer los deberes, el 50% emplea dos horas, y el resto tres horas. ¿Cuál es la media de trabajo diario que emplean los alumnos de esa clase para hacer los trabajos?

	N	%
A 1.8 horas	3	2.1
B 2 horas	28	19.4
C 2.2 horas	10	6.9
D 2.3 horas	100	69.4
E 3.1 horas	0	0
No sabe/No contesta	3	2.1

Ítem 3: Se pretende evaluar la capacidad de interpretación de una gráfica comparativa cuando el eje de datos no está completo (su origen es distinto a 0) y la correcta comprensión de los porcentajes a comparar. Prácticamente todo el alumnado entiende que hay una subida de ventas y la mayor parte (67.4%) comprende correctamente por el gráfico, que la subida es menor que el 50%. Un 10.4% elige la respuesta a, lo cual puede indicar que no hayan leído con suficiente atención los datos expresados en el eje de “Ventas”. Y un 21.5% del alumnado confunde la comparativa de porcentajes, seleccionando la opción b.

Cuadro 3: Enunciado, frecuencias y porcentajes de respuesta en el ítem 3.

El jefe de ventas de una empresa automovilística mostró este gráfico y dijo: “Este gráfico muestra que nuestras ventas han aumentado en un 50% respecto a 2006”.



Ítem 4: Se pretende evaluar la comprensión de la media, la moda y la mediana, su posición relativa en distribuciones asimétricas, y el algoritmo de cálculo de la media formulada a la inversa. El 58.3% del alumnado responde correctamente la opción *c*, que comparado con el porcentaje de aciertos en el ítem 1 sugiere que aun conociendo el algoritmo de cálculo de la media, no lo comprenden tan bien ya que fallan a la hora de conseguir calcular un total a partir de la inversión de dicho algoritmo. El 27.8% elige la opción incorrecta *e*, con lo que se puede intuir un desconocimiento de la posición relativa de la media, la moda y la mediana en distribuciones asimétricas, y del efecto de los valores atípicos al calcular la media.

Cuadro 4: Enunciado, frecuencias y porcentajes de respuesta en el ítem 4.

El comité escolar de una pequeña ciudad quiso determinar el número promedio de niños por familia en su ciudad. Dividieron el número total de niños de la ciudad por 50, que es el número total de familias. ¿Cuál de las siguientes frases debe ser cierta si el número promedio de niños por familia es 2.2?

	N	%
A La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 niños.	9	6.3
B En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.	10	6.9
C Hay un total de 110 niños en la ciudad.	84	58.3
D Hay 2.2 niños por adulto en la ciudad.	1	0.7
E El número más común de niños en una familia es 2.	40	27.8

Ítem 5: Se refiere al uso de la media como mejor estimación, frente a la moda, de una cantidad desconocida cuando tenemos distintas medidas de ella y en relación con el efecto de valores atípicos en su cálculo. Un 63.9% del alumnado selecciona la opción correcta *d*, eligiendo la media como mejor estimación, aplicando el algoritmo de cálculo correcto y desechando el valor atípico del conjunto de datos. Prácticamente la totalidad del alumnado selecciona la media (opciones *c* y *d*) como la mejor estimación de una cantidad equitativa en presencia de errores de medida, pero muchos no desechan el valor atípico, y fallan al elegir la opción *c* (30.6%).

Cuadro 5: Enunciado, frecuencias y porcentajes de respuesta en el ítem 5.

Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento en una clase de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2 6.0 6.0 15.3 6.1 6.3 6.2 6.15 6.2

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías usar?

	N	%
A Usar el número más común, que es 6.2.	4	2.8
B Usar 6.15, puesto que es el peso más preciso.	2	1.4
C Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.	44	30.6
D Desechar el valor 15.3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.	92	63.9
No sabe/No contesta	2	1.4

Discusión

Se puede observar que el alumnado que accede al grado de magisterio tiene en general un conocimiento básico de los conceptos estadísticos. Están acostumbrados a la lectura de gráficos de doble entrada aunque en ocasiones su interpretación resulta errónea. Se domina en general el concepto de media aritmética y su cálculo, aunque hay errores de comprensión cuando por ejemplo, se presentan valores atípicos o es necesario invertir el algoritmo para calcular una cantidad. Son habituales los errores cometidos por ejemplo en entender el significado de dispersión, o en identificar la posición relativa de la media, la moda y la mediana en distribuciones asimétricas.

Es muy escaso el alumnado que responde correctamente a los cinco ítems (3.47%) y parece preocupante observar que hay aproximadamente un 14% que acierta solamente una respuesta o no acierta ninguna. Todo ello indica que hay un extenso margen de mejora, para que en el futuro estos docentes tengan la competencia estadística necesaria.

Conclusiones finales

Se coincide con Arteaga, Batanero y Cañadas (2011) en que para mejorar el conocimiento especializado de contenidos del futuro profesorado es necesario mejorar la preparación estadística de los futuros profesores de educación primaria. Los resultados expuestos en este trabajo pretenden ser el punto de partida para el desarrollo de un módulo que ayude de manera eficaz a trabajar las competencias básicas que los futuros profesores han de adquirir. La educación competencial ha adquirido muchísima relevancia y es por ello que partiendo de las características con las que viene el alumnado a los nuevos Grados, se debe plantear un curso que desarrolle lo realmente necesario para que alcancen las competencias. Ha de trabajarse el contenido estadístico de manera más comprensiva y profundizando en conceptos que hasta el momento en muchas ocasiones se han obviado.

Referencias

- Albacete, C., Miralles, P., Delgado, C. (2007). Hacia un nuevo modelo profesional basado en las competencias aplicado a la formación de maestros de educación primaria. *A. U. de Profesores de Didáctica de las CCSS. Bilbao* 2007, pp. 103-114.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. (2011). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores en una tarea abierta. *Investigación en Educación Matemática XV (SEIEM)*, pp. 267-275.

- Arteaga, P., Batanero, C., Ruiz, B. (2009). Comparación de distribuciones por futuros profesores. *Investigación en Educación Matemática XIII (SEIEM)*, pp. 129-138.
- Ball, D.L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*. 51, pp. 241-247.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. N°1.
- Batanero C. (2011). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Artículo de prensa*. <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/BLAIX.htm>
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la Estadística. *Statistics Education Research Journal*. Vol.3. pp. 5-28.
- Castellanos, R. (2011). Interactividad y atención a la diversidad en el Aprendizaje de la Estadística. *Tesis Doctoral*. Universidad de La Rioja.
- Departamento de Educación, Universidades e Investigación del País Vasco, (2010). Decreto 97/2010 por el que se establece el Currículum de la Educación Básica. *BOPV, 20 de Abril de 2010*.
- EHU/UPV (2011). *Guía del alumnado: Educación Primaria*. Curso 2011-2012
- Estrada (2004). Evaluación del conocimiento estadístico en la formación inicial del profesorado. *Tesis Doctoral*. Universidad de Lleida.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación matemática 2004*, vol. 16. Núm 1.
- Garfield, J., Chance, B. (2000), Assessment in Statistics Education: Issues and Challenges, *Mathematics Thinking and Learning*, 2, 99-125
- Garfield, J. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education*, vol. 10, number 3.
- Garfield, J. (2003). Assessing statistical Reasoning. *Statistics Education Research Journal*, nº 2. pp22-38.
- Hill, H. C., Rowan, B., Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371-406.
- Leavy, A. (2010). Teaching statistics at the primary level: identifying obstacles and challenges in teacher preparation from looking at teaching. *ICOTS8*.
- OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development). 2009. *Informe PISA 2009: ¿La asistencia a educación infantil se traduce en mejores resultados en el aprendizaje escolar?*
- Salinero, M., Fernández, C. (2006). Las competencias en el marco de la convergencia europea: Un nuevo concepto para el diseño de programas educativos. *Encounters on Education*. Volume 7, Fall 2006 pp. 131 – 153.

NÚCLEO COMÚN Y PERFILES DE LA ACTUACIÓN DE TUTORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

MENTORING MATHEMATICS TRAINEES: COMMON CORE AND PROFILES

Arias, M. ⁽¹⁾, **Gómez, P.** ⁽²⁾

Universidad de Carabobo ⁽¹⁾, *Universidad de los Andes* ⁽²⁾

Resumen

En este trabajo caracterizamos la actuación de los tutores en un programa híbrido de formación de postgrado para profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio. Construimos una estructura de categorías y códigos conjugando una revisión de literatura, una visión del aprendizaje de los profesores en formación y una revisión cíclica de los datos. Con base en esta estructura, codificamos y analizamos los comentarios de los tutores a los trabajos de los grupos de profesores en formación a su cargo. El análisis de las frecuencias de los datos nos permitió caracterizar el núcleo común de las actuaciones de los tutores. Establecimos tres perfiles de esa actuación a partir de un análisis clúster de los datos.

Abstract

In this paper, we characterize the mentors' performance in a blended in-service mathematics teacher education program. We designed a categories and codes structure based on a literature review, a perspective on trainees' learning and a cyclic checking of the data. We coded the mentors' comments to the trainees' work. We characterized the common core of the mentors' performance from a frequency analysis of the data. We identified three mentoring profiles using cluster analysis.

Palabras clave: *Análisis didáctico, Formación de profesores, Matemáticas, Secundaria, Tutoría.*

Key words: *Didactic analysis, Mathematics, Mentoring, Secondary, Teacher education.*

La guía y el apoyo que formadores y tutores proporcionan en su interacción con los profesores en formación es una de las características de los programas de formación que enfatizan el trabajo colaborativo (e.g., Borko, 2004). Se han realizado numerosas investigaciones sobre el proceso de tutorización y los roles y funciones de los tutores (e.g., Wang, 2008). En el ámbito de la Educación Matemática, el número de trabajos de investigación que tratan sobre el papel del tutor y la formación profesional de profesores ha ido creciendo (p. ej., Nilssen, 2010). En este trabajo, centramos nuestra atención en la actuación de los tutores en un programa de maestría en Educación Matemática para profesores en ejercicio y caracterizamos la actuación de tutores cuando comentan por escrito los trabajos de sus grupos de profesores en formación. En lo que sigue presentamos una descripción general del programa en el que se realizó el estudio; nos referimos a los elementos conceptuales que sirvieron de base para la construcción de las categorías que nos permitieron describir la actuación de los tutores; exponemos los objetivos del estudio; presentamos el método que utilizamos para abordar nuestros objetivos; exponemos e interpretamos los resultados obtenidos; y presentamos las conclusiones más relevantes.

Contexto

El estudio tiene como contexto la cohorte 2009-2011 de la concentración en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia. Este programa se conoce como MAD (Maestría en Análisis Didáctico) y proporciona formación profesional a profesores de matemáticas en ejercicio de secundaria y bachillerato (11 a 16 años). Los profesores en formación se organizaron en grupos de 4 o 5 personas. Cada grupo escogió un tema matemático concreto y realizó un ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2007) sobre su tema. El análisis didáctico se configura alrededor de cuatro análisis que conforman un ciclo: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Cuando se realiza cada uno de los análisis, se ponen en juego los organizadores del currículo. Un organizador del currículo es una noción que forma parte del conocimiento disciplinar de la Educación Matemática que permite analizar un tema matemático con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997, pp. 45-46).

El programa dura 2 años y consta de ocho módulos distribuidos en cuatro semestres. En la figura 1, presentamos la estructura de los módulos que integran el programa.

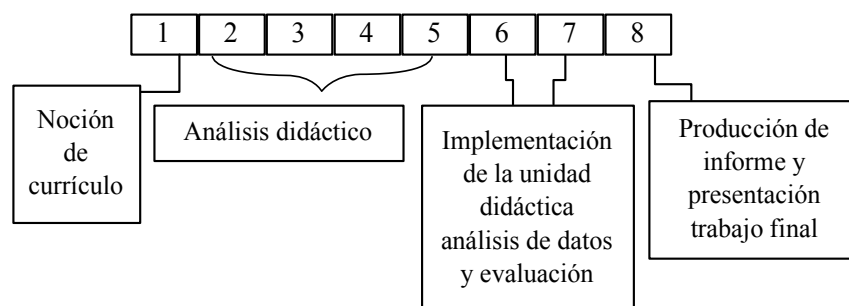


Figura 1. Organización de los módulos en MAD

Cada módulo se configura alrededor de cuatro actividades. Cada actividad dura dos semanas. En las actividades de los módulos de análisis didáctico, cada grupo analiza su tema con un organizador del currículo (por ejemplo sistemas de representación). Al final de la primera semana de una actividad, cada grupo envía un borrador de su trabajo a su tutor. El tutor hace comentarios por escrito al borrador y los envía a su grupo durante los siguientes cuatro días. El grupo reflexiona y discute sobre los comentarios de su tutor. Al final de la segunda semana, el grupo entrega un documento con su trabajo final y lo presenta al grupo de clase y a los formadores y tutores. El tutor acompaña a su grupo durante todo el programa.

Aprendizaje de un organizador del currículo

Nos basamos en los trabajos de González y Gómez para establecer los conocimientos que caracterizan el aprendizaje de los organizadores del currículo por parte de los profesores en formación (p. ej., González y Gómez, 2008). Cuando los profesores en formación analizan un tema de las matemáticas escolares con un organizador del currículo, se espera que ellos (a) conozcan el organizador del currículo de tal forma que, por ejemplo, sean capaces de distinguir instancias de esa noción con respecto a un tema de las matemáticas escolares; (b) desarrollen las técnicas necesarias para usar el organizador del currículo como herramienta de análisis de un tema de las matemáticas escolares y producir información relevante sobre el tema; y (c) desarrollen las técnicas necesarias para usar la información sobre el tema para tomar decisiones a la hora de analizar el tema con otro organizador del currículo o para el diseño de la unidad didáctica. Estas expectativas de aprendizaje establecen los tres tipos de conocimiento que un profesor en formación puede desarrollar en relación con un organizador del currículo que González y Gómez denominan significado, uso técnico y uso práctico y caracterizan de la siguiente manera:

Significado. El significado de un organizador del currículo se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura.

Uso técnico. El uso técnico de un organizador del currículo se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran útiles para producir información sobre el tema.

Uso práctico. El uso práctico se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran que son necesarias para usar la información que surge del uso técnico en los análisis con otros organizadores del currículo o en el diseño de la unidad didáctica.

Esta posición con respecto al aprendizaje de los profesores en formación resulta relevante a la hora de caracterizar la actuación de los tutores cuando interactúan con los grupos a su cargo. Ellos deben promover el desarrollo del significado, el uso técnico y el uso práctico de los organizadores del currículo por parte de sus tutorandos.

Conceptualización de la actuación de los tutores y categorías de análisis

Los expertos distinguen diferentes roles y funciones de los tutores. Entre ellos, destacan su papel de guía en la construcción de nuevos conocimientos y prácticas (p. ej., Borko, 2004); consideran que el tutor es un apoyo a otros que están encontrando su camino en la profesión (Jaworski y Watson, 1994); y entienden que los profesores tutores pueden jugar diferentes roles —modelo, supervisor, auxiliar, guía, apoyo, facilitador, observador, evaluador, amigo crítico, etc.— para fomentar el desarrollo profesional de los profesores en formación (Huang y Chin, 2003; Jaworski y Watson, 1994).

Con base en el marco conceptual, la revisión de la literatura (e.g., Van Looy y Vrijssen, 1998) y la revisión previa de los comentarios de los tutores, construimos una estructura de categorías para el análisis de la actuación de los tutores. Organizamos estas categorías y sus subcategorías en tres grupos: contenido didáctico, énfasis en orientación y énfasis en formato. La figura 2 muestra cada grupo con sus respectivas categorías y subcategorías.

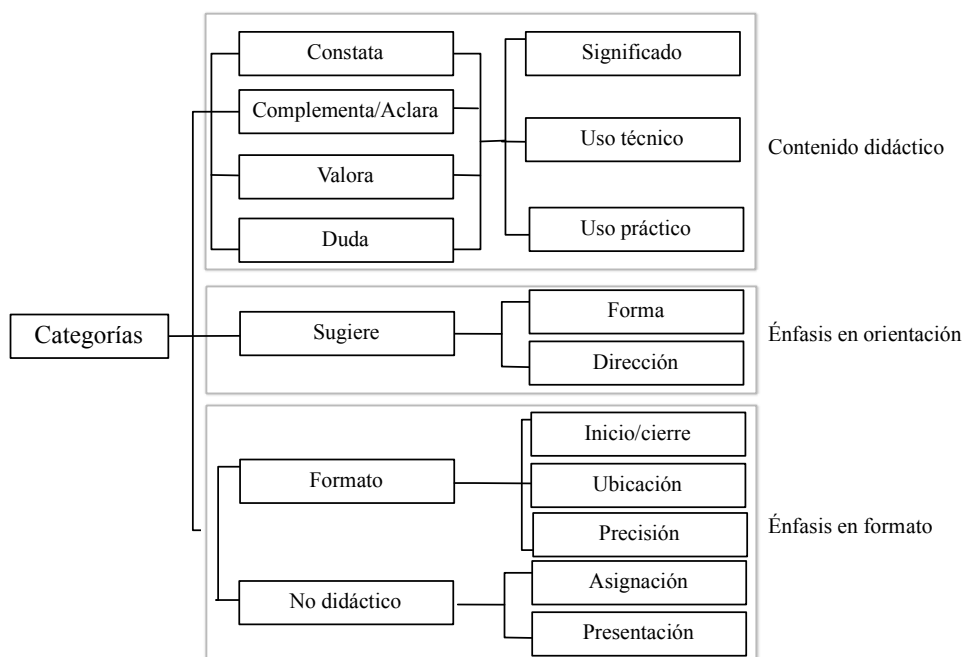


Figura 2. Categorías para la caracterización de la actuación de los tutores

Establecimos cuatro categorías que organizan los comentarios del tutor que se refieren al contenido del trabajo de sus tutorandos: (a) constatar características de su trabajo; (b) complementar y aclarar aspectos que tienen que ver con los conocimientos que requieren construir o sobre la información que generan sobre su tema en particular; (c) expresar su valoración en relación con el dominio de los tres tipos de conocimiento o de manera general sobre los avances de su trabajo; y (d) cuando no está seguro de algún aspecto del trabajo de su grupo, generar comentarios en donde expresa su duda. Los comentarios del tutor en este grupo de categorías se pueden clasificar en uno de los tres tipos de conocimientos mencionados en el apartado anterior —significado, uso técnico o uso práctico—.

Los comentarios acerca de la orientación se refieren a la forma en que el tutor expresa su comentario cuando hace sugerencias a su grupo de tutorandos —sugiere en forma de pregunta, de manera directa, generando dudas o invitando a reflexionar— y a la orientación de su sugerencia —por ejemplo, si sugiere la revisión de bibliografía o de trabajos anteriores—.

Las categorías que se centran en el formato reúnen los comentarios de los tutores en los que ellos expresan observaciones sobre la asignación de la actividad o la presentación del trabajo. Las categorías que aluden a la forma en que se expresa o ubica el comentario también se ubican en este grupo.

Objetivos del estudio

El objetivo general de nuestro estudio fue describir y caracterizar la actuación de los tutores de MAD cuando comentaron por escrito el borrador de su grupo. Delimitamos el estudio al análisis de los comentarios a los borradores correspondientes a las actividades que configuran los módulos sobre análisis de contenido y análisis cognitivo. Caracterizamos la actuación de los tutores en términos de las categorías que presentamos en el apartado anterior. Nos planteamos dos objetivos específicos:

1. Caracterizar el núcleo común de las actuaciones de los tutores.
2. Establecer y describir perfiles de tutores con base en las diferencias y similitudes de sus actuaciones.

Método

Los sujetos del estudio fueron los 6 tutores de la primera cohorte de MAD. Consideramos un total de 48 documentos, 8 por tutor, correspondientes a las 8 actividades de los módulos de análisis de contenido y análisis cognitivo.

Nuestros datos fueron los comentarios escritos de los tutores a los borradores de los trabajos de su grupo de tutorandos. Por consiguiente, la unidad de análisis es un segmento de texto que expresa el comentario del tutor. El comentario puede ser una frase, oración, o párrafo corto en donde el tutor expresa su opinión sobre determinado aspecto del trabajo de sus tutorandos. Es un texto que contiene una información que es posible asociar con uno o más códigos.

Estructura de códigos y codificación

Realizamos un proceso iterativo que nos permitió establecer la estructura de categorías y códigos con los que codificamos y analizamos los datos. La figura 3 muestra este proceso.

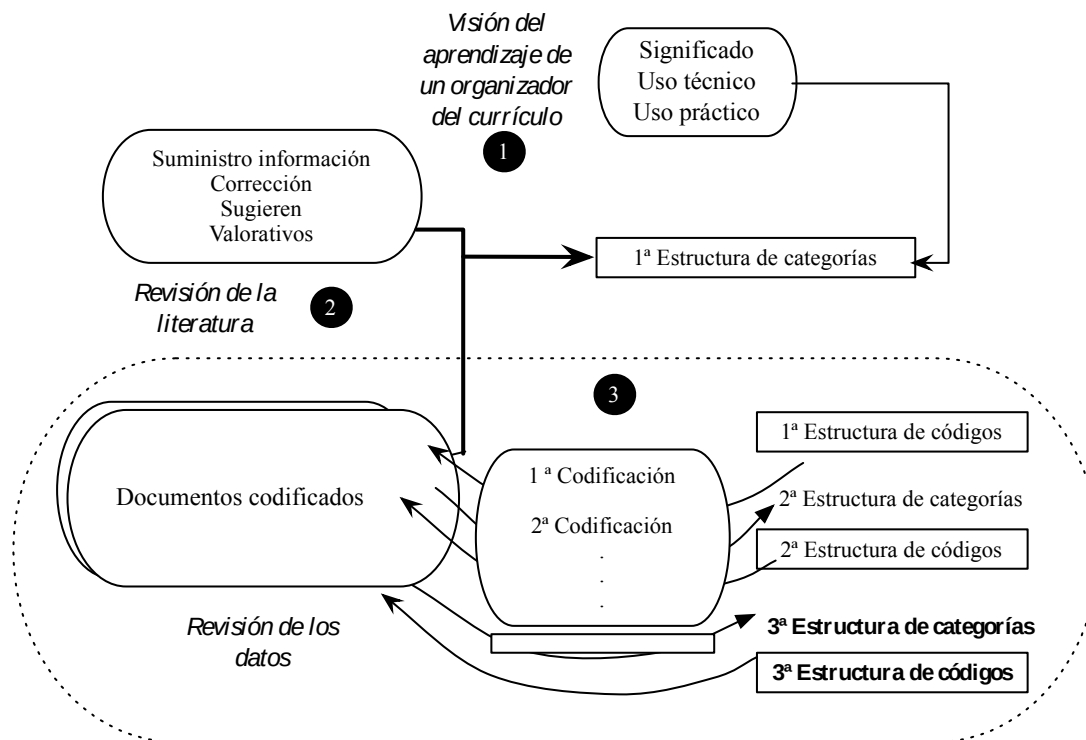


Figura 3. Proceso para la construcción de categorías y códigos

La primera versión de la estructura de categorías y subcategorías se construyó, como se describió anteriormente, con base en la revisión de la literatura —paso 1— y el marco conceptual —paso 2—. Definimos unos códigos que concretaban estas categorías y, con ellos, realizamos el primer proceso de codificación —paso 3—. Revisamos las codificaciones sucesivas y modificamos la lista de códigos. El paso 3 fue un proceso cíclico y sistemático, en el que las categorías y códigos se transformaron hasta considerar que teníamos un listado de códigos claro, excluyente y que permitía caracterizar la actuación de los tutores. Obtuvimos 52 códigos que daban significado operacional a las categorías y nos permitieron codificar los comentarios de los tutores. Organizamos la estructura en categorías, subcategorías y códigos como se muestra en la figura 4.

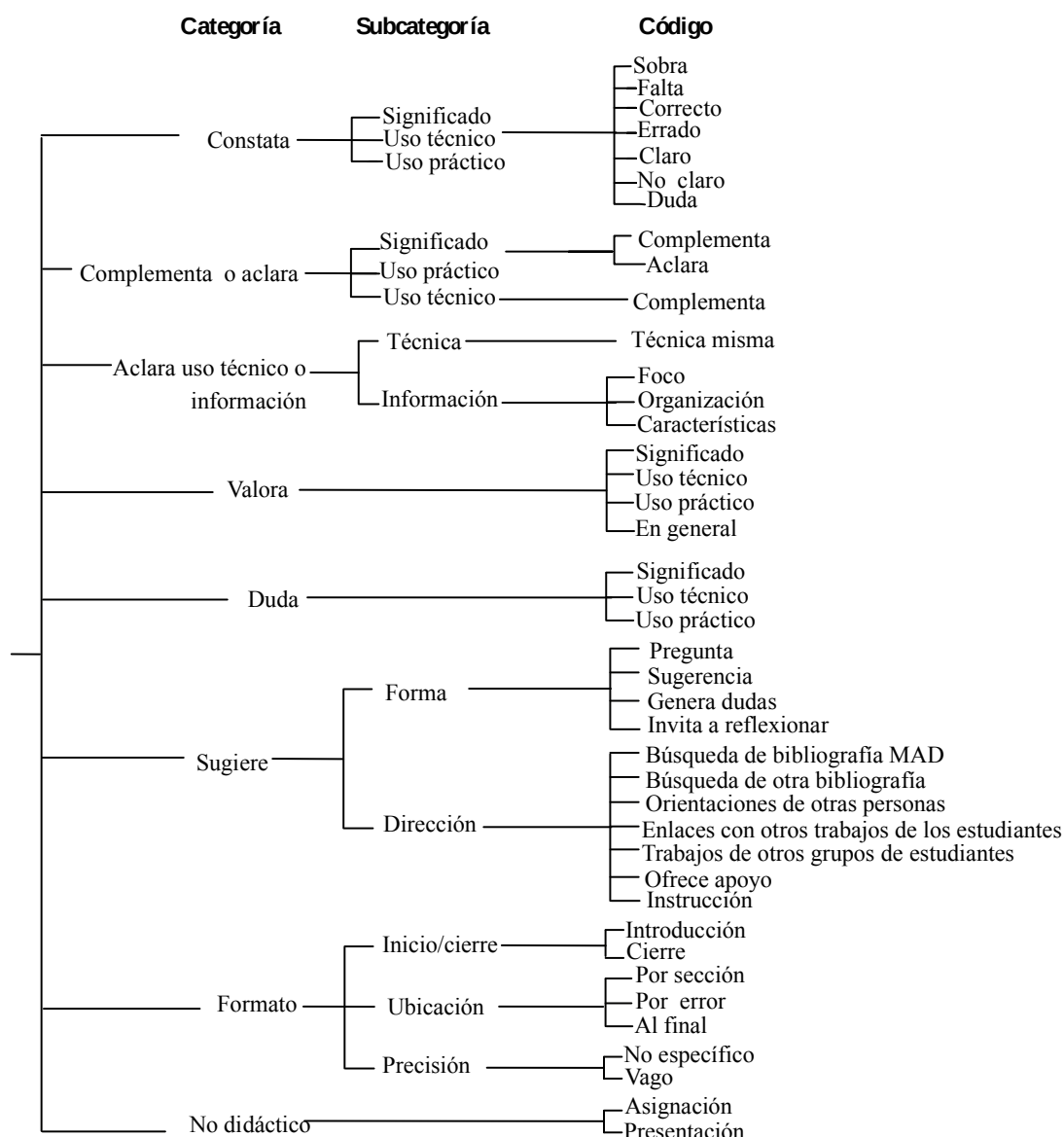


Figura 4. Organización por categorías, subcategorías y códigos

En el esquema presentamos un ejemplo de la estructura de categorías, subcategorías y códigos. La categoría “Constata”, reúne los comentarios en los que el tutor confirma o verifica aspectos sobre el conocimiento de su grupo en relación con los organizadores del currículo. Las subcategorías se refieren al significado, el uso técnico y el uso práctico de los organizadores del currículo. En un mayor nivel de detalle —códigos—, es posible observar si el tutor está constatando que: falta dominio sobre su significado; si sobran elementos en las ideas claves que se asocian al significado; si es errado o correcto el significado que se tiene sobre el organizador; si hay claridad o no sobre el significado que se maneja del organizador; o si tiene dudas sobre aspectos claves del significado de un organizador del currículo.

Inicialmente codificamos los comentarios de dos tutores correspondientes al módulo 2 y realizamos una triangulación por contrastación entre dos investigadores, para confirmar que la estructura de códigos era coherente y clara y no daba lugar a interpretaciones diferentes de los códigos o de los comentarios. Posteriormente codificamos los 1269 comentarios de los 6 tutores en los 48 documentos de la muestra.

Por ejemplo, en el siguiente comentario, el tutor sugiere que revisen bibliografía sobre su tema:

Podéis revisar bibliografía sobre los números relativos, eso os puede ayudar a organizar información sobre la suma y la resta de números enteros.

En el que comentario siguiente, el tutor constata que falta información sobre el tema:

Los elementos simétricos dentro de los enteros o la propiedad de la simetría que se puede observar en el conjunto de los enteros no la veo reflejada.

Procedimientos para el análisis de los datos

Se realizaron dos tipos de análisis: de frecuencias y clúster. En el primero, establecimos las frecuencias de los valores de los códigos y definimos la dimensión positiva y negativa del núcleo común de la actuación de los tutores. El núcleo común está configurado por las características de la actuación de los tutores —códigos— que al menos tres de ellos presentan —o no presentan— y que permiten describir esa actuación (figura 5).

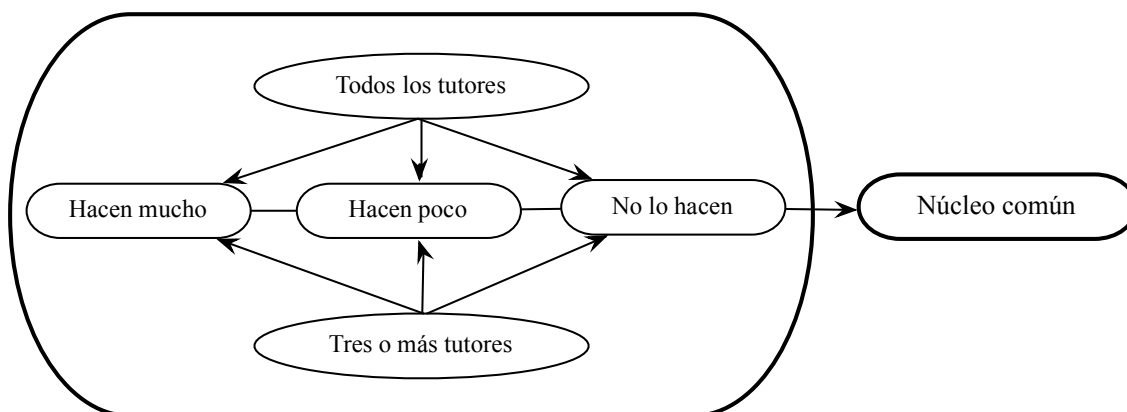


Figura 5. Consideración en el Núcleo Común

Con base en el análisis de frecuencias, fijamos valores de referencia que vinieron dados por el grado de concentración de la información. Establecimos que si tres o más tutores tienen valores por encima del 4% para un código determinado, entonces dicho código se considera dentro de la dimensión positiva del núcleo común. Si sus valores están por debajo del 1%, entonces consideramos que el código pertenece a la dimensión negativa del núcleo común.

Con el propósito de identificar qué tutores tuvieron actuaciones similares y establecer diferencias entre grupos de tutores, utilizamos el análisis de clúster como procedimiento estándar de agrupamiento. El análisis se realizó con los códigos como variables de descripción. Se seleccionaron los 43 códigos cuya varianza era distinta de cero. Exploramos los resultados cuando se forman 3 conglomerados y analizamos la tabla ANOVA que se genera con motivo del análisis. Seleccionamos las cinco variables asociadas a los valores de F más altos y observamos los valores de los centros finales de los conglomerados para dichas variables.

Resultados

En este apartado presentamos los resultados más relevantes del estudio. Lo organizamos en dos apartados asociados a los dos análisis realizados: análisis de frecuencias y análisis clúster.

Análisis de frecuencias y núcleo común

La tabla 1 presenta, como ejemplo, una aparte de la tabla global en la que registramos los valores porcentuales por tutor (T₁ a T₆) y totales referidos a los comentarios codificados, para cada una de las categorías, subcategorías y códigos. Se refiere a la categoría tutor constata, subcategoría uso técnico y los códigos correspondientes. En la última columna se establece a qué dimensión del núcleo común pertenece cada código —positiva (NC+) y negativa (NC-)—. Si el comentario no pertenece al núcleo común, la celda aparece vacía.

Tabla 1

*Porcentajes de comentarios de tutores por categorías, subcategorías y códigos.
Ejemplo para tutor constata uso técnico*

Categorías	Subcategorías	Códigos	Tutores						Total	NC
			T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆		
El tutor constata									22	
	Uso técnico								18	
		1. Falta	8,6	5,8	4,9	6,6	7,1	4,5	6,5	NC+
		2. Sobra	1,0	0,0	0,6	0,0	2,4	1,0	1,0	NC-
		3. Correcto	0,3	5,2	3,0	5,8	1,9	0,3	2,3	
		4. Errado	2,4	1,7	2,4	0,0	0,0	0,7	1,3	NC-
		5. Claro	0,3	1,2	0,0	1,5	0,9	1,0	0,8	NC-
		6. No claro	7,5	11,0	6,1	2,2	2,4	6,8	6,4	NC+
		7. Duda	0,3	0,0	0,0	0,7	0,0	0,0	0,2	NC-

A partir del análisis de frecuencias, constatamos que el 67,3% de los códigos se clasifican en el núcleo común negativo, el 17,3% en el núcleo común positivo y el 15,4% no queda clasificado en ninguno de los dos núcleos.

Con base en el análisis de frecuencias, establecimos que la dimensión positiva del núcleo común se caracteriza por aquellos comentarios en los que los tutores (a) constataron si a su grupo le faltaba dominio o no tenían claridad en relación con el uso técnico de los organizadores del currículo; (b) aclararon aspectos referidos a la información que produce su grupo de tutorandos, destacando el foco, organización y características de la misma en relación con su tema; (c) expresaron sus dudas sobre la realización del uso técnico; e (d) hicieron sugerencias de manera directa, por medio de preguntas, o invitando a reflexionar.

Desde la perspectiva de la dimensión negativa del núcleo común, establecimos que los tutores hicieron pocos comentarios sobre (a) el significado o el uso práctico de los organizadores del currículo; (b) la validez o claridad del uso técnico; (c) orientaciones para la búsqueda de información complementaria; y (d) el cumplimiento de los requisitos expuestos en la actividad. Además, los tutores nunca hicieron comentarios (a) donde constataron claridad en el significado de un organizador del currículo o falta de dominio de alguna de las nociones teóricas que lo constituyen; (b) sobre errores y dudas en el uso práctico; o (d) vagos.

Constatamos que los comentarios de los tutores se centraron en el contenido didáctico de las producciones de los grupos. Ellos expresaron con frecuencia que tenían

dudas sobre la información que su grupo de tutorandos generó y resaltaron el uso técnico de los organizadores del currículo.

Análisis clúster

Realizamos un análisis clúster para establecer tres conglomerados (C1, C2 y C3). Establecimos los valores que determinan los centros finales de los conglomerados para las 5 variables con valores F más altos (tabla 2). En la última fila de la tabla se indica a qué conglomerado pertenece cada tutor. La tabla 2 incluye los códigos y su descripción, además de los valores asociados a cada conglomerado.

Tabla 2

Centros finales de los conglomerados

Código	Descripción	C1	C2	C3
TC_S_NCL	Constata que no hay claridad en el significado de los organizadores del currículo	0,00	1,97	0,00
TV_P	Valora aspectos referidos al uso práctico del organizador del currículo	2,92	0,41	0,20
TID_T	Manifiesta tener dudas en cuanto a cómo los profesores en formación hacen uso técnico de los organizadores	5,11	5,46	1,06
TCA_P_C	Complementa aspectos referidos al uso práctico	2,19	2,14	0,31
TC_T_E	Constata que es errado el uso técnico de los organizadores	0,00	0,34	2,19
Tutores		4	5 y 6	1, 2 y 3

Con base en estos resultados, definimos 3 perfiles de tutores. En la figura 6 mostramos un esquema en el que resumimos las particularidades de cada uno de los perfiles. Utilizamos las flechas para indicar el mayor (↑) o menor (↓) énfasis en determinada actuación.

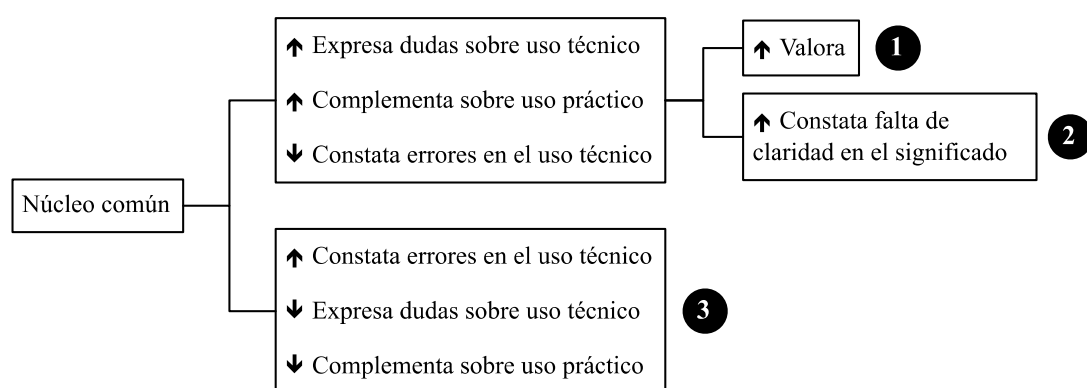


Figura 6. Perfiles de la actuación de los tutores

Entendemos que en cada perfil los tutores tienen las características que ya hemos definido en la dimensión positiva del núcleo común. Por ejemplo, el perfil 1 se caracteriza porque el tutor (a) hace mayor énfasis en valorar el trabajo de su grupo y en expresar dudas sobre el uso técnico de un organizador del currículo; (b) complementa

información relacionada con el uso práctico de los organizadores; y (c) no hace comentarios donde constate la falta de claridad en el significado de un organizador del currículo o si hay errores en el uso técnico.

Discusión

Los resultados ponen en evidencia que los tutores presentaron una actuación homogénea. Esta actuación se focalizó en el uso técnico de los organizadores del currículo y tuvo como intención motivar el trabajo y la reflexión de su grupo de profesores en formación. No obstante, el programa pretende que los grupos de profesores en formación desarrollen también el significado y el uso práctico de los organizadores del currículo. Este es uno de los aspectos en los que la actuación de los tutores dejó de ser homogénea. Como se aprecia en la caracterización de los perfiles, los tutores de los grupos 1 y 2 hicieron comentarios complementarios sobre el uso práctico y los tutores del grupo 2 constataron deficiencias en el significado puesto en práctica por sus grupos.

Para producir estos resultados, construimos una estructura —organizada en categorías, subcategorías y códigos— con la que describimos la actuación de los tutores. Consideramos que esta estructura es un aporte de nuestro estudio puesto que propone un sistema operacional que posibilita la caracterización de la actuación de los tutores en un contexto particular. Este sistema, a diferencia de los existentes en la literatura, es específico y permite establecer aspectos concretos que describen la forma en que los tutores comentan por escrito los trabajos de sus grupos de tutorandos.

Referencias

- Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3–15.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada, España: Universidad de Granada.
- González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática XII*, 425-434.
- Huang, K., & Chin, C. (2003). The effect of mentoring on the development of a secondary mathematics probationary teacher's conception(s) of mathematics teaching: an action research. *Journal of Taiwan Normal University: Mathematics & Science Education*, 48(1), 21-44.
- Jaworski, B. & Watson, A. (Eds.) (1994) *Mentoring in mathematics teaching*. Oxford, Reino Unido: Falmer Press.
- Nilssen, V. (2010). Guided planning in first-year student teachers' teaching. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 54(5), 431-449.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Van Looy, L. & Vrijssen, M. (1998, abril). A multi-dimensional analysis of feedback by tutors and teacher-educators to their students. Trabajo presentado en the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

- Wang, C. (2008) How secondary mathematics mentor teachers think and do for mentoring mentee teachers. Trabajo presentado en Third International Conference on Science and Mathematics Education (CoSMEd), Penang, Malasia.

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LA ESTADÍSTICA Y LOS ESTUDIANTES EN FUTUROS PROFESORES

ASSESSING KNOWLEDGE OF STATISTICS AND STUDENTS IN PROSPECTIVE SCHOOL TEACHERS

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M., Cañadas, G.R.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se evalúa el conocimiento de la estadística y los estudiantes, que una muestra de 108 futuros profesores de educación Primaria, ponen en juego al analizar la idoneidad cognitiva y afectiva de una unidad didáctica sobre estadística basada en un proyecto de análisis de datos, utilizando la guía de análisis de la idoneidad didáctica propuesta en el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico. El análisis cualitativo de las respuestas de los participantes permitió definir unos niveles de aplicación de los distintos descriptores propuestos obteniendo mejores resultados para la idoneidad cognitiva que para la afectiva. Se concluye con la necesidad de mejorar el conocimiento de estadística y los estudiantes en los futuros profesores.

Abstract

We analyze the knowledge of statistics and students in a sample of 108 pre-service primary school teachers when analyzing the cognitive and affective suitability of a teaching unit based on a statistical project, using the guide to analyze the didactical suitability proposed by the Onto-semiotic approach. The qualitative analysis of responses served to define levels in the application of the different descriptors with better performance as regards the cognitive suitability. We conclude the need to improve the knowledge of statistics and students in prospective school teachers.

Palabras clave: Conocimiento del contenido de estadística y los estudiantes, idoneidad cognitiva, idoneidad afectiva, formación de profesores.

Key words: Teachers' knowledge of statistical content and students, cognitive suitability, emotional suitability, teacher education.

Introducción

El incremento de los contenidos de estadística en la escuela Primaria y el cambio de enfoque en su enseñanza que se muestran en el decreto de enseñanzas mínimas para la educación Primaria (MEC, 2006), pone de manifiesto la necesidad de la preparación de los futuros profesores tanto en relación al conocimiento estadístico como con en el conocimiento didáctico relacionado con su enseñanza.

Aunque la investigación sobre el conocimiento del profesor es muy amplia (ver, por ejemplo en los trabajos de Llinares y Krainer, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007 o Even y Ball, 2009, o los realizados en el Grupo de Investigación, “Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas” de la SEIEM), el caso particular de la estadística apenas ha sido tenido en cuenta, como se reconoce en el Joint ICMI/IASE Study (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

En esta investigación evaluamos parte del conocimiento didáctico de la estadística, en particular se evalúa el conocimiento del contenido de estadística y los estudiantes en una muestra de 108 futuros profesores de educación Primaria. Para ello se propone a los participantes analizar las idoneidades cognitiva y afectiva (Godino, Contreras y Font, 2006) de una experiencia de enseñanza de estadística, experimentada por ellos mismos. La finalidad es ampliar nuestra investigación previa al respecto (Arteaga, Batanero y Cañadas, 2011) y obtener información de utilidad para los formadores de profesores. A continuación presentamos los fundamentos del estudio, material y método, resultados y conclusiones.

Fundamentos teóricos

Nuestro trabajo se basa en el modelo de *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT), que según Hill, Ball y Schilling (2008, 347) es “el conocimiento matemático que los profesores usan en sus clases para producir instrucción y crecimiento en los estudiantes”, conocimiento el cual dividen en componentes relacionadas con el *conocimiento de la materia a enseñar* (SMK) y el *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) (Figura 1).

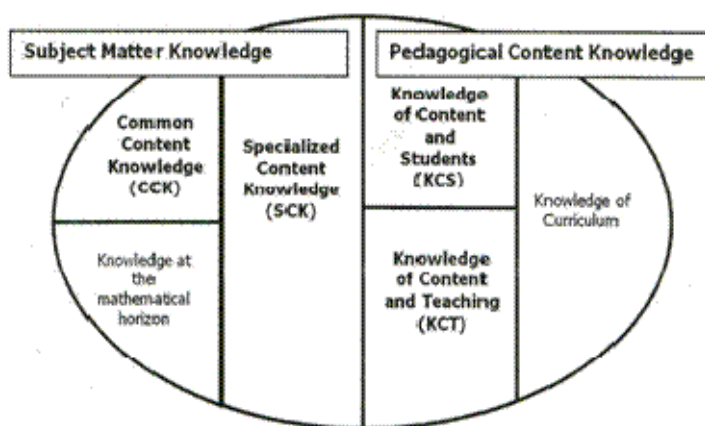


Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) tomada de Hill y colaboradores (2007)

En este trabajo nos centramos en la componente del (MKT) denominada *conocimiento del contenido y los estudiantes* (KCS): “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, conocen o aprenden sobre ese contenido específico” (Hill, Ball y Schilling, 2008, 375). Según los autores

dicho conocimiento se pone de manifiesto en tareas en las que los profesores tienen que tener en cuenta tanto las características de un contenido particular a trabajar como la de los estudiantes a los que va dirigido.

Las investigaciones que tratan de caracterizar el conocimiento del profesor para explicar estadística son escasas, destacamos las algunas como las de Sorto (2004), Burgess (2006) y Pinto (2010). Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) proponen un modelo del conocimiento del profesor de matemáticas, válido para la estadística, que tiene en cuenta seis dimensiones: epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, tomadas de los correspondientes componentes de la idoneidad didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006), que los autores introducen para evaluar situaciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas:

- *Idoneidad epistémica*: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, y en que los significados personales logrados por los alumnos son los pretendidos por el profesor.
- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional*: Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica*: Grado de adecuación del proceso de estudio llevado a cabo con respecto a los currículos oficiales, proyecto educativo del centro y sociedad.

Usando esta teoría proponemos a los estudiantes valorar un proceso de estudio mediante la guía propuesta por Godino (2009), y a partir de sus respuestas, siguiendo la sugerencia del autor, se obtienen indicadores que permiten evaluar los conocimientos de los profesores; más concretamente, el análisis de la idoneidad afectiva y cognitiva nos permiten evaluar su conocimiento del contenido y los estudiantes.

Método

La muestra en nuestro estudio fue intencional, formada por 108 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada, distribuidos en 3 grupos (30 - 40 alumnos por grupo). Los datos se tomaron a partir de los informes escritos realizados por los futuros profesores en una práctica realizada en dos sesiones de clase en una asignatura de didáctica de las matemáticas del plan antiguo llamada *Currículo de Matemáticas en Educación Primaria* durante el curso académico 2008-2009. Estos estudiantes ya habían cursado la materia *Matemáticas y su didáctica* en el curso previo, asignatura de carácter eminentemente matemático. En la primera sesión de la práctica los participantes resolvieron un proyecto de análisis de datos que incluye el planteamiento de una pregunta, recogida y análisis de datos y obtención de una respuesta a la pregunta planteada.

En la segunda sesión, los participantes tuvieron que valorar la experiencia de enseñanza que ellos mismos vivieron durante el desarrollo del proyecto. Para ello se dio a los estudiantes una *pauta de análisis de la idoneidad didáctica* (Godino, 2009), en la cual, para cada componente de la idoneidad didáctica se sugieren una serie de descriptores para analizar y concluir sobre la idoneidad global del proceso. A la semana tuvieron que entregar un informe escrito con el análisis realizado y las conclusiones sobre la idoneidad didáctica de la experiencia.

Tabla 1. Pauta de análisis de la idoneidad cognitiva de procesos de enseñanza y aprendizaje

Componentes	Descriptorios
Conocimientos previos	CP1. Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). CP2. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	AC1. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	AP1. Los resultados de la evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidos.

En este trabajo presentamos el análisis del estudio de las idoneidades cognitiva y afectiva por parte de los futuros profesores (ver componentes y descriptorios en las Tablas 1 y 2), que los participantes analizan con respecto a su experiencia personal como alumnos al resolver el proyecto. Según Godino (2009) el análisis de estas dos componentes de la idoneidad didáctica por parte de profesores, permite profundizar sobre su *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (Ball, Lubienskiy y Mewborn, 2001), ya que se han de tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes a los que va dirigida la enseñanza, las adaptaciones curriculares así como las emociones, intereses y actitud de los mismos en relación al contenido particular, en este caso con respecto a la estadística elemental.

Tabla 2. Pauta de análisis de la idoneidad afectiva de procesos de enseñanza y aprendizaje

Componentes	Descriptorios
Intereses y necesidades	I1. Las tareas tienen interés para los alumnos. I2. Se proponen actividades que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	ACT1. Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad. ACT2. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	E1. Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. E2. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Resultados y discusión

Una vez los futuros profesores entregaron los informes escritos, se realizó un estudio cualitativo de las respuestas en cada descriptor y componentes de las idoneidades cognitiva y afectiva (Tablas 1 y 2). Se valoró igualmente todos ellos diferenciando cuatro niveles de aplicación:

- *Nivel 0*: No se hace referencia al descriptor. Se deja la respuesta en blanco, no

habiendo comprendido el descriptor o no siendo capaz de aplicarlo.

- *Nivel 1:* El estudiante se limita a copiar literalmente la descripción del descriptor como aparece en la pauta. No relacionan el descriptor con la situación particular.
- *Nivel 2:* El estudiante aplica y hace referencia al descriptor, sin relacionarlo con la situación particular de enseñanza que vivieron.
- *Nivel 3:* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor relacionando los contenidos matemáticos y la situación de enseñanza vivida por ellos mismos en la realización del proyecto.

A continuación mostramos ejemplos de los niveles 2 y 3 de aplicación de distintos descriptores, del nivel 1 no ponemos ningún ejemplo ya que son participantes que copian literalmente el descriptor de la pauta que se les proporcionó:

- *Nivel 2:* En el siguiente ejemplo, la alumna habla en general, sin especificar cuáles son los conocimientos que pueden resultar difíciles a los estudiantes, en el proyecto que resolvieron: *“Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar pero no en su totalidad ya que algunos de ellos son muy complejos”* (Alumna EA, descriptor CP2). En otro ejemplo, el alumno aplica de manera incompleta el descriptor, pues en el desarrollo del proyecto hay muchos momentos en los que se promueven debates y la participación del alumnado, centrándose únicamente en el lanzamiento de la moneda para obtener datos: *“Los alumnos participan en el lanzamiento real de la moneda al aire”* (Alumno JM, descriptor ACT1).
- *Nivel 3:* En el siguiente ejemplo el alumno relaciona la realización del proyecto con los contenidos matemáticos previos necesarios para la realización del mismo: *“Creo que para realizar la práctica, el alumno debe tener unos conocimientos previos. Un ejemplo claro es la elaboración de gráficos estadísticos y el concepto de posición central y la dispersión. El cálculo de la media, mediana, moda y rango. Los conocimientos matemáticos necesarios para la realización de la práctica son de matemáticas de tercer ciclo de educación Primaria”* (Alumno EA, CP1 y CP2). En otro ejemplo, la futura profesora resalta la importancia de manejar contenidos estadísticos, como los gráficos, para la vida real: *“Podemos valorar la utilidad que tienen las matemáticas, en cuanto a este tema, para la vida cotidiana y profesional, porque es útil saber manejar datos, gráficos”* (Alumna DB, descriptor I2).

Una vez descritos los distintos niveles de aplicación de los descriptores, mostramos los resultados obtenidos.

Idoneidad cognitiva

Al analizar la idoneidad cognitiva del proyecto los futuros profesores han de tener en cuenta las características del alumnado al que va dirigido el proyecto estadístico. La mayoría de los participantes aplicaron los descriptores teniendo en cuenta sus conocimientos previos y si el proyecto era adecuado para ellos como futuros profesores de educación Primaria, aunque en algunos casos, los participantes pensaron en si el proyecto se adecuaba a las características cognitivas de alumnos de educación Primaria, consideramos válidas ambas situaciones de análisis ya que el objetivo de la práctica era la adquisición de competencias para evaluar la idoneidad del proceso por parte de los participantes.

En la Tabla 3 se muestra la frecuencia de aplicación de los niveles en cada uno de los descriptores de la idoneidad cognitiva. El descriptor CP1 que consistía en considerar

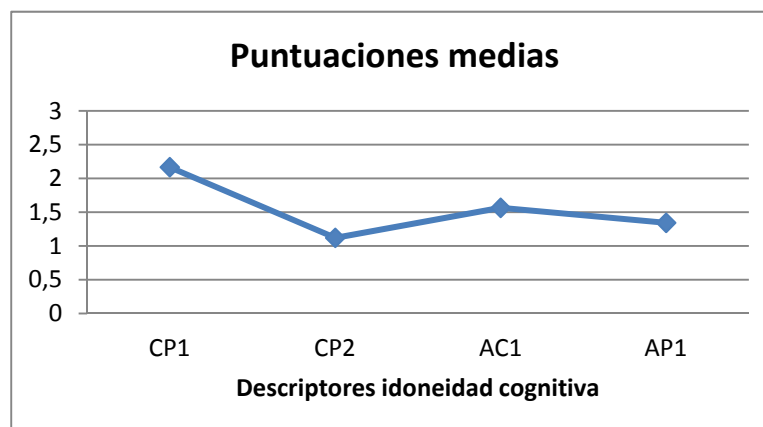
los conocimientos previos necesarios fue el más fácil de aplicar, ya que un 81,48% de los futuros profesores lo aplican al menos dentro del nivel 2. Un gran porcentaje de participantes no aplican los descriptores CP2 (50%) y AP1 (40,74%); probablemente a que resultó difícil relacionar dichos descriptores con la situación particular de enseñanza. En el descriptor AC1 que trataba valorar las adaptaciones curriculares, el mayor porcentaje de participantes se da a nivel 3 (32,41%); los futuros profesores valoraron adecuadamente las actividades de ampliación y refuerzo de la unidad didáctica.

Tabla 3. Frecuencia (porcentaje) de nivel de aplicación de descriptores de la idoneidad cognitiva

Aplicación del descriptor	CP1	CP2	AC1	AP1
Nivel 0	6(5,56)	54(50,00)	30 (27,78)	44 (40,74)
Nivel 1	14(12,96)	11(10,19)	22 (20,37)	10 (9,26)
Nivel 2	44(40,74)	19(17,59)	21 (19,44)	27 (25,00)
Nivel 3	44(40,74)	24(22,22)	35 (32,41)	27 (25,00)

Al estudiar la puntuación media obtenida para cada uno de los descriptores (Figura 2), destaca el nivel de aplicación del descriptor CP1 (2,17), que fue el más fácil de aplicar, debido a que los futuros profesores tuvieron más facilidad de reconocer los conocimientos previos necesarios al elaborar el proyecto debido a los problemas y dificultades que ellos mismos tuvieron en su resolución. La puntuación del resto de descriptores se sitúa entre 1 y 1,5, debido al alto porcentaje de alumnos que no aplican dichos descriptores (CP2, AC1 y AP1).

Figura 2. Puntuaciones medias en los descriptores de la idoneidad cognitiva



Idoneidad afectiva

Según Godino (2009) la idoneidad afectiva “está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como factores que dependen básicamente del alumnado y de su historia escolar previa” (p.24). Al analizar la idoneidad afectiva, los futuros profesores han de tener en cuenta el grado de implicación, interés y motivación que ellos mismos tuvieron con relación al desarrollo del proyecto estadístico.

En la Tabla 4 mostramos la distribución de los futuros profesores según los

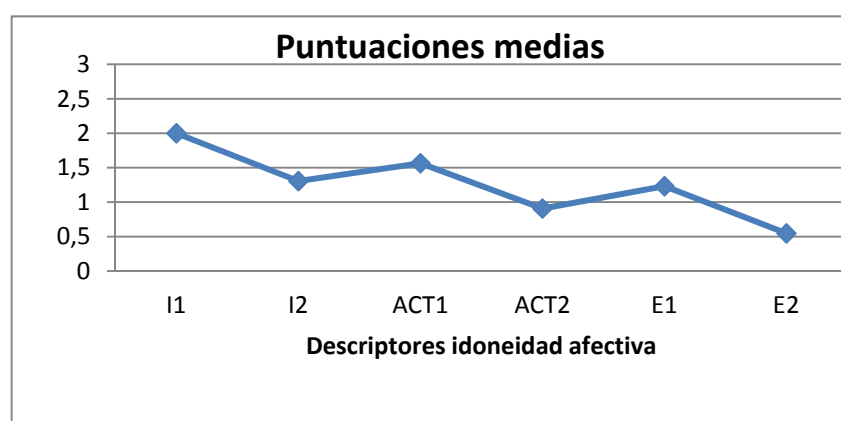
distintos niveles de aplicación de los descriptores. El descriptor I1 relacionado con el interés de los alumnos, fue el más fácil de aplicar (45,37% de los participantes lo aplicaron a nivel 3) debido a que respondieron acerca del interés que ellos mismos tuvieron al realizar el proyecto. El porcentaje de participantes que no aplica los descriptores crece mucho en los restantes descriptores, llegando al 58,33% en el descriptor ACT2 relacionado con las actitudes y un 69,44% en el descriptor E2 relacionado con las emociones y las cualidades estéticas de las matemáticas. El descriptor ACT1 tuvo un considerable porcentaje de aplicación a nivel 3 (35,19%), pues los futuros profesores valoraron positivamente el hecho que el proyecto contribuía a la responsabilidad y participación.

Tabla 4. Frecuencia (porcentaje) de nivel de aplicación de descriptores de la idoneidad afectiva

Aplicación del descriptor	I1	I2	ACT1	ACT2	E1	E2
Nivel 0	11(10,19)	40(37,04)	27(25,00)	63(58,33)	46(42,59)	75(69,44)
Nivel 1	27(25,00)	22(20,37)	31(28,70)	14(12,96)	17(15,74)	13(12,04)
Nivel 2	21(19,44)	19(17,59)	12(11,11)	9(8,33)	19(17,59)	14(12,96)
Nivel 3	49(45,37)	27(25,00)	38(35,19)	22(20,37)	26(24,07)	6(5,56)

En la Figura 3 se muestran los valores medios obtenidos por los futuros profesores de nuestra muestra al aplicar los distintos descriptores de la idoneidad afectiva. Observamos una variedad en los distintos niveles de aplicación, siendo el descriptor que resultó más fácil de aplicar el I1 (si el proyecto suscitaba el interés de los alumnos) y el más difícil fue el E2 (cualidades estéticas y de precisión de las matemáticas en el caso particular del proyecto). La aplicación de los descriptores de la idoneidad afectiva resultó difícil a los futuros profesores, siendo el nivel promedio de aplicación menor de 2 en todos los descriptores salvo en uno de ellos.

Figura 3. Puntuación media en los descriptores de la idoneidad afectiva



Conclusiones

En estudios previos (Arteaga, Batanero y Cañadas, 2011) se mostraban las dificultades que futuros profesores de educación Primaria tenían al analizar la faceta epistémica de un determinado proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística. En este estudio se complementa dicha información mostrando que aunque hay determinados descriptores que resultaron fáciles de aplicar, globalmente, los futuros profesores de nuestro estudio también tienen dificultades en evaluar las idoneidades

cognitiva y afectiva, y por consecuencia muestran escaso *conocimiento de la estadística y los estudiantes* (Hill, Ball y Schilling, 2008).

Estos resultados indican la necesidad de mejorar la formación de profesores en lo que respecta a conocimiento didáctico del contenido de estadística, en particular, con respecto al conocimiento de cómo los estudiantes aprenden y las dificultades que tienen con un determinado contenido matemático. Dentro del *conocimiento de la estadística y los estudiantes* que un futuro profesor de educación Primaria debe tener, es importante que valore sea capaz de valorar la idoneidad cognitiva de un determinado proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En nuestro estudio algunos profesores son capaces de ver los conocimientos previos necesarios para el proyecto pero tienen dificultades para valorar los aprendizajes y las posibles actividades de ampliación y refuerzo.

Nuestro trabajo muestra una escasa idoneidad afectiva por parte de los participantes, cosa preocupante ya que el aspecto afectivo es muy importante en la formación de profesores, ya que creencias incorrectas o actitudes negativas podrían condicionar la enseñanza y repercutir en las futuras creencias y actitudes de sus alumnos, por lo que será necesaria una labor de motivación si queremos que la enseñanza de la estadística y probabilidad sea una realidad y no simplemente un deseo expresado en las orientaciones curriculares (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004).

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-14947 y beca FPU-AP2009-2807 (MCINN-FEDER), y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Arteaga, P., Batanero, C. y Cañadas, G. (2011). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores en una tarea abierta. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*. (pp. 267-275). Ciudad Real: SEIEM.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*. Springer, en prensa.
- Ball, D. L., Lubienksi, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Burgess, T. (2006). A framework for examining teacher knowledge as used in action while teaching statistics. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil: International Statistical Institute.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (2), 263-274.
- Even, R. y Ball, D. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.

- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE StudyTeaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey, Mexico: ICMI e IASE. Online: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- LLinares S. y Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 429 – 459). Rotherdam / Taipei: Sense Publishers.
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria*.
- Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.
- Sorto, M. A. (2004). *Prospective middle school teachers' knowledge about data analysis and its application to teaching*. Tesis doctoral. Universidad del Estado de Michigan.

TRANSFERENCIA DEL APRENDIZAJE SITUADO DE LA SINTAXIS ALGEBRAICA: ECUACIONES LINEALES Y BALANZA VIRTUAL

SITUATED LEARNING TRANSFER OF ALGEBRAIC SYNTAX: LINEAR EQUATIONS AND VIRTUAL BALANCE

Bonilla, M., Rojano, T.

Cinvestav-IPN, México

Resumen

Se analizan resultados de un estudio con alumnos pre-algebraicos de la escuela secundaria, en el que se investigan los procesos de transferencia de aprendizaje situado en el caso de la enseñanza de la sintaxis algebraica para la resolución de ecuaciones lineales, cuando se utiliza un modelo de enseñanza concreto, virtual y dinámico. Al final del estudio, los estudiantes muestran un avance significativo en la resolución de ecuaciones y se puede decir que en su mayoría logran realizar la transferencia de las acciones efectuadas con el sistema de signos del modelo concreto (balanza virtual) a acciones que se ejecutan con el sistema de signos del álgebra. A su vez, se observó que los procesos de transferencia pasan por diferentes etapas, dependiendo del sistema de signos hacia el cual se logra la transferencia de acciones.

Abstract

The paper is an analysis of the findings obtained in a study undertaken of pre-algebraic secondary school students. In more particular terms, the research focused on the situated learning transfer processes in the case of teaching algebraic syntax for resolution of linear equations when a concrete, virtual and dynamic teaching model is used. At the end of the study the students demonstrated that they had progressed significantly in equation resolution and it can be asserted that the majority of the students were able to transfer the actions undertaken with the concrete model sign system (virtual balance) to actions executed with the algebraic sign system. We moreover observed that the transfer processes go through different stages depending on the sign system to which the actions are transferred.

Palabras clave: *Sintaxis algebraica, balanza virtual, ecuaciones lineales, affordances, transferencia situada.*

Keywords: *Algebraic syntax, virtual scale, linear equations, affordances, situated transfer.*

Introducción

Hay pocos indicios de que lo que se aprende en una situación se aplique espontánea o fácilmente a otra distinta, es decir que se dé una transferencia del aprendizaje a otra situación distinta de aquella en la que éste tuvo lugar. Si bien algunos investigadores que han desarrollado la idea de aprendizaje situado (Lave y Wenger, 1991) han cuestionado el uso que se hace de los resultados de estudios de transferencia, lo cierto es que en el terreno de la educación matemática los fenómenos de transferencia (y no transferencia) siguen estando presentes y resultan de interés para la investigación en este campo.

En el trabajo que aquí se presenta interesa estudiar los fenómenos de transferencia de las acciones realizadas en un *modelo concreto virtual* (modelo de la balanza) para la resolución de ecuaciones lineales a acciones en el nivel de la sintaxis del método algebraico de resolución. Con fines de abreviación, denominamos a dichos procesos **fenómenos de transferencia situada**.

Antecedentes

Cuando los estudiantes se inician en el estudio del álgebra y se enfrentan a trabajar con incógnitas, acceden a otros niveles de pensamiento superando lo numérico y los procedimientos netamente aritméticos. Diversos estudios han documentado los errores de los estudiantes, analizando gramaticalmente las expresiones algebraicas (por ejemplo, Davis, Jockusch & McKnight, 1978; Matz, 1982). Filloy y Rojano (1989) han reportado que ocurre una *ruptura didáctica* entre la resolución de ecuaciones del tipo $ax+b=c$, las cuales puede resolverse por métodos aritméticos, y la resolución de ecuaciones del tipo $ax+b=cx+d$, las cuales requieren de métodos algebraicos. Aunque algunas investigaciones (Bolea et al., 1998; Bolea, 2002) muestran el sentido en que la institución escolar interpreta generalmente el álgebra elemental, como una aritmética generalizada, y las consecuencias sobre tales interpretaciones.

En resumen, estas investigaciones advierten sobre las dificultades que los estudiantes enfrentan en su tránsito al pensamiento algebraico y plantean la necesidad de estudiar a fondo la naturaleza de lo didáctico, cognoscitivo y epistemológico en relación a tales dificultades.

El uso de modelos concretos como uno de los acercamientos para enseñar a los alumnos cómo resolver ecuaciones lineales es a menudo objeto de debate en la literatura científica. De acuerdo con J. Vlassis (2002), durante varios años, una serie de autores (Herscovics y Kieran, 1980; Filloy y Rojano, 1989; Linchevski y Herscovics, 1996) han experimentado con diversas situaciones y modelos concretos con los que los estudiantes aprenden a resolver ecuaciones. Las observaciones de Vlassis muestran que el modelo de la balanza puede ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de métodos formales en la resolución de ecuaciones lineales.

Filloy y Rojano (1984), Vergnaud y Cortés (1986) argumentaron que la presentación de situaciones-problema usando la balanza de dos platillos es extremadamente útil para la introducción del álgebra, aunque en el estudio de Filloy y Rojano (1984 y 1989) identificaron tendencias extremas en relación a la modelación concreta. Martínez (2009) ha investigado sobre el uso del modelo de la balanza (en una versión virtual y dinámica) para la resolución de ecuaciones lineales, la cual favorece en los estudiantes la abstracción.

En esta investigación se utiliza un *modelo de enseñanza* basado en la misma balanza virtual utilizada por Martínez (2009) y que está constituido por la unidad interactiva “resolución de ecuaciones lineales”,¹ dicha unidad está conformada por applets presentes en una secuencia de escenas y que llevan a cabo una función muy específica. La idea es estudiar los procesos de transferencia (y no transferencia) que experimentan los alumnos al pasar de trabajar con la balanza virtual a resolver las ecuaciones con las reglas de la sintaxis algebraica.

Transferencia situada

La noción clásica de la transferencia del conocimiento (Greeno, Smith y Moore, 1993), se reduce a explorar si los estudiantes que han aprendido un cierto conocimiento en un contexto determinado pueden utilizarlo para enfrentar y resolver otras situaciones que muestran diferencias notables con las estudiadas inicialmente. Varios modelos alternativos de transferencia han surgido en respuesta a las críticas de la transferencia clásica (véase Bransford & Schwarz, 1999; Greeno, Smith, & Moore, 1993; y Lobato, 2003). Greeno, Smith y Moore (1993) presentan una visión alternativa de la transferencia, denominada transferencia del aprendizaje situado, en donde interesa discutir las características del contexto donde se efectuó el estudio de determinada situación y cuál fue el papel de la interacción social en dicho estudio.

Algunos investigadores (Greeno, 1997, 1998; Greeno, Moore y Smith, 1993) han puesto de relieve la importancia fundamental de las *affordances*² (cualidades de los objetos, o entornos, que permiten a un individuo realizar una acción) y sugieren que la transferencia depende de una capacidad de percibir las *affordances* para la práctica que están presentes en una nueva situación. La investigación que aquí se presenta, se propone observar y analizar cómo las *affordances* que están presentes en el Modelo de la Balanza son reconocidas y transferidas por los sujetos a la sintaxis algebraica.

Las *affordances* presentes en el diseño de la balanza virtual son:

- Pesar objetos de peso desconocido
- Representar ecuaciones
- Resolver ecuaciones de manera concreta
- Manipulación de objetos
- Metáfora del equilibrio

Descripción del modelo de enseñanza

Se trabajará con la Unidad Interactiva “resolución de ecuaciones lineales” la cual contiene un modelo de balanza virtual y dinámica, se utilizará como un apoyo concreto para dar sentido a las propiedades de la igualdad en la resolución de ecuaciones (Martínez, 2009). Esta unidad interactiva está dividida en dos apartados: Balanza I (balanza simple, figura 1) y Balanza II (balanza con poleas, figura 2), el primer apartado aborda la resolución de ecuaciones lineales del tipo $ax+b=c$ y $ax + b = cx + d$, con a , b , c y d enteros positivos y el segundo apartado con a , b , c y d enteros positivos o negativos.

¹ Unidad desarrollada por el grupo “Descartes” (ILCE-SEP, 2006)

² Aquí usaremos el término en inglés, con esta connotación.



Figura 1. Balanza simple

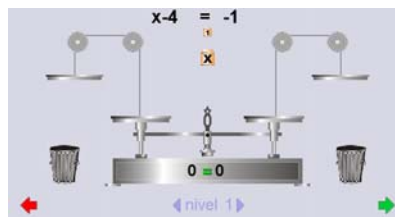


Figura 2. Balanza con poleas

Metodo

Se realiza un estudio de corte cualitativo, con intervención en la fase de enseñanza. La población es un grupo de estudiantes que cursan el segundo grado de educación secundaria. Se trabajará con estudiantes que no han recibido instrucción en la resolución de ecuaciones lineales del tipo $ax+b=c$ y $ax+b=cx+d$, pero sí del tipo $\square + 4 = 9$.

Marco de análisis

Con el propósito de analizar y discutir los datos recabados con cada uno de los sujetos en el estudio, se utilizó un marco de análisis que nos permite identificar estratos de transferencia en la resolución de ecuaciones lineales. Los procesos de transferencia se van manifestando en distintos niveles de abstracción y por lo tanto a través de distintos estratos de sistemas de signos que utilizan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, a partir de la experiencia con la unidad didáctica de la balanza virtual; no hablaremos de si hay o no transferencia, sino de procesos de transferencia “estratificada”.

Estratos de transferencia (se refieren al sistema de signos al que se realiza la transferencia):

- Sistema de Signos de la Aritmética (SSAr)
- Sistema de signos de la Balanza Virtual (SSBV)
- Sistema de signos de la Balanza Diagramática (el alumno requiere dibujar la balanza o bien los bloques) (SSBD)
- Sistema de Signos del Álgebra (SSAl)

Los estratos anteriores surgen a partir del análisis de los casos y están íntimamente ligados con el tipo de *affordances* que recupera el sujeto al cambiar de un sistema de signos a otro. En el reporte del estudio se observa que hay alumnos que transitan por cada uno de los estratos hasta ser usuarios competentes del SSAl, pero la evolución de la transferencia en los sistemas de signos no es lineal, ni jerárquicamente ordenada, se da por ciclos, pues un estudiante puede haber evolucionado con un cierto tipo de ecuaciones, pero cuando se le plantea una modalidad de ecuación distinta requiere nuevamente del modelo virtual, del diagramático o bien del SSAr para apoyarse y poder resolver la ecuación. A continuación se describe el desarrollo del estudio.

Trabajo experimental con la balanza virtual

Al inicio del estudio se aplicó a un grupo de ocho estudiantes un cuestionario inicial, con el fin de identificar en ellos las características individuales de pensamiento

aritmético y pre-algebraico, así como las estrategias utilizadas en la resolución de ecuaciones lineales.

El trabajo experimental se realizó utilizando la unidad interactiva de resolución de ecuaciones lineales. En situación de entrevista con instrucción se enseñó al alumno la resolución de ecuaciones lineales, a través de dos apartados: Balanza I (balanza simple, figura 3) y Balanza II (balanza con poleas, figura 3). El primer apartado está compuesto de cuatro fases: encontrar el peso desconocido (en donde el alumno debía simplemente encontrar cuánto pesa x poniendo bloques de peso 1 del lado derecho de la balanza hasta que ésta se equilibre), representar ecuaciones (del tipo $ax+b=cx+d$ con a, b, c y d enteros positivos en la balanza), encontrar el valor de x (manipulando los bloques de la balanza) y resolver ecuaciones con la balanza fija (aquí el alumno transitó de la manipulación concreta a la sintaxis algebraica).

En el segundo apartado (Balanza II, figura 4), la cual contiene tres fases, los alumnos aprendieron a representar una ecuación del tipo $ax+b=cx+d$ con a, b, c y d enteros positivos o negativos en la balanza, posteriormente pudieron encontrar el valor de x (aquí las operaciones válidas son quitar pesas de los platos y poner pesas ya sea tomándolas de las pilas disponibles al centro, o bien pasando pesas de un plato a otro, transponer) y resolver ecuaciones con la balanza fija en donde transitaron hacia la operatividad algebraica dejando atrás el modelo de la balanza.



Figura 3. Balanza simple



Figura 4. Balanza con poleas

Aplicación de los cuestionarios

Con el objeto de indagar los procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales con el apoyo de la unidad interactiva, se aplicaron cuestionarios en cuatro momentos, uno cuando los estudiantes transitaron de la manipulación concreta a la sintaxis algebraica (Cuestionario I, balanza simple), dentro del modelo virtual, y posteriormente cuando resolvieron ecuaciones con el apoyo de la balanza fija y así poder observar la transferencia a papel y lápiz (Cuestionario II, balanza simple). De la misma forma se hizo en la balanza con poleas (Cuestionario III y Cuestionario IV).

Discusión final y resultados

Al finalizar el estudio, todos los estudiantes entrevistados mostraron un avance significativo en la resolución de ecuaciones y se puede decir que lograron transferir las acciones del estrato del SSBV al estrato del SSA^ℓ, pues ya no se apoyan en el modelo diagramático ni en el virtual para encontrar el valor de la x ; utilizan métodos formales para resolver los ítems, como la transposición de términos y el quitar los mismos términos en ambos lados de la ecuación. A continuación, se muestra el caso de Jazmín, con el que se ilustran distintas etapas de la transferencia al SSA^ℓ.

En el diagnóstico, Jazmín resuelve correctamente la mayoría de las ecuaciones aritméticas; en sus resoluciones utiliza métodos intuitivos que incluyen el uso de hechos numéricos y técnicas de conteo. Con respecto a la resolución de ecuaciones algebraicas que poseen la ocurrencia de la incógnita en ambos lados de la igualdad no resuelve ningún ítem.

Después de haber resuelto ecuaciones mediante el apoyo de la balanza virtual (simple), la alumna realiza la transferencia al estrato del SSBD en la mayoría de sus resoluciones. Como podemos observar, en la figura 5, para encontrar el valor de x Jazmín dibuja los bloques, es decir, las *affordances* presentes en el modelo no las transfirió a la sintaxis algebraica, sino al SSBD.

Handwritten equation: $10x + 4 = 14$

Diagram showing blocks representing the equation. On the left, there are 10 blocks labeled 'x' and 4 blocks labeled '1'. On the right, there are 14 blocks labeled '1'. Below the blocks, it says $x=1$.

Figura 5. Resolución de Jazmín. Cuestionario I

Posteriormente y después de encontrar la solución de ecuaciones con el apoyo de la balanza fija, la alumna no requiere del modelo virtual ni del diagramático, es capaz de realizar la transferencia al estrato del SSA^l, aunque la utilización de la simbología algebraica es aún restringida. En la siguiente figura se muestra la resolución de Jazmín, en donde después de simplificar la ecuación inicial obtiene la ecuación $9x=99$, sin pasar por ecuaciones intermedias y a diferencia su resolución anterior utiliza el SSA^l.

Handwritten equation: $11x + 16 = 2x + 115$

Simplification steps shown:

$$11x + 16 = 2x + 115$$

$$9x = 99$$

$$x = 11$$

Figura 6. Resolución de Jazmín. Cuestionario II

Además la alumna también es capaz de realizar la transferencia a ecuaciones distintas a las contenidas en la unidad interactiva, ecuaciones que pueden llevar a lecturas polisémicas (lecturas espontáneas en las que los estudiantes de álgebra inicial tienden a involucrarse con las ecuaciones). En la figura 7 se puede observar que Jazmín para resolver la ecuación quita de ambos lados de la ecuación los términos iguales y obtiene el valor de x , es decir, la *affordance* que percibió de quitar los mismos objetos en la balanza virtual la transfirió al SSA^l.

Handwritten equation: $x + x^3 = x^3 + 125$

Simplification step shown:

$$x = 125$$

Figura 7. Resolución de Jazmín. Cuestionario II

Por último, los ocho estudiantes entrevistados mostraron signos de transferencia, aunque de manera diferenciada, en el sentido de que dos de ellos logran una transferencia cabal al SSA^l de manera espontánea, es decir, no requieren del modelo virtual ni del diagramático en sus resoluciones en ninguno de los cuestionarios, pero el

resto (seis estudiantes), primero logran transferir las acciones al SSBD y después de haber resuelto ecuaciones con el apoyo de la balanza fija transfieren dichas acciones al SSA^l. El caso de Jazmín es un ejemplo de la segunda situación, y sólo en el primer cuestionario utiliza el modelo diagramático en sus resoluciones. Cinco alumnos tuvieron una evolución similar, aunque se desprendieron del modelo diagramático de manera diferenciada, en el caso de otro alumno (Oscar) en la mayoría de los ítems del tercer cuestionario no requiere de dibujar la balanza pero sitúa los términos de acuerdo a su posición en la balanza, es decir, evoca el modelo virtual.

Lo anterior nos llevó a replantear el tema de la transferencia situada como transferencia por estratos, en referencia al sistema de signos al que se transfieren las acciones aprendidas en el modelo concreto. Dichos sistemas son estratificados, pues el del modelo virtual es de naturaleza más concreta que el sistema de SSA^r y éste a su vez, es menos abstracto que el SSA^l.

Referencias

- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). "*The role of algebraization in the study of a mathematical organization*" Actas del CERME-1, Osnabrueck, Germany.
- Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Dto. Matemáticas, Universidad de Zaragoza.
- Bransford, J. & Schwartz, D. (1999). Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. In A. Iran-Nejad & P. D. Pearson (Eds.), *Review of Research in Education*, 24, 61-101. Washington DC: American Educational Research Association.
- Davis, R., Jockusch, E. & McKnight, C. (1978). Cognitive processes involved in learning algebra. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 2(1), 10-320.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In J. Moser (Ed.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, WI.
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Greeno, J. G. (1997). Response: On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, 26(1), 5-17.
- Greeno, J. G., Moore, J. & Smith, D. (1993). The Institute for Research on learning. Transfer of situated learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition and instruction*, (pp. 99-167). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73, 572-580.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-65.

- Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and viceversa. *Educational Researcher*, 32(1), 17-20.
- Martínez, M. (2009). *De la modelación concreta a la sintaxis algebraica: estudio con alumnos de secundaria sobre la resolución de ecuaciones lineales utilizando el modelo virtual de la balanza*. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, México, D.F.
- Matz, M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. e Brown, J.S. (eds.), *Intelligent Tutoring Systems*, London: Academic Press.
- Vergnaud, G. & Cortes, A. (1986). "Introducing algebra to low level 8th and 9th graders", en *Proceedings of the 10th International Conference of Psychology of Mathematics Educational*, Londres, pp. 319-324.
- Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or supportfor the solving of linear responses to timed mathematics test. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341-359.

COMPRENSIÓN DEL TEST CHI-CUADRADO POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

UNDERTANDING OF CHI-SQUARED TEST BY PSYCHOLOGY STUDENTS

Cañadas, G.R. ⁽¹⁾, **Batanero, C.** ⁽¹⁾, **Díaz, C.** ⁽²⁾, **Gea, M.M.** ⁽¹⁾

Universidad de Granada ⁽¹⁾, *Universidad de Huelva* ⁽²⁾

Resumen

En este trabajo describimos un estudio de las dificultades en la realización del contraste Chi-cuadrado de homogeneidad en estudiantes de psicología, después de un curso de análisis de datos. A partir de un problema abierto, resuelto con ayuda de un programa de cálculo Excel, se analiza el establecimiento de las hipótesis, identificación del estadístico y p-valor, decisión tomada e interpretación de resultados.

Abstract

The Chi- squared test is frequently used in psychology and education. This paper describes a study of the competence to carry out this test in psychology students after studying the subject. Using an open-ended problem that is solved with the help of an Excel program, we analyse the setting of hypotheses, identification of the statistics and p-value, decision taken and interpretation of results.

Palabras clave: *Contraste de hipótesis, Chi-cuadrado, comprensión.*

Key words: *Statistical tests, chi-squared, understanding.*

Introducción

Un análisis estadístico habitual es el contraste Chi-cuadrado, para estudiar la homogeneidad de muestras o la asociación en tablas de contingencia. Aunque la literatura previa ha analizado las dificultades de los estudiantes en el contraste de hipótesis (e.g., Vallecillos, 1994), dichos estudios se han basado en ítems de opción múltiple, o contrastes paramétricos sobre la media de una población normal y han evaluado la comprensión de conceptos, más que la competencia de los estudiantes para completar todos los pasos en este procedimiento.

Para completar la investigación, el objetivo de este trabajo es evaluar la forma en que los estudiantes de Psicología, después de haber estudiado el tema, llevan a cabo los pasos necesarios en un contraste Chi-cuadrado de homogeneidad: planteamiento de hipótesis, identificación del estadístico Chi-cuadrado, cálculo del p -valor utilizando software, decisión tomada e interpretación de resultados. Es parte de una investigación más amplia en la que se estudia el aprendizaje de las tablas de contingencia. En lo que sigue se expone el fundamento y método del trabajo y se discuten los resultados.

Fundamentos

Antecedentes

La mayoría de las investigaciones sobre contraste de hipótesis describen errores en la interpretación del nivel de significación y el p -valor (ej., Vallecillos, 1994), denunciándose el intercambio de los términos de la probabilidad condicional en su definición.

Respecto al concepto de hipótesis, Vallecillos (1994) y Batanero (2000) indican que la hipótesis nula se supone cierta, se plantea para ser rechazada y determina la distribución muestral del estadístico; pero los estudiantes asignan estas propiedades a la hipótesis alternativas o plantean sus hipótesis utilizando el estadístico, en lugar de usar el parámetro. Castro Sotos et al. (2007) y Vera, Díaz y Batanero (2011) informan sobre la dificultad en identificar la población bajo estudio, y en discriminar contrastes unilaterales y bilaterales. Vallecillos (1994) también indica que los estudiantes confunden el criterio de decisión al aplicar el contraste y, por tanto, llegar a una decisión equivocada. Esto relaciona con la dificultad de comprensión de la lógica subyacente al contraste de hipótesis (Harradine, Batanero y Rossman, 2011).

En las investigaciones anteriores, el contraste estudiado es el de la media muestral; no hemos encontrado estudios previos sobre el contraste de homogeneidad, que es el problema que se aborda en este estudio.

Marco teórico

El trabajo se apoya en el enfoque Onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), más concretamente, en los tipos de objetos matemáticos propugnados en esta teoría: (a) Situaciones problemas (en nuestro trabajo decidir sobre la homogeneidad de una serie de muestras); (b) lenguaje (expresiones, símbolos y gráficos que se usan en el trabajo matemático, como H_0 y H_1 , usados para plantear las hipótesis); (c) Conceptos: por ejemplo, estadístico y parámetro, nivel de significación; (d) propiedades: por ejemplo, que las hipótesis nula y alternativa son complementarias; (e) procedimientos;

como el cálculo del valor Chi-cuadrado; y (d) argumentos: usados para justificar la solución del problema.

También utilizamos la idea de *conflicto semiótico*. En las prácticas matemáticas se requiere un uso continuo del lenguaje matemático, pues los objetos matemáticos son inmateriales; por ello a cada expresión matemática (objeto inicial, o signo) le corresponde un contenido (objeto final, esto es, lo representado; generalmente mediante un criterio o regla de correspondencia. El carácter relacional de la actividad matemática puede explicar algunas dificultades y errores de los estudiantes. Godino, Batanero y Font (2007) denominan conflicto semiótico a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las que el profesor trata de transmitir. Dichos conflictos semióticos producen equivocaciones en los estudiantes, que no son debidos a falta de conocimiento, sino a una interpretación incorrecta de expresiones matemáticas.

En este trabajo utilizaremos el método de análisis semiótico propuesto por estos autores, para clasificar las respuestas de los estudiantes en la solución del problema planteado. Este análisis consiste en la identificación las prácticas matemáticas al tratar de resolver el problema y de los objetos y procesos matemáticos implicados. Como resultado se identificarán algunos conflictos semióticos, que explican los errores de los estudiantes.

Método

La muestra estuvo formada por 92 alumnos que siguieron un curso de “Técnicas de análisis en la investigación psicológica” (primer año de psicología) el curso 2010-2011. Se dedicaron 4 sesiones teóricas y 2 prácticas a las tablas de contingencia, incluyendo el test Chi-cuadrado de homogeneidad. El problema propuesto (Figura 1) se completó como parte de la evaluación. Los estudiantes disponían de un programa de cálculo en Excel en el que, introduciendo la tabla, obtenían el valor Chi-cuadrado, aunque debían proporcionar los grados de libertad para obtener el p -valor. El problema plantea un contraste de homogeneidad. En el apartado (a) el estudiante ha de interpretar el enunciado, recordar que en un contraste de homogeneidad se trata de decidir si los datos provienen de diferentes poblaciones. Una posible formulación correcta de las hipótesis sería la siguiente:

H_0 : Las tres palabras tienen idéntica distribución de componente emocional;

H_1 : La distribución de componente emocional de alguna palabra es diferente.

En un experimento un psicólogo selecciona tres palabras y decide evaluar su componente emocional en una muestra aleatoria. Presenta, independientemente, cada palabra a 100 sujetos y registra si la palabra es percibida como emocionalmente positiva, negativa o neutra. A la vista de los resultados, ¿Podrá el psicólogo considerar que las tres palabras tienen el mismo componente emocional?

Componente emocional de la palabra	Palabras		
	1	2	3
Positivo	26	45	32
Negativo	32	27	38
Neutro	42	28	30

- Formule las hipótesis adecuadas para efectuar un contraste Chi-cuadrado de homogeneidad
- Calcule el estadístico de contraste, y la probabilidad asociada al valor obtenido
- Decida si se debe rechazar o no la hipótesis nula para $\alpha = 0,01$
- Interprete el resultado obtenido en el contexto de la investigación.

Figura 1. Problema planteado a los estudiantes)

Para resolver el segundo apartado, el estudiante dispone de un programa de cálculo, que proporciona el valor $\chi^2=10,81$, pero debe especificar los grados de libertad (4 g.l.). Una vez proporcionados, el programa calcula el p -valor= $0,029$. En el apartado (c) el alumno ha de recordar la lógica del contraste, la forma en que se construyen la región de aceptación y rechazo, la definición de valor p y nivel de significación y deducir que el resultado no es estadísticamente significativo para el valor crítico del problema. El último paso es interpretar los resultados: a nivel $0,01$ no podemos decir que alguna palabra tenga diferente componente emocional y en consecuencia, debemos aceptar que tienen el mismo componente.

Resultados

Recogidos los datos se realizó un análisis semiótico de las respuestas en cada apartado, encontrando las siguientes categorías de respuestas. Se denota como RCn las respuestas correctas, RPn las parcialmente correctas y RIn las incorrectas.

Formulación de hipótesis

En la Tabla 1 se presenta un ejemplo de cada categoría, que son las siguientes:

RC.1. El alumno usa una notación adecuada para la hipótesis nula y alternativa, y hace referencia explícita al parámetro “proporción poblacional” en forma simbólica al establecer las hipótesis, elegidas en forma correcta.

RC.2. Hace referencia al concepto de distribución de la variable (en vez del parámetro poblacional) y no usa expresión simbólica. Las hipótesis nula y alternativa están correctamente formuladas.

Tabla 1. Ejemplos de cada categoría del apartado a

Categoría	Ejemplo
RC.1	$H_0: p_{1j} = p_{2j} = p_{3j}$ H_1 : Alguna subpoblación es diferente
RC.2	H_0 : Todas las subpoblaciones tienen idéntica distribución para la variable Y . H_1 : La distribución de la variable Y en alguna de estas subpoblaciones es diferente
RP.1	$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ $H_1: \mu_n \neq \mu_m$, para algún n, m perteneciente $\{1, 2, 3\}$
RP.2	H_0 : Las tres palabras tienen el mismo componente emocional H_1 : Las palabras tienen distintos componentes emocionales
RP.3	H_0 : Componente emocional1 = Componente emocional2 = Componente emocional3 $H_1: CE_1 \neq CE_2 \neq CE_3$
RI.1	H_0 : Las palabras presentadas influyen en las emociones H_1 : Las palabras presentadas no influyen en las emociones
RI.2	H_0 : 10,81
RI.3	H_0 : Las variables están asociadas. H_1 : Las variables son independientes
RI.4	$H_0: X_1 \neq X_2 \neq X_3$ $H_1: X_1 = X_2 = X_3$
RI.5	H_0 : Las variables entre columnas no están asociadas H_1 : Las variables entre filas si están asociadas
RI.6	$H_0: W_1 = W_2 = W_3$ (W =palabra). $H_1: W_1 \neq W_2 \neq W_3$
RI.7	$H_0: p_{1j} = p_{2j}$ H_1 : son distintos
RI.8	$H_0: p_{1j} = p_{2j} = p_{3j}$ $H_1: p_{1j} \neq p_{2j} = p_{3j}$

RP.1. Se elige correctamente la hipótesis nula (como de igualdad de poblaciones) y la alternativa (como de diferencia entre alguna de ellas); pero se hace referencia a la media poblacional, en vez de usar la proporción. Esto último es incorrecto, pues no tiene sentido usar la media en datos cualitativos.

RP.2. Lenguaje poco preciso donde no se puede deducir si el alumno distingue la variable de su distribución., aunque formula correctamente la hipótesis nula. No hace referencia al concepto de población o distribución muestral, que según Harradine, Batanero y Rossman (2011) son más abstractos que los de población o muestra.

RP.3. Elige correctamente la hipótesis nula, pero la alternativa no es correcta, ya que sólo se exige la diferencia entre alguna de ellas; Al igual que en Vera, Díaz y Batanero (2011), las dos hipótesis no cubren el espacio paramétrico.

RI.1. Confunde las hipótesis nula y alternativa (error descrito por Vallecillos, 1994 y Chow, 1996) y expresa el contraste como de independencia, error razonable, debido a que ambos contrastes se realizan a partir de tablas de contingencia y usando el estadístico Chi-cuadrado.

RI.2. Presenta el estadístico Chi-cuadrado como hipótesis nula, sin dar la hipótesis alternativa. Confunde parámetro y estadístico, puesto que plantea la hipótesis en término de un estadístico, error descrito por Vallecillos (1994) y Castro Sotos et al. (2007).

RI.3. Confunde el contraste de homogeneidad con el de independencia. También intercambia hipótesis nula y alternativa, error señalado en Vallecillos (1994) y Chow (1996).

RI.4. Intercambia hipótesis alternativa y nula. Además en la hipótesis alternativa indica que las tres poblaciones han de ser diferentes, por lo que las hipótesis no cubren el espacio paramétrico (Vera, Díaz y Batanero, 2011).

RI.5. Confunde el contraste de homogeneidad con el de independencia e indica que la asociación se da entre filas o en columnas. De hecho, confunde valor y variable, error señalado por White (1980).

RI.6. Confunde la variable bajo estudio (componente emocional) con las poblaciones (datos tomados sobre las palabras). Además las dos hipótesis no cubren el espacio paramétrico (Vera, Díaz y Batanero, 2011).

RI.7. Usa dos poblaciones (en vez de tres); posiblemente confunde el número de variables con el de las subpoblaciones que se comparan, observándose dificultad para identificar la población bajo estudio (White, 1980).

RI.8. Plantea bien la hipótesis nula, pero en la alternativa sólo considera que sean distintas las dos primeras distribuciones, por lo que las dos hipótesis no cubren el espacio paramétrico (Vera, Díaz y Batanero, 2011).

Tabla 2. Resultados en el apartado a

Respuesta		Frecuencia	Porcentaje
No responde		7	7,6
Correcta	RC.1	29	31,4
	RC.2	14	15,2
Parcialmente correcta	RP.1	10	10,9
	RP.2	7	7,6
	RP.3	12	13,1
Incorrecta	RI.1	1	1,1
	RI.2	1	1,1
	RI.3	1	1,1
	RI.4	4	4,3
	RI.5	2	2,2
	RI.6	1	1,1
	RI.7	2	2,2
	RI.8	1	1,1
Total		92	100

En la Tabla 2 observamos 41,4% plantean correctamente las hipótesis, 26,8% en forma parcialmente correcta, y 13,7% incorrectamente. Las respuestas más frecuentes son las correctas (RC.1 y RC.2), en la que plantean las hipótesis de un contraste de homogeneidad, una de forma simbólica y otra verbalmente; y las parcialmente correctas

(RP.1), donde hace referencia a la media muestral, en vez de usar la media poblacional, y (RP.3) que en la hipótesis alternativa es incorrecta. Los resultados son mejores que los de Vallecillos (1994), donde y Vera, Díaz y Batanero donde 26% y 33% de los participantes plantean correctamente las hipótesis.

Estadístico de contraste y probabilidad asociada

En la Tabla 3 se presentan ejemplos de cada tipo de respuesta que se analizan a continuación.

Tabla 3. Ejemplos en cada categoría del apartado b

Categoría	Ejemplo
RC.1	Chi-cuadrado experimental = 10,81; p -valor = 0,029
RP.1	Chi-cuadrado experimental = 10,81; p -valor = 0,021
RI.1	Chi-cuadrado experimental = 10,81; p = 0,001
RI.2	Chi-cuadrado experimental = 10,81; p = 13,28
RI.3	Chi-cuadrado experimental = 10,81
RI.4	Chi-cuadrado experimental = 10,81; p = 0,01

RC.1 El alumno usa una notación adecuada, obtiene el estadístico Chi-cuadrado, los grados de libertad y el valor p correcto.

RI.1 El alumno calcula correctamente el Chi-cuadrado pero confunde los grados de libertad y obtiene por tanto un valor p incorrecto. Esta confusión de los grados de libertad también se encuentra en las investigaciones de Alvarado (2007) y Olivo (2008), en el primer caso en el trabajo con la distribución t y en el segundo, con las distribuciones, t , Chi-cuadrado y F .

RI.2 El alumno calcula correctamente el valor Chi cuadrado y los grados de libertad. Obtiene en la tabla de la distribución el valor crítico 13,28, confundiendo con el p -valor, sin notar que una probabilidad no puede ser mayor que la unidad, error descrito por Contreras et al. (2010).

RI.3 El alumno obtiene el Chi- cuadrado pero no reconoce, el valor de la probabilidad asociada al valor obtenido, es decir de p .

RI.4 El alumno da el alfa, en vez de calcular el valor p , confundiendo estos dos conceptos, error descrito por Vallecillos (1994).

Tabla 4. Resultados en el apartado b

Respuesta		Frecuencia	Porcentaje
Correcta	RC.1	59	64,2
Incorrecta	RI.1	14	15,2
	RI.2	6	6,5
	RI.3	12	13
	RI.4	1	1,1
Total		92	100

Los resultados se presentan en la Tabla 4; la mayoría de los estudiantes obtienen a partir del programa correctamente el estadístico y la probabilidad asociada (55,8%).

Resaltan entre las respuestas incorrectas (RI.1), en la que no recuerdan los grados de libertad y (RI.3), donde el alumno no reconoce el valor p error descrito por Alvarado (2007) y Olivo (2008), en el uso de la distribución t , Chi-cuadrado y F .

Toma de decisión

En este apartado sólo hemos encontrado dos tipos de respuestas; correcta e incorrecta. Son respuestas correctas aquellas en que el estudiante interpreta adecuadamente los resultados, y no rechaza la hipótesis nula con formulaciones como: “*no podemos rechazar la homogeneidad*”. Es errónea la de los alumnos que deciden rechazar la hipótesis, confundiendo los criterios de aceptación y rechazo. En la Tabla 5 observamos que la mayoría (51,9%) toman la decisión correcta, siendo mejores los resultados que en los de investigaciones de Vallecillos (1994) aunque casi la mitad de los alumnos no llegan a una decisión correcta, error también señalado por Haller y Kraus (2002).

Tabla 5. Respuestas en el apartado c

	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	54	51,9
Incorrecta	30	32,6
No responde	8	8,7
Total	92	100

Interpretación de resultados

A continuación se describen las categorías de respuestas (ver ejemplos en la Tabla 6).

Tabla 6. Ejemplos en cada categoría del apartado d

Categoría	Ejemplo
RC.1	El componente emocional se distribuye homogéneamente en las diferentes palabras
RP.1	Al buscar en la tabla de Chi-cuadrado obtenemos un valor de $p=0,029$. Por tanto no es estadísticamente significativo pues es mayor que 0,01. Aceptamos la hipótesis de homogeneidad
RI.1	Rechazamos H_0 , esto significa que las tres palabras tienen diferente componente emocional.
RI.2	Rechazaríamos la hipótesis de independencia (porque este valor tan cercano a 0 indica un valor muy improbable de Chi-cuadrado)
RI.3	Como el valor de $p=0,029$ es muy cercano a 0, indica un valor muy improbable de Chi-cuadrado si la H_0 es cierta, rechazamos la igualdad de componente emocional
RI.4	Observando el resultado del estadístico Chi cuadrado obtenemos que la probabilidad de obtener un valor 13,28 o mayor con 4 grados de libertad es $p=0,029$

RC.1. Los alumnos interpretan los resultados en el contexto tomando una decisión correcta.

RP.1. Los alumnos no interpreta en el contexto del problema como se les pide, pero toman una decisión correcta haciendo uso de una interpretación genérica de contraste de hipótesis.

RI.1. Los alumnos interpretan en el contexto del problema, pero la interpretación que hacen es incorrecta, por tomar una decisión incorrecta, pues rechazan la hipótesis nula.

RI.2. Los alumnos no interpretan en el contexto del problema, y además toman una decisión incorrecta de la toma de decisión.

RI.3. Los alumnos interpretan en el contexto del problema, pero toma una decisión incorrecta. Además estos alumnos tienen en cuenta el valor p , pero no α explícitamente.

RI.4. Estos alumnos no interpretan ni en el contexto, ni de ninguna forma. Además, no toman una decisión.

Tabla 7. Resultados en el apartado d

	Frecuencia	Porcentaje
RC.1	40	43,5
RP.1	5	5,4
RI.1	20	21,7
RI.2	2	2,2
RI.3	1	1,1
RI.4	1	1,1
No responde	23	25
Total	92	100

En la interpretación de los resultados según el contexto del problema (Tabla 7), observamos un 43,5% que lo hacen en forma correcta, siendo la respuesta más frecuente. El resto de estudiantes no llega a interpretar el resultado en relación al contexto.

Discusión y conclusiones

En el problema planteado los estudiantes recorren todos pasos del contraste de hipótesis; 79,3% plantean hipótesis correctas o parcialmente correctas, 64,1% determinan correctamente el estadístico y valor p (único punto facilitado por el software), 51,9% toman la decisión correcta y 43,5% interpretan correctamente los resultados en contexto, recorriendo, por tanto todos los pasos del proceso de modelización (Henry, 1997): planteamiento de hipótesis, definición y trabajo con un modelo matemático e interpretación de resultados.

Los alumnos fueron capaces de abstraer y simplificar la realidad, pasando de la idea de componente emocional, a la distribución de la percepción de los 100 participantes, esto es, aceptando los datos del problema como indicadores de dicha componente emocional. Trabajaron con modelos matemáticos (las variables aleatorias y estadísticas correspondientes a la percepción del componente emocional, el estadístico Chi-cuadrado, sus grados de libertad, valor p y nivel de significación, lógica del contraste de hipótesis, etc.). Finalmente el último paso (interpretar los resultados del

trabajo matemático realizado con el modelo (decisión tomada) en el contexto del problema (traducir esta decisión a lo que indica respecto de la componente emocional de las palabras) fue lo más difícil, de acuerdo a lo obtenido en Arteaga, Batanero y Ruiz (2009).

En consecuencia se plantea la necesidad de continuar la investigación respecto a la enseñanza del contraste de hipótesis y la modelización estadística. Sería necesario igualmente insistir en los aspectos interpretativos en la enseñanza, pues los profesores se concentran con frecuencia en el trabajo matemático (y no en las fases iniciales y finales de la modelización) que son igualmente importantes.

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-14947 y becas FPU-AP2009-2807 y BES-2011-044684 (MCINN-FEDER) (MCINN- FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Alvarado, H. (2007). *Significados del teorema central del límite en la enseñanza de la estadística en ingeniería*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.
- Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B. (2009). Comparación de distribuciones por futuros profesores. En M. J. González, M.T. González y J. Murillo, *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 129-138). Santander: SEIEM.
- Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1-2), 75-98.
- Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Nororgate, W., Onghena, P. (2007). Student's misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence form research on statistical education. *Educational Research Review*, 2 (2), 98-113.
- Chow, L. S. (1996). *Statistical significance: Rational, validity and utility*. London: Sage.
- Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C. y Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (p. 271-280). Lleida: SEIEM.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Haller, H. y Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research*, 7(1). On line: www.mpr-online.de/.
- Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. Springer
- Henry, M. (1997). Notion de modèle et modélisation en l'enseignement. *En Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77-84). Reims: Commission Inter-IREM.
- Olivo, E. (2008). *Significados de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

- Vera, O., Díaz, C. y Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *Unión*, 27, 41-61.
- White, A. L. (1980). Avoiding errors in educational research. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 47 – 65). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA QUE SUSTENTA EL DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD SOBRE LAS ECUACIONES DE LA RECTA EN 1º DE BACHILLERATO

UNDERSTANDING OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

Carmona, E., Climent, N.

Universidad de Huelva

Resumen

A partir de la reflexión que realiza un profesor experto sobre una actividad de corte investigativo que ha diseñado e implementado sobre las ecuaciones de la recta en 1º de Bachillerato, caracterizamos nuestra comprensión sobre el conocimiento matemático para la enseñanza que el profesor pone en juego al diseñar dicha actividad. Accedemos al conocimiento del profesor a través de una entrevista semi-estructurada aceptando la imposibilidad de comprender la intención educativa del profesor por la mera observación.

Abstract

Taking a teacher's reflection about his design of an investigative activity as starting point, we characterize our understanding of teacher's mathematical knowledge for teaching that he displays when he design this activity about linear equations. We can access to teacher's knowledge through a semi-structured interview accepting the impossibility to understand teacher's goals from the observation of his practice.

Palabras clave: *Conocimiento Matemático para la Enseñanza; ecuaciones de la recta; Bachillerato.*

Key words: *Mathematical Knowledge for Teaching; linear equations; High School.*

Introducción

Este artículo forma parte de una investigación ubicada en la línea de desarrollo profesional, donde se intenta comprender el conocimiento matemático para la enseñanza que un profesor pone en acción cuando imparte las ecuaciones de la recta en 1º de Bachillerato. Para ello consideramos conveniente acceder tanto al conocimiento que observamos explícitamente en su práctica (conocimiento en acción) como al conocimiento implícito que sustenta y explica dicha acción (conocimiento declarativo).

En este artículo tratamos de mostrar nuestra comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza declarativo referido a la práctica de José Luis, un profesor de 1º de Bachillerato con 17 años de experiencia. Para ello nos apoyaremos en un episodio cuyo objetivo es presentar a los alumnos una actividad de corte investigativo que vertebra todo el trabajo sobre las ecuaciones de la recta. Concretamente mostramos algunos ejemplos del análisis y la caracterización de los subdominios *conocimiento matemático y de la enseñanza y conocimiento matemático y de los estudiantes* de José Luis que sustentan y explican su diseño de dicha actividad.

Conocimiento matemático para la enseñanza

De entre las distintas perspectivas existentes relativas al conocimiento profesional de los profesores, optamos por centrarnos en el conocimiento para la enseñanza ligado a los contenidos matemáticos. Para ello vamos a utilizar el modelo conocimiento matemático para la enseñanza (en adelante MKT¹) elaborado por Deborah Ball y su equipo de investigación (Ball, Thames y Phelps, 2008), porque nos ofrece una categorización específica de dicho conocimiento y porque además es un modelo construido sobre el estudio y análisis de la propia práctica de los profesores, siendo por tanto una teoría basada en la práctica. Ambos aspectos encajan con la naturaleza de nuestra investigación.

Entendemos el trabajo de Deborah Ball y sus colaboradores como una continuación natural del trabajo de Shulman, y como elaboración y refinamiento de sus ideas en el contexto de la enseñanza de las matemáticas (en particular en el nivel de Primaria). Éstos (Ball, Thames y Phelps, 2008), atraídos por profundizar en la naturaleza del conocimiento de los contenidos para la enseñanza de las matemáticas, y alentados por la poderosa idea lanzada por Shulman (1986) de que la enseñanza requiere una clase especial de conocimiento del contenido, proponen un modelo multidimensional del conocimiento profesional del profesor que consta de seis subdominios agrupados en dos bloques, el conocimiento del contenido matemático, formado por los subdominios conocimiento común del contenido (CCK), horizonte matemático (HCK) y conocimiento especializado del contenido (SCK); y el conocimiento didáctico del contenido, formado por los subdominios conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT), conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) y conocimiento curricular (KCC). En el presente artículo nos centraremos en los subdominios KCS y KCT.

El KCS es un conocimiento que combina el saber acerca de los estudiantes y el saber matemático. Incluye, por ejemplo, las habilidades que tienen los profesores para prever los posibles pensamientos, dificultades y potencialidades de los alumnos o la capacidad de interpretar su pensamiento emergente, o si una tarea les resultará motivante, aburrida, fácil o difícil.

¹El término original es Mathematical Knowledge for teaching, cuyas siglas son MKT.

El KCT es un conocimiento que combina saber matemático y conocimiento acerca de la enseñanza. Incluye, por ejemplo, la habilidad para saber qué representaciones son más adecuadas para enseñar un contenido específico, la habilidad para saber qué ejemplo es adecuado para introducir un tópico, o cuál es adecuado para profundizar sobre algún aspecto concreto, o las ventajas y desventajas de usar distintas representaciones para enseñar una idea.

Diseño metodológico

Nuestra investigación se enmarca en la línea de desarrollo profesional del profesor, siendo nuestro foco de estudio el conocimiento profesional, concretamente el Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Entendemos que a nuestra investigación le falta profundidad para poder afirmar que se trata de un estudio de caso², sin embargo sí podemos decir que está en la línea de un estudio de caso. Nos hemos acercado a la realidad situados en el paradigma interpretativo (Colás y Buendía, 1998), dado que nuestro interés es comprender la situación de estudio.

La información recogida se refiere a la enseñanza de las ecuaciones de la recta en 1º de Bachillerato. Fueron observadas (por un investigador, de modo no participante) y grabadas en vídeo 4 sesiones de esta unidad, así como tomadas notas de campo durante la observación. Además, realizamos una entrevista después de la observación, que se recogió en audio.

Realizamos un análisis de contenido de la información relativa a las observaciones, en varias fases. Para dicho análisis no partimos de categorías previas (más que las dimensiones del MKT, y la concreción de las mismas de la tesis de Sosa³). Nuestro propósito es que las categorías se extrajeran del análisis, basadas en los datos y en nuestra sensibilidad teórica, reforzada por un análisis previo del tratamiento de estos contenidos en libros de texto.

Un primer acercamiento al análisis se centró en las videgrabaciones (sin transcribir) y las notas de campo, con la intención de detectar indicios de MKT, incluyendo un posible conocimiento implícito, fijándonos tanto en las acciones del profesor como en el propio diseño de la actividad. Una vez transcrita la sesión relativa al planteamiento de la actividad, realizamos un segundo acercamiento a la información repitiendo el mismo procedimiento e incorporando un nuevo elemento, la ayuda de otros investigadores.

Como resultado de esta reflexión compartida establecimos una serie de interrogantes referentes al diseño de la actividad que deseábamos comprender, y cuya respuesta entendíamos que nos arrojaría información sobre las características del MKT de José Luis, y nos permitiría sacar a la luz las intenciones implícitas de José Luis que dan solidez al diseño de su actividad.

² Entendemos que nuestra comprensión sobre el MKT que se evidencia a través de la reflexión que el propio José Luis realiza sobre el diseño de su actividad, es una realidad singular, cargada de matices personales, y que además tiene lugar en un contexto único e irrepetible. Nuestro propósito es captar precisamente la singularidad del caso, sin embargo hemos analizado únicamente dos sesiones de clase y una entrevista, por lo que consideramos que la profundidad del estudio nos permite únicamente afirmar que nuestra investigación está en la línea de un estudio de caso.

³ Los descriptores aportados por Sosa nos fueron útiles como punto de partida hacia un mayor nivel de concreción durante el primer acercamiento a la información.

Entendíamos que la forma en la que José Luis trabaja las ecuaciones de la recta suponía una novedad en sí misma, ya que no respondía a las formas habituales de introducirlas que habíamos encontrado en los libros de texto, y los interrogantes que nos planteábamos se referían a sus argumentos respecto de sus decisiones, lo que vislumbrábamos se sustentaba en un rico MKT. José Luis trabajaba todos los contenidos de las ecuaciones de la recta a través de una actividad que se desarrollaba a lo largo de cuatro sesiones, y en la que distinguíamos cuatro fases claramente diferenciadas: planteamiento de la actividad, trabajo por parejas con la ayuda de Geogebra, explicación de cada pareja del trabajo realizado, y el cierre de la actividad donde se recogían los aspectos más relevantes. A cada pareja se le encargaba un tipo de ecuación diferente de la misma recta. En concreto nos cuestionábamos por qué incluía Geogebra, qué creía que aportaba, por qué todas las ecuaciones de la misma recta, y por qué había elegido esa recta en concreto. Sabíamos que utilizar la misma recta expresada de seis formas distintas era una decisión intencionada de José Luis, y por tanto dicha decisión estaba impregnada de su MKT; por ello necesitábamos comprender la importancia que tenía para José Luis utilizar la misma recta y las ventajas que representaba respecto de la posibilidad de realizar la misma actividad con rectas distintas.

Igualmente pensábamos que la recta que escogía José Luis para desarrollar la actividad no era tan arbitraria, sino que respondía a unas características que José Luis consideraba imprescindibles para el objetivo que perseguía la actividad.

Era fácilmente perceptible que José Luis se sentía muy atraído por el uso de las nuevas tecnologías, en particular mostraba un gran conocimiento sobre Geogebra; dicha herramienta jugaba un papel determinante en el diseño de la actividad. Entendíamos que comprender qué aporta para José Luis dicha herramienta en la actividad nos daría características sobre su MKT.

Diseñamos la entrevista construyendo preguntas directas e indirectas sobre las cuestiones antes señaladas, con el objetivo de acceder al pensamiento y razonamiento de José Luis y de recabar información que nos permitiera comprender el MKT que había puesto en juego para diseñar la actividad. Esta entrevista se realizó una vez concluida la unidad por parte del profesor. (Las preguntas de la entrevista se organizaron en bloques relativas a los interrogantes señalados, que pueden apreciarse en los epígrafes en que presentamos los resultados).

En cuanto al análisis de la entrevista, en cuyos resultados nos centraremos en esta comunicación, una vez transcrita se seleccionaron las unidades de información (Bardin, 1986) y se agruparon por referirse a los mismos aspectos del diseño de la actividad. En el análisis de la información, al igual que lo señalado respecto del análisis de la observación, hemos tomado el modelo MKT como marco de referencia, sin embargo no hemos partido de descriptores previos, sino que hemos tratado que fueran los propios datos los que suscitaran los descriptores de análisis. El análisis de cada uno de estos grupos permitió elaborar un constructo del investigador que explica el contenido de dicho conocimiento, y cuyo descriptor asociado surgía de la síntesis de dicho constructo. De este modo, dicho análisis sigue la perspectiva de la teoría emergente de los datos (Strauss y Corbin, 1998).

El análisis de la información ha sido desarrollado por un investigador principal, que ha contado con un co-investigador para consensuar su interpretación del análisis y, como hemos señalado, la orientación de otro co-investigador externo para el diseño de cuestiones para la entrevista.

Nos hemos posicionado en un enfoque interpretativo debido a que nuestro interés es describir, comprender e interpretar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de un profesor, y lo hacemos explicitando su voz y optando por un enfoque cualitativo que nos permita acceder al significado que le otorga a las distintas situaciones y a sus intenciones. Según Blumer (1969) *los seres humanos interpretan o “definen” las acciones de los otros en lugar de reaccionar meramente a las acciones del otro. Su “respuesta” no se hace directamente sobre las acciones del otro, sino que se basa en los significados que atribuyen a tales situaciones* (en Corbin y Strauss, 1998, p. 2). En este sentido, entendemos esta investigación como un fenómeno social cuyo fruto es un conocimiento que surge de la interacción entre los investigadores y el sujeto investigado, y de la construcción conjunta de significados.

En lo que sigue, dadas las dimensiones de esta comunicación, nos centraremos en la entrevista a José Luis en relación con el diseño de la actividad que elige para introducir las ecuaciones de la recta. Dado que, como hemos explicado, la entrevista se diseña a partir de la observación de las sesiones correspondientes al desarrollo en el aula de dicha actividad, describimos primero el episodio de enseñanza relativo al planteamiento de la actividad en el aula.

Descripción del episodio de enseñanza

En este epígrafe describimos el episodio de enseñanza seleccionado y al que se refieren los resultados que mostraremos en el epígrafe siguiente. Para describir el episodio nos fijamos en las actividades que propone el profesor en relación con el contenido y las orientaciones que facilita (dado que nuestro objetivo es estudiar el MKT del profesor en relación con la enseñanza del contenido).

Para trabajar las ecuaciones de la recta José Luis decide comenzar partiendo directamente de una actividad. Se trata de una actividad diseñada para trabajar por parejas y con la ayuda de un software dinámico, concretamente Geogebra.

José Luis presenta la actividad y sus objetivos al alumnado, recogiendo en la pizarra todo aquello que deben saber para realizar dicha actividad. José Luis proporciona seis ecuaciones de la misma recta expresadas de diferentes formas. Y propone que:

1) Cada pareja escoja una de las ecuaciones propuestas y obtenga: Un punto, un vector, la inclinación, los puntos de corte con los ejes y su representación gráfica. Así como intentar comprender si los números y letras que aparecen en su ecuación tienen algún significado.

2) Cada pareja salga posteriormente a la pizarra para explicar al resto de compañeros qué han hecho, cómo lo han hecho, y qué han descubierto acerca del significado de los números y letras que aparecen en su ecuación.

Para comenzar a trabajar José Luis les proporciona únicamente una pista: “Las seis ecuaciones que os proporciono se corresponden con rectas. Son rectas”.

Obtener de cada ecuación lo siguiente:	ACTIVIDAD: Ecuaciones de la recta	
Un punto	- Por parejas	
Un vector	- Vais a elegir una ecuación de las siguientes:	
La inclinación	Ec. 1: $(x,y) = (1,2) + t(3-1)$	Ec. 5: $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{1}$
Cortes con los ejes	Ec 2: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$	Ec. 6: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 4)$
Representación	Ec 3: $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases}$	
PISTA: SON RECTAS	Ec 4: $x + 3y - 7 = 0$	

Figura 2. Imagen de la pizarra tras finalizar el planteamiento de la actividad

Resultados

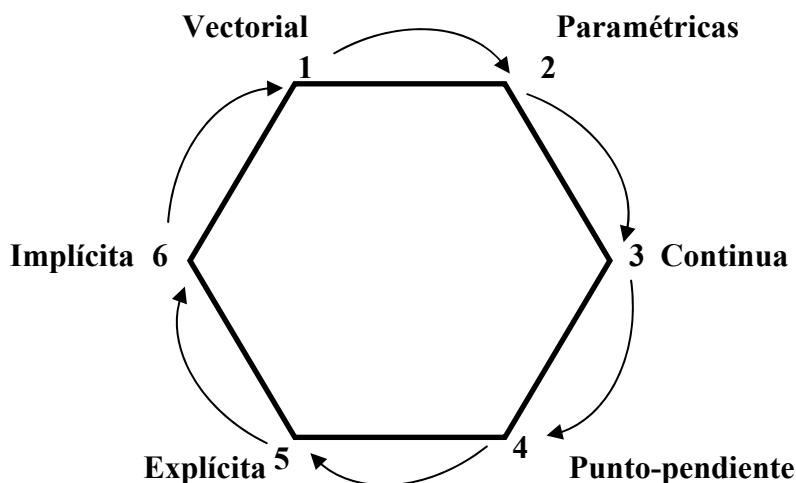
A continuación mostramos nuestra comprensión⁴ sobre el MKT que José Luis pone en juego al diseñar su actividad, organizado en torno a las cuestiones que fundamentan su acción.

¿Por qué trabajar las ecuaciones de la recta de este modo?

José Luis conoce en profundidad las formas más usuales de introducir las ecuaciones de la recta; a partir de un punto y un vector, es decir, partiendo de la ecuación vectorial de la recta, que es la forma más extendida en los libros de texto de Bachillerato; o partir del plano afín y los espacios vectoriales como se hacía en BUP. Se muestra crítico con esta forma de trabajar “*siendo la más difícil por aquello de plantear una relación entre vectores, coger un punto genérico de coordenadas (x,y) y tantas veces un vector director y claro ahí aparece t y luego curiosamente después se generan las otras, siendo las otras más fáciles ¿verdad?*”.

Entiende que la forma habitual de introducir las ecuaciones de la recta, es lineal, incluso secuencial, donde “*se parte de la ecuación vectorial a partir de un punto y un vector luego se ha de pasar por las ecuaciones paramétricas, luego se despeja y se elimina el parámetro y se pasa a la continua, y parece como si se van recorriendo los vértices de un polígono*”.

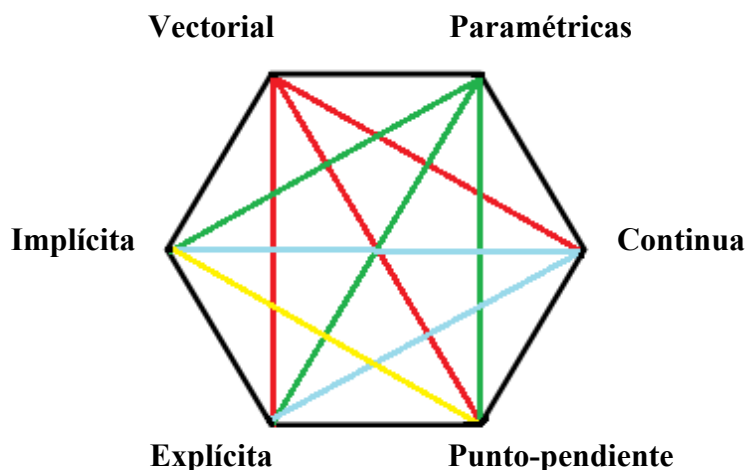
⁴ Hablar en primera persona responde a la convicción de que como investigadores leemos e interpretamos la realidad sin escapar de nuestra subjetividad; *investigar implica elegir con qué ojos mira uno el mundo* (Fourez, 2008, pp 48).



Lo anterior pone de manifiesto el análisis del profesor sobre los métodos habituales de enseñar el contenido y su conocimiento sobre lo que resulta más fácil a los alumnos. Esta misma comprensión de las dificultades de los alumnos se manifiesta respecto de la comprensión que suelen hacerse éstos sobre las ecuaciones de la recta, en la que faltan conexiones entre los distintos modos (CCEs, ver tabla 1 con los descriptores del KCT y KCS que extraemos del análisis de la reflexión del profesor). De este modo, sabe que con la forma habitual de abordar las ecuaciones de la recta no se comprenden las relaciones que se corresponden a las diagonales del hipotético polígono: *“muchas veces no ven que a través de las diagonales hay caminos que unen una ecuación y otra, y tienen que pasar obligatoriamente por los vértices hasta llegar a la ecuación última”*.⁵

José Luis diseña la actividad con un objetivo principal *“relacionar los distintos modos de la recta, no estudiar en concreto ninguno de ellos a fondo”*. De modo, que no solo se tracen los lados del polígono sino también las diagonales. José Luis sostiene que esta forma de trabajar permite ir construyendo las distintas relaciones potenciando la comprensión y el razonamiento frente a la manera usual de introducirlas donde se suele potenciar la memorización y una forma secuencial de trabajar.

⁵ Hemos de decir que parece ser un conocimiento basado en su experiencia, que constata una observación de dificultades en el razonamiento de los alumnos. Si bien no atiende a un análisis cognitivo más profundo de esos obstáculos, constituye conocimiento sobre dificultades de los estudiantes con el contenido, de ahí asociarle el indicador CCEs.



“Muchas veces no ven que hay caminos que unen una ecuación y otra, no ven las diagonales”

¿Por qué la misma recta expresada de seis formas distintas?

José Luis trabaja con la misma recta expresada en sus distintas formas. Esta elección se justifica por su conocimiento de que esto permitirá establecer relaciones entre las distintas formas de expresar las ecuaciones de una recta y los elementos que aparecen en éstas (CCEn₂) (*“el propósito de usar la misma recta con distintas ecuaciones era poder relacionar y poder obtener expresiones entre las distintas letras y números que aparecían en las ecuaciones”; ...que “ellos mismos se dieran cuenta que todas son distintos disfraces, ...permitía relacionar la pendiente con el vector director que al mismo tiempo eso es la dirección. Que da igual el punto que se coja que la expresión de la recta es la misma”*).

José Luis entiende que si no hubiera trabajado con la misma recta habría *“sido difícil poder relacionar unas ecuaciones con otras”*. Afirma *“Si yo les planteo distintas rectas, ellos podrían razonar que efectivamente cuando mueven la pendiente, la recta cambia su inclinación, igual que cuando cambian el vector director; pero sin embargo la relación que existe entre la pendiente y el vector director no la encontrarían tan fácilmente”*. Considera que esta forma de trabajar permite que los alumnos establezcan más relaciones y además con mayor profundidad, pues no solo llegan a descubrir la relación que existe entre la pendiente y el vector director, sino que además encuentran dicha relación numérica y la posible relación con la tangente del ángulo, así como la relación entre los vectores directores, *“e incluso que dos vectores paralelos nos dan la misma dirección o que da igual el punto que se coja, que la expresión de la recta es la misma”*.

¿Por qué la elección de la recta?

La justificación de la elección de la recta en cuestión muestra el conocimiento del profesor sobre las representaciones más adecuadas y la importancia que le atribuye a la hora de que el alumno establezca las conexiones que se pretenden entre las distintas ecuaciones de la recta y los elementos de éstas (CCEn₃). José Luis escogió una recta *“lo más arbitraria posible”*, entiende que hay casos particulares que obstaculizarían el objetivo de establecer relaciones entre las distintas formas de expresar la recta (sería adecuado *“escoger una recta que no pasara por el origen de coordenadas”*, así como no trabajar con casos particulares como *“rectas paralelas o perpendiculares”*).

¿Qué aporta el uso de Geogebra?

José Luis es consciente de la potencialidad que tiene Geogebra para representar y manipular elementos de forma dinámica e interactiva. Conoce además las posibilidades del recurso en relación con el aprendizaje de los contenidos en cuestión (CCEn₄) (“*que simplemente haciendo un clic y arrastrando con el ratón veas y muevas la recta, veas como la ecuación de la recta varía, y de qué forma varía, eso no lo podemos hacer en la pizarra, la pizarra es algo fijo, estático, y yo ahí no puedo manipular la recta como quisiera*”).

Además, pueden ver simultáneamente cómo varía su expresión analítica, y esto les ayuda a “*entender qué significan cada uno de los parámetros que se representan, pues cuando ellos pueden manipular la recta con Geogebra sí puedes intuir el significado, que sin el uso de Geogebra una recta ahí trazada en una hoja no dice que la m sea realmente la inclinación, pero cuando ellos manipulan la recta ven cómo variando m varía la inclinación de la recta ... eso en la pizarra o en el folio no se puede trabajar igual*”.

En su conjunto, consideramos que los aspectos del KCT y KCS que se evidencian en la reflexión de José Luis acerca de las decisiones que toma en el diseño de la actividad, puede recogerse con los descriptores que mostramos en la tabla 1.

CCEs	<i>Saber que introducir las ecuaciones de la recta de una determinada forma puede provocar que los alumnos se hagan una representación errónea acerca de las conexiones entre las distintas formas de expresar la recta.</i>
CCEn₁	<i>Saber diseñar una actividad original con el objetivo de que los alumnos adquieran unos conocimientos sobre un tópico matemático (que promueve el trabajo colaborativo, integra el uso de software dinámico y propicia la relación entre ecuaciones y elementos de la recta).</i>
CCEn₂	<i>Saber que las distintas ecuaciones de la recta que escoge para desarrollar la actividad, son claves para crear conexiones entre las distintas formas analíticas de expresar la ecuación de una recta.</i>
CCEn₃	<i>Saber elegir una recta adecuada para facilitar las conexiones entre las distintas formas de expresar la recta.</i>
CCEn₄	<i>Conocer la potencialidad de un Software dinámico para presentar un contenido.</i>

Tabla 1. Descriptores asociados a los subdominios CCEn y CCEs

Conclusiones

La observación de la práctica nos permitió inferir a partir de la acción la posible existencia de MKT de José Luis; la posterior entrevista, donde él mismo reflexiona sobre su práctica, nos permitió corroborar parte del MKT que inferíamos, profundizar en éste, comprobando que gran parte de su acción se basa en un rico MKT, así como conocer sus intenciones educativas. La combinación del MKT que surge de su declaración y el MKT que se desprende de la acción nos ha permitido profundizar en la comprensión de un conocimiento al que no podíamos acceder desde la mera observación. Estos resultados refuerzan las limitaciones de estudiar el MKT del profesor sólo a partir de la observación de su práctica.

Los descriptores aportados por Sosa (2010a y b) para el MKT en Bachillerato nos han supuesto una referencia útil, como sensibilidad teórica con la que accedemos al análisis, dado nuestro interés en que los descriptores surgieran de la propia comprensión del MKT del profesor estudiado, captando de este modo la idiosincrasia del conocimiento que sustenta su acción.

Los resultados de nuestro trabajo corroboran el interés de investigar sobre el conocimiento profesional, y en concreto el conocimiento matemático para la enseñanza, de profesores expertos, como aquellos que poseen un rico MKT. La caracterización de su conocimiento es útil como referente del conocimiento profesional deseable (de cara a la formación de profesores, por ejemplo) y como referente sobre otros modos fundamentados de enseñar el contenido. Estas investigaciones pueden ser a su vez de interés para otros profesores, para reflexionar sobre su MKT. Este tipo de estudios serían complementarios a otros trabajos sobre el MKT de profesores a partir de su práctica, que detectan también carencias y sirven de punto de partida para el propio desarrollo del profesor estudiado (Ribeiro y Carrillo, 2011).

Bibliografía

- Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Bardin, L. (1986). *El análisis del contenido*. Madrid: Akal.
- Colás, M.P. y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa*. Sevilla: Ediciones Alfar.
- Fourez, G. (2008). *Cómo se elabora el conocimiento: La epistemología desde un enfoque socioconstructivista*. Madrid: Narcea.
- Ribeiro, C.M. y Carrillo, J. (2011). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 513-522). Ciudad Real: SEIEM/Universidad Castilla-La Mancha.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.
- Sosa, L. y Carrillo, J. (2010a). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en Bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM/Universitat de Lleida.

- Sosa, L. (2010b). *Conocimiento matemático para la enseñanza en Bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva.
- Strauss, A. y Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. Thousand Oaks, C.A.: Sage.

COGNICIÓN, AFECTIVIDAD Y DIVERSIDAD. UNA PROPUESTA DE DETERMINACIÓN DE PERFILES MATEMÁTICOS EN LOS ESTUDIANTES

COGNITION, AFFECTIVITY AND DIVERSITY. A PROPOSAL FOR DETERMINING STUDENT PROFILES IN MATHEMATICS

Cauich, A. R., Hidalgo, S.

Universidad de Valladolid

Resumen

A partir del reconocimiento de la diversidad como hecho universal y necesario, se interpreta su planificación en el ámbito educativo como factor fundamental para favorecer una enseñanza personalizada dentro de un marco de pleno respeto a las diferencias. Para ello, el educador requerirá un “conocimiento” del sujeto del aprendizaje más allá del estadio evolutivo o de la fase de desarrollo del pensamiento matemático en la que se encuentre el alumno. La realidad del estudiante se sustenta, además, en un conjunto de variables de tipo cognitivo y emocional (relacionadas significativamente con el rendimiento matemático) que podríamos denominar el perfil matemático del alumno. En este contexto, pretendemos aportar un modelo de clasificación de los estudiantes (en subgrupos de aproximación) en atención a sus distintos perfiles matemáticos.

Abstract

Upon recognition of diversity as a universal and necessary fact, planning of diversity in education is interpreted as a fundamental factor to foster personalized teaching within a framework of full respect for differences. For this, the educator will need “knowledge” of the subject of learning beyond the developmental stage or developmental phase of mathematical thinking of the student. The reality of the student is also supported by a set of cognitive and emotional variables (significantly associated with mathematical performance) that might be called the mathematical profile of the student. In this context, we intend to provide a classification of students (in approximate subgroups) in response to their various mathematical profiles.

Palabras clave: *Atención a la diversidad, cognición y afectividad, destrezas básicas, perfiles matemáticos, subgrupos de aproximación.*

Key words: *Attention to diversity, cognition and affectivity, basic skills, mathematical profiles, approximate subgroups.*

Antecedentes. Marco teórico

Desde que en 1988 la NCTM redactara el inicial borrador de los principios y estándares curriculares, la percepción sobre la educación matemática dio un giro considerable y sus concepciones fueron el referente de la nueva orientación adoptada en Europa (PISA, 2003). Así, las últimas leyes orgánicas de educación se han hecho eco de esta nueva corriente conceptual y contemplan la formulación de los currículos matemáticos, tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria Obligatoria, en términos de competencias y en atención a la diversidad.

En el primero de los principios dictados por la NCTM se proclama que *todos los estudiantes, sin importar sus características, antecedentes o circunstancias personales, pueden aprender matemáticas cuando tienen acceso a una enseñanza de alta calidad*. Igualdad no significa que todos los estudiantes deban recibir una enseñanza idéntica. Por el contrario, la igualdad exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes.

Recientemente en el XIV Simposio de la SEIEM se reservó un espacio para la diversidad en el Seminario II: Educación Matemática y Diversidad. En ese seminario De la Torre (2010) hace un repaso a los trabajos de investigación en esta área que nos sirven de referencia para la consideración de los antecedentes sobre el particular, Gómez-Chacón (2010) aborda la diversidad desde el punto de vista de los afectos y las actitudes. Es punto de referencia de nuestra acepción sobre las actitudes hacia las matemáticas y en la interacción cognición afecto de los estudiantes. Bruno y Noda (2010) abordan el tema de la diversidad en el caso particular de las necesidades educativas especiales.

La teoría de las inteligencias múltiples de Gardner (1983) despertó el interés en el ámbito educativo. Para Gardner es absurdo que se siga insistiendo en que todos los alumnos aprendan de la misma manera. La misma materia se podría presentar de formas muy diversas, permitiendo al alumno asimilarla partiendo de sus capacidades y aprovechando sus puntos fuertes. A partir de esa teoría, Marker y Nielsen (1996) diseñaron una serie de principios sobre la planificación del currículo y la práctica. Aldámiz (2000) señala la importancia de la atención a la diversidad como eje central del desempeño educativo y no identificar este concepto solamente con alumnos con necesidades especiales; Masip (2000) propone una educación adaptada a las capacidades del alumno y flexibilidad en los objetivos educativos; Pérez (2003) afirma que la educación para la diversidad se debe fundamentar en el desarrollo máximo de todas las potencialidades del alumno.

En esta misma línea, García (2008), constata las dificultades de la enseñanza debido a la heterogeneidad en las aulas. Así, forma grupos de trabajo entre alumnos homogéneos lo que supuso un nuevo acomodamiento didáctico: proponer tareas más sencillas para unos alumnos y más difíciles para otros y hacer un guión de trabajo con actividades adaptadas para todos los alumnos.

La actitud se define como una predisposición evaluativa (positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento (NCTM, 1991). Últimamente se ha producido un incremento de investigaciones en lo que se ha dado en llamar dominio *afectivo* o *alfabetización emocional*. Véase para su confirmación Gómez-Chacón (2010). En ellas se ponen de manifiesto la importancia de conocer las

creencias, actitudes y emociones que experimentan los individuos, durante su aprendizaje,

Para Gómez- Chacón (2000), la relación que se crea entre los factores (emocionales, actitudes y creencias) y el rendimiento es recíproca: es decir, la experiencia de aprendizaje del estudiante le causa distintas reacciones e influye en la formación de sus creencias, por otra parte, las creencias del estudiante tienen como resultado directos comportamientos en situaciones de aprendizaje y en su capacidad de aprender.

Metadollidou y Vlachou (2007) descubren que los alumnos de Educación Primaria con mejores estrategias y una motivación intrínseca alta obtienen mejores rendimientos.

Hannula (2002), estudia la cognición y la emoción de los alumnos hacia las matemáticas y la interacción entre ambos y amplía los modos de categorización de las actitudes matemáticas. En esta misma línea de establecimiento de categorías Leder (2002), realiza estudios sobre sistemas de creencias matemáticas en el estudiante.

Ma y Xu (2004), utilizando un modelo de ecuaciones estructurales, establece una relación de causalidad entre las actitudes matemáticas y el rendimiento siendo este último el determinante del primero, al menos trabajando con alumnos de secundaria. Sin embargo, esta relación de causalidad desaparece con alumnos de buen rendimiento, en este caso, es difícil determinar qué es causa y qué es efecto.

Autor y otros (2008) tratan sobre el tema anterior, destacando entre otros aspectos que la correlación entre niveles de ansiedad y notas es alta e inversa, esta misma correlación se mantiene al comparar los niveles de ansiedad y actitudes positivas hacia las matemáticas. Además destacan una fuerte caída en las actitudes positivas hacia las matemáticas en todos los estudiantes conforme éste va avanzando en edad desde los 11 años hasta los 15 años.

En la misma línea, Watt (2000) observa un cambio negativo de actitudes matemáticas al avanzar el nivel educativo. Utsumi y Mendes (2000) también encontraron que a medida que el alumno pasa de la enseñanza básica a la enseñanza media su actitud hacia las matemáticas se vuelve más negativa. Los alumnos con 6, 11 y 12 años presentaron actitudes positivas; mientras que los alumnos con 16 años o más expresaron actitudes más negativas hacia las matemáticas.

Las aptitudes primarias se relacionan con la inteligencia en su sentido más literal, (“intus legere”, “leer dentro”), capacidad de leer el interior. Las capacidades numérica, espacial, de razonamiento deductivo y de razonamiento inductivo, si nos referimos a aptitudes primarias para las matemáticas, son las más consideradas.

Neubert y Binko (1992) enfatizan la necesidad de trabajar el razonamiento inductivo en secundaria y proponen tres términos para alcanzarlos: “Aprender el contenido de la disciplina, practicar estrategias de razonamiento, y desarrollar la seguridad en la habilidad de razonamiento”. Ortiz (1997) construye y valida, en educación primaria, un modelo que explique y justifique la evolución de estrategias inductivas con números naturales y en particular series numéricas que se determinan utilizando operaciones de aritmética elemental. Autor y otros (1999), encuentran una relación significativa entre aptitudes básicas para las matemáticas y rendimiento escolar. Además en un estudio evolutivo descubren una disminución en la capacidad de cálculo numérico y un aumento en la visión espacial en los escolares.

Así pues, cognición y afectividad conforman un binomio con probadas interrelaciones significativas que no debe disociarse. Pretendemos recoger este hecho para realizar un modelo de clasificación de alumnos en “subgrupos de aproximación” que permita actuar sobre la diversidad en atención a los distintos perfiles matemáticos detectados en los estudiantes. La observación de los distintos perfiles matemáticos representaría un elemento fundamental para la toma de decisiones en el diseño y organización del proceso de enseñanza-aprendizaje en el centro receptor.

Objetivos

- Contrastar la interacción entre los dominios cognitivo y afectivo-emocional hacia las matemáticas de los estudiantes al finalizar la educación primaria.
- Diseñar un modelo de clasificación de los alumnos en “subgrupos de aproximación” que diferencie la globalidad de los estudiantes utilizando las variables de tipo cognitivo y afectivo-emocional configuradas.
- Determinación de perfiles matemáticos de los estudiantes.

Muestra

La selección de la muestra se realizó tomando los colegios como unidad de asignación sobre la aleatoriedad por tipo de centro (público/concertado). Los 5 colegios que participaron fueron seleccionados de manera aleatoria (muestreo aleatorio simple). La muestra está constituida por 430 alumnos, con escolares de 5° y 6° de primaria en el curso académico 2009-2010.

Tabla1. Distribución de la muestra por edades y curso.

Edades	Curso		
	5°	6°	Total
10	158		158
11	56	145	201
12		66	66
13		5	5
Total	214	216	430

Materiales

Para el estudio del objetivo planteado, se ha utilizado como material de evaluación de aptitudes primarias el test factorial AMPE-F o test factorial de inteligencia (Secadas 1989) del que se han tomado las escalas N o de cálculo, E o espacial y R razonamiento. Se trata de un test fiable y de alta validez y del que se posee baremos de años pasados. Adicionalmente para la parte inductiva utilizamos una prueba distinta, pero similar al AMPE, que mide las mismas aptitudes de razonamiento en este caso razonamiento inductivo.

Para evaluar la dimensión afectiva en matemáticas hemos optado por un cuestionario con 31 ítems utilizado y contrastado Autor y Otros, (1999). Subdivididos en seis apartados característicos: atribuciones de causalidad, gusto o simpatía por las matemáticas, autoconcepto matemático, percepción de dificultad y de utilidad de las matemáticas, actitudes y creencias sobre el profesor y actitudes y creencias sobre la familia. Para medir el conocimiento matemático hemos utilizado una prueba de conocimientos con 20 ejercicios para cada nivel educativo. Las preguntas están

agrupadas en cinco bloques: Cálculo directo, Comprensión lógica, Cálculo reglado, Geometría y Medida.

Procedimiento. Metodología

Se procedió a la aplicación de las herramientas de evaluación siguiendo los pasos: 1. Gestión del trabajo de campo, 2. Aplicación en el aula (en tres momentos diferenciados los test AMPE-F, la prueba de conocimientos y el cuestionario actitudinal), 3. Identificación de los datos para su tratamiento informático con el paquete SPSS 15.0. La determinación de los subgrupos de aproximación se realizó como sigue:

Consideramos, para cada sujeto, la media aritmética entre el valor promedio obtenido en las pruebas de destrezas básicas (una vez homogeneizadas las escalas en el intervalo 0-10) y la calificación de la prueba de conocimientos. Así, disponemos de un valor numérico para cada estudiante que nos permitirá ordenar esos valores de mayor a menor. Queremos dejar claro que en la determinación de subgrupos debe primar la proximidad entre los valores mayor y menor de cada conjunto concreto y, por tanto, el número de esos subgrupos dependerá de los resultados. Es decir, hablamos de modelo “ad hoc”. En el ejemplo que presentamos hemos tomado como perfil cognitivo súper (PCS) a los alumnos con valores mayores o iguales que 8, alto (PCA) con valores mayores o iguales que 6 y menores que 8, medio (PCM) con valores mayores o iguales que 4 y menores que 6 y bajo (PCB) con valores menores que 4.

Por otra parte, elegimos como variables más representativas en el dominio afectivo-emocional: el agrado o rechazo hacia las matemáticas, el autoconcepto, la percepción de facilidad o dificultad de las matemáticas y la percepción de utilidad. Así, cada alumno presentará en positivo 4, 3, 2, 1 o 0 de esos atributos emocionales.

Convenimos en establecer los niveles o perfiles emocionales: óptimo (PEO) (aquellos estudiantes con los 4 atributos positivos); regular (PER) (con 3 o 2) y pésimo (PEP) (con 1 o 0 atributos).

Finalmente, cruzando los perfiles cognitivos con los emocionales obtenemos los 12 subgrupos de aproximación o perfiles globales: (PGSO), (PGSR), (PGSP), (PGAO), (PGAR), (PGAP), (PGMO), (PGMR), (PGMP), (PGBO), (PGBR), (PGBP). La realidad de cada situación nos determinará la constitución de cada uno de esos perfiles, su cardinal o la posible inexistencia de alguno de ellos

Análisis de datos y resultados

Resultados de la prueba de conocimientos

Los resultados de la prueba de conocimientos los presentamos en la tabla 2, por curso. Las notas fueron baremadas en escala de 0 a 10.

Tabla2. Resultados de la prueba de conocimiento

	Curso	
	5º	6º
Media	6,78	6,72
D.T	1,82	1,80
Total	214	216

Como indica la tabla 2, los resultados reflejan que los escolares de 5° y 6° curso aprueban la asignatura de matemáticas con una calificación cercana al notable. No existe diferencia considerable entre las medias de ambos cursos.

Resultados de los test de aptitudes básicas

Presentamos los resultados obtenidos en cada una de las pruebas aptitudinales.

Tabla 3. Resultados de las aptitudes básicas por edades

	CALCULO			ESPACIAL			DEDUCTIVO			INDUCTIVO		
	10 Años	11 Años	12 Años	10 Años	11 Años	12 Años	10 Años	11 Años	12 Años	10 Años	11 Años	12 Años
Media	12,71	13,64	13,91	23,70	26,41	29,58	18,20	20,14	19,14	18,88	19,97	20,40
D. Típica	5,50	6,24	6,43	11,76	11,49	14,58	4,92	4,44	5,36	3,04	2,97	3,15

Comparando estas medias con los valores baremados en el manual de aptitudes primarias AMPE, y si tomamos como individuo de nuestra muestra el que obtuviera como resultado los valores de las respectivas, constatamos que: nuestros tipos de alumnos superan la capacidad espacial y razonamiento deductivo en todas las edades, a los escolares analizados en los test de destrezas básicas AMPE.

En relación al cálculo numérico, los escolares del AMPE superan en todas las edades a nuestro tipo de alumno. Estos resultados indican un cambio importante en los perfiles aptitudinales de los escolares actuales.

Resultados de las correlaciones

Las correlaciones entre las nueve variables seleccionadas para la determinación de perfiles se detallan en la matriz de correlaciones y los niveles de significación que resumimos en la tabla 4.

Tabla4. Matriz de correlaciones de las escalas.

	conocimiento	cálculo	Espacial	Deductivo	Inductivo	Gusto	Autoconcepto	Percepción de facilidad o dificultad	Percepción de utilidad o poca utilidad
Conocimiento correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	1 422								
Cálculo correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	,344** ,000 412	1 420							
Espacial correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	,223** ,000 412	,238** ,000 420	1 420						
Deductivo correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	,427** ,000 412	,453** ,000 420	,392** ,000 420	1 420					
Inductivo correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	,273** ,000 412	,229** ,000 420	,327** ,000 420	,441** ,000 420	1 420				
Gusto correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	,180** ,000 406	,125* ,011 414	,064 ,194 414	,107* ,030 414	,141** ,004 414	1 414			
Autoconcepto correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	,194** ,000 407	,205** ,011 415	,182** ,000 415	,150** ,002 415	,138** ,005 415	,393** ,000 415	1 413		
Percepción de facilidad o dificultad correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	,294** ,000 388	,126* ,012 396	,120* ,017 396	,114* ,023 396	,078 ,121 396	,439** ,000 390	,317** ,000 389	1 396	
Percepción de utilidad o poca utilidad correlación de Pearson Sig. (bilateral) N	,015 ,764 405	,059 ,232 412	-,038 ,438 412	,052 ,289 412	,031 ,534 412	,150** ,002 406	,192** ,000 405	,067 ,185 391	1 412

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

* La correlación es significativa al nivel 0,05 (bilateral).

Como indica la tabla 5 de la matriz de correlaciones la mayoría de ellas resultan positivas y significativas a nivel 0,01 y 0,05, estadísticamente. Excepto en la percepción de utilidad que no resulta significativa.

El cruce de los datos obtenidos en la prueba de conocimiento y aptitudes y el cuestionario actitudinal que determinan los perfiles señalados se observan en la tabla 5.

Tabla5. Determinación de Perfiles Matemáticos

Perfil Emocional	Perfil Cognitivo				Total
	Bajo	Medio	Alto	Súper	
Pésimo	6 (1,4%)	10 (2,4%)	16 (3,8%)	1(0,2%)	33 (7,9%)
Regular	5 (1,2%)	41 (9,8%)	79 (18,8%)	10 (2,4)	135 (32,1%)
Óptimo	3 (,7%)	49 (11,7%)	169 (40,2%)	31 (7,4%)	252 (60,0%)
Total	14 (3,3%)	100 (23,8%)	264 (62,9%)	42 (10,0%)	420 (100,0%)

Conclusiones

Las correlaciones localizadas entre las variables aptitudinales y actitudinales junto a nuestra prueba de conocimientos son significativas estadísticamente. Por tanto, el modelo elegido recoge una “proximidad académico- matemática” entre los componentes de cada subgrupo.

Los altos valores obtenidos en los perfiles cognitivos (el 73% de los alumnos son de perfil cognitivo alto o súper) y emocionales (el 60% son de perfil emocional óptimo, sólo el 7,6% son de perfil emocional pésimo) nos confirma que el fracaso escolar en matemáticas se produce con posterioridad a la Educación Primaria.

Los estudios que demuestran un significativo descenso en el perfil emocional matemático localizado en el primer ciclo de Educación Secundaria nos confirman la necesidad de actuar diferenciadamente sobre los distintos perfiles observados en la etapa inmediatamente anterior.

Los dos perfiles extremos, el “súper-matemático” (PGSO) y el “anti-matemático” (PGBP) tienen presencia en la clasificación realizada, quintuplicando los primeros a los segundos. Los perfiles “antagónicos”: perfil emocional óptimo y cognitivo bajo o medio (12,5% del total) y perfil emocional pésimo y cognitivo súper o alto (4% del total) también aparecen en el modelo. Estos cuatro tipos de perfiles determinan, por sus peculiaridades, subgrupos “de atención”.

La cuarta parte de los alumnos de la muestra tienen perfil emocional regular o pésimo y cognitivo medio o bajo (los que podríamos denominar “malos matemáticos”) y, por tanto, parecería natural tomar medidas de adaptación o corrección para ellos.

El elevado número de alumnos (la mitad de los integrantes de la muestra) que presentan un perfil emocional óptimo y cognitivo súper o alto, confirma que el sistema educativo no es capaz de mantener de manera natural a una buena parte de estos potenciales “buenos matemáticos”.

En suma, una clasificación de los estudiantes en agrupaciones de proximidad permitirá implementar didácticas diferenciadas en consonancia con la comentada declaración de la UNESCO: “*se deben diseñar los sistemas educativos y desarrollar los programas de modo que tengan en cuenta toda la gama de las diferentes características y necesidades de los escolares*”.

Referencias

- Aldámiz, M. y otros (2000). *¿Cómo hacerlo? Propuestas para educar en la diversidad*. Graó. Barcelona.
- Autor y otros (1999).
- Autor y otros (2008).
- Bruno, A. y Noda, A. (2010). Introducción al Seminario II sobre Educación Matemática y diversidad. En M.M.Moreno. A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.141-162). Lleida: SEIEM
- De la Torre, E. (2010). Introducción al Seminario II sobre Educación Matemática y diversidad. En M.M.Moreno. A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 117-119). Lleida: SEIEM
- Gadner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.
- García, A. (2008): *Educación matemática atendiendo a la diversidad, Análisis de una metodología específica*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.
- Gómez Chacón, I. M^a (2010). Introducción al Seminario II sobre Educación Matemática y diversidad. En M.M.Moreno. A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM

- Gómez Chacón, I.M^a (2000). *Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.
- Hannula M. (2002). Attitude toward mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 25-46.
- Leder, G.C., Pehkonen, E. y Töner, G. (eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Ma, X., y Xu, J. M. (2004). The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis. *Journal of Adolescence*, 27(2), 165-179.
- Marker C.J y Nielson, A.B. (1996). Curriculum developments and teaching strategies for gifted learners. Austin, TX. PRO-ED.
- Masip, M y Rigol, A. (2000). El aula, escenario de la diversidad. ¿Cómo hacerlo? Propuestas para educar en la diversidad. Graó. Barcelona.
- Metadollidou, P. y Vlachou, A. (2007.). Motivational beliefs, cognitive engagement, and achievement in language and mathematics in elementary school children. *International Journal of Psychology*, 42: 2-15.
- NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. S.A.E.M. Editado por THALES. Sevilla.
- Neubert, G.A y Binko, J.B (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washinton D.C: National Education Association.
- Ortiz, A (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada España.
- Pérez, L.F. (2003). El aula inteligente y la educación en la diversidad. En el aula inteligente. Nuevas perspectivas. (Dirigido por F. Segovia). Espasa Calpe, S.A. Madrid.
- Utsumi, M.C. y Mendes, C. R. (2000). Researching the attitudes towards mathematics in basic education. *Educational Psychology*, 20, (2), 237- 243.
- Watt, H. M.G (2000). Measuring attitudinal change in mathematics and English over 1st year of junior high school: a multidimensional analysis. *The Journal of Experimental Education*, 68 (4), 331-361.

LA IDENTIDAD COMO PRODUCTO DEL APRENDIZAJE EN LA PRÁCTICA DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS EN PROFESORES DE PRIMARIA

THE IDENTITY AS LEARNING PRODUCT IN MATHEMATICS TEACHING PRACTICE IN ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS

Chávez, Y. ⁽¹⁾, Llinares, S. ⁽²⁾

Cinvestav, México, DF ⁽¹⁾, Universidad de Alicante ⁽²⁾

Resumen

Esta investigación estudia la identidad como producto del aprendizaje en la práctica situada de enseñar matemáticas de cuatro profesores de primaria en México. Las características de la identidad de “ser profesor de matemáticas” se infieren desde la trayectoria de formación y la práctica de los profesores. Los resultados indican que los profesores construyen y reconstruyen su identidad a partir de su práctica cotidiana lo que supone la negociación de maneras de realizar una práctica en un contexto a partir de tres aspectos: (i) El significado y sentido que los profesores atribuyen a las experiencias que acumulan en su trayectoria de formación, (ii) a la acción mediada con las tareas y los instrumentos que utilizan, y (iii) a la interacción entre el significado y sentido y la acción mediada al gestionar la clase de matemáticas.

Abstract

This research analyzes the identity as a result of the process of learning within the teaching mathematics situated practice of four elementary school teachers in Mexico. The identity traits of “being a mathematics teacher” are inferred from the experiences improved during the career path and the situated teachers practice. The results obtained indicate that teachers set up their identity from the every day practice, assuming a negotiation a variety of ways handling the practice in a specific context from three different aspects (I) The significance and sense that teachers give to experiences acquired in their career path. (ii) To the mediated action with the tasks and the instruments used from the given meaning and sense. (iii) To the interaction between the meaning, sense and the mediated action when the mathematic class is conducted.

Palabras clave: Profesor, identidad, aprendizaje situado, práctica.

Key words: Teacher, identity, situated learning, practice.

Introducción

En los últimos años las investigaciones sobre el profesor de matemáticas han incrementado su foco de atención en la práctica del profesor (Ponte y Chapman, 2006). En muchas de estas investigaciones se abordan tópicos sobre el aprendizaje del profesor y sobre la manera en que construye conocimiento que le permita enseñar matemáticas de manera eficiente (Escudero y Sánchez, 2007). Estas investigaciones abordan de manera implícita o explícita teorías que fundamentan el aprendizaje de los profesores en la práctica. Por otra parte, las investigaciones sobre cómo aprenden las personas en ambientes no formales, particularmente en situaciones de trabajo (Lave y Wenger 2003; Wenger 2001) han ofrecido un marco de explicación sobre el aprendizaje como participación en la práctica. Estas teorías ofrecen un modo de interpretar el aprendizaje de los docentes como participación social y en construir *identidades* en relación con esas comunidades sociales. Para Penalva, Rey y Llinares (2011) la identidad en la práctica está definida socialmente como una forma de elegir opciones, llevar a cabo acciones, y valorar experiencias para participar en la consecución de una tarea. La identidad determina lo que se hace y cómo se interpreta esta actividad. La práctica supone negociar maneras de ser una persona en un contexto mediante la forma de comprometerse mutuamente (Wenger, 2001). En particular, Beijaard, Meijer y Verloop (2004) indican que la identidad profesional es un proceso continuo de interpretación y reinterpretación de experiencias que subraya la idea de que el aprendizaje es permanente (Contreras, Penalva, y Torregrosa, 2011).

En esta investigación abordamos *el aprendizaje* de los profesores de Educación Primaria en servicio, a partir de definir y caracterizar su *identidad* en la práctica de enseñar matemáticas. Un elemento central en esta investigación es la importancia del *contexto* en el que se lleva a cabo la práctica docente enmarcada en un universo sociocultural, donde los docentes dan *significado* y *sentido* a lo que realizan en el aula. El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo se configura la identidad de los profesores, entendida como el producto del aprendizaje vinculado con la práctica situada. Ello implica analizar la práctica cotidiana que se desarrolla en un contexto como producto de una trayectoria previa y los mecanismos que lo han configurado. Para ello haremos uso de tres ideas:

- Significado y Sentido (proceso interpretativo). El significado que los profesores atribuyen a las actividades que desarrollan en el aula puede tener referentes en el pasado pero en el día a día se produce una nueva situación, es decir se producen significados que pueden ampliar, desviar, ignorar, reinterpretar, modificar o confirmar dicha experiencia, por lo que el significado que atribuimos a estas prácticas conlleva un proceso de negociación (Wenger, 2001) de estos significados. La negociación de significados se hace más evidente cuando vivimos una experiencia interesante, cuando participamos en una actividad que implica un desafío o un reto. El hecho de trabajar en una escuela con cierta organización administrativa, no implica que se impongan los significados de la institución, tampoco que los profesores construyamos significados independientes a este mundo institucional. Lo que se da es una negociación de significados dinámico en un contexto y tiempo determinado, en esta negociación hay una interpretación y acción.
- Acción mediada (tareas e instrumentos). Como la participación que permitirá otorgar significado y sentido a la práctica docente a partir de los instrumentos utilizados y cómo se usan durante la enseñanza de las matemáticas, (Llinares,

1999). Estos instrumentos son artefactos tanto conceptuales como materiales (Cole, 1999).

- Interacción (gestión de la clase) La interacción supone la participación, en relación con otras personas y una manera de tomar parte. Es una experiencia social de participación en una empresa a partir de afiliaciones, por lo tanto es social, cuya característica es la posibilidad de un reconocimiento mutuo. Cuando interactuamos con otras personas reconocemos en los otros algo de nosotros mismos y ese reconocimiento tiene que ver con la capacidad de negociar significados, por lo que la interacción supone conformar una identidad (Wenger, 2001).

La pregunta de investigación es:

¿Cómo se configura la identidad de los profesores como producto del aprendizaje vinculado con la práctica situada de la enseñanza de las matemáticas?

Método

Participantes

Cuatro profesores de 6º educación primaria de diferentes contextos en México: Dos escuelas ubicadas en una zona urbana –una privada y una pública- y dos escuelas ubicadas en comunidades rurales, a una de ellas asiste población indígena.

Instrumentos

Los instrumentos de recogida de datos fueron una entrevista semiestructurada en profundidad (Taylor y Bogdan, 1984) donde a partir de un guión inicial se plantearon a los maestros cuestiones con relación a

- Datos personales,
- Formación,
- Enseñar matemáticas,
- Los niños y las matemáticas,
- Nivel de aprendizaje en matemáticas,
- La comunidad.

Además, se observaron y videograbaron dos clases de matemáticas de cada uno de ellos. Para la primera grabación se pidió a los profesores que eligieran una lección relacionada con el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico ya que la reciente reforma curricular en México (2009) reorganizó este eje en educación primaria. Para la segunda observación los investigadores sugerimos un mismo guión de clase para los cuatro profesores sobre la resolución de problemas con información dada en tablas y gráficas para que los profesores la adaptaran a su contexto. Todas las observaciones fueron grabadas en video y posteriormente los videos fueron editados. A partir del visionado de los videos de cada profesor se preparó un nuevo guión de entrevista con el objetivo de que los profesores pudieran comentar, justificar o aclarar lo sucedido durante cada una de las dos lecciones. (Figura 1)

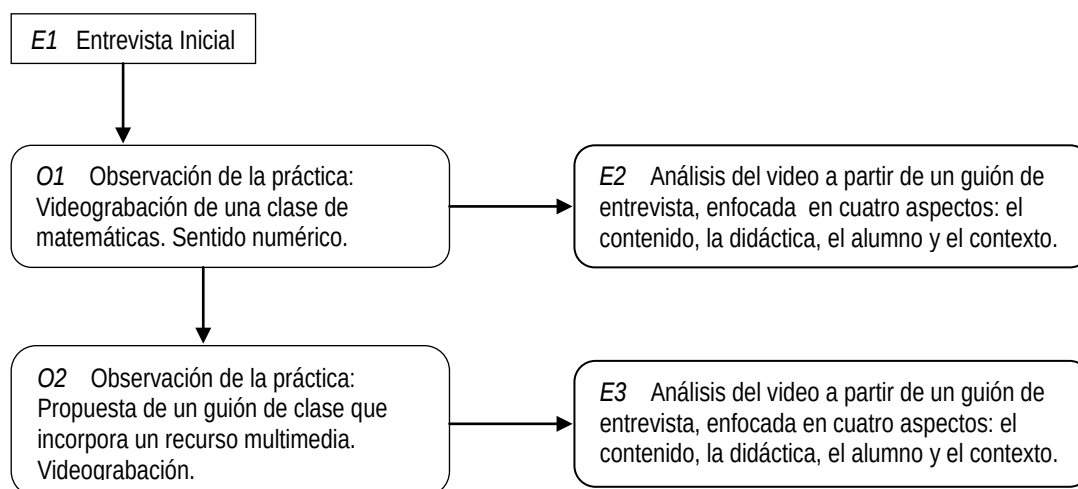


Figura 1. Esquema de la recogida de los datos

Análisis

El análisis de las entrevistas se realizó considerando como unidad de análisis las frases o párrafos que expresaban una idea de manera coherente. En un primer momento se realizó una lectura general en la que se fueron identificando las unidades de análisis (párrafos que expresaban alguna idea en relación a la práctica del profesor). Haciendo una aproximación mixta a partir de categorías iniciales se agregaron otras deducidas de manera inductiva a partir del análisis del discurso en dos dimensiones (Tabla 1).

Tabla 1. Estructura del sistema de categorías generado con las dimensiones y sus apartados

<i>Dimensión 1</i>	• Percepción del profesor sobre su conocimiento de la enseñanza, de las matemáticas, del aprendizaje de sus alumnos y del contexto
	• Trayectoria formativa
<i>Dimensión 2</i>	• Representaciones sobre la naturaleza de las matemáticas (foco sentido numérico y pensamiento algebraico) • Conocimiento necesario para enseñar matemáticas • Contexto administrativo: Las matemáticas en la reforma de 2009
	• Sobre la clase de matemáticas: estructura, actividades, organización, planificación, interacción maestro – alumnos

El análisis de la práctica se llevó a cabo en dos fases. En un primer momento se hizo una revisión general del material que nos permitió reducir el volumen de datos. En una segunda fase se integraron los datos identificando episodios de las clases, la transcripción de la interacción correspondiente a ese episodio, las tareas e instrumentos (problemas planteados y discurso matemático generado por el profesor al interaccionar con sus alumnos) utilizados y la justificación que se tiene para cada segmento de la clase. Esta integración se realizó considerando dos niveles

(i) el análisis del discurso del profesor, lo que permitió identificar las configuraciones a partir de sus representaciones sociales, entendidas estas de manera general como la reconstrucción de la realidad (Gorgorio y Abreu, 2009), a partir de la cual los profesores atribuyen significado y sentido a los distintos elementos que intervienen en su práctica, y (ii) triangulamos los datos obtenidos con las observaciones de la práctica con las entrevistas realizadas sobre la misma.

En el segundo nivel de análisis y a partir de los *episodios de clase*, entendido este como un segmento espacio temporal donde el profesor gestiona la clase haciendo uso de tareas e instrumentos, triangulamos (Taylor y Bogdan, 1984) con los datos obtenidos en las entrevistas donde los profesores atribuyen *significados y sentidos* a la práctica realizada mediante una *acción mediada* (tareas e instrumentos) que es *interpretada* (significado y sentido). Para presentar los resultados hacemos uso de la idea de viñeta (Gavilán, García, Llinares, 2007), (Figura 2).

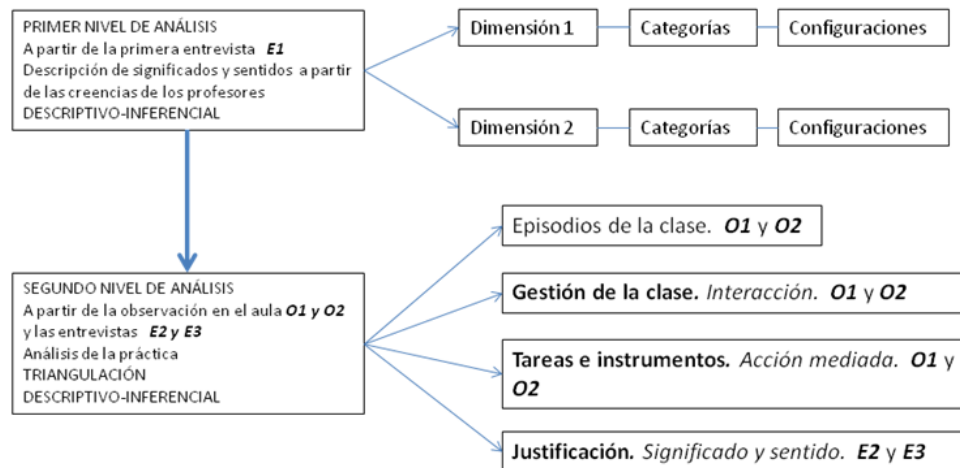


Figura 2. Esquema de los niveles de análisis de la investigación

Resultados

En primer lugar exponemos los resultados relativos a las representaciones y a las fuentes de aprendizaje que los maestros identifican. En segundo lugar exponemos las características del aprendizaje vinculado con la práctica situada. En esta comunicación sólo hacemos referencia a la maestra Ofelia quien trabaja en una escuela primaria oficial ubicada en la Ciudad de México, a partir de un estudio de caso (Taylor y Bogdan, 1984).

Trayectorias de aprendizaje: hacia la configuración de una identidad

La maestra Ofelia (MO) ingresó a la Escuela Nacional de Maestros (Normal) durante 4 años, para ser profesora de educación primaria. Una vez en servicio Ofelia ha participado en diversos cursos y talleres. Un curso que menciona como importante en su formación fue sobre estilos de aprendizaje. Actualmente participa en un diplomado sobre la Reforma donde abordan cuestiones sobre las matemáticas. Ofelia ha trabajado en esta escuela los últimos dos años y se le reconoce como buena maestra. Le preocupa la educación integral del niño y no tanto la materia específica de las matemáticas.

Los dominios del conocimiento

Ofelia manifiesta que las matemáticas que saben son suficientes para la enseñanza de los contenidos del programa de matemáticas para sexto año de primaria e indica que a los estudiantes, algunos tópicos les resultan difíciles de aprender, lo que le lleva a centrar su atención sobre los procesos de aprendizaje, como una manera de llevar a mejorar su práctica. Además, Ofelia expresa los compromisos morales que implican la formación de niños y la importancia de adaptarse a sus expectativas más que cuestiones sobre la manera en la que aprenden.

Identificando fuentes de aprendizaje

Las experiencias de Ofelia a lo largo de su historia escolar se convierten en conocimiento que orienta la toma de decisiones en su práctica docente. A estas experiencias se incorporan otras que reproducen las experiencias que obtuvo en su formación inicial y en la formación continua. Ofelia identifica algunos conocimientos que provienen principalmente de:

- La práctica.

MO: Bueno, lo básico es que tú domines el contenido y ya la experiencia te ayuda a decir “Esto me ayudó con aquéllos niños, lo tomo porque este chico tiene características similares a aquéllos y esto me puede servir” yo siento que la experiencia es muy importante, porque todos los días ves cosas con los niños, todo eso te ayuda, hasta la experiencia de la compañera.

- Un aspecto particular de la práctica como fuente de aprendizaje, está vinculada a la reflexión sobre la práctica.

MO: Bueno me imagino al grupo y luego pienso qué es lo que voy a tomar para que ellos me puedan entender y planearlo y a veces digo “voy a hacer este ejercicio de esta manera” y luego digo “así no me van a entender” Veo qué herramientas voy a utilizar para impartir la clase, para que ellos me entiendan. Sí me imagino al grupo antes y busco qué es lo que voy a llevar, porque no puedo llegar a impartir una clase si no domino completamente ese tema, entonces lo que hago es primero yo, entenderlo y buscar de qué manera se me hizo más fácil entenderlo.

- De materiales impresos. La maestra atribuye un significado de autoridad a los libros.

MO: Yo trato de enseñarlas [las matemáticas] como me formé, pero veo que no solucionan, entonces veo el libro, los leo, veo el tipo de enfoque que le dan a la lección y de ahí me voy. La verdad que prefiero guiarme por el libro, cuando tienes dudas es mejor seguir paso a paso el libro que andar inventando. ¡Ni modo que el libro te diga mentiras!

Para la maestra Ofelia no hay una sola fuente de conocimiento, sino que, los elementos que orientan su práctica proceden de diversas experiencias y los utiliza de acuerdo con el significado que le atribuye a la situación o la actividad que está llevando a cabo en un momento determinado (proceso interpretativo) y de acuerdo con el potencial de los instrumentos (la teoría de los textos, los recursos seleccionados, su planeación) que distingue (a partir del significado que les otorga) para intervenir y mediar la gestión de la clase. En este sentido, las experiencias previas amplían sus marcos de referencias. A partir de estos marcos (conocimiento) organizan y gestionan la clase tomando diversas decisiones (conocimiento en uso). Así, la manera en la que Ofelia construye dichos marcos de referencia que le permiten tomar decisiones y actuar en correspondencia nos habla de la manera de ser profesor, y de la identidad de ser maestro, por consiguiente de aprendizaje.

Aprendizaje situado: La acción mediada a través de tareas e instrumentos

La manera en la que Ofelia usa los instrumentos de la práctica (las tareas matemáticas propuestas a sus alumnos, el discurso matemático generado en el aula, los recursos seleccionados) proporciona información sobre cómo la práctica configura una determinada identidad de ser maestro en un contexto a partir de una trayectoria previa y donde a su vez, esta identidad configura su práctica:

Pre-ver para actuar con mayor certeza

La viñeta procede de la lección a partir del plan de clase que se le proporcionó (O2). Este plan de clase es uno de los materiales que distribuye la Secretaría de Educación Pública como recurso de apoyo a los profesores (Figura 3). La situación planteada implicaba “Resolver problemas con información dada en tablas o gráficas”. En la lección se identificaron tres episodios.

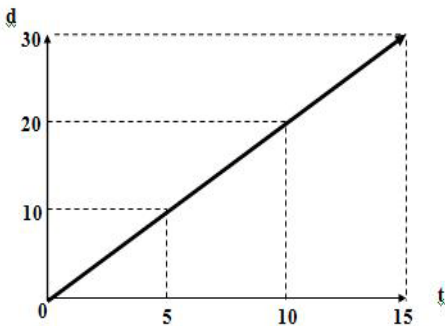
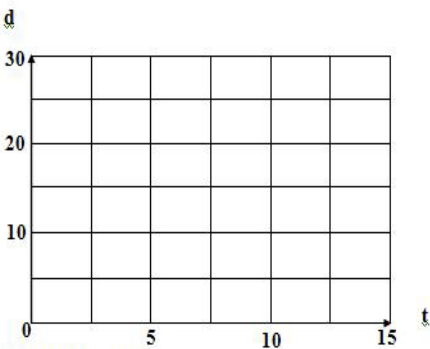
Plan de clase	
Escuela: _____ Fecha: _____	
Matemáticas 6°	
Nombre _____	
Propósito.- Resolver problemas con información dada en tablas o gráficas. Que los alumnos respondan preguntas relacionadas con la información contenida en una gráfica.	
Consigna: Organizados como indique su profesora, respondan las preguntas. La tabla muestra la variación del tiempo (t , en segundos) y la distancia (d , en metros) de una bicicleta que va a una velocidad constante	
	Se sugiere el uso del recurso “Ciclopista” interactivo de Enciclopedia Daniela hizo un paseo en bicicleta sobre un camino que tiene un tramo de subida, en el que avanzó muy lento, otro tramo en el que fue un poco más rápido por ser plano y un último tramo de bajada en el que avanzó mucho más rápido. Dibuja la gráfica resultante:  Explica la gráfica que realizaste: _____ _____ _____ _____ Observa en el interactivo la representación del trayecto que realizó Daniela La gráfica es parecida a la que dibujaste _____ En qué se parecen _____ En qué son diferentes _____ Escribe tu conclusión _____
1. ¿Qué distancia recorrerá la bicicleta en 10 segundos? _____ 2. ¿En qué tiempo recorre 80m? _____ 3. Si la velocidad por metro se reduce a la mitad, ¿qué distancia recorrerá en 5 minutos? _____ 4. A una velocidad de 8 m/seg. ¿qué distancia recorrerá en 45 segundos? _____	

Figura 3. Plan de clase propuesto para la observación en el aula O2

En el primer episodio, Ofelia inicia la clase platicando a sus alumnos una anécdota en donde menciona que se encontró con un ciclista, un automovilista y una persona que caminaba a pie. El camino lo describe con subidas y bajadas. Plantea unas preguntas para introducir el tema, relacionadas con dos magnitudes: tiempo y distancia y su relación.

Para el desarrollo de la clase (segundo episodio) Ofelia gestiona la clase a partir de 3 videos procedentes de un recurso multimedia denominado “Ciclopista” donde cada video presenta una situación problemática, a partir de las cuales, se generan una serie de preguntas sobre la manera de representar los datos y las relaciones entre las variables de la situación. Después del visionado de los videos Ofelia dirige la discusión y promueve que los estudiantes respondan a las preguntas que se plantean en el video.

Ofelia: ¿Para qué sirve una gráfica?

Alumno: Cuando queremos saber dos cosas, por ejemplo ahora con la velocidad y el tiempo, si recorre una velocidad ¿en qué tiempo lo hace?

Ofelia: Así es... muy bien. ¿Están de acuerdo con su compañero?

Alumnos: sí

Ofelia: ¿En qué eje se representó el tiempo transcurrido?

Alumno: En la línea horizontal

Ofelia: ¿Qué se representa en el eje vertical?

Alumna: La distancia.

Ofelia: Entonces sí era como dice su compañero es la relación entre dos cosas: La distancia y el tiempo.

Ofelia: A ver Edgar dinos, si lo escribieras en Facebook pondrías el punto es...

Alumno: La velocidad y dónde van

Ofelia: Entonces será donde se cruza la distancia y el tiempo.

Alumnos: sí

Para el cierre de la clase (tercer episodio) Ofelia utilizó un cuestionario (Figura 3) previsto en el plan de clase para que los estudiantes lo resolvieran de manera individual.

Durante la entrevista sobre lo que sucedió en esta clase (E3 Ofelia indicó: “Aunque ya habíamos visto el tema, decidí explorar el interactivo y me di cuenta que esta parte estaba muy bien explicada, que los niños le podrían captar muy bien y así fue”. Ofelia decide explorar el interactivo (instrumento) y descubre un valor potencial atribuyendo al instrumento un significado de andamiaje que hará visible a los alumnos el contenido. Las interacciones entre Ofelia y sus alumnos centradas en la identificación e interpretación de los ejes coordenados es un ejemplo de la manera en la que Ofelia integró el interactivo en su práctica para conseguir los objetivos pretendidos en la lección.

A partir de lo observado en su clase podemos decir que Ofelia adapta los elementos de su medio, lo que le permite forjar y orientar su práctica educativa. En cuanto al contenido matemático de la lección Ofelia indica: “Antes de ver el interactivo, a mí también me salió una gráfica parecida a ésta”. [Muestra la gráfica de una alumna donde más que representar la relación entre dos magnitudes (tiempo y distancia) se “dibuja” el trayecto de la bicicleta] Figura 4.

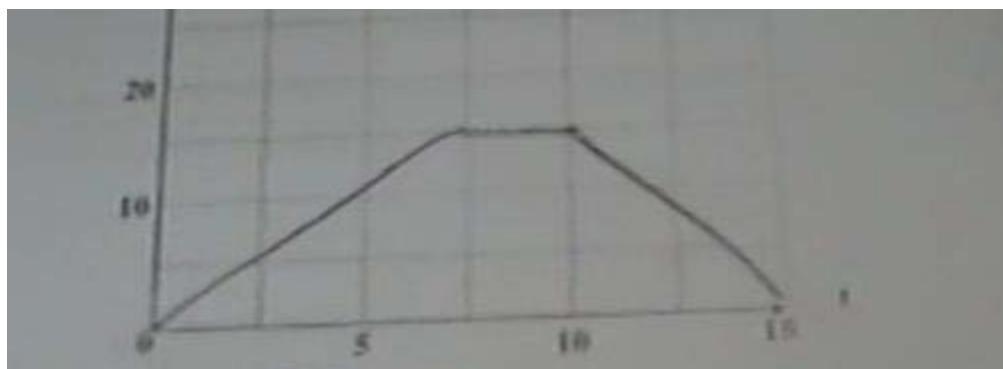


Figura 4. Foto del ejercicio de un estudiante donde representa la situación planteada y en la que dibuja el trayecto de la ciclista.

Ofelia asume que de no haber sido por el recurso interactivo ella no se hubiera dado cuenta de este error. La exploración previa del interactivo modificó el conocimiento de Ofelia respecto al contenido matemático, ya que pasó del dibujó de la trayectoria de la ciclista a reconocer que las variables involucradas en la representación gráfica están en correspondencia, que varían de manera relacionada y que determinan intervalos de variación (Ursini, et.al, 2005). Esta experiencia aumentó su comprensión

de la práctica (Lave y Wenger 2003), lo que le permitió plantear preguntas a sus alumnos con relación a estos significados. Por otro lado iniciar la clase a partir de una anécdota que narra hechos que ubica en la comunidad o frases como: “*A ver Edgardo, si lo escribieras en Facebook pondrías el punto es...*” indican que Ofelia recupera elementos cercanos y con sentido para los estudiantes. Por lo cual, el contexto no es una “elemento decorativo” externo al proceso educativo donde se mira al profesor como un sujeto que “reacciona” ante los estímulos del exterior. Esta característica de la práctica de Ofelia nos muestra que el contexto es lo que conforma la actividad situada a partir de diversos significados que se le van atribuyendo y que en cierta medida determinan una identidad.

Discusión

La identidad que los profesores van configurando entendida como un proceso continuo de interpretación y reinterpretación que se pone de manifiesto “*al llevar a cabo ciertas acciones, elegir determinadas opciones y valorar las experiencias para participar en la consecución de un objetivo*” (Penalva et al, 2011) proviene de un proceso dinámico de aprendizaje. Los resultados de nuestra investigación muestran que:

La gestión de la clase que hace Ofelia es un ejemplo de negociación de significado, esta tiene lugar en el contexto de la clase de matemáticas, pero en ella intervienen muchas variables que van desde la organización del currículo, los conocimientos adquiridos en su historia de formación, su experiencia previa como docente en otros ciclos escolares, la propuesta de un plan de clase para llevar a cabo la comunicación de un contenido, la presencia de la investigadora con una cámara de vídeo, el recurso multimedia que se sugiere, entre otras. Cuando Ofelia se enfrenta a un plan de clase, lo primero que hace es “resolverlo” en privado y surgen varias dudas que le lleva a explorar el interactivo que se propone. La capacidad de interpretar el plan de clase propuesto supone la *negociación de significados* y a partir de dichos significados atribuye cierto *sentido* al gestionar la clase para comunicar el contenido matemático a sus alumnos.

La *mediación* que surge de la práctica docente de Ofelia se da a dos niveles:

1° Como elemento que permite la interacción con los estudiantes a partir del uso de distintos instrumentos para la enseñanza.

2° Como elemento que permite la construcción de conocimiento de la profesora, cuando interactúa con instrumentos como textos o recursos multimedia.

La *interacción* no se limita a la práctica en el aula. La profesora Ofelia interactúa con un plan de clase, que aunque lo haga en privado, ese plan es resultado de la práctica de quien lo diseñó, por lo que de cierto modo hay una interacción con estas personas.

A partir de la interacción con este plan, Ofelia va construyendo significados que recupera cuando gestiona la clase, atribuyendo distintos sentidos a las situaciones didácticas que propone a sus alumnos cuando *interactúa* con ellos.

Además, el proceso de constitución de una identidad de ser maestro de educación primaria vinculado a la enseñanza de las matemáticas tiene un contexto institucional (Gee, 2000). Para esta institución (la administración educativa, SEP) la identidad de ser profesor está relacionada con enseñar matemáticas, lo que nuestros resultados indican es que los profesores construyen sus identidades que pueden estar alejadas o cercanas con la identidad institucional, sin embargo necesariamente la identidad de las personas tiene también un componente institucional, vinculada a la institución en la que desarrollan su práctica.

Referencias

- Beijaard, D., Meijer, P. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers professional identity. *Teaching and Teacher Education*, 20, 107-128.
- Cole, M. (1999). *Psicología Cultural*. Morata, España.
- Contreras, P.; Penalva, M.C. y Torregrosa, G. (2011). Identidad profesional y conocimiento matemático para la enseñanza de maestros en formación. En Marín M. et al. (2011) *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 329-338). SEIEM: Ciudad Real.
- Escudero, I. y Sánchez, V. (2007). A Mathematics teachers' perspective and its relationship to practice. *En International Journal of Science and Mathematics Education* 6, 87-106 National Science Council, Taiwan.
- Gavilán, J.M.; García, M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), 157-170.
- Gee, J. P. (2000) Identity as an analytic lens for research in education. *Review of Research in Education* 25, 99–125.
- Gorgorio, N. y Abreu, G. de (2009). Social representations mediating practices in multicultural mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics* vol 72, no.1, pp. 61-76
- Lave, J. y Wenger, E. (2003). *Aprendizaje Situado. Participación periférica legítima*. México: UNAM.
- Llinares, S. (1999) Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. *En J. Ponte et al (Eds.) Actas Escuela de Verano de Educación matemática portuguesa-española-italiana en Santarem; Portugal*.
- Penalva, M.C., Rey, C. y Llinares, S. (2011). Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis de un contexto e-learning en didáctica de la matemática. *Revista Española de Pedagogía*, 248, 101-118.
- Ponte, J.P. y O. Chapman (2006). Mathematics teachers knowledge and practices. *En A. Gutierrez y P. Boero (eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 461-494). Rotterdam/Taipe, SensePublishers,.
- Taylor, y Bogdan, (1984). *Introducción a los métodos cualitativos en investigación*. Paidós. España.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Editorial Trillas, México.
- Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica*. Paidós, España.

LA FALACIA DEL EJE TEMPORAL: UN ESTUDIO CON FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

THE TIME AXIS FALLACY: A STUDY WITH PROSPECTIVE SECONDARY SCHOOL TEACHERS

Contreras, J.M. ⁽¹⁾, **Díaz, C.** ⁽²⁾, **Batanero, C.** ⁽¹⁾, **Arteaga, P.** ⁽¹⁾

Universidad de Granada ⁽¹⁾, *Universidad de Huelva* ⁽²⁾

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas a tres ítems relacionados con la falacia del eje temporal en una muestra de 196 licenciados en matemáticas y futuros profesores de educación secundaria y Bachillerato. Se comparan los resultados con de Díaz (2007) en una muestra de 414 estudiantes de Psicología. Se concluye la necesidad de una mejor formación probabilística de los futuros profesores que incluya actividades dirigidas a confrontarlos con sus sesgos de razonamiento.

Abstract

In this paper we analyze the responses to three items related to the time axis fallacy in a sample of 196 mathematics undergraduates and prospective secondary school mathematics teachers. Results are compared with those obtained by Díaz (2007) in a sample of 414 Psychology students.. We conclude the need for a better preparation of prospective teachers that include some activities directed to confront them with their reasoning biases.

Palabras clave: *Sesgos, Probabilidad Condicional, Futuros Profesores de Secundaria, Evaluación.*

Key words: *Biases, Conditional Probability, Prospective Secondary Teachers, Assessment.*

Problema de investigación y objetivo

Aunque la probabilidad se ha incluido en la enseñanza secundaria en las últimas dos décadas, recientemente las orientaciones curriculares recomiendan reforzar las intuiciones de los estudiantes mediante una aproximación más experimental (MEC, 2006, 2007). Para asegurar el éxito de estas propuestas los profesores han de ser conscientes de la existencia de posibles sesgos y superarlos. Sin embargo Pierce y Chick (2011) indican que algunos profesores de matemáticas se encuentran inseguros al enseñar esta materia, especialmente cuando tratan de contribuir a la formación, no sólo de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes, sino también de sus intuiciones probabilísticas.

El objetivo de este estudio es evaluar en los futuros profesores la posible presencia de la falacia del eje temporal, muy extendida en el estudio de Díaz (2007) con 414 estudiantes de primer año de Psicología. La autora sugiere que este sesgo puede repercutir posteriormente en dificultades en la resolución de problemas de Bayes y en la comprensión de conceptos de inferencia, por lo que su presencia en los futuros profesores de matemática requeriría algunas acciones formativas dirigidas a su superación. En lo que sigue se describen los antecedentes del estudio, material y método y se discuten los resultados.

Antecedentes

La falacia del eje temporal

Dicha falacia, descrita por Falk (1986), consiste en suponer que el suceso condicionante en la probabilidad condicional ha de preceder temporalmente al condicionado. Falk encontró que, mientras los alumnos no tenían dificultad para resolver problemas de probabilidad condicional si la condición es temporalmente anterior al suceso cuya probabilidad se pide, en muchos casos son incapaces de calcularla si la condición es posterior a dicho suceso. El autor sugiere que esta falacia se relaciona con la confusión entre condicionamiento y causación. Desde el punto de vista de la probabilidad, una relación de causalidad implica una asociación estadística, pero lo contrario no es siempre cierto. Psicológicamente, sin embargo, la persona que evalúa una probabilidad condicional $P(A|B)$ puede percibir dos relaciones diferentes, dependiendo:

- Si dentro del contexto se percibe que B (suceso condicionante) es una causa de A , se establece entre A y B una *relación causal*. Un ejemplo sería preguntar por la probabilidad de que una niña tenga los ojos azules si su padre tiene los ojos azules.
- Si se percibe A como una causa de B , la persona establecerá entre A y B una *relación diagnóstica*. Un ejemplo sería evaluar la probabilidad que el padre tenga los ojos azules, si la niña tiene los ojos azules.

Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, las relaciones causales se perciben más intensamente que las diagnósticas, según Tversky y Kahneman (1982), quienes describen la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional.

Por otro lado, Gras y Totahasina (1995) estudiaron dos concepciones erróneas relacionadas sobre la probabilidad condicional:

- En la *concepción cronológica* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A|B)$ como una relación temporal, donde el suceso condicionante B siempre

precede al suceso A .

- En la *concepción causal*, interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia.

Razonamiento probabilístico de futuros profesores

Las escasas investigaciones sobre el razonamiento probabilístico de futuros profesores de primaria (por ejemplo, Azcárate, 1996; Azcárate, Cardeñoso y Porland, 2001; Watson, 2001; Batanero, Cañizares y Godino, 2005; Ortiz, Nordin, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006; Contreras, Estrada, Díaz, y Batanero, 2010), indican que éstos presentan sesgos relacionados con la probabilidad y los realizados con profesores de secundaria indican dificultades con la probabilidad condicional (Huerta y Cerdán, 2010). Estos sesgos son también frecuentes en los alumnos de secundaria, por lo que los futuros profesores debieran haberlos superado y saber evaluarlos en sus alumnos. En consecuencia, en este trabajo ampliamos los anteriores estudios con una evaluación de las dificultades que los futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato tienen con la falacia del eje temporal.

Metodología

En el estudio participaron 196 futuros profesores, divididos en 95 alumnos de la Licenciatura de Matemáticas y 101 alumnos del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad Matemáticas. La submuestra de alumnos de matemáticas ha sido tomada en tres universidades: Granada, La Laguna y Salamanca y la de alumnos del Máster en las Universidades de Alicante, Cádiz, Barcelona, Extremadura, Granada, Navarra, Salamanca, Santiago de Compostela y Valladolid, lo que supone una variedad de comunidades autónomas y situación geográfica. En cada grupo participaron entre el 90 y 100% de los estudiantes matriculados. Se analizaron los estudios previos de los alumnos del Máster, siendo menos de la mitad licenciados en Matemáticas, aunque la formación en matemáticas era alta, pues el resto eran alumnos de ingenierías, arquitectura, ciencias o ciencias empresariales; todos tuvieron uno o varios cursos obligatorios de estadística durante su formación.

El cuestionario (Figura 1) estuvo formado por tres ítems de opción múltiple, tomados del cuestionario RPC (Razonamiento sobre probabilidad condicional; Díaz 2007) que se plantearon en la misma forma que en las investigaciones, previas, tal como se presentan en dicha figura, no pidiendo una justificación de la solución. El resultado correcto del ítem 1 (original de Ojeda, 1995) es el (c). Una solución posible se obtiene aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(I|R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|I) \times P(I)}{P(R|I) \times P(I) + P(R|II) \times P(II)} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

También puede razonarse intuitivamente que la mitad de las bolas que llegan a II y todas las que pasan por I van a R. Por tanto, de tres bolas que lleguen a R, dos provienen de I. Otras soluciones posibles dan el mismo resultado.

Si se elige el distractor (b) se confunde el suceso condicionante, calculando la probabilidad de que, habiendo salido la bola por R , hubiese pasado por II . Si se elige (a)

no se está teniendo en cuenta las bolas que caen por el orificio B , es decir, el condicionamiento por un suceso posterior, haciendo una incorrecta restricción del espacio muestral. Si se elige (d) se piensa que no se puede calcular; en los distractores (a) y (d) el alumno comete la falacia del eje de tiempos.

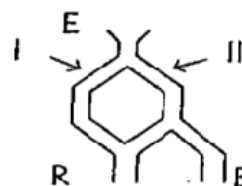
El ítem 2 evalúa la capacidad de calcular la probabilidad condicional en un contexto de muestreo sin reposición. El alumno ha de imaginar la composición de la urna una vez sacada la bola negra, es decir, el hecho de que *la probabilidad condicional supone una restricción del espacio muestral*. Una vez sacada una bola negra, tenemos una bola negra y dos blancas, por lo que la probabilidad de obtener una bola negra es igual a $1/3$.

- Si elige el distractor (a) se confunde muestreo con y sin reposición, ya que está considerando que la extracción de la bola negra no modifica el espacio muestral y la probabilidad es igual a $1/2$.
- Si elige el distractor (b) cambia la probabilidad condicional por la conjunta, aplicando la regla del producto: $(1/2)(1/3)=1/6$.
- En el distractor (d) se confunde probabilidad condicional y probabilidad simple, considerando la probabilidad de obtener una bola negra en la primera extracción ($1/4$).

La solución del ítem 3 es matemáticamente la misma que la del ítem 2, pero se ha invertido el orden de la condición para evaluar la falacia del eje de tiempo. Este problema parte de una inferencia inversa, lo que requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal (Díaz, 2007). Para resolverlo, además de comprender la diferencia entre muestreo con reposición y sin reposición, el alumno ha de comprender de que si en segundo lugar, hay una bola negra, ésta queda eliminada en la primera extracción, por lo que el espacio muestral de la primera extracción queda restringido. Por tanto al conocer que la segunda bola es negra, el espacio muestral se restringe a $\{(n,n);(b_1,n);(b_2,n)\}$ y $P(n,n)=\frac{1}{3}$. La explicación de los distractores es semejante a la realizada para el ítem anterior.

Ítem 1. Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?

- a. 0'50
- b. 0'33
- c. 0'66
- d. No se puede calcular



Ítem 2. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? $P(N_2/N_1)$

- a. 1/2
- b. 1/6
- c. 1/3
- d. 1/4

Ítem 3. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? $P(N_1/N_2)$

- a. 1/3
- b. 1/4
- c. 1/6
- d. 1/2

Figura 1. Cuestionario

Resultados y discusión

Los datos se recogieron durante el segundo cuatrimestre del curso 2009-2010 en las distintas universidades que forman la muestra en una de las asignaturas cursadas por los alumnos. Las instrucciones y tiempo disponible fueron iguales en todos los grupos de estudiantes. Para la recogida de datos se contactó con profesores del último curso de la Licenciatura de Matemáticas y del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. En los casos en que las fechas permitieron la recogida de datos, todos los profesores contactados se interesaron en el trabajo, y se ofrecieron para colaborar.

A dichos profesores se les mandó el cuestionario, junto con una descripción detallada de su contenido, indicando para cada ítem, las soluciones correctas y causas de las incorrectas. Además se les envió una presentación PowerPoint para que posteriormente pudiesen discutir con los alumnos las soluciones y los posibles fallos y sesgos que se encontrasen. De este modo la actividad de completar el cuestionario, junto con la sesión posterior de corrección y análisis de los sesgos se convirtió en una actividad formativa sobre didáctica de la probabilidad en las universidades y cursos participantes.

En las Tabla 1 y 2 se muestran los resultados del ítem 1, donde solamente un 23,5% de estudiantes de la muestra dio una respuesta correcta al problema, aunque los resultados fueron mejores que los de Díaz (2007) con alumnos de Psicología. El 67,3%

de nuestra muestra y el 76,8% de la de Díaz que dio como respuesta el distractor (a), no teniendo en cuenta las bolas que caen por *B*, es decir el condicionamiento por un suceso posterior. Agrupando los resultados de los distractores (a) y (d), vemos que el 68,3% de los sujetos de nuestra muestra y el 78,5% de la muestra de Díaz incurrió en la falacia del eje de tiempos. El distractor (b) dado por un 7,7% y el 8,9% indica que se han considerado equiprobables los tres caminos, cayendo en el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992).

Tabla 1. Resultados en el ítem 1

	Futuros profesores (n=196)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 0,50	132	67,3	318	76,8
b. 0,33	15	7,7	37	8,9
c. 0,66	46	23,5	41	9,9
d. No se puede calcular.	2	1,0	7	1,7
En blanco.	1	0,5	11	2,7
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 2. Resultados en el ítem 1

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 0,50	62	65,3	70	69,3
b. 0,33	9	9,5	6	5,9
c. 0,66	22	23,1	24	23,8
d. No se puede calcular.	2	2,1	0	0
En blanco.	0	0	1	1,0
Total	95	100,0	101	100,0

Al comparar los dos grupos de nuestra muestra (Tabla 2), los resultados son semejantes. El porcentaje de respuestas correctas es similar en los alumnos del Máster y de la licenciatura con un 23,1 % y un 23,8% respectivamente. Destaca el 67,4% del grupo de la licenciatura y el 69,3% del máster que incurrió en la falacia del eje de tiempo.

Los resultados en el ítem 2 (Tablas 3 y 4) muestran que el porcentaje mayoritario de alumnos de nuestra muestra (64,3%), fue capaz de contestar correctamente al problema de muestreo con reposición, cuando el suceso condicionante antecede al condicionado. Comparando estos datos con los de Díaz, vemos que se asemeja el porcentaje de respuestas correctas, aunque este es un poco mayor con un 68,8%. El problema fue sencillo en ambos grupos.

Tabla 3. Resultados en el ítem 2

	Futuros profesores (n=196)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 1/ 2	7	3,6	23	5,6
b. 1/ 6	52	26,5	70	16,9
c. 1/ 3	126	64,3	285	68,8
d. 1/ 4	8	4,1	30	7,3
En blanco.	3	1,5	6	1,4
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 4. Resultados en el ítem 2

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 1/ 2	4	4,2	3	3,0
b. 1/ 6	23	24,2	29	28,7
c. 1/ 3	62	65,3	64	63,3
d. 1/ 4	4	4,2	4	4,0
En blanco.	2	2,1	1	1,0
Total	95	100,0	101	100,0

Un 3,6% de sujetos de nuestra muestra y un 5,6% de la de Díaz confundieron muestreo con y sin reposición (distractor a), considerando que la extracción de la bola negra no modifica el espacio muestral y, por tanto, identificaban la probabilidad como 1/2. Otro 26,5% y 16,9%, respectivamente, confundieron la probabilidad condicional y la conjunta (distractor b) aplicando la regla del producto $(1/2) \times (1/3) = 1/6$. Y por último

un 4,1% y un 7,3%, respectivamente, confunde probabilidad condicional y simple (distractor d) ya que consideran únicamente la probabilidad simple de obtener una bola negra en la primera extracción ($1/4$). La comparación de los dos grupos (Tabla 4), indican una homogeneidad entre ambos grupos, aunque un 4,5% más de alumnos del Máster que se decantaron por el distractor (b), donde se confunde la probabilidad condicional y la conjunta.

En las Tablas 5 y 6 se presentan los resultados del ítem 3, donde se pretendía conocer como los futuros profesores resuelven problemas de probabilidad condicional cuando se invierte el eje de tiempo en contexto de muestreo sin reposición. Observamos que solamente lo realizó correctamente un 29,6% de nuestra muestra y un 23,9% de los alumnos de la muestra de Díaz, confirmando la hipótesis de Falk (1986), de que la dificultad de los problemas de probabilidad condicional crece cuando se invierte el eje temporal, pues formalmente, el ítem es similar al ítem 2 donde la respuesta mayoritaria fue correcta en ambos grupos. La mejor preparación matemática en nuestro estudio, en comparación con los estudiantes de Psicología no sirvió para superar este sesgo.

Un 32,7% de los futuros profesores y un 36,5% de la de Díaz no entendieron que se puede condicionar un suceso con otro que ocurra posteriormente, ya que eligieron el distractor (d) que evaluaba la falacia del eje temporal. Un 12,8% y un 9,2% de sujetos, respectivamente, se decantaron por el distractor (c) confundiendo probabilidad condicional y simple. Por último, un 20,8% y un 24,9%, respectivamente, eligieron la opción (b) confundiendo la probabilidad condicional y conjunta, error señalado por Falk (1986). Al comparar los licenciados en matemáticas y alumnos del Máster (Tabla 6), los resultados son algo mejores por parte de los alumnos del Máster, aunque el porcentaje de alumnos que incurrió en la falacia del eje de tiempos, distractor (d), fue similar en ambos grupos.

Tabla 5. Resultados en el ítem 3

	Futuros profesores (n=196)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 1/3	58	29,6	99	23,9
b. 1/4	41	20,8	103	24,9
c. 1/6	25	12,8	38	9,2
d. 1/2	64	32,7	151	36,5
En blanco.	8	4,1	23	5,5
Total	196	100,0	414	100,0

Tabla 6. Resultados en el ítem 3

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 1/3	22	23,2	36	35,6
b. 1/4	24	25,3	17	16,8
c. 1/6	12	12,6	13	12,9
d. 1/2	32	33,7	32	31,7
En blanco.	5	5,2	3	3,0
Total	95	100,0	101	100,0

Conclusiones e implicaciones

Los resultados de nuestro estudio muestran que los participantes en el estudio respondieron a las preguntas no teniendo en cuenta el condicionamiento por un sucesos posterior al condicionado en los ítems 1 y 3. En la literatura de investigación estas respuestas se interpretan como indicativas de la falacia del eje temporal, que, de acuerdo a los resultados podrían afectar a una proporción importante de participantes en el estudio, tanto de aquellos que se preparan como futuros profesores de matemáticas de secundaria, como los licenciados de matemáticas en su último año de estudio. Los resultados no son mejores que los de los licenciados en Psicología en su primer año de estudio, a pesar de la diferencia de formación matemática de ambos colectivos.

Estos resultados son visibles en las respuestas el ítem 1, pero especialmente al comparar los resultados de los ítems 2 y 3. Los participantes resuelven con facilidad un problema de probabilidad condicional en contexto de muestreo sin reposición si se les da el resultado de la primera extracción (ítem 2), pero no cuando se les da el de la segunda (ítem 3) aunque ambos problemas son formalmente equivalentes desde el punto

de vista matemático (Falk, 1986). La explicación es que en el ítem 2 la inferencia causal es natural y compatible con el eje temporal, pero la segunda situación donde se nos pide hacer una inferencia inversa, requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal, lo causa dificultades psicológicas a los participantes.

Sin embargo, estas son las situaciones a que tienen que enfrentarse en contenidos como el Teorema de Bayes, el contraste de hipótesis (nivel de significación, tipos de error), o intervalos de confianza, temas que han de ser explicados en el Bachillerato de Ciencias Sociales por los futuros profesores de educación secundaria y Bachillerato. Deducimos la importancia de evaluar y hacer superar este sesgo a los futuros profesores de modo que lleguen a entender que la probabilidad de un suceso puede ser revisada a la luz de resultados posteriores y la importancia de la actualización de probabilidades en inferencia, así como reconocer los problemas en que deben aplicar este razonamiento.

La compleja relación descrita por Borovcnik y Peard (1996) entre los conceptos probabilísticos y la intuición se muestra en nuestro estudio. Observamos un problema didáctico en la formación de futuros profesores y de licenciados de matemática, quienes tienen una preparación matemática suficiente en probabilidad condicional, que no es suficiente para evitar sesgos de razonamiento. Coincidimos con Aguilar, Navarro, López y Alcalde (2002) en la necesidad de prestar más atención en la enseñanza a las heurísticas y sesgos y la importancia que en la resolución de los problemas matemáticos tienen los procesos psicológicos.

Referencias

- Aguilar, M., Navarro, J.I., López, J.M. y Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, 14(2), 382-386.
- Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Editorial Comares.
- Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. y Porland, R. (2001). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1), 85-97.
- Batanero, C., Cañizares, M. J. y Godino, J. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. [CD-ROM]. Johannesburg: International Commission on Mathematical Instruction.
- Borovcnik, M. y Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop, et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239-288). Dordrecht: Kluwer.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C. y Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (p. 271-280). Lleida: SEIEM.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en Psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

- Falk, R. (1986). Misconceptions of statistical significance. *Journal of Structural Learning*, 9, 83–96.
- Gras, R., y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle [Chronology and causality, conceptions sources of epistemological obstacles in the notion of conditional probability]. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- Huerta, M. P. y Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 353-364). Lleida: SEIEM.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- MEC (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*.
- MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*.
- Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.
- Ortiz, J., Nordin, M., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y N. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.
- Pierce, R. y Chick, H. (2011). Teachers' beliefs about statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education* (pp. 151-162). New York: Springer.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337.

O CONHECIMENTO DE UMA PROFESSORA QUANDO EXPLORA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA ESTATÍSTICA NUMA AULA DE 7º ANO

THE KNOWLEDGE OF A TEACHER WHILE EXPLORING STATISTICAL GRAPHS IN A 7th YEAR CLASSROOM

Costa, A.C. ⁽¹⁾, González, M.T. ⁽²⁾

Escola Secundária Campos Melo ⁽¹⁾, Universidad de Salamanca ⁽²⁾

Resumo

Nesta comunicação pretende-se estudar o que uma professora conhece, o que faz e as razões pelas quais o faz enquanto ensina as representações gráficas estatísticas. Serão apresentados resultados de uma primeira análise do seu conhecimento profissional numa atividade realizada em sala de aula, sendo já possível concluir que a professora aproxima, em alguns aspetos, as intenções do novo currículo pretendido e o currículo realmente adotado na sala de aula.

Abstract

This communication aims to study what a teacher knows, what she does and why she does so while teaches the statistical graphical representations. The results of a first examination of her professional knowledge in a activity carried out in the classroom will be presented, being already possible to conclude that the teacher approaches, in some aspects, the intentions of the new curriculum and the curriculum really embraced in the classroom.

Palavras chave: *Educação estatística, representação gráfica estatística, conhecimento profissional, currículo operacional, o Quarteto de Conhecimento.*

Key words: *Statistics education, statistical graphical representation, professional knowledge, operational curriculum, the knowledge quartet.*

Introdução

No ano letivo 2010/2011 foi implementado em Portugal, a nível nacional, o novo programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). O tema *organização e tratamento de dados* segue recomendações da investigação em educação estatística e aposta na valorização da literacia estatística e do processo de investigação estatística. Gal (2003) define a literacia estatística como sendo “... a capacidade para interpretar, avaliar criticamente e expressar opinião própria sobre mensagens com base em dados e informações estatísticas.” (p.16)

Ponte e Sousa (2010) consideram que o atual contexto educativo e as orientações curriculares para o ensino da Matemática apontam para mudanças importantes na atuação por parte do professor.

Nesta comunicação estuda-se o conhecimento profissional de uma professora quando trabalha a representação gráfica estatística na sua turma de 7º ano de escolaridade. Pretende-se então estudar o conhecimento estatístico mobilizado pela professora, o seu conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagens, compreender como interpreta o novo programa de Matemática do ensino básico no que respeita ao tópico das representações gráficas estatísticas e como articula a sua prática letiva com essa interpretação.

Enquadramento teórico sobre o conhecimento profissional

O modelo teórico com que se pretende enquadrar o trabalho de investigação é o modelo de Shulman, que tem sido pouco explorado na educação estatística (Pinto, 2010) e que serviu de base ao *Quarteto de Conhecimento*, que se traduz num quadro teórico para observação, análise e desenvolvimento do ensino da Matemática.

Shulman (1986) propõe que o foco da investigação sobre o ensino seja o estudo do pensamento do professor sobre o ensino do conteúdo do tópico.

O *Quarteto de Conhecimento* é um quadro teórico para observação de aulas com foco na contribuição do conhecimento do conteúdo matemático do professor (Rowland, 2005). O objetivo é o que o professor sabe e em que acredita e como identificar oportunidades para melhorar o ensino.

Para analisar esse conhecimento os investigadores Rowland, Huckstep e Thwaites (2011) geraram um conjunto de 20 códigos que foram agrupados, por serem da mesma natureza ou de natureza similar, em 4 dimensões: *fundamentação*, *transformação*, *conexão* e *contingência*.

Na *fundamentação*, incluem-se os conhecimentos e compreensão da matemática *per se* e da pedagogia da matemática específica, bem como crenças sobre a natureza da matemática, as finalidades da educação matemática e as condições sob as quais os alunos irão aprender melhor a matemática.

As outras três dimensões referem-se aos modos e contextos nos quais o conhecimento é exercido na preparação e condução do ensino.

A *transformação* evidencia que a base do conhecimento para ensinar se distingue pela habilidade do professor em transformar o conhecimento do conteúdo que possui em formas que são pedagogicamente fortes.

A conexão inclui a sequência do material para o ensino, dos tópicos de ensino dentro da aula e entre as aulas, a ordem das tarefas e exercícios e uma consciencialização das exigências cognitivas de diferentes temas e tarefas.

A contingência inclui a capacidade de resposta do professor em situações na sala de aula que não foram previstas nem antecipadas.

No Quarteto de Conhecimento, muitos episódios ou momentos podem ser entendidos em termos de duas ou mais das quatro dimensões. Por exemplo, uma resposta a uma sugestão de um aluno (contingência) pode relacionar ideias anteriores (conexão). Além disso, pode-se argumentar que a aplicação do tema na sala de aula recai sempre sobre o conhecimento da fundamentação.

A tabela (Rowland, Huckstep e Thwaites, 2011) a seguir mostra a distribuição dos códigos por cada uma das quatro dimensões.

Dimensão	Categorias
Fundamentação	Consciência dos objetivos, recorre a literatura relevante e disponível, conhecimento procedimental, identificação de erros e dificuldades, mostra evidente conhecimento do assunto, base teórica de pedagogia, uso de terminologia matemática
Transformação	Escolha de exemplos, escolha de representação, uso de material de ensino, demonstração do professor (para ensinar um procedimento)
Conexão	Antecipação da complexidade, decisões sobre a sequencialidade, conexões sobre procedimentos, conexões sobre conceitos, reconhecer adequação conceptual
Contingência	Desvio do plano de trabalho, responder a ideias do aluno, uso de oportunidades, percepção do professor durante a aula

Tabela 1. Categorias do *Quarteto de Conhecimento* de Rowland, Huckstep e Thwaites, 2011

Metodologia

Dada a natureza do problema deste estudo, foi adotada uma aproximação metodológica de tipo qualitativo, através de um estudo de caso. Ponte (1994) caracteriza o estudo de caso como um estudo que se debruça sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, em que se procura descobrir o que há nela de mais essencial e característico.

Neste caso, a Maria é uma professora que pertence ao quadro da escola onde leciona, é licenciada em Ensino de Matemática e conta com vinte anos de experiência. No ano letivo 2010/2011, lecionou uma turma de 7º ano de escolaridade constituída por vinte alunos com idades entre os 12 e os 13 anos, bastante heterogénea no seu desempenho na Matemática.

Na aula de 16 de maio a professora inicia uma tarefa com o objetivo de rever vários tipos de gráficos estatísticos que constam no programa de matemática do ciclo de ensino anterior. Nela se trabalham alguns dos níveis de compreensão de gráficos estatísticos: *ler os dados*, *ler entre os dados* e *ler para lá dos dados* (Curcio, 1989) que conferem uma compreensão gráfica fundamental para o desenvolvimento da literacia estatística (Shaugnessy, 2007). A tarefa selecionada consta como material de apoio ao

novo programa de Matemática do ensino básico disponibilizada pelo Ministério de Educação e visa a leitura e interpretação de um gráfico de barras, de um pictograma, de gráficos circulares e de linhas. Na figura 1, apresenta-se a questão 2 desta tarefa que inclui um pictograma cuja informação diz respeito ao número de carros vendidos em alguns países da Europa em 2008.

2. A informação deste pictograma é referente ao número de carros vendidos em alguns países da Europa. Sabe-se que, em 2008, no Reino Unido foram vendidos 2 131 794 carros. Analisa o seguinte pictograma.

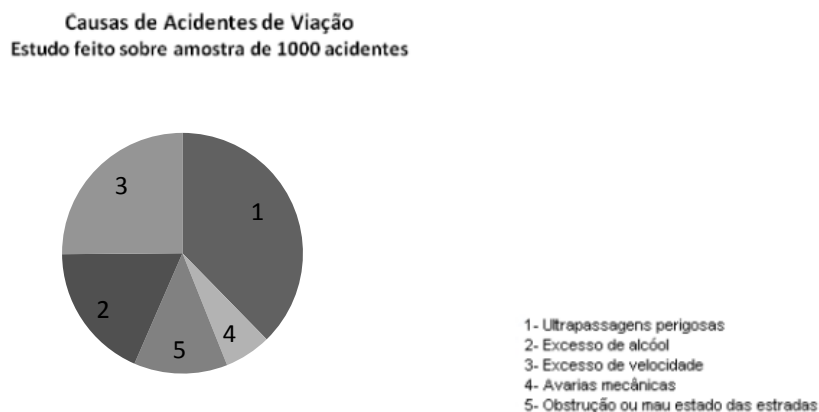


- a. Que informação podemos obter a partir deste gráfico?
- b. No pictograma, cada imagem representa, aproximadamente, quantos carros vendidos?
- c. O número de vendas em Espanha é superior ou inferior a 50% das vendas no Reino Unido?
- d. Indica um valor aproximado para o número de vendas na Holanda. E em Portugal?
- e. Luxemburgo é um país rico mas foi onde houve menor volume de vendas. Indica uma justificação possível para esta situação.

Figura 1

A questão 3 da mesma tarefa recorre a um gráfico circular.

3. Observa o gráfico circular com os resultados de um estudo realizado sobre as causas de acidentes de viação.



- a. Qual foi a causa da maioria dos acidentes?
- b. Indica a causa de um quarto dos acidentes.
- c. Explica por que são verdadeiras as seguintes afirmações:
 - “mais de metade dos acidentes teve como causa o excesso de velocidade e as ultrapassagens perigosas”;
 - “o excesso de álcool e a obstrução ou mau estado das estradas causou mais de um quarto dos acidentes”.
- d. Observa o gráfico e escreve uma afirmação falsa e outra verdadeira.

Figura 2

As questões foram resolvidas num trabalho a pares e depois a professora promoveu uma discussão na turma, confrontando as respostas e os argumentos dos alunos em cada questão.

Os dados usados no estudo foram obtidos a partir de diferentes instrumentos como:

- a proposta de planificação a médio prazo das aulas;
- o trabalho de campo com a observação e gravação, em áudio e vídeo, da aula do dia 16 de maio e registo de notas;
- uma entrevista posterior à aula;
- os materiais usados nas aulas.

Para categorizar os dados utilizou-se um sistema baseado no modelo do *Quarteto de Conhecimento*, que foi ajustado ao problema em estudo e aplicado às unidades de análise constituídas pela transcrição integral da aula e da entrevista.

Análise da aula da professora Maria

Apresenta-se agora uma primeira interpretação de alguns momentos observados nesta aula em termos das dimensões *fundamentação*, *transformação*, *conexão* e *contingência*. A aula serviu para comprovar o *Quarteto de Conhecimento* como uma ferramenta útil e eficaz para identificar, para discussão, questões que surgem a partir da observação de aula e para estruturar reflexão sobre a aula.

Fundamentação

Na questão 2 (figura 1) os alunos teriam de determinar quantos carros vendidos correspondem a cada símbolo utilizado a partir da informação de que, no Reino Unido foram vendidos 2 131 794 carros e depois indicar o número de carros vendidos na Holanda e em Portugal.

Atendendo a que o número de imagens no gráfico não é inteiro cria algumas dificuldades que os alunos acusaram de imediato.

Maria: Daniela, quantos símbolos lá estão?

Aluna: Um carro mais um bocado.

Depois de calcular o número aproximado de carros em cada um dos países, a professora evidencia algumas desvantagens do uso do pictograma.

Maria: [...] Cada carro corresponde a um número, a um valor e cada carro corresponde a um valor, todos os carros têm de corresponder, cada um deles vai corresponder exatamente à mesma quantidade, o que se torna complicado porque depois tenho de fazer como no Luxemburgo em que é só uma roda, ali na Suécia que é um carro inteiro e mais um bocadinho para além da roda e em Portugal é a mesma história. Ou seja, não é muito fácil de fazer.

A professora revela saber usar adequadamente o procedimento de construção deste tipo de gráfico e chama a atenção para dificuldades relativas à construção de um pictograma ou à sua leitura (**evidente conhecimento do tema**). Segundo Espinel, González, Bruno e Pinto (2009) uma das dificuldades dos alunos relativas ao pictograma coloca-se quando uma imagem passa a representar um conjunto de itens e essa dificuldade agudiza-se quando se apresenta uma parte da imagem.

Transformação

Na última questão relativa ao pictograma da figura 1 pode ler-se: “O Luxemburgo é um país rico mas foi onde houve menor volume de vendas. Indica uma justificação possível para esta situação.”

Aluna 1: É um país que tem menos população.

Aluna 2: Andam de bicicleta.

Maria: A Raquel diz que uma das razões pode ser essa. Diz que é um país muito pequenino. Vocês têm a noção do tamanho do Luxemburgo?

Alunos: É muito pequeno.

Maria: É para aí do concelho da Covilhã (um bocado mais um bocado menos, não sei exatamente). Então o país é muito pequenino, muito pequenino mesmo, ainda é mais pequenino do que vocês estavam a pensar. Pode ser uma razão, a da Raquel. A Leonor diz que andam todos de bicicleta. Mas o país é muito sobe e desce e eu não acredito que andem todos de bicicleta.

Aluna 2: É tudo atleta (risos).

Maria: Além da razão da Raquel, outra pode ser eles estão muito concentrados na cidade, na capital, andam de transportes públicos.

A tarefa selecionada envolve um nível de compreensão gráfica que ultrapassa a simples leitura dos dados apresentados (**Uso de material de ensino**). Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) defendem que, mais do que insistir na construção, o professor deve procurar ir mais além da informação imediata resultante de uma simples leitura dos dados. Além disso, a comunicação matemática é uma das capacidades

transversais a todo o trabalho na disciplina de Matemática e a professora promoveu com esta tarefa a interação necessária para o desenvolvimento dessa capacidade.

Contingência

A construção de um gráfico mobiliza conceitos distintos como o da contagem, escalas, variáveis, áreas, proporção ...

Neste episódio, é apresentado um gráfico circular (figura 2) que representa um estudo realizado sobre as causas de acidentes de viação e a respetiva legenda e uma das questões pede para explicar por que é verdadeira a afirmação: “Mais de metade dos acidentes teve como causa o excesso de velocidade e as ultrapassagens perigosas”.

Maria: [...] o excesso de velocidade diz respeito à legenda...

Alunos: 3.

Maria: E as ultrapassagens perigosas ao ...

Alunos: 1.

Maria: Então tenho de olhar para o sector 1 e para o sector 3. O 3 já sei que é um quarto. E o 1?

Alunos: É mais de um quarto.

Maria: Os dois juntos fazem...

Aluna 1: Representa [o setor 1] um quarto mais um bocadinho. Ou seja, fica um quarto mais um quarto faz dois quartos e dois é metade de quatro, e se fica mais um bocadinho de um quarto, faz mais de metade. Posso ir explicar ao quadro? Temos aqui um quarto, mais um quarto, faz dois quartos e fica metade da circunferência, como temos mais um bocadinho, é meio.

Maria: Mas está mais ou menos claro, com a ajuda da Leonor?

A aluna usa o raciocínio proporcional pra responder à questão e a professora, apercebendo-se da facilidade de raciocínio e de comunicação da aluna, deixa que seja a aluna a explicar aos colegas. A professora incorporou a explicação aluna, evidenciando reconhecer a importância do raciocínio proporcional na leitura de gráficos (**responder a ideias dos alunos**). Segundo Saugnessy (2007), o pensamento proporcional é a base para a compreensão de gráficos estatísticos. (p.989)

Conexão

Carvalho (2009) concluiu que, apesar de os alunos não manifestarem grandes dificuldades na leitura de gráficos estatísticos, o mesmo não acontece quando têm de responder a questões relacionadas com a interpretação, a construção ou fazer previsões baseadas na informação presente nos gráficos. Na entrevista, a professora reconhece essas dificuldades nos seus alunos.

Investigadora: A sequência em termos dos gráficos apresentados, barras primeiro, pictograma, circular e de linha... foi alvo de uma reflexão, ou seja, isto aparece assim de forma natural, ...

Maria: O gráfico de barras eles já conhecem, portanto faz todo o sentido que ser o início, depois é pela ordem de... até da sequência que aparece por exemplo no manual ou nas tarefas. Não foi uma sequência propriamente pensada ou refletida, tipo vamos pôr isto ou pôr aquele, foi uma ordem natural.

Investigadora: E a reação deles tem sido muito natural aos gráficos.

Maria: É, eu acho que eles gostam dos gráficos, eles olham e gostam mesmo que não saibam muito bem o que dizer deles (risos). Eles têm dificuldade em

passar para o papel, eles tiram os dados e eles dizem, mas depois quando têm de passar para o papel têm alguma dificuldade.

Investigadora: O tirar a informação tem sido fácil, eles até têm feito a interpretação mas não sei até que ponto vão para lá disso, não é?

Maria: É isso, escrevê-la, escrevê-la como se tivessem de fazer uma notícia ou de tirar três tópicos isso já têm dificuldade. Mas isso já vai para além da matemática, a dificuldade que eles têm em escrever...

A professora revela compreender o que torna a tarefa fácil ou difícil, identificando os aspetos que influenciam a sua complexidade, como a escrita de um texto, o colocar por escrito as informações retiradas (**Antecipação da complexidade**).

Considerações finais

Um dos problemas realçados na investigação é a grande lacuna entre as ideias originais e intenções do novo currículo e o currículo realmente adotado na sala de aula (Vershut e Bakker, 2011). A aula analisada torna claro que a professora procura corresponder às finalidades e os objetivos gerais de aprendizagem da disciplina de Matemática, mais especificamente, da representação gráfica estatística.

No que respeita ao conhecimento da representação gráfica estatística, é possível concluir que a professora revela um evidente conhecimento do tema. No entanto, num pictograma pode-se recorrer a figuras cuja área ocupada seja proporcional ao valor que representa. Na comunicação social há muitos exemplos de gráficos enganadores exatamente por quebrarem este princípio das áreas. Este esclarecimento afigura-se como uma oportunidade para melhorar o ensino e perseguir um dos objetivos definidos no programa, promover uma atitude crítica relativamente à utilização de gráficos enganadores.

A professora planeou uma sequência de ensino adequada ao desenvolvimento das competências necessárias para interpretar as diversas representações com que o aluno se pode deparar. A análise da aula permite concluir que a professora Maria demonstra conhecer o currículo, os alunos e a estatística, estabelecendo uma ordem na apresentação dos gráficos e fazendo aos alunos perguntas que visam desenvolver o seu raciocínio estatístico (Pinto e González, 2010).

Nessa primeira aplicação do sistema de categorias e evidências definido, o modelo *Quarteto de Conhecimento*, revelou-se útil e eficaz na análise da prática letiva da professora quando leciona o tema *organização e tratamento de dados* a alunos do ensino básico porque todos os momentos relevantes do conhecimento da professora a catalogar foram, nesta primeira tentativa, acomodados em pelo menos uma das dimensões definidas.

Referências bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina L., e Oliveira I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME/DEB.
- Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da Estatística. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H., Martinho & P. F. Correia (Orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na escola* (pp. 22-36). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

- Espinel, M., González, M., Bruno, A. & Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 57–74). Málaga: Gráficas San Pancraccio.
- Gal, I. (2003). Expanding conceptions of statistical literacy: An analysis of products from statistics agencies. *Statistics Education Research Journal*, 2(1), 3-21.
- Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. Disponível em:
<http://sitio.dgide.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>
- Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de Psicología y Educación*. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Salamanca: Universidad de Salamanca.
- Pinto, J. y González, M.T. (2010). Diseño de situaciones hipotéticas de enseñanza-aprendizaje para estudiar el conocimiento didáctico del contenido del profesor de Estadística. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (eds), *Investigación en Educación Matemática XIV*. (pp. 487-498) Lleida: SEIEM.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso em educação Matemática. *Quadrante*, 3 (1), 3 –18
- Ponte, J.P. e Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no Ensino Básico. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM
- Rowland, T., Huckstep, P. and Thwaites, A. (2011) Secondary mathematics teachers' content knowledge: the case of Heidi. *Paper given at CERME7*, Rzeszów, Poland
- Rowland, T. (2005). The Knowledge Quartet: a tool for developing mathematics teaching. *Fourth Mediterranean Conference on Mathematics Education, Palermo, Sicily*
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., and NCTM, 957 - 1009
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15 (2), 4-14.
- Verschut, A. e Bakker, A. (2011) Implementing a more coherent statistics curriculum, *Paper given at CERME7*, Rzeszów, Poland

VALORACIÓN DE RESPUESTAS A PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO

EVALUATION OF RESPONSES OF STUDENT TEACHER TO PROBLEMS WITH FRACTIONS DIVISION-MEASURE

Fernández, C., Callejo, M.L., Márquez, M.

Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación se centra en cómo estudiantes para maestro (EPM) valoran respuestas dadas por alumnos de 6º curso de primaria (11-12 años) a problemas de división-medida con fracciones y que han resuelto previamente. Los resultados muestran que (i) hubo EPM que aunque no resolvieron el problema correctamente sí valoraron adecuadamente la resolución de los alumnos de primaria, y (ii) la tendencia de algunos EPM a valorar mejor una respuesta con resultado correcto y procedimiento con errores que una respuesta con un procedimiento correcto pero con un error en la interpretación del resultado. Los resultados obtenidos constatan la potencialidad de las tareas propuestas para el desarrollo del conocimiento profesional de los EPM.

Abstract

This research focuses on how pre-service teachers (EPM) grade six-grade primary school students' answers to quotitive division word problems involving fractions. These problems have been previously solved by these EPM. Results show that (i) there were EPM that although they were not able to solve problems correctly, they correctly graded primary school students' answers and (ii) the tendency of some EPM to grade better students' answers with a correct result but incorrect procedure than answers with a correct procedure but with an incorrect result. Results illustrate the potential of the proposed tasks to develop pre-service teachers' professional knowledge.

Palabras clave: *Conocimiento del profesor, problemas de división-medida, división de fracciones.*

Key words: *Teacher knowledge, quotitive division word problems, division of fractions*

Introducción

Un aspecto importante en la investigación en educación matemática es identificar los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas y cómo se relacionan entre sí (Llinares y Krainer, 2006). La caracterización de estos conocimientos emerge de identificar las tareas profesionales del profesor de matemáticas (Llinares, 2009): (a) planificar y organizar el contenido matemático para enseñar; (b) gestionar el contenido matemático en el aula; y (c) analizar, interpretar y valorar las producciones matemáticas de los alumnos. Una aportación clave en la identificación de los conocimientos necesarios para enseñar ha sido la de Shulman (1989) que distingue entre “conocimiento de la materia” y “conocimiento de contenido pedagógico”. Esta última expresión se ha utilizado para referirse a diversos aspectos relacionados con la disciplina a enseñar y con la enseñanza, por lo que es necesario un desarrollo teórico específico en el área de matemáticas en contenidos concretos. En esta comunicación nos centramos en el conocimiento del profesor sobre los problemas de estructura multiplicativa (Vergnaud, 1997), en concreto problemas de división-medida con fracciones.

Diversas investigaciones se han centrado en el “conocimiento de matemáticas” de los estudiantes para maestro (EPM) necesario para resolver problemas de división-medida. Estas investigaciones han revelado deficiencias y lagunas. Por ejemplo, Graeber, Tirosh y Glover (1986) señalaron que los EPM tendían a interpretar la división sólo como división-partitiva, es decir reparto de un conjunto de objetos de forma equitativa entre un número de grupos, y tenían dificultades en las situaciones en las que la división tenía el significado de división-medida, es decir determinar cuántos grupos de un tamaño determinado se pueden formar con un número dado de objetos; en el caso de la división-partitiva el cociente es el número de objetos que hay en cada grupo y en el caso de la división-medida el cociente es el número de grupos que se han formado. Ball (1990) encontró que los EPM tenían dificultades con el significado de la división de fracciones ya que muchos de ellos sólo eran capaces de interpretar la división en términos de reparto, que no es válida en situaciones en que el divisor es una fracción que tiene el significado de división-medida. Nillas (2003) describió las estrategias que utilizan los EPM para resolver problemas de división con fracciones y mostró que la habilidad de los EPM para resolver esta tarea no implicaba que tuvieran una comprensión conceptual del tópico, que se mostró también en el poco éxito que tuvieron en la formulación de problemas. Osana y Royea (2011) diseñaron una intervención con EPM centrada en las fracciones; sus resultados revelaron una mejora en el conocimiento conceptual, pero no en la capacidad de formular problemas. Asimismo identificaron en los participantes algunos obstáculos de tipo cognitivo cuando trataban de construir soluciones y representarlas simbólicamente.

En cuanto al “conocimiento de contenido pedagógico” Tirosh (2000) diseñó un curso para mejorar el conocimiento de los EPM sobre la división de fracciones. Antes de la intervención la mayoría de los EPM eran capaces de dividir fracciones pero no sabían explicar por qué funcionaba el algoritmo y atribuían las causas de las respuestas incorrectas que suelen tener los alumnos a dificultades de comprensión lectora o de aplicación del algoritmo. Sin embargo, al final del curso los EPM supieron identificar otras causas de los errores más comunes que se cometen como la interpretación de la división como reparto o una limitada concepción del concepto de fracción o de las propiedades de las operaciones.

Estas investigaciones previas están centradas en el conocimiento de los EPM en el ámbito de la división de fracciones pero aportan poca información sobre cómo valoran

las producciones de los estudiantes en estos problemas, que es un aspecto del conocimiento de contenido pedagógico, ya que los EPM deben identificar la estrategia seguida por los estudiantes y las dificultades. En este contexto nuestra pregunta de investigación es:

- ¿Qué conocimientos utilizan los EPM cuando valoran respuestas dadas por alumnos de 6° curso de primaria a un problema de división-medida con fracciones que previamente han resuelto?

Método

Participantes

Los participantes fueron 79 EPM del primer curso de un programa de formación de “Maestro de Primaria”. El estudio se realizó antes de la enseñanza de los tópicos sobre problemas de estructura multiplicativa. Los EPM resolvieron cuatro problemas de división-medida y luego se les pidió que valoraran las respuestas dadas por alumnos de primaria a estos mismos problemas.

Instrumentos

El Cuestionario 1 está formado por cuatro problemas de diferentes características que fueron seleccionados y modificados de otras investigaciones ya que ponen de manifiesto algunas dificultades que alumnos de 10-14 años tienen en su resolución. Estos problemas pueden ser resueltos mediante el algoritmo de la división o por otros métodos alternativos como sumas o restas repetidas, estrategias constructivas o utilizando representaciones gráficas. En el Cuestionario 2 se presentaban cuatro respuestas de alumnos de primaria a cada uno de los problemas. Para su elaboración los problemas del Cuestionario 1 fueron resueltos por un grupo de estudiantes de 6° curso (11-12 años).

En este estudio presentamos los resultados obtenidos en el problema *Pasteles* de división-medida ya que permite mostrar características de la relación entre el conocimiento de los EPM puesto de manifiesto en la resolución del problema y su valoración de las respuestas dadas por los alumnos de primaria:

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- *¿A cuántos niños puedo dar?*
- *¿Qué me sobra?*

Las respuestas de los estudiantes de primaria al problema *Pasteles* se seleccionaron atendiendo a las estrategias de resolución y a los errores identificados en las investigaciones (Figura 1). Una de ellas es correcta (respuesta D con representación gráfica) y las otras tienen diferentes tipos de errores (Tirosh, 2000). La respuesta A utiliza una representación gráfica, tiene un error de conteo y lo que sobra “3 trozos” no se expresa como fracción, además $3/5$ no puede ser el resto porque es igual al divisor; en la respuesta B se opera correctamente con fracciones pero “lo que sobra” no se expresa en relación a las partes en que se divide la unidad (quintos); en la respuesta C se invierten los términos de la división como si esta operación tuviese la propiedad conmutativa y además se aplica mal el algoritmo, pero ambos errores se neutralizan y se obtiene un resultado correcto.

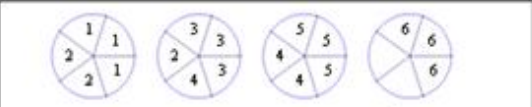
Respuesta A  "Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos"	Respuesta B $4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$ $\begin{array}{r} 20 \overline{) 3} \\ 2 \quad 6 \end{array}$ "Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$"
Respuesta C $\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$ $\begin{array}{r} 20 \overline{) 3} \\ 2 \quad 6 \end{array}$ "Le doy a 6 niños y sobran $\frac{2}{5}$ de pastel"	Respuesta D  "Le puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel"

Figura 1. Respuestas dadas por estudiantes de primaria y seleccionadas en el problema *Pasteles* y que formaban parte del Cuestionario 2

Los EPM resolvieron los cuatro problemas del Cuestionario 1 y 15 días más tarde respondieron al Cuestionario 2 donde debían valorar las respuestas dadas por los alumnos de primaria dándoles una puntuación: 1 punto si consideraban que la respuesta era *totalmente correcta*, 0 puntos si pensaban que la respuesta era *absolutamente incorrecta*, y 0.5 puntos si consideraban la respuesta *parcialmente correcta* y justificar su valoración. Dispusieron de 50 minutos para responder cada uno de los cuestionarios y se les explicó el objetivo del estudio y la forma de responder.

Análisis

Las respuestas de los EPM al problema *Pasteles* en el Cuestionario 1 fueron clasificadas como correctas cuando tanto el procedimiento como la respuesta eran correctos con independencia del método utilizado; como regulares cuando los EPM realizaban un procedimiento correcto e indicaban a cuánto niños se puede dar pero decían que sobraban "2 trozos" o "2 tercios de pastel" o cuando dividían un gráfico en partes no congruentes pero razonaban correctamente; y como incorrectas cuando no interpretaban bien el enunciado o la respuesta no tenía sentido (Figura 2).

En relación al Cuestionario 2, se hizo un análisis de las justificaciones dadas por los EPM a la valoración utilizando categorías que se obtuvieron mediante un análisis inductivo en un estudio previo (Márquez, Callejo, Fernández, 2011): justificaciones basadas en la *corrección* (del método, la ejecución o el resultado), en la *competencia* o en la *explicación* del método empleado.

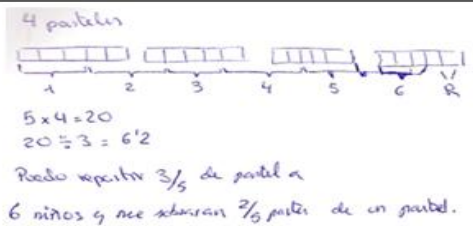
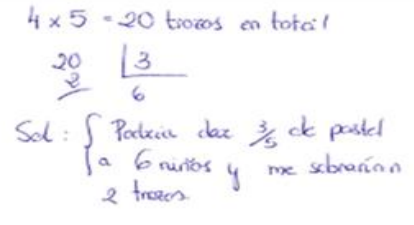
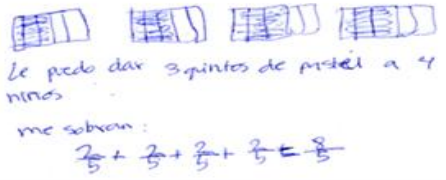
Respuesta	Ejemplos	
Correcta		El EPM hace una representación gráfica dividiendo la unidad (cada pastel) en cinco partes congruentes. Responde correctamente que puede dar pastel a 6 niños y que sobran 2/5 del pastel
Regular		El EPM realiza correctamente una división e indica correctamente que puede darles 3/5 del pastel a 6 niños. Sin embargo señala que quedan 2 trozos en lugar de indicar que quedan 2/5 del pastel.
Incorrecta		El EPM utiliza un procedimiento sin sentido

Figura 2. Categorización de respuestas de los EPM al problema *Pasteles* (Cuestionario 1)

Resultados

Describimos los resultados en dos apartados: (1) resolución por parte de los EPM del problema *Pasteles*, (2) relación entre la resolución del problema (Cuestionario 1) y la valoración dada a las respuestas de los alumnos de primaria (Cuestionario 2).

Resolución del problema *Pasteles*

La Tabla 1 muestra el número de EPM que resolvió el problema correctamente, regular o incorrectamente y el método de resolución seguido: gráfico, aritmético (con o sin fracciones), o cuando usaban dos métodos (uno gráfico y otro aritmético).

Tabla 1. Resolución del problema *Pasteles* y métodos empleados

	Gráfico	Aritmético		Dos métodos	Total	%
		Fracciones	Sin fracciones			
Correcta	26	3	8	7	44	55.7
Regular	5	3	5	3	16	20.2
Incorrecta	9	6	4	0	19	24.1
Total		12	17			
	40		29	10	79	

Los EPM prefirieron los métodos gráficos a los aritméticos y tuvieron más éxito en la resolución del problema cuando aplicaron métodos gráficos (26 de 40, 65.0%) que cuando usaron métodos aritméticos (11 de 29, 37.9%). Los EPM que tuvieron más éxito fueron los que emplearon dos métodos (7 de 10, 70%).

Los 40 EPM que lo hicieron de forma gráfica representaron los pasteles mediante un rectángulo o un círculo. Los 12 EPM que operaron con fracciones lo hicieron de tres formas: dividiendo 4 entre 3/5; con sumas repetidas de 3/5 hasta aproximarse a 4 por defecto; o restando repetidamente 3/5 a 4 hasta obtener un valor inferior a 3/5. Sólo 3 de

ellos (25%) lo hicieron de forma correcta. Otros métodos aritméticos sin utilizar fracciones fueron dividir 20 (quintos) entre 3 (quintos), transformar $\frac{3}{5}$ en 0.6 y dividir 4 entre 0.6. Casi la mitad lo hicieron correctamente (8 de 17, 47%) obteniendo por tanto más éxito que los que operaron con fracciones. De los 10 que emplearon dos métodos, 5 utilizaron fracciones.

Relación entre la resolución del problema por parte de los EPM y su valoración de las respuestas de los estudiantes de Primaria

La Tabla 2 muestra el número de EPM que resolvieron de manera correcta, regular o incorrecta el problema *Pasteles* (Cuestionario 1) y las puntuaciones que dieron a las respuestas dadas por los alumnos de primaria (Cuestionario 2).

Tabla 2. Respuestas de los EPM al problema *Pasteles* (Cuestionario 1) y puntuaciones de las respuestas dadas a las respuestas de los alumnos de primaria

Resoluciones de los EPM (Cuestionario 1)	Valoraciones dadas por los EPM a las respuestas de los estudiantes de primaria (Cuestionario 2)											
	Respuesta A (Gráfico con error)			Respuesta B (División correcta. Interpretación resto incorrecto)			Respuesta C (División con dos errores compensados. Resultado correcto)			Respuesta D (Gráfico correcto)		
	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0
Correctas (44)*	3	29	12	9	28	7	29	9	6	38	4	2
Regulares (16)	0	14	2	3	9	4	11	2	3	13	3	0
Incorrectas (19)	0	14	5	3	16	0	13	4	2	19	0	0
Total 79	3	57	19	15	53	11	53	15	11	70	7	2

*El número que aparece entre paréntesis en las respuestas de los EPM al Cuestionario 1 son el número de EPM que dio una respuesta correcta, regular o incorrecta.

Un alto porcentaje de EPM valoraron la respuesta D como correcta (70 de 79; 88.6%). 38 de ellos lo habían resuelto correctamente, 19 EPM de forma incorrecta y 13 regular. Por tanto hubo EPM que aunque no fueron capaces de resolver el problema correctamente o de dar una explicación explícita de lo que sobraba sí valoraron como correcta esta respuesta de los alumnos de primaria. Por otra parte, de los 44 EPM que resolvieron correctamente el problema, 6 puntuaron esta respuesta con 0.5 o 0. Estos EPM consideraron que aunque el resultado era *correcto*, los alumnos deberían haber operado con fracciones, es decir, apuntaban que la estrategia utilizada *no era competente* al usar gráficos: “*Lo ha realizado correctamente, no obstante la dificultad residía en operar con números fraccionarios*”.

La respuesta A en forma gráfica con error fue puntuada con un 0 por 19 de los 79 EPM y con un 0.5 por 57 de los 79. La mayoría argumentaron que *el resultado era incorrecto* “*Solución incorrecta ya que sobran $\frac{2}{5}$ trozos*”. Este grupo de EPM tuvo en cuenta en su valoración la manera en la que el estudiante de educación primaria expresaba la cantidad que representaba “lo que sobraba”.

En cuanto a las respuestas B y C en las que se opera con fracciones, la mayoría de los EPM valoró la B con 0.5 y la C con 1, aunque C tenía más errores pero el *resultado*

era correcto. Los que puntuaron la respuesta B con 0.5 advirtieron el error de interpretación de las partes en que se divide la unidad y consideraron que la *estrategia/planteamiento utilizado era correcto*. Los que puntuaron con 1 la respuesta C dijeron que tanto la estrategia utilizada como el resultado eran *correctos*: “*La estrategia y la solución son correctas y le doy la máxima nota ya que ha entendido el problema y además ha efectuado las operaciones correctas para solucionarlo*”. Estos EPM focalizaron su atención en que la solución de la *respuesta C era correcta* pero no advirtieron los dos errores en el procedimiento (inversión de términos y algoritmo).

Por otra parte 11 EPM puntuaron la respuesta B con un 0 argumentando que *el resultado no era correcto*: “*El resultado de la operación o conclusión a la que llega no es correcta*”, pero sin indicar que el todo se había dividido en 5 partes y por tanto lo que sobraban no podían ser tercios. Es posible que esta constatación se debiera más al contexto en que se hacía la pregunta, con otras respuestas y una de ellas fácilmente comprensible y correcta (D), que a la comprensión por parte de estos EPM del significado de los términos de una fracción. En otro contexto quizá no se hubiera advertido de forma tan clara el error de interpretación que comete el alumno de primaria. Lo relevante en este dato es que la valoración dada por los EPM se apoyaba en la *corrección o no de la respuesta* sin considerar el procedimiento seguido por los estudiantes de educación primaria.

15 EPM puntuaron la respuesta C con un 0.5 argumentando que la *solución era correcta* y advirtiendo solo un error, ya sea en el algoritmo: “*Lo he calificado con 0.5 porque pese a que la solución es correcta, en la operación de división hay un error puesto que en una división de fracciones no se multiplica así*”, ya sea la inversión de los términos: “*El resultado es correcto. La división de la fracción sería $4:3/5$, pero al final el resultado lo hace correcto*”.

Finalmente 11 EPM puntuaron la respuesta C con un 0 dando a veces las mismas razones que los que puntuaron con 0.5: “*Está mal porque ha dividido lo que tiene que dar a cada persona entre las personas que hay. Después se habrá dado cuenta que $3:20$ no podía ser y lo ha puesto bien, el resultado le da bien pero el planteamiento que es lo que importa está mal*”; sólo 2 de ellos advirtieron los dos errores cometidos. En este caso la valoración se apoyaba en la *no corrección del procedimiento* seguido y no en el resultado obtenido.

Conclusiones y discusión

Esta investigación se enmarca en la línea del conocimiento necesario para enseñar matemáticas (Llinares, 2009; Shulman, 1989). El foco específico ha sido qué conocimiento emplean los EPM cuando valoran respuestas de estudiantes de 6º curso de primaria a un problema de división-medida con fracciones.

Los resultados han mostrado que la mayoría de EPM basó sus justificaciones de las valoraciones de las respuestas en la *corrección o no del método y del resultado*; sólo 6 EPM que lo resolvieron correctamente hicieron mención a la *competencia* del procedimiento y ninguno hizo alusión a la *explicación* del procedimiento para justificar la puntuación. La falta de referencia a la competencia de los distintos procedimientos contrasta con el resultado obtenido en otro trabajo similar con problemas de división-medida con números naturales, donde un gran número de EPM consideraron que los métodos alternativos como sumas o restas repetidas o constructivos eran poco competentes (Márquez, Callejo y Fernández, 2011). Ello se puede explicar por el comportamiento de los EPM en el Cuestionario 1 pues la mayoría usaron métodos

gráficos, sólo 12 de 79 operaron con fracciones y de ellos únicamente 3 lo hicieron correctamente; esto les pudo llevar a considerar que los diferentes métodos empleados por los alumnos de 6° de primaria eran igualmente competentes.

Por otra parte todos los EPM que resolvieron incorrectamente el problema y un buen número de los que lo resolvieron regular fueron capaces de identificar la respuesta correcta (D), pero sin embargo no siempre supieron identificar errores en los procedimientos empleados en otras respuestas, en particular en la C donde el alumno llegaba a un resultado correcto.

En efecto, los EPM valoraron mayoritariamente la respuesta incorrecta (C) con un 1 pues basaron su justificación en la *corrección del resultado* sin tener en cuenta el procedimiento erróneo seguido. Esta manera de valorar la respuesta de los estudiantes de primaria fue independiente de que los EPM hubieran resuelto bien, regular o mal el problema. Este hecho se puede interpretar de dos formas: en primer lugar porque sus conocimientos sobre la división de fracciones eran insuficientes para advertir los errores cometidos, ya que sólo 2 EPM advirtieron los dos errores cometidos. En este sentido, como ya se ha dicho, es especialmente llamativo constatar que de los 44 EPM que resolvieron correctamente el problema, 29 puntuaron con 1 esta respuesta, lo que pone de manifiesto que saber resolver correctamente un problema (conocimiento de matemáticas) no es suficiente para poder valorar adecuadamente las respuestas de los alumnos (conocimiento de contenido pedagógico relativo a la didáctica de la matemática), pues es preciso conocer distintos procedimientos de resolución así como los errores más comunes que cometen los alumnos (Tirosh, 2000). Otra posible interpretación que damos apoyada en otros trabajos (Callejo y Vila, 2009), es que los EPM pudieron considerar suficiente revisar el resultado debido a la creencia de que “en la resolución de un problema el resultado es más importante que el proceso”. Esta segunda interpretación pone de manifiesto el papel de las creencias sobre la resolución de problemas en el proceso de interpretar las respuestas dadas por los estudiantes de educación primaria sobre el que se apoya la valoración realizada, y se refuerza por el hecho de que un mayor número de EPM haya valorado como correcta la respuesta C que la B, ambas con división de fracciones pero mientras en C hay dos errores y el resultado es correcto, en B la división es correcta pero es erróneo el resultado de lo que sobra.

Estos resultados tienen implicaciones para la formación de maestros. En primer lugar muestran la potencialidad de las tareas propuestas para iniciar el desarrollo del conocimiento profesional de los EPM y, en particular, de la competencia para valorar las respuestas de los alumnos de educación primaria. En segundo lugar, la necesidad de considerar perspectivas de formación que incidan no solo en el conocimiento de la materia (comprensión matemática) de los EPM, sino también en el conocimiento pedagógico relativo a la didáctica de la matemática necesario para enseñar matemáticas en la educación primaria. En el contexto de este estudio, el desarrollo de la competencia para valorar las respuestas de los estudiantes implica que los EPM tengan en cuenta el grado de comprensión de los alumnos de primaria del significado de la división, las formas de representación de las fracciones, el nivel de dominio del algoritmo de la división a lo largo de la educación primaria, los errores y las dificultades más comunes y sus causas (Tirosh, 2000).

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación, Secretaria de Estado de Investigación (España) a través del proyecto EDU2011-27288 y de la Universidad de Alicante (España) con el proyecto GRE10-10.

Referencias

- Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Callejo, M.L. y Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two case studies. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 11-126.
- Graeber, A. O., Tirosh, D., y Glover, R. (1986). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 95-102.
- Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 92-101
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teacher and teacher educator as learners. En: A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers
- Márquez, M., Callejo, M.L. y Fernández, C. (2011). Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 417-427). Ciudad Real: SEIEM.
- Nillas, L. (2003). Division of fractions: Preservice teachers' understanding and use of problem solving strategies. *The Mathematics Educator*, 7(2), 96-113.
- Osana, H.P. y Royea, D.A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 333-352.
- Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: Una perspectiva contemporánea. En M.C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza, I. Enfoques, teorías y métodos* (pp. 9-91). Barcelona: Paidós/MEC.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.
- Vergnaud, G. (1997). *El niño, la matemática y la realidad*. México: Trillas.

CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO: ASPECTOS ESTRUCTURALES Y DEFINICIONES PERSONALES

THE CONCEPT OF FINITE LIMIT OF A FUNCTION AT ONE POINT: STRUCTURAL ASPECTS AND PERSONAL DEFINITIONS

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F.

Universidad de Granada

Resumen

El objeto de este trabajo consiste en describir e interpretar las definiciones personales acerca del concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados de investigaciones previas. Estos aspectos estructurales son: la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, algoritmos y destrezas prácticas para su cálculo, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. A partir de esos aspectos estructurales, analizamos las definiciones personales aportadas por un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Entre los resultados destacamos la riqueza de estas definiciones por razón del carácter no alcanzable y no rebasable del límite, y por su consideración dual como objeto o proceso.

Abstract

The purpose of this work consists of describe and interpret the personal definitions related to the concept of finite limit of a function at one point in terms of structural aspects, compiled and synthesized from prior research. These aspects are: the interpretation of the limit notion as an object or a process, its exact or approximate character, algorithms and practical skills for its calculation, its reachability and its possibility of being exceeded. On the base of these structural aspects, we analyze the personal definitions provided by a group of non-compulsory secondary education students on the concept of finite limit of a function at one point. Among results we point out the richness of meaning from these definitions, either by the not reachable and not exceedable character of the limit, and the dual consideration of the limit as an object or process.

Palabras clave: *Límite de una función en un punto; límite finito; concepciones personales; aspectos estructurales del concepto de límite; dualidad objeto/proceso.*

Key words: *Limit of a function at one point; finite limit; personal conceptions; structural aspects of the concept of limit; object/process duality.*

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 - 237). Jaén: SEIEM

El inicio de esta investigación surge de la preocupación por la mejora de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de una función, que parte de una aproximación al tema mediante el diseño de una unidad didáctica sobre este tópico (Fernández-Plaza, 2010). Este trabajo se llevó a cabo siguiendo el procedimiento del análisis didáctico (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 1997). Posteriormente se realizó otro trabajo centrado en la exploración de los significados y concepciones personales que un grupo de estudiantes de bachillerato proporcionaron acerca del concepto de límite finito de una función en un punto (Fernández-Plaza, 2011).

Es objeto general de este informe avanzar y profundizar en la interpretación de las concepciones personales de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto.

Las características estructurales que subyacen en las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite están documentadas por diversos autores. Así es el caso de la dualidad objeto/proceso (Tall, 1980) y el carácter inalcanzable y/o irrebাসable del valor del límite para una función en un punto (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Schwingendorf, Thomas, Nichols y Vidakovic, 1996; Monaghan, 1991; Tall y Vinner, 1981).

Indagar sobre las relaciones entre las concepciones expresadas por los estudiantes y las características citadas, ofrece la oportunidad de revisar, discutir y actualizar las interpretaciones hechas por los autores citados.

El objetivo de este trabajo consiste en describir e interpretar cómo las características estructurales mencionadas forman parte de las definiciones personales de los estudiantes, derivadas de los usos particulares del lenguaje.

Antecedentes y marco teórico

La riqueza y diversidad de procesos de paso al límite y de sus clasificaciones, forma parte de la tradición del Análisis Matemático (Rey Pastor, 1952). Los procesos de paso al límite tienen fundamentación métrica, o bien una topológica más general. De entre ellos, el currículo para el primer curso de Bachillerato especifica procesos discretos, como la tendencia de sucesiones de números reales, y procesos continuos, como la tendencia al límite, continuidad, la derivación e integración de funciones reales de variable real (MEC, 2007).

Tall (1980) documenta que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se “contamina” con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Un ejemplo de esto lo encontramos en los estudiantes que conciben la noción de límite como proceso dinámico y no la identifican con un valor numérico. En contraste, Romero (1997) incide en la fuerte resistencia de los estudiantes a entender y aceptar la notación decimal periódica para un número cuando el periodo es 9:

“Por un lado, en cuanto a su existencia ya que no procede de una división; por otro lado en cuanto a su conversión en un decimal exacto (p. 177)”

Blázquez, Gatica y Ortega (2009) realizan una revisión crítica de definiciones de límite funcional procedentes de libros de texto. Estos autores, al resaltar en algunas de estas definiciones rasgos de subjetividad e imprecisión, justifican así la pertinencia de proponer una definición alternativa que salve las debilidades encontradas. En particular, Blázquez (1999, 2000) enfatiza la necesaria distinción entre los términos “tender” y

“aproximarse” que es imperceptible para algunos estudiantes en un contexto matemático.

Concepciones y Aspectos Estructurales

Consideramos idealmente una *concepción personal* como la descripción que proporciona un sujeto de parte o toda su imagen conceptual asociada a un concepto dado, no necesariamente evocada o activada por una definición¹. En la práctica por *concepción personal*, entendemos la interpretación fundada de lo que el sujeto comunica sobre su imagen conceptual, independientemente de que el mensaje transmitido por el sujeto pueda ser incompleto o defectuoso. La triangulación entre investigadores a la hora de interpretar los enunciados proporciona confianza sobre la validez de las interpretaciones. Las definiciones que dan los estudiantes en contextos informales manifiestan sus concepciones personales. Empleamos el término *definiciones personales* en un sentido análogo al del término *definición conceptual* de Tall y Vinner.

Llamamos *aspectos estructurales* a aquellas características, propiedades, nociones, términos, etc., documentados en la literatura. Contribuyen a describir e interpretar las concepciones personales declaradas por los estudiantes de bachillerato sobre la noción de límite.

A partir de los trabajos sobre el modelo cognitivo *imagen conceptual/ definición conceptual* (Tall y Vinner, 1981), establecemos unas premisas para estudiar las definiciones personales aportadas por los estudiantes para el concepto de límite finito de una función en un punto.

- Las definiciones recogidas tratan de sintetizar, resaltar aspectos relevantes o ampliar algunas concepciones particulares de los escolares provocadas por la instrucción previa y otras cuestiones.
- El análisis aislado de estas definiciones no proporciona indicadores suficientes para describir dichas concepciones, dado que no logran abarcar toda la imagen conceptual subyacente, sobre todo cuando “reproducen” la definición dada por el profesor o el libro de texto.
- La consideración de las dos premisas anteriores requiere de una selección y descripción de los aspectos estructurales subyacentes, de manera que sirvan para interpretar toda la gama de matices que aparecen en las definiciones planteadas.

Para lograr el objetivo de este trabajo valoramos la pertinencia de los aspectos estructurales para describir e interpretar las definiciones personales declaradas por un grupo de estudiantes de bachillerato.

Método

Se trata de un estudio descriptivo basado en el método de encuesta con un reactivo abierto, cuyo diseño resumimos a continuación.

¹ Se llama *imagen conceptual* de un concepto al conjunto de representaciones mentales del concepto y de las propiedades que el sujeto asigna a tales representaciones, en definitiva, la estructura cognitiva global asociada a tal concepto (Tall y Vinner, 1981). Nuestra noción de *concepción personal* extiende la noción empleada por estos autores de *definición conceptual*, como la explicación que el sujeto proporciona de la imagen conceptual evocada por una definición de referencia, tanto de manera rutinaria, como por reconstrucción subjetiva.

Sujetos

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes españoles de primer curso de Bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología, todos del mismo grupo académico. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia teórica se utilizaron el libro de texto *Matemáticas I* de la editorial SM y los apuntes propios del profesor.

Instrumento y aplicación

El instrumento utilizado es un cuestionario que se puede consultar en Fernández-Plaza (2011) del cual seleccionamos una pregunta abierta con el siguiente enunciado:

“Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto”.

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010/2011. El cuestionario se aplicó durante una sesión ordinaria de trabajo en la clase de matemáticas.

Resultados

En primer lugar, realizamos un volcado de las definiciones personales de los 36 sujetos. Para la interpretación fundada de éstas buscamos qué aspectos estructurales las discriminan, sin destacar errores o aciertos. Conforme a las premisas explicitadas en los antecedentes y marco teórico, detallamos las categorías de análisis.

Selección y caracterización de los aspectos estructurales.

Cada uno de los aspectos teóricos y sus variantes se identifica mediante un código que aparece entre paréntesis. Por limitaciones de extensión, los ejemplos se muestran en la tabla 1, sirviendo los códigos para identificar las variantes de los aspectos considerados.

- *Aspecto estructural Objeto/Proceso.* Este aspecto trata las consideraciones generales de los estudiantes sobre el concepto de límite como objeto, como proceso o bien, una interpretación dual (Cottrill et al., 1996; Sfard, 1991; Tall, 1980). Dentro de este aspecto estructural consideramos distintas variantes que pueden darse de manera simultánea:
 - o *Tipo de objeto/proceso (OP):* Se establecen distintas referencias para el “objeto límite” (lugar del plano, conjunto de puntos, recta, etc.); en algunos casos, se destaca también su dualidad procesual (aproximación).
 - o *Vinculación entre límite e imagen (LI):* Cuando el escolar asigna al límite un valor de imagen se observa una *Identificación* (de manera general), una *Conexión* (en casos particulares) o bien una *Independencia* entre dicho límite y el valor imagen de la función (Blázquez y Ortega, 1998).
 - o *Descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc.):* Los escolares sólo se refieren a la variable x (Blázquez y Ortega, 1998).

- *Referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR)*: Empleo de términos para el objeto/proceso límite relacionados con un sistema de representación diferente al numérico o simbólico.
- *Aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo*. Este aspecto está relacionado con los modos que tienen los escolares de interpretar los procesos infinitos formales mediante técnicas finitas de determinación del valor del límite, basadas en la continuidad y en las propiedades algebraicas del concepto de límite. Entre esas técnicas destacamos las siguientes:
 - *Evaluación en el punto (Sustitución directa) (Eval.)*: No necesariamente implica la vinculación entre límite e imagen.
 - *Tabla de valores (TVal)*: Los escolares expresan acciones similares a “dar valores a x ”.
 - *Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)*: Los escolares expresan que los procesos de cálculo del límite, bien por la izquierda o bien por la derecha, deben dar el mismo resultado.
- *Aspectos estructurales Alcanzabilidad y Rebasabilidad (Alcanz. y Reb.)*. La posibilidad o no de alcanzar o rebasar el límite puede ser expresada por los escolares en sus definiciones. (Cornu, 1991; Monaghan, 1991).
- *Reproducción de la definición de referencia (Ref)*. También hay que tener en cuenta aquellas definiciones que reproducen la dada bien por el profesor o por el libro de texto y no tienen otros elementos característicos.

Caracterización de las definiciones personales

Los criterios empleados para la clasificación de las definiciones personales son:

- a) Localización de aspectos estructurales subyacentes y sus relaciones, así en el ejemplo “Es el conjunto de puntos...” de la tabla 1 hay presentes dos aspectos relacionados: *un tipo de objeto* (Conjunto de puntos del plano) y *referencia a un sistema de representación distinto al numérico y simbólico* (la referencia puntos del plano alude implícitamente a un sistema de representación gráfico-geométrico). Estos dos aspectos estructurales dan nombre a la familia I (OP-SR).
- b) Discriminación de definiciones dentro de una misma familia mediante aspectos estructurales no compartidos. El ejemplo “Es el lugar del plano...” pertenece a la familia I (OP-SR), pero añade dos matices, el carácter no alcanzable y el no rebasable del límite, determinando una subfamilia I.1 (No alcanz.-No Reb.).
- c) Agrupación de familias por aspectos estructurales comunes, en el ejemplo, la variante estructural OP define un grupo que incluye las familias I, II.

Obtenemos así 11 familias de definiciones organizadas en 7 grupos, con sus correspondientes subfamilias, que se resumen en la tabla 1. Dado el pequeño tamaño de la muestra, prescindimos del análisis estadístico descriptivo, fijándonos únicamente en la existencia de representantes para las familias consideradas. Por cuestiones de espacio, sólo mostramos las definiciones más completas.

Tabla 1

Familias de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos

Familias de definiciones (Aspectos estructurales comunes)	Subfamilias de definiciones (Aspectos estructurales diferenciadores)
I. OP – SR <i>“Es el conjunto de puntos del plano a los que se aproxima una función cuando x tiende a un número...”</i>	I.1. No Alcanz – No Reb. <i>“Es el lugar del plano en el cual la función $f(x)$ no llega a tocar o pasar...”</i>
II. OP – Desc.	II.1. Alcanz. <i>“...todos aquellos valores que puede adquirir la incógnita x hasta llegar al punto dado”</i> II.2. No Alcanz. <i>“...todos aquellos números que se acercan a dicho punto pero sin llegar a alcanzarlo”</i>
III. Desc. <i>“Es el número al que se va aproximando x”</i>	
IV. Indentidad LI	IV.1. No Alcanz. <i>“Sería el valor que toma una función, al acercarse a un valor, pero nunca lo alcanza”</i>
V. Conexión LI - Eval. <i>“... es aquel punto al que tiende la función siendo sustituida en la función la x por un número dado”</i>	
VI. Independencia LI – CLDC <i>“... No hace falta que el límite tenga imagen. El límite por la derecha y por la izquierda tiene que ser el mismo número”</i>	
VII. SR–TVal. <i>“...es un número situado en una gráfica al cual se pretende acercar mediante valores de x”</i>	
VIII. SR–No Alcanz. <i>“...es aquel que no permite que la función se represente gráficamente”</i>	
IX. No Alcanz.	IX.1. No reb. <i>“... es aquel punto donde la función no puede llegar nunca a sobrepasar o tocar, se puede aproximar pero nunca tocar o pasar...”</i> IX.2. CLDC-Tval. <i>“...En estos casos se haría una tabla de valores para ver qué números son los que se acercan por la</i>

Tabla 1

Familias de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos

Familias de definiciones (Aspectos estructurales comunes)	Subfamilias de definiciones (Aspectos estructurales diferenciadores)
	<i>izquierda y por la derecha</i>
X. No reb.	X.1. Alcanz. “...es el número límite al cual puede llegar la función”
XI. Ref. “... es el número al que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca a ese punto”	

La descripción general de cada familia y subfamilia se hace en términos de los aspectos estructurales que la determinan (remítase el lector al apartado “Afinamiento de los aspectos estructurales teóricos”).

Discusión y conclusiones

Resumimos el alcance de las definiciones personales de los estudiantes en cuanto a las características estructurales se refiere:

1. *Atribuciones personales de objeto al límite (límite de la variable x (Blázquez y Ortega, 1998), recta, lugar del plano, conjunto infinito de puntos, etc.)* → Familias I, II y III.
2. *Atribuciones personales de proceso al límite (aproximación)* (Tall, 1980). → Familia II.
3. *Alcanzabilidad y Rebasabilidad como atribuciones personales al objeto en relación al proceso* (Cornu, 1991; Monaghan, 1991). → Subfamilias de I, II, IV, IX y X; Familias IX y X.
4. *Relación de identidad, conexión o independencia entre los objetos límite e imagen.* (Blázquez y Ortega, 1998; Sierra, González y López, 2000). → Familias IV, V y VI
5. *Destrezas prácticas de cálculo (tabla de valores y evaluación) y condiciones de lateralidad y doble convergencia.* → Familias V, VI y VII.
6. *Proceso de definir con apoyo en el sistema de representación gráfico.* → Familias I, VII y VIII.
7. *Reproducción de la definición de referencia.* Un 25% de las definiciones son de este tipo; creemos pues que el sesgo debido a la instrucción previa no es relevante.

Extraemos las siguientes conclusiones útiles para dar continuidad al trabajo o implicaciones para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite:

- Los aspectos estructurales Alcanzabilidad y Rebasabilidad subyacen en la mayoría de las familias de definiciones obtenidas, enfatizando la importancia que los escolares le dan como propiedades del concepto de límite. Formulamos la conjetura de que los ejemplos gráficos empleados en la enseñanza pueden estar pronunciando la percepción intuitiva de los estudiantes sobre estas propiedades. La planificación y diseño de una propuesta didáctica debería incluir medidas de detección y tratamiento de estos aspectos.
- Son relevantes los “modos de ver” un mismo concepto sutilmente distintos al modo intuitivo de introducirse en el aula. El registro gráfico constituye un apoyo alternativo para construirlas.
- Conjeturamos que la identificación o conexión del límite con la imagen se debe a una comprensión insuficiente de la evaluación como destreza práctica de cálculo del límite, es decir, a la generalización de su uso practicado en un contexto continuo a otros que carecen de esa propiedad.
- Conjeturamos que la identificación del límite como límite de la variable x , fruto de la descoordinación de los procesos en dominio y rango de la función, se debe a la resistencia a aceptar la no existencia de límite en contextos determinados, contrastada por Blázquez y Ortega (1998) en el caso particular de funciones con límites laterales finitos y distintos.

De este modo se alcanza el objetivo al mostrar la pertinencia de los aspectos considerados para organizar las definiciones personales e interpretarlas según ideas claves o familias de definiciones basadas en los aspectos estructurales convenientemente afinados.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Modelización y representaciones en educación matemática” (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Pensamiento Numérico y Algebraico. Didáctica de la matemática) del 3^{er} Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

Referencias

- Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. *Actas del III SEIEM*: Valladolid, 1999 (pp. 167-184) Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, 10, 119-135.
- Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 12(1), 145-168.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Cottrill, J., Dubinsky, Ed., Schwingendorf, K., Thomas, K., Nichols D. and Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- Fernández-Plaza, J.A. (2010). *Unidad didáctica: Límite y Continuidad de Funciones*. Trabajo final del Máster de Secundaria. Granada: Universidad de Granada.
- Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por Estudiantes de Bachillerato respecto al Concepto de Límite Finito de una Función en un punto. Estudio Exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Tesis doctoral*. Granada: Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J.L (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- MEC (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE*, 266, 45381-45477
- Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
- Rey Pastor, J. (1952). Elementos de la teoría de funciones. Madrid: el Autor.
- Rico, L. (Ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: Una experiencia de investigación-acción*. Granada: Comares.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 1-36.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), 71-75.
- Tall D.O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In Karplus, R. (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 170-176, Berkeley.
- Tall, D.O. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151- 169.

LA ENCAPSULACIÓN DE PROCESOS EN OBJETOS ANALIZADA DESDE LA PERSPECTIVA DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

LOOKING THE ENCAPSULATION OF PROCESSES INTO OBJECTS FROM THE ONTOSEMIOTICAL APPROACH

Font, V. ⁽¹⁾, Badillo, E. ⁽²⁾, Trigueros, M. ⁽³⁾, Rubio, N. ⁽⁴⁾

Universitat de Barcelona ⁽¹⁾, Universitat Autònoma de Barcelona ⁽²⁾, Instituto Tecnológico Autónomo de México ⁽³⁾, Pontificia Universidad Católica del Perú ⁽⁴⁾

Resumen

En este trabajo, después de un breve resumen del APOE y del EOS, se analiza una descomposición genética de la derivada, realizada usando los constructos teóricos del APOE, desde la perspectiva del EOS. La mirada realizada desde el EOS se focaliza en la encapsulación de procesos en objetos que, según el APOE, se realiza en dicha descomposición genética. Esta mirada nos permite concluir que la manera de conceptualizar la encapsulación de procesos en objetos en el APOE no informa sobre la naturaleza del objeto que ha emergido ni de sus cambios de naturaleza.

Abstract

In this paper, after a brief overview of the APOS and the OSA, we analyze a genetic decomposition of the derivative, performed using the theoretical constructs of APOS, from the perspective of OSA. This OSA perspective focuses on the encapsulation of processes into objects that, according to the APOS, is performed in such genetic decomposition. This view allows us to conclude that the way to conceptualize the encapsulation of processes into objects in the APOS does not report the nature of the object that has emerged neither its changes of nature.

Palabras clave: Encapsulación, objeto matemático, teoría APOE, Enfoque Ontosemiótico.

Key words: Encapsulation, mathematical object, APOS theory, Ontosemiotical Approach.

Introducción

Actualmente en el área de Educación Matemática la conexión entre diferentes marcos teóricos es un tópico que está recibiendo una atención considerable (Prediger, Bikner-Ahsbals y Arzarello, 2008). En esta línea, se han publicado trabajos que se han interesado por la conexión entre la Teoría APOE y el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Font, Montiel, Vidakovic y Wilhelmi, 2011). Dicho interés se relaciona con la necesidad de un desarrollo del APOE con aportes de teorías semióticas (Badillo, Azcárate y Font, 2011; Trigueros y Martínez-Planell, 2010). En este trabajo se pretende profundizar en la conexión entre ambas teorías, para ello se analiza, desde la perspectiva del EOS, una descomposición genética de la derivada realizada usando los constructos teóricos del APOE. Esta mirada permite concluir que la manera de conceptualizar la encapsulación de procesos en objetos en el APOE no informa sobre la naturaleza del objeto que ha emergido ni de sus cambios de naturaleza.

El esquema que seguimos es el siguiente, después de esta introducción, en la sección dos se hace un resumen de las dos teorías consideradas, enfatizando el uso del término objeto que se hace en ellas. En la sección tres se propone una descomposición genética de la derivada, que se usa como contexto de reflexión. En la sección 4 se reflexiona sobre el proceso de encapsulación que se realiza en dicha descomposición genética desde el punto de vista del EOS. En la sección 5 se coordinan las dos teorías en el análisis del mecanismo de encapsulación.

Marcos teóricos

A continuación sigue un breve resumen del APOE y del EOS, enfatizando el uso del término objeto que se hace en cada una de ellas

Enfoque Ontosemiótico

La figura 1 (Font y Contreras, 2008, p. 35) muestra algunas de las nociones teóricas propuestas por el EOS. En este enfoque la actividad matemática juega un papel central y es modelada en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. A partir de las prácticas emergen los diferentes tipos de objetos primarios (lenguaje, definiciones, procedimientos, proposiciones, problemas y argumentos) organizándose en configuraciones epistémicas o cognitivas, según se adopte un punto de vista institucional o personal (hexágono interior de la figura 1).

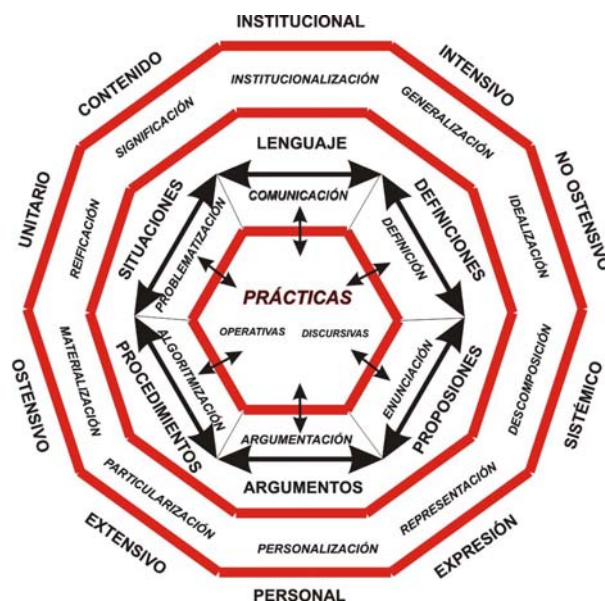


Figura 1. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático

Los problemas contextualizan y desencadenan la actividad matemática; el lenguaje (notaciones, gráficos, etc.) representa a las otras entidades y sirve como herramienta para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que relacionan las definiciones. Finalmente, estos objetos primarios que emergen de las practicas matemáticas, según el juego de lenguaje que se considera se pueden mirar desde cinco facetas duales (decágono exterior de la figura 1): personal/institucional, unitario/sistémico, expresión/contenido, ostensivo/no-ostensivo y extensivo/intensivo. Tanto las dualidades como los objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos de la figura 1.

La emergencia de los objetos en el EOS

En Font, Godino y Gallardo (2012) se explica cómo se entiende en el EOS la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas. Resumimos brevemente a continuación dicho proceso. Según estos autores, el proceso por el cual los objetos matemáticos emergen a partir de las prácticas es complejo y en él deben ser distinguidos dos niveles. En un primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos (objetos primarios). Con relación a la naturaleza de dichos objetos, en el EOS, de acuerdo con la filosofía convencionalista de las matemáticas de Wittgenstein, se considera que el tipo de existencia de las definiciones, proposiciones y procedimientos es el que tienen las reglas convencionales. Desde este punto de vista, los enunciados matemáticos son reglas (gramaticales) para el uso de cierto tipo de signos porque de hecho se usan como reglas. No describen propiedades de objetos matemáticos con algún tipo de existencia independiente de las personas que quieren conocerlos y del lenguaje que se usa para conocerlos, aunque lo pueda parecer.

Aunque en el EOS se adopta un punto de vista convencionalista sobre la naturaleza de los objetos matemáticos no se ignora que implícitamente se está sugiriendo, en los procesos de enseñanza, una visión descriptiva/realista de las matemáticas. Para poder explicar cómo se genera dicha visión es necesario considerar un segundo nivel de emergencia en el que emerge un objeto matemático, por ejemplo el

objeto función, que es considerado como un objeto que se representa por diferentes representaciones, que puede tener varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc.

Para explicar cómo emergen los objetos primarios, resulta útil la metáfora “subir una escalera”. Cuando se sube una escalera siempre se está apoyado en un pie, pero cada vez el pie está en un escalón superior. La práctica matemática se puede considerar como “subir una escalera”. El escalón en el que nos apoyamos para realizar la práctica es una configuración de objetos primarios ya conocida, mientras que el escalón superior al que accedemos, como resultado de la práctica realizada, es una nueva configuración de objetos en la que alguno (o algunos) de dichos objetos no era conocido antes. Los nuevos objetos primarios aparecen como resultado de la práctica matemática y se convierten en objetos primarios institucionales gracias, entre otros procesos considerados en la figura 1 (incluyendo reificación e idealización), a procesos de institucionalización.

La segunda emergencia es el resultado de diferentes factores. Los principales son los siguientes: 1) El discurso sobre las matemáticas que, de manera explícita o implícita, envía a los alumnos el mensaje de que las matemáticas son una ciencia “cierta”, “verdadera” u “objetiva”. 2) El éxito predictivo de las ciencias que usan las matemáticas, se utiliza, de manera explícita o implícita, como argumento para avalar la existencia de los objetos matemáticos. 3) La simplicidad que se deriva de la postulación de la existencia de los objetos matemáticos. Su postulación está justificada por ventajas prácticas, en especial simplifica la teoría matemática que se está estudiando. Resulta muy cómodo considerar que existe un objeto matemático que es representado por diferentes representaciones, que se puede definir por varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc. 4) La metáfora objetual, la cual siempre está presente en el discurso matemático ya que en él las entidades matemáticas se presentan como “objetos con propiedades”. En el discurso matemático es habitual el uso de determinadas expresiones metafóricas que sugieren que los objetos matemáticos son objetos preexistentes descubiertos; nos referimos a palabras del tipo “describir”, “hallar”, etc. 5) El discurso sobre objetos ostensivos que representan objetos no ostensivos. En el discurso matemático es posible (a) hablar sobre objetos ostensivos que representan objetos no ostensivos que no existen (por ejemplo, se puede decir que $f(a)$ no existe porque la gráfica de $f(x)$ tiene forma de punta en $x = a$); y (b) diferenciar un objeto matemático de una de sus representaciones (por ejemplo, distinguir entre la función y su gráfica). Ambos aspectos llevan a los estudiantes a interpretar a los objetos matemáticos como algo diferente a sus representaciones ostensivas.

Estos cinco factores generan, implícitamente o explícitamente, la visión descriptiva - realista de las matemáticas que considera (1) que las proposiciones matemáticas describen propiedades de objetos matemáticos y (2) que dichos objetos tienen algún tipo de existencia independiente de las personas que los conocen y del lenguaje que se usa para conocerlos. Dicha visión resulta difícil de evitar ya que las razones que llevan a generarla están actuando constantemente y de manera muy sutil. Más que una posición filosófica asumida conscientemente, se trata de una forma de entender los objetos matemáticos que está presente de manera implícita.

La teoría APOE

APOE es un acrónimo de las iniciales de los términos: acciones, procesos, objetos y esquemas, que son las construcciones mentales que, en según esta teoría, un sujeto realiza para construir conceptos matemáticos. Una *acción* es una transformación de

objetos que el sujeto percibe como algo externo y se lleva a cabo como reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a realizar. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede *interiorizarse* en un *proceso*. El *proceso* es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos al individuo, de forma que éste puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos. Los *objetos* se pueden construir cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como un *objeto*. En este caso, el proceso se ha *encapsulado* en un *objeto*. Procesos y objetos se relacionan en virtud de que los primeros actúan sobre los segundos. Una colección de procesos y objetos puede ser organizada en una manera estructurada para formar *esquemas* (Dubinsky y McDonald, 2001). Un esquema para un determinado concepto matemático es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas conectados de manera consciente o inconsciente en un marco coherente en la mente del sujeto. La propuesta teórica APOE, permite delimitar y describir el camino hacia la construcción, de un concepto matemático, en la mente de un sujeto. La descripción teórica de los pasos que ha de seguir esta construcción se llama *descomposición genética* (DG).

Los objetos en el APOE

En la teoría APOE el mecanismo de encapsulación y desencapsulación juega un papel muy importante en la emergencia de objetos, los cuales son integrados en esquemas que, a su vez, pueden ser convertidos en objetos mediante otro mecanismo llamado tematización. Esta caracterización de la emergencia de objetos matemáticos proviene básicamente de la tradición psicológica, en particular son una extensión del trabajo de Piaget sobre la abstracción reflexiva al pensamiento matemático avanzado.

Propuesta de una descomposición genética para la derivada

A continuación sigue la DG de la derivada que los autores hemos realizado a partir de las DG propuestas en Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf (1997) y Badillo (2003). Esta descomposición se ha realizado utilizando únicamente los constructos teóricos del APOE:

- 1a. Gráfico-analítico: la acción de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda que es una porción de la secante, a través de los dos puntos; junto con la acción de calcular la pendiente de la recta secante a través de los dos puntos
- 1b. Algebraico-numérico: la acción de calcular la tasa media de variación entre el punto y otro punto “próximo” $\left(m = \bar{V} = TMV = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$
- 2a. Gráfico-analítico: interiorización de las acciones del punto 1a en un proceso único a medida que los dos puntos del gráfico se aproximan más y más
- 2b. Algebraico-numérico: interiorización de las acciones para calcular la tasa media de variación $\left(m = \bar{V} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$, cuando $b \rightarrow a$; en un proceso único, a medida que la diferencia entre los intervalos se hacen más y más pequeños. Esto es a medida que la longitud del intervalo se acerca más y más a cero

- 3a. Gráfico-analítico: encapsulación del proceso del punto 2a para producir la recta tangente como la posición límite de las secantes, y para producir la pendiente de la tangente en un punto sobre la gráfica de una función.
- 3b. Algebraico-numérico: encapsulación del proceso del punto 2b, de calcular las tasa medias de variación $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ cuando $b \rightarrow a$, para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra como el $\left(\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)\right)$
- 3c. Coordinación gráfica y algebraica de los procesos de construcción 2a y 2b de la tasa instantánea de variación en un punto.
- 3d. Gráfico-analítico: interiorización de las acciones para construir la tasa instantánea de variación en términos de cocientes de incrementos de variaciones verticales y horizontales cuando $h \rightarrow 0$.
- 3e. Algebraico-numérico: interiorización de las acciones para construir la tasa instantánea de variación en términos de cocientes de incrementos de las variables dependientes e independientes cuando $h \rightarrow 0$.
- 3f. Coordinación de los procesos 3d y 3e.
- 3g. Encapsulación del proceso 3f en el objeto tasa instantánea de variación en cualquier punto de la función como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
- 4a. Numérico- gráfico: Dado un conjunto de puntos en una tabla o en forma gráfica, que relaciona dos magnitudes, realizar las acciones de unir dos puntos consecutivos de la gráfica mediante un segmento de recta y calcular su pendiente, o en el caso de la tabla, usar dos puntos consecutivos para calcular la tasa media de variación.
- 4b. Numérico- gráfico: Interiorización de estas acciones en un proceso que permite obtener una razón de cambio como una aproximación razonable a la razón de cambio instantánea en un punto.
- 4c. Numérico- gráfico: Encapsulación del proceso anterior como un objeto $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ equivalente (en un contexto numérico o gráfico de relación entre magnitudes) al objeto razón de cambio instantánea en un punto. En el caso de la velocidad $\left(\frac{\Delta d}{\Delta t} = v\right)$.
- 4d. Coordinar el proceso 4b con el proceso 3d para considerar la posibilidad de reducir el valor del denominador del cociente.
- 4e Encapsular el proceso anterior en el objeto razón de cambio instantánea en un punto, como límite de razones de cambio $\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ en un punto.
5. Relacionar los objetos que resultan de encapsular 3b, 3g y 4e para formar un esquema de derivada en un punto.

6. Tematizar el esquema anterior en el objeto derivada en un punto

$$\left(m_{\tan} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) \right)$$
7. Generalizar la acción de calcular la derivada en un punto en un proceso que permite calcular la derivada en cualquier punto de la función.
8. Encapsular el proceso anterior en el objeto función derivada $f'(x)$
- 8a. Hacer acciones sobre el objeto $f'(x)$ para calcular la derivada de las operaciones con funciones.
- 8b. Interiorizar y generalizar dichas acciones en los procesos que permiten calcular las reglas de derivación de funciones.
- 8c. Encapsulación de los procesos anteriores en los objetos que describen las reglas de derivación como propiedades de la derivada.
9. Relacionar los objetos construidos en 6 y 8 en un esquema que evoluciona a través de su uso y/o la modificación de las relaciones entre sus elementos constituyentes para encontrar propiedades de una función cualquiera y de su derivada (monotonía, concavidad, descripción y construcción de gráficas, optimización, etc.).
10. Tematización del esquema derivada.

Una mirada al mecanismo de encapsulación desde el EOS

En el APOE, tal como se ha dicho, hay básicamente dos usos del término objeto. Se considera como un objeto el resultado de la encapsulación de un proceso o bien el resultado de la tematización de un esquema.

En este apartado, utilizando como contexto la DG anterior, se reflexiona, desde la mirada que ofrece la ontología propuesta en el EOS, sobre la emergencia de objetos a partir del mecanismo de encapsulación. El mecanismo de tematización no se analiza por cuestiones de espacio y se deja para futuros trabajos.

En la DG que se propone, la encapsulación aparece primero en 3a y 3b. El punto 3a es el mismo que se propone en la DG de Asiala et al., en cambio el punto 3b se ha modificado sustancialmente con relación a dicha DG “3b. Analítico: encapsulación del proceso del punto 2b para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra” (Asiala et al., 1997, pp. 426-427).

En nuestro intento de precisar la DG de Asiala et al., en el punto 3b, se ha incorporado una aclaración en forma de definición implícita del objeto que resulta de la encapsulación.

En el paso de la acción al proceso y su posterior encapsulación como objeto, desde la mirada que ofrece el EOS, intervienen muchos aspectos que informan de su complejidad. Primero, el alumno debe comprender que las acciones ejecutadas se pueden realizar de acuerdo a un determinado procedimiento (una regla que dice cómo se deben hacer las acciones). En este momento, ya se produce un determinado nivel de reificación, en el sentido que el procedimiento se puede tratar como una unidad (un objeto, un todo). A continuación, el alumno debe considerar un nuevo objeto, el resultado del proceso, y por último debe comprender el significado de la definición que informa de la naturaleza del nuevo objeto.

Desde la perspectiva del EOS, la encapsulación de un proceso en un objeto es un mecanismo complejo en el que hay que considerar (1) objetos primarios de naturaleza diferente y (2) la intervención de una densa trama de funciones semióticas relacionadas con los procesos asociados a las dualidades unitario/sistémico y extensivo/intensivo (Font y Contreras, 2008). Dicha complejidad se puede resumir en el esquema siguiente:

Generación de una sucesión de tasas medias de variación que se acercan al límite $f'(a)$ (procedimiento) $\rightarrow$ Clase de $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)$ con $b \rightarrow a$ (aplicación de las dualidades unitario/sistémico y extensivo/intensivo) $\rightarrow$ Un objeto (un número) diferente a la clase anterior $\left(\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) \right)$ (definición) $\rightarrow$ el nombre “tasa instantánea de variación” (objeto notacional).

En este trabajo no entraremos a explicar la trama de funciones semióticas que un sujeto tiene que activar para poder comprender el significado de la derivada en un punto, ya que ésta se puede obtener fácilmente como adaptación de la trama de funciones semióticas activada en la comprensión de la función derivada propuesta en Font y Contreras (2008). Lo que sí se quiere resaltar en este trabajo es que la mirada que aporta el EOS sobre la encapsulación permite apreciar que en ésta se produce un cambio de naturaleza doble, por una parte se pasa de proceso a objeto como señala el APOE y, por otra parte, según el EOS, se cambia la naturaleza del objeto primario (en el ejemplo considerado se pasa de un procedimiento a una definición).

Lo que se acaba de decir también es aplicable a las encapsulaciones descritas en 3g y 4e. En el caso de la encapsulación descrita en 8c, el cambio de naturaleza se produce entre un procedimiento y una propiedad.

Desde la perspectiva del EOS, el cambio de la naturaleza del objeto primario producido en la encapsulación no resulta sorprendente y se explica, tal como se ha señalado en el apartado 2.1, por el hecho de que la naturaleza de fondo de las definiciones, procedimientos y propiedades es, según este enfoque, la de ser reglas.

Coordinación entre los dos enfoques teóricos

En este trabajo establecemos una conexión parcial sobre el uso que hacen las dos teorías consideradas del término “objeto matemático”. En el APOE se usa para referirse (1) a la encapsulación de un proceso y (2) a la tematización de un esquema. Nuestra conclusión es que la noción de encapsulación del APOE se relaciona con la noción de emergencia de un objeto primario en el EOS, mientras que la noción de tematización (aspecto no tratado en este trabajo) estaría relacionada con la noción, considerada en el EOS, de segundo nivel de emergencia de un objeto matemático.

En el APOE se considera que el resultado de la encapsulación de un proceso es un objeto. Dicho de otra manera, el resultado del proceso de encapsulación es “algo” sobre lo que se pueden realizar nuevas acciones. La mirada que aporta el EOS sobre la encapsulación permite apreciar que en ésta se produce un cambio de naturaleza doble, por una parte se pasa de proceso a objeto (primario según el EOS), tal como señala el APOS, pero por otra parte, y no menos importante, se cambia la naturaleza del objeto primario (por ejemplo, en el primer caso considerado se pasa de un procedimiento a una definición).

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-08120. Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias

- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematics Behavior*, 16(4), 399-430.
- Badillo, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Badillo, E.; Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.
- Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. Series: New ICMI Study Series, Vol.7 (pp. 273–280). Dordrecht: Kluwer.
- Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69(1), 33-52.
- Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2012). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, Online First. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0.
- Font, V.; Montiel, M.; Vidakovic, D. y Wilhelmi, M. R. (2011). Analysis of Dimensional Analogy by Means of Different Theoretical Perspectives. In R. V. Nata (Ed.), *Progress in Education*, Volume 19 (pp. 39-76). Hauppauge, NY: Nova.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahr, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 165-178.
- Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two- variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19.

ANÁLISIS HISTÓRICO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA RAZÓN Y LA PROPORCIÓN

HISTORICAL ANALYSIS OF THE TEACHING OF RATIO AND PROPORTION

Gairín, J.M.¹ (1), Oller, A.M. (2)

Universidad de Zaragoza (1), Centro Universitario de la Defensa (2)

Resumen

En este trabajo se realiza un análisis del tratamiento recibido por los conceptos de razón y proporción en textos escolares españoles de los últimos 160 años. Fruto de dicho análisis se presentan algunas alternativas a la enseñanza actual que pretenden mejorar el modo en que los alumnos de secundaria adquieren y manejan dichos conceptos.

Abstract

In this work we discuss the treatment that the concepts of ratio and proportion have received in Spanish textbooks during the last 160 years. As a result, we present some alternatives to the current practice that might improve the way in which Secondary school pupils acquire and handle those concepts.

Palabras clave: *Análisis de textos, práctica educativa, razón, proporción, secundaria.*

Key words: *Analysis of textbooks, educational practice, ratio, proportion, secondary school.*

¹ Financiado por el proyecto I+D+i, EDU2009-12063, del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Introducción

La situación con la que iniciamos este trabajo tuvo lugar en clase de la asignatura optativa *Juegos Educativos Matemáticos* que el primer autor imparte para alumnos de 2º y 3º de la Diplomatura de Magisterio. Se plantea a los estudiantes la siguiente propuesta:

Resolver de dos formas el siguiente problema:

A una reunión asisten 100 personas. Cada una saluda a las restantes mediante un apretón de manos. ¿Cuántos apretones de manos se producirán en total?

El estudiante A respondió del siguiente modo:

“Primera forma: mediante una regla de tres. Si una persona da 99 apretones de manos, 100 personas darán x apretones de manos. Resuelvo la regla de tres y me salen 9900 apretones de manos.

Segunda forma: al ver el resultado de la primera forma me he dado cuenta de que se puede resolver mediante una multiplicación. He multiplicado 100×99 y me sale el mismo resultado, 9900 apretones de manos.”

La situación que acabamos de presentar ilustra dos fenómenos provocados por la enseñanza tradicional de la proporcionalidad y, en concreto, de la regla de tres:

1. Se elige la técnica de resolución de un problema por la estructura del enunciado y no por la adecuación de la misma al problema. Así, en situaciones en las que aparecen dos magnitudes de manera que se conoce una pareja de valores relacionados (número de personas y apretones de manos en el ejemplo) y después se desea encontrar la cantidad (desconocida) asociada a un valor conocido de una de esas magnitudes se tiende a utilizar la regla de tres sin valorar la existencia o no de proporcionalidad entre las magnitudes implicadas.
2. El uso de la regla de tres eclipsa los conocimientos anteriores sobre los significados de las operaciones en las estructuras multiplicativas de los naturales y los racionales positivos. Así (como apreció el propio estudiante) se recurre a una regla de tres cuando basta hacer uso de un significado de la multiplicación.

Pensamos que estos dos fenómenos, que se mantienen hasta la enseñanza universitaria (Espinell et al., 2010), tienen su origen en la práctica educativa, más allá de la dificultad de los conceptos involucrados o de las deficiencias cognitivas de los alumnos. Sin embargo encontramos que la mayor parte de los trabajos dedicados a la didáctica de la proporcionalidad aritmética se centran principalmente estas dos últimas posibilidades (Fernández y Llinares, 2010; Modestou et al., 2008; Van Dooren et al., 2004, 2006) sin criticar la práctica educativa tradicional, y mucho menos proponiendo posibles alternativas.

En (Gairín y Oller, 2011) se presentan algunas ideas que se consideran imprescindibles para elaborar una propuesta que mejore la enseñanza tradicional de la proporcionalidad. Estas ideas, en nuestra opinión, han de sustentarse:

- En el uso significativo de las estructuras multiplicativas que han estudiado con anterioridad.
- En la aprehensión de los aspectos conceptuales relacionados con la proporcionalidad.

- En la aplicación de dichos aspectos a la hora de resolver situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad.

El análisis de libros de texto es una importante herramienta a la hora de estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto es así, entre otros motivos, porque: *“observar el proceso de aprendizaje de la humanidad requiere dirigir la atención a la historia de las ideas matemáticas, a través del único registro disponible de las mismas. Esto es, a través de textos y manuales escolares y mediante un análisis de los mismos”* (Gómez, 2011, p. 50).

Dentro de la distinción que Van Dormolen (1986) hace del análisis de libros de texto, nuestro trabajo se enmarcaría dentro del análisis a posteriori. En concreto (Gómez, 2011), se trata de un trabajo inclinado hacia el análisis textual. De hecho, nuestro trabajo tiene una orientación similar al llevado a cabo por González y Sierra (2004) sobre el concepto de punto crítico, por Escolano (2007) respecto a los significados del número racional positivo o por Picado y Rico (2009) sobre el sistema métrico decimal.

Método

Pretendemos aplicar el análisis de libros de texto al estudio del tratamiento que ciertos aspectos conceptuales de la proporcionalidad han recibido en manuales escolares desde 1850 hasta la vigente ley de educación. Los aspectos que seleccionados para el estudio son:

1. Objetos entre los que se define la razón: entre números o entre cantidades de magnitud.
2. Significado de la razón: la razón como fracción, como cociente o como factor multiplicante.
3. Pertinencia del concepto de razón: la preocupación por la posibilidad de definir la razón en una situación dada.
4. La idea de proporción.

Organizamos el análisis en torno a cinco periodos caracterizados por la existencia de leyes educativas (Escolano, 2007):

i. 1850-1900	iv. 1970-1980
ii. 1900-1950	v. 1980-1990
iii. 1950-1970	vi. 1990-2010

Se han consultado un total de 48 libros. Por razones de espacio no se referencian todos, por lo que citaremos sólo aquellos de los que figuran explícitamente en este trabajo:

- a. 1850-1900: (Sanjurjo, 1884).
- b. 1900-1950: (Bruño, 1912), (Hurtado, 1932) y (Ruíz, 1931).
- c. 1950-1970: (Baratech, 1966a, 1966b).
- d. 1970-1980: (Rico et al., 1977).
- e. 1980-1990: (Mansilla y Bujanda, 1984).
- f. 1990-2010: (Álvarez et al., 1999), (Cólera y Gaztelu, 2008a, 2008b) y (S.M., 2009).

Para cada uno de los textos seleccionados se analiza el tratamiento dado a cada uno de los aspectos conceptuales referidos anteriormente. Respecto a los puntos 1 y 2, encontramos textos que consideran la razón entre números y entre cantidades o que presentan diversos significados para la razón entre ellos. En esos casos se ha optado por tener en cuenta aquel aspecto que aparece en primer lugar, entendiendo que esta elección por parte del autor no es arbitraria.

En último lugar, a modo de conclusiones, se presentan algunas alternativas que pueden dar lugar a una propuesta de innovación.

Objetos entre los que se define la razón

A lo largo de la historia este concepto se ha presentado en dos contextos: entre números y entre cantidades de magnitud.

	1850-1900	1900-1950	1950-1970	1970-1980	1980-1990	1990-2010
<i>Números</i>	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
<i>Cantidades</i>	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO

Tabla 1: Evolución a lo largo del tiempo de los contextos en los que aparece la razón

Resulta llamativo que la extensión de la enseñanza obligatoria haya desembocado en la presentación de la razón únicamente entre números; es decir, en una presentación con un alto grado de abstracción que aleja el concepto del mundo de las magnitudes.

Significados de la razón

La razón entre números

En este contexto se han encontrado tres posibles interpretaciones para el concepto de razón:

- 1º. La razón como fracción (Figura 1):

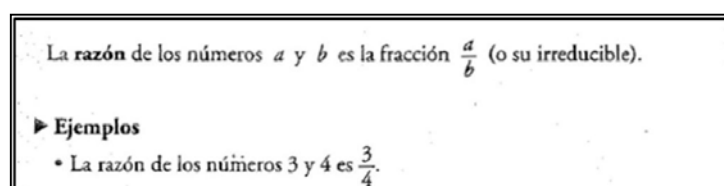


Figura 1: (Cólera y Gaztelu, 2008, p. 84)

Pese a que se utiliza el término fracción, esta interpretación presenta la razón como dos números separados. En la fracción resultante se perciben el numerador y denominador separadamente como objetos independientes.

Predomina el aspecto formal de la notación fraccionaria puesto que, en principio los números implicados no tendrían por qué ser enteros.

2º. La razón como cociente (Figura 2):

664. Llámase **razón ó relación** el resultado de la comparación de dos cantidades de una misma especie.
 665. Dos cantidades pueden compararse entre sí por *diferencia ó por cociente*, de donde resultan dos clases de razones : las *aritméticas* y las *geométricas*.

Figura 2: (Bruño, 1912, p. 221)

En este caso la razón sí es un solo número, obtenido al comparar los números iniciales mediante una división. Sin embargo no se hace alusión al significado que se podría asignar al resultado de tal división. Se habla de comparación pero la razón es, finalmente, un número sin significación alguna.

3º. La razón como factor multiplicante (Figura 3):

XIV-1. Razón de dos números. — Se denomina *razón de dos números*, al cociente exacto de esos números o, lo que es igual, el número por el que se ha de multiplicar el segundo para obtener el primero.

Figura 3: (Baratech, 1966b, p. 89)

Aquí la razón aparece en un contexto de estructura multiplicativa, asignando, ahora sí, un significado al resultado de la división de los números implicados. Esta interpretación surge de entender la división como la operación inversa de la multiplicación.

En la tabla siguiente se muestra la evolución en la aparición de estas interpretaciones:

	1850-1900	1900-1950	1950-1970	1970-1980	1980-1990	1990-2010
<i>Fracción</i>	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
<i>Cociente</i>	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO
<i>Factor multiplicante</i>	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO

Tabla 2: Interpretaciones de la razón entre números

Se observa que la interpretación de la razón como fracción (Clark et al., 2003) parece imponerse desde mediados del siglo pasado. Parece, por tanto, que desde la enseñanza se ha optado por interpretar la razón como una fracción, sin preocuparse de que esto no tiene sentido para el alumno salvo que los números implicados sean enteros y sin tratar de asignar un significado al objeto que se presenta. Esta interpretación de la razón como fracción choca frontalmente con el significado de fracción como parte-todo al que los alumnos están excesivamente habituados (Escolano, 2001).

La razón entre cantidades de magnitud

Esta idea ha convivido con la idea de razón entre números hasta los años 90 del siglo pasado. En el análisis realizado resulta llamativo que las cantidades que se utilicen sean siempre de la misma magnitud, en ningún caso se relacionen magnitudes diferentes. En nuestra opinión es más comprensible dar sentido a relaciones entre cantidades de distinta magnitud y, además, es un ámbito más cercano a la aplicación práctica.

En este contexto se han encontrado también tres posibles interpretaciones para el concepto de razón, que se corresponden con las que ya presentadas para el caso de la razón entre números:

- 1º. La razón como fracción (Figura 4):

Si a y b son cantidades de una misma magnitud, la medida de a , cuando se toma por unidad a b , se llama *razón entre a y b* , y se escribe así:

$$\frac{a}{b}$$

Figura 4: (Mansilla y Bujanda, 1984, p. 62)

Aunque se utilizan cantidades de magnitud, la razón entre ellas se convierte en una fracción numérica que no se interpreta como una cantidad de magnitud. En este caso se asigna a la fracción el significado de medida. Si tenemos en cuenta que el alumno suele tener como referencia el significado de fracción como parte-todo, esta interpretación resulta muy exigente para él y, además, este significado pierde sentido si tratamos de aplicarlo a cantidades de diferentes magnitudes.

- 2º. La razón como cociente (Figura 5):

Llamamos razón al cociente de las medidas de dos cantidades de una misma magnitud.

Figura 5: (Rico et al., 1977, p. 191)

Se utilizan cantidades de magnitud, pero de una forma ficticia, por cuanto no se atiende al tipo de magnitud que resulta al dividir dos cantidades de la misma magnitud. Esta interpretación considera la razón como un número no medida ya que el cociente que figura en la definición no está referido a ninguna magnitud (es un cociente entre números, cuyo resultado es un número). Así, si aplicásemos esta definición al caso de magnitudes diferentes, surgiría el problema de asignar un significado concreto y claro al número obtenido.

- 3º. La razón como factor multiplicante (Figura 6):

203. Llámase razón de dos cantidades homogéneas el número por el cual debe multiplicarse la segunda para obtener la primera.

Figura 6: (Ruíz, 1931, p. 129)

Esta claro que si las dos cantidades son de la misma magnitud el producto de una cantidad por un número produce una cantidad de la misma magnitud. Pero, si se trata de distintas magnitudes, el producto de una cantidad por un número no da como resultado una cantidad de la otra magnitud.

Las interpretaciones presentadas tienen un rasgo común. Todas entienden la razón principalmente en su vertiente numérica. Ninguna parece entender la razón como una cantidad de magnitud. Pensamos que esto es una consecuencia de no considerar la razón entre cantidades de magnitudes distintas.

En la tabla siguiente se muestra la evolución en la aparición de estas interpretaciones en los distintos periodos estudiados:

	1850-1900	1900-1950	1950-1970	1970-1980	1980-1990	1990-2010
<i>Fracción</i>	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ	NO
<i>Cociente</i>	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	NO
<i>Factor multiplicante</i>	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	NO

Tabla 3: Interpretaciones de la razón entre cantidades homogéneas

Como ya hemos mencionado, no hemos encontrado referencias a la razón entre cantidades de magnitud en textos del periodo actual. Sin embargo, se observa que también en este caso la interpretación como fracción parecía haberse impuesto con el paso del tiempo.

Pertinencia del concepto de razón

En ninguno de los textos estudiados hemos encontrado ningún caso en que se reflexione sobre las condiciones que deben darse para que tenga sentido el cálculo de la razón entre dos magnitudes. Quizás el caso más cercano sea el mostrado en la Figura 7.

2.º Si 23 libros de igual precio han costado 1 242 pesetas. ¿Cuántos libros habríamos adquirido con 918 pesetas, en las mismas condiciones?

El precio de un libro será $1\,242 \text{ ptas.} : 23 = 54 \text{ pesetas.}$

por lo que el número de libros comprados con 918 ptas., será el cociente

$$918 : 54 = 17.$$

Figura 7: (Baratech, 1966a, p. 89)

El autor enuncia las condiciones para la existencia de la razón (que todos los libros sean de igual precio), pero no hay un tratamiento explícito y sistemático de tales situaciones.

Tres chocolatinas pesan 60 gramos. ¿Cuánto pesan ocho chocolatinas?

MAGNITUDES		
N.º DE CHOCOLATINAS	PESO (g)	
3	60	} Con estos dos pares de valores formamos dos fracciones equivalentes:
8	x	

$$\frac{3}{8} = \frac{60}{x} \rightarrow 3 \cdot x = 60 \cdot 8 \rightarrow x = \frac{60 \cdot 8}{3} = 160 \text{ g}$$

Solución: Ocho chocolatinas pesan 160 gramos.

Figura 8: (Cólera y Gaztelu, 2008a, pág. 165)

La Figura 8 muestra un ejemplo de esta despreocupación. Para los autores tiene pleno sentido considerar la fracción $3/8$ pues se trata de un cociente entre números, pero no se observa intento alguno por asignarle un significado y, mucho menos, por discutir si tiene sentido considerarla.

La idea de proporción

Frente a la riqueza y variabilidad observadas al hablar del concepto de razón, encontramos que la idea de proporción permanece invariante a lo largo del tiempo. Todos los autores entienden una proporción como la igualdad de dos razones.

*Se llama proporción la igualdad de dos razones.
Así: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que también se escribe $a : b :: c : d$, y se lee a es a b como c es d , es una proporción.*

Figura 9: (Sanjurjo, 1884, p. 119)

Los números a , b , c y d forman una proporción si la razón entre a y b es igual a la razón entre c y d .
Se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee " a es a b como c es a d ".

Figura 10: (S.M., 2009, p. 147)

En las figuras 9 y 10 se muestran dos ejemplos que, pese a estar separados en el tiempo 125 años, son casi idénticos. Se observa además una gran preocupación por los aspectos formales ("se escribe") e institucionales ("se lee").

Claramente, esta igualdad entre razones debería tener interpretaciones diferentes según la interpretación que los autores hayan asignado al concepto de razón. Sin embargo no existe en los textos analizados discusión alguna sobre este punto. Se presenta la idea de proporción de manera formal y descontextualizada, pasando a presentar la llamada "propiedad fundamental". Así, en Hurtado (1932, p. 158) leemos:

"Si las dos razones que forman una proporción tienen que ser iguales, fácilmente se comprende que «el producto de los términos extremos será igual al producto de los términos medios»."

Esta propiedad es esencialmente numérica y en un contexto numérico admite una justificación más o menos simple. Pero, si pensamos la razón en el ámbito de las magnitudes, resulta imposible dar una interpretación a esta "propiedad fundamental".

Enunciados de este tipo son los que, en nuestra opinión, han llevado a priorizar la interpretación de la razón como fracción entre números. El alumno está familiarizado con el concepto de fracciones equivalentes y, sobre todo, tiene muy interiorizada la idea de "producto de medios igual a producto de extremos" por lo que no le supone un gran problema asumir esta nueva propiedad. Sin embargo, si entendemos la razón como factor multiplicante, aunque la igualdad de razones tiene un significado claro y preciso, resulta difícil justificar la "propiedad fundamental". En todo caso los autores están más preocupados de preparar la introducción del algoritmo de la regla de tres que de fomentar la comprensión del alumno.

También se presta atención en los textos estudiados (con menor frecuencia con el paso del tiempo) a las manipulaciones que permiten obtener nuevas proporciones a partir de otras conocidas: intercambiar medios o extremos, invertir etc... (Figura 11).

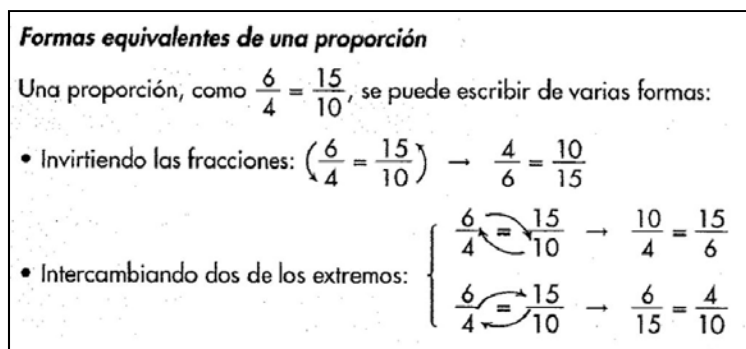


Figura 11: (Álvarez et al., 1999, p. 78)

Otro aspecto que aparece repetidamente a lo largo del tiempo es la siguiente propiedad de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$$

Los autores utilizan esta propiedad como base para una de las posibles formas de tratar los problemas de repartos directamente proporcionales.

Tanto las manipulaciones presentadas en la Figura 11, como la propiedad anterior tienen pleno sentido y pueden justificarse con facilidad desde un punto de vista puramente numérico. No obstante, es imposible hacerlo en el contexto de las magnitudes, con las dificultades que esto supone para la comprensión de los alumnos.

En definitiva, tanto la propia definición de la idea de proporción, como sus propiedades, se presentan tradicionalmente de un modo descontextualizado que, a menudo, no encaja en el marco conceptual en que se ha definido la razón. Esto se debe principalmente a que estas ideas y propiedades se presentan de un modo puramente instrumental encaminado a dotar al alumno de técnicas mecánicas para resolver problemas.

Conclusiones

1. La enseñanza ha llevado a una presentación de las ideas de razón y proporción en el campo numérico. Este tipo de instrucción no favorece la construcción de las ideas por parte del alumno puesto que no tiene un modelo físico desde el que pueda alcanzar una buena comprensión de los conceptos puestos en juego.

En nuestra opinión, si la razón ha de tener aplicaciones en el mundo real, la enseñanza debe priorizar el significado como razón entre cantidades de magnitud (especialmente entre las no homogéneas). Hemos visto que en el caso de magnitudes no homogéneas las interpretaciones tradicionales del concepto de razón no son adecuadas. Se hace necesario recurrir a una interpretación diferente que abarque dichas situaciones. Proponemos entender la razón como ‘tanto por uno’. Es decir, la razón entre dos cantidades de magnitud mide la cantidad de la primera magnitud que le corresponde a una unidad de la segunda magnitud. Con este enfoque, la razón entre dos cantidades de magnitudes distintas (si tiene sentido definirla) se interpreta como una cantidad de una nueva magnitud.

2. La enseñanza no se ha ocupado de analizar los contextos en los que tiene sentido definir el concepto de razón. Como consecuencia, el alumno adquiere la idea de que la proporcionalidad es siempre útil y eficaz en todas aquellas situaciones en

las que haya cantidades de dos magnitudes y se pregunte por la cantidad de una de ellas conocida otra cantidad de la segunda.

Entendemos que el concepto de razón (como toda la proporcionalidad aritmética) está asociado a la noción de función de proporcionalidad. Sin embargo, en el momento de introducir estos conceptos en secundaria los alumnos apenas tienen nociones sobre funciones. Estas carencias obligan a articular un recurso didáctico que denominamos *condición de regularidad*. La condición de regularidad sería *la condición indispensable que debe darse para que la razón pueda calcularse*. La preocupación por hacer explícita esta condición, indicando su porqué, así como las consecuencias que su consideración (o no) tienen en una situación concreta debe ser, a nuestro juicio, un aspecto fundamental en la enseñanza de la proporcionalidad, previo, incluso, a la modelización de los problemas.

3. La idea de proporción se ha presentado tradicionalmente de un modo puramente formal y descontextualizado, enfocado siempre a la justificación de técnicas algorítmicas de resolución de problemas.

Al presentar la razón como tanto por uno, pensamos que la idea de proporción como igualdad de razones puede suprimirse puesto que, entre otros motivos, se hace innecesaria la introducción de las técnicas algorítmicas que justificaban en parte la presentación del concepto de proporción.

Referencias

- ÁLVAREZ, F., GARRIDO, L.M., RUIZ, A. (1999). *Fractal 2 Matemáticas*. Vicens Vives. Barcelona.
- BARATECH B. (1966a). *Matemáticas. Primer curso de Bachillerato*. Edición del autor. Zaragoza.
- BARATECH B. (1966b). *Matemáticas. Segundo curso de Bachillerato*. Edición del autor. Zaragoza.
- BRUÑO, G.M. (1912). *Elementos de Aritmética con algunas nociones de Álgebra*.
- CLARK, M.R., BERENSON, S.B. Y CAVEY, L.O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *J. Math. Beh.*, 22, pp. 297-317.
- CÓLERA, J. y GAZTELU, I. (2008a). *Matemáticas 1*. Toledo: Anaya.
- CÓLERA, J. y GAZTELU, I. (2008b). *Matemáticas 2*. Toledo: Anaya.
- ESCOLANO, R. (2001). Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde el modelo cociente. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas & J. D. Godino, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática V* (pp. 151-158). Almería: S.E.I.E.M.
- ESCOLANO, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.
- ESPINEL, M.C., BRUNO, A. y CRUZ, I. (2010). La comprensión de gráficas de porcentaje de variación en situaciones cotidianas. *Union*, 24, pp. 83-102.

- FERNANDEZ, C. y LLINARES, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM
- GAIRÍN, J. M. y OLLER, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 179-189). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- GÓMEZ, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), pp. 49-65.
- GONZÁLEZ, M^a.T. y SIERRA, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), pp. 389-408.
- HURTADO, F. (1932). *Rudimentos de Aritmética*. Labor. Barcelona.
- MANSILLA, S., BUJANDA, M^a.P. (1984). *Pitágoras. Matemáticas 7º E.G.B.* S.M. Madrid.
- MODESTOU, M., ELIA, I., GAGATIS, A. y SPANOUDIS, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 39(3), pp. 313-324.
- PICADO, M. y RICO, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 6(1), pp. 11-27.
- RICO, L., CORPAS, A., FERNÁNDEZ, A., GONZÁLEZ, J., LÓPEZ, F., MESAS, T., SÁENZ, O. y VALENZUELA, J. (1977). *Matemáticas 7*. Anaya. Cádiz.
- RUÍZ, A. (1931). *Nociones y Ejercicios de Aritmética y Geometría*. Imprenta Editorial Gambón. Zaragoza.
- SANJURJO, R. (1884). *Elementos de Aritmética y Álgebra*. Imprenta y litografía de "La Guirnalda". Madrid.
- S.M. (2009). *Esfera. Matemáticas 1º E.S.O.* S.M. Madrid.
- VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., EVERS, M. y VERSCHAFFEL, L. (2006). Pupils' over-use of proportionality on missing-value problems: how numbers may change solutions. En *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5. Praga.
- VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., HESSELS, A., JANSSENS, D. y VERSCHAFFEL, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learn. Inst.*, 14, pp. 485-501.
- VAN DORMOLEN, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

PROPUESTA DE UN MODELO PARA LA CALIFICACIÓN DE EXÁMENES DE MATEMÁTICAS

A PROPOSAL OF A MODEL FOR MARKING MATHEMATICS EXAMS

Gairín, J.M. ⁽¹⁾, Muñoz, J.M. ⁽¹⁾, Oller, A.M. ⁽²⁾

Universidad de Zaragoza ⁽¹⁾; Centro Universitario de la Defensa ⁽²⁾

Resumen

A partir de un estudio de tipo indagatorio sobre la corrección de exámenes de matemáticas de las Pruebas de Acceso a la Universidad, llegamos a relacionar la importancia de los errores cometidos por los alumnos con la tipología de las tareas en que las que se producen y construimos un modelo de penalización de errores que introduce criterios de calificación más objetivos que los observados.

Abstract

We use an exploratory study about the corrections of mathematics exams from a University Entrance Examination to relate the importance of the mistakes made by the students with the typology of the tasks where they appear. Thus, we propose a model for mistake penalization which introduces marking criteria which are more objective than the observed ones.

Palabras clave: Evaluación. Calificación. Errores. Matemáticas. Pruebas de Acceso a la Universidad.

Key words: Evaluation. Marking. Mistakes. Mathematics. University Entrance Examination.

Introducción

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las materias, la evaluación juega un papel de gran relevancia porque es la única manera de saber si lo que se ha enseñado ha sido aprendido por el alumno. Además de conocer el grado de dominio alcanzado por el alumno en relación con los objetivos propuestos, la evaluación también sirve para determinar si el proceso de enseñanza ha sido adecuado para alcanzar dichos objetivos (Cantón y Pino-Juste, 2011).

En el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se han realizado estudios específicos encaminados a adaptar métodos e instrumentos a las especificidades de la materia. Existen interesantes monografías dedicadas a las muy diversas facetas del proceso de evaluación (Giménez, 1997; Kaur y Wong, 2011). También encontramos trabajos centrados en el diseño de herramientas y métodos para la evaluación en distintos ámbitos de la matemática y en diferentes niveles educativos (Lian et al., 2010; Torres-Skoumal, 2001; Carrillo y Guevara, 1996; Gallardo y González, 2005; Gutiérrez y Jaime, 1995); y otros trabajos (Boesen et al., 2010) que muestran el modo en que el propio proceso de evaluación influye en el modo de trabajar de los alumnos.

Los exámenes de matemáticas de las Pruebas de Acceso a la Universidad¹ son un ejemplo de prueba de evaluación externa con gran influencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de Bachillerato (Ordóñez y Contreras, 2011; Ruiz de Gauna, 2011). Sobre las calificaciones de los exámenes de estas pruebas conocemos algunos estudios estadísticos (Escudero y Bueno, 1994; Grau et al., 2002), pero no hemos encontrado ningún trabajo que estudie cómo desempeñan los profesores la tarea de calificar los exámenes de matemáticas en las PAU.

No es habitual que el trabajo de corregir exámenes de matemáticas figure en los planes de formación de los profesores. Las experiencias como alumnos, las conversaciones con compañeros, los debates con miembros de departamentos de matemáticas, la lectura sobre la forma de actuar de otros profesionales, etc., constituyen en la práctica la formación real de quienes han de corregir exámenes de matemáticas.

En el caso especial de las PAU, los armonizadores de cada asignatura elaboran unos criterios específicos de corrección que indican la calificación que corresponde a los alumnos que responden correctamente a las distintas partes que componen las preguntas. No obstante, se constata la existencia de diferencias significativas entre las calificaciones de distintos correctores cuando califican un mismo examen. Así lo pone de manifiesto el análisis estadístico, realizado por uno de los autores de este artículo, sobre la actuación de los dos correctores de la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II del Tribunal nº 8 de la convocatoria de junio de 2010 de la Universidad de Zaragoza:

	Media	Desviación Típica	Notas en [8,10]	Notas en [0,4]
Corrector A	5,74	2,03	11/74 (15%)	9/74 (12%)
Corrector B	3,86	1,98	5/84 (6%)	42/84 (50%)

Téngase en cuenta que a los correctores se les asignan de forma aleatoria los cerca de 90 exámenes que tienen que calificar y que los correctores tienen que aplicar los

¹ PAU en lo sucesivo.

mismos criterios de corrección proporcionados por el armonizador de la prueba. En estas condiciones pensamos que las diferencias entre las calificaciones de los dos correctores son achacables, en buena medida, a que existe una fuerte componente de subjetividad en la valoración de las respuestas de los alumnos y que, en consecuencia, se producen diferencias en las calificaciones otorgadas por distintos correctores.

Así pues, el objetivo de este trabajo es presentar un marco para la calificación de exámenes de matemáticas que reduzca el grado de subjetividad propio de esta actividad.

Método y muestra

Este es un estudio de tipo indagatorio organizado, de manera secuencial, en las siguientes fases:

Fase 1: Identificar algunos fenómenos no deseables en el proceso de corrección de exámenes de matemáticas de las PAU. La fiabilidad interna de esta fase se mejora con la presencia de tres investigadores que actúan sobre los mismos registros observacionales (Goetz y Lecompte, 1988).

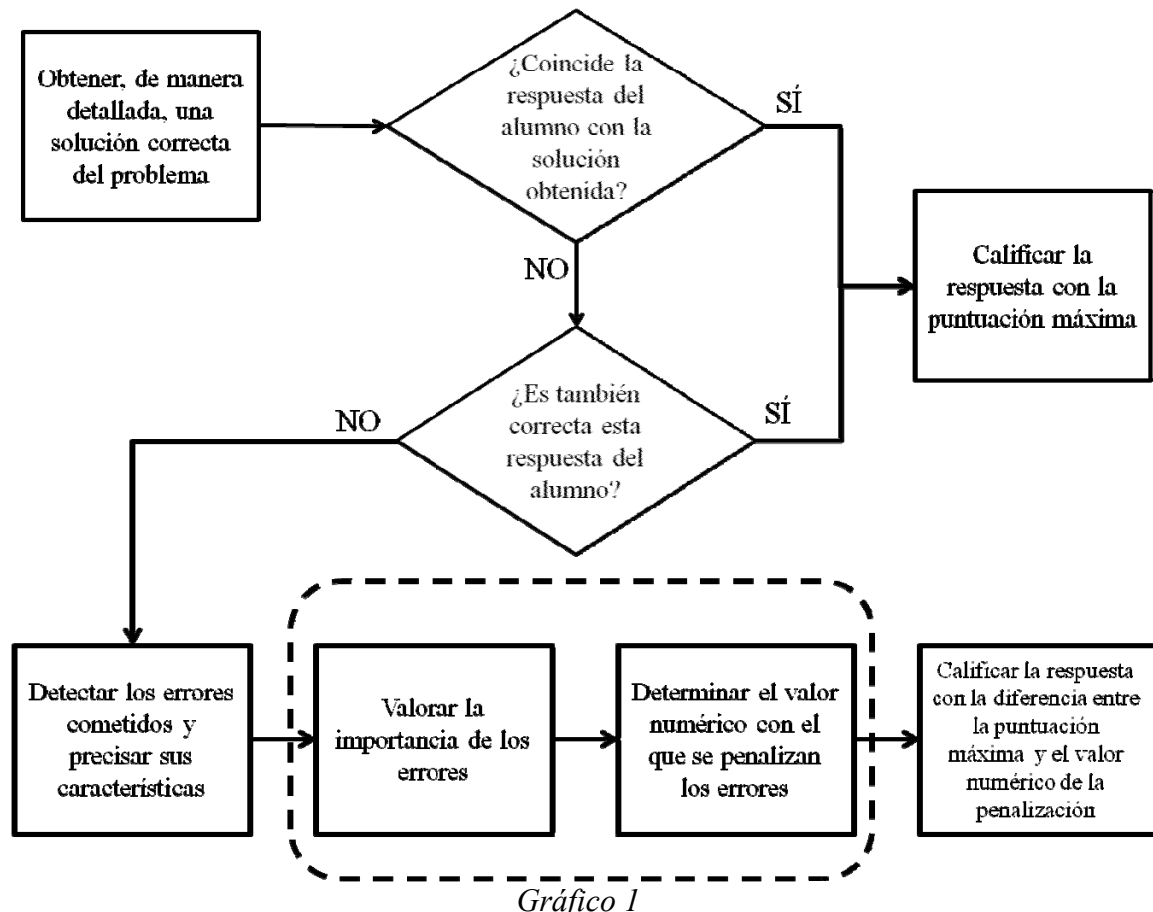
Fase 2: Elaborar propuestas de mejora de dicho proceso encaminadas a evitar los fenómenos detectados.

Para llevar a cabo nuestro trabajo se ha utilizado información procedente de los exámenes correspondientes a las PAU de la convocatoria de Septiembre de 2009 en Comunidad de Aragón. En concreto se han analizado las actuaciones de 6 correctores, de los cuales:

- Tres correctores han calificado la asignatura Matemáticas II, de la que hemos analizado los 203 exámenes correspondientes a la opción A.
- Tres correctores han calificado la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, de la que hemos analizado los 206 exámenes de la opción A.

Fase 1

En nuestra opinión, las decisiones y actuaciones que conlleva la calificación de la respuesta que ofrece un alumno al enunciado de un problema determinado deben seguir el siguiente gráfico:



En este proceso, los primeros pasos no presentan dificultades reseñables para los correctores. Sin embargo, hemos detectado varios fenómenos anómalos en la corrección de los exámenes asociados a los pasos señalados con línea discontinua en el gráfico 1.

Fenómenos reseñables

Ante la presencia de un error en la respuesta de un alumno el corrector tiene que tomar una decisión sobre la “gravedad” o “levedad” que clasifique dicho error y debe asignar un valor numérico para penalizarlo. En el desempeño de esta tarea de hemos observado cuatro fenómenos destacables:

Fenómeno 1: Existen posiciones claramente diferenciadas entre distintos correctores al valorar la importancia de un mismo tipo de error.

Reproducimos las actuaciones de tres correctores al calificar las respuestas al siguiente problema:

a) Utilizar el cambio de variable $t^3 = 1 - x$ para calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{x}. \quad (1 \text{ punto})$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{x} \xrightarrow{\text{Cambio}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^3)^{1/3} - 1}{1 - t^3} = \\
 & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 1}{1 - t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 1}{1 - 0} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1}
 \end{aligned}$$

0.5

$$\begin{aligned}
 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{x} & \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1}{1-t^3} = \frac{0-1}{1-0} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1} \\
 \text{para } t^3 &= 1-x \\
 x &= 1-t^3
 \end{aligned}$$

0.3

$$\begin{aligned}
 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3-x)^{1/3} - 3}{x} & \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-3}{3-t^3} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0-3}{3-0} = -3 \\
 t^3 &= 3-x \Rightarrow x = 3-t^3 \\
 t &= (3-x)^{1/3}
 \end{aligned}$$

0.4

Puede observarse que los tres correctores señalan el mismo tipo de error y que cada uno de los correctores otorga calificaciones significativamente diferentes. Este hecho pone de manifiesto que cada uno de los correctores valora la importancia del error de acuerdo con las concepciones establecidas sobre evaluación (Gil, Rico y Fernández, 2002).

Fenómeno 2: La importancia de los errores se establece con independencia de las exigencias del enunciado de los problemas.

Reproducimos la actuación de un mismo corrector ante dos respuestas al segundo apartado del problema:

3. a) Derive las siguientes funciones: (1,5 puntos)

$$f(x) = \ln \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}},$$

$$g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{x}},$$

$$h(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}} = x^{1/2} + (x + x^{1/2})^{1/2} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}(x + x^{1/2})^{-1/2} \cdot (1 + \frac{1}{2}x^{-1/2})$$

$$= \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}(x + x^{1/2})^{-1/2} \cdot (1 + \frac{1}{2}x^{-1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}(x + x^{1/2})^{-1/2} + \frac{1}{4}(x + x^{1/2})^{-1/2}x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2} + x + x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-1/2} = x^{-1/2} + x + x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + x + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$$

0.3

$$g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

0.5

En las dos imágenes se calcula de forma correcta la función derivada, por lo que ambas deberían calificarse con 0,5 puntos. Pero el corrector penaliza la primera respuesta con un 40% de la calificación debido a un error algebraico.

Fenómeno 3: La importancia de un error se valora con independencia del conocimiento matemático que se pretende evaluar con el problema.

Reproducimos la actuación de un corrector al calificar la respuesta de un alumno al problema:

b) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$ (1 punto)

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 0$$

$$f(1)^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) = 0$$

$$f(1)^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 0$$

0

Si hay continuidad en $x=1$

El corrector señala que el alumno ha obtenido como límite 0. Entendemos que con esta actuación el corrector deja constancia de que el alumno tiene unos conocimientos

muy escasos de operar con números enteros; mientras que, atendiendo a las exigencias del problema, el corrector debería calificar los conocimientos que tiene el alumno sobre las funciones continuas.

Fenómeno 4: La detección de un error considerado como muy grave da por finalizado el proceso de corrección.

Reproducimos la actuación de un corrector al calificar la respuesta de un alumno al problema:

a) Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema lineal: (1,75 puntos)

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ -2x + y + az = 1 \\ y + az = 1 \end{cases}$$

Adj: a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a - a^3 = 0$$

$$-a^3 + 0a^2 + a0 = 0 \quad \text{Rng } m_y m' = 2 \text{ cuando } a = 1, -1, 0 \xrightarrow{\text{TRF}} \text{Sc} 1$$

$$\text{Rng } m_y m' = 3 \text{ cuando } a \neq 1, -1, 0 \xrightarrow{\text{TRF}} \text{Sc} 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & & -1 & -1 & 0 \\ \hline & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \quad \alpha = 1$$

$$-x^2 - x + 0 = 0$$

$$\frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot -1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta + 1}{-2} = -1 \\ \frac{\Delta - 1}{-2} = 0 \end{array} \right.$$

$\alpha = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

Pensamos que el corrector entiende que el alumno ha cometido un error al representar el sistema de ecuaciones en forma matricial. Dicho corrector parece considerar muy grave el error del alumno y decide que no tiene sentido proseguir con el proceso de calificación; aunque, como puede constatarse, el alumno demuestra conocer el contenido principal que se evalúa.

Comentarios relativos a los fenómenos

1. Los correctores valoran la importancia de los errores más por creencias personales (Gil, Rico y Fernández, 2002), que por la aplicación de criterios universalmente establecidos y aceptados.

2. No se deben valorar como importantes los errores cometidos al realizar tareas que no se solicitan explícitamente en el enunciado de la pregunta.

3. Para valorar la importancia de los errores así como para determinar un valor numérico de la penalización, es necesario clarificar el tipo de tareas que conlleva la resolución de un problema de matemáticas y jerarquizarlas atendiendo al papel que juegan en la resolución del problema.

4. Ante las respuestas que contienen errores el corrector debe tomar dos decisiones: valorar y cuantificar la penalización que corresponde al error detectado y si debe finalizar o proseguir el proceso de calificación del alumno.

Fase 2.

Apoyándonos en las consideraciones anteriores, presentamos a continuación dos propuestas:

I. Una tipología y jerarquización de las tareas,

II. Un modelo de penalización de errores.

I. Tipología y jerarquía de tareas

Los problemas que se proponen en los exámenes de matemáticas exigen del alumno la realización de tareas de distinta naturaleza:

a) Tareas principales

Son aquellas tareas que claramente constituyen el objetivo principal de la calificación: valorar la comprensión del alumno sobre los contenidos matemáticos propios de los temarios de matemáticas de un curso determinado. A su vez, estas tareas también pueden distinguirse atendiendo a su carácter conceptual o procedimental.

b) Tareas auxiliares

En el proceso de resolución del problema también hay que realizar otro tipo de tareas, que denominamos *tareas auxiliares*, con la finalidad de obtener las informaciones necesarias para dar la respuesta al problema. Identificamos dos grandes grupos de tareas auxiliares: las específicas y las generales.

b1) Tareas auxiliares específicas

Son aquellas tareas que juegan un papel instrumental para alcanzar la solución de un problema en el que aparecen tareas principales sobre contenidos específicos. Por ejemplo, para calcular los extremos relativos de una función, la obtención de derivadas es una tarea auxiliar específica.

b2) Tareas auxiliares generales

Consideramos como tareas auxiliares generales de un determinado curso de matemáticas a todo tipo de tareas matemáticas que ha realizado el alumno a lo largo de su formación matemática anterior. Atendiendo a su naturaleza, estas tareas podrían

dividirse en tareas de tipo algebraico, de tipo aritmético, de tipo geométrico, de tipo gráfico y de representación.

Una vez establecida la tipología de las tareas, para determinar una jerarquía de las mismas es necesario estudiar el papel que juegan en las distintas categorías de problemas propuestos en los exámenes de las PAU. Hemos detectado dos categorías de problemas:

Problemas de categoría 1.

Incluye los problemas cuya tarea principal consiste en la aplicación directa de una técnica de cálculo, como ocurre en el siguiente ejemplo:

Calcule la siguiente integral $\int_1^2 (x^2 + 3x + 1) dx$

En este problema el cálculo de primitivas y la regla de Barrow juegan el papel de tareas principales mientras que las tareas de simplificación y los cálculos aritméticos constituyen las tareas auxiliares generales.

En esta categoría de problemas la jerarquía de tareas es:

1. Tareas principales
2. Tareas auxiliares generales

Problemas de categoría 2.

Son problemas en los que debe manejarse algún concepto matemático, como muestra el siguiente ejemplo:

Calcule el área de la superficie limitada por las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 3$

En este problema, la delimitación del área pedida, el concepto de la integral definida de cada una de las funciones y la interpretación que tiene la integral de la resta de las dos funciones constituyen las tareas principales. El cálculo de integrales definidas juega el papel de tarea auxiliar específica. Las representaciones gráficas, la resolución de ecuaciones, la simplificación de expresiones algebraicas y el cálculo aritmético suponen las tareas auxiliares generales.

En esta categoría de problemas la jerarquía de tareas es:

1. Tareas principales
2. Tareas auxiliares específicas
3. Tareas auxiliares generales

II. Modelo de penalización de errores

Es posible y deseable establecer un marco que oriente las penalizaciones de todos los correctores de exámenes de matemáticas de manera que se atenúen las diferencias entre las actuaciones de distintos correctores. En este sentido, proponemos un modelo de penalización de errores sustentado en la teoría curricular interpretativa (Sierra y Pérez, 2007), del que hacemos, en primer lugar, una representación gráfica y, en segundo lugar, una descripción de su sentido y alcance.

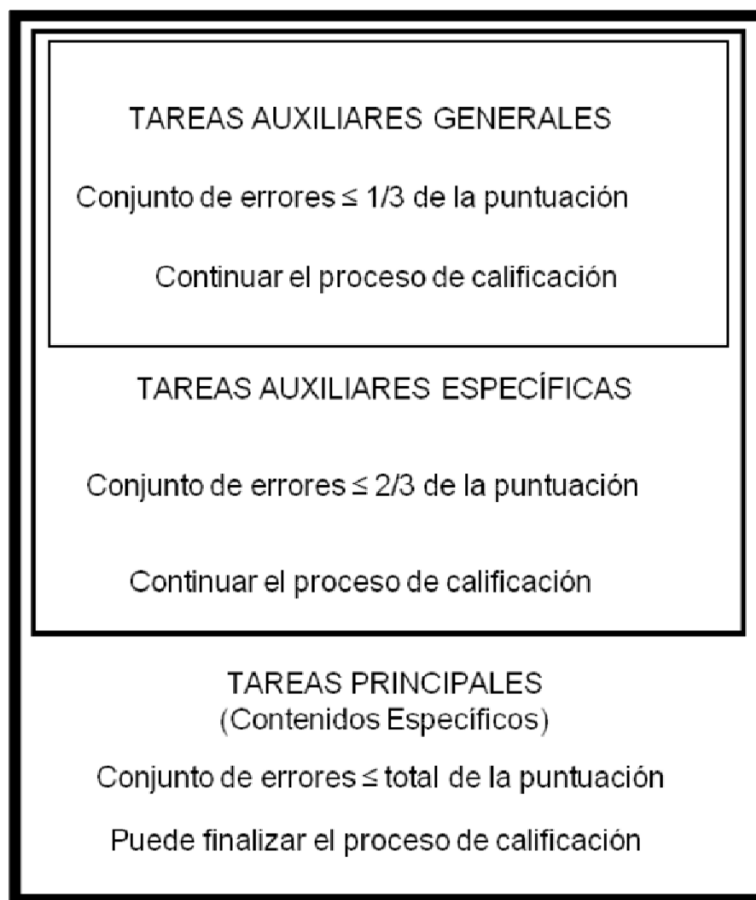
Modelo de penalización de errores**Modelo de tercios**

Gráfico 2

- a) El conjunto de todos los errores que comete un alumno al realizar tareas auxiliares generales no podrá penalizarse con un valor superior a $1/3$ de la puntuación asignada al problema, porque el conjunto de estas tareas no debe ser determinante al valorar la comprensión de los contenidos específicos contemplados en los currículos oficiales. Además, el proceso de calificación debe continuar porque quedan $2/3$ de la puntuación por asignar a la respuesta que da el alumno, considerando como correctos los resultados que se hayan obtenido en las tareas auxiliares generales.
- b) Los errores cometidos en las tareas auxiliares específicas podrán penalizarse con un máximo de $2/3$ de la calificación asignada a la respuesta correcta, porque el objetivo fundamental de la calificación son los contenidos específicos y no las tareas auxiliares específicas. Es más, en este límite de penalización han de contabilizarse tanto los errores en las tareas auxiliares específicas como en las tareas auxiliares generales. Además, el corrector debe continuar calificando el ejercicio tomando como punto de partida los resultados producidos al calcular erróneamente.
- c) En este modelo los errores localizados en los contenidos específicos, tanto de conceptos como de procedimientos, pueden penalizarse hasta con el 100% de la puntuación total, porque entendemos que este tipo de contenidos constituye el objetivo principal de la calificación de los alumnos. En el caso de que en la resolución de un problema estén implicados dos o más contenidos específicos, deberían asignarse

puntuaciones independientes a cada uno de ellos. Además, el corrector, teniendo en cuenta la importancia de estos errores determinará si continúa con el proceso de calificación o si lo da por concluido.

d) En este modelo se han establecido tres intervalos de igual amplitud para marcar los valores entre los que ubicar las penalizaciones por los errores detectados en las respuestas. Entendemos que nuestras motivaciones no se sustentan en razones científicas irrefutables y en consecuencia, admitimos que, por otras razones diferentes, los intervalos de penalización de errores se modifiquen.

e) En este modelo se deja un amplio margen de actuación a los correctores por cuanto la penalización de los errores se ubica en intervalos de amplitud $1/3$ de la puntuación máxima. Se han establecido intervalos de penalización porque, entre otras razones, resulta muy complejo establecer penalizaciones concretas para cada tipo de error, pues el número de casos diferentes que se puede presentar es muy amplio.

Conclusiones

Entendemos la necesidad de investigar sobre las creencias de los profesores acerca de la enseñanza y la evaluación, pues ello permitirá poner de manifiesto las disonancias, las contradicciones y las repercusiones al calificar exámenes de matemáticas (Marcia, 2008). En ese camino aportamos un modelo de penalización de errores que constituye el objetivo de la investigación propuesto en la introducción del trabajo.

La calificación de un problema de matemáticas tiene una doble interpretación: una privada, que solamente conoce el corrector, pues solamente éste sabe las razones que le han llevado a determinar cuál es la puntuación que ha asignado, y otra pública, que asocia la calificación de la respuesta con el grado de conocimiento que tiene el autor de dicha respuesta respecto al contenido matemático que figura explícitamente en el enunciado de la pregunta. Con este modelo pretendemos avanzar hacia una interpretación única de la calificación como la medida del grado de conocimiento que tiene un alumno sobre los contenidos matemáticos que figuran explícitamente en el enunciado del problema.

La utilización de este modelo de penalización de errores limita la subjetividad de la calificación de los exámenes de matemáticas evitando la valoración absoluta de los errores. Los errores no son “graves” o “leves” en sí mismos; su importancia queda asociada a la tarea en la que aparecen y a la relación de ésta tarea con el objetivo principal de la evaluación.

El modelo que hemos propuesto, a diferencia de la práctica actual, limita la penalización de los errores cometidos en tareas auxiliares a una parte de la puntuación máxima. Por tanto, la calificación de un problema informa con mayor fiabilidad sobre los conocimientos que tiene el alumno acerca de los contenidos que figuran en el enunciado del problema.

Este modelo persigue establecer un marco general en el que puedan moverse los correctores de un mismo colectivo de alumnos. Este marco obliga a respetar sus límites, aunque éstos entren en contradicción con las creencias de los correctores. La aceptación de estos límites es condición necesaria para ir reduciendo las diferencias entre las calificaciones de distintos correctores.

El modelo que hemos definido se ha mostrado más discrepante con la actuación de los correctores al penalizar los errores en las tareas auxiliares; y también ha mostrado diferencias, aunque más pequeñas, en la penalización de errores en las tareas auxiliares

específicas. Sin embargo, no muestra diferencias significativas en la valoración de errores que surgen en las tareas sobre contenidos específicos.

Este modelo no pretende zanjar la problemática de la calificación de los exámenes de matemáticas. Antes bien, se ha construido como un primer paso en el camino de ajustar las calificaciones de respuestas iguales que son evaluadas por diferentes correctores. Además, la presentación de este modelo pretende abrir un debate entre el profesorado de matemáticas sobre la búsqueda de criterios de corrección universales que hagan lo más objetivo posible el proceso de calificación de los exámenes.

Este modelo es válido para corregir exámenes de matemáticas de cualquier nivel educativo, porque el modelo se sustenta en relacionar los errores con el tipo de tareas en que se producen y porque en todo tipo de problemas se realizan tareas que están más o menos relacionadas con el grado de conocimiento que se quiere calificar.

Agradecimientos

El primer autor recibe apoyo del Proyecto I+D+i EDU2009-12063 del Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) de España. El segundo autor recibe apoyo del Proyecto MTM2010-19938-C03-03 de la Dirección General de Investigación del MICINN (España).

Bibliografía

- BOESEN, J.; LITHNER, J. y PALM, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educ. Stud. Math.*, 7(1), pp. 89-105.
- CANTÓN, I. y PINO-JUSTE, M. (2011). *Diseño y desarrollo del currículum*. Madrid: Alianza Editorial.
- CARRILLO, J. y GUEVARA, F. (1996). Un instrumento para evaluar la resolución de problemas. *Uno*, 3(8), pp. 65-81.
- ESCUADERO, T. y BUENO, C. (1994). Examen de selectividad: el estudio de un tribunal paralelo. *Revista de educación*, 304, pp. 281-298.
- GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J.L. (2005). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En Maz, A. et al. (Eds.), *Investigación en educación matemática. Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 197-204). Córdoba: SEIEM.
- GIL, F.; RICO, L. y FERNÁNDEZ, A. (2002). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre evaluación en matemáticas. *Revista de Investigación Educativa*, 20(1), pp. 47-75.
- GIMÉNEZ, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.
- GOETZ, J.P. Y LECOMPTE, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- GRAU, R.; CUXART, A. y MARTÍ-RECOBER, M. (2002). La calidad en el proceso de corrección de las Pruebas de Acceso a la Universidad: variabilidad y factores. *Revista de Investigación Educativa*, 20(1), pp. 209-223.

- GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the students' reasoning in geometry. En Meira, L. et al., *19th Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 19)*, 3, pp.11-18.
- KAUR, B. y WONG, K.Y. (eds.) (2011). *Assessment in the mathematics classroom. Yearbook 2011, Association of Mathematics Educators*. Hackensack, NJ: World Scientific.
- LIAN, L.H.; YEW, W.T. e IDRIS, N. (2010). Superitem test: An alternative assessment tool to assess students' algebraic solving ability. *Int. J. Math. Teach. Learn.*, 5, pp. 1-15.
- MARCIA, P. (2008). Creencias de los profesores sobre evaluación y efectos incidentes. *Revista de Pedagogía*, 84(29), pp. 123-144.
- ORDÓÑEZ, L. y CONTRERAS, A. (2011). La integral definida en Bachillerato. Restricciones institucionales de las Pruebas de Acceso a la Universidad. En Marín, M. et al. (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 461-470). Ciudad Real: SEIEM.
- RUIZ DE GAUNA, J. (2011). Tesis: La enseñanza de las matemáticas del bachillerato, los libros de texto y las pruebas de acceso a la UPV-EHU (1970-2008). *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), pp. 305-306.
- SIERRA, B. y PÉREZ, M. (2007). La relación teoría-práctica: una clave epistemológica de la didáctica. *Revista de Educación*, 342, pp. 553-576.
- TORRES-SKOUMAL, M. (2001). Alternative assessment models: assessment through group work and the use of CAS as a self-assessment tool. *Int. J. Comput. Algebra Math. Educ.*, 8(1), pp. 61-83.

EL PROCESO DE DEFINIR EN MATEMÁTICAS DESDE UNA PERSPECTIVA COMOGNITIVA

DEFINING PROCESS IN MATHEMATICS FROM COMMOGNITIVE PERSPECTIVE

Gavilán, J.M., Sánchez-Matamoros, G., Escudero, I.

Universidad de Sevilla

Resumen

Los procesos de construcción de conocimiento matemático, tales como definir, probar y modelar son elementos clave en el aprendizaje del conocimiento matemático. En esta comunicación nos centramos en el uso que hacemos de herramientas teóricas provenientes de una perspectiva sociocultural, concretamente, el enfoque comognitivo, para tratar de caracterizar el cambio en el discurso matemático al abordar el proceso de definir. Los resultados muestran que dichos cambios se han podido caracterizar a través de las relaciones identificadas entre las herramientas teóricas propias de este enfoque.

Abstract

The processes of construction of mathematical knowledge, such as defining, proving and modeling are key elements in the learning of mathematical knowledge. In this paper we focus on our use of theoretical tools from a sociocultural perspective, namely commognitive approach to try to characterize change in mathematical discourse about defining. The results show that these changes have been characterized through the relationships identified between the theoretical tools to this approach.

Palabras clave: *Definir, aprendizaje matemático, discurso, perspectiva sociocultural.*

Key words: *Defining, mathematical learning, discourse, sociocultural perspective.*

Introducción

En las últimas décadas, dentro del campo de la Educación Matemática se viene desarrollando una corriente de investigación sobre aspectos sociales involucrados en las prácticas matemáticas. En este sentido, han surgido numerosos trabajos donde las teorías socioculturales tienen un papel destacado tanto a nivel internacional (Lerman, 2006; Sfard, 2007, 2008) como a nivel nacional (Llinares, 2008; García y Sánchez, 2008; Sánchez y García, 2011; Planas, 2010). Una línea de investigación, que se viene desarrollando durante los últimos años, se ocupa de la aproximación teórica conocida como socioepistemología, la cual estudia los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, que considera cuatro componentes fundamentales en el aprendizaje, entre ellas la dimensión sociocultural (Cantoral y Farfán, 2003).

En nuestro país se observa una presencia de las teorías socioculturales en distintos ámbitos, como por ejemplo proyectos de investigación, becas, tesis y artículos en revistas científicas con autores españoles, como señala Planas (2010), lo que según esta autora “informa sobre el reconocimiento de estas teorías a muy distintos niveles”. En dichos trabajos hay una concepción del conocimiento matemático como construcción social y cultural (Lerman, 2006) y muchos de ellos centran la atención en el análisis de los procesos por los cuales se produce dicha construcción social (Chico y Planas, 2011). En esta construcción social tiene un papel preponderante el discurso, que tiene que ver con compartir significados y modos de interpretar cómo actuar en ciertos contextos. En relación al discurso, Sfard (2007, 2008) considera que las matemáticas son un tipo especial de discurso y aprender matemáticas significa cambiar el discurso matemático.

Nuestra investigación, que forma parte de un proyecto de investigación (ver agradecimientos) desarrollado en la Universidad de Sevilla por un grupo de profesores del Dpto. de Didáctica de las Matemáticas, se sitúa en una perspectiva sociocultural, concretamente en el enfoque comognitivo propuesto por Sfard (2007, 2008) (commognitive en versión original), para abordar el aprendizaje matemático de estudiantes de niveles no obligatorios (16-18 años y estudiantes para Maestro). De acuerdo con Sfard (2007, p. 573), “el desarrollo discursivo de individuos o clases enteras puede entonces ser estudiado a través de las transformaciones identificadas en cada una de sus cuatro características discursivas, uso de palabras características del discurso, uso de mediadores, narrativas asumidas y rutinas”. El contexto matemático utilizado es el proceso de definir y su producto la definición.

Nos centramos en la caracterización de los cambios en el discurso matemático, a través del uso de las herramientas teóricas provenientes de la perspectiva comognitiva. En primer lugar, describiremos las ideas que conforman el marco teórico utilizado, pasando a continuación al diseño metodológico adoptado, para terminar presentando los primeros resultados y conclusiones.

Marco teórico

Teniendo en cuenta que, en nuestra investigación, hemos querido indagar sobre el aprendizaje de definir (y su producto la definición) en estudiantes, desde una perspectiva comognitiva, en nuestro marco teórico vamos a explicitar la forma de entender el aprendizaje desde dicha perspectiva, y como hemos entendido el proceso de definir y su producto la definición.

Desde la perspectiva comognitiva, el aprendizaje se caracteriza a través de los cambios en el discurso matemático. En esta comunicación, estos cambios se analizan a través de las herramientas teóricas propuestas por Sfard (2007, 2008), que ya hemos utilizado en otros trabajos (Sánchez y García, 2011; Sánchez-Matamoros, Escudero y Gavilán, 2011).

Palabras matemáticas ('mathematical words' en el original): aquellas utilizadas en el discurso matemático, incluyendo términos no propiamente matemáticos con significado y utilidad matemático/a.

Mediadores visuales ('visual mediators' en el original): entendidos como los medios con los que los participantes del discurso identifican los objetos de los que están hablando y coordinan su comunicación. En los discursos matemáticos, entre los mediadores se incluyen los artefactos simbólicos.

Narrativas asumidas ('narratives' en el original): son cualquier texto hablado o escrito que da una descripción de los objetos, de relaciones entre objetos, o de actividades con los objetos y que está sujeta a la aceptación o rechazo. A veces se utiliza el término narrativas asumidas/aceptadas ('endorsed narratives') para referirse a las que se etiquetan como verdaderas por una comunidad dada.

Rutinas ('routines' en el original): son patrones repetitivos bien definidos en las acciones de los interlocutores, característicos de un discurso dado. Las regularidades específicamente matemáticas pueden ser identificadas si uno ve el uso de las palabras matemáticas y mediadores matemáticos o sigue el proceso de crear y fundamentar narrativas asumidas. Las rutinas pueden ser de naturaleza algorítmica.

Por otro lado, en relación a definir/definición, consideramos "definir" como el "proceso para llegar a establecer una definición", teniendo en cuenta que esta última prescribe el significado de una palabra o frase de forma específica en términos de una lista de características que tienen que ser todas verdaderas (Sánchez, García, Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2008). Estudios como los de Borasi (1991), Mamona-Dows y Dows (2002), Van Dormolen y Zaslavsky (2003) y los de Zaslavsky y Shir (2005), se han ocupado de la naturaleza de tales definiciones y de los atributos y roles que debe cumplir una definición matemática.

En este trabajo, la pregunta de investigación que pretendemos responder es: ¿Podemos hacer operativas las herramientas teóricas (palabras matemáticas, narrativas asumidas, mediadores visuales y rutinas) para identificar y explicar los cambios que se producen en el discurso de los estudiantes cuando abordan el proceso de definir?

Metodología

Participantes

Los sujetos participantes en la investigación fueron 51 estudiantes de enseñanza no obligatoria (13 de segundo curso de Bachillerato de edad entre 16 y 18 años, y 38 estudiantes para profesor de primaria de edad entre 18 y 21 años). La participación en el estudio fue voluntaria y los estudiantes se organizaron en grupos de tres o cuatro según su libre elección, formándose 15 grupos. De esta forma, consideramos como sujetos de análisis a los grupos de estudiantes resolviendo tareas.

Tarea

La tarea utilizada aborda el proceso de definir y la definición en un contexto geométrico, en particular, la definición y clasificación de paralelogramos. Dicho contexto se ha identificado como un campo relevante y fructífero para las investigaciones sobre definiciones y clasificaciones (De Villiers, 1998). La tarea se planteó por escrito al grupo de estudiantes y en ella se presentaban las figuras de tres cuadriláteros (cuadrado, rectángulo y rombo) y una serie de preguntas, con las que se trataba de ir identificando elementos (lados, ángulos interiores y exteriores entre lados, diagonales y ángulos entre diagonales...) y características o propiedades que llevaran a definir los conceptos de cuadrado, rombo y rectángulo.

Fuentes de datos

Se realizaron grabaciones en audio (y algunas en video) de los grupos de estudiantes durante la resolución de la tarea y se recogieron los documentos utilizados por los grupos. Los datos son las transcripciones de los diálogos verbales de los grupos de estudiantes cuando resuelven la tarea propuesta (entendida como una iniciativa concreta con unas determinadas características y diseñada en base a un objetivo) y los documentos escritos facilitados por los estudiantes sobre la resolución de la tarea.

Proceso de Análisis

El proceso de análisis realizado para caracterizar el procedimiento de cambio en el discurso consta de dos niveles:

- i) Nivel 1: Identificación de las herramientas teóricas: palabras matemáticas, mediadores visuales, narrativas asumidas y rutinas
- ii) Nivel 2: Identificación de relaciones entre las herramientas teóricas identificadas en el nivel 1, que nos permite dar cuenta de los cambios producidos en el discurso matemático.

A continuación, en la sección de resultados mostraremos con un ejemplo la forma en la que hemos realizado el proceso de análisis descrito.

Resultados

A partir del análisis de los datos provenientes de los 15 grupos analizados, identificamos diferentes procedimientos de cambio en el discurso mediante las relaciones encontradas entre narrativas asumidas y rutinas. Dadas las limitaciones de espacio de la comunicación, en esta sección, vamos a considerar uno de los grupos y mostraremos los resultados obtenidos en los distintos niveles de análisis.

En el nivel 1º procedimos a la identificación de las herramientas teóricas a partir de los datos (como ejemplo usamos un protocolo del grupo considerado). En el protocolo seleccionado, aparecen las **herramientas teóricas**, que se han identificado en el primer nivel. Para facilitar la lectura, hemos destacado en negrita las palabras matemáticas identificadas, en cursiva las rutinas, y subrayadas las narrativas. En relación a los mediadores visuales, los estudiantes se apoyan continuamente en las figuras proporcionadas en el enunciado de la tarea.

Protocolo:

527.A1: Definir cada una de las figuras. Figura 1: **Polígono regular** de

528. **cuatro lados iguales**

- 529.A2. **Polígono regular de cuatro lados iguales**
- 530.A1: Es decir, un **cuadrado**
- 531.A2. Pero, exactamente
- 532.A4: **cuadrado, rectángulo**
- 533.(Risas)
- 534.A2: Es que yo creo que aquí lo que pide es el **nombre** y ya está
- 535.A1, A3, A4: No,
- 536.A2: Eso no sería **definir**
- 537.A4: No, sería **nombrar**
- 538.A2: Pero es que aquí preparaos porque pregunta por otra **definición**
- 539.A3: Podría dar otra definición ¡ostras!
- 540.(RISAS)
- 541.A1: ¡Ah bueno! aquí lo ponemos superficial y ya está
- 542.A2: No, aquí ponemos **polígono regular, polígono regular, polígono regular**
- 543.(RISAS)
- 544.A1. Y aquí ponemos **polígono regular de cuatro lados**
- 545.A2: Voy a preguntar si se refiere al **cuadrado**. A ver si vamos a estar aquí quebrándonos
546. la cabeza inútilmente
- 547.A1: ¡Vale!
- 548.P: De distintas maneras ...
- 549.A1: *¡Vale! Polígono regular de cuatro lados iguales. O sea que **definas el cuadrado**.*
550. **Polígono regular de cuatro lados iguales** y eso hace ya que se formen los **ángulos de 90**
- 551.A3: Pero es que eso no es una **definición**
- 552.A1: Como que no, **polígono regular de cuatro lados iguales**
- 553.A3: pero lo de los **ángulos** ¿Y eso ya hace que...?
- 554.A1: No. No pero
- 555.A3: Espera a ver que dice José
- 556.A1: **Polígono regular de cuatro lados iguales.**
- .../...
- 578.A1: *Pues nada, **polígonos regular de cuatro lados iguales***
- 579.A2: *De **cuatro lados que forman ángulos de noventa grados***
- 580.A1. Es que si son **cuatro lados iguales** ya ...
- 581.A2: Es que ya estamos hablando de **características**
- 582.A3: **Polígono regular de cuatro lados iguales**

Lo que hemos destacado en cursiva en el protocolo constituye una secuencia de acciones, que se observa cuando los estudiantes están dando las características del cuadrado, por ejemplo “lados iguales, ángulos de 90 grados,...” (líneas 549-550). Esta secuencia de acciones, que vamos a denominar “Identificar características de los objetos”, se aprecia en el discurso del grupo varias veces, como puede observarse en las líneas 549-550 y 578-579. Este carácter repetitivo confiere a este conjunto de acciones

la denominación de rutina. Así, este grupo de estudiantes considera como elementos relevantes lados y ángulos, adquiriendo la rutina, en este grupo, la forma siguiente:

miran la figura,

identifican número de lados y ángulos entre lados,

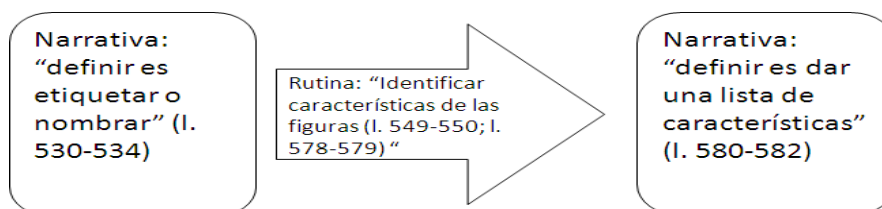
enuncian propiedades de lados y ángulos (lados iguales, polígono regular, ángulos de 90° , ...).

De forma esquemática, en general, esta rutina consta de las siguientes acciones: miran la figura, identifican elementos relevantes de la misma (lados, ángulos, etc) y enuncian propiedades o características de la figura objeto de estudio. Esta rutina la hemos denominado rutina *Identificar características*.

En el nivel 2º procedimos a identificar relaciones entre las herramientas teóricas. La identificación de relaciones entre las distintas herramientas nos permite caracterizar los cambios en el discurso matemático. Así, si observamos el protocolo anterior, el grupo de estudiantes comienza considerando que es suficiente con poner un nombre para definir un concepto (líneas 530-534, 536-537), lo que desde nuestro punto de vista es asumir la narrativa *Etiquetar*, entendida como que “definir es etiquetar, poner un nombre a una clase, más o menos amplia, de objetos”. Posteriormente, se pone de manifiesto que se asume la narrativa “definir es dar una lista de características de los objetos que se pretenden definir”, que vamos a denominar *Listado de características* (líneas 580-582).

El cambio de narrativa se produce porque los estudiantes hacen uso de la rutina “Identificar características de los objetos” (rutina *Identificar características*) (líneas 549-550; 578-579). Se puede decir que la rutina *Identificar características* juega un papel relevante para que se produzca este cambio entre las narrativas asumidas *Etiquetar* y *Listado de características*, lo que caracteriza el cambio en el discurso matemático del grupo de estudiantes.

En este cambio de narrativas asumidas, se observa además que se amplía el significado de algunas palabras matemáticas. Por ejemplo, en un primer momento, la palabra “cuadrado” se utiliza para etiquetar una determinada forma geométrica en el sentido de “la figura es un cuadrado” (ver línea 530); sin embargo, cuando asumen la narrativa *Listado de características* el término “cuadrado” es una palabra que se utiliza para designar a una figura geométrica que cumple unas determinadas características (línea 582). En el siguiente diagrama mostramos el esquema del procedimiento de cambio.



Este cambio en el discurso lo denominamos “De nombrar a listar” y queda caracterizado por el cambio de narrativas asumidas mediante el uso de una determinada rutina y el cambio en el significado de determinadas palabras matemáticas.

Entre los primeros resultados encontramos que el procedimiento de cambio expuesto en esta comunicación, puede observarse en aproximadamente el 60% de los

grupos analizados. Además en el 100% de estos grupos se hace través de la misma rutina, *Identificar características*. La siguiente tabla recoge globalmente una aproximación a los procedimientos de cambio en el discurso de las narrativas asumidas, que se ponen de manifiesto en los grupos de nuestro estudio:

PROCEDIMIENTOS DE CAMBIO	NÚMERO DE GRUPOS
Invariantes en el discurso	4
De nombrar (N1) a listado de características (N2): $N1 \rightarrow N2$	9
De listado de características (N2) a listado mínimo de características (N3): $N2 \rightarrow N3$	3
De listado mínimo de características (N3) a listado equivalente de características (N4): $N3 \rightarrow N4$	1

En el número total de grupos aparecen 17 en lugar de 15 grupos, porque hay 2 grupos contabilizados dos veces ya que en ellos se ha observado más de un procedimiento de cambio.

Discusión y conclusiones

El trabajo que aquí hemos presentado intenta acercarse al proceso de definir, en estudiantes de enseñanza no obligatoria, mediante una aproximación sociocultural, pretendiendo hacer operativas ideas provenientes de la perspectiva comognitiva propuesta por Sfard (2007, 2008). Mostramos como el uso de determinada rutina, *Identificar características*, ha permitido que se produzca el cambio de narrativas aceptadas por parte de los estudiantes, lo que nos permite inferir que se ha producido aprendizaje matemático, entendiendo que los cambios en el discurso son un indicador del aprendizaje matemático. El uso de esta rutina conlleva el cambio de significado de algunas palabras matemáticas.

Las relaciones entre diferentes herramientas teóricas, como son narrativas asumidas y rutinas y el cambio de significado de las palabras matemáticas, pueden ser consideradas como una manera de inferir cambios en el discurso, como indicador del aprendizaje matemático. El cambio de narrativas y de significado vinculado a las palabras matemáticas se produce en los estudiantes por el uso de rutinas. Pensamos que es necesario profundizar en el papel que pueden tener los mediadores visuales en estos procedimientos de cambio.

Por tanto, coincidimos con Chico y Planas (2011) en la necesidad de encontrar herramientas teóricas socioculturales que permitan el análisis del discurso. Ellos, en su trabajo se han centrado en el análisis de la argumentación matemática en la resolución de problemas y nosotros hemos abordado el proceso de definir en matemáticas a través de la resolución de una tarea.

El análisis mostrado en este trabajo pensamos que tiene potencial para profundizar en los cambios en el discurso de los estudiantes. En esta comunicación hemos mostrado el caso de un cambio de discurso realizado en “una etapa”, en el sentido de un cambio de una narrativa asumida a otra por el uso de una determinada rutina, pero este tipo de

cambios puede ser la base para identificar cambios de narrativas en más de una etapa, es decir, entre al menos tres narrativas, lo que produciría posibles cambios en el discurso en dos o más etapas. Este tipo de cambios es el que podría observarse en los grupos que en la tabla de resultados hemos contabilizado dos veces, ya que en dichos grupos se ponen de manifiesto más de un cambio.

Lo que hemos mostrado aquí es un ejemplo que nos permite pensar en proyectos de futuro, en la línea de tratar de caracterizar procedimientos de cambios en el discurso matemático de los estudiantes a través de las herramientas teóricas consideradas, tanto en el proceso de definir, como en otros procesos.

Investigaciones en esta línea, ayudan a ampliar la forma de aproximarse al aprendizaje y a las dificultades de los estudiantes que conlleva la construcción y el uso de definiciones (Rasmunssen, Zandieh, King y Teppo, 2005; Edwards y Ward, 2004).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo del proyecto PSI2008-02289 del Plan Nacional de I+D del Ministerio de Ciencia y Tecnología

Referencias

- Borasi, R. (1991). *Learning Mathematics Through Inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books, Ins.
- Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Educación y Pedagogía*, Vol. XV, nº35.
- Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Pelarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, pp. 319-328. Ciudad Real: SEIEM.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th PME International Conference*. 2, 248-255.
- Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5), 411- 424.
- Lerman, S. (2006). Cultural psychology, anthropology and sociology: the developing “strong”, social turn. En J. Maasz y W. Schloeglmann (Coords.), *New mathematics education research and practice*, pp. 171-188. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde “ISI-Web of Knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*, pp. 25-53. Badajoz: SEIEM.
- Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2002). Advanced Mathematical Thinking With a Special Reference to Reflection on Mathematical Structure. En L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 165-195). Mahwah, NY, USA: Lawrence Erlbaum.

- Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV*, pp. 163-195. Lleida: SEIEM.
- Rasmunssen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 51-73.
- García, M. y Sánchez, V. (2008). *El aprendizaje matemático como un proceso social*. En I Seminario Hispano-Portugués sobre la Teoría Sociocultural en Investigación Educativa. Sevilla.
- Sánchez, V. y García, M. (2011). Socio-Mathematical and Mathematical norms in pre-service primary teachers' discourse. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME International Conference*, 4, 105-112.
- Sánchez, V., García, M., Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2008). Una aproximación a las matemáticas en el bachillerato. ¿Qué se pretende que aprendan los alumnos? *Enseñanza de las Ciencias*, 26(2), 267-276.
- Sánchez-Matamoros, G., Escudero, I. y Gavilán, J. M. (2011). Defining from sociocultural approach. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME International Conference*, 1, 500-500.
- Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Van Dormolen, J. y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 91-106.
- Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (4), 317-347.

NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

LEVELS OF ELEMENTARY ALGEBRAIC REASONING

Godino, J.D. ⁽¹⁾, Aké, L.P. ⁽¹⁾, Gonzato, M. ⁽¹⁾, Wilhelmi, M.R. ⁽²⁾

Universidad de Granada ⁽¹⁾, Universidad Pública de Navarra ⁽²⁾

Resumen

Las investigaciones sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento algebraico en los primeros niveles de educación primaria no han sido concluyentes sobre las fronteras entre las prácticas matemáticas de índole algebraica y aquellas que no lo son. En este trabajo definimos niveles primarios de algebrización de la actividad matemática escolar y ejemplos prototípicos de tareas de cada nivel, basados en la tipología de objetos y procesos que propone el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. El modelo puede ser útil para desarrollar el significado del álgebra en los maestros de Educación Primaria y capacitarles para promover el pensamiento algebraico en esta etapa educativa.

Abstract

Research on the nature and development of algebraic reasoning in the early grades of primary education have been inconclusive about the boundaries between the mathematical practices of algebraic nature and those not algebraic. In this paper we define primary levels of algebrization in school mathematics activity and prototypical examples of tasks of each level, based on the type of objects and processes proposed by the onto-semiotic approach of mathematical knowledge. The model can be useful to develop the meaning of algebra in elementary school teachers and empower them to promote algebraic thinking in primary education.

Palabras clave: *Algebra elemental, práctica matemática, niveles de razonamiento, formación de maestros, enfoque ontosemiótico.*

Key words: *Elementary algebra, mathematical practice, reasoning level, teacher's training, onto-semiotic approach.*

Introducción

Diversas investigaciones han evidenciado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria (Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006; Kieran, 2007; Filloy, Puig y Rojano, 2008). El álgebra, entendida de una manera restrictiva como lenguaje simbólico, y orientada básicamente a la resolución de ecuaciones y estudio de los polinomios, aparece de manera abrupta en secundaria, sin continuidad con los temas de aritmética, medida y geometría tratados en primaria.

La inclusión del álgebra en el currículo de la escuela primaria (NCTM, 2000) reclama una concepción más amplia del razonamiento algebraico. Dicho razonamiento debe contemplar no sólo los *contextos de uso* (aritmética, medida, geometría o análisis de datos) y la actividad matemática asociada, sino también el “*grado*” de *algebrización*.

Avanzar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico es un tema complejo pero necesario desde el punto de vista educativo. Como afirma Radford (2000, p. 238), “necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización”.

La elaboración de un modelo comprensivo sobre el álgebra elemental podría facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación progresivos del razonamiento algebraico. En este trabajo abordaremos este problema utilizando algunas herramientas teóricas del “enfoque ontosemiótico” del conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2007). Consideramos, junto con diversos autores (Mason y Pimm, 1984; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008), que la generalización es un rasgo característico del razonamiento algebraico, así como los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización, como las de indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones). En primer lugar sintetizamos la visión del álgebra elemental según el enfoque ontosemiótico desarrollada en Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012); a continuación, definimos dos niveles de razonamiento proto-algebraico enmarcados entre otros dos niveles: uno, en el que el razonamiento es exclusivamente aritmético (nivel 0 de algebrización); otro, en el que los rasgos algebraicos están consolidados (nivel 3). Finalmente resaltamos algunas implicaciones del modelo para la formación de profesores de Educación Primaria.

Enfoque ontosemiótico del álgebra elemental

La perspectiva pragmatista, antropológica y semiótica del “enfoque ontosemiótico” del conocimiento matemático (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011) aporta herramientas teóricas que pueden ayudar a caracterizar el razonamiento algebraico en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática. La consideración de una práctica matemática como de índole algebraica puede hacerse con base en la presencia de cierto tipo de objetos y procesos, usualmente considerados en la literatura como algebraicos.

Objetos algebraicos prototípicos

1) *Relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.

2) *Operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades. También pueden intervenir conceptos como ecuación, inecuación, incógnita, y procedimientos tales como, eliminación, transposición de términos, factorización, etc.

3) *Funciones algebraicas, no trascendentes*, es decir, aquellas que se generan mediante adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación de la variable independiente. Es necesario considerar los distintos tipos de funciones (polinómicas, racionales, radicales) y su álgebra asociada (operaciones y propiedades).

4) *Estructuras y sus tipos* (semigrupo, grupo, anillo, cuerpo, etc.) propias del álgebra superior o abstracta.

Procesos algebraicos prototípicos

En el caso de la actividad algebraica los procesos de particularización – generalización tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico. Así, para el análisis de los niveles de algebrización de la actividad matemática es útil fijar la atención en los objetos resultantes del proceso de generalización, y de particularización. Como resultado de un proceso de generalización obtenemos un tipo de objeto matemático que denominaremos *objeto intensivo*, que viene a ser la regla que genera la clase (Godino et al., 2011) y que permite identificar un elemento particular como representante de la misma.

Mediante el proceso de particularización se obtienen objetos que denominamos *extensivos*, esto es, objetos particulares. Una colección finita simplemente enumerada de objetos particulares no se debe considerar como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra la regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. Entonces el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización*.

Por otra parte, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o materializada mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo. El objeto ostensivo que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y a la materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (proceso de *reificación*). Estos símbolos-objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los cuales se opera de manera sintáctica, analítica o formal (figura 1).

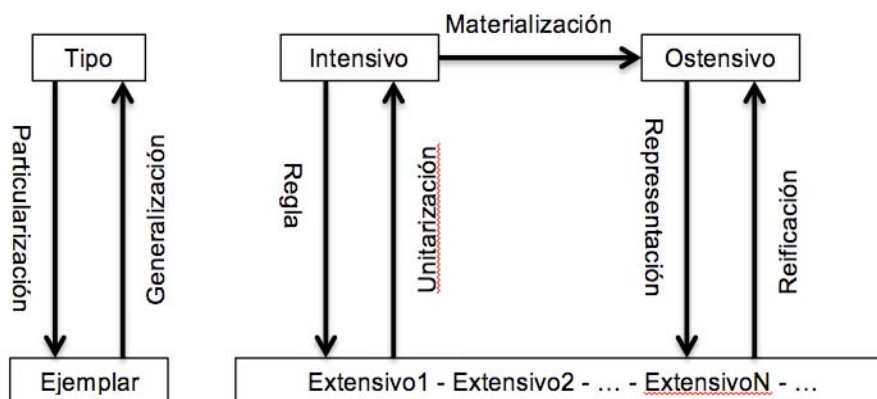


Figura 1. Procesos asociados a la dualidad ejemplar-tipo.

Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización. Pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, incluso gestual (Radford, 2003).

En la siguiente sección, describimos la frontera entre la aritmética y el álgebra en términos de las dualidades y procesos descritos. Pero esta frontera no está objetiva o platónicamente establecida, puesto que estas dualidades y procesos son relativos al contexto donde se desarrolla la práctica matemática. De hecho, el carácter algebraico está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma el objeto intensivo, la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria y su materialización mediante cualquier registro semiótico para su posterior tratamiento analítico. Este triple proceso (reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización) va a permitir definir dos niveles primarios del pensamiento algebraico, distinguibles de un nivel más avanzado en el que el objeto intensivo es visto como una nueva entidad representada con lenguaje alfanumérico.

Niveles de algebrización

En esta sección describimos las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, abordables en educación primaria, que permiten definir distintos niveles de algebrización. Proponemos distinguir dos niveles de algebrización primarios (que llamamos proto-algebraicos). Dichos niveles están enmarcados entre un nivel 0 de algebrización y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica. Las etapas del proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas que identifica Bolea (2002) corresponden a tareas y actividades matemáticas que, según nuestra modelización del razonamiento algebraico, tienen ya un carácter algebraico consolidado. Por ejemplo, la primera etapa del proceso de algebrización que describen Ruiz, Bosch y Gascón (2010), consistente en la formulación escrita (simbólica) de un "programa de cálculo aritmético", ya corresponden a una actividad matemática del nivel 3 según nuestro modelo.

El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. No se trata por tanto de niveles exclusivamente matemáticos (centrados en las tareas), sino de estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas (centrados en la relación de los sujetos con las tareas). Además, el cambio en alguna de las variables del problema puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Nivel 0 algebrización

Si deseamos capacitar al maestro de primaria para que desarrolle el razonamiento algebraico en sus estudiantes, es necesario describir las prácticas matemáticas de nivel 0, esto es, aquellas que no incluyen características algebraicas. Proponemos la siguiente regla para asignar el nivel 0 de algebrización a una práctica matemática:

Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas funcionales el reconocimiento de la relación de un término con el siguiente, no implica la determinación de una regla recursiva que generaliza la relación de los casos particulares.

Ejemplo 1: Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

En la figura 2 incluimos la respuesta de un estudiante a este problema.

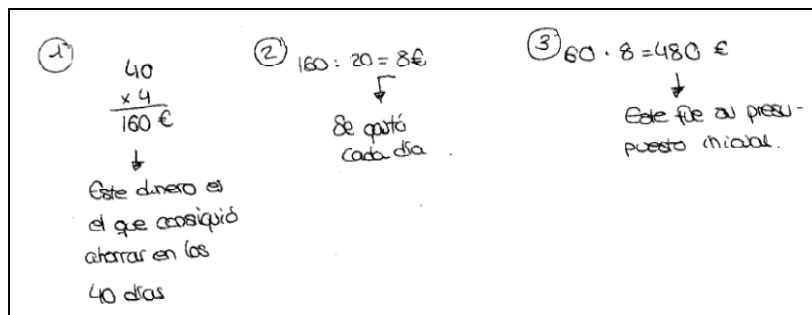


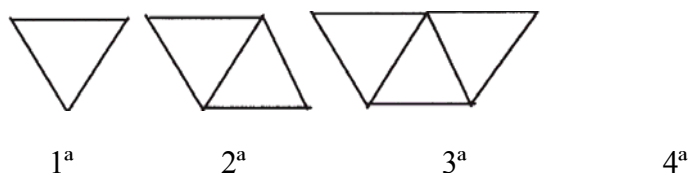
Figura 2. Respuesta del estudiante 1

En esta resolución todos los objetos que aparecen en el proceso de resolución son medidas de cantidades particulares de magnitudes y operaciones aritméticas con los valores numéricos de dichas medidas. No hay ningún rasgo propio de razonamiento algebraico (nivel 0).

Nivel 1 de algebrización

Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente.

Ejemplo 2: ¿Cuántos palillos son necesarios para formar la 4ª figura? ¿Y para formar la figura que estuviera en la posición 20? ¿Cuántos palillos serían necesarios para construir la figura que estuviera en la posición 100?



En la figura 3, se muestra la respuesta del estudiante 2.

→ ~~1ª~~ figura →

2ª → 3 + (2+0)

3ª → 3 + (3+1)

4ª → 3 + (4+2) → 9

5ª → 3 + (5+3)

⋮

20ª → 3 + [20 + (20-2)] → 3 + (20-18) = 41

⋮

100ª → 3 + [100 + (100-2)] → 3 + 100 + 98 = 201

• Si observamos la serie se le va sumando a 3 el número de la posición en el que se encuentra y a ese mismo número se le suma el mismo menos 2, ya que en cada una de las figuras al unir dos triángulos por los lados, cada en vez de ser necesarios dos palillos solo se unen mediante un palillo.

Figura 3. Respuesta del estudiante 2.

El estudiante 2 escribe la secuencia de números naturales contextualizados para designar las figuras desde la 2ª posición hasta la 100ª. Establece una correspondencia entre la posición y el número de palillos necesarios para construir la figura, encontrando la respuesta para las posiciones pedidas (20ª → 41; 100ª → 201). La escritura permite identificar una relación entre el lugar que ocupa la figura en la serie y el número de palillos. Así, el estudiante identifica la regla general:

$$N\text{-ésimo lugar} \rightarrow N^{\circ} \text{ de palillos} = 3 + [N + (N - 2)]$$

Esta regla la enuncia verbalmente y mediante símbolos no formalizados: los puntos suspensivos (...) indican que la misma estructura se mantiene para todos los términos; la flecha (→), es la asignación de un valor (número de palillos) según el lugar que ocupa la figura en la serie. Estos símbolos evocan la escritura formal-literal que representa el término general de la sucesión “número de palillos”:

$$a_n = 3 + [n + (n - 2)] = 2n + 1$$

Esta escritura aparecerá en niveles superiores de algebrización.

Nivel 2 de algebrización

Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial o temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

En el ejemplo 2, el estudiante 3, propone la solución de la figura 4.

$1^{\circ} = 3 \text{ pal.}$ $2^{\circ} = 5 \text{ pal. } (3+2)$ $3^{\circ} = 7 \text{ pal. } (5+2)$	$4^{\circ} \text{ figura} \rightarrow 3^{\circ} + 2 \rightarrow 7 + 2 = 9 \text{ palillos}$ $20^{\circ} \text{ fig} \rightarrow 3 \cdot 20 - 19 = 41 \text{ palillos}$ $100^{\circ} \text{ fig} \rightarrow 3 \cdot 100 - 99 = 201 \text{ palillos}$
$2^{\circ} \text{ fig} \Rightarrow 3 \cdot 2 - 1 = 5$ $3^{\circ} \text{ fig} \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 = 7$ $4^{\circ} \text{ f.} \Rightarrow 3 \cdot 4 - 3 = 9$	$\star (n-1) \rightarrow$ Cada triángulo añadido se forma con 2 palillos, no con 3. Esta diferencia se acumula con cada nuevo triángulo que se añade. $\rightarrow$ Se multiplican los 3 palillos constituyentes del triángulo por tantos como indique el ordinal de la figura y a continuación se resta el anterior a dicho ordinal
$n^{\circ} \text{ f.} \Rightarrow 3 \cdot n - (n-1)$	

Figura 4. Respuesta del estudiante 3.

Esta solución incluye los objetos indicados en la solución del estudiante anterior y además expresa el criterio de la correspondencia para un término general n , expresado con lenguaje natural y de manera simbólica – literal, $n^{\circ} \text{ f.} \rightarrow 3n - (n-1)$. La fórmula refleja las acciones que se deben hacer con los datos del problema específico; no se opera con las variables para obtener una forma canónica de dicha expresión. El estudiante no llega a formular el criterio de la correspondencia de forma canónica operando con los símbolos literales para obtener la función lineal: $f(n) = 2n + 1$.

Nivel 3 de algebrización

Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

En la figura 5 incluimos la respuesta del estudiante 4 al ejemplo 1.

$40x = 60(x-4)$ $40x = 60x - 240$ $240 = 60x - 40x$ $240 = 20x$ $x = \frac{240}{20} = 12 \text{ €}$ recibe inicialmente para comer un día En total recibe: $12 \times 40 = 480 \text{ €}$

Figura 5. Respuesta del estudiante 4.

Este estudiante simboliza con la letra x el gasto diario previsto inicialmente para los 40 días, y el gasto diario efectivamente realizado mediante $x - 4$. Es capaz de plantear una ecuación que relaciona los valores numéricos de las medidas de las cantidades que intervienen. A continuación aplica un procedimiento algorítmico para despejar la incógnita y hallar su valor ($x = 12 \text{ €}$, dinero que recibe inicialmente para comer un día). Se trata de una modelización claramente algebraica (nivel 3).

Evidentemente, se pueden identificar niveles más avanzados de razonamiento algebraico, como aquellos que implican el reconocimiento, enunciado y justificación de propiedades estructurales de los objetos matemáticos que intervienen en la práctica correspondiente. Sin embargo, puesto que el objetivo de este trabajo se centra en los conocimientos útiles en la formación de maestros de Educación Primaria, consideramos necesario centrarnos en estos tres primeros niveles de algebrización.

Síntesis e implicaciones para la formación de profesores

Los niveles de algebrización que proponemos están relacionados con los dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico; a saber, el álgebra como:

- a) Simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones.
- b) Razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales.

El aspecto a) se concreta en nuestro modelo en los niveles proto-algebraicos de razonamiento 1 y 2, mientras que el b) se asocia al nivel 3, donde el álgebra está ya consolidada. Nuestro requerimiento del uso de lenguaje simbólico-literal para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática, y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje, concuerda con las posiciones de otros autores interesados por definir “lo algebraico” (Puig y Rojano, 2004, p. 198). Asimismo, operar con la incógnita como si fuese conocida, representada en lenguaje simbólico-literal, marca diferencias distintivas entre el razonamiento aritmético y el propiamente algebraico. “Este tipo de insuficiencia operacional en lo que está representado en el estadio pre-simbólico del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o cambio entre operar sobre la incógnita y no operar sobre ella, aquí al nivel del pensamiento individual” (Filloy, Puig y Rojano, 2008, 93).

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como “álgebra temprana” (Carraher y Schliemann, 2007), hemos propuesto distinguir dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para distinguirlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es “hacer explícita la generalidad”, de las relaciones (equivalencia u orden), estructuras, reglas, funciones o en la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera con dicha generalidad o se discute a propósito de ella.

Nuestras reflexiones sobre la naturaleza del razonamiento algebraico tienen implicaciones para la formación de maestros. No basta con elaborar propuestas curriculares (NCTM, 2000) que incluya el álgebra desde los primeros niveles educativos, se precisa que el docente actúe como principal agente de cambio en la introducción y desarrollo del razonamiento algebraico en las aulas de primaria. El modelo de caracterización del “álgebra temprana” que se propone en este trabajo, en particular la distinción de los niveles 1 y 2 de razonamiento proto-algebraico, puede ser útil en la formación de maestros de educación primaria. El análisis focalizado en el reconocimiento de objetos y procesos propios del pensamiento algebraico, puede facilitar la identificación de rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) y fondos FEDER.

Referencias

- Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.
- Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education*, 40, 23-37.
- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kapunt, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.
- Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Lacasta, E., Madoz, E. G. y Wilhelmi, M. R. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. *Indivisa*, Extra 4, 79-90.
- Mason, J., y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

ANÁLISIS DE INTERPRETACIONES ESCRITAS DEL PROFESORADO SOBRE LA ARGUMENTACIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS

ANALYSIS OF TEACHERS' WRITTEN INTERPRETATIONS ABOUT ARGUMENTATION IN THE MATHEMATICS CLASSROOM

Goizueta, M., Planas, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Presentamos un estudio acerca de temas recurrentes en discursos sobre argumentación en clase de matemáticas escritos por profesorado de secundaria. Desde un enfoque discursivo, integramos análisis parciales de las dimensiones lógica, epistémica y semántica. En el marco de la teoría fundamentada, aplicamos métodos de comparación constante a fin de elaborar temas que ilustren los resultados principales. Sobre todo, nuestro análisis señala que los profesores dan importancia al papel de la reformulación en el desarrollo de prácticas argumentativas, pero a menudo omiten referirse al valor epistémico de los argumentos.

Abstract

We present a study on recurrent themes in discourses concerning argumentation in the mathematics classroom, written by secondary school teachers. A discursive approach is adopted to partially examine issues from the logical, the epistemic, and the semantic dimensions. Following grounded theory methods, constant comparison is applied to create themes that help illustrate results. Overall the analysis points to teachers mentioning the role of reformulation in the development of arguments and simultaneously omitting the epistemic value of such arguments.

Palabras clave: *Argumentación; Discurso; Clase de matemáticas; Profesorado de secundaria.*

Key words: *Argumentation; Discourse; Mathematics classroom; Secondary teachers.*

Introducción

Las prácticas de aula y las dificultades del profesorado ante la producción de argumentaciones deben ser tomadas en cuenta para comprender mejor el origen de algunas de las dificultades del alumnado. Al respecto, presentamos dos resultados principales de Goizueta (2011), un estudio acerca de la argumentación desde la perspectiva del profesorado de matemáticas. Los dos objetivos del trabajo son: 1) identificar interpretaciones de distintos profesores relativas a la argumentación en clase de matemáticas y 2) construir temas que sinteticen interpretaciones comunes. Para la consecución del segundo objetivo, se han elaborado temas emergentes mediante la aplicación de métodos de comparación constante a datos primarios extraídos de cuestionarios. La reducción de datos ha estado influenciada por un enfoque discursivo en la conceptualización de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de las tareas de investigación en torno a ellas. Por otra parte, el análisis de respuestas del profesorado debe verse como un primer paso en el camino hacia el análisis de prácticas situadas en el aula de matemáticas, en interacción con los participantes y con la actividad.

Fundamentos teóricos

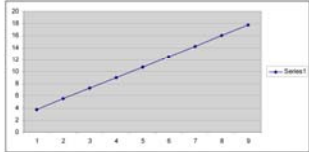
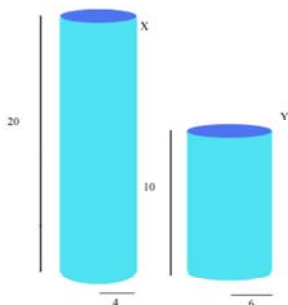
El núcleo conceptual del estudio gira en torno a la noción de argumentación en el aula de matemáticas. Vemos la argumentación como el acto de formar razones, hacer inducciones, extraer conclusiones y aplicarlas al caso en discusión. Se trata tanto del proceso de producción de un discurso lógicamente conectado, ya sea deductivo o inductivo, como del producto de este proceso. Desde una triple mirada lógica, epistémica y semántica, un argumento se acepta según su pertinencia y fuerza. Para que sea pertinente tiene que compartir campo semántico con la tesis que pretende apoyar, lo cual equivale a que los contenidos semánticos del argumento y de la tesis se superpongan. La fuerza depende de que el argumento acepte o no una réplica y de que su valor epistémico sea negativo o positivo. Las razones esgrimidas pretenden comunicar su fuerza a la tesis, modificar su valor epistémico y tornarlo positivo.

Por otra parte, la estructura y el valor de un argumento deben entenderse en el contexto donde tiene lugar la práctica argumentativa. Como Gutiérrez (2005), ubicamos la argumentación entre la explicación y la demostración, sin que haya una línea neta si solo se atiende a las características intrínsecas de una proposición. Sí se pueden señalar distinciones en función del contexto de la práctica. Esto amplía nuestro enfoque con supuestos según los cuales el valor semántico trasciende los significados asociados a la proposición para incluir un conjunto extenso de significados o “corpus”. Aunque las referencias extra-matemáticas en la búsqueda de coherencia semántica no se reconozcan como cuerpo institucionalizado, acostumbran a ser una parte crucial de la actividad matemática. Douek (2007) llama corpus de referencia al tipo de contenidos extra-matemáticos que no son objeto de duda, con veracidad y operatividad fácticas y socialmente determinadas. En el aula de matemáticas de secundaria conviven un corpus asociable a prácticas matemáticas que se suponen propias de esta etapa y corpus extra-matemáticos cuya institucionalización acostumbra a ser problemática.

Contexto y métodos

Para la recogida de datos, se diseñó un cuestionario basado en dos episodios ficticios de aula (ver Cuadro 1), que se pasó a diez profesores de matemáticas –P1 a P10. Se contactaron profesores de enseñanza secundaria con más de cinco años de experiencia docente. Cada episodio se enmarcó en la resolución de una tarea

matemática. En la redacción de intervenciones se aseguró la presencia de: (i) argumentaciones completas e incompletas, (ii) datos, garantías y conclusiones con valores lógicos verdaderos y falsos, (iii) contenidos extra-matemáticos y matemáticos, (iv) registros semióticos de representación pertinentes y no pertinentes, (v) calificadores modales distinguibles y (vi) conectivos explícitos.

Tarea 1 Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio? Episodio 1 1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional. 2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3.75€ y 2 kg 5.50 3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual. 4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional. 5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica. <table border="1" style="margin-right: 10px;"> <tr><td>1</td><td>3.75</td></tr> <tr><td>2</td><td>5.5</td></tr> <tr><td>3</td><td>7.25</td></tr> <tr><td>4</td><td>9</td></tr> <tr><td>5</td><td>10.75</td></tr> <tr><td>6</td><td>12.5</td></tr> <tr><td>7</td><td>14.25</td></tr> <tr><td>8</td><td>16</td></tr> <tr><td>9</td><td>17.75</td></tr> </table>  6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales. 7 A: Sí y por eso es directamente proporcional. 8 B: Ya... No sé... 9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana? 10 C: ¿Pues no gastaríamos nada! 11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota... 12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro! 13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional. 14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta... 15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.	1	3.75	2	5.5	3	7.25	4	9	5	10.75	6	12.5	7	14.25	8	16	9	17.75	Tarea 2 Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar? Episodio 2 El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.  1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más. 2 P: ¿Estás seguro de que es más grande? 3 D: Se ve claramente. 4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre... ¿Cómo era? 5 D: Ummm... Pues a mí me parece claro. 6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro? Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = \pi r^2 h$. Calculan los volúmenes: $V_x = 320\pi$ y $V_y = 360\pi$. 7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo? 8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No? 9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.
1	3.75																		
2	5.5																		
3	7.25																		
4	9																		
5	10.75																		
6	12.5																		
7	14.25																		
8	16																		
9	17.75																		

Cuadro 1. Visión general de los dos episodios, E1 y E2, del cuestionario

Antes de construir el cuestionario se preparó un documento de control para decidir sobre la riqueza de los episodios según sus prácticas argumentativas. Debido a la extensión, no es posible reproducir todo este documento. Resumimos los dos primeros turnos del Episodio 1 en el Cuadro 2. En Goizueta (2011) se encuentra el documento original completo.

Turno 1, Alumno A
<u>Datos 1: 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así.</u> <i>Describe una variación que es directamente proporcional ofreciendo ejemplos concretos y generalizando con un “y así”. En el marco del enunciado de la tarea es un dato falso porque no contempla el incremento en el precio de las manzanas debido al coste de la cuota inicial.</i> <u>Datos 2: Cada vez que esta variable aumenta 1, esta otra aumenta 1.75.</u> <i>Dato falso equivalente al anterior. Se establece ad hoc y está sujeto a verificación.</i> <u>Garantía: Es la definición de directamente proporcional.</u> <i>Es funcionalmente adecuada como garantía y denota comprensión parcial de proporcionalidad y relación directamente proporcional. Aunque el valor epistémico no es evidente, apela al estatus de definición en el corpus de referencia. No obstante, apunta a una definición no explícita.</i> <u>Conclusión: Por lo tanto, es una relación directamente proporcional.</u>

Se pretende derivar la conclusión necesariamente de los Datos 1 y 2 mediante la garantía y el esquema argumentativo que se le supone al alumno.

Turno 2, Alumno B

Datos 1: 1 kg cuesta 3.75€ y 2 kg [cuestan] 5.50.

Concede que la inferencia de A es correcta, pero de inmediato describe un dato correcto dentro de la tarea como argumentación implícita con base en parte de los datos de A y el requerimiento de pagar la cuota. Se considera una argumentación implícita en la medida en que reinterpreta la información en el marco del problema y se opone a datos aportados por A.

Garantía: Implícita.

Se sugiere que de datos falsos se pueden inferir conclusiones incorrectas.

Conclusión: Implícita.

Se sugiere que la conclusión del Turno 1 puede ser incorrecta, aunque esto no se verbaliza ni se elabora como negación a la garantía dada por A.

Cuadro 2. Fragmento del documento de control para E1

El cuestionario contiene tres bloques de preguntas, uno por episodio más otro de carácter general. Las demandas relativas a E1 son: “Fijándote en las intervenciones de A identifica argumentaciones, subráyalas y explica por qué lo son”, “Haz lo mismo con las intervenciones de B” y “De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de C”. Se establece un paralelismo con las demandas relativas a E2. Las preguntas de la última parte pretenden identificar un discurso más global: “Si has tenido dificultades al identificar argumentaciones, di cuáles”, “Si hay diferencias entre todas tus argumentaciones identificadas, di cuáles”, “¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas” y “Si deseas añadir algo más, hazlo en este espacio”.

Los métodos de análisis fueron inductivos e interpretativos. Hubo técnicas de comparación constante con triangulación de perspectivas dentro del equipo para inferir aspectos clave de los datos. Ilustramos parte de la fase de creación y definición de códigos a priori, de aplicabilidad reconfigurable y de acuerdo a varios sistemas de codificación (ver Tabla 1). Para empezar se realizó una codificación abierta comparando datos. El procedimiento se reiteró para reexaminar códigos y elaborar codificaciones axiales dentro de un cuestionario (análisis longitudinal) y dentro del conjunto de cuestionarios (análisis transversal). Para las codificaciones axiales se buscaron evidencias negativas o complementarias y se redactaron textos breves (memos) que sintetizaran análisis parciales. La combinación e iteración cíclica de codificación abierta, codificación axial y redacción de memos facilitaron la inducción de nuevos grupos de códigos, que se volvieron a integrar en un mismo procedimiento de análisis hasta decidir el punto de saturación teórica. Más tarde se exploraron relaciones entre memos, códigos y descriptores, como antesala del diseño de temas que englobaran aspectos inferidos de respuestas en más de un cuestionario. En las dos secciones siguientes presentamos dos de los temas surgidos. El Tema 1 se inspira en la revisión de los códigos Paráfrasis, Analogía y Cambio de Registro (ver Tabla 1), mientras que el

Tema 2 se inspira en la revisión de los códigos Valor Semántico, Valor Estructural y Valor Comunicativo (ver Tabla 1).

<i>Códigos</i>	<i>Descriptor</i>
ANALOGÍA	Se recurre a similitudes encontradas entre dos enunciados para inferir inductivamente otras similitudes o insistir en las ya detectadas.
PARÁFRASIS	Se recurre a explicaciones de un contenido mediante una reproducción que no imita por completo el enunciado original.
CAMBIO DE REGISTRO	Se recurre a representaciones matemáticas alternativas para referirse a contenidos de un enunciado que han sido expresados de otro modo.
VALOR SEMÁNTICO	Se recurre a dilucidar significados de partes de una intervención para justificar matemáticamente un enunciado.
VALOR ESTRUCTURAL	Se recurre a la presencia de aspectos estructurales tales como respaldo, garantía, calificador modal, etc. para explicar si hay argumentación.
VALOR COMUNICATIVO	Se recurre a la función o intención que se le supone a uno o varios enunciados respecto a su lugar en la interacción entre participantes.

Tabla 1. Ejemplos de códigos en una fase avanzada del análisis

Énfasis en el papel de la reformulación

Para E1, los datos en los Turnos 3, 4, 6 y 7 no amplifican los contenidos matemáticos del Turno 1, si no que actúan como reformulación a partir de paráfrasis, analogías o cambios de registro de representación. La garantía es la definición (no explícita y errónea) de directamente proporcional y siempre se recoge una única tesis. Los profesores identificaron varios de los turnos e indicaron vínculos con turnos previos:

P8 sobre E1, 3: “Insiste en el argumento sobre el que se basa para reconocer la proporcionalidad directa”

P1 sobre E1, 4: “Afirma que es una relación directamente proporcional y añade a 3 una comparación para que sea más fácil de imaginar”

P7 sobre E1, 6: “C relaciona la gráfica comentada con su comparación en 4. (...) Todas estas intervenciones van dirigidas a defender el punto de vista sostenido por cada alumno. Cada uno intenta convencer a los demás dando alguna razón que refuerce su idea”

P7 sobre E1, 7: “A recoge la idea expresada por C en 6 como argumento de lo que ha defendido en 3. (...) Todas estas intervenciones van dirigidas a defender el punto de vista sostenido por cada alumno. Cada uno intenta convencer a los demás dando alguna razón que refuerce su idea”

En el Turno 6 de E1, P7 identifica argumentación; para ello se refiere a la relación que el alumno C establece entre la gráfica y la analogía formulada en un turno anterior. Los elementos que actúan como datos y garantías, tanto explícita como implícitamente, no difieren de los expresados en el primer turno. Aunque se puede considerar que la

relación entre gráfica y analogía amplía el campo semántico de las nociones involucradas, proveyendo nuevas referencias y metáforas explicativas, dicha relación no aporta nuevos datos o garantías que apoyen la conclusión. Este criterio se utiliza en sustitución del aporte de nuevos datos y garantías, y da cuenta de un fenómeno observado en varios profesores, sobre el papel a menudo decisivo que se otorga a la reformulación para identificar argumentaciones.

Un ejemplo de uso integrado de analogía y cambio de registro es el de P6 en referencia a lo que dice el alumno C. P6 identifica argumentación viendo como un todo las contribuciones de C en E1. Toma elementos de varias intervenciones de C y los reordena para justificar su identificación. P6 primero cita la analogía relativa a la escalera; para completar su explicación, recurre al cambio de registro mediante la gráfica (ver Cuadro 1) y expone la argumentación que según él así se produce. El criterio de aporte de nuevos datos y garantías se vuelve a sustituir por la adecuación de los campos semánticos de los elementos implicados.

P6 sobre C: “Es como una escalera y todos los peldaños son iguales, por eso es una relación directamente proporcional. Se trata de una argumentación tipo causa-consecuencia. Al hacer la gráfica, es una línea recta, y los escalones son todos iguales, de donde se deriva que han de ser directamente proporcionales”

Dentro de la práctica argumentativa del aula, las interpretaciones de los profesores sugieren que la adecuación de los campos semánticos es una actividad crucial. Esta adecuación puede producirse mediante la incorporación de rasgos semánticos comunes o distintivos, puede incluir contenidos y conceptos extra-matemáticos y consiste, en parte, en la reformulación de elementos dados en intervenciones previas. Al respecto, la producción de paráfrasis y analogías y el cambio de registro se sitúan en un marco de continuidad discursiva donde cada emisión y reconfiguración de campos semánticos condiciona las nuevas emisiones.

Omisión de referencias al valor epistémico

Los profesores fundamentan sus textos en la narración de lo matemáticamente más significativo ocurrido, según ellos, en los episodios. Se destacan contenidos relativos a valores semánticos, valores estructurales y/o valores comunicativos:

P4 sobre E1, 15: “Las dos observaciones permiten decir que la relación no es directamente proporcional”

P3 sobre E1, 1: “Son argumentaciones porque quiere convencer a los demás y a sí mismo de que la situación planteada corresponde a la definición que los tres conocen para proporcionalidad directa”

En las explicaciones anteriores no hay referencias deliberadas al valor epistémico de las proposiciones, lo cual explica que dicho código aparezca relativamente tarde en el análisis. En las siguientes explicaciones, los profesores sí mencionan dicho valor:

P3 sobre E2, 4: “Sí. Porque desvía la argumentación iniciada por D hacia una medida objetiva que sabe que le permitirá decidir cuál escoger y convencer a D sobre lo erróneo de su decisión. Permite llegar a una conclusión y, además, a la visión crítica del dibujo por parte de D”

P2 sobre E2, 4: “Sí, porque pone en duda que D tenga ‘pruebas’ de lo que dice, luego argumenta que es necesaria una fórmula que lo compruebe”

En el Turno 4 de E2, la base de la discusión es el conflicto de orden epistemológico sobre la validez de los datos aportados por los registros semióticos de representación. El alumno D considera válido el registro visual y, por ello, el valor epistémico de la tesis que sostiene es “evidente” (“necesario”, al presuponer la validez del registro); mientras que el alumno E pone en duda la validez de dicho registro y da un valor epistémico débil. La explicación de P3 problematiza el registro de

representación sin plantear relaciones entre elementos estructurales. Cuando este profesor identifica argumentación en las palabras de E (“Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen, Pi por dos erre...”), lo hace por contraste con lo dicho por D en la intervención anterior. A diferencia de D, P3 considera inadecuado el registro gráfico como fuente de datos puesto que espera una “medida objetiva”, que puede pensarse explícita en la reflexión de E, quien considera los datos numéricos. En todo caso, P3, al igual que el resto de profesores, no escribe sobre la coexistencia de dos registros distintos en conflicto (numérico y visual).

En relación con el Turno 1 de E2 (“Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más”), P1 no considera que haya argumentación porque asume que el valor epistémico de la tesis es necesario según el supuesto de validez del registro. P1 ve la tesis como una constatación donde el valor epistémico no requiere ser modificado:

P1 sobre E2, 1: “No argumenta porque no tiene interés de convencer a la otra persona. No tiene interés en persuadirla. Lo da por hecho, es evidente”

También es interesante lo que P8 señala en relación con el turno 1 del episodio E1. Este profesor describe consistentemente el papel de las proposiciones en la argumentación: la relación que se establece funciona como dato, el concepto que se conoce es el de proporcionalidad directa, que se piensa como definición y actúa de garantía; de ahí se deduce una conclusión cuyo valor depende del valor epistémico de las proposiciones. Lo que A razona es correcto desde el punto de vista lógico pero la definición es equívoca. Parte del conflicto reside en el valor epistémico que los alumnos otorgan a las proposiciones. Sin embargo, en las explicaciones de los profesores este aspecto no se menciona.

P8 sobre E1, 1: “Es una argumentación porque reconoce una relación entre variables, la identifica con un concepto que conoce y de ello hace una deducción aunque sea incorrecta”

Las respuestas en la parte final del cuestionario indican un panorama similar con apenas referencias marginales a los valores epistémicos y a su negociación, junto con una mayor atención a aspectos semánticos y comunicativos. La caracterización de P8 llama la atención porque se refiere tácitamente al valor epistémico de la tesis y su evolución, pero no aclara por qué esto sucede y en función de qué. La evaluación de los argumentos para validar la tesis se ve como un proceso vinculado a la argumentación, implícito en la intención de convencer.

P8: “Si solo convence a quien lo hace es flojo y se tendrá que mejorar, si además convence a sus amigos y quienes confían en él ya está mejor pero se tendrá que mejorar. En cambio si convence a todos, incluido el profesor, será válido.”

Consideraciones finales

Cada profesor muestra interpretaciones que lo hacen único y que dan cuenta de los logros en la consecución del primer objetivo del estudio. No obstante, también hemos encontrado rasgos comunes que han permitido construir temas relevantes, dos de los cuales constituyen el núcleo de este informe y dan cuenta de los logros en la consecución del segundo objetivo. En síntesis, hemos visto que incluso en situaciones donde los conflictos cognitivos y/o comunicativos aparecen ligados a aspectos epistemológicos de los conocimientos implicados, el profesorado participante centra su atención en otras dimensiones del discurso, obviando la epistemológica o bien tratándola de manera tácita y no deliberada.

Como parte del repertorio de prácticas asociadas a la argumentación, la mayoría de profesores considera aspectos semánticos de los conceptos involucrados en una

intervención. A diferencia de lo que sucede en la matemática, donde la adecuación apriorística y unívoca de los campos semánticos es un requisito, las interpretaciones acerca de la argumentación de estos profesores sugieren la incorporación de rasgos semánticos comunes y distintivos, relativos a contenidos matemáticos y extra-matemáticos. Esto incluye la reformulación de elementos a través de paráfrasis, analogías y cambios de registro. De acuerdo con el valor dado a la reformulación de contenidos y a la adecuación de campos semánticos, parece conveniente investigar las relaciones matemáticamente significativas entre ambas prácticas.

Agradecimientos

Proyecto EDU2009-07113, Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias

- Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (163-181). Rotterdam: Sense Publishers.
- Goizueta, M. (2011). *Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores*. Trabajo de Maestría. Bellaterra: UAB.
- Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del IX Simposio de la SEIEM* (33-50). Córdoba: SEIEM.

DIFICULTADES MANIFESTADAS POR PROFESORES EN FORMACIÓN EN EL APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

DIFFICULTIES EVIDENCED BY MATHEMATICS TRAINEES WHEN LEARNING DIDACTICAL PHENOMENOLOGY

Gómez, P. ⁽¹⁾, **Cañadas, M.C.** ⁽²⁾

Universidad de los Andes ⁽¹⁾, *Universidad de Granada* ⁽²⁾

Resumen

En este trabajo exploramos la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del análisis fenomenológico en un programa de máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio basado en el modelo del análisis didáctico. Con base en la descripción de los aspectos teóricos y técnicos de este organizador del currículo, establecemos una serie de acciones que permiten describir la actuación de los profesores en formación en sus producciones escritas. Identificamos y caracterizamos la dificultad manifestada por los profesores en formación sobre las principales ideas que configuran este procedimiento.

Abstract

In this paper we explore the teaching and learning of didactical phenomenology in an in-service secondary mathematics teacher education master program that follows the didactic analysis model. Based on the description of the main theoretical and technical aspects of this curriculum organizer, we establish a series of actions with which we describe the trainees' performance in their written productions. We identify and characterize the difficulties evidenced by the trainees on the main ideas that configure this procedure.

Palabras clave: *Análisis fenomenológico; Dificultades; Educación secundaria; Formación de profesores; Matemáticas.*

Key words: *Didactical phenomenology; Difficulties; Mathematics; Secondary; Teacher education.*

Puesto que un concepto matemático es un medio para organizar un conjunto de fenómenos, Freudenthal (1983) sugiere comenzar la instrucción por los fenómenos y, de allí, enseñar al alumno a manipular los conceptos, como medios de organización de esos fenómenos (pp. 28-32). En este sentido, “la realidad no solamente es un área de aplicación, sino que también es una fuente de aprendizaje” (Treffers, 1993, p. 89). El análisis fenomenológico de un tema de las matemáticas escolares es un procedimiento que permite establecer los fenómenos que dan sentido al tema, identificar los contextos que organizan esos fenómenos y las subestructuras que les sirven de modelo, y describir las relaciones entre esas subestructuras y esos contextos. La información que surge del análisis fenomenológico permite al profesor diseñar, seleccionar o adaptar tareas que promuevan las capacidades de los escolares para “plantear, formular e interpretar problemas mediante las matemáticas en una variedad de situaciones o contextos” (OCDE, 2005, p. 75). El objetivo de investigación de este estudio consiste en identificar y caracterizar las dificultades que los profesores en formación manifiestan sobre las ideas que configuran el análisis fenomenológico cuando participan en programas de formación permanente de profesores basados en el modelo del análisis didáctico (Gómez y González, en revisión).

A continuación describimos los principales elementos teóricos y técnicos del análisis fenomenológico y establecemos nuestra posición sobre el aprendizaje de profesores en formación; presentamos el método que utilizamos para analizar las producciones de los grupos de profesores en formación; y exponemos e interpretamos los resultados obtenidos.

Marco conceptual

El análisis didáctico se configura alrededor de cuatro análisis que conforman un ciclo: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (Gómez, 2007). Cuando se realiza cada uno de los análisis, se ponen en juego los organizadores del currículo (Rico, 1997). Los profesores en formación que participan en programas basados en el análisis didáctico seleccionan un tema de las matemáticas escolares y lo analizan con cada uno de los organizadores del currículo. El propósito consiste en producir información sobre el tema que sea útil para el análisis del tema con otros organizadores del currículo o para el diseño de la unidad didáctica. Estos procedimientos de análisis se fundamentan en el significado de los organizadores del currículo y se configuran alrededor de un conjunto de técnicas para realizarlos.

Aprendizaje de un organizador del currículo

Nos basamos en los trabajos de González y Gómez para establecer los conocimientos que caracterizan el aprendizaje de los organizadores del currículo por parte de los profesores en formación (i.e., González y Gómez, 2008). Cuando los profesores en formación analizan un tema de las matemáticas escolares con un organizador del currículo, se espera que ellos (a) conozcan el organizador del currículo de tal forma que, por ejemplo, sean capaces de distinguir instancias de esa noción con respecto a un tema de las matemáticas escolares; (b) desarrollen las técnicas necesarias para usar el organizador del currículo como herramienta de análisis de un tema de las matemáticas escolares y producir información relevante sobre ese tema; y (c) desarrollen las técnicas necesarias para usar la información anterior a efectos de tomar decisiones a la hora de analizar el tema con otro organizador del currículo o para el diseño de una unidad didáctica. Estas expectativas de aprendizaje establecen los tres tipos de conocimiento que un profesor en formación puede desarrollar en relación con

un organizador del currículo que González y Gómez denominan significado, uso técnico y uso práctico, y que caracterizan de la siguiente manera.

Significado. El significado de un organizador del currículo se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura. El significado de un organizador del currículo se presenta en términos de sus propiedades y sus relaciones con otros conceptos. Estos conceptos son las ideas clave que configuran su significado.

Uso técnico. El uso técnico de un organizador del currículo se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran útiles para producir información sobre el tema.

Uso práctico. El uso práctico se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran que son necesarias para usar la información que surge del uso técnico en los análisis con otros organizadores del currículo o en el diseño de la unidad didáctica.

En este trabajo nos centraremos en el desarrollo y puesta en práctica del significado y el uso técnico de los profesores en formación con respecto al análisis fenomenológico.

Análisis fenomenológico

Con el análisis fenomenológico se pretende que el profesor en formación identifique y organice los fenómenos que dan sentido al tema que está analizando (Gómez y Cañadas, 2011). La complejidad de este organizador del currículo surge del significado del concepto y de las técnicas para su uso técnico y uso práctico.

Significado

El análisis fenomenológico no consiste únicamente en identificar fenómenos que den sentido a un tema de las matemáticas escolares; consiste también en establecer las maneras en que el tema organiza esos fenómenos (Freudenthal, 1983; Puig, 1997). Para ello, es necesario considerar las ideas claves que configuran este organizador del currículo: fenómeno, contexto, relación estructural, subestructura, situación, usos de un tema y problemas a los que el tema da respuesta.

Por ejemplo, al querer identificar fenómenos relacionados con la función cuadrática podemos pensar en la antena parabólica de mi casa, el conjunto de todas las antenas parabólicas y el conjunto de todos los reflectores parabólicos de fenómenos que dan sentido al tema. La idea de reflectores parabólicos constituye un contexto que organiza todos los fenómenos que comparten unas mismas características estructurales: su forma parabólica da lugar a que las ondas confluyan en un mismo lugar —antenas— y a que los rayos de luz se proyecten paralelamente —focos—. Las características estructurales son aquellas propiedades de un fenómeno que involucran y dan sentido al tema matemático. De esta forma, las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen a un contexto permiten relacionarlo con una subestructura de la estructura conceptual del tema (Gómez, 2007, pp. 54-55). Se establece así una relación biunívoca entre subestructuras y contextos. Las situaciones son otra forma de organizar los fenómenos que hace referencia al tipo de entorno al que pertenecen.

Uso técnico

El análisis fenomenológico de un tema implica dos procedimientos: (a) la identificación de fenómenos que dan sentido al tema y (b) la organización de esos fenómenos. Hacerse las preguntas, “¿qué otros fenómenos son ‘parecidos’ a este, desde la perspectiva del tema, y en qué son parecidos?” es una técnica para aproximarse a sus características estructurales y comenzar a abordar la identificación de contextos, como primer paso para organizar los fenómenos. De esta forma identificamos los reflectores parabólicos como contexto que engloba diferentes tipos de fenómenos de la función cuadrática. Las características estructurales de los fenómenos pueden dar pistas sobre aquellos aspectos matemáticos del tema que organizan los fenómenos pertenecientes a un contexto. La identificación de la subestructura matemática que modeliza un contexto puede surgir de esta reflexión. También es posible usar otra técnica: analizar la estructura conceptual del tema e identificar posibles subestructuras en ella, para establecer cuáles de esas subestructuras adquieren sentido —se usan, resuelven problemas— para al menos un fenómeno y de qué manera se relacionan con los contextos.

La figura 1 resume esquemáticamente las ideas clave y algunas de las técnicas del uso técnico del análisis fenomenológico.

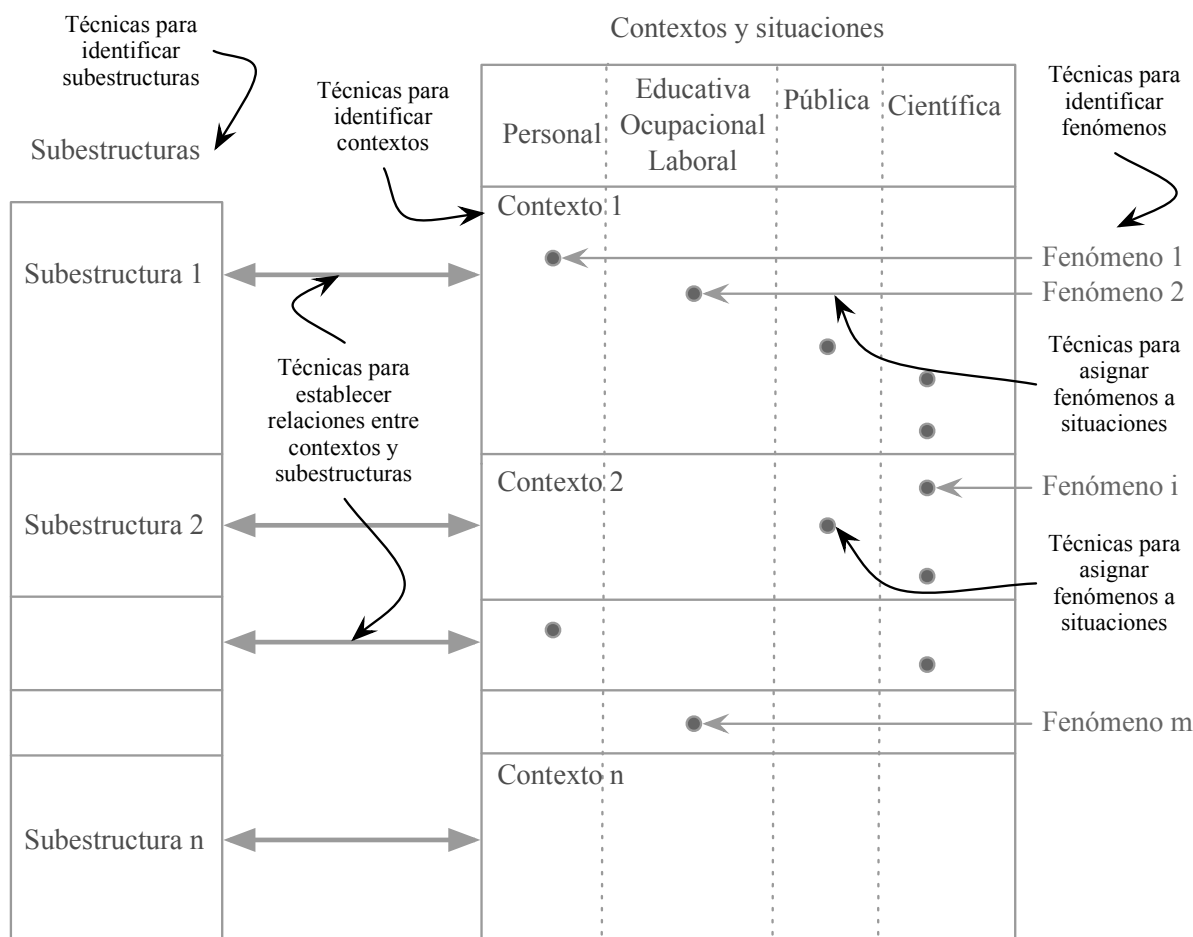


Figura 1. Ideas clave y técnicas del uso técnico en el análisis fenomenológico

Método

El estudio se realizó en el contexto de un programa de máster que proporciona formación profesional a profesores de matemáticas en ejercicio de educación secundaria y bachillerato (11 a 16 años). Los 26 profesores en formación se organizaron en grupos de 4 o 5 personas. Cada grupo escogió un tema matemático concreto y realizó un ciclo del análisis didáctico sobre su tema, contando con el apoyo de un tutor a lo largo de todo el programa.

Datos y actuaciones de los grupos

En la actividad de la que procede la información para este estudio se esperaba que los grupos de profesores en formación analizaran su tema desde la perspectiva del análisis fenomenológico. Los grupos debían elaborar un borrador y enviarlo a su tutor. Tras la reacción del tutor, debían mejorar su trabajo para producir la versión final de su trabajo. Sus presentaciones fueron grabadas en vídeo.

Se esperaba que los grupos de profesores en formación abordaran diferentes cuestiones relacionadas con las ideas clave del análisis fenomenológico. Con base en el marco conceptual, identificamos una serie de acciones que los grupos podrían realizar al abordar la actividad. Por ejemplo, se esperaba que establecieran las “relaciones entre los contextos y las subestructuras matemáticas”. Para abordar esa expectativa de aprendizaje identificamos las siguientes acciones: (a) establecer relaciones, (b) establecer relaciones válidas, (c) establecer todas las relaciones, (d) justificar las relaciones entre los contextos y las características estructurales, y (e) proponer justificaciones válidas. De manera análoga, construimos diversas acciones para cada idea clave del análisis fenomenológico.

Representamos cada acción por medio de un código en el que el primer carácter es la idea clave con la que se relaciona (fenómeno [F], contexto [C], subestructura [B], relación [R] o situación [S]), el segundo distingue su correspondencia con el significado (S) o uso técnico (T), el tercero identifica el orden del código dentro de la idea clave y el tipo de conocimiento, el cuarto identifica si la acción no fue tratada durante la instrucción (N) y el quinto es un guión que aparece cuando la acción depende de otra acción. Una acción depende de otra si la información que se produce al realizar la segunda es necesaria para realizar la primera. En la tabla 1 recogemos el listado de acciones y el código correspondiente.

Tabla 1
Acciones

Acción	Código
Fenómenos	
Identificar fenómenos	FS1
Identificar fenómenos válidos	FS2
Identificar problemas	FS3
Usar problemas para identificar fenómenos	-FT1
Utilizar al menos un problema para identificar al menos un fenómeno	-FT2
Utilizar apropiadamente los problemas	-FT3

Tabla 1
Acciones

Acción	Código
Identificar usos	FS4
Utilizar los usos para identificar fenómenos	-FT4
Utilizar apropiadamente los usos	-FT5
Contextos	
Identificar contextos	CS1
Identificar contextos válidos	CS2
Identificar una proporción de, al menos, el 80% de todos los contextos posibles	-CT1
Identificar características estructurales	CS3
Usar características estructurales para identificar fenómenos	-CT2
Usar características estructurales para justificar fenómenos	-CT3N
Proponer justificaciones válidas de los fenómenos a través de las características estructurales	-CT4N
Organizar fenómenos con contextos	-CT5
Subestructuras	
Identificar subestructuras	BS1
Identificar subestructuras válidas	-BS2
Hacer referencia a la estructura conceptual	BS3
Describir las subestructuras	-BT1
Organizar fenómenos con subestructuras	-BT2
Relación de subestructuras y contextos	
Establecer relaciones	-RS1
Establecer relaciones válidas	-RS2
Establecer todas las relaciones	-RS3
Justificar las relaciones entre los principios y las características estructurales	-RS4
Proponer justificaciones válidas	-RS5
Situaciones	
Proponer situaciones	SS1
Proponer situaciones válidas	-SS2
Usar PISA para clasificar	-ST1
Usar bien PISA	-ST2
Usar alguna clasificación	ST3

Codificación

Los dos investigadores codificamos de forma independiente los borradores y las presentaciones de los 6 grupos. Discutimos los resultados hasta lograr acuerdos consistentes y compartidos.

Presentamos un ejemplo de codificación para parte de la producción de un grupo que trabajó las ecuaciones lineales. Este grupo hizo diferentes tablas y en cada una recogió los fenómenos de un mismo contexto, organizados por subestructuras y situaciones. En la figura 2 observamos los fenómenos para el contexto “combinación” que se corresponden con la subestructura “variables libres o independientes”. En la columna de la derecha, el grupo identificó temáticas (p. ej., costos o química) con las que relacionó fenómenos con características similares.

FENÓMENOS				
CONTEXTO COMBINACIÓN		CONTEXTO COMPARACIÓN	CONTEXTO IGUALACIÓN	
VARIABLES LIBRES O INDEPENDIENTES	¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el teatro teniendo en cuenta el dinero recaudado por boletería?			C o s t o s
	Hallar el precio de una entrada de adulto y una de niño			
	Calcular el valor de cada manzana y cada naranja			
	¿Cuál es el precio de un lápiz y de un cuaderno?			
	¿Cuánto cuesta cada cosa?			
	¿Qué cantidad prestó a cada porcentaje de interés?			
	Balancear las reacciones químicas			Q u í m i c a
	¿Cuántos litros de cada solución se deben mezclar para obtener 10 litros de una solución de ácido con una concentración del 40%?			
	¿Cuánta solución al 4% y cuánta al 20% debe mezclar Frank para obtener 10 galones de solución al 10%?			

Figura 2. Tabla-resumen de fenómenos de ecuaciones lineales

A partir de la información de la figura 2 y con base en la descripción de las acciones de la tabla 1, codificamos esta producción con los códigos FS1, FS2, CS1, CS2, -CT1, -CT5, BS1, -BT2, -RS1, -RS2, -RS3 y SS1. Por ejemplo, en relación con los fenómenos, este grupo puso en evidencia la identificación de fenómenos válidos para el contenido matemático (FS1 y FS2); en lo que concierne a los contextos, identificó contextos válidos (CS1 y CS2), reconoció una proporción de contextos superior al 80% de entre los posibles (-CT1) y organizó fenómenos con los contextos identificados para ese tema.

Análisis

Establecimos el número de grupos que realizaron cada una de las acciones, en el borrador y en la presentación, y produjimos una tabla que resume estos resultados. Ubicamos cada acción en la celda que corresponde al número de grupos que la realizaron en el borrador —filas— y al número de grupos que la realizaron en la presentación final —columnas—.

Resultados

La tabla 2 resume los resultados obtenidos. Las acciones difíciles se encuentran en las primeras cuatro filas y columnas de la tabla. Hemos delimitado esa zona de la tabla con una línea gruesa de color negro. Las acciones más difíciles (-RS4 y -RS5) se ubican en la celda (0,0) de la tabla. Análogamente, las acciones fáciles se ubican en la última fila y columna de la tabla —celda (6,6)—. Hemos identificado esta celda con una línea gruesa en gris claro. Diferenciamos estas acciones de aquellas que se encuentran en la mitad de la tabla, en las celdas (3,5) y (5,5), que denominamos medianamente difíciles, y a las que hemos asignado un borde grueso en gris oscuro. Aquellas acciones en las que los grupos progresaron del borrador a la presentación —y que denominamos progresiones— se encuentran en las celdas (0,2), (0,3) y (3,5) y se identifican en la tabla por un borde punteado. Finalmente, aquellas acciones para las que hubo menos grupos que las realizaron en la presentación que en el borrador —y que denominamos regresiones— se encuentran en las celdas (3,1) y (3,2) y se identifican con un borde de trazos cortos.

Tabla 2
Dificultad de las acciones

Br.	Presentación						
	0	1	2	3	4	5	6
0	-RS4, -RS5		-CT3N -CT4N	CS3N -CT2N			
1	FS4, FT4 FT5						
2			FS3, -FT1 -FT2, -FT3				
3		-RS2	-BS2	BS3, -BT1		FS2, -RS3 CS2, -CT1	
4							
5						SS1, -SS2 -ST1, BT2 -RS1, -ST2	
6							FS1, CS1 -CT5, BS1, ST3

Br.: borrador.

Los resultados de la tabla 2 nos permiten establecer las dificultades que los grupos manifestaron al realizar el análisis fenomenológico. Abordamos la dificultad de una idea clave atendiendo a varios criterios. El primero de ellos, evidenciado en la tabla 2, tiene que ver con el número de grupos que realizaron las acciones correspondientes a cada una de las ideas clave. El segundo criterio tiene en cuenta el número de grupos que realizaron la acción de manera válida en el borrador y en la presentación. En ambos casos, también establecemos el número de grupos que no realizó una acción en el borrador y sí la realizó en la presentación.

Todos los grupos identificaron fenómenos en el borrador. Sin embargo, sólo la mitad de ellos distinguieron fenómenos válidos. Por tanto, algunos grupos tuvieron dificultades con esta noción. Todos los grupos menos uno propusieron fenómenos válidos en la presentación, por lo que los grupos con dificultades en el borrador pudieron resolverlas. La formadora propuso dos estrategias para identificar fenómenos:

(a) mediante usos y (b) mediante problemas. Estas estrategias no resultaron útiles para los grupos, puesto que sólo un grupo utilizó la primera y dos la segunda.

Todos los grupos distinguieron contextos en el borrador y en la presentación, pero solamente la mitad de ellos propusieron contextos válidos en el borrador. Otros dos grupos lograron hacerlo en la presentación. Todos los grupos lograron organizar los fenómenos en contextos pero ninguno usó características estructurales en el borrador y solo la mitad lo hizo en la presentación. Esto pone en evidencia la dificultad de los grupos con la idea de característica estructural.

Aunque todos los grupos identificaron subestructuras para su tema, la mitad de ellos identificaron subestructuras válidas en el borrador y dos grupos en la presentación final. Esto pone en evidencia la dificultad de los grupos con el significado de subestructura. Los grupos que identificaron subestructuras válidas hicieron referencia a la estructura conceptual.

Puesto que al menos la mitad de los grupos propusieron subestructuras que no eran válidas, la organización que hicieron de los fenómenos tampoco era válida. Esto indica que los grupos tuvieron dificultades importantes con el significado de la noción de subestructura y, por ende, con su uso técnico para organizar fenómenos.

Establecer la relación entre subestructuras y contextos es una acción que depende de que los grupos hayan establecido subestructuras y contextos válidos, y que las relaciones que establecen sean válidas. Además de las dificultades heredadas de esta dependencia, se observan dificultades de la propia idea porque: (a) de los 3 grupos que presentaron subestructuras válidas en el borrador, ninguno propuso relaciones válidas en ese documento y (b) solo uno de los dos grupos que presentó subestructuras válidas en la presentación, propuso relaciones válidas en ese documento.

Los grupos no manifestaron dificultades con la idea de situación. Cinco grupos identificaron situaciones válidas para sus temas, según la clasificación de PISA presentada por la formadora. El otro grupo utilizó otra clasificación de situaciones. Todos los grupos organizaron apropiadamente los fenómenos en las clasificaciones propuestas.

Discusión

El propósito de este trabajo consistió en establecer y caracterizar las dificultades que seis grupos de profesores en formación manifestaron cuando analizaron un tema de las matemáticas escolares desde la perspectiva del análisis fenomenológico en un plan de formación de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio. Encontramos que los grupos no manifestaron dificultades con la idea de situación, manifestaron algunas dificultades con las ideas de fenómeno y contexto —particularmente en relación con la idea de característica estructural— y pusieron de manifiesto serias dificultades con la idea de subestructura y su relación con la idea de contexto.

Podemos formular conjeturas acerca de las razones por las que los grupos manifestaron diferentes niveles de dificultad para las ideas clave que caracterizan el análisis fenomenológico: (a) algunas ideas son más complejas que otras, ya sea porque su significado involucra un mayor número de ideas o porque se genera dependencia entre ellas; (b) algunos grupos de profesores en formación tienden a usar el significado del lenguaje cotidiano e ignorar el significado técnico de algunos de los términos que caracterizan el significado de las ideas; y (c) la dificultad en la realización del análisis

fenomenológico puede depender del tema de las matemáticas escolares que se esté analizando. En este estudio no hemos explorado empíricamente estas conjeturas.

Los resultados obtenidos en este trabajo nos indican caminos para la mejora de la instrucción. Es necesario una mayor profundización de aquellas ideas clave que generan más dificultades. Además, consideramos que la instrucción debe promover el desarrollo coordinado del significado y el uso técnico del organizador del currículo.

Referencias

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2(Especial), 78-89.
- Gómez, P. y González, M. J. (en revisión). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico.
- González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática XII*, 425-434.
- OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid, España: Santillana.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal. Realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1), 89-108.

DIAGRAMAS INTEGRADOS PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES DE ESO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA

INTEGRATED DIAGRAMS BUILT FOR ESO STUDENTS IN MULTIPLICATIVE COMPARISON PROBLEMS

González, F.M., Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen

Analizamos las producciones de 89 estudiantes de primer curso de ESO, en resolución de dos problemas verbales de comparación multiplicativa con el fin de identificar y categorizar los diagramas que utilizan para representar el enunciado. Describimos con detalle los tipos de diagramas cuantitativos integrados producidos por los estudiantes. Encontramos que a) la gran mayoría de los estudiantes no utilizan toda la información contenida en el enunciado; b) gran parte de los estudiantes hacen diagramas alusivos a la temática o el contexto del enunciado sin relacionar los datos del mismo; c) la mayoría de los estudiantes no están familiarizados con el dibujo de diagramas que integren las relaciones existentes en el enunciado; d) hemos detectado cuatro tipos de diagramas integrados que han empleado los estudiantes para representar los problemas de comparación multiplicativa con enunciado inconsistente.

Abstract

We analyze the production of 89 students the first year of ESO, in resolution of two multiplicative comparison word problems in order to identify and categorize the diagrams used to represent the statement. We describe in detail the types of integrated quantitative diagrams produced by students. We found that a) the vast majority of students do not use any information contained in the statement, b) most of the students make diagrams alluding to the subject or context of the statement without relating the data on it, c) most students are not familiar with the drawing of diagrams that integrate existing relationships in the statement d) we have identified four types of diagrams that have used integrated students to represent the multiplicative comparison problems with inconsistent statement.

Palabras clave: *Representaciones, diagramas, resolución de problemas, comparación multiplicativa.*

Key words: *Representations, diagrams, problems solving, multiplicative comparison.*

Introducción

La importancia de las representaciones externas en el proceso de resolución de problemas ha sido ampliamente subrayada (Booth y Thomas, 2000; Diezmann y English, 2001; Novick y Hurley, 2001), figurando como uno de los principales elementos a investigar la utilización de representaciones gráficas en la resolución de problemas. Los diagramas, gráficas, imágenes y otros tipos de representaciones externas se utilizan en muchas tareas cognitivas como la resolución de problemas, razonamiento y la toma de decisiones. Nuestro interés se centra en los diagramas como una forma de representación externa de relaciones numéricas.

Un diagrama es una representación visual que presenta la información en una disposición espacial (Diezmann y English, 2001). Los diagramas se consideran como representaciones estructurales en los que los detalles superficiales no son importantes (Vekiri, 2002). En la resolución de problemas, un diagrama puede servir para representar la estructura de un problema, por lo que puede ser una herramienta útil en la solución del problema. (Diezmann y English, 2001).

El uso de diagramas ha sido identificado como una de las estrategias más efectivas que se han propuesto para mejorar la eficiencia en la solución de problemas matemáticos (Cheng, 2002; Pólya, 1986; Stern, Aprea y Ebner, 2003; Uesaka, Manalo y Ichikawa, 2007). Su importancia se ha resaltado en la fase de comprensión o representación de los problemas aritméticos o algebraicos de enunciado verbal, ya que pueden ser utilizados para ayudar a descomprimir la estructura de un problema, y así sentar las bases para su solución. Son útiles también para simplificar una situación compleja para hacer los conceptos abstractos más concretos y obtener resultados de forma sencilla (Diezmann y English, 2001; Larkin y Simon, 1987; Novick, Hurley y Francis, 1999). Los diagramas se han utilizado como método en el proceso de resolución de problemas en distintas situaciones. González (2010) presenta un estudio sobre cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas utilizando diagramas lineales, después de ser instruidos para ello, en la que expresan ser capaces de hacer un razonamiento de las distintas fases de la resolución, llegando a comprender mejor todo el proceso. En esa misma línea, Martínez (2011) introduce la enseñanza de un diagrama lineal basado en el uso de segmentos de tal manera que los estudiantes puedan resolver problemas algebraicos de forma gráfica, mostrando la aceptación del mismo por parte de los estudiantes como forma de representación de cantidades.

Van Garderen (2007) expone algunos aspectos relativos a los estudios sobre diagramas en resolución de problemas. Introduce a los estudiantes dos tipos de diagramas: los diagramas lineales que generalmente son usados para ordenar linealmente un conjunto de elementos, y los diagramas parte todo, que los utiliza para agrupar los elementos de un conjunto en subconjuntos, en los que resalta la estructura partitiva y la estructura parte todo de la suma.

Por otro lado, varios estudios han demostrado que los diagramas son útiles cuando los inventan los alumnos, no cuando se les proporcionan (Cox, 1999). En esa misma línea, (Castro, Morcillo y Castro, 1999) obtienen que en algunos problemas de matemáticas los estudiantes de primero de la ESO, utilizan de forma espontánea una amplia variedad de estrategias de carácter gráfico. En algunos problemas este tipo de estrategias son más eficaces de cara a obtener la solución correcta que las estrategias

de carácter simbólico y evitan que los estudiantes cometan errores persistentes en ellos.

Los diagramas también se han utilizado como facilitadores en el proceso de resolución. Pantziara, Gagatsis y Elia (2009) mostraron que la presencia de los diagramas no aumenta el rendimiento general de los estudiantes en la resolución de problemas no rutinarios. Sugiriendo, como implicación de las conclusiones obtenidas, que los profesores pueden dar oportunidades a los estudiantes no sólo a utilizar diagramas, sino también para inventar o buscar su propia estrategia de solución, incluyendo la construcción activa y el uso de diagramas como herramientas en la solución de problemas.

Tras la revisión de investigaciones previas observamos que muchas de ellas han centrado su interés en el uso de los diagramas como ayuda durante el proceso de resolución de problemas de matemáticas. Sin embargo, ningún estudio hasta la fecha, del cual somos conscientes en esta revisión, ha tratado sobre la interpretación que le dan los estudiantes a los distintos diagramas que se les presentan y las estrategias que utilizan para su construcción. Tratamos esta idea con problemas verbales de comparación multiplicativa con enunciado inconsistente (Lewis y Mayer, 1987). Estos problemas describen relaciones estáticas entre cantidades que se enuncian empleando términos como: *veces más que*, *veces menos que*, *veces tanto como*. En los problemas de comparación multiplicativa intervienen tres cantidades: el *referente*, el *comparado* y el *escalar*. Cualquiera de las tres cantidades puede ser la incógnita del problema, en el caso de que el referente sea la cantidad desconocida se dice que el enunciado del problema es inconsistente, si lo es el comparado, se denomina enunciado consistente (Castro, 1994; Lewis y Mayer, 1987).

Objetivo

El objetivo general de nuestro estudio es analizar el papel que juegan los diagramas en resolución de problemas matemáticos. Este objetivo general lo contextualizamos en los problemas verbales de comparación multiplicativa con enunciado inconsistente (Lewis y Mayer, 1987), dado que se ha demostrado que son problemas difíciles para los estudiantes de final de primaria (Castro, 1995) en los que los resolutores suelen cometer errores persistentes.

Dentro de este objetivo general, en este trabajo nos planteamos analizar los procesos de pensamiento de los resolutores ligados al empleo de diagramas cuando se les enfrenta a la resolución de problemas de comparación multiplicativa. Para intentar conseguir este objetivo hemos planteado a los estudiantes tareas de traducción de una representación verbal a gráfica y viceversa.

En este informe nos centramos en las siguientes preguntas: a) ¿Qué competencia muestran los estudiantes al representar un problema verbal mediante un diagrama? b) ¿Qué tipos de diagramas construyen? c) ¿Qué variantes de diagramas integrados utilizan los resolutores?

Método

Participantes

En este estudio han participado un total de 89 estudiantes de primer curso de educación secundaria obligatoria de dos institutos públicos de la ciudad de Granada, con edades comprendidas entre 12 y 14 años. Los alumnos no recibieron instrucción

específica previa sobre la construcción de diagramas, ni sobre la resolución de problemas de comparación.

Instrumento

Para dar respuesta a las cuestiones planteadas, hemos diseñado un cuestionario que consta de 6 problemas para aplicarlo a estudiantes de primer curso de secundaria obligatoria. En este informe vamos a analizar sólo los problemas 1 y 2 y sus apartados a y b, correspondientes al paso de la representación verbal a la simbólica y de verbal a la gráfica, observando cómo los estudiantes traducen simbólica y gráficamente a partir de un enunciado verbal. En la tabla 1 se muestran los problemas verbales presentados a los estudiantes.

Tabla 1. Problemas planteados a los estudiantes

<i>Tarea</i>	<i>Enunciado</i>	<i>Preguntas</i>
1	En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.
2	Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

Los problemas 1 y 2 son problemas de comparación multiplicativa con referente desconocido también se denominan problemas con enunciado inconsistente. En el primer apartado se les pide que resuelvan el problema y, en el segundo, que dibujen un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema. No se les dio indicaciones sobre cómo debía ser el diagrama.

Los problemas fueron aplicados y resueltos de forma individual en una prueba de lápiz y papel durante la hora normal de las clases de matemáticas. La aplicación de la prueba la realizó la investigadora y se contó además con la presencia del profesor del grupo correspondiente.

Resultados

Hemos realizado un análisis cualitativo de las respuestas producidas por los sujetos a las tareas propuestas, analizando conjuntamente las respuestas de los estudiantes en los dos apartados correspondientes de los problemas 1 y 2, es decir, el apartado 1a lo hemos analizado junto con el apartado 2a, y el apartado 1b junto con el 2b. De esta manera pretendemos categorizar las producciones desde el punto de vista simbólico y gráfico. Lo que queremos analizar en las producciones obtenidas de la aplicación de la prueba es: a) el paso de la representación verbal del problema dada por su enunciado verbal a la representación simbólica, y b) el paso del enunciado verbal a una representación gráfica. En este informe exponemos sólo los resultados obtenidos correspondientes al segundo punto que corresponde a la traducción de lo verbal a lo gráfico.

En el apartado **b** de los problemas 1 y 2 se les pide a los estudiantes que dibujen un diagrama a partir de un problema enunciado verbalmente. Se trata pues, de que realicen una traducción desde una representación verbal de un problema de comparación multiplicativa a una representación gráfica. Para analizar las producciones de los sujetos en respuesta a esta traducción entre la representación verbal y la gráfica,

hemos establecido unos criterios previos en función de los cuales categorizar las respuestas. Concretamente, los criterios para analizar los diagramas producidos por los estudiantes han sido: a) Si en la respuesta aparece un dibujo o no; b) grado de integración del problema, es decir, si se reflejan las relaciones entre las cantidades. De acuerdo con estos criterios hemos obtenido respuestas de los siguientes tipos:

- Sin dibujo
 - Respuestas en blanco. En este apartado están las respuestas en las que los sujetos no hacen ninguna anotación.
 - Reformulación verbal del problema en forma más resumida, sintética o telegráfica.
 - En forma de operador.
- Con dibujo
 - Dibujo cualitativo: Si el dibujo representa sólo el contexto o los sujetos mencionados.
 - Dibujo cuantitativo: Si en el dibujo realizado aparece algún aspecto cuantitativo y, dentro de este nivel si:
 - Representan sólo las cantidades que se comparan o,
 - Representan la relación entre las cantidades.

A continuación describimos las categorías establecidas anteriormente según las producciones de los estudiantes de este estudio y mostramos ejemplos de cada una de ellas, excepto las categorías sin dibujo.

Descripción de las categorías

C₁: sin dibujo / en blanco; no hay información, no dibuja o está en blanco.

C₂: sin dibujo/ reformulación del enunciado; el estudiante no dibuja, hace anotaciones, reescribe el enunciado en forma sintética, telegráfica, resumida.

C₃: sin dibujo/ en forma de operador.

C₄: dibujo cualitativo; se observan dibujos de personajes u objetos alusivos a la temática o el contexto del enunciado.

- Ejemplo C₄: El estudiante E-02 en la tarea 1b hace un dibujo cualitativo, en este caso el estudiante hace dibujo alusivo a la temática del enunciado verbal del problema (un autobús y un tren), sin relacionar las cantidades.

b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema



Figura1. Diagrama cualitativo

C₅: dibujo cuantitativo; los diagramas más elaborados son los que hemos denominado cuantitativos. En ellos, se observa un dibujo que refleja las dos cantidades que intervienen en el esquema de comparación (referente y comparado) y también la

relación multiplicativa que existe entre ellos. Estos dibujos cuantitativos reflejan una representación coherente de la estructura del problema. Según las fases en resolución de problemas verbales (Castro, 1994) los resolutores han realizado un proceso de traducción, y de integración del problema, por ello, los denominamos diagramas integrados. En la tabla 2 mostramos las frecuencias de las producciones de los estudiantes sin dibujo y con dibujo: diagramas cualitativos y cuantitativos.

Tabla 2. Frecuencias de cada categoría

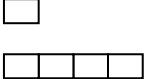
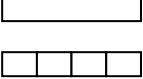
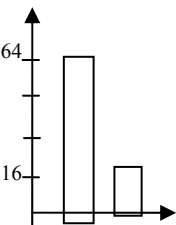
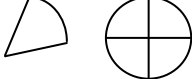
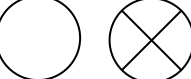
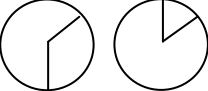
Categoría	Descripción	Frecuencia		Total	Porcentaje
		1b	2b		
C ₁	sin dibujo	23	33	56	31,5 %
C ₂	con dibujo/diagramas cualitativos	36	39	75	42,1 %
C ₃	con dibujo/diagramas cuantitativos	30	17	47	26,4 %

Según los resultados presentes en esta tabla, observamos que los dibujos cuantitativos son utilizados con menor frecuencia que los cualitativos, incluso tienen menor frecuencia que las producciones sin dibujo.

Tipos de diagramas integrados

Hemos analizado más en profundidad los diagramas integrados producidos por los estudiantes para detectar el modelo teórico al que se ajustan los dibujos producidos por los estudiantes y también hemos analizado la estrategia empleada en su construcción. Hemos utilizado el rectángulo y el círculo como figuras básicas (véase tabla 3) en representaciones que tienen alguna de ellas aspecto de diagramas estadísticos, de barra y circulares y en otros casos los asociamos con cantidades fraccionarias (la parte y el todo). La tabla 3 recoge los distintos modelos teóricos que sintetizan los diagramas dibujados por los alumnos de primero de la ESO en respuesta a una comparación multiplicativa.

Tabla 3. Modelos teóricos que recogen los diagramas integrados producidos por los estudiantes

Representación	Diagrama - D1	Diagrama - D2	Diagrama - D3	Diagrama - D4
Lineal				
Circular				

Describimos a continuación de manera sintética los tipos de diagramas integrados encontrados en las respuestas de los participantes.

D1: El punto de partida que han utilizado los resolutores para hacer este modelo es el referente. En este diagrama aparecen dos dibujos, el primero representa el referente como punto de partida y a partir del cual surge el segundo dibujo representando el comparado observándose en él una partición que refleja el escalar.

- Ejemplo D1: en la tarea 1b el estudiante E-73 utiliza una representación lineal y en la tarea 2b el estudiante E-70 utiliza una representación circular, las cuales hemos denominado anteriormente del tipo D1.

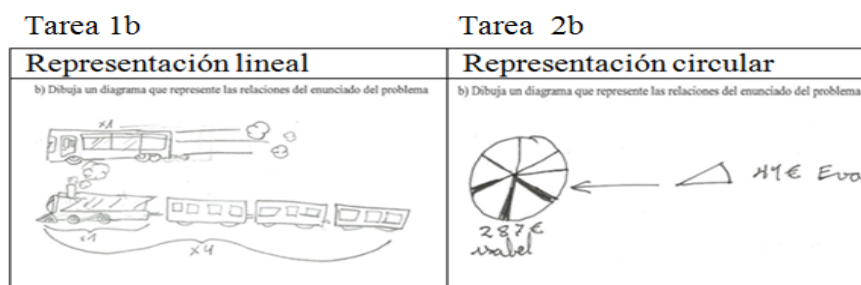


Figura 2. Diagrama D1

D2: este modelo de diagrama lo han construido los estudiantes tomando como punto de partida el comparado, que se representa y, a su vez, en otro dibujo paralelo, se hace una representación que equivale al dibujo del comparado, pero empleando el referente tantas veces como indica el escalar.

- Ejemplo D2: el estudiante E-62 en la tarea 1b hace una representación lineal, y el estudiante E-48 utiliza una representación circular, las cuales hemos denominado diagramas del tipo D2.

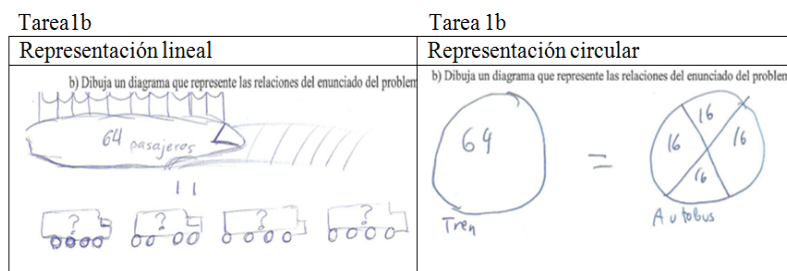


Figura 3. Diagrama D2

D3: en este tipo de diagrama producido por los participantes del estudio resalta la ayuda de un instrumento externo auxiliar de medida (en este caso un eje similar al eje de coordenadas cartesianas) que sirve para establecer las medidas de los dibujos verticales tanto del referente como el comparado.

- Ejemplo D3: el estudiante E-43 en la tarea 1b utiliza una representación lineal y el estudiante E-65 utiliza una representación circular.

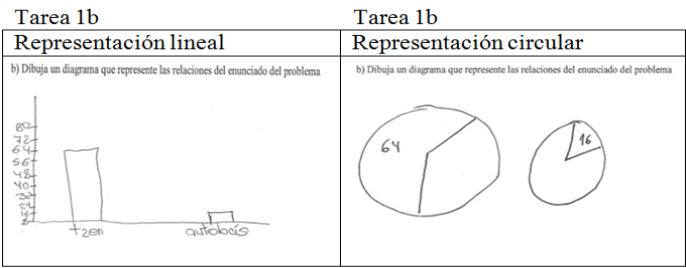


Figura 4. Diagrama D3

D4: en este diagrama los estudiantes representan el referente y el comparado en una única figura como partes de un todo, bien en una relación parte-todo o parte-parte.

- Ejemplo D4: el estudiante E-11 en la tarea 2b utiliza una representación lineal con interpretación parte-todo, y el estudiante E-66 en la tarea 1b hace un dibujo en formato de área, utiliza una representación circular con interpretación parte-parte.

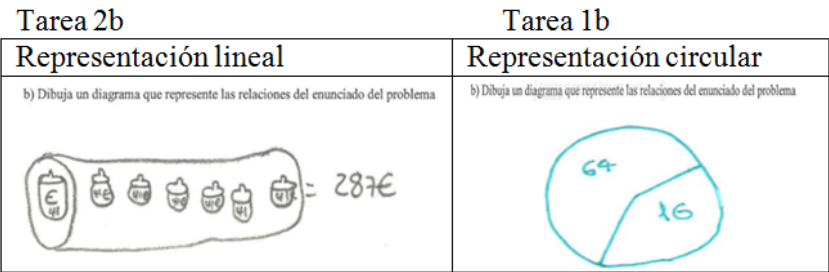


Figura 5. Diagrama D4

En la tabla 4 mostramos las frecuencias de los tipos de diagramas integrados en las tareas 1b y 2b.

Tabla 4. Frecuencia de los tipos de diagramas integrados

Representación	Tarea	Tipos de diagramas integrados			
		D1	D2	D3	D4
lineal	1b	13	3	10	0
	2b	5	2	8	1
circular	1b	0	1	1	2
	2b	1	0	0	0
Total		19	6	19	3

Según los resultados obtenidos en esta tabla observamos que la representación lineal es más utilizada por los estudiantes que la circular y los diagramas que hemos denominado D1 y D3 tienen mayor frecuencia que D2 y D4.

Conclusiones

En respuesta a las preguntas que nos hemos planteado y según los resultados obtenidos en este informe hemos encontrado:

La mayoría de los estudiantes no utilizan toda la información contenida en el enunciado del problema. Aproximadamente un 42% de los estudiantes intenta hacer el diagrama, pero el dibujo que hacen no integra las relaciones existentes en los datos del enunciado. En general muestran una baja competencia en el dibujo de diagramas. La gran mayoría, un 73% aproximadamente, no hacen diagramas integrados lo que nos lleva a pensar la poca familiaridad que tienen con el dibujo de los mismos.

En los diagramas integrados que los estudiantes construyen utilizan representaciones lineales y circulares. En algunos casos utilizan gráficos estadísticos para tratar de representar el enunciado del problema, lo que nos lleva a suponer que utilizan sus conocimientos previos sobre dibujo de gráficos, pero la mayoría utiliza los lineales.

Tanto en los diagramas de carácter lineal como circular, hemos encontrado cuatro variantes de diagramas integrados que surgen a partir de estrategias que utilizan los estudiantes para dibujar estos diagramas. Una de ellas es partir del referente, dibujarlo, y en función de él dibujar el comparado en forma paralela, una segunda es partir del comparado y a partir de él dibujar el referente sobre un comparado dibujado en paralelo, una tercera, dibujar el referente y el comparado auxiliándose de una escala paralela numerada, y por último dibujar el referente y el comparado en una única figura.

Trabajo realizado dentro del proyecto EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación (España) y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

Referencias

- Booth, R., y Thomas, M. (2000). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169–190.
- Castro, E. (1995). Errores en la comprensión de problemas verbales de comparación multiplicativa. En M. Iglesias (Ed.), *Actas de las VI Jornadas Andalcuzas de Educación Matemática* (pp. 147-165). Sevilla: SAEM-THALES.
- Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en los problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representations Produced by Secondary Education Pupils in Mathematical Problem Solving. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2. (pp. 547-558). Columbus, OH: ERIC CSME.
- Cheng, P. C. H. (2002). Electrifying diagrams for learning: principles for complex representational systems. *Cognitive Science*, 26(6), 685-736.
- Cox, R. (1999). Representation construction, externalized cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9(4), 343–363.
- Diezmann, C. M., y English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 77–89). Reston, VA: NCTM.

- González, F. (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada.
- Larkin, J., y Simon, H. A. (1987). Why a diagram (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65-99.
- Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79(4), 363-371.
- Martínez, M. (2011). *Utilización del Método Geométrico Lineal (MGL) para la Resolución de Problemas de Álgebra Elemental*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Novick, L., y Hurley, M. (2001). To matrix, network, or hierarchy: that is the question. *Cognitive Psychology*, 42(2), 158-216.
- Novick, L. R., Hurley, S. M., y Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition*, 27(2), 288-308.
- Pantziara, M., Gagatsis, A. y Elia, I. (2009). Using diagrams as tool for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72 (1), 39-60.
- Pólya, G. (1986). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Stern, E., Aprea, C., y Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. *Learning and Instruction*, 13(2), 191-203.
- Uesaka, Y., Manalo, E., y Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction*, 17(3), 322-335.
- Vekiri, I., (2002). What is the value of Graphical Displays in Learning? *Educational Psychology Review*, 14(3), 261-312.
- Van Garderen, D. (2007). Teaching Students with LD to Use Diagrams to solve Mathematical Word Problems. *Journal of Learning Disabilities*, 40(6), 540-553.

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO E IDENTIDADES MATEMÁTICAS EN LOS PROCESOS DE TRANSICIÓN: EL ALUMNO Y LOS DEMÁS SIGNIFICATIVOS

CONSTRUCTING MEANING AND MATHEMATICAL IDENTITIES IN TRANSITION PROCESSES: THE STUDENT AND THE SIGNIFICANT OTHERS

Gorgorió, N., Prat, M.ⁱ

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Entendiendo la escolarización de los alumnos inmigrantes como proceso de transición, y apoyándonos en la investigación que hemos desarrollado hasta el momento, presentamos de qué forma los alumnos inmigrantes atribuyen significado a las nuevas prácticas matemáticas escolares y reconstruyen su identidad matemática, en estrecha relación con sus padres, sus compañeros de clase y, esencialmente, sus profesores.

Abstract

Taking as starting point that immigrant children learning mathematics in mainstream schools experience a transition process, and on the basis of the empirical research we have been developing until now, we present in which ways immigrant students give meaning to the new school mathematical practices and reconstruct their mathematical identity together with their parents, their classmates and, essentially, their teacher.

Palabras clave: *Alumnos inmigrantes, procesos de transición, identidad matemática, construcción de significado, recurso social.*

Key words: *Immigrant students, transition processes, mathematical identity, meaning making, social resource.*

Introducción

El interés de nuestro grupo de investigación es identificar y generar ideas teóricas potencialmente útiles para comprender los procesos de aprendizaje matemático de los alumnos inmigrantes escolarizados en centros de Enseñanza Secundaria Obligatoria de nuestro país. En esta contribución introducimos dos de estos conceptos – transición e identidad matemática– y presentamos de qué forma el alumno construye su identidad matemática en un constante diálogo entre los significados individuales y sociales. Nuestra aportación, de carácter teórico, discute de qué forma profesores, padres y compañeros de clase, constituyen recursos sociales potenciales en el desarrollo de identidades matemáticas y en la construcción de nuevos significados, a la vez que las representaciones sociales de personas e instituciones constituyen el marco en que se produce dicha construcción.

Ejemplificamos nuestros argumentos con fragmentos procedentes de dos proyectos en desarrolloⁱⁱ, ambos vinculados al estudio de los alumnos inmigrantes que aprenden matemáticas en los centros del área metropolitana de Barcelona (ver Costanzi, Gorgorió y Prat, 2012). Trabajamos con datos procedentes de entrevistas que pueden caracterizarse como combinación de estilos narrativo y episódico –*episodic interviewing* (Flick, 2000). Contienen preguntas que invitan al entrevistado a hablar de sus experiencias a lo largo del tiempo y se les pide que desarrollen algunas de dichas experiencias. Este tipo de entrevistas resulta particularmente útil cuando el investigador necesita acceder a las experiencias de los participantes y a la forma en que éstos atribuyen significado a las experiencias y a su contexto.

A partir de los datos, desarrollamos un análisis temático (Flick, 2006) basado en la codificación recurrente, para construir conceptos y establecer relaciones entre ellos. Identificamos elementos susceptibles de generar rupturas –inmigración, cambio de centro, paso de Primaria a Secundaria, etc.– junto con otros que no pueden anticiparse *a priori* pero que los alumnos nos describen –uno de los padres pierde el trabajo, muere algún familiar, etc. Una vez identificadas las rupturas, buscamos en las narrativas de los alumnos qué personas de su entorno constituyen referentes para ellos y cuáles son las interpretaciones del contexto que enmarcan la relación.

Transiciones e identidad matemática

Las personas vivimos en múltiples contextos de práctica. A lo largo de nuestra vida experimentamos múltiples rupturas dado que lo que en un contexto de práctica puede resultar “natural”, deja de ser válido en un contexto distinto. De acuerdo con Zittoun (2007), las transiciones surgen como resultado de cambios entre distintos contextos de práctica social, cambios de la propia persona y cambios en la relación de la persona con su entorno. Las transiciones requieren procesos de reajuste a nuevas circunstancias de vida e implican múltiples cambios en los sistemas de referencia y en las relaciones con los demás. Son procesos en los que la persona está en constante negociación con el contexto y a la vez consigo misma, en la interpretación de cada situación a partir de experiencias construidas en situaciones anteriores.

Según Zittoun (2008), las transiciones implican aprendizaje, cambio de identidades y creación de significado. Implican reconstrucción de identidades dado que la persona cambia de posición en el contexto. Requieren nuevas formas de conocimiento y nuevas habilidades dado que es necesario crear significado para dar sentido a las nuevas experiencias. Implican cambios en los contextos de experiencia tanto sociales, como materiales y simbólicos, y requieren que la persona se reubique en

todos ellos. Dichos cambios en el posicionamiento comportan nuevas expectativas y nuevas posibilidades a la vez que limitaciones y pérdidas.

Desde esta perspectiva, interpretamos la escolarización de los alumnos inmigrantes en nuestros centros como procesos de transición. Su incorporación a nuestras aulas de matemáticas les sitúa en nuevos contextos de práctica escolar, nuevas relaciones, tanto con las personas como con el conocimiento, y diferentes formas de comprender las acciones y las interacciones en el aula. A menudo, “las dificultades de aprendizaje de los jóvenes están vinculadas al hecho de que la persona siente que su identidad está en riesgo o no puede encontrar su propio sentido para la situación de aprendizaje” (Zittoun, 2007, p. 196).

Al estudiar el concepto identidad matemática es necesario tomar en cuenta los contextos de práctica y de aprendizaje matemáticos. En una primera aproximación, la identidad puede considerarse como la forma en que las personas se interpretan y se refieren a ellas mismas (soy un alumno, soy bueno en matemáticas...) y la forma en que esta persona es considerada o descrita por los demás (es un alumno, es un buen alumno de matemáticas...). Consideramos que la identidad incluye capacidades cognitivas, trayectorias de vida, emociones, actitudes e interpretaciones del contexto, entre otros elementos.

Desde una perspectiva sociocultural, resulta esencial considerar las relaciones entre persona, cultura y sociedad. Holland, Lachicotte, Skinner y Cain (1998) afirman que el sentimiento de identidad combina el mundo individual, personal, con el espacio colectivo de las relaciones culturales y sociales. En este sentido, la identidad es algo a la vez interno y externo a la persona y se desarrolla en prácticas situadas en contextos definidos social y culturalmente, en los que la persona toma decisiones y actúa.

Considerar la actividad matemática, en el aula o fuera de ella, como una práctica permite definir identidad matemática. Martin (2007) establece que la identidad matemática abarca las disposiciones y las creencias que los individuos desarrollan en relación a su habilidad para participar y actuar con éxito en contextos matemáticos y para utilizar las matemáticas para cambiar sus condiciones de vida.

En nuestro estudio, definimos identidad matemática como la identidad que las personas desarrollan al aprender y utilizar matemáticas. La identidad matemática de un alumno incluye su capacidad para utilizar conocimiento matemático, tanto en la escuela como fuera, y la forma en que éste interpreta su propia aptitud para las matemáticas. Los alumnos desarrollan su identidad matemática no sólo en su participación en actividades matemáticas, sino también a través de la interpretación de su propia experiencia como estudiantes de matemáticas y sus expectativas acerca de su futuro.

La identidad matemática del alumno incluye también un sentido de afiliación con las prácticas matemáticas del aula y su identificación con las normas y los valores que las regulan. El posicionamiento social del alumno en la clase de matemáticas, su construcción de conocimiento matemático y su comprensión de su propia experiencia como alumno de matemáticas dan forma a la identidad matemática que desarrolla.

La identidad matemática del alumno está en constante desarrollo y está vinculada a su propia percepción y a la percepción que tienen de él los demás. La forma en que los alumnos se ven a sí mismos como estudiantes de matemáticas es tan importante como la forma en que los demás les ven. En nuestro estudio, entre los “demás significativos” en este proceso de desarrollo de identidades encontramos los profesores, los padres y los compañeros.

Sin embargo, la identidad no está constituida únicamente por interpretaciones que uno hace y las que puedan hacer los demás de uno mismo. La identidad también tiene que ver con la forma en que uno llega a ser quien es, con como alcanza a darse cuenta de quién es a través de las prácticas en las que participa y a través de su relación con los demás en dichas prácticas. Una vez más, en nuestro estudio entre los “demás significativos” en estas relaciones encontramos los profesores, los padres y los compañeros.

Restablecimiento de continuidad

El cambio de contexto que conlleva la inmigración, hace que los alumnos participen en prácticas escolares distintas de las que les resultan familiares y les lleva a establecer formas de relación distintas de las que conocían. Dichos cambios de sistema de referencia pueden modificar las formas en que se interpretan ellos mismos como alumnos de matemáticas, a la vez que pueden cambiar sus expectativas. Sus experiencias pasadas y presentes y las formas en que las interpretan tienen impacto no sólo en el aprendizaje que construyen sino también en las identidades que desarrollan.

Frente a una ruptura, la persona tiene que enfrentarse a nuevos retos y debe establecer una continuidad entre lo conocido y lo nuevo. Las transiciones requieren adaptarse a nuevas situaciones y los alumnos inmigrantes necesitan recursos para construir nuevos significados articulando los propios del nuevo contexto con valores y significados construidos en experiencias pasadas. Sólo cuando el alumno ha establecido una continuidad a partir de la ruptura, podrá evidenciar sus potencialidades cognitivas en su globalidad.

Al analizar nuestros datos, vemos que en los procesos de transición, además del alumno en primera persona, intervienen otras personas que comparten de forma más o menos directa su experiencia y contribuyen al desarrollo de su identidad y a la reconstrucción de significados. Ejemplificamos nuestros argumentos con fragmentos procedentes de las entrevistas de nuestros estudios. Sin embargo, la complejidad y extensión del análisis desarrollado conllevan que la justificación de la interpretación de cada uno de los ejemplos no pueda presentarse en el espacio permitido para esta comunicación.

El alumno en primera persona

Los alumnos inmigrantes se enfrentan a su incorporación a nuestras aulas de matemáticas con recursos diferentes. En primer lugar, los alumnos tienen a su disposición sus propios recursos cognitivos, motivacionales y emocionales. Algunos interpretan su educación como objetivo, algo que les motiva, mientras que otros tienen una fuerte determinación personal para sobreponerse a las dificultades con las que se enfrentan.

A partir del análisis de nuestros datos nos damos cuenta de que cuando el alumno está convencido de que sabe matemáticas, quiere y puede aprenderlas, resulta más fácil para él superar las discontinuidades surgidas de la ruptura. Este sería el caso de Betsy, nacida en Guayaquil, Ecuador, que está cursando 4º de ESO. Betsy tiene pocas dificultades con las matemáticas en su nuevo instituto, algo que ella justifica como resultado de su capacidad para las matemáticas, junto a su esfuerzo y dedicación.

Tengo buenas notas. Bueno, depende del tema y del esfuerzo que ponga yo. Porqué las entiendo, cuando me las explican y tal, lo que me explican lo entiendo, y cuando me ponen algún ejercicio puedo hacerlo, o sea, me resulta

fácil, después de escuchar la explicación claro (...) si escucho al profesor cuando explica las cosas, me sale bien todo lo que tenemos que hacer y tal, si no lo escucho y paso directamente de él y no me importa nada, pues me va a costar.

Otro elemento facilitador es la capacidad del alumno para identificar diferencias entre los contextos de práctica en los que se mueve. Vemos, por ejemplo, que Betsy no cuenta sólo con su capacidad cognitiva y su esfuerzo personal, sino que es capaz de reflexionar acerca de las diferencias entre los dos contextos de práctica matemática, el de su etapa escolar anterior y la actual:

Me parece que las mates de allá, bueno son iguales, sino que allá te dan más álgebra y cosas de aquellas y aquí, por ejemplo, ves un tema de álgebra y allá ves todo el curso del libro, yo hice álgebra en quinto o quizás en sexto de Primaria más o menos y aquí sólo he hecho álgebra en segundo de ESO creo, y una vez y ya está.

Algunos alumnos además comprenden los sistemas de referencia de los contextos de práctica y son capaces de compararlos. Así, por ejemplo, Hina procedente de Pakistán, que está en segundo de Bachillerato, nos explica la forma en que su nuevo instituto organiza los alumnos en grupos flexibles y nos cuenta que la organización del tiempo en el instituto es distinta en los dos sistemas escolares. Nos explica también que el rol del profesor es muy distinto en ambos contextos. Así, por ejemplo, se refiere a la disponibilidad del profesor para ayudar al alumno:

[los profesores] te explican muy bien las cosas... pueden explicarlas y volver a explicarlas... se esfuerzan por explicar las cosas de formas distintas para que el alumno pueda comprenderlas totalmente (...) Esto aquí es diferente. En Pakistán no era así. Si preguntabas al profesor más de dos veces, se enfadaba y podía castigarte.

Hina no sólo identifica las diferencias entre los dos contextos de práctica, sino que es capaz de usar este conocimiento en su beneficio. Lo afirma explícitamente "*También sé cómo se funciona en el instituto. Este conocimiento nos ayudó muchísimo*" y nos da ejemplos concretos:

Siempre intento comprender y que los profesores me expliquen. Les gusta que les pregunten (...). He desarrollado [esta estrategia] gracias a mi profesor de matemáticas de Pakistán, el Sr. Zulfikar.

Interpretamos que Hina es capaz de usar conocimiento propio de un contexto en otro por que ha sido capaz de superar rupturas surgidas en procesos de emigración vividos con anterioridad. En general, en nuestro estudio vemos que algunos alumnos que han vivido experiencias de transición con anterioridad han desarrollado habilidades, estrategias o conocimientos que utilizan como recursos para enfrentarse a nuevas rupturas.

Los demás como recursos sociales

En el contexto de las matemáticas escolares, el alumno reconstruye los significados atribuidos a personas, situaciones y objetos matemáticos junto con otras personas significativas implicadas en su proceso de transición. Mulat y Arcavi (2009) y Hale y Abreu (2010) identifican entre los demás significativos a profesores, padres y compañeros.

Los datos de nuestro estudio revelan también que la ayuda y el apoyo que proporcionan los profesores, la familia y los compañeros tienen un impacto positivo en la adaptación al nuevo sistema escolar y las nuevas formas de hacer en relación al aprendizaje de las matemáticas. Los padres (la familia), los compañeros y los profesores aparecen en las narrativas de los estudiantes como recursos sociales –*social resources* (Zittoun, 2007)– es decir, como personas en el contexto social cercano al alumno a los que éste puede pedir ayuda y de los que puede recibir ayuda y apoyo experto o profesional.

La familia puede tener una participación directa a través de la ayuda que proporciona a sus hijos, ayudándoles por ejemplo a hacer los deberes pero también, y de forma más importante, a través de la valoración de sus hijos como alumnos de matemáticas y del valor que atribuyen a su aprendizaje matemático. Betsy, por ejemplo nos cuenta que sus padres

se sorprenderían mucho si suspendiese matemáticas... [un suspenso] en sociales, ya te digo que, bueno me reñirían, pero uno de mates, les indignaría mucho más ... porque saben que soy buena en mates.

Los compañeros constituyen un recurso social evidente en el caso de algunos alumnos. El apoyo que pueden prestarse va, una vez más, en un doble sentido. Así, hemos encontrado evidencias relativas al acompañamiento en la construcción de conocimiento matemático y hemos visto como, la valoración del compañero puede contribuir a reforzar la imagen que éste pueda tener de sí mismo como alumno de matemáticas. Así, Betsy nos cuenta:

Somos amigas y tal, Paola, Laura, Carlota y claro nos llevamos muy bien y tal. Empezamos a hacer los ejercicios por nuestra cuenta y si alguien no se entera bien o tal le pregunta al profe o le pregunta a Laura o me pregunta a mí o nos preguntamos entre todas y nos ayudamos (...) Si fuese un examen, estaríamos con Laura repasando, estaríamos todas haciendo preguntas (...) lo resolveríamos y tendríamos un repaso y sinceramente, esto ya es mucho, porque a la hora del examen te acuerdas de lo que has hecho hace 10 minutos (...) y sabes que sabes.

Sin embargo, el recurso social más evidente en los procesos de transición de los alumnos inmigrantes es el profesor. Así, por ejemplo, Hina nos explica que

Nos ayudaron [los profesores de matemáticas] con la manera que nosotros habíamos aprendido en Pakistan (...) sabían qué tipo de dificultades tenían los alumnos pakistaníes en el instituto de aquí.

Hina considera a sus profesores como un recurso debido a su conocimiento como expertos en enseñar matemáticas. Se refiere además a sus profesores como personas que pueden darle apoyo en su relación con el entorno institucional. Nos dice, por ejemplo, “*como que conozco a los profesores bien, les expliqué porque mi hermana tenía tan malos resultados*”. Incluso llega a negociar con ellos:

Les expliqué que el nivel en el otro centro no era bueno. Les dije a los profesores que [Hina y sus familiares] íbamos a trabajar duro con ella, para que pudiese cambiar de grupo.

En general, es el profesor quien ofrece ayuda, apoyo o consejo, siendo él quien inicia el proceso de negociación de significado para incluir al alumno. El significado que se negocia gira alrededor del contenido matemático, las normas del aula y las representaciones sociales vinculadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El profesor es quien inicia el proceso dado el estatus de “autoridad” que se le otorga en muchos grupos culturales, algo que viene reforzado por el hecho de que el alumno pertenece a un grupo minoritario. En general, el alumno se abstiene de pedir ayuda al profesor a no ser que le conozca. Felipe, un alumno procedente de Chile, nos cuenta “*si hace sólo dos días que le conoces, resulta difícil acercarte a él de manera que pueda ayudarte con algo que no entiendes o no conoces*”. En el caso de Felipe, el profesor es únicamente un *recurso potencial*, dado que Felipe nunca llega a pedirle ayuda.

Notas finales

El diálogo que el alumno establece con los demás en el proceso de transición está enmarcado en un contexto social, organizado bajo unos referentes culturales concretos. Los procesos de transición requieren transacción de significados entre personas a través de contextos, con lo cual toman forma y están limitados por representaciones sociales acerca del rol y los logros de la persona como parte del grupo al que pertenece o se identifica. Los significados individuales que se crean en los procesos de transición surgen en el marco de significados sociales y culturales. Los significados construidos y los existentes en el marco en que se produce la transición influyen en la construcción de identidades matemáticas, en tanto que dan forma a lo que es aceptable como conocimiento matemático.

Al igual que el aprendizaje en el aula es un proceso socialmente construido, una entrevista es también un proceso de intercambio socialmente construido. Por ello, somos conscientes de que atribuir significado a las historias individuales de los alumnos es un proceso construido conjuntamente por los distintos participantes en el proceso de investigación y por lo tanto, limitado por significados más amplios. Somos también conscientes de que las narrativas que nos ofrecen los alumnos en las entrevistas toman una forma determinada en función de cómo el entrevistado y el entrevistador se posicionan en la entrevista. Por otra parte, el propósito establecido en nuestro estudio nos conduce a interpretar los datos en busca de algo muy concreto. Sin embargo, a pesar de todo ello, seguimos creyendo que estudiar las narrativas de los alumnos inmigrantes sobre su trayectoria escolar nos acerca a la comprensión de sus procesos de transición.

Para finalizar, queremos afirmar que la inclusión del alumnado inmigrante en nuestras aulas de matemáticas no es un “mecanismo” que permite incorporar a los alumnos inmigrantes en la rutina propia de nuestras instituciones. La inclusión requiere la aproximación de todos los alumnos, los padres y la globalidad del centro al conocimiento matemático y a las relaciones entre personas a través de procesos de negociación en que debemos participar todos. Sólo de esta forma conseguiremos que los alumnos inmigrantes desarrollen identidades matemáticas positivas.

Notas

- i) Las autoras son miembros del grupo EMiCS –*Educació Matemàtica i Context Sociocultural* (Educación Matemática y Contexto Sociocultural) – financiado por DGR-AQU Catalunya, Ref. 2009SGR 00590.
- ii) La reflexión teórica que se presenta en este documento se basa en el desarrollo de dos proyectos financiados, por la Dirección General de Investigación (Ref. EDU2010-15373) y por la Fundació LaCaixa (RecerCaixa 2010–ref. 02).

Referencias

- Costanzi, M., Gorgorió, N., y Prat, M. (2012). Pre-service teachers' representations of school mathematics and immigrant children. En E. Hjørne, G. van der Aalsvoort y G. de Abreu (Eds.), *Learning, social interaction and diversity – exploring school practices* (pp. 203-221). Rotterdam: SENSE publishers.
- Flick, U. (2000). Episodic interviewing. En M.W. Bauer & G. Gaskell (Eds.), *Qualitative researching with text, image and sound* (pp. 75-92). London: Sage.
- Flick, U. (2006). *An introduction to qualitative research*. London: SAGE Publications.
- Hale, H.C. y Abreu, G. (2010). Drawing on the Notion of Symbolic Resources in Exploring the Development of Cultural Identities in Immigrant Transitions. *Culture Psychology*, 16(3), 395-415
- Holland, D., W. Lachicotte, D. Skinner, and C. Cain. (1998). *Identity and agency in cultural worlds*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Martin, D. B. (2007). Mathematics learning and participation in the African American context: The co-construction of identity in two intersecting realms of experience. In N. Nasir, y P. Cobb (Eds.), *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom*, (pp. 146-158). New York: Teachers College Press.
- Mulat, T. y Arcavi, A. (2009). Success in mathematics within a challenged minority: the case of students of Ethiopian origin in Israel (SEO). *Educational Studies in Mathematics*, 72, 77–92.
- Zittoun, T. (2006). *Transitions. Development through symbolic resources*. Greenwich (CT): InfoAge.
- Zittoun, T. (2007). Symbolic resources and responsibility in transitions. *Young*, 15(2), 193–211.

EL CASO DE LA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A OTRAS DOS. ANÁLISIS DE LA ACTUACIÓN DE UNA PROFESORA DE MAGISTERIO

THE CASE OF THE CIRCLE TANGENT TO ANOTHER TWO CIRCLES. ANALYSIS OF THE PERFORMANCE OF A TEACHER IN A TEACHERS' COLLEGE

Guillén, G. ⁽¹⁾, **Siñériz, L.** ⁽²⁾

Universitat de València ⁽¹⁾,

Universidad Nacional del Comahue.

Centro Regional Universitario Bariloche. Argentina ⁽²⁾

Resumen

Examinamos la actuación de una profesora de Magisterio de Valencia al desarrollar una situación abierta (SA) con estudiantes de 4º curso en el ámbito de una asignatura de didáctica de la geometría. La situación se ha usado como contexto para la enseñanza de competencias referidas a la resolución de problemas de construcciones geométricas y para la enseñanza de procesos matemáticos. Los datos del estudio provienen del relato que hace la profesora de la enseñanza impartida y de grabaciones de video de las sesiones correspondientes. Presentamos el análisis realizado de esta actuación centrando especialmente la atención en elementos que atañen a su planificación para el desarrollo de la SA y aquellos que se han considerado como objeto de enseñanza a partir de la misma.

Abstract

We have analysed the performance of a teacher in a teachers' college in Valencia during an open activity with fourth-year students in a class of Geometry teaching. This activity was used as a context for the teaching of competences related to the resolution of geometric construction problems and the teaching of mathematical processes. The information of the study comes from the teacher's report and from the video recording of the classes. The analysis of the performance is focused on the elements connected with the planning of the open activity and those other elements that have been considered as teaching subjects.

Palabras clave: *Planteamiento de problemas- resolución de problemas- fases- heurísticas-gestión-conjeturas- pruebas.*

Key words: *Problem posing-problem solving- heuristics- phase- conjecture- proof-management.*

Presentación

Los problemas de construcción pueden considerarse como situaciones interesantes pues propician el estudio sobre modos de comportamiento tanto al plantear como al resolver problemas (Brown & Walter, 1983); algunos corresponden a situaciones abiertas de las que se derivan diversos problemas que promueven la elaboración de estrategias personales de resolución. Las construcciones geométricas ofrecen oportunidades para desarrollar prácticas propias del quehacer matemático; pueden considerarse como contenido curricular objeto de enseñanza y como metodología para la enseñanza de otros contenidos geométricos, dos aspectos que se destacan en los currículos de enseñanza primaria y secundaria de España y Argentina.

En este trabajo indagamos elementos relativos a la enseñanza de resolución de problemas (RP) y de procesos matemáticos (CG), para precisar competencias específicas que se ponen en juego al resolver problemas de construcciones geométricas (PCG), que puedan tomarse como referente para diseñar y/o analizar planes de formación de profesores de primaria y de otros niveles educativos.

Examinamos la actuación de una profesora al desarrollar la *Situación abierta*¹ (SA) “Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores”. El análisis se ha realizado sobre la base de los elementos de competencia delimitados en estudios anteriores y del Modelo de Enseñanza (ME) previo² desarrollado en el mismo ámbito del estudio. Con él podremos identificar nuevos elementos que debieran formar parte de la conducta competente al enseñar construcciones geométricas, cuando dicha enseñanza apunta a promover la exploración, las prácticas argumentativas y la apropiación de procedimientos de carácter heurístico.

Antecedentes. Un Marco de referencia

Lo que describimos aquí es parte de un Proyecto de investigación que se está desarrollando en Argentina, titulado “Hacia un modelo teórico respecto a la enseñanza de las construcciones geométricas que favorezca el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas”³. En estudios previos (Siñeriz, 2002; Siñeriz y Puig, 2006) se ha indagado la enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás, cuando ésta se mira desde los elementos que conforman el proceso de resolución, elaborando un modelo teórico local (MTL) centrado en la apropiación de un estilo heurístico de resolución de problemas. Con el trabajo de este proyecto se pretende reelaborar dicho MTL, contemplando además otros aspectos asociados al planteamiento de problemas y a la argumentación. Nos proponemos determinar nuevos elementos de competencia indagando sobre elementos que debieran formar parte de la conducta competente al enseñar PCG, considerando conducta competente la de un individuo ideal capaz de generar entornos de aprendizaje que fomenten el uso de los contenidos tratados (referidos a resolución de problemas o a contenidos geométricos) y su transferencia en la resolución de nuevos PCG. También aspiramos a diseñar Modelos de Enseñanza (ME) para la formación de profesores de primaria y secundaria sobre la base de los

¹ Nuestra idea de *Situación abierta* es acorde a lo que Butts (1980) llama *Situación problemática* en cuanto que se han de enunciar diferentes problemas en relación a ella.

² No pretendemos atribuir a esta expresión el sentido de “enseñanza modelo” sino, siguiendo a Filloy (1999), consideramos que un Modelo de Enseñanza se organiza sobre la base de algunos aspectos que constituyen la competencia en el contenido implicado.

³ Proyecto de investigación tipo: I, financiado por la Secretaría de investigación de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Código: 04/B158.

elementos de la competencia. Para ello decidimos realizar diferentes experimentaciones analizando actuaciones de profesores de diferentes niveles educativos cuando la enseñanza se realiza a partir de 3 problemas representativos. El trabajo que presentamos se centra en una de ellas; analizamos la actuación de una de nosotras, profesora de Magisterio de Valencia, fijándonos en la enseñanza realizada a partir de la SA mencionada en la presentación.

El estudio se desarrolla conjugando dos líneas de investigación, enseñanza de PCG y enseñanza de CG, que vamos a describir brevemente a continuación. Además, tenemos en cuenta trabajos previos en los que hemos analizado la actuación de la misma profesora al enseñar contenidos relativos a los sólidos a estudiantes de Magisterio (González, Guillén y Figueras, 2006) tomando como referentes investigaciones en relación con la formación de profesores y los contenidos pertinentes para su formación inicial (Climent y Carrillo, 2003).

Desde la enseñanza de PCG, consideramos las elaboraciones teóricas en torno a los problemas de regla y compás que se presentan en Siñeriz (2002) que permiten caracterizar la conducta competente en función del espacio teórico de problemas, aspectos cognitivos y fases del proceso de resolución. Seguimos examinando el proceso de RP a partir de las fases cuyo perfil se contempla en Polya (1965), pero la diferencia estriba en que para nosotras no habrá fases perfectas; las concebimos como estados por los que se pasa y a los que se puede volver durante el proceso de resolución; además, separamos la fase de visión retrospectiva en las que denominamos de revisión y extensión. Partir de una SA obliga a interpretar estas fases para ella y los problemas que se generan. La organización del proceso mediante fases con objetivos específicos se traduce en una forma de enseñar dirigida a hacer transitar a los alumnos por las mismas, y su consideración en la enseñanza queda plasmada a través de las sugerencias que hace el docente.

Continuamos con la distinción que hicimos para los aspectos cognitivos al extrapolar y reformular algunos resultados de Schoenfeld (1985): contenido matemático, trabajo heurístico y gestor. Y al considerar la clasificación de heurísticas de Puig (1996) distinguimos entre *destrezas heurísticas*, *dh*, *herramientas heurísticas*, *hh*, *métodos heurísticos*, *mh*, *sugerencias heurísticas*, *sh*. Además, al focalizar el estudio en el uso que se hace de los conocimientos que se tienen, usamos el término *recursos* y hablamos de *sistemas de creencias* con los significados que provienen de Schoenfeld y que indicamos en López y Guillén (2010).

El proceso de resolver problemas no es independiente del de enunciarlos (Brown & Walter, 1983). Siguiendo a estos autores, consideramos “enunciar problemas” planteando cuestiones generales como disparadoras de nuevos problemas, que se corresponden con las *sh* o *hh* identificadas en el plano heurístico, y explorando posibles cambios en las partes principales del problema (datos, incógnita y condición) desde la pregunta ¿Qué pasaría si...?. Algunas fases, como la de comprensión o la de revisión y extensión, contemplan gran riqueza de elementos referidos a enunciar problemas.

Desde la enseñanza de CG, seguimos centrando la atención en conceptos, procesos matemáticos y relaciones, fijándonos en las acciones que se realizan asociadas a estos contenidos como componentes de la práctica escolar (López y Guillén 2010). También se contempla la enseñanza de los contenidos matemáticos a los que nos referimos al hablar de RP pero nos hemos centrado especialmente en la revisión de ideas de los conceptos y en la argumentación relacionada con la elaboración de conjeturas, justificaciones, particularizaciones y generalizaciones.

Las justificaciones las organizamos como en Guillén (1997). Apoyándonos en Vega (1990) distinguimos las justificaciones “*que muestran*”, en las que para convencer de que algo es verdad un dibujo es suficiente, de las *comprobación*, en las que justificar una propiedad geométrica puede ser equivalente a comprobarla en uno o más ejemplos. Hablamos de *pruebas mediante un diagrama o dibujo* que si bien pueden ser incompletas vienen acompañadas de propiedades de los objetos geométricos implicados que refuerzan lo que se muestra visualmente, y de *pruebas informales* en las que se utilizan razonamientos deductivos informales que están encadenados y conectan lo que se sabe con lo que se quiere demostrar; el lenguaje no está perfectamente formalizado y la red de relaciones entre los conceptos es bastante simple. Hablamos también de *demonstraciones* deductivas.

Contexto para la experimentación. Recogida y análisis de datos

El estudio se realizó en noviembre de 2011 con estudiantes de un curso de 4º que ya habían tratado los PCG con otro profesor desde una asignatura de contenidos de 2º.

El análisis de la SA permitió vislumbrar su riqueza para trabajar diferentes elementos acordes con las líneas de investigación mencionadas. Para su desarrollo se dedicaron 3 sesiones de 2 horas cada una; se implementó después de un ME previo, en el que se contemplaron enfoques para el estudio de PCG elementales (mediatriz de un segmento, dibujo de rectas perpendiculares, bisectriz de un ángulo, copia de un ángulo, dibujo de rectas paralelas, construcción de triángulos dados 3 datos) a partir de contextos cotidianos y usando material concreto, así como todos los recursos que se requerían para el desarrollo de la SA.

Los datos provienen de las grabaciones en video de las sesiones, del material entregado a los estudiantes y de las anotaciones que hicimos conjuntamente al terminar cada sesión sobre el desarrollo de la misma.

Para el análisis de las grabaciones en video, al igual que en González, Guillén y Figueras (2006), éstas se dividieron en episodios distinguiendo según los modos de desarrollar la enseñanza: la profesora actuó como modelo (TM); usó el propio relato, que distribuyó a los estudiantes, de la enseñanza realizada en relación con uno de los problemas generados (TR); usó algunas respuestas de los estudiantes a cuestiones que se plantearon previamente a la sesión para resolver en casa, o en grupo en el desarrollo de la misma (TG). Cada uno de estos episodios se separaron en otros de cuyo análisis hemos extraído los elementos de diferente naturaleza del apartado siguiente.

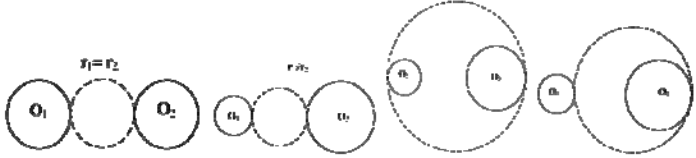
Para determinar los elementos relativos a RP en la actuación hemos partido del powerPoint usado para desarrollar las clases y a disposición de los estudiantes en el aula virtual, y hemos dividido los datos de acuerdo al recorrido realizado por las diferentes fases. Este material se ha conjugado con explicaciones de la profesora a preguntas de los estudiantes, extraídas de las grabaciones, y con los elementos descritos en el marco teórico.

“Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores”.

POWERPOINT QUE GUÍA LA ACTUACIÓN DE LA PROFESORA Fase de Lectura-Comprensión 1) Revisar los términos que aparecen en el enunciado, si es posible hacer un dibujo, precisar diferentes ideas de ellos y tratar de caracterizarlos: ¿En qué contextos hemos dado ideas para las circunferencias y los círculos? ¿Qué ideas hemos dado para ellos? ¿Cómo se pueden caracterizar? ¿Qué quiere decir que dos circunferencias sean tangentes? ¿Qué otras posiciones pueden tener? ¿En qué contexto hemos trabajado las posiciones de dos circunferencias? ¿Qué significa que dos circunferencias sean tangentes exteriores? ¿Qué otras posiciones relativas pueden tener siendo tangentes? ¿Cómo podemos caracterizar el que dos circunferencias tienen el mismo o diferente tamaño? ¿Cómo pueden estar los centros de las 3 circunferencias implicadas en el problema? ¿Cómo se puede indicar que los centros están en la misma recta o no? 2) Distinguir entre datos, condición y pregunta del problema. Introducir notación adecuada para los datos, las condiciones y la pregunta: <i>Datos:</i> ¿Cómo caracterizamos una circunferencia? ¿Cómo nos referimos a ella? No se nos tiene que olvidar el explicar la notación que vamos a usar. En nuestro caso: $C(O_1, r_1)$ y $C(O_2, r_2)$. <i>Incógnita/Pregunta:</i> $C(O, r)$ <i>Condiciones:</i> $C(O_1, r_1)$ y $C(O_2, r_2)$ son exteriores. $C(O, R)$ es tangente a $C(O_1, r_1)$ y $C(O_2, r_2)$. ¿Qué posición puede tener en relación con las circunferencias que son datos? Tangente Interior a las dos, tangente exterior a las dos, tangente interior a una y exterior a otra,... ¿Pueden ser solución? ¿Cómo podemos enunciar los problemas correspondientes?	ELEMENTOS DE COMPETENCIA Comprensión Se percibe la idea global de la situación, se revisan términos y nociones implicadas, se examina cuáles son los datos, la incógnita y la condición, desde donde se formulan los problemas asociados a la situación. Sugerencias - Revisar los términos que aparecen en el enunciado. - Rescatar conocimientos trabajados en otros contextos. - Hacer un dibujo para representar la situación. - Usar notación adecuada y lenguaje preciso para caracterizar los términos. - Separar datos e incógnita utilizando notación adecuada. - Evaluar si el número de datos es suficiente para que la solución sea única. - Explorar con valores concretos de datos y conjeturar sobre las soluciones obtenidas. - Atendiendo a los datos, analizar distintas alternativas. - Atendiendo a la condición, examinar posibles alternativas de la situación. - Buscar conocimientos geométricos adecuados identificando las figuras implicadas. En cada caso, visualizar la configuración resultante y enunciar el problema geométrico correspondiente. - Atendiendo a la incógnita, analizar conocimientos necesarios para determinarla.

Cuadro 1

Los cuadros 1 y 2 muestran la parte del proceso de resolución de la SA en relación con la *Comprensión*. Al lado apuntamos los elementos generales que incluimos para esta fase, provenientes del análisis de su propia actuación al recorrerla. Análogamente hemos determinado elementos de competencia para las restantes fases.

3) Examinar posibilidades: Seamos sistemáticos: <i>Fijándonos en los datos:</i> Los radios de las circunferencias pueden ser iguales o distintos: $r_1 = r_2$ ó $r_1 \neq r_2$ <i>Fijándome en la pregunta:</i> Conjeturando: ¿Dónde puede estar el centro de la circunferencia buscada? Puede estar alineado con los centros de las otras dos o no. ¿Cuál puede ser su radio? Exploremos, demos el problema por resuelto (Dibujamos la figura de análisis) y  ¿Qué posición puede tener en relación con las circunferencias que son datos? Tangente interior a las dos, tangente exterior a las dos, tangente interior a una y exterior a otra, ... ¿Pueden ser solución? 4) Enunciamos los diferentes problemas P1, P2, ... Por ejemplo, "Construir una circunferencia exterior tangente a dos circunferencias exteriores cuyos centros no estén alineados". ¿Cuántos problemas podemos enunciar asociados a la situación de partida?	Problemas generados: - Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(O_1, r_1)$ y $C_2(O_2, r_2)$, $r_1 \neq r_2$, cuyo centro esté en la línea de los centros dados ($O \in O_1O_2$) - Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(O_1, r_1)$ y $C_2(O_2, r_2)$, $r_1 = r_2$, cuyo centro esté en la línea de los centros dados ($O \in O_1O_2$) - Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(O_1, r_1)$ y $C_2(O_2, r_2)$, $r_1 \neq r_2$, cuyo centro esté fuera de la línea de los centros dados ($O \notin O_1O_2$) ... 16 problemas en total. Examen guiado por la herramienta heurística "examen de posibilidades". Se aplica cuando el conjunto de objetos puede descomponerse mediante una partición y se resuelve el problema para cada una de las partes.

Cuadro 2

Para realizar el análisis desde los CG se han delimitado extractos del video de los siguientes episodios: i) se revisan los términos que aparecen en el enunciado, ii) se efectúa el examen de las posibilidades para delimitar los 16 problemas, iii) se transforma el problema inicial en el de construir un triángulo y se hace referencia a las posibilidades que se tienen para poder realizar esta construcción, iv) se reflexiona sobre las soluciones y sobre si hay o no solución y v) se discute sobre cómo se determina el centro y el radio de una circunferencia cuando se tiene un dibujo de la misma. Los tipos de prueba indicados en el marco teórico, los modos de trabajo y las agrupaciones relacionadas con los tipos de contenidos para la enseñanza han sido los referentes usados para el análisis.

Examinando la actuación de la profesora al desarrollar la situación abierta

De los elementos que hemos distinguido al examinar la actuación de la profesora, en este trabajo sólo ponemos la atención en los que se refieren a su actuación en su conjunto, que asociamos con la planificación de las sesiones (PS), y en los que corresponden a elementos de competencia que se pueden desarrollar con su actuación. En éstos distinguimos tres tipos: referidos a RP, a CG y a conocimientos de la materia para la enseñanza (CE). Dada la brevedad del informe sólo vamos a indicar algunos de cada tipo con ejemplos provenientes de un primer análisis de los datos.

En relación con PS de la enseñanza desde la SA cabe señalar:

PS1) Quedan claramente de manifiesto los distintos problemas asociados a la SA, las fases que se contemplan para la organización de la enseñanza y las sh y hh que guían el proceso de enseñanza.

PS2) Se pone el acento en el planteamiento y en la resolución de problemas.

PS3) Se contempla una fase de comprensión de la SA, un recorrido por todas las fases en los problemas generados y un retorno a la situación para la revisión, marcada por una vuelta hacia atrás, y la extensión, guiada por la cuestión ¿Qué pasaría si...?. La elaboración y ejecución de la SA se desdibujan en el proceso; una vez detectados los problemas las fases están ligadas a cada uno.

PS4) Para los problemas generados, en la fase de la elaboración aparecen rasgos del Método de Análisis-Síntesis y es una fase larga; contiene las intervenciones para hacer el análisis, que llevan a identificar los problemas transformados o construcciones elementales, y también incluye una síntesis o explicitación de los pasos a seguir al recorrer el camino inverso. La ejecución está centrada en “hacer efectiva la síntesis” para una medida concreta para los datos.

PS5) Las *dh*, *sh* y *hh* organizan el trabajo en los diferentes problemas a plantear a los estudiantes en el desarrollo de la sesión, que suponen diversos retos a superar.

Los elementos relativos a RP se refieren a diferentes fases, heurísticas y tareas de gestión.

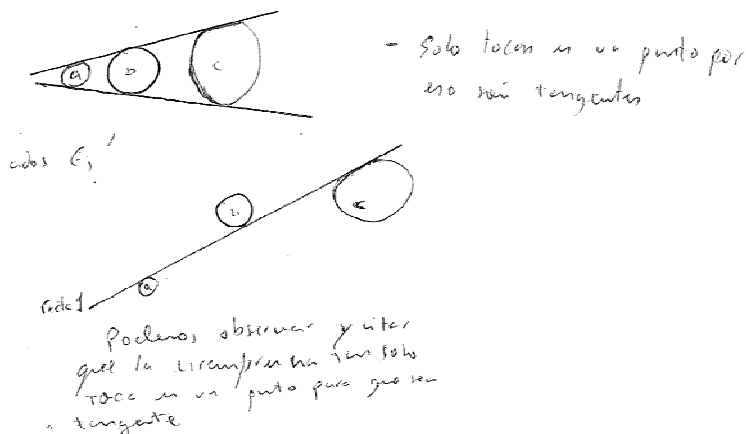
RP1) A las *sh*, *hh* y *dh* se les ha prestado mucha atención. En trabajo TR, los cuadros 2 y 3 dan cuenta de ello en lo que se refiere a la fase de comprensión. En trabajo TG se hizo notar las consecuencias que tenía no considerar alguna de estas *dh*, *sh* o *hh*. Por ejemplo, no usar notación adecuada dificultaba mucho relatar el proceso de resolución.

RP2) Las *fases* que organizan el proceso de resolución también han sido objeto de enseñanza. En trabajo TR se destacó cómo éstas permitían organizar el proceso de resolución y se aclaró lo que contenía cada fase. En trabajo TG se centró la atención en las respuestas de estudiantes que no habían contemplado los elementos del proceso de RP sobre los que se había centrado la atención en las sesiones y las consecuencias que se vislumbraban de ello.

RP3) Se ha puesto el énfasis en los elementos de gestión del proceso. Por ejemplo, se ha incidido en que se ha de evaluar si se está en condiciones de poder resolver el problema al que hemos transformado el de partida y si las normas que se escriben en la síntesis provienen o no de algún problema que se ha planteado en el análisis.

En relación con CG, nos fijamos en ideas y caracterizaciones de los objetos geométricos implicados y en el análisis de observaciones, conjeturas y pruebas.

CG1) Se han examinado ideas, propiedades, relaciones implicados en la situación y su extensión, y se han explicitado los algoritmos de construcción de figuras elementales. Por ejemplo, a partir de un trabajo TG, se revisó la siguiente respuesta:



algunas se muestran en el cuadro 3.

CG4) Se han examinado tipos de justificación basados en un ejemplo para hacer notar que cuando se usan propiedades propias que no son datos del problema, es necesario explorar con otros ejemplos y para mostrar la diferencia de cuando se usa éste como ejemplo general.

Los elementos que se refieren a CE están centrados en: i) la ubicación de los contenidos en el currículo, ii) cuestiones metodológicas sobre el desarrollo de las sesiones (estructura de las clases, cómo se implica a los estudiantes, las tareas, los modos de trabajar del profesor), iii) la confección de resúmenes, destacando que la habilidad para sintetizar los conocimientos puede favorecer su selección y uso en la RP, iv) cuestiones referidas al aprendizaje y sus dificultades, examinando dificultades que se han presentado a los estudiantes y haciendo notar el empleo que ha hecho la profesora de ellas para desarrollar actividad, v) el uso que se ha hecho del lenguaje por los estudiantes y por el profesor; al contrastarlo se ha centrado la atención en la dificultad que conlleva expresarse con precisión y en los signos de diferente naturaleza que pueden usarse, que están en diferentes estratos en el nivel de matematización.

Conclusiones

La profesora ha realizado una transferencia de resultados de la investigación a sus clases que es importante para un plan de formación de maestros. Ha mostrado ser conocedora de los elementos determinados en la investigación que intervienen en la resolución de problemas, los ha considerado como objeto de estudio y para organizar la enseñanza de RP y ha reflexionado sobre cómo se podrían utilizar estos elementos si fueran los propios estudiantes los que tuvieran que hacer esa transferencia a sus clases. Desde su actuación hemos determinado nuevos elementos de competencia relativos a la enseñanza de PCG desde el plano heurístico, asociados a la argumentación que se usa en el proceso y referidos a aspectos inherentes a la enseñanza de los mismos. Surge la pregunta: ¿Qué hacer para que los profesores hagan transferencia de resultados de investigación a sus propias clases?

Asimismo, la SA ha resultado muy adecuada para lograr los objetivos planteados. Ha permitido trabajar elementos heurísticos y de gestión, centrando la atención en plantear y resolver problemas, así como competencias específicas asociadas a procesos matemáticos. En su resolución se han usado contenidos matemáticos que se han trabajado previamente lo que ha permitido incidir en la importancia de tratar los contenidos en diferentes contextos y de utilizarlos para descubrir otros nuevos en un contexto de RP.

El estudio ha hecho sentir la necesidad de prestar más atención a la enseñanza de los contenidos tratados en este plan de formación. Las producciones de los estudiantes han resultado incompletas en muchos casos dado que dan respuestas a los problemas planteados sin explicitar el propio proceso de sus resolución. La búsqueda de otras situaciones con este potencial se vislumbra como muy interesante para continuar. Cabe señalar también que estos resultados pueden caracterizar la actuación de una docente, y pueden usarse como referente para interpretar otras actuaciones de profesores al enseñar PCG en un contexto de planes de formación de profesores de primaria, pero las conclusiones no se extrapolan a todos los planes de formación, con lo que se ha de seguir explorando en otros ámbitos de estudio.

Referencias

- Brown, S. I. & Walter M. I. (1983). *The art of problem posing*. Philadelphia: The Franklin Institute Press.
- Butts, T. (1980). *Posing problems property*. En NCTM 1980 Yearbook, págs. 23-34.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, vol. 21 (3) págs. 387-404.
- Filloy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- González, E.; Guillén, G.; Figueras, O. (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio. En Bolea, P.; González, M.J. y Moreno M. (eds). *Investigación en Educación Matemática. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huesca, págs. 195-204.
- Guillén, G. (1997). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje. (Tesis doctoral). Valencia: Universitat de València.
- López, L. y Guillén, G. (2010). Exploración con espejos y enseñanza/aprendizaje de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Sobre la actuación de la profesora y la transferencia de procedimientos. En Moreno, M; Estrada, A.; Carrillo, J. y Sierra, T. (eds). *Investigación en Educación matemática XIV*, Lleida: SEIEM, ediciones de la Universitat de Lleida, págs. 395- 407.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. 2nd edition. Princeton, NJ: Princeton University Press. [Trad. castellana: *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1965].
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, vol. 5 (1) págs. 79-101.
- Siñeriz, L. y Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En Aymerich, J.V. y Vives, S.M. . (eds.) (2006). *Matemáticas para el siglo XXI*. Castellón: Publicacions de la Universitat JAUME I de Castellón, págs. 323-331.
- Vega, L. (1990). *La trama de la demostración (Los griegos y la razón tejedora de pruebas)*. Madrid: Alianza.

CONOCIMIENTO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES ESPAÑOLES DE MAGISTERIO EN TEDS-M

MATHEMATICS PEDAGOGY KNOWLEDGE OF SPANISH PRIMARY FUTURE TEACHERS IN TEDS-M

Gutiérrez, A. ⁽¹⁾, **Gómez, P.** ⁽²⁾, **Rico, L.** ⁽¹⁾

Universidad de Granada ⁽¹⁾, *Universidad de los Andes* ⁽²⁾

Resumen

En este trabajo presentamos el método con el que describimos el conocimiento que estudiantes españoles de la diplomatura de magisterio, futuros profesores de primaria, manifestaron en el estudio TEDS-M sobre Didáctica de la Matemática. Ejemplificamos dicho método mediante el análisis de una pregunta del subdominio de números relativa a la dificultad en la resolución de problemas aritméticos para alumnos de primaria.

Abstract

In this paper we present the method by which we describe the mathematics pedagogy knowledge on the number subdomain shown by the primary Spanish future teachers in TEDS-M. We illustrate this method by analyzing a question of the numbers subdomain about the difficulty in solving arithmetic problems for primary students.

Palabras clave: *Conocimiento didáctico del contenido; Didáctica de la Matemática; Educación primaria; Formación inicial de maestros; Problemas aritméticos escolares; TEDS-M.*

Key words: *Mathematics Pedagogy; Pedagogical content knowledge; Pre-service teacher education; Primary; School arithmetic problems; TEDS-M.*

Este trabajo se enmarca en la participación española en el estudio TEDS-M (Rico, Gómez, y Cañadas, 2009). El TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) es un estudio internacional comparativo sobre los planes de formación inicial y sobre los conocimientos que los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria debieran conseguir durante su preparación como profesores de matemáticas. Diversas razones determinaron evaluar en este primer estudio sólo la formación inicial del profesorado español de primaria. España participó con 48 instituciones —cada una con un plan de estudios propio—, 574 formadores y 1263 futuros profesores (Gómez, 2007). Los datos se recogieron durante el año 2008. Los equipos nacionales de algunos países han llevado a cabo publicaciones parciales del estudio. (p. ej., Blömeke, Kaiser, y Lehmann, 2010). El informe español se encuentra en fase de edición y está previsto que se publique en breve. Se conocen las medias de los conocimientos de los futuros profesores en matemáticas y Didáctica de la Matemática y se han establecido dos puntos de anclaje para el conocimiento matemático y un punto de anclaje para el conocimiento en Didáctica de la Matemática. No obstante, no hay, por el momento, análisis secundarios de los resultados de TEDS-M que profundicen en los conocimientos de los futuros profesores en los diferentes dominios y subdominios. Nuestro objetivo es realizar un estudio de este tipo que permita describir e interpretar con mayor detalle los resultados de los futuros profesores españoles. En este trabajo presentamos la aproximación metodológica que pensamos utilizar para describir el conocimiento en Didáctica de la Matemática que los futuros profesores españoles manifestaron en el subdominio de números.

Preguntas en Didáctica de la Matemática

Uno de los temas de investigación de TEDS-M se refería al nivel y profundidad del conocimiento de los futuros profesores en Didáctica de la Matemática. De las 70 preguntas del cuestionario de los futuros profesores que evaluaban sus conocimientos, 34 correspondían a este campo. Estas preguntas se clasificaron de acuerdo con los cuatro criterios que se muestran en la tabla 1: dificultad, dominio conceptual del contenido, dominio del conocimiento pedagógico y tipo de respuesta.

Tabla 1

Clasificación de preguntas sobre conocimiento en Didáctica de la Matemática

Dificultad			
Novel	Intermedio	Avanzado	
Dominio conceptual del contenido			
<u>Números</u>	Geometría	Álgebra	Datos
Dominio del conocimiento pedagógico			
Currículo	Aplicación	Planificación	
Tipo de respuesta			
Opción múltiple	Opción múltiple compleja	Abierta	

Objetivo y método

El trabajo que presentamos en este documento forma parte de un estudio más amplio en el que pretendemos describir el conocimiento que los futuros profesores de primaria españoles manifestaron en el estudio TEDS-M sobre Didáctica de la Matemática en el subdominio de números y comparar este conocimiento con el de los estudiantes del resto de países que participaron en el estudio. El método que vamos a seguir para describir e interpretar los conocimientos que los futuros profesores españoles manifestaron al responder a una pregunta implica varios pasos, que describimos a continuación.

1. Análisis de los requerimientos de la pregunta. En este paso, establecemos el conocimiento en Didáctica de la Matemática necesario para responder correctamente a la pregunta.

2. Análisis de las guías de corrección. En este paso formulamos conjeturas sobre el conocimiento que los futuros profesores pudieron poner en juego para contestar de forma parcialmente correcta a la pregunta.

3. Interpretación de los resultados. Con base en la información anterior, formulamos una interpretación de los resultados obtenidos por los futuros profesores españoles en la pregunta.

4. Interpretación de los resultados españoles para el subdominio de números. Con base en la interpretación de los resultados de todas las preguntas, formulamos una interpretación de los conocimientos que los futuros profesores españoles manifiestan para el subdominio.

5. Comparación con los resultados internacionales. La información que obtengamos permitirá comparar los resultados españoles con los del resto de países que participaron en el estudio.

En este documento ejemplificamos los pasos 1, 2 y 3 con una pregunta sobre problemas aritméticos que presentamos en la figura 1.

Una profesora de 1º de primaria pide a sus alumnos que resuelvan los cuatro problemas contextualizados siguientes, de la forma que ellos quieran, incluso usando materiales si lo desean.

Problema 1: José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete. ¿Cuántas pegatinas tiene José en total?

Problema 2: Jorge tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía después?

Problema 3: Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?

Problema 4: María tenía 13 globos. 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron?

La profesora se percata de que dos de los problemas son más difíciles para sus alumnos que los otros dos.

Identifique los DOS problemas que presumiblemente son más DIFÍCILES de resolver para alumnos de 1º de primaria

Problema_____ y Problema_____

Figura 1. Pregunta a analizar

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre el grado de dificultad en la resolución de problemas verbales, donde entran en juego las operaciones aritméticas de adición, sustracción y multiplicación. TEDS-M clasifica esta pregunta dentro del dominio de currículo y la considera de nivel avanzado; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas.

Dar solución a esta pregunta supone asumir un marco determinado sobre el aprendizaje de la aritmética. El aislamiento de determinantes clave de la dificultad de los problemas ha sido tema de investigación en resolución de problemas a nivel internacional (Castro, 2008). Nos basamos en la clasificación de las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos propuesta por Castro, Rico y Castro (1995). Estas variables no agotan todas las posibles variables que se pueden tener en cuenta a la hora de determinar la dificultad de un problema. No obstante, consideramos que son suficientes para determinar los dos problemas que presentan mayor dificultad. También nos basamos en Castro (2001); Castro, Rico y Gil (1992), y Puig y Cerdán (1988) para el análisis de los tipos de problemas de estructura aditiva y multiplicativa.

Analizamos cada uno de los cuatro problemas que se presentan en la pregunta de acuerdo con las siguientes variables: (a) estructura, (b) estructura semántica, (c) tamaño de los datos, (d) contexto de la información, (e) orden de los datos, (f) existencia de datos superfluos, (g) posición de la pregunta; (h) tipo de sentencia e (i) si se puede resolver o no el problema con ayuda de recursos auxiliares.

En los cuatro problemas, el sentido de la pregunta se integra de modo coherente en el contexto informativo y en todos intervienen números naturales, por ello no consideraremos estos elementos como diferenciadores de la dificultad de los problemas.

Análisis de los problemas

La tabla 2 presenta el resultado del análisis de los cuatro problemas según las variables establecidas.

Tabla 2

Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas			
	1	2	3	4
Estructura	Multiplicativa	Aditiva	Aditiva	Aditiva
Estructura semántica	Proporcionalidad Simple	Cambio aumentado	Cambio disminuyendo con comienzo desconocido	Cambio disminuyendo
Tamaño de los datos	Pequeños	Datos pequeños	Pequeños	Datos grandes (13>10)

Tabla 2

Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas			
	1	2	3	4
Contexto de la información	Cercano al alumno	Cercano al alumno	Cercano al alumno	Cercano al alumno
Orden de los datos	Ordenados	Ordenados	Ordenados	Ordenados
Existencia de datos superfluos	No existen	No existen	No existen	No existen
Posición de la pregunta	Al final del problema	Al final del problema	Al final del problema	Al final del problema

Tabla 2
Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas			
	1	2	3	4
Tipo de sentencia	$a \times b = ?$ $a + a + a + \dots = ?$	$a + b = ?$	$? - a = b$	$a - b = ?$
Recursos auxiliares	Sí	Sí	No es posible realizar un modelado directo de los momentos planteados en el problema	Sí

A continuación profundizamos en el análisis de cada problema, según el orden en el que aparecen en el currículo de primaria español.

Problema 2

Jorge tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía después?

Maza (2001) afirma que incluso los niños de cuatro o cinco años se han podido enfrentar a este tipo de problemas en su experiencia fuera de la escuela, a pesar de no haber aprendido aún la operación aritmética de la adición, y pueden llegar a resolverlo utilizando cualquier estrategia informal. Además, la pregunta sugiere la posibilidad de usar materiales que facilitan la implementación de estas estrategias informales. Podemos concluir que este problema es el de menor dificultad para los alumnos de primero de primaria.

Problema 4

María tenía 13 globos, 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron?

En este caso, se da la dificultad de que María tiene 13 globos, número mayor que el número de dedos de las manos. Para facilitar la resolución, se da la posibilidad de utilizar recursos auxiliares. No obstante, sería necesario el dominio del conteo regresivo de números o del manejo de la operación de la sustracción para resolverlo (Maza, 2001). Por consiguiente, valoramos que este problema es más difícil que el problema 2, de cambio aumentado.

Problema 3:

Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?

El análisis de la tabla 2 lleva a concluir que este problema es más difícil que los dos anteriores. La estructura semántica del problema es de cambio disminuyendo con

comienzo desconocido, por ello su formulación lingüística puede inducir a pensar que el problema se resuelve mediante una sustracción. Calcular el dato desconocido en la proposición ($?-b=c$) es significativamente más difícil que en el resto de proposiciones en que interviene la sustracción (Carpenter y Moser, 1984).

Como decimos en la tabla 2 precisamos que este problema no se puede resolver mediante un modelado directo de los momentos planteados en el problema (Maza, 2001). No consideramos, por tanto, que las distintas estrategias de ensayo y error que puedan llevarse a cabo con materiales auxiliares para resolver el problema sean un modelado directo de los momentos planteados en el problema.

Problema 1

*José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete.
¿Cuántas pegatinas tiene José en total?*

Este problema presenta una situación de proporcionalidad simple que se resuelve mediante la multiplicación. Es un problema simple de estructura multiplicativa (Castro, 2001). Se trata de un contexto en el que hay que reiterar una cantidad un número de veces; es decir, se requiere de una adición repetida.

Hay que tener en cuenta que es posible utilizar materiales por parte de los escolares para la resolución del problema. Podrían resolverlo mediante la unión repetida de tres conjuntos de 6 unidades cada uno, quizás de forma más intuitiva que el problema cambio disminuyendo con comienzo desconocido (problema 3). Este contexto es familiar a los niños y es el primero que se trata en el currículo escolar para introducir la multiplicación. No obstante, tradicionalmente la multiplicación y la división han sido consideradas como más difíciles de aprender que la adición y sustracción, aconsejándose que la multiplicación no sea introducida hasta que los alumnos dominen la adición (Castro, 2001). Por estas razones, consideramos que el problema 1 es más difícil que los problemas 2 y 4.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que resumimos en la tabla 3.

Tabla 3
Tipos de respuesta en la guía de corrección

Tipo de respuesta	Problemas
Correcta	Los problemas 1 y 3 son los más difíciles
Parcialmente correcta	Sólo el 1 correcto (con o sin los problemas 2 y 4)
	Sólo el 3 correcto (con o sin los problemas 2 y 4)
Incorrecto	Como mínimo un problema seleccionado pero ni el 1 ni el 3
	O ilegible
En blanco	

Nos basamos en los análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

Respuestas correctas

Podemos afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

3. son capaces de identificar las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos de la pregunta;
4. conocen el currículo de primero de educación primaria; y
5. han hecho una adecuada lectura del problema atendiendo a todas sus premisas.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tenemos en cuenta estos motivos en nuestro análisis. No disponemos de datos adicionales para analizar si las respuestas correctas están argumentadas con base en las variables de clasificación de problemas o al conocimiento del currículo.

Respuestas parcialmente correctas

La guía de corrección agrupa en un solo código diferentes respuestas de los futuros profesores que han contestado de manera parcialmente correcta (ver tabla 3). En todo caso, nos hemos interesado por estudiar qué conocimientos han manifestado estos futuros profesores, en qué errores han podido incurrir, y cómo podemos interpretar sus respuestas. En este sentido, formulamos conjeturas sobre los conocimientos manifestados por los futuros profesores cuya respuesta incluye uno de los dos problemas más difíciles, pero no los dos. Presentamos estas conjeturas en la tabla 4.

Tabla 4

Conjeturas sobre los conocimientos manifestados en las respuestas parcialmente correctas

Respuesta	Conocimientos	Otras razones
3 y 4	☐ Identificar la dificultad de la posición de la incógnita y	Azar
	☐ Percibir la dificultad de los números mayores de 10	No abordar los problemas desde la perspectiva de los escolares
	⊙ No reconocer la dificultad de la multiplicación o valorar positivamente el uso de materiales auxiliares	
3 y 2	⊙ No reconocer los problemas de cambio aumentado como más fáciles	Lectura incorrecta de la pregunta
Sólo 3	⊙ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los otros problemas	

Tabla 4

Conjeturas sobre los conocimientos manifestados en las respuestas parcialmente correctas

Respuesta	Conocimientos	Otras razones
1 y 4	☐ Reconocer la dificultad de la multiplicación para 1º de primaria	Azar No abordar los problemas desde la perspectiva de los escolares
	☐ Percibir los números mayores de 10 como una dificultad para los alumnos	
	☒ No reconocer la dificultad de la posición de la incógnita en un problema	
	☒ No valorar positivamente el uso de materiales	
1 y 2	☒ Considerar la adición como más difícil	Lectura incorrecta de la pregunta
Sólo 1	☒ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los otros problemas	

La tabla 4 pone de manifiesto la multiplicidad de posibilidades acerca del conocimiento que los futuros profesores pudieron poner en juego al responder de manera parcialmente correcta a la pregunta. Estos profesores reconocen la dificultad ya sea de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido y de la multiplicación, pero no simultáneamente, al mismo tiempo que pueden poner en juego otros conocimientos (parciales) que los llevan a escoger otro problema como más difícil. Con base en estos análisis podemos interpretar los resultados de los futuros profesores españoles.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 5 presentamos nuestra interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en un resumen de los análisis anteriores. En la caracterización de los conocimientos que se ponen en juego al responder de manera parcialmente correcta, incluimos en la tabla 5 únicamente aquellos que necesariamente deben activar para dar esa respuesta. Esos conocimientos se pueden matizar con las conjeturas adicionales que presentamos en la tabla 4.

En la primera columna de la tabla 5 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpretamos estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 5
Interpretación de los resultados españoles

%	Respuesta	Conocimientos
80,4 %	Correcta	☐ Identificar las de las variables que afectan a la dificultad de estos problemas ☐ Conocimiento del currículo de 1º de educación primaria ☐ Valorar positivamente el efecto facilitador del uso de materiales en la ejecución de los problemas. ☐ Adecuada lectura del problema
15,5 %	P. Correcta 3 y otro	☐ Reconocer la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido y ☒ no reconocer la dificultad de la multiplicación
2,9 %	P. Correcta 1 y otro	☐ Reconocer la dificultad de la multiplicación para primero de primaria y ☒ no reconocer la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido
0,7 %	Incorrecta	☒ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los problemas
0,5 %	Ilegibles o en blanco	
0 %	No llegaron a abordar la pregunta	

Estos resultados sugieren que una proporción importante de los futuros profesores españoles son capaces de distinguir las variables que afectan a la dificultad de los problemas. Entre aquellos que responden de manera parcialmente correcta, destaca la diferencia en porcentaje entre los que reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido, pero no reconocen la dificultad de la multiplicación y aquellos que reconocen la dificultad del problema de estructura multiplicativa, pero no reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo aumentado.

Conclusión

Este trabajo presenta una interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles en el estudio TEDS-M. Hemos descrito y ejemplificado el método para analizar las preguntas sobre conocimiento de Didáctica de la Matemática en el subdominio de números de los cuestionarios de los futuros profesores. Hemos mostrado que es posible establecer conjeturas acerca de los conocimientos que los futuros

profesores manifiestan en este estudio según su tipo de respuesta. Consideramos que esta aproximación permitirá describir —con mayor detalle del que se tiene actualmente— el conocimiento en Didáctica de la Matemática de los futuros profesores en el subdominio de números y compararlo con el de los otros países que participaron en el estudio.

Somos conscientes de que un análisis pormenorizado de las preguntas y de las guías de corrección puede dar lugar a establecer carencias o limitaciones tanto en el cuestionario como en las guías de corrección. No obstante, en este estudio nos limitamos a estudiar los resultados que se obtuvieron con los instrumentos tal y como se aplicaron en el estudio TEDS-M.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación de excelencia FQM 03244 de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía, el Instituto de Evaluación y el Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado del Ministerio de Educación.

Referencias

- Blömeke, S., Kaiser, G. y Lehmann, R. (2010). TEDS-M 2008. Munich: Waxmann Verlag.
- Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal For Research in Mathematics Education*, 15(3), 179-202.
- Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias*, 10(3), 243-253.
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Castro, E., Ed. (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid, Síntesis.
- Gómez, P. (2007). *TEDS-M: Teacher Education Study in Mathematics. Estudio Internacional sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas*. Trabajo presentado en XI Simposio de la SEIEM, Tenerife.
- Maza, C. (2001). Adición y sustracción. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la educación primaria* (pp. 177-202). Madrid: Síntesis.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, C. (2009). Estudio TEDS-M: estudio internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 425-434). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA SOBRE LA INFLUENCIA DEL ABP EN LA COMPETENCIA MATEMÁTICA CON FUTURAS MAESTRAS DE EDUCACIÓN INFANTIL

A TEACHING EXPERIMENT ABOUT THE INFLUENCE OF USING PBL ON THE MATHEMATICAL COMPETENCE ON PROSPECTIVE TEACHERS OF EARLY CHILDHOOD EDUCATION

Gutiérrez, G., Berciano, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

Resumen

Esta comunicación presenta el diseño de un experimento de enseñanza llevado a cabo en la asignatura “Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica II” de la Diplomatura de Magisterio en Educación Infantil de la UPV/EHU basado en los pilares metodológicos Aprendizaje Basado en Problemas, Aprendizaje Colaborativo y uso de plataformas virtuales (Moodle); y las repercusiones que ha tenido en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado. En particular, los resultados muestran que el alumnado ha mejorado su percepción respecto a la enseñanza-aprendizaje de la matemática y ha integrado sus conocimientos matemáticos y sobre la enseñanza de las matemáticas en la búsqueda de soluciones a un problema profesional.

Abstract

This communication presents the design of a teaching experiment carried out in the topic “Development of the mathematical thinking and its teaching (edo didactic, nahi duzuna) II” of the Teacher Training Degree (Primary and Early years) of the University of the Basque Country UPV/EHU based on the methodological pillars Problem Based Learning, Collaborative Learning and the use of virtual platforms (Moodle); and their impact in the teaching-learning process of the students. In particular, the results indicate that the students have improved their perception of the teaching-learning of mathematics and have integrated their mathematical and mathematics teaching knowledge with the search of solutions to a professional problem.

Palabras clave: *Competencia matemática, experimentos de enseñanza, Aprendizaje Basado en Problemas, Grupos colaborativos, autopercepción.*

Key words: *Mathematical competence, prospective childhood school teachers, Teaching experiments, Problem Based Learning, self-efficacy.*

Introducción

El objetivo de esta comunicación es presentar algunos de los resultados obtenidos con el cambio metodológico experimentado en la asignatura “Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica II” de la Diplomatura de Magisterio en Educación Infantil durante el curso 2011/12. Hemos diseñado la asignatura basándonos en tres pilares fundamentales: el aprendizaje basado en problemas (ABP), el trabajo en grupos colaborativos (AC) y la plataforma virtual de apoyo a la enseñanza presencial (Moodle). En particular, creemos que la interiorización de esta metodología y de las actitudes subyacentes permitirá al alumnado que, en el desarrollo de su vida profesional, pueda enfrentarse a los cambios de forma proactiva, previéndolos y haciéndolos suyos, en lugar de irse adaptando a ellos conforme llegan.

El cambio de metodología de trabajo ha conllevado un cambio estructural de la asignatura y un incremento de dedicación docente respecto a la enseñanza clásica. Asumimos este coste porque presumimos que lleva asociado el beneficio de conseguir que el alumnado, en un único cuatrimestre¹, sea capaz de conseguir con comodidad los objetivos y de desarrollar sus propias habilidades y competencias. Además, pretendemos que valoren positivamente la única asignatura de didáctica de la matemática que cursarán obligatoriamente en el grado y la vean útil en el desempeño de su futura vida profesional.

Antecedentes y marco teórico

El Aprendizaje Basado en Problemas tiene su origen en la Universidad de MacMaster alrededor de los años 60. Según Neville y Norman (2007), el planteamiento que incentivó esta metodología docente era el de crear un curriculum profesional en el estudiante de Medicina que diera lugar a una educación multidisciplinar, centrada en el alumnado, y que le facilitara el aprendizaje continuo, necesario durante toda su carrera profesional. A lo largo de estas últimas décadas, son muchas las disciplinas en las que se ha aplicado esta metodología y se han analizado sus implicaciones tanto docentes como a nivel de cargas lectivas.

De entre los trabajos revisados, destacamos el trabajo de Hmelo-Silver (2004), en el que se muestra que el ABP ayuda al alumnado a construir un conocimiento extenso y flexible transferible a otros aspectos, académicos y no académicos; a desarrollar destrezas para la solución de problemas de forma efectiva; a autodirigir su aprendizaje a lo largo de la vida; a constituirse como colaboradores eficaces y a estar intrínsecamente motivados para aprender.

Por otro lado, según Oakley, Felder, Bent y Elhajj (2004) el aprendizaje en grupos colaborativos es una estrategia didáctica que parte de la organización de la clase en pequeños grupos donde el alumnado trabaja de forma coordinada para resolver tareas académicas y desarrollar su propio aprendizaje. Además, Smith, Johnson y Johnson (1998) añaden el aprendizaje en grupos colaborativos se beneficia del potencial educativo de las relaciones interpersonales existentes en cualquier grupo, los valores de socialización e integración y la potenciación del conflicto socio-cognitivo como elemento del aprendizaje.

Con respecto a las competencias matemática y profesional matemática, a lo largo de este artículo las entenderemos en sus dos dimensiones según las definen Chamoso,

¹ En el plan de estudios de grado de magisterio en Educación Infantil de la UPV/EHU se imparte una única asignatura del área de didáctica de la matemática, 6 ECTS.

Cáceres y Azcárate (2012); esto es, en la búsqueda de soluciones para el problema que planteamos entendemos que habrán de demostrar su conocimiento matemático sobre el concepto de número y sus propiedades, y un conocimiento profundo, entendido como la capacidad de identificar las actividades que les permiten a los niños construir los conceptos numéricos y a las maestras establecer relaciones con otros contenidos o áreas de conocimiento.

Del mismo modo, identificamos la competencia profesional para enseñar matemáticas en el nivel de Infantil, en ambas dimensiones, el conocimiento de los materiales y recursos específicos para alumnado de infantil cuando comienza a desarrollar su pensamiento lógico-relacional y el conocimiento profundo, manifestando su habilidad para argumentar las elecciones metodológicas que ellas mismas realicen para justificar el modelo de enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos a nivel de Infantil mediante la reflexión de las acciones propias, el diálogo en el grupo y el diseño de actividades creativas para esta etapa.

Por último, según las características básicas recogidas por Molina, Castro, Molina y Castro (2011), consideramos este trabajo como un experimento de enseñanza, ya que además de analizar la influencia de la metodología ABP en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado, intentamos promover el interés por el conocimiento lógico-matemático y profesional de los futuros maestros y maestras.

A este respecto debemos mencionar trabajos previos tales como el de Valverde y Castro (2011), con los que se persigue comprender y mejorar la realidad educativa en contextos naturales relativos a la formación del futuro profesorado.

Metodología

Características del alumnado

Es un grupo formado por 31 estudiantes de las que 27 asisten habitualmente a las clases presenciales, todas son mujeres excepto dos hombres².

El diseño del experimento

El experimento se llevó a cabo en 10 sesiones durante 5 semanas (12 horas presenciales en el aula) y el alumnado trabajó en grupos colaborativos formados por 4 ó 5 personas. Dichos grupos se formaron aleatoriamente a través de la plataforma Moodle, tres de ellos por 4 personas y los otros tres por 5 personas.

En cada una de las sesiones se explicitó a las estudiantes lo que se esperaba que fueran capaces de realizar al acabar la sesión, los contenidos y el análisis detallado de las tareas, así como los tiempos aproximados para la resolución de las mismas. Además de las sesiones dedicadas exclusivamente al trabajo autónomo de los grupos en el desarrollo del ABP, se estructuraron seis sesiones realizando tareas relativas al desarrollo de los contenidos relacionados con el problema (estudio del currículo en la CAV, análisis de los estándares de numeración del NCTM, análisis de actividades de construcción de situaciones de enseñanza y análisis de materiales estructurados para la construcción del número natural).

En la primera sesión se planteó “El problema de María” (ver Anexo I). Tras la lectura individual, cada alumna anotó 3 preguntas que se hacía a la vista del problema. Posteriormente, se comentaron las preguntas individuales en grupo, se aclararon las

² En adelante utilizaremos diferenciadores de género femenino y en ellos entenderemos incluidos a los dos alumnos.

ideas que surgieron sobre las mismas y se perfilaron hasta consensuar un máximo de 4 preguntas que se plantearon en el grupo grande. Tras la puesta en común y el debate centrado en el análisis de las dificultades que se le podían plantear a la joven maestra al encarar su tarea profesional, los diferentes grupos volvieron a reunirse y diseñaron su plan de trabajo (ver Anexo II).

En las sesiones posteriores se realizaron tareas de búsqueda de información, análisis de materiales, análisis de actividades relacionadas con el concepto de número y finalmente se organizó la exposición de las soluciones que cada grupo daba al problema en el aula. Para ello cada grupo disponía de 15 minutos, 10 para exponer su solución y 5 más para responder a las preguntas que la audiencia le planteara.

Simultáneamente construimos el entorno virtual de trabajo y comunicación fuera del aula utilizando para ello la plataforma de apoyo a la docencia presencial Moodle, y aceptando dos premisas básicas: todo lo que no se diga y todo lo que no se cuelgue en el entorno, no está dicho ni hecho y la segunda: todo lo que se cuelga y se dice no se debe borrar. En él encontramos además del material que la profesora proporcionó al alumnado (temarios, normas, calendario, tareas, ejemplos, material bibliográfico,...), el material elaborado por los grupos colaborativos:

1. Comentarios, dudas y material, tanto producido por ellas como consultado o considerado de interés, que hubieran utilizado en la realización de cada tarea.
2. Diario grupal en el foro. Todas las sesiones de trabajo presencial fueron seguidas por la publicación del trabajo del grupo en la plataforma.

Objetivos del experimento

3. Incrementar el nivel de competencia matemática.
4. Incrementar el nivel de competencia profesional como maestras de educación infantil.
5. Medir la percepción del alumnado acerca de su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Instrumentos de recogida de datos

La información la hemos recogido mediante registros escritos (papel y plataforma virtual Moodle), grabaciones audio y video. Para la recogida de datos hemos usado los siguientes instrumentos de medida: Test de creencias TEDS-M, entrevistas personales, cuestionario abiertos, diarios grupales/individuales, cuestionarios tipo Likert de elaboración propia para recoger las opiniones del alumnado sobre su propio proceso de enseñanza-aprendizaje a lo largo de la resolución del ABP (ver Anexo III) y videos de las sesiones.

Resultados y discusión

La tarea propuesta ha supuesto un enorme reto para las alumnas que se han implicado en su resolución enfocándola como un problema profesional. Entre los resultados, destacamos los:

Relativos al incremento de su nivel de competencia matemática

Del análisis de las respuestas a los cuestionarios recogidos tras la evaluación del “Problema de María”³ referentes a los conocimientos matemáticos aprendidos, subrayamos: los conceptos de cantidad, cardinal, ordinal y cuotidad, la conservación de la cantidad y las relaciones de clasificación, comparación y orden.

Identifican relaciones entre elementos de un conjunto (de semejanza, equivalencia y orden,..) en contextos cotidianos en el aula de Infantil, y manifiestan las dificultades encontradas en ocasiones⁴. Nueve de las estudiantes reconocen haber llegado a comprender los conceptos sólo después de analizar las actividades con las gafas lógico-matemáticas.

En la propuesta de actividades que finalmente han diseñado, establecen relaciones con otros contenidos (numeración, medida, lógica, geométricos,...) y reconocen las diferentes fases en la construcción del número.

Indefectiblemente han tenido que relacionar todas las áreas que en algunos desarrollos curriculares, e incluso en su formación, han estado compartimentadas. De modo que para proponer cualquier secuencia de trabajo en el aula han necesitado trabajar con objetos en el espacio (geometría), medidas y otras áreas de conocimiento.

Relativos a la competencia profesional

Con respecto a la competencia profesional, en el cuestionario pasado reconocen haber descubierto las situaciones del aula de infantil en la que se trabajan conceptos matemáticos y la necesidad de contextualizar los aprendizajes y vincularlos a las experiencias vitales diarias de los niños, acercándose a sus intereses y trabajando desde el movimiento y la manipulación.

Han redescubierto materiales manipulativos que nunca habían visto utilizar aunque creían haberlos visto en la escuela en los periodos de prácticas⁵. Han consensuado, tras discutir, que las fichas que continuamente realizaban los niños en todas las escuelas en las que estuvieron no eran tan necesarias, y además perdían su eficacia si se rellenaban antes de haber vivido, manipulado y experimentado los conceptos.

En general, han descubierto otra manera de trabajar matemática en la escuela de Educación Infantil diferente de la que recordaban de sus tiempos de parvulario y de la que acaban de observar en sus prácticas de estudiantes de magisterio⁶.

Relativos a la percepción del alumnado acerca de su proceso de enseñanza-aprendizaje

Por último, para evaluar la percepción del alumnado sobre su propio proceso de enseñanza-aprendizaje, usamos un cuestionario de tipo Likert (ver Anexo III) y los resultados obtenidos son:

³ Han contestado al cuestionario 25 alumnas y dos alumnos.

⁴ Una de las alumnas expresaba su impotencia al no “entender” lo que significaba la representación en diagramas de Venn. Manifestando ella misma un comportamiento preoperacional. Manifestaba su propio asombro ya que ella había estudiado en cursos anteriores y había realizado los ejercicios correspondientes e incluso había llegado a entenderlo, pero al llegar al momento de ubicar los alimentos por atributos (frutas y amarillos), no sabía dónde colocar el plátano, porque tenía que estar con las frutas pero también tenía que estar con los amarillos.

⁵ Dos alumnas volvieron a los colegios de prácticas para reafirmarse en su percepción de que esos materiales (concretamente las regletas Cuisenaire) no existían en la escuela en la que hicieron las prácticas y reconocían que se los encontraron en el aula cuando llegaron pero que la maestra les indicó que todavía no los habían utilizado con los niños.

⁶ “Lo más complicado ha sido cambiar de chip” MGM, alumna con calificaciones sobresalientes en la diplomatura.

Durante la realización del trabajo la percepción del alumnado en un 100% fue que *habían trabajado mucho* y que *habían aprendido mucho* (preguntas P5 , P7 y P8).

Con respecto al proceso, en un porcentaje alto no consideran haber tenido problemas para discriminar el material interesante del que no lo era, a pesar de reconocer no tener información suficiente al comienzo del problema para resolverlo (preguntas P1 y P5).

Por último, queremos resaltar que después de la realización del trabajo, *la valoración* del mismo *ha sido muy positiva* (preguntas P9, P10 y P13).

Conclusiones

El trabajo en grupo les ha permitido aumentar su nivel competencial profesional profundo en la medida en que han experimentado las ventajas e inconvenientes de la metodología, han descubierto que un problema puede tener diferentes soluciones y que la construcción de conocimiento por muchas personas enriquece la individual y ayuda a ser contrastada, en consonancia con las aportaciones de Smith, Johnson y Johnson (1998).

Otra de las consecuencias es que reconocen la necesidad de aprendizaje continuo para poder incorporar sus conocimientos y mejorar en su práctica y descubren la tenacidad y actitud positiva para poder avanzar en el aprendizaje.

Entre los aspectos a mejorar se menciona la gestión del tiempo, acorde con los resultados de Vicario y Smith (2012). Por una parte las sesiones de trabajo presenciales estaban organizadas con muchas actividades diversas que, sobre todo al principio del curso, generó algo de stress. Fuera del aula en las sesiones de trabajo autónomas, dos grupos reconocen tener problemas al haber dedicado demasiado tiempo a la realización de actividades que no hubieran necesitado tanto.

Referencias

- Chamoso J.M., Cáceres M.J. y Azcárate P. (2012). Reflection on the teaching-learning process in the initial training of teachers. Characterization of the issues on which pre-service mathematics teachers reflect. *Teaching and Teacher Education* 28, 154-164.
- Hmelo-Silver, C.E. (2004). Problem-based learning: What and how do students learn?. *Educational Psychology Review*, 16, 235-266.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 75-88.
- Neville, A.J. y Norman G.R. (2007). PBL in the Undergraduate MD Program at McMaster University: Three Iterations in Three decades. *Academic Medicine*, 82, 4, 370-374.
- Oakley B., Felder R.M., Brent R. y Elhajj, I. (2004). Turning Student Groups into Effective Teams, *Journal of Student Centered Learning*, 2 (1), 9-34.
- Smith, K.A., Johnson, D.W. y Johnson, R.T. (1998). Cooperative learning returns to college: What evidence is there that it works?, *Change*, 30 (4), 26-35.
<http://www.ce.umn.edu/~smith/docs/CLReturnstoCollege.pdf>

- Valverde Soto, A. G., Castro Martínez, E. (2011). Avances de un experimento de enseñanza sobre la razón y la proporcionalidad con futuros maestros de primaria.
- En M. Marín Rodríguez, G. Fernández García, L. J. Blanco Nieto, M. Palarea Medina (Eds.), *Actas del XV Simposio de la SEIEM: Investigación en Educación Matemática*, 565-574. Ciudad Real: SEIEM.
- Vicario Casla, A. y Smith Zubiaga, I. (2012). Cambio de la percepción de los estudiantes sobre su aprendizaje en un entorno de enseñanza basada en la resolución de problemas. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 11 (1), 59-75.

Anexo I

El problema de María

María vive en un pueblo pequeño cercano a Bilbao y realizó sus prácticas de enseñanza en la escuela del mismo, integrada en la red de “Eskola Txikiak”. Hace un año y medio, en 2010, terminó su diplomatura en la UPV/EHU y en enero ha conseguido trabajo como tutora del aula de 5 años en una escuela de Getxo. Las profesoras de Educación Infantil trabajan en el ciclo con el material de la editorial XXX. Le indican que han elegido este material porque respeta los principios constructivistas y de globalización y se presenta estructurado en proyectos. La clase está organizada en txokos en las que se distribuyen las niñas y niños, pero rellenan las fichas individualmente. De ese modo las maestras controlan los logros individuales de cada alumno/a y los padres y madres comprueban al final del cuatrimestre el trabajo que realizan sus hijos e hijas. La mayoría de los niños y niñas hacen bien las fichas pero hay unos cuantos que tienen dificultades, porque se distraen o son muy lentos.

Antes de entrar en el aula le indican el “proyecto” que están trabajando durante la quincena. Entre las tareas que les corresponde realizar tienen que relacionar colecciones de objetos con el numeral correspondiente. Le parece sencillo y afronta su primer día de trabajo con confianza. Mientras pasea por la clase, observa como una de las niñas de 5 años asocia a una bolsa con 5 caramelos, el numeral 6. Ella le corrige, la niña borra la respuesta incorrecta y señala el 7. María vuelve a corregirle hasta que finalmente la niña escribe el 5. Con intención de averiguar la razón del fallo, le pide que cuente hasta donde sepa y la niña recita: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Cuando reflexiona sobre lo ocurrido observa que ni la niña sabe porque su respuesta esta mal, ni ella sabe porque se equivoca la niña.

A lo largo de la quincena observa que son unos cuantos los niños que manifiestan dificultades con los numerales y las cantidades y que ella no sabe que puede hacer para que no se equivoquen. María recuerda sus prácticas de enseñanza y como los niños de 4 años en su actividad diaria medían comparando con unidades que ellos mismos construían, realizaban repartos y planificaban viajes para visitar a sus amigos de otras escuelas. La escuela basaba su enseñanza en proyectos que se desarrollaban en el entorno de los propios niños en función de sus intereses.

María se plantea la necesidad de cambiar la metodología en su grupo de clase pero al plantárselo a sus compañeras de ciclo estas no ven la necesidad de cambio y ella no sabe como convencerlas.

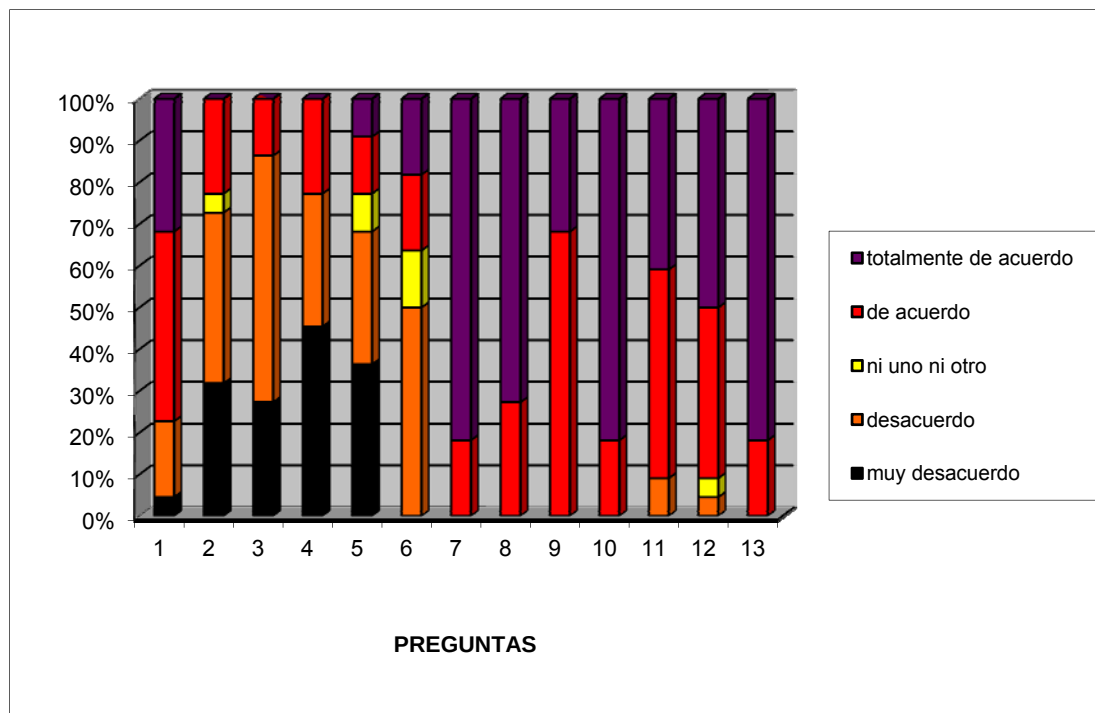
Anexo II

NOMBRE	PREGUNTAS EN LAS QUE SE VA A CENTRAR	TAREAS PARA INTENTAR DARLES RESPUESTA	FUENTES A CONSULTAR	TIEMPO PREVISTO
E.	Metodología constructivista y por proyectos	Ponerse en contacto con la ikastola donde hizo las prácticas, donde se trabaja bajo esta metodología Buscar información	Internet Biblioteca	Hasta el sábado 3 de marzo, puesto que la tarea de Elsa depende de esta
Ei.	El constructivismo en el aula (de forma práctica)	Recoger la información de Erika, completarla y 'trasladarla' al día a día del aula (acciones y actividades)	Información de Ei. Internet Biblioteca	Desde el sábado 3 de marzo, hasta el martes 6 de marzo
M.	Número: aspectos psicoevolutivos en un niño de 5 años	Buscar información	Internet Biblioteca Vídeo de Canals Apuntes de la universidad	Hasta el 6 de marzo
P.	Análisis de la metodología actual (fichas, txokos...)	Elaborar puntos fuertes y débiles de dicha metodología Análisis de la organización del aula	El problema de María	Hasta el 6 de marzo

Nombre	Preguntas en las que se va a centrar	Tareas que va a hacer para intentar darles respuesta	Fuentes a consultar	Tiempo previsto
A.G.	-Otros métodos de organización de la clase	-Búsqueda de métodos de organización -Similitudes y diferencias	- Internet - Biblioteca	Martes 6-3-12
E.O.	Constructivismo -¿Qué es? -características -metodología	-Búsqueda de información y documentación.	-Internet - Apuntes de otros años	Martes 6-3-12
I.U.	El número -aspectos psico-evolutivos	-Búsqueda de información	-Internet -Libros de mate	Martes 6-3-12
A.I.	Materiales -tipo de materiales que hay en la escuela -¿Se saben utilizar? -Búsqueda de materiales para trabajar el nº -¿Qué les gusta?	-Búsqueda de materiales en un centro y comparación con otros materiales.	-Internet -Urtxintxa -Biblioteca	Martes 6-3-12
N.B.	Organización-clase -Método Amara Berri	-Búsqueda del método	-Internet	Martes 6-3-12

Anexo III

Cód	Preguntas	Frecuencias absolutas				
		1	2	3	4	5
P1	Antes de comenzar no tenía información suficiente para dar una opinión sobre el tema planteado	1	4	0	10	7
P2	Durante el trabajo me he sentido perdida, no tenía seguridad sobre lo que estábamos haciendo	7	9	1	5	0
P3	Ha habido muchas disparidades en el grupo al tomar decisiones	6	13	0	3	0
P4	De vez en cuando no sabíamos que hacer en el trabajo de grupo	10	7	0	5	0
P5	Para hacer el trabajo de grupo he tenido dificultades para discriminar la información interesante de la que no lo era	8	7	2	3	2
P6	Respecto al tiempo, me ha parecido escaso, hubiéramos necesitado mas tiempo para elaborar nuestras conclusiones	0	11	3	4	4
P7	Hemos trabajado mucho	0	0	0	4	18
P8	Hemos aprendido mucho	0	0	0	6	16
P9	Después de hacer el trabajo de grupo tengo un grado de autonomía mayor para enfrentar este tipo de problemas	0	0	0	15	7
P10	Hemos tenido en cuenta la opinión de todas	0	0	0	4	18
P11	Todas hemos aportado la misma cantidad información	0	2	0	11	9
P12	La información aportada por todos los miembros del grupo ha sido igual de interesante	0	1	1	9	11
P13	Teniendo en cuenta todo el proceso mi valoración es positiva	0	0	0	4	18



ACTIVIDAD LÓGICA Y RELACIONAL EN EDUCACIÓN INFANTIL

RELATIONAL AND LOGIC ACTIVITY IN EARLY CHILDHOOD EDUCATION

Lacasta, E. , Lasa, A., Wilhelmi, M.R.

Universidad Pública de Navarra

Resumen

El presente trabajo tiene como finalidad analizar la actividad lógica y relacional en Educación Infantil. Se presentan las producciones de niños de 4 y 5 años en actividades lógico-matemáticas de fichas de editoriales usuales y otras preparadas ad hoc. Los contenidos matemáticos involucrados son: seriación, tabla, adición y uso de códigos. Se siguió el método de doble ciego para evitar intervenciones condicionadas de las maestras. Los resultados obtenidos y su discusión sugieren recomendaciones para la enseñanza de los tópicos.

Abstract

The aim of this work is to analyze the logical and relational activity in preschool education (ages 3–5). We present the production of children aged 4 and 5 years, who resolved logical and mathematical tasks from usual publishing houses and some others designed ad hoc. The related mathematical contents are: formation of series, tables, addition and codes of representation. Double blind method was used in order to avoid schoolteacher's intentional interventions. Finally, we present recommendations for the teaching process of these topics, based on the obtained results and their discussion.

Palabras clave: *Educación Infantil, seriación, tabla, adición, códigos de representación.*

Key words: *Preschool Education, formation of series, table, addition, codes of representation.*

Introducción

Lacasta y Wilhelmi (2008), a partir de un análisis de fichas de trabajo de Educación Infantil (EI), justificaron la necesidad de revisión de la actividad matemática propuesta a los niños. Un objetivo primordial sería la promoción del uso del número en contextos diversos y, asimismo, la valoración de las actividades lógicas y relacionales en sí mismas y no por el presunto carácter prenumérico atribuido en la reforma conjuntista de los años 70.

Así, una cuestión crucial en la formación de maestras¹ en EI es motivar la necesidad de que éstas tengan un control epistemológico sobre la actividad matemática que llevan a cabo los niños. Aquí estamos interesados en analizar actividades de seriación, construcción de tablas e interpretación de códigos de representación, típicas en las fichas de trabajo de EI. ¿Qué tareas de este tipo son capaces de realizar los niños del aula de 4 y 5 años? ¿Hay diferencias significativas en la realización de las mismas según la edad? ¿Qué códigos son transparentes para los niños y cuáles pertenecen a la esfera adulta?

Asimismo, en las colecciones se proponen a los niños tareas aritméticas que involucran la adición y la sustracción. En la mayoría de estas fichas, las operaciones se presentan de manera conjuntista, con o sin la introducción de la simbología matemática (+, −, =). Cuando los símbolos matemáticos no aparecen, ¿son las representaciones gráficas inteligibles para los niños? ¿la adición como “reunión de objetos” les es transparente?

En este trabajo damos una respuesta a estas preguntas basada en el análisis de producciones de niños enfrentados a fichas de trabajo. En la sección 2, a partir del contenido matemático involucrado en las fichas de trabajo de EI, se hace un breve análisis de la forma en que este contenido es presentado. Luego se describe la experimentación (sección 3) y se muestran y discuten los resultados (sección 4). Finalmente, a modo de conclusión, se hace una breve síntesis y se indican algunas implicaciones para la enseñanza.

Contenido matemático e interpretación didáctica

En esta sección se analiza el contenido matemático *transpuesto* (Chevallard, 1991) en fichas de EI, resaltando el tipo de actividad propuesta a los niños y las intervenciones presumidas por parte de las maestras. Este análisis previo permite enmarcar el tipo de tareas matemáticas escolares, aportando una referencia institucional para valorar los comportamientos observados en la experimentación. Así, apoyándonos en la *ingeniería didáctica* (Lacasta y Wilhelmi, 2011), la observación permite (*a posteriori*) contrastar las afirmaciones hechas previamente.

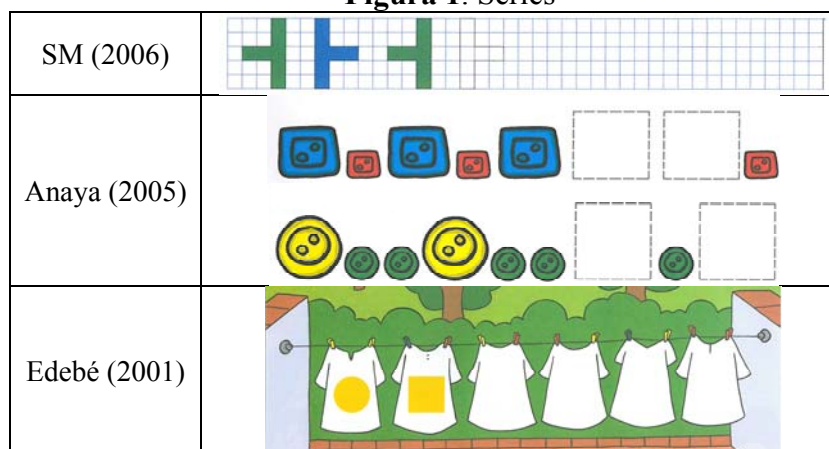
Seriaciones

La relación de orden aparece usualmente como la repetición de una serie ordenada. La tarea del niño es la determinación del patrón a partir de la información dada. Estas fichas presentan las siguientes características generales del patrón (figura 1):

- *Elementos constitutivos*: 2–4 elementos.
- *Reproducción sistemática*: no superior a 5.

¹ Dado que el mayor número de docentes en Educación Infantil son mujeres, utilizaremos en este texto el género femenino como genérico.

- *Identificación*: el primer elemento que el niño debe representar coincide con el primer elemento de la serie.

Figura 1. Series

Estas características limitan sobremanera el interés y alcance de las series:

- Puesto que el número de elementos que constituyen el patrón es reducido, ¿cómo es posible discriminar entre los niños que, toda vez identificado el patrón, movilizan estrategias de control numéricas —como el recuento o el número ordinal para determinar el lugar que ocupa un elemento en el patrón— y aquellos cuya única estrategia de control es visual —*visión sinóptica*—?
- Puesto que para realizar correctamente la ficha es suficiente completar un número reducido de veces el patrón, ¿cómo es posible discriminar entre los niños que reproducen sistemáticamente el patrón y aquéllos cuya actividad es inestable?
- Puesto que el patrón es dado un número entero de veces, ¿cómo es posible discriminar entre los niños que reconocen el patrón y aquellos que copian ordenadamente el modelo?

Tablas de doble entrada

Chabroulet (1975) muestra una secuencia de actividades cuyo objetivo final es la construcción por los niños de una tabla de doble entrada para la organización de la información. El progreso en la secuencia de actividades se completa mal. La intervención explícita y directiva de la maestra se hace absolutamente necesaria.

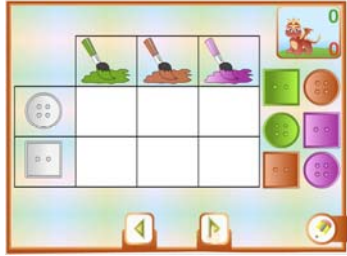
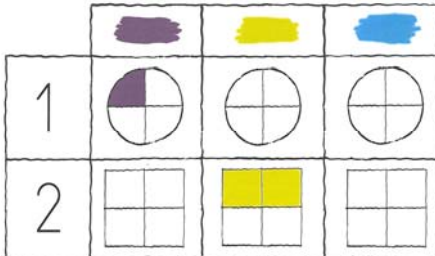
De hecho, sigue sin solución la determinación de situación *fundamental* (Brousseau, 1998) que dote de sentido a las tablas en la etapa. Es pues comprensible sostener la tesis según la cual este objetivo es ilusorio: las restricciones cognitivas de los niños impiden la puesta en marcha de situaciones con un carácter *adidáctico* esencial para la introducción y desarrollo de este objeto matemático en la etapa.

En la figura 2 se muestran dos actividades prototípicas de utilización de tablas, que vienen construidas previamente y donde se reducen las expectativas:

1. La simbolización de los objetos viene dada.
2. Las tablas no son utilizadas como instrumento para la organización de información de situaciones reales o que se refieran a centros de interés de los niños.
3. La dimensión normalmente es 2×2 , 2×3 , 3×2 o 3×3 .

El control y responsabilidad de la actividad recae sobre la maestra, convirtiéndose la tarea de los niños casi exclusivamente en un ejercicio de psicomotricidad fina, es decir, dibujo de los contornos de los objetos y pintado sin salirse de los mismos.

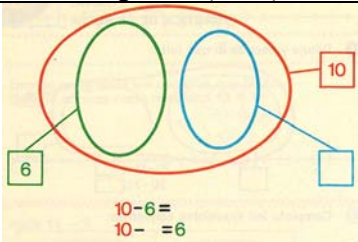
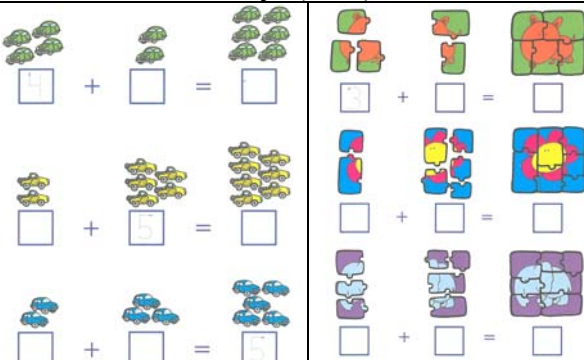
Figura 2. Tablas de doble entrada

http://ares.cnice.mec.es/infantil	SM (2006)
	

Adición

En las colecciones de fichas la adición y la sustracción se presentan en general bajo una formulación conjuntista asociada al número como cardinal, aunque no siempre se represente el diagrama de Venn-Euler. En la figura 3 se muestran dos presentaciones, con o sin representación de diagramas de Venn-Euler.

Figura 3. Formulación conjuntista de la adición

Roig et al. (1984)	Anaya (2005)
	

La estrategia de base que se supone utilizan los niños es el recuento. De hecho, si la adición conjuntista no es utilizada como medio para prever, el recuento es la única estrategia movilizada, siendo la adición un mero juego de lenguaje: “sumar es juntar”. La adición es necesaria únicamente si recurrir al recuento no es posible, resulta ineficaz o excesivamente costoso.

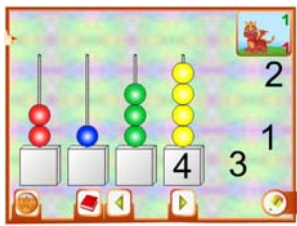
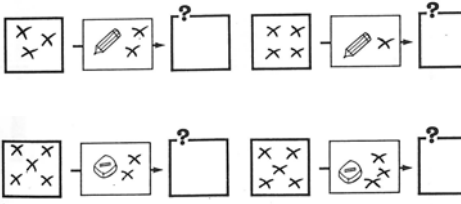
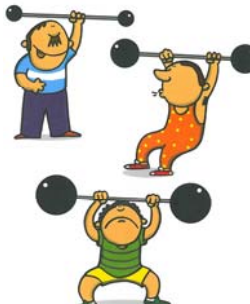
Uso de códigos y convenciones

En muchas fichas se incluyen símbolos y códigos estereotipados, propios de un bagaje cultural adulto, ajenos al universo de los niños, para representar:

1. *Acciones sobre materiales físicos*: ábaco, bloques lógicos, etc.
2. *Nociones o procesos matemáticos*: por ejemplo, una goma de borrar o una flecha para abajo, para indicar sustracción; un lapicero o una flecha para arriba, adición.
3. *Aspectos anímicos o físicos*, que comportan una información adicional que se presume determinante.

En la figura 5 se muestra un ejemplo de cada una de estas categorías.

Figura 5. Códigos adultos

http://ares.cnice.mec.es/infantil	Goñi (1987)	Anaya (2005)
		

El uso de esta simbología puede comportar un fenómeno de *ilusión de transparencia*: los alumnos ven el símbolo o código únicamente como un dibujo, mientras que la maestra lo interpreta en tanto que representación de “un medio material usado en una actividad matemática”. Es pues preciso un análisis sobre la información gráfica presente en las fichas y su correlato con la actividad de los niños y sus centros de interés.

Experimentación

Contexto

Maestras en formación en periodo de prácticas proponen a los niños la resolución de tareas con un componente matemático esencial. Su objetivo es la observación y registro de actividad matemática en EI. Los contenidos involucrados son: tablas, adición, códigos de representación y determinación de patrones en series lineales.

La actividad de los niños consiste en la realización de fichas de trabajo de editoriales usuales (Anaya, 2005; SM, 2006) y de otras diseñadas *ad hoc*.

En la aplicación de las fichas, se sigue el método de “doble ciego”, es decir, ni los niños ni las maestras en formación conocen el objetivo de la investigación. Con ello, se controla la validez interna, tratando de evitar intervenciones condicionadas de las maestras.

Población y muestra

La población de referencia son niños de EI de las aulas de 2º (4 años) y 3º (5 años). Los niños pertenecen a colegios públicos (P) y concertados (C) donde la lengua vehicular es el castellano o el euskera (*). La muestra es intencional y está constituida por 140 niños del aula de 4 años y 149 del aula de 5 años (tabla 1).

Tabla 1. Muestra

Aula	Colegio 1 (P*)	Colegio 2 (C)	Colegio 3 (P)	Colegio 4 (P)	TOTAL
4 años	25	48	47	20	140
5 años	48	47	37	17	149

Los niños realizan la actividad en el aula con mobiliario y material escolar convencional. El momento de realización de las fichas por los niños lo determina la maestra titular, según la planificación prevista y según la circunstancia de aula concreta.

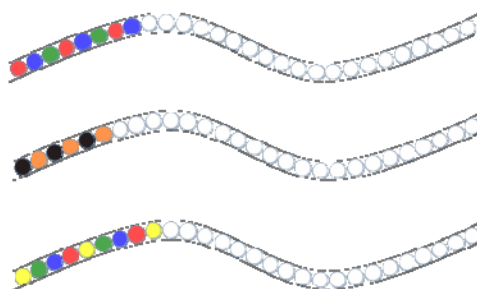
Material

Analizaremos aquí las respuestas de los niños a 4 fichas. Las consignas están previamente establecidas, de tal manera que todas las maestras en formación, indiferentemente del aula en la que estén, comunican la tarea a los niños de la misma forma.

Ficha 1: seriación

En esta ficha (figura 1) los niños deben completar tres series, con patrones de 3, 2 y 4 colores repetidos.

Figura 6. Seriación



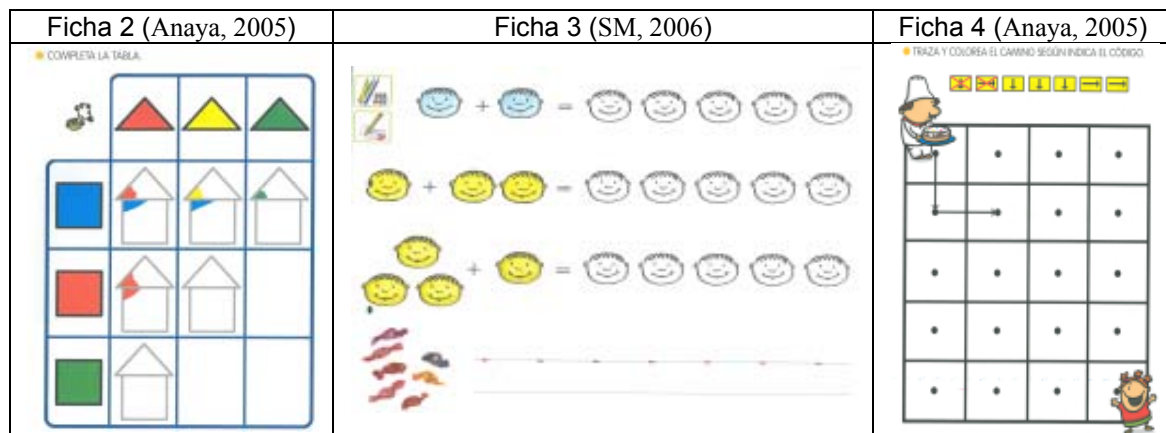
La actividad se presenta a partir de la pregunta: “¿Habéis pintado caminos como estos?” Si los niños responden que sí, se da directamente la consigna; si responden que no, se les dice que tienen que pintar todos los círculos utilizando los mismos colores dados y en orden, realizando preguntas de control para verificar la comprensión del objetivo.

A continuación se da la consigna: “*Continúa pintando los círculos que están en blanco de la misma manera que los que ya están pintados, hasta llegar al final de cada camino*”.

Fichas 3–4: tabla, adición y código de representación

En la figura 7 se muestran las fichas 2, 3 y 4. Las consignas dadas a los niños son:

- Ficha 2 (tabla): “*En las primeras casitas han empezado a pintar. Hay que acabar de pintar todas las casitas de los colores que están*”.
- Ficha 3 (adición): “*Tenéis que pintar las caritas que hacen falta y abajo del todo tenéis que escribir el número de caramelos que hay*”.
- Ficha 4 (código): “*Arriba os dicen cómo se mueve el cocinero para llevarle la tarta a la niña. Los dos primeros pasos ya están puestos, tenéis que acabar de poner todos los pasos*”.

Figura 7. Tabla, adición y código de representación

Comportamientos esperados

- *Ficha 1: seriación*
 - Frecuencia de éxito mayor en la segunda serie (patrón de 2 elementos), que en las otras dos (patrones de 3 y 4 elementos).
 - Porcentaje elevado de niños que empiezan la primera y tercera series por el primer color del patrón (rojo y amarillo, respectivamente) y no por el color que corresponde (verde en ambos).
- *Ficha 2: tabla*
 - Frecuencia de éxito global baja (ver sección 2.2.).
 - Tasa de éxito superior de la primera fila y columna respecto al resto de casillas.
 - Un porcentaje elevado de niños no representará las casas en las casillas en las que no está dibujada su silueta.
 - Los niños de 4 años que representen las casas en las casillas vacías conservarán peor la forma y proporciones que los niños de 5 años, es decir, los triángulos y cuadrados de estos últimos son más próximos al modelo dado (Dickson, Brown y Gibson, 1984).
- *Ficha 3: adición*
 - Un alto porcentaje de los niños de 4 años colorearán todas las caras de la derecha. Los símbolos (+,=) son propios de la enseñanza del aula de 5 años, donde el porcentaje de éxito será claramente superior.
 - La escritura de las grafías de los números en el aula de 5 años empiezan a ser estables, por lo que el éxito aquí también será superior al observable en el aula de 4 años.

Es pues la ficha donde la enseñanza propia del grado va a condicionar más su realización.
- *Ficha 4: código*
 - El objetivo fundamental de los niños será establecer una unión entre el cocinero y la niña, sin, en general, respetar el código adulto de representación dado.

- Un porcentaje de niños que no puede ser explicado al azar representa una ruta “escalonada”, para que la niña “suba” a por la tarta o el cocinero “baje” a dársela, haciendo caso omiso del código.

Resultados y discusión de los resultados

Ficha 1: seriación

La tabla 2 muestra, por edades, los porcentajes de éxito obtenidos en cada una de las series, junto con el porcentaje de niños que empiezan cada una de las series por el primer color del patrón.

Tabla 2. Porcentaje de éxito

		Serie 1	Serie 2	Serie 3
Porcentaje de éxito	4 años	7,5	40	3,8
	5 años	32	83	47
Empieza la serie por el primer color de patrón	4 años	59	—	55
	5 años	43	—	28

Además de las variables dicotómicas estudiadas, se incluye en la tabla 3 los medidas de centralización y dispersión de la variable discreta “número de secuencias correctas” para cada una de las series.

Tabla 3. Parámetros de centralización y dispersión

	4 años			5 años		
	Serie 1	Serie 2	Serie 3	Serie 1	Serie 2	Serie 3
Media	2,04	7,16	0,74	4,8	10,23	2,9
Moda	0	11	0	6	11	4
Mediana	1	10	0	5,5	11	4
Desviación estándar	2,21	4,45	1,35	1,8	1,57	1,6

Estos datos contribuyen a aceptar los comportamientos esperados descritos anteriormente.

Asimismo, el escalograma de Guttman² suponiendo que la dificultad de la serie está directamente relacionada con la longitud del patrón. Así, se espera que:

- Un niño que ha resuelto bien la serie 3 (patrón de 4 elementos), habrá resuelto asimismo las series 1 (3 elementos) y la 2 (2 elementos)
- Un niño que ha resuelto bien la serie 1, pero no la 3, habrá resuelto también la 2.
- Un niño que no ha resuelto bien la serie 2, no habrá resuelto ninguna.

Con los datos originales que se resumen en la tabla 2, el índice de Guttman es de 0,98 y 0,80, respectivamente para los niños de 4 y 5 años.

El alto valor que toma el índice de Guttman en los niños de 4 años se debe al bajo porcentaje de éxito en la actividad en general, y en las series 1 y 3 en particular. La desviación estándar de los resultados es mucho mayor en este grupo de edad. Por otro lado, el índice para el grupo de 5 años, inferior a 0,9, determina que la explicación

² El escalograma de Guttman es una tabla en la cual se ordenan tanto los sujetos como los ítems respecto a una dimensión determinada, asegurando, si los resultados demuestran que los datos se ajustan a 1, que el conjunto de ítems que conforman la escala miden una única dimensión y que, por tanto, la puntuación total que se asigne a los sujetos tenga significado psicológico y pueda ser interpretable, cosa que no ocurriría si los ítems hicieran referencia a más de una dimensión.

basada exclusivamente en la dificultad según la longitud del patrón no es posible. En este caso, es determinante el hecho de que, en las series 1 y 3, el primer círculo que deben pintar los niños no coincide con el primer círculo del patrón; apoyando la hipótesis previa.

Ficha 2: tabla

En la tabla 4 se resumen los porcentajes de éxito de algunas variables estudiadas.

Tabla 4. Porcentaje de éxito

Aula	Éxito global	Éxito casillas con indicación inicial	Éxito casillas sin indicación inicial	Éxito casillas vacías	Guarda proporciones	Guarda forma
4 años	0	14	1,79	0	3,57	7,14
5 años	19	67	29,3	18,97	50,86	66

A la vista de los resultados, las pruebas experimentales contribuyen nuevamente a aceptar los comportamientos esperados.

Por otro lado, asumiendo que los tres tipos de casillas a rellenar (con indicación inicial, sin indicación inicial, vacías) representan ítems de dificultad creciente, el índice de Guttman es de 0,99, tanto en el aula de 4 años como en la de 5. Así, se concluye para la muestra que los niveles de dificultad reseñados constituyen una dimensión explicativa privilegiada del comportamiento global de las respuestas.

Ficha 3: adición

En la tabla 5 se resumen los porcentajes de éxito de algunas variables estudiadas.

Tabla 5. Porcentaje de éxito

Aula	Colorea todas las caras de la derecha	Éxito global	Escribe el 7 correctamente	Correspondencia uno a uno
4 años	61	15	31	1,7
5 años	17	42	73	72

El porcentaje de éxito global es claramente superior en el grupo de 5 años. Además, más de la mitad de los niños de 4 años hace caso omiso a la tarea y responde coloreando todas las caras. Estos hechos quedan justificados por los procesos de enseñanza diferenciados según la edad. La simbología de la adición (+,=) es propia del aula de 5 años y está ausente en la de 4. Las grafías de los números es un aprendizaje que suele iniciarse de manera sistemática a los 4 años, para que, al final de la EI, los niños sean capaces de escribir todas las grafías. Además, en 3º de Infantil, el saber escolar “correspondencia 1-1” está más consolidado, de tal manera que los niños identifican los puntos como un inicio a “corresponder”.

Ficha 4: códigos de representación

En la tabla 6 se resumen los porcentajes de éxito de algunas variables estudiadas.

Tabla 6. Porcentaje de éxito

Aula	Correcto	Interpretación física		Blanco, itinerario imposible, retrocede
		2 Horizontal / 3 vertical	Escalera	
4 años	11	9	33	47
5 años	43	13	25	22

El porcentaje de niños que realizan una interpretación física de la situación (la niña debe “subir” o el cocinero debe “bajar”) es estable (próximo al 40%). Esto refuerza el hecho de que el código adulto no es transparente para un conjunto representativo de la muestra. La mayor tasa de éxito en el aula de 5 años es entonces explicable más en términos de “aprendizaje de reglas y convenciones sociales” que en términos de aprendizaje de nociones lógicas o *protocartesianas*³.

Síntesis e implicaciones para la enseñanza

Las actividades de tipo lógico y relacional deben ser apreciadas por sus finalidades propias y no por su supuesto carácter prenumérico.

Aquí se ha mostrado cómo los niños tienen grandes dificultades en la realización de actividades abundantes en las colecciones de fichas, tales como seriación, tablas de doble entrada y códigos de representación. Para evitar el fracaso sistemático, las colecciones de fichas proponen situaciones reduciendo al máximo el envite epistemológico o suponiendo una intervención muy directiva de la maestra.

- *Reducción del envite epistemológico: series.* Se proponen series con un patrón que repite a lo sumo 2 o 3 elementos un número reducido de veces (4 como máximo) y siempre haciendo coincidir el último elemento representado con el último elemento del patrón. Así, se evita enfrentar a los niños a un medio que les exige la repetición sistemática del patrón un número “elevado” de veces, que comporte la toma de decisión reiterada sobre el elemento que sigue y la identificación del patrón, abstrayéndolo del modelo mostrado.
- *Intervención de la maestra vs. Trabajo autónomo de los niños: tablas.* Para evitar el fracaso generalizado de los niños en la construcción de una tabla, las maestras deben aportar información explícita, que permita superar las restricciones cognitivas propias de la edad (Chabroulet, 1975). Pero más aún, los datos empíricos aquí dados sugieren que a pesar de que la tarea presentada a los niños este “semi-elaborada”, éstos no son en general capaces de interpretar globalmente la tabla, siendo la capacidad para la realización de este tipo de tareas todavía incipiente.

De esta forma, no puede presumirse una actividad autónoma de los niños para estos dos tipos de actividades. Por ejemplo, sería entonces adecuada la organización por talleres con un taller central dedicado al uso de las tablas o la construcción colectiva en asamblea, donde la maestra contemple momentos regulativos explícitos.

- *Simbología adulta e ilusión de la transparencia: códigos de representación.* Las convenciones sociales o los códigos de representación condicionan la interpretación de las situaciones. En las fichas 3 y 4 de la figura 4, el niño, sin una indicación explícita, será incapaz de advertir la intención de los autores. Además, dado que el lenguaje es uno de los grandes retos de la etapa, es muy costoso dar la consigna sin participar de algún modo de la realización. Así, ni la representación icónica ni la comunicación de la tarea son transparentes para el niño, que tardará mucho tiempo en adquirir la maestría suficiente para decodificar códigos adultos convencionales.

En el acto didáctico es necesario discriminar entre los conocimientos propios de la etapa y aquellos que, sin estar recogidos en los currículos oficiales o las orientaciones pedagógicas, deben ser enseñados y aprendidos.

³ Protocartesiano: contexto o situación germen para la introducción del plano cartesiano.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) y fondos FEDER.

Agradecemos la recogida de la información de las maestras en formación (por orden alfabético): Ainara Alcuaz, Idoia Armendáriz, Laura Ayúcar, Laura Bases, Lucía Balduz, Ainhoa Beloqui, Ana Blanco, Leire Buzunariz, Yasmina Cobo, Sara Duque, Oihane Elcano, Alazne Fernández de Muniain, Ana Iráizoz, Maddi Lasa, Laura Madina, Ainara Mariezcurrena, Irene Muñoz y Amaia Velasco; así como a los centros donde éstas fueron acogidas y, en particular, a las maestras que actuaron como tutoras: Espe Atxa, Teresa Belza, Esther Eraso, Begoña Fernández, Olga Ferrer, M^a Jesús Goñi, Jone Iribarren, Maribel Luna, Raquel Monjas, Laia Prat, Amaia Ramos y Nerea Zabalo.

Referencias

- Anaya (2005). *Razonamiento matemático. Mira cómo miro*. Madrid: autor.
- Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chabroulet, M.-T. (1975). Apprenons à organiser l'information en tableau au CP. *Grand N*, 7, 103–119. [Disponible en (29/03/2012): http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n]
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. (1984). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC, 1991.
- Edebé (2001). *Matilandia*. Barcelona: Autor.
- Goñi, J. M. (1987). *Haurtxoa, Baga-Biga (eskolaurrea). Aritmetika*. Donostia: Gipuzkoako Ikastolen Elkartea.
- Lacasta, E.; Wilhelmi, M. R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII*. (pp. 403–414) Badajoz: SEIEM.
- Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. (2011). Métodos cuantitativos en las contribuciones a los Simposios de la SEIEM en 2001–2010. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en educación matemática XV*. (pp. 51–75) Ciudad Real: SEIEM.
- Peres J. (1988). *Recherches piagétienes sur la construction des structures numériques*. IREM, Universidad de Burdeos I.
- Roig T. (Coord.); Boixaderas, R.; Fernández, A.; Reverter, R.; Ros, R. (1984). *El 5, cuadernos de trabajo I y II, Preescolar, Colección: La llave de "Rosa Sensat"*. Barcelona: Editorial Onda.
- SM (2006). *Matemáticas. Colección: 5 años, Educación Infantil*. Madrid: autor.

CAMINANDO: LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADISTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL NORTE DE PORTUGAL

WALKING: NORTH OF PORTUGAL UNIVERSITY STUDENT'S STATISTICAL ATTITUDES

Martins, J.A. ^(1,2), Nascimento, M.M. ⁽³⁾, Estrada, A. ⁽⁴⁾

Unidade de Investigação para o Desenvolvimento do Interior (UDI/IPG) ⁽¹⁾,

Centro de Matemática da UTAD (CM-UTAD), Portugal ⁽²⁾,

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro ⁽³⁾,

Universidad de Lleida ⁽⁴⁾

Resumen

El trabajo que aquí presentamos se centra en el estudio de las actitudes hacia la Estadística de estudiantes universitarios de una universidad en el norte de Portugal. Analizamos las respuestas a los ítems de la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002). Nuestros resultados indican la necesidad de seguir trabajando por y para los estudiantes, potenciando su formación estadística pero sin olvidar la componente afectiva.

Abstract

The work presented focuses on the study of the attitudes towards statistics of students in a university in the north of Portugal. We analyzed the answers to the items of the Scale of Attitudes towards Statistics of Estrada, EAEE (Estrada, 2002). Our results indicate the need for further work by and for students, strengthening their statistical training but without forgetting its emotional component.

Palabras clave: *Actitudes hacia la estadística, Formación estadística, Estadística; Escalas de medición. Evaluación.*

Key words: *Attitudes towards statistics, statistics education, statistics, scales, evaluation.*

Introducción

Las actitudes son parte integrante de todas las materias de aprendizaje y ocupan un lugar central en el acto educativo, guiando el proceso perceptivo y cognitivo que comporta el aprendizaje de cualquier contenido educativo. Resultan difíciles de definir y no hay unanimidad respecto al significado del término actitud. McLeod (1992) al conceptualizar el dominio afectivo de la educación Matemática distingue entre emociones, actitudes y creencias. Las emociones son respuestas inmediatas positivas o negativas producidas mientras se estudia Matemáticas; mientras que las actitudes son respuestas o sentimientos más intensos y estables que se desarrollan por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo.

Respecto a la Educación Estadística, según Gal y Garfield (1997) durante mucho tiempo, los términos de actitud y sentimientos han sido utilizados indistintamente. Los definen como una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio y sugieren que en su origen intervienen pensamientos o creencias intensos. Mas recientemente Phillipp (2007) los considera como “sentimientos, acciones o pensamientos que manifiesta una persona respecto a una materia”. Siempre se expresan positivamente o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto), surgen favorables en edades muy tempranas pero evolucionan negativamente con el paso del tiempo. Además, en la actualidad, las actitudes hacia la Estadística se consideran un concepto pluridimensional y jerárquico, compuesto de diferentes elementos o dimensiones analizables por separado (Gil Flores, 1999). Han sido estudiadas por diversos autores, principalmente en estudiantes universitarios, a partir del uso de escalas o cuestionarios.

Para Manassero y Vázquez (2001) la evaluación de las actitudes no ha de estar centrada en “el qué” (simple conocimiento) como en “el para qué”. En esta línea nuestro estudio está dirigido a analizar las actitudes hacia la Estadística de estudiantes de Ingenierías y Educación Básica portuguesas para poder en un futuro planificar y decidir las acciones educativas más adecuadas para mejorar la formación estadística de estos alumnos.

En lo que sigue analizamos en primer lugar los antecedentes, presentando seguidamente la investigación y sus resultados.

Método

El estudio que aquí presentamos complementa trabajos previos de Estrada y cols. (2004, 2010a) y también Martins y cols. (2009, 2011) sobre la influencia de las actitudes en la enseñanza de la estadística en diferentes contextos, y en él consideramos que las actitudes son tendencias o predisposiciones hacia el objeto actitudinal, en nuestro caso la estadística, con componentes cognitivos, conductuales y sobretodo emotivos, positivos o negativos. Utilizamos como instrumento de medición de actitudes la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002), presentada en el XIV congreso de la SEIEM y cuya versión portuguesa fue validada por panel de jueces (Martins y col. 2011). Dicha escala está compuesta por 23 ítems, 12 afirmativos frente a 11 negativos, que se distribuyen según componentes pedagógicos y antropológicos definidos en Estrada (2010). Cada uno de los ítems tiene 5 respuestas posibles, incluyendo una alternativa neutral (3). La puntuación de la escala está formada por la suma de los valores obtenidos para cada elemento. Dado que los ítems no están redactados en el mismo sentido, todos ellos han sido codificados de modo que una

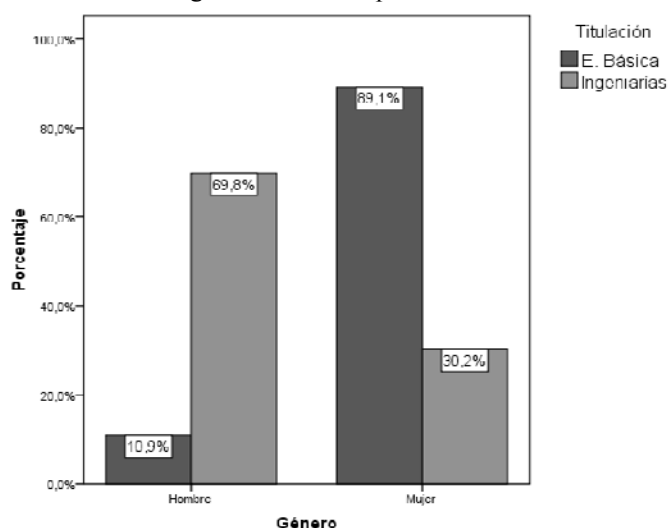
puntuación mayor vaya asociada a una actitud más positiva y viceversa. Es por ello que los elementos positivos presentan la escala siguiente: muy en desacuerdo (1), en desacuerdo (2), indiferente (3), de acuerdo (4) y muy de acuerdo (5) y los negativos: muy en desacuerdo (5), en desacuerdo (4), indiferente (3), de acuerdo (2) y muy de acuerdo (1). Así, los valores de la puntuación total varían entre 23 y 115, siendo la mitad 69 puntos (indiferencia).

La recogida de datos se realizó en los meses de Septiembre y de Octubre de 2011 (en el inicio de la asignatura de Estadística) entre alumnos de las titulaciones de Enseñanza Básica (E. Básica, 46 futuros profesores) y de Ingenierías (Civil, 39 alumnos, Energías, 29, y Mecánica, 28) de una universidad en el norte de Portugal y se obtuvieron 142 cuestionarios completos.

La asignatura de estadística se enseña en el tercero año (semestre 5) para los estudiantes de E. Básica y en Ingenierías, esa misma asignatura, se imparte en el segundo año (semestre 3). Se trata pues de un colectivo con dos grupos diferenciados según el momento de importación de la docencia y ello se refleja en la edad de los participantes, la muestra tiene un 37% con 18 ó 19 años, 40% con 20 ó 21 años y 21% con 22 ó más años pero en el caso de los estudiantes de E. Básica el 59% tienen 20 ó 21 años y sólo el 11% tienen 18 ó 19 años.

En la muestra recogida hay prácticamente el mismo porcentaje de hombres (51%) que de mujeres (49%) pero la distribución es muy distinta si el estudio lo hacemos por titulaciones ya que, como se puede observar en la Figura 1, hay una fuerte incidencia de las mujeres en E. Básica que representan un 89,1% del total, algo común en el ámbito de la docencia, en cuanto en las Ingenierías (agrupamos todos estos alumnos de Civil, Energías y Mecánica) hay un claro predominio del género masculino (69,8%), es más fuerte en Mecánica (82,1%) y menor en Civil (61,5%) ligado también al tipo de carreras tradicionalmente consideradas mas de “hombres”.

Figura 1 – Género por titulación.



Con respecto a la formación matemática de estos alumnos hay un 69,5% que cursaron Matemática A (las más formales), un 19,9% con Matemática B (menos formales) ó MACS (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales) y solamente un 10,6% con Matemática del 3^{er} ciclo (pues hay alumnos que pueden ingresar en titulaciones de la universidad sin las Matemáticas de Secundaria). Constatamos que en

E. Básica lo más común es la Matemática B ó MACS (48,9%), seguido de Matemática del 3^{er} ciclo (33,3%) y la menos común la Matemática A (17,8%), al revés que en las ingenierías donde casi todos realizaron la Matemática A (93,8%) Además si las relacionamos con el género los que cursaron la Matemática del 3^{er} ciclo son mayoritariamente mujeres (93,3%), los de la Matemática B ó MACS también pero menos (67,9%) y en los de la Matemática A predominan los del género masculino (63,3%).

Resultados y discusión

Una vez presentados los datos de las características de la muestra participante, analizaremos los resultados referentes a cada uno de los veinticinco ítems, tal como fueron presentados a los sujetos de la muestra.

Para evitar el problema de la aquiescencia los ítems negativos 1, 2, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 15, 18 y 23 tienen un enunciado desfavorable a la actitud que estamos midiendo por lo que para poder interpretar los resultados de una manera global hay que tener en cuenta los criterios establecidos anteriormente para este tipo de sentencias. De esta manera las medias y desviaciones típicas que se presentan en la Tabla 2 se deben interpretar en una escala positiva (las preguntas correspondientes a estos ítems en la tabla son al final: PREn°_neg).

A continuación realizamos un estudio de fiabilidad y los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 1. Observamos que tanto para el total de la muestra como para Ingenierías los resultados del alfa de Cronbach fueron razonables (0,794) y (0,793) respectivamente y buenos para el grupo de Educación Básica (0,811). Indicamos también que los 23 valores del alfa de Cronbach obtenidos en el estudio de los conjuntos de 22 ítems en que a cada uno de ellos se retiraba un ítem de los 23 ítems existentes no varían de modo significativo (manteniéndose entre el bueno de 0,8 a 0,9 y el razonable 0,7 a 0,8, Cohen, 2011, p. 640) por lo que el alfa sin el ítem se mantiene, hay correlación con los restantes ítems y no hay que eliminarlo pues se continua verificando la consistencia interna. Este hecho viene a reforzar la fiabilidad de este estudio. Estos valores no difieren mucho del valor obtenido en el estudio de Estrada y col. (2004) con un alfa de Cronbach de 0,774.

Cuestionarios	Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach sin el ítem Límite inferior	Alfa de Cronbach sin el ítem Límite superior
Todos	0,794	0,773	0,807
E. Básica	0,811	0,788	0,820
Ingenierías	0,793	0,773	0,820

Tabla 1. Resumen del estudio de fiabilidad.

Analizamos a continuación **los ítems mejor valorados, es decir con valores de la media superior a 4**, actitud claramente positiva, y según la Tabla 2 las sentencias en estas condiciones son la 7, 6 y 12, tanto globalmente, como para los alumnos de E. Básica o los de Ingenierías. Así, el ítem con mejor puntuación (4,71) es el de la pregunta 7 (PRE 7_neg) – *La estadística no sirve para nada* – lo que significa que los estudiantes no están de acuerdo con la afirmación, o sea que ellos llegan a percibir la utilidad de la estadística. Otro de los ítems más valorados (4,38) es el PRE 6_neg – *La estadística sólo sirve para la gente de ciencias* – que al igual que el PRE 7_neg

corresponde a una componente cognitiva inducida por una componente antropológica social y significa que los estudiantes no están de acuerdo con la afirmación, o sea que ellos aprecian la utilidad de la estadística en titulaciones que no son específicamente de ciencias. El tercer ítem más valorado (4,37) es el PRE 12_neg – *En la escuela no se habría de enseñar estadística* – que corresponde a una componente cognitiva inducida por una componente antropológica educativa y significa que los estudiantes no estando de acuerdo con la afirmación, asumen como fundamental la enseñanza de la estadística para todos.

Por otro lado, de la Tabla 2 también se pueden destacar **los ítems peor valorados, es decir con valores de la media inferior a 3**, indicando una actitud negativa. Estos ítems son el 2, 4, 5, 8, y 11, tanto globalmente como para los alumnos de Ingenierías, en cuanto que para los alumnos de E. Básica el ítem 11 presenta una media inferior a 3. Así, el ítem con peor puntuación (2,02) es el PRE 2_neg – *A través de la estadística se puede manipular la realidad* – que corresponde a una componente cognitiva inducida por una componente antropológica instrumental y significa que los estudiantes están de acuerdo con la afirmación indicando desconfianza hacia los datos estadísticos. La PRE 4_neg (2,80) – *Utilizo poco la estadística fuera de la escuela* – la PRE 11 (2,89) – *Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana* – y la PRE 5 (2,92) – *Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas objetivamente* – que son algunos de los peor valorados, corresponden a la componente antropológica instrumental y revelan una actitud negativa en términos de acción por medio del uso de la estadística. La PRE 8 (2,96) – *A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido* – es también uno de los peor valorados que corresponde a un aspecto educacional y que significa el desacuerdo o casi neutralidad de los estudiantes en relación a la afirmación, o sea, parece haber la asunción de algunas dificultades en el aprendizaje de la estadística que no les permite ayudar a los compañeros y que muestra también algún desinterés de los alumnos por su enseñanza.

Ítem	Todas las titulaciones		E. Básica		Ingenierías	
	Media	Dt	Media	Dt	Media	Dt
PRE3 – Me divierto en las clase en que se explica estadística	3,42	,925	3,48	,752	3,40	1,000
PRE5 - Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas objetivamente	2,92	,911	2,80	,749	2,97	,978
PRE8 - A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido	2,96	,952	2,98	1,064	2,95	,899
PRE10 – Es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano	3,65	,852	3,78	,758	3,58	,890
PRE11 - Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana	2,89	1,109	3,20	,806	2,75	1,205
PRE14 – Me gusta la estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas	3,63	,730	3,41	,652	3,73	,747
PRE16 – Encuentro interesante el mundo de la estadística	3,60	,725	3,59	,748	3,60	,718
PRE17 – Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos	3,67	,741	3,52	,691	3,74	,757
PRE19 – La estadística es fácil	3,04	1,003	2,91	1,029	3,10	,989
PRE20 – Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas	3,87	,885	3,87	,749	3,86	,947
PRE21 – Me gusta hacer problemas cuando uso la estadística	3,32	,690	3,15	,631	3,41	,705
PRE22 – La estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas	3,65	,695	3,41	,617	3,77	,703
PRE1_neg - Me molesta la información estadística que aparece en algunos programas de T.V.	3,20	,991	3,39	1,105	3,10	,923
PRE2_neg - A través de la estadística se puede manipular la realidad	2,02	,941	2,48	1,005	1,80	,829
PRE4_neg - Utilizo poco la estadística fuera de la escuela	2,80	1,035	2,72	,886	2,83	1,102
PRE6_neg - La estadística sólo sirve para la gente de ciencias	4,38	,831	4,48	,809	4,33	,842
PRE7_neg - La estadística no sirve para nada	4,71	,566	4,74	,575	4,70	,564
PRE9_neg – Si pudiera eliminar alguna materia sería la estadística	3,85	,932	3,78	1,009	3,88	,897
PRE12_neg - En la escuela no se habría de enseñar estadística	4,37	,729	4,43	,620	4,33	,777
PRE13_neg – No entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en la prensa	3,80	,893	3,65	,822	3,88	,921
PRE15_neg – Me siento intimidado ante datos estadísticos	3,69	,908	3,57	,720	3,75	,984
PRE18_neg – En clase de estadística nunca entiendo de qué están hablando	3,58	,977	3,46	1,069	3,65	,929
PRE23_neg – Evito las informaciones estadísticas cuando las leo	3,80	,919	3,80	,833	3,79	,962

Tabla 2. Resultados totales, por grupos y por pregunta (PRE) – medias y desviaciones típicas (Dt).

Análogamente, estudiamos los estadísticos de los componentes y puntuación total para los grupos, E. Básica y Ingenierías, pero no hubo patrones distintos en cada uno de ellos y en general las actitudes de los estudiantes presentan una ligera tendencia a la positividad, como podemos deducir de los resúmenes estadísticos presentados en la Tabla 3, donde observamos que las medias obtenidas en la puntuación total y para las diferentes componentes presentan puntuaciones superiores a los valores del punto medio (correspondiente a la neutralidad), con desviaciones típicas, en general pequeñas con coeficiente de variación entre un 11% y un 14%, lo que asegura un buen grado de acuerdo en la respuesta. Al comparar las medias con el valor máximo posible, entre los componentes pedagógicos, la competencia cognitiva aparece como el factor más valorado, seguido del componente afectivo y después del comportamental ó conductual, que presenta valores inferiores. Es decir, los estudiantes consideran tener bastante capacidad para aprender la materia, pero parece que esta no les gusta y/o no les interesa demasiado y no sienten predisposición para la acción usando la estadística de una manera determinada. Para los componentes antropológicos, la competencia social aparece como el factor más valorado, seguido del componente educativo y después del

instrumental, que presentan valores inferiores. Es decir, los estudiantes valoran el papel de la estadística en el ámbito sociocultural, pero parece que, un poco contradictoriamente, no sienten tanto interés hacia la estadística y su aprendizaje, a su utilidad para el alumno y a su inclusión en el currículo y, además, realzan aun menos la utilidad de la estadística en otros campos de aplicación, como forma de razonamiento y como componente cultural.

Componente	Mínimo	Máximo	Máximo posible	Punto medio	Media	Desv. típica	Media/Máximo posible
Social	18	35	35	21	27,44	3,11	0,78
Educativo	18	38	40	24	28,46	4,07	0,71
Instrumental	17	34	40	24	24,90	3,38	0,62
Afectivo	23	48	50	30	35,08	4,80	0,70
Cognitivo	19	32	35	21	25,82	2,81	0,74
Comportamental	12	26	30	18	19,90	2,80	0,66
Puntuación total	60	102	115	69	80,81	8,57	0,70

Tabla 3. Resúmenes estadísticos.

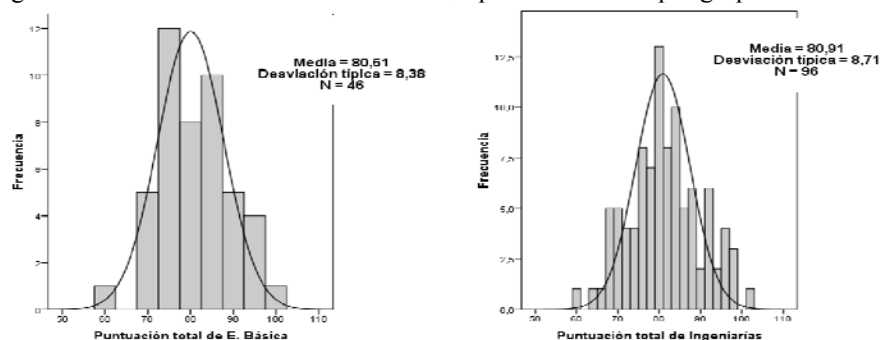
Tal como hemos hecho antes, los estadísticos de la relación entre las dimensiones antropológica y pedagógica para los grupos, E. Básica y Ingeniarias, también fueron calculados pero no hubo patrones distintos entre ellos dignos de referencia. Así, en cuanto a la relación entre las dimensiones antropológica y pedagógica, se presentan en la Tabla 4 los valores medios correspondientes, reforzando lo referido anteriormente en términos de los totales, se destaca también la relación socio-cognitiva con la media más elevada (4,5), siendo los valores más bajos las relaciones instrumental-comportamental (2,85) e instrumental-cognitiva (2,84) con medias muy próximas entre sí y que no alcanzan ni siquiera la posición de indiferencia (3).

		Componentes Antropológicos			Total
		Social	Educativo	Instrumental	
Componentes Pedagógicos	Afectivo	3,56	3,62	3,38	3,51
	Cognitivo	4,55	3,69	2,84	3,69
	Comportamental	3,83	3,27	2,85	3,32
	Total	3,92	3,56	3,11	3,51

Tabla 4. Medias para la relación entre los componentes

Finalmente las frecuencias de la puntuación total por titulación obtenida en este estudio se presentan en la Figura 2, donde se puede observar que en la mayoría de los estudiantes la puntuación total media ($\pm$ desviación típica) es superior a la que corresponde a la indiferencia (69): $80,61 \pm 8,38$ en la E. Básica y $80,91 \pm 8,71$ en las Ingeniarias (coeficiente de asimetría de -0,05 en la E. Básica y 0,106 en las Ingeniarias). Por lo tanto, tal como en el total ($80,11 \pm 8,57$, Tabla 3) los dos grupos de titulación presentan una tendencia ligeramente positiva en sus actitudes hacia la Estadística. Además, también se destaca que no hay diferencias significativas entre las distribuciones globales de los dos grupos estudiados.

Figura 2 – Distribución de la frecuencia de la puntuación total por grupo de titulación.



Conclusiones

En primer lugar queremos indicar que las actitudes en general fueron moderadas o positivas, con una puntuación promedio global ligeramente superior a la posición teórica de indiferencia y con resultados inferiores a los de Estrada (2010 a) con futuros profesores españoles y peruanos en consonancia con las diferencias de énfasis del currículo de Educación Primaria en estos países.

El tamaño de la muestra y las características del cuestionario utilizado no permiten la generalización de los resultados, ni era propósito de este estudio lograrla. Aunque de grupos distintos de aprendizaje – E. Básica (futuros profesores) e Ingenierías – nos sorprendió la similitud de resultados con la actitud moderadamente positiva tanto en puntuaciones totales como por grupos).

Dado que los cuestionarios fueron respondidos al inicio del semestre los estudiantes nos dan una visión de su formación estadística previa como una materia poco aplicada, a la vez que los ítems menos valorados la realzan como asignatura y no tanto como algo de uso cotidiano. Contradictoriamente en los ítems más valorados los estudiantes asumen como fundamental la enseñanza de la estadística en la escuela y perciben la necesidad en cualquier ámbito (ciencias o letras en cuanto a titulaciones) y para todos los ciudadanos aunque admitan algunos malos usos (por ejemplo, en la publicidad o en la política).

Finalmente como señala Batanero (1999), lo importante en la formación estadística de nuestros alumnos no son solamente los contenidos específicos, sino tratar de desarrollar en ellos una actitud favorable, unas formas de razonamiento y un interés por completar posteriormente su aprendizaje.

La formación y cambio de actitudes es un proceso largo y costoso, difícil de controlar debido precisamente a la multidimensionalidad del constructo, ahora bien, los beneficios asociados, a unas actitudes positivas, traerán como consecuencia alumnos más motivados por una educación verdaderamente global de la Estadística, destinada a formar a la persona tanto en el ámbito individual como social y nos ayudará a provocar el proceso de innovación educativa que se reclama desde diferentes ámbitos.

Agradecimientos

Trabajo apoyado por el Proyecto SEJ2010-14947/EDUC. MCYT-FEDER, PEst-OE/EGE/UI4056/2011 – projeto financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) y Centro de Matemática da UTAD (CM-UTAD).

Referencias

- Batanero, C. (1999). Cap on va l'educació estadística. *Biaix*, 15, 2-13.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7 Ed.). New York: Routledge.
- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Estrada, A. (2010). Instrumentos de medición de actitudes hacia la Estadística: la escala EAEE para profesores. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J., y Sierra, T (Eds.), XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Lleida. SEIEM. ISBN: 978-84-8409-321-3. ISSN: 1888-0762, D.L.: L-923-2010
- Estrada, A.; Bazán, J. y Aparicio, A. (2010a), Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *UNION*, 24. ISSN: 1815-0640 <http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=96>
- Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias*, 22 (2), 263-274.
- Gal, I. y Garfield J. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37–51). Voorburg: IOS, Press.
- Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.
- Manassero, M.A. y Vazquez, A. (2001). Instrumentos y métodos para la evaluación de actitudes relacionadas con la ciencia, la tecnología y la sociedad. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(1), 15-27.
- Martins, J.A., Nascimento, M.M. y Estrada, A. (2009). Estudio preliminar de las actitudes de profesores portugueses hacia la Estadística. En Cotos, T.R., Mosquero, M.A., Perez, A. (Eds.), *Actas del IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacions* (pp. 31–36). Ourense, España. ISBN: 978-84-613-6906-5.
- Martins, J., Nascimento, M. y Estrada, A. (2011). Attitudes of teachers towards statistics: a preliminary study with portuguese teachers. *Proceedings of CERME 7*. Rzeszow, Poland, 9–13 February.
- McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan y N.C.T.M
- Phillipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. In F. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing and NCTM.

“DISTINTOS NIVELES DE COMPETENCIA FORMAL EN RESOLUTORES DE PROBLEMAS DE CINEMÁTICA”

“DIFFERENT LEVELS OF FORMAL COMPETENCE IN KINEMATICS PROBLEM SOLVERS”

Matías, F., Gallardo, A.

Cinvestav, México

Resumen

En este reporte de investigación, alumnos de segundo grado de secundaria y profesores resuelven dos problemas de cinemática. Durante los procesos de resolución se advierte que la competencia formal es alcanzada por los profesores y unos pocos alumnos de este Estudio Empírico. Sin embargo, la comprensión de la situación física requiere tomar en cuenta marcos de referencia. Los sistemas de coordenadas son ignorados por todos los sujetos, poniendo al descubierto dificultades intrínsecas con los números negativos.

Abstract

In this research report, students of second year of High School and professors solve two problems in Kinematics. During the resolution process of these problems it is noticed that the formal competence is reached by professors and just a few of the students of this Empirical Study. Nevertheless, to understand the physical situation requires to take into account reference frameworks. The coordinate systems are ignored by all individuals, exposing intrinsic difficulties with negative numbers.

Palabras clave: *Cinemática, competencia formal, números negativos, resolución de problemas.*

Key words: *Kinematics, formal competence, negative numbers, problem solving.*

Hemos llevado a cabo una revisión curricular de la asignatura de Ciencias II (Física) del Plan y Programas de Estudios (SEP, 2006) impartida a estudiantes de segundo grado de secundaria. En el primer bloque de este nivel se aborda el tema **“El trabajo de Galileo: una aportación importante para la ciencia”** donde se analizan problemas relacionados con la cinemática, en particular de movimiento rectilíneo, movimiento uniformemente acelerado, caída libre y tiro vertical. Examinamos ejercicios de libros de texto de distintas editoriales, encontrando que la mayoría de éstos, sólo abarcan problemas que arrojan respuestas positivas limitando la comprensión de conceptos físicos como son: velocidad, aceleración y en particular el de la fuerza de gravedad y el signo de la misma al operarla. Así mismo, se hizo una selección de problemas que permitan encontrar resultados con número enteros y no solo “positivos” para indagar sobre los conocimientos que tienen los alumnos de la interpretación de los mismos y el significado que dan a las soluciones negativas.

Marco teórico.

Filloy, E. (1999) introdujo el concepto teórico metodológico de Modelo Teórico Local (MTL) para la observación experimental en Matemática Educativa. Este autor afirma: “El objeto de estudio se enfoca desde cuatro componentes interrelacionados: Modelos de Enseñanza, Modelos para los Procesos Cognitivos, Modelos de Competencia Formal y Modelos de Comunicación” (página 2 obra citada).

En nuestra investigación analizamos el desempeño físico-matemático puesto en juego en el proceso de enseñanza-aprendizaje por la población elegida (alumnos y profesores), a la luz del modelo de competencia formal. Filloy, afirma (...) “en el caso de la competencia formal, su necesidad parte de poder contar con una descripción de las situaciones observadas por medio de un sistema matemático de signos (SMS) más abstracto que permita descodificar todos los textos que se producen en un intercambio de mensajes en que los actores tienen diversos grados de competencia”. (...) (p. 7, obra citada).

Puig, L. (2006) analiza el sentido atribuido por Filloy al término “competencia formal” y lo relaciona con los componentes de los modelos de los procesos cognitivos y los modelos de enseñanza. Parafraseando a Filloy, Puig menciona (...) “la competencia explica y predice la conducta del sujeto epistémico, el sujeto ideal que conoce el conjunto de las matemáticas socialmente establecidas en un momento histórico determinado”. (p. 109, obra citada).

Nosotros decidimos designar como sujeto competente, no al sujeto epistémico, sino al profesor de educación básica que posee un grado mayor de competencia formal que la adquirida por sus estudiantes. Esta consideración está de acuerdo con lo manifestado por Filloy: “(...) Basta afortunadamente, con que el observador cuente con el modelo formal descrito en un sistema matemático de signos más abstracto que el utilizado por todos los sujetos observados, cuando se ve involucrado en el intercambio de mensajes, por ejemplo, en la entrevista clínica (...)” (p. 8, obra citada). Cabe señalar además, lo reconocido por Poblete, M. (2006) al respecto: “La competencia viene a ser un concepto integrador, cuya aplicación supone un cambio coperniquiano en la docencia (...). La adquisición de competencias es clave en el nuevo paradigma educativo, con el fin de lograr una transferencia de las mismas” (p. 83, obra citada). Este autor, como Ledford, G. (1995) caracteriza las competencias: (...) “Transferibles de un puesto a otro, de una actividad a otra” (...). (p. 94, obra citada).

Esta característica de la transferencia, permite en nuestra investigación considerar la competencia formal “transferida” al contexto de problemas de cinemática.

El estudio empírico.

En la etapa inicial de esta investigación hemos detectado que profesores y alumnos de secundaria, resuelven problemas de cinemática usando mecánicamente el lenguaje algebraico, posponiendo la interpretación del movimiento y sentido del mismo. Este hecho, parece evitar la comprensión del fenómeno físico.

Además los alumnos están acostumbrados a manipular datos y respuestas positivas sin dotar de sentido a los enteros, evitando su uso e interpretación. Por otra parte, no utilizan ningún tipo de representación que les permita asignar algún eje de coordenadas que advierta la situación física y el dominio numérico real de la misma.

El planteamiento del problema conduce a la siguiente pregunta de investigación:

- **¿Cómo influye el nivel de competencia en la resolución de problemas de cinemática?**

Compartimos la visión de Torigoe, Gladding (2010) en el sentido de que “hay mayor dificultad en la comprensión del fenómeno físico que en el lenguaje algebraico que modela la situación problemática real”. En la escuela tradicional sólo se enseñan fórmulas sin explicar a fondo los conceptos y los principios físicos (p. 138, obra citada). Para considerar, por ejemplo, velocidades positivas y negativas hay que definir un sistema de coordenadas, Mochón, S. (1997) afirma (...) “en un fenómeno físico se puede cambiar su descripción matemática por medio del uso de un eje de referencia diferente pero también válido”. (p.73, obra citada).

Además, hay que admitir que en la enseñanza de las matemáticas y la física existen entre otras, concepciones erróneas vinculadas a la no comprensión de la negatividad. Este hecho pudiera evitarse en parte si se tiene siempre presente la situación física real. Además en la resolución de un problema físico ayuda el no perder de vista durante el proceso de resolución el análisis dimensional. Así al obtener finalmente, por ejemplo, la velocidad de un móvil, ésta debe tener unidades de m/s. Si esto no sucede, es necesario revisar el procedimiento realizado, Encalada, N. & Gallardo, A. (2001). (p. 7, obra citada).

Los instrumentos metodológicos para esta investigación inician con un cuestionario piloto para obtener el definitivo que contiene problemas de Cinemática, en particular del Movimiento Uniformemente Acelerado, Caída Libre y Tiro Vertical. Para el diseño de estos cuestionarios se tomaron en cuenta los conocimientos previos de los alumnos y los problemas de los libros de texto de segundo grado (Ciencias II).

La investigación se realizó en una escuela secundaria pública urbana de México, D.F., con **27** estudiantes de **13** a **15** años de edad. También se analizó el desempeño académico de **5** profesores que impartían la asignatura de física, específicamente en el tema de cinemática. Se aplicaron cuestionarios a ambas poblaciones y se analizaron sus producciones escritas en el caso de dos problemas típicos de cinemática. La siguiente etapa de este Estudio Empírico consistente en análisis de Estudios de Caso, no se reporta en este artículo.

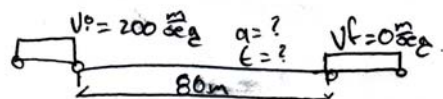
A continuación únicamente mostramos las producciones escritas de dos estudiantes y dos profesores con el fin de evidenciar sus niveles de competencia en la resolución de problemas de cinemática. Estos alumnos son de los pocos que explicitan

el proceso de resolución y concluyen con respuestas incorrectas pero interesantes para su análisis. Respecto a los dos profesores, podemos afirmar que muestran distintas maneras de procesar la información dada. Analizamos dos problemas característicos de movimiento uniformemente acelerado que involucran números enteros.

Problema 1.

Un automóvil viaja a 200 m/s, se aplican los frenos y se detiene después de recorrer 80 metros. Calcular la aceleración y el tiempo que demora en detenerse.

Solución Correcta



DATOS

$$d = 80 \text{ metros} = 80 \text{ m}$$

$$a = ?$$

$$t = ?$$

$$V_f = 0$$

$$V_i = 200 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Movimiento Uniformemente Variado

$$a = \frac{V_f - V_i}{t}$$

Como $V_f = 0$ entonces:

$$a = \frac{0 - V_i}{t} = -\frac{V_i}{t} \quad \text{--- (1)}$$

$$d = V_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{sustituyendo (1) tenemos:}$$

$$80 \text{ m} = (200 \frac{\text{m}}{\text{seg}}) t + \frac{1}{2} (-\frac{V_i}{t}) t^2$$

$$80 \text{ m} = (200 \frac{\text{m}}{\text{seg}}) t + \frac{1}{2} (-\frac{200 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{t}) t^2$$

$$80 \text{ m} = (200 \frac{\text{m}}{\text{seg}}) t - (100 \frac{\text{m}}{\text{seg}}) t$$

$$80 \text{ m} = (100 \frac{\text{m}}{\text{seg}}) t$$

$$t = \frac{80 \text{ m}}{100 \frac{\text{m}}{\text{seg}}} = 0.8 \frac{\text{seg} \cdot \text{m}}{\text{m}} = 0.8 \text{ seg}$$

Sustituyendo $t = 0.8 \text{ seg}$ en (1) tenemos:

$$a = \frac{-200 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{0.8 \text{ seg}} = -250 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$$

La aceleración es negativa pues el móvil va frenando.

Profesor 1.

Resuelto correctamente.

Inicia con un esquema y escribe los datos del problema. Asigna a cada uno su valor con la unidad de medida correspondiente. Usa la fórmula $a = (V_f - V_i) / t$ obteniendo al sustituir $a = -V_i / t \dots (1)$. Continúa con la fórmula $d = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$ sustituye los datos y en "a" coloca el valor " $-V_i/t$ " de $\dots(1)$ quedando $80 \text{ m} = (200 \text{ m/s})t + \frac{1}{2} (-V_i/t)t^2$ con sus unidades respectivas. Encuentra el valor del tiempo $t = 0.8 \text{ seg}$. Haciendo uso de $a = -V_i/t \dots(1)$ sustituye el tiempo y encuentra $a = -250 \text{ m/seg}^2$. Concluye de forma textual que la aceleración es negativa pues el móvil va frenando.

El profesor muestra tener la competencia formal necesaria para dar solución al problema. El esquema usado no permite interpretar el movimiento, porque si se analiza con cuidado se observa una discrepancia por la distancia correspondiente a la longitud del móvil, que no es tomada en cuenta de acuerdo a la posición mostrada. Es decir, al inicio considera como referencia la llanta delantera y al concluir el movimiento, toma la llanta trasera.

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 200 \text{ m/s}}{t} = -\frac{200 \text{ m/s}}{t} \quad \dots (1) \\
 x_f &= \frac{1}{2} a t^2 + v_i t + x_i \\
 80 \text{ m} &= \frac{1}{2} a t^2 + 200 \text{ m/s} t + 0 \quad \dots (2) \quad \text{Sustituye } t \text{ en } (1) \\
 80 \text{ m} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{200 \text{ m/s}}{t} \right) t^2 + 200 \text{ m/s} t \\
 80 \text{ m} &= -100 \text{ m/s} t + 200 \text{ m/s} t = 100 \text{ m/s} t \\
 t &= \frac{80 \text{ m}}{100 \text{ m/s}} = 0.8 \text{ seg} \\
 a &= -\frac{200 \text{ m/s}}{0.8 \text{ s}} \\
 a &= -250 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

Profesor 2.

Resuelve Correctamente.

Inicia con $a = (v_f - v_i)/t = -200/t \dots (1)$. Ocupa una fórmula que toma en cuenta las posiciones inicial y final del móvil: $x_f = \frac{1}{2} a t^2 + v_i t + x_i$ considerando $x_f = 80 \text{ m}$ como la distancia recorrida por el móvil para detenerse y $x_i = 0$ como inicio de frenado. Sustituye valores $80 \text{ m} = \frac{1}{2} a t^2 + 200 \text{ m/s} t + 0 \dots (2)$. Inserta (1) en (2) ya que desconoce el valor de la aceleración. Obtiene $t = 0.8 \text{ seg}$. Sustituye en $\dots (1)$ el valor del tiempo obteniendo $a = -250 \text{ m/s}^2$.

Tiene la competencia necesaria para solucionar el problema. No esquematiza. Es importante señalar que, la fórmula $x_f = \frac{1}{2} a t^2 + v_i t + x_i$ no es usada comúnmente al resolver problemas de cinemática en secundaria, incluso no aparece en los libros de texto actuales. Sin embargo es pertinente, mostrarla como un recurso más en la resolución de problemas de este tipo.

Alumno 1.

Resuelto incorrectamente.

Escribe los datos, utiliza la fórmula para movimiento rectilíneo uniforme $V = d/t$. Despeja $t = d/V$ donde $t = .4 \text{ seg}$. Continúa con la fórmula $a = (v_f - v_i) / t$ colocando los valores, resuelve y encuentra $a = -500 \text{ m/s}^2$.

Utilizando este mismo método pudo haberlo resuelto de la siguiente manera:

Iniciar con la fórmula $v_f^2 = v_i^2 + 2ad$. Como $v_f = 0$ tenemos: $0 = (200 \text{ m/seg})^2 + 2a(80 \text{ m})$. Hacer los despeje y encontrar el valor de $a = -250 \text{ m/s}$. Para terminar ocupar la fórmula $a = (v_f - v_i) / t$, y sustituir los datos con sus unidades respectivas. Despejar “t” encontrando su valor $t = 0.8 \text{ seg}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Datos:} \\
 v_i &= 200 \text{ m/s} \\
 v_f &= 0 \\
 v &= \frac{d}{t} \\
 t &= \frac{d}{v} = \frac{80}{200} = 0.4 \text{ seg} \\
 a &= \frac{(v_f - v_i)}{t} \\
 a &= \frac{(0 - 200 \text{ m/s})}{.4 \text{ seg}} \\
 a &= -\frac{200}{.4 \text{ seg}} \\
 a &= -500 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

$$V = 200 \text{ m/s}$$

$$d = 80 \text{ m}$$

$$V_i = 200 \text{ m/s}$$

$$V_f = 0 \text{ m/s}$$

$$V = d/t$$

$$V =$$

$$d = \frac{1}{2} g t^2$$

$$80 \text{ m} = \frac{1}{2} 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$t = \sqrt{16.30}$$

$$t = 4.0385 \text{ seg.}$$

$$a = \frac{V_f - V_i}{t}$$

$$a = \frac{0 - 200 \text{ m/s}}{4.0385}$$

$$a = -49.52 \text{ m/s}^2$$

Alumno 2.

Resuelto Incorrectamente.

Indica los datos $V = 200 \text{ m/s}$ y $d = 80 \text{ m}$. Escribe $V_i = 200 \text{ m/s}$ y $V_f = 0 \text{ m/s}$. Dibuja una recta acotada que indica la distancia del frenado 80 m . Usa la fórmula $d = \frac{1}{2} g t^2$ para caída libre. Sustituye los datos y encuentra $t = 4.0385 \text{ seg.}$ Ocupa la fórmula $a = (V_f - V_i)/t$ sustituye valores y obtiene: $a = -49.52 \text{ m/s}^2$.

Utilizando este mismo método pudo haberlo resuelto de la siguiente manera:

Iniciar con la fórmula $V_f^2 = V_i^2 + 2ad$, dado que $V_f = 0$ tenemos: $0 = (200 \text{ m/seg})^2 + 2a(80\text{m})$. Hacer los despeje y encontrar el valor de $a = -250 \text{ m/s}$. Terminar con la fórmula $a = (V_f - V_i) / t$, sustituir los datos con sus unidades respectivas, despejar “t” encontrando su valor $t = 0.8 \text{ seg.}$

Este resultado ($t = 4.0385$) muestra lo que manifiesta Mochón, S. (1997). (...) “sobre la obsesión de los estudiantes mexicanos por encontrar respuestas exactas y no conformarse con soluciones aproximadas o estimaciones” (...). (p. 76, obra citada).

Problema 2.

Un globo aerostático se eleva verticalmente con una velocidad constante de 5 m/s . Cuando éste se encuentra a 30 metros del piso se deja caer una piedra. ¿Con qué velocidad y después de cuántos segundos caerá la piedra al piso?

Para este problema estamos de acuerdo con (Peduzzi, L.O.Q. y Zilberztajn, A. (1997)) que afirman: “Muchos estudiantes, incluso universitarios, al plantearse este problema consideran que el saco de arena inmediatamente después de dejar el globo tiene un movimiento descendiente en relación con el suelo. (...) el error, como se sabe, está en la no consideración de la velocidad que el objeto posee cuando abandona el respectivo sistema en movimiento: por compartir la misma velocidad del globo después de dejarse caer, el costal de arena sube un poco hasta que su velocidad se hace nula para después caer” (...). (p. 351, obra citada). Debemos aclarar que en nuestro problema es una piedra lo que se deja caer en lugar de un saco de arena.

Profesor 1.

Solución incorrecta.

Inicia con un esquema del movimiento, colocando los datos en el mismo, asignando a cada variable su valor, y a las desconocidas el signo de interrogación. Indica que la V_i piedra = 0 m/seg y para la gravedad $g = 9.81$ m/seg², después coloca la fórmula $V_f^2 = 2gh$, sustituye valores, opera y obtiene $V_f = 24.26$ m/seg. Continúa con la fórmula $V_f = gt$, despeja el tiempo y encuentra $t = 2.47$ seg.

Olvida que por compartir la misma velocidad del globo, después de dejarse caer, la piedra sube un poco hasta que su velocidad se hace nula para después caer. Lo resuelve como si a los 30 m. de altura el globo se hubiese detenido, solo así: $V_i = 0$ m/s.

El profesor muestra una competencia suficiente para dar solución al problema. Sin embargo no tiene la interpretación total del movimiento, hecho que origina el error mostrado. Elabora un esquema que no corresponde a ejes de coordenadas del movimiento.

$2 V = 5 \frac{m}{seg}$
 30 m
 PIEDRA
 $V_i = 0$
 $t = ?$
 $V_f = ?$

$V_{i \text{ piedra}} = 0 \frac{m}{seg}$
 $t = ?$
 $V_f = ?$
 $g = 9.81 \frac{m}{seg^2}$
 $V_f^2 = 2gh$
 $V_f^2 = 2(9.81 \frac{m}{seg^2})(30m)$
 $V_f^2 = 588.60 \frac{m^2}{seg^2}$
 $V_f = \sqrt{588.60 \frac{m^2}{seg^2}} = 24.26 \frac{m}{seg}$
 $V_f = 24.26 \frac{m}{seg}$
 $V_f = gt$
 $t = \frac{V_f}{g} = \frac{24.26 \frac{m}{seg}}{9.81 \frac{m}{seg^2}}$
 $t = 2.47 \frac{mseg^2}{mseg^2}$
 $t = 2.47 seg$

$\downarrow -$
 $\uparrow +$

$X_f = \frac{1}{2}at^2 + v_i t + X_i$
 $0 = \frac{1}{2}(-10 \frac{m}{s^2})t^2 + 5 \frac{m}{s} t + 30 m$
 $0 = -5 \frac{m}{s^2} t^2 + 5 \frac{m}{s} t + 30 m$
 Resolviendo la ec. cuadrática
 $t_1 = 3 \text{ seg}$ $t_2 = -2 \text{ seg}$
 físicamente posible
 $a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{v_f - 5 \frac{m}{s}}{3 \text{ seg}} = -10 \frac{m}{s^2}$
 $v_f = (-10 \frac{m}{s^2}) 3 \text{ seg} + 5 \frac{m}{s} = -30 \frac{m}{s} + 5 \frac{m}{s} = -25 \frac{m}{s}$

$a = g \approx 10 \frac{m}{s^2} \downarrow$
 Por fórmula genl.
 $-5t^2 + 5t + 30 = 0$
 $t^2 - t - 6 = 0$
 para factorizar.

Profesor 2.**Solución correcta.**

Comienza indicando una convención de signos para el sentido del movimiento: abajo negativo, arriba positivo. Trabaja la fórmula con las posiciones inicial y final del movimiento $X_f = \frac{1}{2}at^2 + V_i t + X_i$, tomando $X_f = 0$, aceleración $g = -10 \text{ m/s}^2$ $V_i = 5 \text{ m/s}$ y $X_i = 30 \text{ m}$. Sustituye, opera y obtiene: $0 = -5 \text{ m/s}^2 t^2 + 5 \text{ m/s} t + 30 \text{ m}$. Sugiere resolver la ecuación por fórmula general ó usando el (-5) como factor común $t^2 - t - 6 = 0$ para factorizar por binomios con término común y obtiene $t_1 = 3 \text{ seg}$ escribiendo que es físicamente posible. También obtiene $t_2 = -2 \text{ seg}$ pero este dato no lo ocupa. Con t_1 usa la fórmula $a = (V_f - V_i)/t$, sustituye y despeja $V_f = (-10 \text{ m/s}^2) 3 \text{ seg} + 5 \text{ m/s} = -30 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s} = -25 \text{ m/s}$. El profesor muestra competencia formal utilizando el álgebra fluidamente. Es el único que obtiene una solución negativa a causa de la convención tomada inicialmente.

Datos:
 $V = \text{cte.}$
 $h = 30 \text{ cm}$
 $V = 5 \text{ m/s}$

$V_f^2 = V_i^2 + 2gh$
 $V_f = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(30 \text{ m})}$
 $V_f = \sqrt{588.6 \frac{m^2}{s^2}}$
 $V_f = 24.26 \text{ m/s}$

$V_i = 0$
 $t = \frac{V_f - V_i}{g}$
 $t = \frac{24.26 \text{ m/s} - 0}{9.81 \text{ m/s}^2}$
 $t = 2.472 \text{ seg.}$

Alumno 1

Respuesta incorrecta.

Inicia con $V_f^2 = 2gh$ usando como valor de la gravedad 9.81 m/s . (Debió escribir m/s^2). Resuelve y obtiene $V_f = 24.26 \text{ m/s}$. Su proceder indica que toma $V_i = 0$ y usa la fórmula $t = (V_f - V_i)/g$ arribando al valor del tiempo $t = 2.472 \text{ seg}$.

Utilizando este mismo método pudo haberlo resuelto de la siguiente manera:

Indicar que la $V_i = 5 \text{ m/seg}$ y para la gravedad el valor de $g = 10 \text{ m/seg}^2$. (Se redondea la aceleración para facilitar los cálculos numéricos). Usar la fórmula $V_f^2 = 2gh$, sustituir, operar y obtener $V_f = 25 \text{ m/seg}$. Seguir con la fórmula $V_f = gt$, despejar el tiempo, sustituir los valores y encontrar $t = 3 \text{ seg}$.

Alumno 2.

Solución Incorrecta.

Inicia con $h = 30 \text{ m}$. $V_i = 5 \text{ m/s}$. $V_f = 0$ $g = 10 \text{ m/s}^2$. Usa equivocadamente $t = (V_f - V_i) / g$. Toma el dato de $h = 30 \text{ m}$ como $V_f = 30 \text{ m/s}$ obteniendo $t = 2.5 \text{ seg}$. Considera de forma errónea el movimiento uniforme. Ocupa la fórmula $V = d/t$ en la cual retoma $h = d = 30 \text{ m}$ y obtiene $V = 12 \text{ m/s}$.

Utilizando el mismo método pudo haberlo resuelto de la siguiente manera:

Indicar que la $V_i = 5 \text{ m/seg}$ y para la gravedad el valor de $g = 10 \text{ m/seg}^2$, usar la fórmula $V_f^2 = 2gh$, sustituir, operar y obtener $V_f = 25 \text{ m/seg}$. Seguir con la fórmula $V_f = gt$, despejar el tiempo, sustituir los valores y encontrar $t = 3 \text{ seg}$.

$$\begin{aligned} \text{Datos:} \\ h &= 30 \text{ m.} \\ V_i &= 5 \text{ m/s} \\ V_f &= 0 \\ g &= 10 \text{ m/s}^2 \\ t &= \frac{(V_f - V_i)}{g} \\ t &= \frac{(30 \text{ m} - 5 \text{ m/s})}{10 \text{ m/s}^2} \\ t &= \frac{25 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} \\ t &= 2.5 \text{ seg.} \\ V &= \frac{d}{t} \\ V &= \frac{30 \text{ m}}{2.5 \text{ seg}} \\ V &= 12 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Reflexiones finales.

De la primera etapa de nuestra investigación, referente al desempeño académico de dos estudiantes y dos profesores reportados en este artículo, se desprenden las siguientes conclusiones:

El nivel mayor de competencia formal en los problemas de cinemática propuestos, lo obtuvo el profesor 2, pues transfirió este nivel de competencia a la comprensión correcta del movimiento del segundo problema ya que consideró que la piedra inicia su trayectoria con una Velocidad Inicial de 5 m/s .

Ambos profesores manifestaron tener un grado mayor de competencia formal que la adquirida por los estudiantes pues sus procesos de resolución fueron matemáticamente correctos, a diferencia de los estudiantes que arribaron a respuestas fallidas.

Ninguno de los sujetos utiliza representación gráfica para describir el movimiento del problema que le permitiría reconocer y manipular correctamente los datos involucrados, así como la elección adecuada de la fórmula algebraica. Los únicos lenguajes usados por los estudiantes son el aritmético y el algebraico. Los profesores recurren al uso de los signos en lugar de referirse a magnitudes signadas que en el nivel superior serían consideradas como magnitudes vectoriales. Dado el hecho de que las dificultades en estos problemas se encuentran en la relatividad del tiempo y el espacio donde los fenómenos físicos ocurren, es necesario definir los objetos dados y los puntos de referencia de su movimiento o el intervalo del tiempo en que tienen lugar. Nótese que es importante advertir el sistema de referencia utilizado. Otro problema surgido en la enseñanza es la omisión del análisis dimensional.

Las unidades de medidas asociadas a las magnitudes deben tenerse en mente durante el proceso de resolución. Esta consideración ayudaría a verificar si la respuesta es correcta y arrojaría luz sobre los posibles errores en la asignación de fórmulas y en las operaciones llevadas a cabo con las magnitudes correspondientes. Como afirman

Saavedra, G. Gallardo, A. (2011). (...) “Los alumnos no resuelven problemas de cinemática utilizando álgebra porque no entienden entre otros los conceptos de velocidad y aceleración como razones de cambio ni como cantidades relativas a los número positivos y negativos. Afrontan los problemas que describen el movimiento generalmente con acercamientos aritméticos o gráficos”. (p. 368, obra citada).

Del análisis anterior se desprendió la necesidad de realizar entrevistas video grabadas individuales con fase de enseñanza, en la segunda etapa de la investigación, a fin que los estudiantes puedan identificar los paradigmas físicos y los sistemas de referencia involucrados en problemas.

Apoyándonos en las idea de Freudenthal, H. (1983), el modelo de enseñanza utilizado en esta segunda etapa, pretenderá que los alumnos logren mayor competencia al concebir los conceptos físicos como medio de organización de los fenómenos del mundo real. Dentro del marco de los modelos teóricos locales (MTL), un modelo de enseñanza se define como una secuencia de textos donde el intercambio de mensajes entre profesores y alumnos, produce conceptos nuevos a través de la producción de nuevos sentidos. Este punto de vista semiótico precisa tener presente a sus tres personajes fundamentales, al profesor, al alumno y al contenido físico-matemático en cuestión.

Esperamos que la enseñanza durante la entrevista les permita en la mayoría de los casos arribar a la solución correcta del fenómeno involucrado haciendo ver el hecho de usar primero tablas y gráficas así como posteriormente introducir el lenguaje algebraico. Ello conducirá a la identificación desde un principio de los distintos sistemas de referencia y a concebir una visión inercial del movimiento. En algunos casos será necesaria una reformulación de conceptos tanto físicos como matemáticos, indispensables ambos para comprender la situación real. Además, la enseñanza que toma en consideración los procesos cognitivos de los estudiantes y sus niveles de competencia mostrados en situación de entrevista, conlleva al desarrollo de rutas didácticas para la enseñanza en el aula de las matemáticas y la física escolares. Profesores y alumnos, deben aprender el uso correcto de unidades en las distintas variables involucradas en el proceso y solución del problema. Es importante señalar que la convención de los signos más y menos en fórmulas, implícitamente contiene un sistema de referencia cartesiano que no siempre es mencionado a los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Encalada, N. & Gallardo, A. (2001). *Difficulties with negative solutions in kinematics problems*. En Proceedings of the 25th Conference, vol. 3 pp. 1-9.
- Eugene, T. & Gary, E. (2011). *Connecting symbolic difficulties with failure in physics*. Physics Education Research Section. Vol. 79 pp. 133-140
- Filloy, E. y colaboradores: Rojano T., y Puig L. Rubio G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Gallardo, A., & Saavedra, G. (2011). Significado de los números negativos fraccionarios en estudiantes de secundaria. En M. Marin, G. Fernández, L.J. Blanco & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 361-369). Ciudad Real: SEIEM.

- Ledford, G. (1995). *The design of Skill-based pay plans*. London: Sage.
- Mochón, S. (1997). ¿Qué signo tiene realmente la “g”? el significado y la enseñanza del signo negativo en la física. *Educación Matemática*, Vol. 9, Núm. 3, pp. 64-76.
- Pedduzzi, L.O.Q. y Zylbersztajn, A. (1997). La física de la fuerza impresa y sus implicaciones para la enseñanza de la mecánica. *Enseñanza de las Ciencias*. 15 (3), 351-359.
- Poblete, M. (2006). Las competencias, instrumento para un cambio de paradigma. P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 83-106). Huesca: SEIEM.
- Puig, L. (2006). Sentido y Elaboración del Componente de Competencia de los Modelos Teóricos Locales en Investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos Matemáticos Específicos. P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 107-126). Huesca: SEIEM.

ELABORACIÓN Y APLICACIÓN DE UN INSTRUMENTO PARA MEDIR EXPERIENCIAS DE FLUJO¹

DEVELOPMENT OF AN INSTRUMENT TO MEASURE FLOW EXPERIENCES

Montoro, A.B., Gil, F.

Universidad de Almería

Resumen

Varios estudios muestran la relación entre experiencias de flujo (estados de máxima concentración y disfrute) y la motivación que origina la actividad que lo produce. En este trabajo presentamos el diseño y validación de un cuestionario cerrado que permite identificar experiencias de flujo durante la realización de actividades matemáticas. Tras su aplicación y el análisis de los datos obtenidos, hemos adaptado el concepto de flujo para el caso particular del trabajo en grupo con actividades matemáticas en una clase común de futuros Maestros. En este contexto, las experiencias de flujo se ven caracterizadas por el interés, la utilidad, la concentración y el disfrute producido por la tarea.

Abstract

Several investigations show the relationship between flow experiences (states of deep concentration and enjoyment) and the motivation caused by the activity that produces it. This paper describes the development and validation of a closed questionnaire that allows identifying flow experiences while carrying out mathematics activities. Data analyses allow us to adapt the flow concept for a particular situation: Pre-service teacher working in groups with mathematics activities. In this context, flow experiences are characterized by interest, usefulness, concentration and enjoyment produced by the activity.

Palabras clave: *Experiencia de flujo, cuestionarios, motivación en matemáticas, educación matemática, experiencias de aprendizaje.*

Key words: *Flow experience, questionnaires, mathematics motivation, mathematics education, learning experiences.*

¹ Financiado por la Consejería de Economía, Innovación y Ciencia de la Junta de Andalucía, España, a través del Programa “Formación de personal docente e investigador predoctoral en las Universidades Andaluzas, en áreas de conocimiento deficitarias por necesidades docentes (FPDU 2009)”. Dicho programa está cofinanciado por la Unión Europea a través del programa European Regional Development Fund (ERDF).

Introducción

Investigadores y educadores están de acuerdo en la importancia de la motivación en el aprendizaje, ya que regula la dirección e intensidad de la conducta. En concreto, cuando los motivos por los que se realiza una actividad son internos a ella (curiosidad, interés, disfrute), la atención está centrada en la actividad y la duración de la conducta es mayor.

La teoría de flujo surgió del interés por conocer qué experimenta el ser humano cuando se implica en actividades por puro placer y sus causas. En este sentido, aunque surgió en el entorno de artistas que pasaban numerosas horas pintando y esculpiendo con gran concentración, se ha aplicado en contextos laborales y escolares.

Este hecho está motivado por la influencia de los estados de flujo en el rendimiento académico (Larson, 1998) y el compromiso con la actividad que lo produce (Whalen, 1998; Hektner y Csikszentmihalyi, 1996).

Características del flujo

En entrevistas, en las que se pedía reflexionar sobre sus experiencias óptimas o de flujo, los sujetos destacaban estar tan concentrados en la tarea que estaban realizando que se aislaban de lo que sucedía a su alrededor, perdiendo en ocasiones la noción del tiempo. Además, percibían la actividad como un desafío que podían lograr, sentían control sobre sus habilidades y la actividad, en la cual las metas estaban claramente establecidas, y sabían en todo momento lo cerca que estaban de alcanzar su propósito. Por otra parte, percibían una sensación de actuación sin esfuerzo, aunque objetivamente la actividad requiriera de un gran esfuerzo físico o mental. Todo ello hace que la persona disfrute con la actividad y desee repetirla (Csikszentmihalyi y Csikszentmihalyi, 1998).

Medición del flujo

Si analizamos la forma de hacer operativos los estados de flujo encontramos, por un lado, autores que miden el flujo a través de cuestionarios cerrados formados por ítems para cada una de las características del flujo (González-Cutre, 2008; Heine, 1997) o algún subconjunto de ellas² (Egbert, 2003; Ainley, Enger y Kennedy, 2008; Rodríguez, 2009); y por otro, autores que miden el flujo a través de la combinación del Método de Muestreo de la Experiencia (MME) y el Modelo de los Cuadrantes de flujo (Hektner y Csikszentmihalyi, 1996; Schweinle, Turner y Meyer, 2002, 2006, 2008), que lo miden a través del nivel de desafío y habilidad percibido.

Sin embargo, algunas investigaciones muestran que el Modelo de los Cuadrantes de flujo, diseñado a partir de los datos obtenidos con el MME durante la realización de actividades cotidianas o en clases con estudiantes altamente capacitados, no se adapta bien en clases obligatorias con estudiantes que tienen habilidades en torno a la media (Wigfield y Eccles, 2001; Schweinle, Turner y Meyer, 2002).

Propósito de la investigación

Esta investigación muestra el diseño un cuestionario que permite saber si una persona experimenta flujo con una actividad específica (justo al concluirla) y algunas características que influyen en su aparición y los resultados de su aplicación en una muestra de estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria.

² Argumentan que el resto son aspectos que facilitan la experiencia

Diseño del cuestionario

Elección de variables

Al analizar las variables utilizadas para identificar experiencias de flujo, tanto en investigaciones puramente metodológicas como en las realizadas en entornos escolares y laborales, encontramos que:

La *concentración profunda* es la principal característica de los estados de flujo. Ha sido utilizada explícitamente en todas las investigaciones relacionadas con los estados de flujo (Egbert, 2003; Shernoff, Csikszentmihalyi, Schneider y Shernoff, 2003; Ainley, Enger y Kennedy, 2008; Rodríguez, 2009).

El *disfrute* es la característica que hace que las experiencias de flujo sean tan motivadoras y la persona quiera repetir la actividad. Durante la actividad, la persona está tan concentrada en lo que está haciendo que no piensa en nada más, por lo que no es consciente de lo bien que lo está pasando hasta que finaliza la actividad. Por ello, sólo es utilizado para identificar estados de flujo explícitamente por algunos investigadores (Whalen, 1998; Egbert, 2003; Smith, 2005; Rodríguez, 2009).

No obstante, concentración y disfrute son utilizados de manera implícita en las investigaciones que utilizan el MME.

La *pérdida de la noción de tiempo*, aunque puede ser considerada como una consecuencia de la concentración profunda y del disfrute, ha sido muy utilizada ya que los sujetos la identifican fácilmente (Whalen, 1998; Ainley, Enger y Kennedy, 2005; Rodríguez, 2009).

Aunque algunos autores introducen el *interés* por la actividad entre sus ítems (Whalen 1998; Shernoff et al., 2003; Smith, 2005), las entrevistas de Csikszentmihalyi no lo reflejaron como característica de flujo, por lo que fue considerada como un facilitador o una consecuencia de dicha experiencia (Egbert, 2003; Ainley, Enger y Kennedy, 2005; Rodríguez, 2009). De hecho, Rodríguez (2009) muestra como el constructo formado por la concentración profunda y el disfrute se adapta mucho mejor a los datos que el formado por estos dos factores y el interés intrínseco. No obstante, hay que tener en cuenta que el interés es un constructo muy relacionado con el disfrute.

El *equilibrio desafío-habilidad*, la *retroalimentación inmediata* y la *claridad de metas* fueron tres de las variables utilizadas para medir el flujo por algunos autores (Whalen, 1998; Egbert, 2003; Schweinle, Turner y Meyer, 2006). Sin embargo, se ha visto que se trata de aspectos necesarios para fluir (Nakamura y Csikszentmihalyi, 2002) o que facilitan su aparición (Montoro y Gil, 2011).

Otro aspecto determinante a la hora de explicar y predecir estados de flujo es la *importancia, utilidad o relevancia* de la tarea (Schweinle, Turner y Meyer, 2002, 2006, 2008; Shernoff et al., 2003), que se encuentra contemplada dentro de los ítems del MME.

Este análisis nos llevó a considerar las variables concentración profunda, pérdida de la noción del tiempo y el disfrute como indicadores de la experiencia de flujo. En contraste, consideramos las variables interés, equilibrio entre habilidad y reto, retroalimentación inmediata, claridad de metas y la utilidad de la tarea como facilitadores de dicha experiencia.

Estructura del cuestionario

El primer diseño del cuestionario está formado por 4 ítems para cada una de las ocho variables descritas en el apartado anterior: dos enunciados con significado positivo y dos con significado negativo, formulados en afirmativo y en negativo. Por ejemplo, para la variable concentración profunda se utilizaron “Mi atención estaba totalmente centrada en la actividad”, “No me ha costado concentrarme en la actividad”, “Mi concentración era interrumpida por cualquier cosa” y “No conseguía centrarme en la actividad”. En sus respuestas, los sujetos deben señalar el nivel de acuerdo con las afirmaciones reflejadas en los ítems, en una escala de valoración de cinco puntos.

Esta redacción se realizó a partir de la traducción al castellano de los ítems utilizados en las investigaciones mencionadas en el apartado anterior y su adaptación para hacer referencia a la actividad concreta que se estaba llevando a cabo. Por otro lado, se introdujeron ítems opuestos para identificar casos de sujetos que contestan aleatoriamente.

Dicho cuestionario fue revisado por dos expertos y pilotado en varias sesiones de clase con estudiantes de la Diplomatura de Maestro de Primaria, a los que se les pidió evaluar la actividad realizada en clase ese día, cómo consideraban la actividad y cómo se habían sentido. Ante todo pedimos sinceridad en las respuestas e indicar si tenían problemas o dificultades para comprender algún ítem. La información recogida permitió mejorar la versión anterior.

Tras el pilotaje se decidió: dejar sólo dos ítems para cada variable (uno positivo y otro negativo) para eliminar las dificultades o incoherencias en las respuestas de los participantes producidas por enunciados con doble negación; modificar la redacción de los ítems referidos al establecimiento de metas claras para evitar confundirlo con la retroalimentación recibida (segunda versión); e introducir dos ítems para distinguir el nivel de desafío percibido con la tarea de su nivel de dificultad. Después de estas modificaciones se volvió a pilotar en una muestra de Maestro de Educación Física y no se detectaron contradicciones, lo que nos llevó a considerar esta versión como definitiva. La tabla 1 contiene los ítems que configuran este cuestionario.

Posteriormente, se procedió a la administración a todos los alumnos asistentes (230) a la asignatura de “Enseñanza y aprendizaje de la geometría y la medida en educación primaria”, impartida en el 2º curso del Grado de Maestro de Primaria. Dicha asignatura supone su primer acercamiento a las matemáticas y su didáctica en la Universidad. A continuación se muestran los resultados del análisis de los datos obtenidos tras su aplicación en dos sesiones de trabajo en grupo (de cuatro o cinco personas), la primera dedicada a comparación de objetos según distintas magnitudes y la segunda a la medición del cuerpo humano.

Resultados

Validez y Fiabilidad

Para estudiar la consistencia interna del instrumento se calculó el coeficiente alfa de Cronbach, obteniendo un valor de 0.729, por lo que podemos afirmar que el cuestionario es fiable. Por otra parte, la validez de constructo se deriva de la revisión de la literatura realizada (y expuesta en el apartado Elección de variables), el análisis de contenido de las respuestas y análisis factorial que se muestra a continuación.

Estructura factorial

Con el fin de analizar la estructura interna de los 18 ítems de nuestro cuestionario se procedió al análisis factorial. No obstante, se calculó previamente el índice de adecuación muestral KMO (Kaiser-Meyer-Olkin), que en nuestro caso fue de 0.797, por lo que resulta adecuada la realización del análisis factorial.

El análisis factorial se realizó siguiendo el método de extracción de análisis de componentes principales. Este análisis nos mostró la aparición de 6 factores, que explican el 61.74% de la varianza de los datos.

Como podemos observar en la tabla 1, los ítems correspondientes a las variables disfrute, pérdida de la noción del tiempo, interés y utilidad presentan una carga sobre el factor mayor al 0.5, obteniendo, para cada variable, un valor superior en el ítem positivo que en el negativo. En el caso de la concentración, esta diferencia se hace mayor, 0.619 y 0.440, respectivamente. Por otro lado, las variables referidas a la retroalimentación y el establecimiento de metas claras suponen una carga de entre 0.3 y 0.5. En contraste, prácticamente todos los ítems relacionados con el nivel de desafío y dificultad de la actividad suponen una carga inferior al 0.15, salvo el ítem positivo del desafío que supone 0.222. Estos hechos nos llevan a afirmar que no aparece un factor general.

Tabla 1

Factores Implicados en la Experiencia de Flujo

Ítems	Factores						
	Primer factor (previo a la rotación)	1	2	3	4	5	6
Mi atención estaba totalmente centrada en la actividad	0.619	0.551					-0.624
Mi concentración era interrumpida por cualquier cosa	-0.440			0.309			0.787
Se me ha pasado el tiempo volando con esta actividad	0.679	0.656					
La actividad se me ha hecho eterna	-0.515			0.694			
Me he divertido con la actividad	0.686	0.748					
Me he aburrido con la actividad	-0.593			0.650			
La actividad me ha supuesto un reto	0.222		0.663				
La actividad no me ha supuesto un desafío	-0.022		-0.662				-0.330
La actividad era complicada	-0.134		0.671				
La actividad era fácil	-0.060		-0.746				
Sabía claramente lo que pedía la actividad	0.393				-0.812		
Estaba confuso sobre lo que pedía la actividad	-0.406				0.824		
He podido confirmar si lo estaba haciendo bien o mal	0.386					-0.842	
Tengo dudas sobre si lo he hecho bien o mal	-0.406				0.333	0.631	
La actividad me ha interesado	0.637	0.782					
La actividad me ha parecido un rollo	-0.554			0.671			
La actividad es útil para mi formación	0.569	0.647					
Con esta actividad no he aprendido nada	-0.524			0.443		0.455	
Varianza explicada (%)	23.004	15.025	11.091	11.063	9.065	8.159	7.342

Para una mejor claridad en la interpretación de dichos factores, realizamos una rotación de componentes utilizando el método Varimax con Kaiser.

El primer factor está compuesto únicamente por ítems positivos. Concretamente, el interés y el disfrute presentan una carga superior al 0.7; la pérdida de la noción del tiempo y la utilidad de la actividad, alrededor del 0.65 y la concentración profunda el 0.551. Está cargado de valoraciones positivas hacia la actividad y la concentración en la tarea, por lo que identifica si los sujetos han experimentado flujo con la actividad. Denominamos al factor 1: Experiencia de flujo.

El segundo factor recoge dos variables: desafío y complejidad de la actividad, con una carga entre 0.65 y 0.75. Estos aspectos están íntimamente relacionados entre sí. Por norma general, un sujeto se siente desafiado por actividades relativamente complejas para nosotros, pero no inalcanzables; mientras que si se consideran fáciles, no producen desafíos. El nivel de dificultad de una tarea depende de las habilidades del sujeto, por lo que es subjetivo. Denominación del factor 2: Desafío y complejidad de la tarea.

El tercer factor está compuesto por los ítems negativos de las variables contenidas en el primer factor. Las variables referidas al disfrute e interés presentan una carga superior a 0.65 sobre el factor, mientras que la utilidad y la concentración cargan únicamente con un 0.443 y 0.309, respectivamente. Denominamos al factor 3: Ausencia de interés y disfrute.

El cuarto factor lo componen los ítems correspondientes a la claridad de metas y el ítem negativo de la retroalimentación. La claridad de metas tiene una carga negativa muy superior a la retroalimentación, 0.82 y 0.33, respectivamente. Esto puede ser debido a que, la ambigüedad del objetivo de la tarea produce una sensación de no saber si se ha conseguido lo que se pretendía. Denominación del factor 4: Ausencia de metas claras.

El quinto factor está formado por los ítems de la variable retroalimentación y el ítem negativo de la utilidad de la tarea. Los ítems de la primera presentan una carga negativa superior en el factor (0.631 y -0.842) que el ítem de la segunda (0.455). La ausencia de información acerca de la adecuación del procedimiento utilizado para resolver la tarea hace que los estudiantes consideren esta tarea como poco útil. Denominación del factor 5: Ausencia de retroalimentación.

La variable principal dentro del último factor es la concentración, ya que sus ítems presentan una carga negativa superior al 0.6. Además, la variable desafío aparece ligada a este factor, con una carga del 0.333. Esto podría indicar la existencia de una relación entre el nivel de desafío y la concentración en la tarea. Denominamos al factor 6: Ausencia de concentración.

En síntesis, encontramos que el factor 2, denominado “Desafío y complejidad de la tarea”, tiene una correlación débil con el resto. Ello explica que en algunas circunstancias la complejidad y el nivel de desafío de la tarea favorecen la aparición del flujo y en otras lo dificulta.

Si observamos los factores 1, 3 y 6, vemos que están constituidos por los ítems de las variables concentración, pérdida de la noción del tiempo, disfrute, interés y utilidad. Así, mientras que el primer factor contiene los ítems positivos de todas estas variables, el factor 3 está formado por los ítems negativos del factor 1 y el 6 está formado por los ítems correspondientes a la concentración. Esto nos lleva a pensar que la “Experiencia de flujo” está formada por la concentración y el interés y disfrute con la actividad. Por lo que, la ausencia de alguno de estos aspectos nos informa de que el sujeto no ha experimentado flujo.

Si observamos el primer factor, antes de realizar la rotación, vemos que las cargas correspondientes a los ítems de los factores 1, 3 y 6 son altas mientras que las de los ítems de los factores 4 y 5 son medias. Esto sugiere que son aspectos externos a la experiencia, que influyen en su aparición. En este sentido, consideramos que la ausencia de metas claras al comienzo de la actividad (Factor 4) y la falta de retroalimentación inmediata (Factor 5) obstaculizan la aparición del flujo (Figura 1).

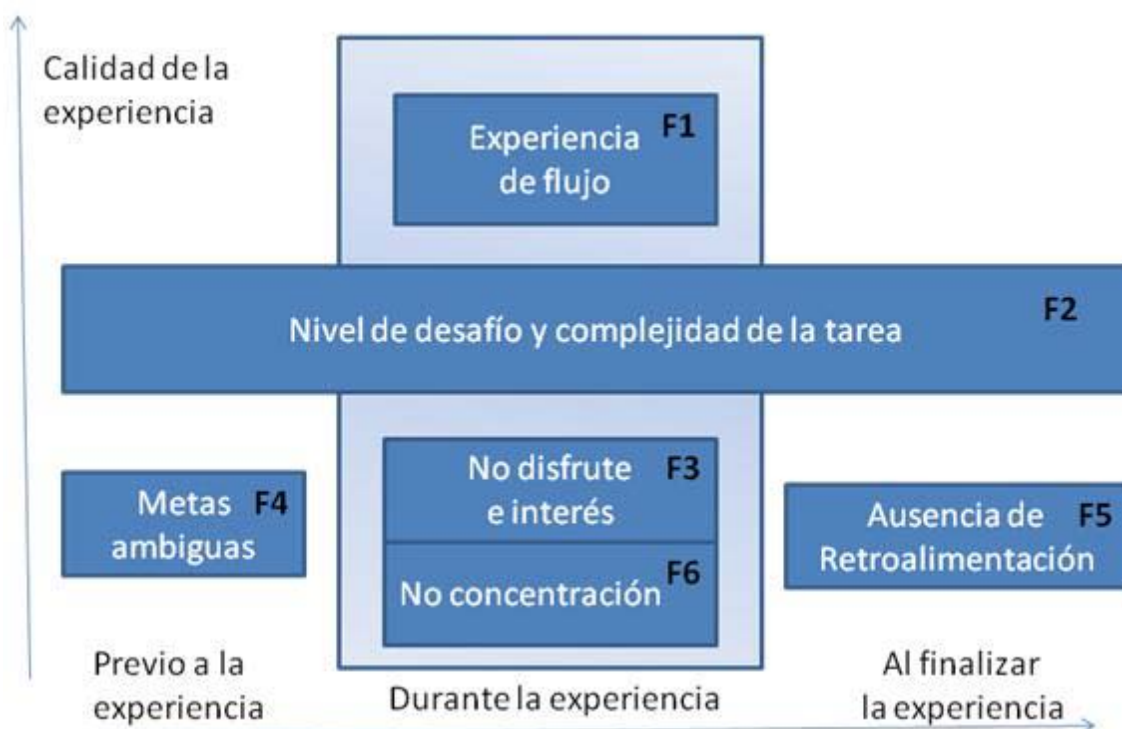


Figura 1: Relación entre los factores

Conclusión y posibles vías de continuación

Las primeras investigaciones en entornos escolares se centraron en programas con niños con altas capacidades (Heine, 1997; Whalen, 1998), situación en la que el Modelo de los Cuadrantes de Flujo se adaptaba perfectamente.

En cambio, Schweinle, Turner y Meyer (2002) y Wigfield y Eccles (2001) mostraron que los estudiantes con baja autoestima no se sienten atraídos por actividades desafiantes y prefieren actividades que dominan. Lo cual invalida el Modelo de los Cuadrantes de Flujo para estudiar la motivación con este tipo de estudiantes.

El presente trabajo muestra el diseño y validación de un instrumento que permite determinar si un estudiante, sin especial talento matemático, experimenta flujo durante la realización de una actividad matemática de aula.

Los hechos anteriormente expuestos y el análisis de nuestros datos, obtenidos con estudiantes con habilidades medias en matemáticas, nos ha hecho readaptar el concepto de flujo. En concreto, las componentes fundamentales para definir la experiencia de flujo en estos contextos son concentración profunda, pérdida de la noción del tiempo, disfrute e interés.

Futuras investigaciones podrían centrarse en el análisis de las características de las actividades matemáticas que influyen en la aparición del flujo utilizando este cuestionario, tanto para trabajo en grupo como otras formas de trabajo.

Referencias

- Ainley, M., Enger, L., y Kennedy, G. (2008). The elusive experience of “flow”: Qualitative and quantitative indicators. *International Journal of Educational Research*, 47, 109-121.
- Csikszentmihalyi, M., y Csikszentmihalyi, I.S. (1998). *Experiencia óptima: Estudios Psicológicos del Flujo en la Conciencia* (J. Aldekoa. Trad.). Bilbao: Desclée de Brouwer. (Trabajo original publicado en 1998).
- Egbert, J. (2003). A study of flow theory in the foreign language classroom. *The modern Language Journal*, 87, 499-518.
- González-Cutre, D. (2008). *Motivación, creencias implícitas de habilidad, competencia percibida y flow disposicional en clases de educación física*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Almería, España
- Heine, C. A. (1997). *Tasks Enjoyment and Mathematical Achievement*. Disertación doctoral no publicada, Universidad de Chicago, Illinois.
- Hektner, J.M., y Csikszentmihalyi, M. (1996, Abril). A longitudinal exploration of flow and intrinsic motivation in adolescents. *Documento presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association*. New York.
- Larson, R. (1998). Flujo y escritura. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi, *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia* (pp. 151-169). Bilbao: Desclée de Brouwer.
- Montoro, A. B. y Gil, F. (2011). Concentración y disfrute con actividades matemáticas. En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 451-460). Ciudad Real: SEIEM.
- Nakamura, J., y Csikszentmihalyi, M. (2002). The concept of flow. En C.R. Snyder y S.J. Lopez (Eds.), *Handbook of Positive Psychology* (pp. 89-105). Oxford: Oxford University Press.
- Rodríguez, A.M. (2009). *The story flows on: A multi-study on the flow experience*. Tesis doctoral no publicada. Universitat Jaime I, España. Recuperado el 15 de Junio de 2010 de http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0714109-114559/index_cs.html.
- Schweinle, A., Turner, J.C., y Meyer, D. K. (2002, Agosto). Motivational and affective quality of students' experiences in mathematics classrooms. *Documento presentado en el Annual Meeting of the American Psychological Association*. Chicago.
- Schweinle, A., Turner, J.C., y Meyer, D.K. (2006). Striking the right balance: Students' motivation and affect in elementary mathematics. *The Journal of Educational Research*. 99 (5), 271-293.
- Schweinle, A., Turner, J.C, y Meyer, D.K. (2008). Understanding young adolescents' optimal experiences in academic settings. *The Journal of Experimental Education*. 77 (2), 125-143.
- Shernoff, D.J., Csikszentmihalyi, M., Schneider, B., y Shernoff, E.S. (2003). Student engagement in high school classrooms from the perspective of flow theory. *School Psychology Quarterly*, 18 (2), 158-176
- Smith, J.S. (2005). Flow theory and GIS: Is there a connection for learning? *International Research in Geographical and Environmental Education*, 14 (3), 223-230

- Whalen, S.P. (1998). Flow and the engagement of talent: Implications for secondary schooling. *NASSP Bulletin*, 82, 22-37
- Wigfield, A., y Eccles, J. S. (2001). The development of competence beliefs, expectancies for success, and achievement values from childhood through adolescence. En A. Wigfield y J. S. Eccles (Eds.), *Development of achievement motivation* (pp. 91–120). San Diego, CA: Academic Press.

UN ESTUDIO EXPLORATORIO DE LAS TENDENCIAS DE PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO DE LOS ESTUDIANTES DEL PROFESORADO DE BIOLOGÍA

AN EXPLORATORY STUDY ABOUT TRENDS OF PROBABILISTIC THINKING ON STUDENTS OF BIOLOGY PROGRAMS

Moreno, A. ⁽¹⁾, **Cardenoso, J.M.** ⁽²⁾, **González, F.** ⁽³⁾

Universidad Nacional de Cuyo, Argentina ⁽¹⁾,

Universidad de Cádiz ⁽²⁾,

Universidad de Granada ⁽³⁾

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de un estudio exploratorio descriptivo sobre las tendencias de pensamiento probabilístico de los 325 estudiantes de los profesorados de biología de la provincia de Mendoza, Argentina. Se aplicó un cuestionario que consta de 24 ítems destinados al reconocimiento de la aleatoriedad y a la estimación de la probabilidad. A las respuestas del cuestionario le aplicamos técnicas estadísticas univariadas y multivariadas, encontrándose cuatro tendencias de pensamiento probabilístico independientes del nivel académico y dedependientes la edad de los estudiantes.

Abstract

We present the results of an exploratory study about trends of probabilistic thinking on 325 students from biology professorships in the province of Mendoza, Argentina.

We used a questionnaire consisting of 24 items on the recognition of randomness and estimate of the probability. Univariate and multivariate statistical techniques were applied to questionnaire responses. As a result, four trends of probabilistic thinking were found, which were independent of the academic level and the student age-dependent.

Palabras clave: *Pensamiento probabilístico, reconocimiento de la aleatoriedad, estimación de la probabilidad, tendencias de pensamiento, estudiantes de biología.*

Key words: *Probabilistic thinking, recognition of randomness, probability estimate, trends of thought, biology students.*

Introducción

Actualmente en la provincia de Mendoza, los institutos de formación docente se encuentran transitando un proceso de transformación curricular, según las Resoluciones n° 654/2011 de la Dirección General de Escuelas (D.G.E., 2011), Gobierno de la provincia de Mendoza; originado por los resultados poco satisfactorios de la escuela secundaria. Se espera que con estos diseños se experimenten cambios sustanciales, que suponemos contribuirán a la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el nivel superior, y en consecuencia en secundaria. Una de las asignaturas de este diseño es Bioestadística, la que plantea como expectativa de logro “*Reconocer e interpretar los modelos de probabilidad en situaciones propias de la Biología que requieran su modelización*”. Como protagonistas de esta transformación, nuestra finalidad es precisamente la mejora de la enseñanza de la probabilidad, ya que constituye el cimiento sobre el que se construyen los restantes contenidos de la bioestadística.

Sabemos que el estudiante de biología necesita de unos sólidos conocimientos en esta disciplina para aplicar modelos probabilísticos en contextos propios de la biología (Carrillo, Sanhueza, Manzi, 2011). Por otra parte, en muchas ocasiones se ha dicho que una de las mayores dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad y la estadística reside en el aprendizaje significativo de los conceptos acerca del azar (Azcárate, 1996; Borovcnik y Peard, 1996). Por lo expuesto, el presente trabajo se propone determinar las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes del profesorado de Biología, para poder incidir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad con estrategias adecuadas a cada una de las tendencias encontradas.

Antecedentes

En relación con las concepciones probabilísticas de estudiantes y profesores

Las dos investigaciones que hemos tomado como antecedentes para el presente estudio se pueden encontrar en la tesis doctoral de Azcárate (1996), Azcárate, Cardeñoso, Porlan (1998) y en la de Cardeñoso (1998). Es Azcárate quien realiza su investigación desde la reflexión teórica tanto epistemológica como psicológica y didáctica; y a partir de los resultados obtenidos, ha podido encontrar evidencia exploratoria de cuatro tendencias de pensamiento: Concepción No Probabilística; Concepción Probabilística Intuitiva; Concepción Probabilística Emergente; Concepción Normativa. Y por su parte, Cardeñoso (1998) realiza su investigación de corte cuantitativo, con 598 profesores de primaria en activo, y encontró-estabilizó cinco tendencias de pensamiento probabilístico, que se han utilizado como base de nuestro sistema de análisis de las argumentaciones recogidas en nuestro estudio:

- ✓ La Concepción Determinista que niega la existencia del azar, aunque tiene una buena capacidad calculística, lo cual le permite tratar el azar en términos de probabilidades, aunque cuando hace esto, afirma que “ya no es azar, porque si hay una regla ya son matemáticas”. Cuando no puede responder a la evidencia de la incertidumbre, lo califica de excepcional. Como para el determinismo el azar sólo puede ser epistemológico, considera preferibles las teorías científicas de las que se desprenden leyes en las que no tiene cabida el azar.
- ✓ La Concepción Causal que acepta el azar como “excepción a la regla” de la ley determinista o en ausencia de información para generar dicha ley científica, usa el azar como variable a controlar, personalmente incluso, afirmando que el

“saca casi siempre cruz al lanzar una moneda al aire”, por ejemplo. Sus explicaciones para las cuestiones imprevisibles, está relacionada con la vieja concepción helena de las “cadenas causales”. Bajo el punto de vista del cientifismo clásico un evento era aparentemente aleatorio cuando no podía establecerse o controlarse su causa. También se podía asimilar a la ignorancia, como decía Laplace.

- ✓ La Concepción Personalista, también como las anteriores de corte pre-indeterministas; aunque el azar y lo indeterminado son cuestiones de carácter mágico o fenomenológico, esotérico, cabalístico, o una cuestión del destino o de casualidades como razón de los sucesos fortuitos. También se encuentran en este grupo sujetos que usan indebidamente ciertos “lugares comunes sobre lo indeterminado” o que usando los heurísticos para emitir juicios probabilísticos sobre un fenómeno o suceso, cayendo en los sesgos documentados en la literatura al uso.
- ✓ La Concepción llamada de Incertidumbre que reconoce la existencia de lo incierto de la vida, pero se queda prisionero en el proceso de reconocer la existencia de fenómenos azarosos y sucesos aleatorios, como si estuviera luchando para conseguir la conservación de esta atribución de los fenómenos. Utiliza las llamadas intuiciones primarias sobre los fenómenos y sucesos imprevisibles, como herramienta cognitiva para concebir la probabilidad como el grado de verosimilitud en que las condiciones iniciales, favorecen la realización de un suceso.
- ✓ Concepción Contingente, caracteriza a los sujetos que discriminan los muchos fenómenos aleatorios y supeditan lo real a lo posible. No solo busca saber que ocurre, sino también conocer las causas que originan la variación de lo esperado respecto a lo posible. Estiman la probabilidad por medio de estrategias de estructura aditiva, construyendo relaciones entre lo favorable y lo desfavorable, que es lo que Nagel (1979) llama “contingencia” de un fenómeno.

En una línea similar podemos nombrar el trabajo de Arteaga, Batanero y Ruiz (2010), que estudian también las percepciones de un grupo de profesores de primaria sobre la aleatoriedad. Los datos se recogieron a través del desarrollo de un proyecto estadístico y de la elaboración de un informe final donde recogían sus conclusiones.

Los resultados muestran una buena percepción en los valores esperados pero un bajo reconocimiento de la variación e independencia de las secuencias aleatorias, lo cual según los autores incide en la necesidad de una mayor formación de docentes en este ámbito matemático (Batanero y otros, 2010).

Metodología

El instrumento que se aplicó consta de doce ítems tendientes al reconocimiento de la aleatoriedad, en cada uno de ellos el estudiante debe afirmar o negar la aleatoriedad del suceso y luego argumentar su elección, lo que hace seleccionando una de tres opciones dadas ó indicando por escrito el argumento que sustenta su elección.

Además, consta de otros doce ítems en los que debe estimar la probabilidad de un suceso en una escala ordinal; eligiendo una de tres cotas: baja, media y alta; y luego de la misma forma que en los ítems anteriores, debe argumentar su elección eligiendo una de cuatro opciones ó indicando por escrito su argumento.

El instrumento se aplicó a la población de estudiantes de los profesorados de biología de primero a cuarto año de la provincia de Mendoza. El tamaño de la población es de 325 estudiantes. De los estudiantes que respondieron el cuestionario algunos habían cursado y aprobado “Bioestadística” y otros no, sin correlación con los resultados.

El cuestionario fue pasado por uno de los investigadores bajo condiciones de examen, es decir, sin comunicarse entre ellos, y contaron con el tiempo que necesitaron para completarlo. En general, los estudiantes no mostraron problemas para entender los enunciados de los diferentes ítems. Se efectuó un análisis descriptivo de los resultados obtenidos en cada uno de los ítems, se determinó el índice de dificultad y el índice de discriminación de los ítems, se realizó el análisis de conglomerados, el análisis discriminante; y el test de independencia entre distintos pares de variables. A continuación mostramos a modo de ejemplo, dos ítems.

Ítem 1) Acertar el número que muestra un dado ya lanzado, pero que no puedo ver es un suceso ...

☐ aleatorio ☐ no aleatorio

1. porque puedo acertar o no acertar, no lo puedes prever.
2. porque acertar entre tantos números posibles es muy difícil.
3. porque no puedo controlar la posición del dado al caer.
4. porque, según mi opinión.....

Ítem 2).-La confianza que tengo en que el próximo sismo que ocurra en Mendoza, sea un sismo destructivo es...

☐ baja ☐ media ☐ alta

1. porque es igualmente posible que un sismo sea destructivo o que no lo sea.
2. porque las estadísticas indican que esa es la frecuencia con que se produce un sismo destructivo.
3. porque comparo las intensidades de los sismos que determinan que sea destructivo o no.
4. porque según la información de la estación sismológica por cada 10.000 sismos, 155 son destructivos.
5. porque, según mi opinión.....

Resultados

Análisis de los ítems relativos al reconocimiento de la aleatoriedad

El 70,18% de los estudiantes reconocen la aleatoriedad de los sucesos, mientras que el 28,56% no lo hace y sólo un 1,26% no contesta. En sus argumentaciones prefieren usar en primer lugar la incertidumbre, argumentación que alcanza un 40,05%, en segundo lugar la causalidad con un 33,13% y luego la multiplicidad con un 21%. Sin embargo, es más informativo saber que argumentaciones usan cuando reconoce la aleatoriedad y cuando no la reconoce. Si reconoce la aleatoriedad, el 31,64% argumenta desde la incertidumbre, en segundo lugar, el 19,44% usa la causalidad y el 16,08% la multiplicidad. Mientras que cuando no reconocen la aleatoriedad, el 13,44 % argumenta desde la causalidad. Por otra parte, el test de independencia aplicado a cada ítem reveló que el reconocimiento de la aleatoriedad es independiente del nivel académico de los estudiantes; como así también de la edad de los estudiantes.

Análisis de los ítems relativos a la asignación de probabilidades

Cuando estiman la probabilidad usando la escala ordinal: baja, media y alta; se destaca el uso del nivel de confianza “medio”, cota que es usada por el 48,38% de los estudiantes; el 26,31% usan la cota alta y el 24,08% la baja. Cuando argumentan su elección lo hacen fundamentalmente a través de tres categorías; la equiprobabilidad con un 38,61%, seguida por la contingencia con un 25,23% y la frecuencial con un 21,08%.

Análisis de Independencia

Se aplicó en cada uno de los ítems el test de independencia entre el reconocimiento de la aleatoriedad y la edad de los estudiantes (Moreno, Cardeñoso, González, 2011), se prueba la independencia entre las variables (Tabla 1), ocurriendo lo mismo con el nivel académico de los estudiantes, excepto para el ítem 7 (Tabla 2), como lo indican los valores p.

Ítems	2	3	5	7	8	13	14	15	20	21	23	24
Chi-cuadrado	9,291	10,259	7,098	8,813	11,393	5,234	4,710	9,796	6,666	4,320	9,228	11,579
Valor p	0,505	0,418	0,716	0,550	0,328	0,875	0,910	0,459	0,757	0,932	0,511	0,314

Tabla 1 Test de Independencia para el “reconocimiento de la aleatoriedad” y “edad del estudiante”

Ítems	2	3	5	7	8	13	14	15	20	21	23	24
Chi-cuadrado	7,584	10,275	4,518	16,355	2,091	6,081	9,923	5,976	5,508	11,957	8,081	7,584
Valor p	0,270	0,114	0,607	0,012	0,911	0,414	0,128	0,426	0,481	0,063	0,232	0,270

Tabla 2 Test de Independencia para el “reconocimiento de la aleatoriedad” y “nivel académico del estudiante”

Análisis de Clusters y Análisis Discriminante

Para el análisis de clusters se aplicó de manera exploratoria el método de aglomeración de Ward con la distancia coeficiente de Phi, para determinar únicamente el número de clusters, obteniéndose cinco grupos. El criterio que se usó para trazar la línea de corte fue el 50% de la distancia máxima (Figura 1), posteriormente se aplicó el método de partición de las K-Medias para conocer la conformación de los cinco grupos, como recomienda Catena, Ramos y Trujillo (2003). En una segunda etapa, el análisis discriminante corroboró la clasificación anterior y reveló que el 96,6% de los estudiantes habían sido clasificados correctamente.

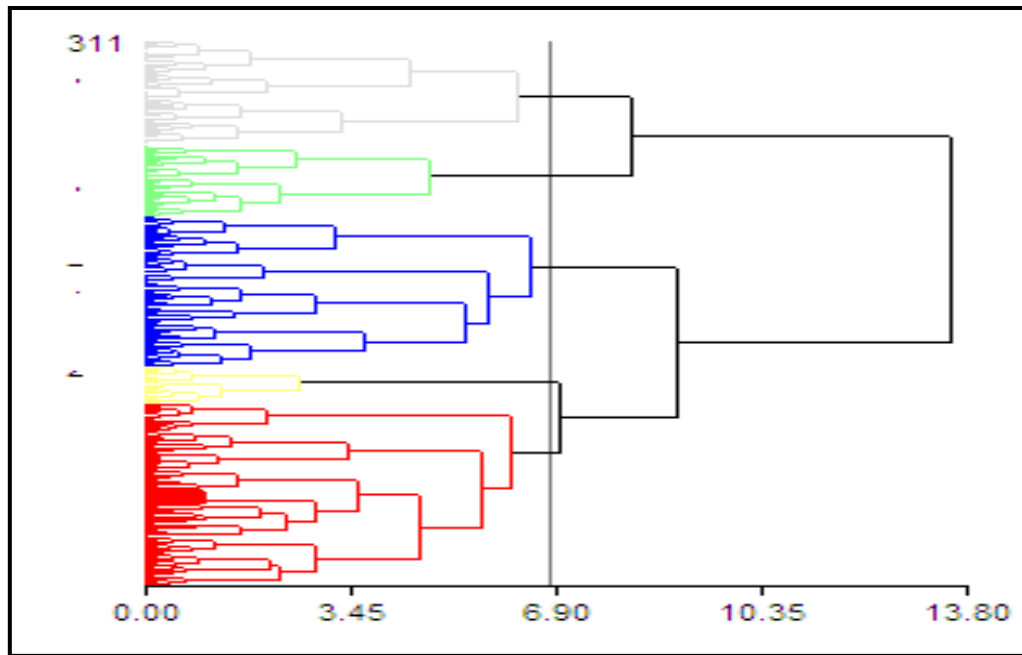


Figura 1 Dendrograma del análisis de clusters

Grupo 1: Determinista

Este grupo está formado por 48 estudiantes, representa el 14,77% de los estudiantes encuestados. Es el cuarto grupo en importancia numérica. Hay un predominio de estudiantes de primer año en relación con los otros cursos. Es bastante heterogéneo respecto de la edad. Alcanza el menor reconocimiento de la aleatoriedad, en promedio el 65,2% de los estudiantes no reconocen los sucesos aleatorios, argumentando desde la incertidumbre y la causalidad. Cuando reconoce la aleatoriedad lo hace desde la causalidad y la incertidumbre por lo tanto la argumentación más usada es la Incertidumbre, resultando ser un grupo contradictorio porque usa la incertidumbre tanto para afirmar como para negar la aleatoriedad aunque fundamentalmente sea para negar.

Grupo 2: Contingencia

Es el grupo más numeroso, aglutina a 102 estudiantes, que representa al 31,38% del total de estudiantes encuestados. Se destaca por la presencia de estudiantes de cuarto año. Logra un alto reconocimiento de la aleatoriedad, en promedio el 81,21% de los estudiantes reconoce los fenómenos aleatorios. Cuando reconoce la aleatoriedad, usa fundamentalmente la incertidumbre y en segundo lugar la causalidad. Es el que más usa estrategia de la contingencia (33,00%) y la frecuencial (19,20%) en la estimación de la probabilidad.

Grupo 3: Incertidumbre

Es el segundo grupo en importancia numérica, está constituido por 88 estudiantes (27,08%). La proporción de estudiantes de cada uno de los niveles académicos es aproximadamente la misma. Se caracteriza por ser el que logra el mayor porcentaje de reconocimiento de la aleatoriedad (82,48%); argumentando desde la incertidumbre y desde la multiplicidad. Este grupo es el que más usa la incertidumbre, lo que motivó la denominación del grupo. En cuanto a la estimación de la probabilidad, se destaca por el uso máximo de equiprobabilidad.

Grupo 4: Causalidad

Este grupo representa al 25,85% (84) del total de los estudiantes. La proporción de estudiantes de cada uno de los niveles académicos es aproximadamente el mismo en cada uno de los grupos. Es el tercer grupo en el reconocimiento de la aleatoriedad (65,77%). Es el que hace el mayor uso de la causalidad (38,09%) tanto para afirmar como para negar la aleatoriedad. Es el que más usa la categoría laplaciana para estimar la probabilidad (25,01%).

Grupo 5: Personalista

Es el grupo formado por tres estudiantes, uno de cada uno de los tres primeros cursos, representa sólo el 0,92%. Al ser un grupo tan reducido no lo podemos considerar representativo de una determinada tipología de pensamiento probabilístico. En cuanto las edades varían entre 29 y 40 años. Estos estudiantes usan fundamentalmente la subjetividad para identificar sucesos aleatorios y la categoría experiencial para estimar la probabilidad.

Discusión y conclusiones

Los estudiantes para profesorados de biología de la provincia de Mendoza estudiados tienen unas concepciones probabilísticas que son independientes del nivel académico y de la edad de los mismos. Hemos encontrado cuatro tendencias de pensamiento probabilístico.

La primera, que es la que se corresponde con el grupo que hemos llamado “**Determinista**”; se caracteriza por un bajo porcentaje de reconocimiento de situaciones aleatorias; problema asociado a la falta de conocimiento del significado del término “aleatorio”, afirmación que surge al detectar que argumentan la aleatoriedad de la misma forma que la no aleatoriedad.

La segunda tendencia, está representada por el grupo que hemos denominado “**Contingencia**”; es el más número, logra el reconocimiento de variadas situaciones inciertas que están presentes en el mundo real y al percatarse de la existencia de la multiplicidad de resultados diferentes que pueden ocurrir en presencia de lo aleatorio, usando la estrategia ponderar aditivamente estos resultados, para estimar la probabilidad.

En tercer lugar, encontramos la tendencia de pensamiento representada por el grupo que hemos denominado “**Incertidumbre**”, es el que más situaciones aleatorias identifica, tiene una visión del mundo caracterizada por la presencia de lo imprevisible, lo incierto; pero cuando estima la probabilidad se basa en la equiprobabilidad de los sucesos reafirmando la idea de lo imprevisible.

La cuarta tendencia representada por el grupo que hemos denominado “**Causalidad**”, caracterizado por fundamentar sus argumentos desde la causalidad ya sea aleatorios o no. Poseen una visión causal del mundo real, buscan siempre las causas que producen los fenómenos, y si no las encuentran fundamentan su opinión en la falta de conocimiento.

Las cuatro tendencias encontradas en este trabajo coinciden con cuatro de las cinco que obtuvo Cardeñoso (1998) en su investigación, entendiendo que la diferencia de sujetos encuestados 325 frente a 598, puede ser la causa de que no cobre entidad el grupo llamado “**Personalista**”, aunque nos gustaría concluir que es la formación de los estudiantes la que origina su desaparición, ya que esta tendencia de pensamiento reúne

las visiones más desestructuradas y subjetivas, respecto al reconocimiento de la aleatoriedad y la estimación probabilística.

Estas tendencias de pensamiento ponen de manifiesto la existencia de creencias y concepciones que son el producto de experiencias personales y como dice Lysoe (2008) se adquieren durante el desarrollo de su lengua, en la etapa del crecimiento. Una manera de transformar esas intuiciones primarias en secundarias; puede ser mediante entrevistas guiadas, en las que en ocasiones, se va revelando la existencia de verdaderos juicios heurísticos; y únicamente desafiando estas intuiciones se podrá alcanzar un pensamiento probabilístico.

Los resultados que hemos encontrado se corresponden con los detectados por Batanero (2009) y Batanero y otros (2010) en estudiantes del Profesorado de primaria. Por otra parte, sería muy conveniente prestar atención a lo que expresa Ives (2006), quien propone poner en práctica el método de cambio conceptual, en el que adquieren relevancia los conocimientos previos de los estudiantes y sus experiencias (Contreras, y otros, 2011). El método de cambio conceptual debería aplicarse para hacer frente a las concepciones erróneas de la probabilidad (Tversky y Kahneman, 1974); y como indica Ives (2007) queda pendiente indagar acerca de qué experiencias concretas se deberían fomentar en el profesorado para lograr una mayor comprensión de la aleatoriedad.

Referencias bibliográficas

- Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de Primaria en torno a las las nociones de Aleatoriedad y Probabilidad*. Granada: Comares.
- Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. y Porlán, R. (1998) Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (1), 85-97.
- Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B. (2010). Pre-service primary school teachers' perception of randomness. En M. Pinto y T. Kawasaki (Eds). *Proceedings of the XXXI Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (V2, 183-190). Belo Horizonte, Brasil.
- Batanero, C. (2009). Los retos para la formación estadística de los profesores. *Actas II Encontro de Probabilidade e Estatística na scola*. Braga: Univ. Minho, Portugal
- Batanero, C.; Arteaga, P.; Ruiz, B. y Roa, R. (2010). [Assessing pre-service teachers' conceptions of randomness through project work](#). In C. Reading (Ed.). *Proceedings of the Eight International Conference for Teaching Statistics*. Ljubljana: IASE.
- Borovcnick, M. y Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop et al.. (Eds): *International handbook of mathematics education* (239-288). Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Carrillo, M. F.; Sanhueza, S. y Manzi, E. F. (2011). Concepciones de los estudiantes para profesor de Matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la Estadística. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. 13 (2), 113-129.
- Catena, A., Ramos, M. M. y Trujillo, H. M. (2003). *Análisis Multivariado. Un manual para investigadores*. Madrid: Ed. Biblioteca Nueva.

- Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Ortiz, J. J. (2011). [Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo](#). *Educação Matemática e Pesquisa*, 12 (2), 181-198.
- Cardenoso, J. M. (1998). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la Matemática escolar. Modelización de conceptos sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. Univ. Cádiz. (2001, Serv. Public. UCA).
- D.G.E. (2011). *Resolución 655/2011 Dirección General de Escuelas. Dirección de Educación Superior. Gobierno de la provincia de Mendoza*.
- Ives, S. (2006). The conceptual chance teaching method & preservice teachers' understanding of probability. *Probability and Statistics*. 2, 251-253.
- Ives, S. (2007). The Relationship between Preservice Teachers' Conceptions of Randomness and their Pedagogical Content Knowledge of Probability. *Ninth International Conference Mathematics Education in a global community*. The Mathematics Education into the 21st Century Project.
- Lysoe, K. O. (2008). Strengths and Limitations of Informal Conceptions in Introductory Probability Courses for Future Lower Secondary Teachers. *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey. México: ICME 11.
- Moreno, A., Cardenoso, J. M. y González, F. (2011). Las argumentaciones de los estudiantes en el reconocimiento de la aleatoriedad. *Actas Segundo Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología*. Univ. Nacional Catamarca. Argentina.
- Nagel, E. (1979). Significado de la probabilidad. En J. R. Newman (Comp.), *Enciclopedia Sigma: el mundo de las matemáticas*, Vol. 3. Barcelona. Grijalbo.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. En *Science*, 185, (124-131).

DIFICULTADES ALGEBRAICAS EN EL AULA DE 1º BAC. EN CIENCIAS Y EN CIENCIAS SOCIALES

ALGEBRAIC DIFFICULTIES IN 1ST YEAR POST- SECONDARY SCHOOL CLASSES WHEN TEACHING NATURE SCIENCE AND SOCIAL SCIENCE

Pazos, A.L., Salinas, M.J.

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio llevado a cabo con alumnos de primer curso de bachillerato de ciencias y ciencias sociales, en el que se analiza su rendimiento, errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas. Para ello se elaboró una prueba con 10 ítems de desarrollo de operaciones de tipo algebraico que se aplicó a 49 alumnos de dichos niveles. Se analizaron cuantitativamente los datos mediante el paquete estadístico SPSS: fiabilidad del instrumento de medida, análisis descriptivo de los ítems y análisis de varianza para comparar los resultados de las distintas modalidades del bachillerato. Por otra parte se hizo una clasificación de los errores encontrados, conectándolos con propuestas de clasificación de otros autores.

Abstract

The present essay introduces a research carried out with students from the first year of Science and Social Studies branches of BAC (Post Compulsory Education), analysing their achievements, mistakes and difficulties when solving algebraic tasks. In order to do so, a test containing 10 algebraic operation expansion items was taken by 49 students from the previously mentioned levels. Later, the input was analysed quantitatively using the SPSS statistical package, checking the validity and reliability of the measurement tool, describing the items, comparing these between themselves and testing whether the result depends on the option chosen analysing the discrepancy. Moreover, the main mistakes found were enumerated and exemplified, connecting them with the classification proposals made by other authors.

Palabras clave: *Bachillerato, Rendimiento, Procesos algebraicos, Análisis de errores..*

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas genera, en los alumnos, muchos errores y dificultades de naturaleza distintas. En el caso del álgebra, muchos docentes coinciden en afirmar que la mayoría de los alumnos cometen los mismos errores de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje. Estos problemas parecen estar relacionados con una serie de deficiencias en comprensión de conceptos y en la forma de enfocar el álgebra que traen como consecuencia inmediata una forma errónea de enfrentarse con su aprendizaje.

En diversas investigaciones se han trabajado aspectos de la enseñanza/aprendizaje del álgebra que conforman diversos obstáculos para su aprendizaje. Palarea y Socas (1999) hacen aportaciones sobre el valor que los alumnos atribuyen al signo igual, encontrando la prevalencia de la aritmética sobre el álgebra. Cerdán (2010) clasifica los errores al pasar de problemas a ecuaciones en tres categorías: uso de letras, construcción de expresiones aritméticas o algebraicas y de igualdad.

Enfedaque (1990) llevó a cabo un estudio con alumnos de 8º de EGB, de 1º y de 2º de BUP, aportando algunas sugerencias sobre cómo introducir el uso de las letras en álgebra para disminuir los errores en la misma, así como algunas cuestiones sobre la actitud del profesorado para detectar los anteriores y mejorar la competencia algebraica de los alumnos.

Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) diseñan un cuestionario de diagnóstico del manejo del concepto de variable en el álgebra. Para ellos, el concepto de variable se usa con significados diversos en diferentes contextos y dependiendo de ello se maneja de distinta manera. Consideran tres las formas en las que la variable suele usarse en el álgebra escolar: como incógnita, como número generalizado y en relación funcional.

Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E. (2011) analizan el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato en la simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

En esta investigación, el objetivo general que se persigue es la evaluación del rendimiento, errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos del primer curso de bachillerato de las modalidades de ciencias y ciencias sociales del IES “Daviña Rey” de Monforte de Lemos (Lugo). Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- O1. Analizar el rendimiento global de los alumnos en el bloque de álgebra.
- O2. Comparar el rendimiento de los alumnos de las diferentes modalidades de BAC.
- O3. Describir los errores que cometen los alumnos en la descripción de las tareas.

Concepciones sobre pensamiento algebraico

En las investigaciones desarrolladas sobre pensamiento algebraico, las referencias a consideraciones históricas y al análisis epistemológico es algo inherente a las mismas.

La relación entre los marcos teóricos históricos/epistemológicos y los psicológicos es habitual en educación matemática con relación al lenguaje algebraico. Así, la existencia de etapas históricas durante las que varios conceptos matemáticos tales como número y función han evolucionado desde operacional a estructural, ha

llevado a Sfard (1991) a crear un modelo conceptual paralelo de tres fases: interiorización, condensación y reificación.

En el análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico se estudia el signo y los tipos de signos, como los procesos de significación y búsqueda de sentido, y su repercusión en los procesos de enseñanza y aprendizaje, Puig (1996).

Algunas investigaciones de carácter cognitivo han apuntado a ciertos cambios conceptuales y/o simbólicos que establecen la diferencia entre el pensamiento aritmético y el algebraico en el individuo. Algunos de estos trabajos tienen que ver con las diferentes interpretaciones de la letras y convenciones gráficas y simbólicas para codificar operaciones y transformaciones en la resolución de ecuaciones (Matz, 1982). Estas observaciones han hecho posible hacer hipótesis sobre ciertas líneas de evolución del lenguaje aritmético al algebraico, las cuales corresponden a las nociones y a las formas de representación de los objetos y operaciones que ocurren en el cambio.

Errores y dificultades

Los errores son un tema de constante malestar en los docentes de todos los niveles educativos. En el desarrollo de la construcción de conocimientos matemáticos se presentan los errores de manera sistemática y es por eso que dicho proceso debe considerar criterios de diagnóstico, corrección y superación de los mismos.

Rico (1999) considera organizadores del currículo a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de las mismas. El mismo Rico incluye, entre los organizadores del currículo, los errores y dificultades en el aprendizaje.

En el marco del análisis didáctico compuesto por cuatro tipos de análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación; los errores y dificultades se enmarcan en el análisis cognitivo donde el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción del conocimiento (Gómez, 2007).

Brousseau, Davis y Werner (citados en Rico, 1995) señalan cuatro vías por las que los errores pueden presentarse: Como resultado de concepciones incorrectas acerca de principios básicos de las matemáticas, cuando los alumnos recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor, por la aplicación correcta y sistematizada de procedimientos imperfectos fácilmente reconocidos por el profesor, al aplicarse por parte del alumno procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas no reconocidas por el profesor.

Mulhern (1989) hace una caracterización general de los errores cometidos por los alumnos: los errores surgen en la clase, son espontáneos y generalmente resultan sorprendentes para el profesor; son persistentes, resistentes a cambiar por sí mismos y difíciles de corregir porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno; son más frecuentes los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada) con respecto a los errores por azar u ocasionales.

Categorizaciones y clasificaciones

A continuación se presentan algunas categorizaciones y clasificaciones realizadas por diferentes autores teniendo en cuenta distintos enfoques. Estas categorizaciones son las que hemos utilizado en el análisis de los errores.

En Radatz (1979) se ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis: errores debidos a dificultades de lenguaje, errores debidos a dificultades para obtener información espacial, errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento y errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987, citados por Rico, 1995) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos. De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados: datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje, inferencias no válidas lógicamente, teoremas o definiciones deformadas, falta de verificación en la solución y errores técnicos.

Astolfi (1999) describe la siguiente tipología de los errores: errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones, errores resultado de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas, errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos, errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas, errores en los procesos adoptados, errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad, errores que tienen su origen en otra disciplina y errores causados por la complejidad propia del contenido.

Nuestro estudio

Metodología de la investigación

Esta investigación cumple los requisitos para considerarse Ex post facto y descriptiva.

La muestra está formada por 49 alumnos con edades promedio de 17 años del IES Francisco Daviña Rey de Monforte de Lemos, elegidos sin selección de ningún tipo. Las características de cada grupo son:

1º BAC A: 14 alumnos de ambos sexos que cursan la modalidad de ciencias sociales.

1º BAC B: 20 alumnos de ambos sexos que cursan la modalidad de ciencias.

1º BAC C: 15 alumnos de ambos sexos que cursan la modalidad de tecnología.

Instrumento de medida

Hemos construido una prueba que consta de 10 ítems de desarrollo de operaciones de tipo algebraico distribuidos en los siguientes bloques temáticos:

Nº de ítem	1,3	2,7	4,5	6,8	9,10
Contenido algebraico	Resolución de ecuaciones y de SEL	Aplicación de reglas de operaciones algebraicas	Desarrollo de reglas de operaciones algebraicas	Factorización de expresiones algebraicas	Resolución de inecuaciones lineales

Tabla 1: Descripción del contenido de los ítems

En la elaboración de la prueba se consideraron ejercicios tipo generados al azar teniendo en cuenta los contenidos mínimos que un alumno de 1º BAC, independientemente de su modalidad, debe conocer una vez impartida esa parte de la asignatura, con los conocimientos previos que se les consideran adquiridos. Así, se llevó a cabo una acción de contraste de estos contenidos con los objetivos curriculares y contenidos de la asignatura correspondiente y, finalmente, se comprobó que los objetivos y contenidos seleccionados formaban parte de los currículos establecidos por ley. Por otra parte resultaba imprescindible que el cuestionario abarcara todos los aspectos considerados capitales en el bloque temático de álgebra en el bachillerato y que la prueba evitara cualquier tipo de sesgo. Con todo lo anterior podemos asegurar la validez del contenido de la prueba.

Prueba planteada:

1. Encuentra el valor de x para la siguiente ecuación: $3(x + 4) - 4 = 2x - 5$

2. Efectúa la siguiente división: $\frac{2y^3+5y^2+2y+15}{y+3}$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 2y + 2z = 4; 4x + 10y + 6z = 2; 6x - 2y - 4z = -2$$

4. Desarrollar el siguiente binomio: $(2x - 3y^2)^2$

5. Desarrolla el siguiente binomio: $(xy^2 + z^2)^3$

6. Factoriza el siguiente polinomio: $x^2 - 15x + 54$

7. Desarrolla la siguiente expresión: $4xy(5x + 3y - 3xy)$

8. Factorizar: $8x^2y^3 - 2xy^2 + 4x^3y^2 + x^2y^2$

9. Encontrar el intervalo de solución de la desigualdad: $4 < 3x - 4 < 11$

10. Resolver la siguiente desigualdad: $\frac{2x+3}{2} + 4 < 3x + 5$

Para la realización de la prueba, se les dejó una clase y el recreo (80 minutos) utilizando el orden de sus apellidos para distribuirlos en el salón de actos, lugar de celebración.

Criterios de corrección de la prueba

Cada ítem se puntuó con una nota entre 0 y 4 puntos donde;

0. planteamiento erróneo desde el punto de vista estructural o en blanco. Se incluyen también las respuestas que incorporen secuencias que resultan incoherentes o incomprensibles y que impiden culminar el procedimiento de forma satisfactoria.

1. planteamiento estructural correcto pero con errores graves de tipo conceptual, en el manejo de propiedades o definiciones. Por ejemplo, confundir un polinomio con una ecuación.

2. planteamiento estructural correcto. Ejecutivamente presenta fallos distintos al punto anterior, en su mayoría procedimentales, que impiden llegar al resultado. Por ejemplo, no cambiar la desigualdad de sentido cuando se despeja la x con coeficiente negativo o simplemente no se completa.

3. planteamiento estructural correcto con errores de carácter leve que no impiden obtener la solución requerida. Por ejemplo, pequeñas imprecisiones en el uso del lenguaje o uso incorrecto de la notación.

4. ejercicio correcto.

Variables

a) Calificación de cada ítem (del 1 al 10) para cada sujeto con valores de 0 a 4.

b) Nota media por alumno entre 0 y 4.

c) Calificación total de cada alumno con valores de 0 a 40

d) Modalidad cursada {0: ciencias; 1: ciencias sociales}

Análisis de los datos cuantitativos de la prueba

Fiabilidad

Para poder estudiar la fiabilidad del instrumento utilizado, se aplica la prueba Alfa de Cronbach. Se obtuvo un valor para α de 0,794, valor bastante alto para este tipo de pruebas no estandarizadas, por lo que la prueba se considera fiable.

Análisis descriptivo de los ítems

En la siguiente tabla se muestran los resultados globales de la prueba para cada ítem.

	ITEM1	ITEM2	ITEM3	ITEM4	ITEM5	ITEM6	ITEM7	ITEM8	ITEM9	ITEM10
Media	3,76	2,80	1,78	2,82	1,88	2,31	3,35	3,22	1,51	2,45
D.T.	,751	1,354	1,373	1,629	1,576	1,357	1,408	1,490	1,721	1,634
Mínimo	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Máximo	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Tabla 2: Resultados globales de la prueba para cada ítem

La media de las calificaciones de los alumnos para cada ítem muestra la dificultad que presentan; el ítem más difícil es el 9 con una media de 1,51 y el más sencillo es el 1, con una media de 3,76. La desviación estándar, superior a 1 en todos los ítems excepto en el 1, también nos muestra una gran dispersión de las calificaciones para cada uno de los ítems. De acuerdo con la dificultad establecida por la media de la totalidad de los alumnos para cada ítem, desde el más difícil al más sencillo, el orden de los ítems sería: Ítem 9, Ítem 3, Ítem 5, Ítem 6, Ítem 10, Ítem 2, Ítem 4, Ítem 8, Ítem 7, Ítem 1.

Comparación de ítems

Una vez analizados los ítems de manera individual se procedió a investigar su posible relación mediante el análisis por clúster. En un primer nivel aparecen dos clúster

que se constituyen de acuerdo al nivel de dificultad. En un segundo nivel de asociación los ítems 5, 9, 3 y 10 forman un clúster, caracterizados por estar por debajo de la media global. Los ítems 1, 7, 2 y 8 definen un grupo en el que todos superan la media global y se diferencian del 4 porque este último ostenta una desviación típica superior a 1,5. En un último nivel aparecen pares de ítems relacionados que presentan niveles de media y/o desviación típica semejantes.

Comparación entre modalidades

Con el análisis de la varianza tratamos de comprobar si el resultado de los alumnos en los diferentes ítems depende de la modalidad que están cursando. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

	N	Media	D..T
CIENCIAS	35	2,8571	,71796
CCSS	14	1,9071	,82785
Total	49	2,5857	,85951

Tabla 3: Medias en las calificaciones de los alumnos para cada una de las modalidades y la media global

El análisis de la varianza se llevó a cabo mediante el ANOVA resultando para un valor menor que 0,001 por lo que podemos afirmar que existen diferencias significativas entre las medias de los grupos.

Análisis de los errores

Se procedió a examinar cada una de las respuestas de las 49 pruebas aplicadas. Inicialmente se distinguieron los errores que se presentaban en cada uno de los ítems de las pruebas, después se clasificaban de acuerdo a criterios comunes de aquellos errores que coincidían entre las pruebas y finalmente se categorizaron de una manera más general tratando de resaltar las relaciones entre ellos. Por último se clasifican los errores de acuerdo a las categorías existentes surgidas de investigaciones previas según lo especificado en el marco teórico. En nuestro caso: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar y otros (1987), Astolfi (1999)

i. Eliminación incorrecta de denominadores. Por ejemplo, para resolver el ítem 10, utilizan un procedimiento como el siguiente:

$$2\left(\frac{2x+3}{2}\right) + 4 < 3x + 5; \quad 4x + 6 + 8 < 3x + 5; \quad 4x - 3x < 5 - 6 - 8; \quad x < -9$$

Este error podríamos clasificarlo como técnico, según la clasificación de Mosvshovitz-Hadar y otros; según Radatz se deben a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

ii. Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas. Algunos ejemplos serían:

Para el ítem 3 un alumno, en la parte final del proceso de resolución, obtiene “ $8y = -16$ de donde $y = -16 / -8$; $y = 2$ ”. Otro alumno, en el mismo ejercicio, establece que “ $-50 + 6 = 44$ ”

Este tipo de errores estaría en la categoría de errores técnicos según Mosvshovitz-Hadar y otros y según Radatz a la categoría 3.

iii. Procedimiento inconcluso. Por ejemplo, en el ítem 10 un alumno presenta como resultado, " $x < \frac{-1}{\frac{2}{-1}}$ ". Según Astolfi, este error estaría ligado a las operaciones intelectuales implicadas.

iv. Procedimientos incorrectos e inferencias no válidas. Por ejemplo para el ítem 5 se presenta como respuesta " $a^3b^5 + b^5a^3y^5 + b^5y^5$ ".

Según Radatz son identificados como errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares así como "errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes". Por su parte en Mosvshovitz-Hadar y otros, los describen como inferencias no válidas lógicamente, refiriéndose a los fallos que tienen que ver con el razonamiento.

v. Aplicación parcial de regla de factorización por factor común. Por ejemplo en el ítem 8 se presenta como respuesta " $2xy^2(4xy - 1) + x^2y^2(4x + 1)$ " o también " $xy(8xy^2 - 2y + 4x^2y + xy)$ ".

Estos errores están relacionados con los descritos en Mosvshovitz-Hadar y otros, como teoremas o definiciones deformadas de un principio, regla, teorema o definición identificable. Para Radatz, este error estaría causado por un aprendizaje deficiente.

vi. Asociación incorrecta de productos notables. Por ejemplo en el caso del ítem 8 se presenta como respuesta: " $[2(2xy) - (xy)]^2$ ". Para Radatz este tipo de errores se identifican como errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento ocasionados cuando los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado.

vii. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra. Por ejemplo para el ítem 8 escriben " $8x^2y^3 - 2xy^2 + 4x^3y^2 + x^2y^2 = 12x^5y^4 - 2x^3y^4 = 10x^3$ ". Estos errores estarían relacionados con los reseñados en Radatz como errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos donde se incluyen todas las deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para las tareas matemáticas.

viii. Resolución aditiva de la potencia de un binomio. Por ejemplo para el desarrollo del binomio se presenta como solución " $(ab^2 + y^2)^3 = a^3b^6 + y^6$ ". Este error está relacionado con el descrito por Radatz como un error debido a un aprendizaje deficiente.

ix. Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio. Por ejemplo para el desarrollo del binomio anterior se responde " $3a^3b^6 + 3a^3b^4y^2 + 3y^4ab^2 + 3y^6$ ". Estos errores están relacionados con los descritos en Mosvshovitz-Hadar y otros, como teoremas o definiciones deformadas que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable; sería debido a la aplicación de reglas irrelevantes para Radatz.

x. Error de cálculo simple: Este error se presenta cuando el alumno se equivoca al realizar alguna de las operaciones básicas de la aritmética y por lo tanto obtiene un valor incorrecto que sigue utilizando sin detectar el error. Este error está relacionado con los descritos en Mosvshovitz-Hadar y otros como errores técnicos en los cuales los errores de cálculo y otros derivados de la ejecución de algoritmos y de tipo 3 según Radatz.

Conclusiones

De acuerdo a los datos estadísticos obtenidos en este trabajo se pone de manifiesto el razonable rendimiento de los alumnos de 1º de bachillerato en álgebra. Globalmente obtuvieron 2,5857 puntos sobre un máximo de 4, lo que conlleva superar la barrera de los 2 puntos donde estaría situada la línea del aprobado.

En relación con el rendimiento de los alumnos de cada modalidad es importante resaltar que los datos obtenidos nos muestran que los alumnos de ciencias que acreditan nota media 2,8571, superan de forma significativa a los de ciencias sociales con media 1,9071. Esto corrobora lo previsible, pero quizás la diferencia constatada es mucho mayor de lo esperado a priori.

Se identificaron 10 tipos de errores particulares en la resolución de las pruebas y cuya relación con la literatura revisada se describió en el punto anterior.

Por último debemos de tener en cuenta que nuestro trabajo está limitado a un único centro. Una muestra más amplia mejoraría la información con la que contamos y nos permitiría generalizar las conclusiones.

Referencias

- Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Investigación y enseñanza. Sevilla: Díada.
- Brousseau, G., Davis, R. y Werner, T. (1986). Observing students at work. En B. Christiansen, A.G. Howson, y M. Otte (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99 – 109.
- Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, 5, 23-34.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.
- Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En Sleeman, D. y Brown, J.S. (Eds.). *Intelligent Tutoring Systems*. Academic Press: New York.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (1), 3-14.
- Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. In B. Greer & G. Mulhern (Eds.). *New Directions in Mathematics Education*. London: Routledge.
- Palarea, M.M. y Socas, M.M. (1999-2000). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada*, 8/9, 319-336.
- Puig, L. (1996). Pupils' Prompted Production of a Medieval Mathematical Sign System. *Proceedings PME-XX*, 1, 77-84. Valencia. España.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.

- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. (Eds.). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rico, L. (1999). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L. y otros (Eds.). *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*. Buenos Aires: Erre Eme S.A.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of Mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36
- Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, 14(3), 351-363.
- Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En Marín Rodríguez, M. y otros (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, 575- . Ciudad Real: SEIEM.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE PROFESORES EN FORMACIÓN: EXPLORANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE LA DERIVADA

PROSPECTIVE TEACHERS' DIDACTIC-MATHEMATICS KNOWLEDGE: EXPLORING THE SPECIALIZED KNOWLEDGE ABOUT THE DERIVATIVE

Pino-Fan, L.R. ⁽¹⁾, **Godino, J.D.** ⁽¹⁾, **Castro, W.F.** ⁽²⁾, **Font, V.** ⁽³⁾

Universidad de Granada ⁽¹⁾, *Universidad de Antioquia* ⁽²⁾, *Universitat de Barcelona* ⁽³⁾

Resumen

El estudio sobre los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas para que su enseñanza sea efectiva, ha sido motivo de estudio en los últimos 30 años. Sin embargo, las investigaciones orientadas al diseño de instrumentos que permitan explorar aspectos sobre el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre temas específicos no son numerosas. En el presente trabajo se informa sobre algunos resultados obtenidos a partir de la aplicación de un instrumento que se ha diseñado para explorar aspectos relevantes la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de futuros profesores de bachillerato.

Abstract

The study on the knowledge that a mathematics teacher needs to achieve an effective teaching has been studied in the last 30 years. However, there is scarcity of instruments designed to explore aspects of the didactic-mathematics knowledge of teachers on specific topics. In this paper we present some results obtained from the implementation of a test designed to explore some important aspects on the epistemic facet of the didactic-mathematics knowledge about the derivative of prospective high school teachers.

Palabras clave: *Formación de profesores, conocimiento del profesor, enfoque ontosemiótico, faceta epistémica, derivadas.*

Key words: *Teacher's training, teacher's knowledge, onto-semiotic approach, epistemic facet, derivative.*

Antecedentes

Una de las problemáticas que más ha interesado a la comunidad de investigadores interesados en la formación matemática y didáctica de los futuros profesores, es la de determinar el conocimiento didáctico-matemático requerido para enseñar matemáticas. Las reflexiones y recomendaciones de Shulman (1986), las investigaciones de Ball (2000); Ball, Lubienski y Mewborn (2001); Hill, Ball y Schilling (2008), suponen avances en la caracterización de los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener para desarrollar eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas (Godino, 2009). El problema que se aborda en esta investigación, siguiendo las recomendaciones de Badillo, Azcárate y Font (2011), es el conocimiento que requiere el profesorado de bachillerato para enseñar el objeto derivada.

Existen muy pocas investigaciones centradas en los profesores, y menos aún, en los conocimientos que debe de tener un profesor sobre esta noción (Gavilán, 2005). Dentro de las investigaciones centradas en el profesor y la derivada se encuentran: 1) las que estudian aspectos de su práctica profesional y 2) aquellas que estudian sus creencias y concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la derivada. Estas investigaciones ponen de manifiesto la búsqueda de formas de modelar o caracterizar dicha práctica a través del uso de herramientas tecnológicas, presencia de diferentes representaciones o uso de situaciones en las que se aplica el cálculo.

El objetivo de esta comunicación es informar sobre los resultados de la aplicación de un instrumento diseñado para explorar, de manera específica, aspectos relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación inicial, sobre la derivada. Concretamente, centramos nuestra atención en dos niveles del conocimiento especializado para los cuales se proponen categorías de análisis.

El diseño del instrumento

Como parte del proceso de diseño del instrumento se creó un banco de problemas los cuales han sido estudiados en las diversas investigaciones realizadas en didáctica del cálculo. Posteriormente se eligieron aquellas que cumplieran tres criterios clave de la faceta epistémica: 1) globalidad de significados del objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011); 2) diversidad de representaciones (Font, 1999); y 3) tipo componente de la faceta epistémica que se evalúa, es decir, conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento ampliado. El cuestionario se centra, fundamentalmente, en la evaluación de aspectos parciales relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada. Dicha faceta incluye, en congruencia con el modelo de Ball y colaboradores (Ball, et al., 2001; Hill, et al., 2008) tres tipos de conocimiento: *conocimiento común*, *conocimiento especializado* y *conocimiento ampliado*.

En la Figura 1 se ilustra una de las tareas del instrumento para evaluar la faceta epistémica del CDM sobre la derivada. Si bien es cierto que sólo discutiremos una tarea, la misma ilustra el estudio de dos niveles del conocimiento especializado, lo cual es el

foco de atención de este documento. Dicha tarea, de la cual tomamos sin cambios los ítems a), b) y c), ha sido objeto de estudio en diversas investigaciones (Tsamir, et al., 2006; Santi, 2011) e indaga dos componentes del CDM: 1) conocimiento común (ítem a), en tanto que el futuro profesor debe solamente resolver el ítem, sin necesidad de utilizar diversas representaciones o argumentaciones; y 2) conocimiento especializado (ítems b, c y d), ya que demandan al profesor, además de resolver los ítems, el uso de representaciones (gráficas, simbólicas y verbales) y argumentaciones que justifiquen sus procedimientos. En la tarea se ponen en juego dos significados de la derivada: como pendiente de la recta tangente y tasa instantánea de variación.

Cabe señalar que la tarea presentada en la Figura 1, evalúa *dos niveles de conocimiento especializado*. Un primer nivel en el que los futuros profesores deben *hacer uso* de objetos matemáticos primarios, es decir, diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos para resolver la tarea (ítems b y c). El segundo nivel refiere a la competencia de los profesores para *reconocer explícitamente* los objetos matemáticos primarios, mencionados anteriormente, en la resolución de una tarea sobre derivadas (ítem d).

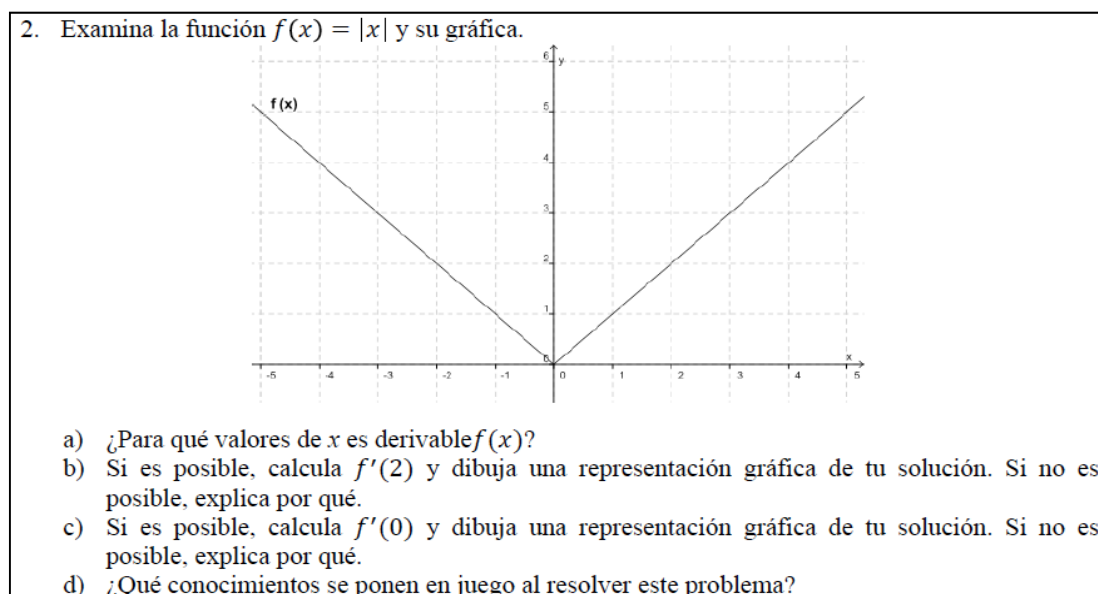


Figura 1. Tarea 2 del instrumento para evaluar el CDM sobre la derivada

En el siguiente apartado se abordan algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado, en términos de los objetos matemáticos y significados asociados que propone el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (Godino, et al., 2007): *elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos*. Estos objetos y significados se agrupan en varios procesos que se explicitan en términos de dualidades (representación – significación; composición – descomposición; particularización – generalización; materialización - idealización). Estos procesos pueden intervenir simultáneamente en la realización de una práctica matemática y su reconocimiento explícito e individualizado por parte del profesor, es necesario para prever posibles dificultades de los estudiantes en la realización de la misma.

Aspectos relevantes del conocimiento especializado

Una de las características fundamentales de los ítems incluidos en el cuestionario sobre el conocimiento especializado, es la reflexión, de los futuros profesores, sobre los

objetos matemáticos, sus significados y las relaciones complejas entre ellos, que se ponen en juego con motivo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las relaciones entre objetos y significados se concreta y se operativiza mediante la noción de *configuración de objetos y procesos* (Godino, et al., 2007). Dicha noción favorece no sólo la identificación sistemática de diferentes procedimientos de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego en su formulación, sino también la identificación de argumentaciones o justificaciones de los procedimientos y las propiedades. Además, el análisis del tipo de tarea propuesta y de las variables didácticas que intervienen en la misma, orientan la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos (Godino, 2009).

A continuación se presenta sucintamente, a manera de ejemplo, el análisis epistémico para una posible solución de la tarea presentada en la Figura 1. En dicho análisis se identifican detalladamente los objetos centrales (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), y procesos que intervienen en el enunciado y en la solución esperada de la tarea. Para su realización nos apoyamos, en parte, en una guía para el reconocimiento de objetos y procesos desarrollada en Godino, Gonzato y Fernández (2010). Dicho análisis forma parte del conocimiento especializado que se espera que los futuros profesores manifiesten, y su promoción debe comenzar desde los cursos de formación inicial.

Proceso de Representación – Significación

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos previos y emergentes. Algunos elementos previos identificados son la representación algebraica de la función valor absoluto de x ($f(x) = |x|$) y su representación gráfica, la representación notacional de la imagen de la función derivada en el punto $x = 2$ ($f'(2)$), y la representación notacional de la imagen de la función derivada en el punto $x = 0$ ($f'(0)$). Como elementos emergentes podemos encontrar la representación notacional que describe el dominio de la función derivada ($\mathbb{R} - \{0\}$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, etc.), la representación gráfica y notacional de la imagen de la función derivada en los puntos $x = 2$ y $x = 0$, así como la representación gráfica de la función derivada de la función “valor absoluto de x ”.

Algunos de los conceptos previos necesarios para la resolución del problema son: el valor absoluto y su definición, el concepto de función (función valor absoluto), dominio (valores de x para los cuales las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ están definidas), imagen (valor $y \in \mathbb{R}$ que se le asigna a cada uno de los valores $x \in \mathbb{R}$ del dominio de la función por medio de una regla de correspondencia) y continuidad. Algunos conceptos emergentes son: el límite, límites laterales, derivada (en el sentido de pendiente de la recta tangente y límite del cociente de incrementos) y derivadas laterales.

Proceso de Composición – Descomposición

A partir de los elementos lingüísticos y conceptos identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos. Algunas proposiciones son: las reglas de correspondencia para las funciones $f(x)$ y $f'(x)$, la continuidad o discontinuidad de dichas funciones, la derivabilidad de una función en un punto crítico, y la relación entre continuidad y derivabilidad.

Mediante el análisis del tipo de elementos lingüísticos, los conceptos y propiedades empleados en las resoluciones, pueden identificarse tanto los procedimientos usados para resolver una tarea como los argumentos que organizan los objetos y los significados, y que constituyen, en conjunto, la justificación o explicación provista para la tarea. Un posible procedimiento se presenta en la Figura 2.

Para saber si existe la derivada de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$, debemos verificar que el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.

Para este caso particular, el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ no existe, ya que:

$$\text{Si } h > 0, \text{ entonces } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{Si } h < 0, \text{ entonces } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Por tanto, dado que las derivadas laterales en $x = 0$ son diferentes, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

Figura 2. Posible resolución del apartado c) de la tarea presentada en la Figura 1

El procedimiento presentado en la Figura 2 puede valorarse como formal dado que los elementos lingüísticos, conceptos y proposiciones empleados para comprobar la derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$, se articulan en torno a la expresión formal de la derivada (límite del cociente de incrementos). Es decir, el procedimiento se centra en la comprobación de la existencia de la derivada en un punto mediante el cálculo de los límites laterales que definen las derivadas laterales. El carácter de formal concedido al procedimiento se basa en la sentencia: “dado que las derivadas laterales son diferentes, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$ ”.

Análisis similares pueden realizarse con otras resoluciones de la tarea, que pongan en juego otros procedimientos y justificaciones que involucren distintos elementos lingüísticos, conceptos y proposiciones. En este sentido los procesos de significación no tienen configuraciones únicas.

Proceso de Particularización – Generalización

La tarea de la Figura 1, plantea un caso particular de la derivabilidad de una función en un punto crítico: “la derivabilidad de la función valor absoluto de x en $x = 0$ ”. La tarea admite posibles generalizaciones que requerirían de los futuros profesores de bachillerato la puesta en práctica de conocimientos especializados y avanzados. Por esta razón, este proceso está estrechamente vinculado con la transición del conocimiento común y especializado al conocimiento avanzado de los futuros profesores.

Ejemplo de una posible generalización sería argumentar por qué la gráfica de una función derivable no puede tener “picos” (esquinas, puntas o ángulos).

Proceso de Materialización – Idealización

Estos procesos son de suma importancia si se quieren explorar los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen los futuros profesores sobre temas específicos de matemáticas, puesto que mediante la manifestación de los objetos materiales los futuros profesores exhiben su comprensión de objetos ideales (y viceversa) tales como la

derivada y, en general, los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen sobre dicho objeto.

La tarea presentada en la Figura 1 requiere que, a partir de objetos materiales (ostensivos) tales como la representación gráfica y algebraica de la función y de los distintos conceptos y definiciones, el futuro profesor atribuya significado a objetos matemáticos ideales emergentes, tales como la derivada, la derivada en un punto, la derivabilidad de una función en un punto crítico.

Resultados y discusión

El Cuestionario *CDM-derivada* se aplicó a una muestra de 53 estudiantes de los últimos cursos de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México. La duración de la licenciatura es de cuatro años (8 semestres). La Facultad de Matemáticas de la UADY es la encargada, a través del plan de estudios de dicha licenciatura, de formar profesores con salida al nivel bachillerato o universitario en el estado de Yucatán en México.

Los 53 estudiantes cursaron cálculo diferencial en el primer año de su licenciatura y, a lo largo de ella, han tomado otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También han cursado materias relacionadas con la didáctica de las matemáticas.

Para el análisis de los resultados obtenidos consideramos variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems) y cualitativas (análisis del tipo de resolución dado a cada tarea, ver apartado 3). Por esta razón nuestra investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

A continuación se ejemplifica, con la tarea de la Figura 1, el tipo de análisis que hemos realizado con cada una de las 11 tareas incluidas en el cuestionario. La Tabla 1 presenta los resultados para el grado de corrección: *respuesta correcta*, *parcialmente correcta* o *incorrecta*, de las respuestas de los futuros profesores.

Tabla 4

Frecuencias y Porcentajes del Grado de Corrección de la Tarea dada en la Figura 1

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)		Apartado c)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	40	75,4	22	41,5	19	35,8
Parcialmente C.	0	0	10	18,8	15	28,3
Incorrecta	10	18,8	15	28,3	13	24,5
No contestan	3	5,6	6	11,3	6	11,3
Total	53	100	53	100	53	100

Se aprecia de la Tabla 1, que un elevado número de los futuros profesores presentaron dificultades para dar respuesta a los apartados b) y c). Así mismo, hemos calculado el grado de corrección global de la tarea, resulta que el 13,2% (7) resolvió de manera incorrecta la tarea, el 69,8% (37) la resolvió parcialmente correcta y el 16,9% (9) la resolvió de forma correcta. Dado que los apartados b) y c) están relacionados con el conocimiento especializado del contenido, los resultados revelan que más de la mitad de los futuros profesores exhiben carencias respecto a este tipo de conocimiento.

Además, a partir del análisis cualitativo de las resoluciones dadas por los futuros profesores, se identificaron tres tipos de procedimientos (y sus argumentos), es decir,

tres tipos de soluciones que tienen asociada una configuración particular de objetos y procesos. A estos 3 tipos de resolución los hemos denominado: gráfico-verbal, técnica y formal. Los resultados respecto al tipo de resolución se presentan en la Tabla 2. Cabe aclarar que el análisis cualitativo (tipo de solución descrita en términos de configuración cognitiva), consistió en la identificación de los objetos y procesos, como el presentado en el apartado 3, asociados a las respuestas.

Tabla 5

Frecuencias y Porcentajes del Tipo de Solución de la Tarea dada en la Figura 1

Tipo de resolución	Apartado a)		Apartado b)		Apartado c)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Gráfico-Verbal	47	88,6	12	22,6	29	54,7
Técnica	2	3,7	33	62,2	13	24,5
Formal	1	1,8	1	1,8	3	5,6
No dan solución	3	5,6	7	13,2	8	15
Total	53	100	53	100	53	100

Se observa que un porcentaje elevado de los futuros profesores proporcionan una resolución gráfico-verbal para los apartados a) y c) (e.g., "...no es derivable en $x = 0$ ya que se pueden trazar infinitas tangentes a la función en ese punto"). Para el apartado b) la mayoría de los futuros profesores proporciona una resolución técnica (i.e., mediante el uso de reglas de derivación y la definición de valor absoluto), y el 9.4% (5) proporcionaron una resolución formal en alguno de los apartados.

Por limitaciones de espacio no se incluyen los resultados del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes al apartado d). En general, los futuros profesores han tenido dificultades para identificar los conocimientos requeridos para resolver la tarea. A pesar de que no han respondido satisfactoriamente al apartado d) se pueden inferir de la configuración de objetos y significados asociada a las "soluciones", los conflictos de significado, información muy importante en los procesos de formación.

Reflexiones finales

Los resultados obtenidos a partir del análisis de las resoluciones que los futuros profesores dieron a las cuestiones incluidas en el Cuestionario CDM-Derivada, señalan que los futuros profesores exhiben ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento común y el conocimiento especializado. Las resoluciones dadas a los ítems sobre el conocimiento especializado (ver apartado d, Figura 1) se circunscriben a la enumeración de algunos conceptos matemáticos. Esto hace advertir insuficiencias en el segundo nivel del conocimiento especializado manifestado por los futuros profesores, que podrían obstaculizar una apropiada gestión del conocimiento de sus futuros estudiantes.

Se observó el predominio de resoluciones de tipo gráfico-verbal (mediante el uso de la derivada en el sentido de pendiente de la recta tangente) y técnicas (mediante el uso de las reglas de derivación).

La aparente desconexión entre el conocimiento común y especializado podría obstaculizar la transición hacia el conocimiento ampliado, ya que al desconocer procedimientos y argumentos formales (como los de la sección 3.2) se dificulta el tránsito hacia eventuales generalizaciones y conexiones con objetos matemáticos más avanzados presentes en el currículo.

Parece justificada la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores. El desarrollo podría lograrse mediante el diseño de procesos de enseñanza de la derivada, distintos a los habituales, que se focalicen en el significado global de la derivada (Pino-Fan, et al., 2011). En el diseño de dichas acciones formativas, debe tenerse en cuenta el conocimiento especializado en sus dos niveles. Por un lado, el uso de diversos elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos; y por otro el desarrollo de competencias para el reconocimiento explícito de objetos matemáticos, sus significados y vínculos entre ellos.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores, EDU2010-14947 (Universidad de Granada) y EDU2009-08120 (Universidad de Barcelona).

Referencias

- Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.
- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona.
- Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, España.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J. D., Gonzato, M., y Fernández, L. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Johnson, R.B., y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research*, 33(7), 14-26.
- Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 142-178.
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2-3), 285-311.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Tsamir, P., Rasslan, S., y Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to Right-or-Wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 240-251.

LA COMPRENSIÓN DE LA APROXIMACIÓN A UN NÚMERO EN EL ACCESO AL SIGNIFICADO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

THE UNDERSTANDING OF THE APPROXIMATION TO A NUMBER IN THE ACCESS TO THE MEANING OF THE FUNCTION LIMIT AT A POINT

Pons, J., ⁽¹⁾, **Valls, J.** ⁽²⁾, **Llinares, S.** ⁽²⁾

I.E.S Mutxamel, Alicante ⁽¹⁾, *Universidad de Alicante* ⁽²⁾

Resumen

Esta investigación estudia la influencia de la comprensión de la aproximación a un número y de los modos de representación en la construcción de la concepción dinámica del límite en estudiantes de Bachillerato. El análisis se realizó usando el análisis implicativo (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). Los resultados indican que la construcción paulatina de la concepción dinámica del límite se realiza mediante procesos diferenciados de aproximación en el dominio y en el rango, y, dentro de estos últimos, aquellos en los que las aproximaciones laterales coinciden de las que no coinciden. Además, nuestros resultados indican que el modo numérico o el modo algebraico-numérico desempeñan un papel relevante en el desarrollo de la comprensión de la concepción dinámica de límite.

Abstract

The goal of this research was to study the influence of the understanding of the approximations and the modes of representation on secondary high school students' understanding of dynamic conception of the limit of a function. Analysis was carried out using implicative analysis (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). The findings indicate that there is a progressive construction of meanings of the dynamic conception of limit of a function draw on the understanding of idea of approximation to a number in the domain and rank of the function, and also considering in the rank the coincidence of the lateral approaches. Addition, the representation modes played a relevant role in the development of dynamic conception of limit of a function.

Palabras clave: *Comprensión de límite de una función, análisis implicativo, idea de aproximación a un número, modos de representación.*

Key words: *Understanding of limit concept, implicative analysis, idea of approaches to a number, representation modes.*

La comprensión del límite de una función en un punto

La comprensión del límite de una función real de variable real es un aspecto importante para los estudiantes de educación postsecundaria (Tall, 1991). La enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite han sido y son objeto de investigaciones en los últimos 30 años. La importancia del concepto de límite radica en que es una idea fundamental del análisis matemático vinculada a conceptos como continuidad, derivada, e integral. Las diferentes investigaciones indican que el concepto de límite es una noción difícil, y que muchas veces la idea de aproximación a un número es el primer contacto que tienen los estudiantes con este concepto a través de la noción dinámica de límite (Cornu, 1991). La metáfora más común entre los estudiantes se apoya sobre la idea de aproximación. La fuerza y la frecuencia de estas ideas no debe sorprendernos, porque la aproximación está incluida en muchas de las motivaciones históricas del cálculo e impregna las clases y los libros de texto (Oehrtman (2009). Los primeros ejemplos que tienen los estudiantes con el concepto de límite provienen de la idea de sucesión, por eso no debería sorprendernos que la imagen dominante del concepto de límite sea la de una sucesión monótona o que necesiten una fórmula como parte esencial para su comprensión (Tall, 1992). Por eso, la utilización de fórmulas para el cálculo de límites hace que el álgebra sea al mismo tiempo una ayuda y un impedimento (Bergsten, 2006). Diferentes investigaciones (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendrf, Thomas y Vidakovic, 1996; Przenioslo, 2004; Roh, 2008; Oehrtman, 2009; Kidron, 2011) señalan la influencia de la concepción dinámica dada por Blázquez y Ortega (2002):

“Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a , y se debiera escribir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, si cuando x se

acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada”

en la comprensión de la concepción métrica dada a través de

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Cottrill et al. (1996) indican que la dificultad de los estudiantes para comprender la definición formal del límite puede ser el resultado de una comprensión insuficiente de su concepción dinámica. Estos autores indican que los estudiantes deben construir un proceso de aproximación en el dominio y un proceso de aproximación en el rango y usar la función para coordinarlos. Además, conjeturan que la necesidad de coordinar los dos procesos de aproximación con la cuantificación que se deriva de la concepción métrica es lo que hace que el concepto de límite sea inaccesible para muchos estudiantes. En la comprensión de la coordinación de estos procesos de aproximación desempeñan un papel determinante los diferentes modos de representación. En esta dirección, Blázquez y Ortega (2001) indicaron que la utilización de distintos sistemas de representación cuando se trabaja el concepto de límite tropieza con las dificultades del cambio de sistema de representación, que podría ser un obstáculo didáctico, por el abuso del registro algebraico en la enseñanza tradicional.

Las características de la comprensión de los estudiantes del concepto de límite de una función en un punto

Las investigaciones anteriores nos han proporcionado cierta información sobre las características de la comprensión del concepto de límite en los estudiantes, y en particular el papel desempeñado por las traslaciones entre los diferentes modos de representación, pero no aportan información sobre el papel relevante que desempeña la idea de aproximación a un número, tanto en el dominio como en el rango, para el establecimiento de relaciones significativas con la concepción dinámica del límite. Por ello nos hemos planteado las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el papel que desempeña la comprensión de la idea de aproximación a un número en la construcción de la concepción dinámica del límite?
- ¿Cómo influyen los distintos modos de representación en la comprensión de la aproximación a un número?

Método

Participantes

En la investigación han participado 129 estudiantes de bachillerato (66 de 1º curso y 63 de 2º curso de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. A los estudiantes de 1º de Bachillerato se les había introducido la noción de límite de una función en un punto dos semanas antes de contestar el cuestionario. A los de 2º de Bachillerato les habían introducido la misma noción seis meses antes de que realizaran el cuestionario.

Instrumentos y procedimiento de recogida de datos

Inicialmente revisamos investigaciones previas (Engler, Vrancken, Hecklein, Müller, y Gregorini, 2007, Roh, 2008)) sobre el concepto de límite de una función, analizamos libros de texto, materiales curriculares y las nociones de aproximación dinámica y métrica de límite de una función con el objetivo de identificar los elementos matemáticos que la constituyen. Dichos elementos se muestran en la figura 1. Diseñamos un cuestionario y entrevista inicial (Valls, Pons y Llinares, 2011; Pons, Valls, y Llinares, 2011).

- Sea f una función y x_0 un número real. El valor de la función f en $x=x_0$, $f(x_0)$ si existe o no, (E0)
- Idea de aproximación
 - x se aproxima al número a (E1)
 - $f(x)$ se aproxima a L (E1)
- Coordinación en la concepción dinámica: cuando x se aproxima al número a , sus imágenes $f(x)$ se aproximan a L (E2)
- Coordinación en la concepción métrica: se puede encontrar para cada ocasión un x suficientemente cerca de a tal que el valor de $f(x)$ sea tan próximo a L como se desee (E4)
- Formalización como una manifestación de ser consciente de la existencia del límite L de la función $f(x)$ en el punto a , escribiendo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (E3)

Figura 1. Elementos matemáticos considerados en el esquema límite de una función

A partir de los resultados de este primer enfoque revisamos el cuestionario e incorporamos nuevas tareas con la finalidad de obtener mayor información sobre el papel que desempeñan los diferentes modos de representación en la comprensión de los estudiantes de la idea de aproximación. Este segundo cuestionario constaba de 8 tareas con un total de 30 ítems. Las tareas se presentaron en tres modos de representación: numérico (N), gráfico (G), y algebraico-numérico (AN).

A continuación, describimos dos de las tareas (Figura 2). La Tarea 1 procede de la investigación de Engler y otros (2007) y se presenta en modo N. La Tarea 8, creada para esta investigación, se presenta en modo AN. Ambas tienen como objetivo poner de manifiesto cómo los estudiantes comprenden las ideas de: (i) “aproximación a un número” (E1), (ii) “coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango de la tabla” (E2) y (iii) “manifestar formalmente la existencia del límite” (E3).

Tarea 1 A partir de la tabla, responde: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>2.9</td> <td>2.99</td> <td>2.999</td> <td>2.9999</td> <td>...</td> <td>3.0001</td> <td>3.001</td> <td>3.01</td> <td>3.1</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>14.21</td> <td>14.9201</td> <td>14.992001</td> <td>14.99920001</td> <td>...</td> <td>15.00080001</td> <td>15.0080001</td> <td>15.0801</td> <td>15.81</td> </tr> </table> a. ¿A qué número se aproxima x? b. ¿A qué número se aproxima la función, f(x)? c. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x d. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3	x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1	f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81	Tarea 8 Siendo $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>-0.1</td> <td>-0.01</td> <td>-0.001</td> <td>-0.0001</td> <td>...</td> <td>0.0001</td> <td>0.001</td> <td>0.01</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> a. Completa la tabla b. ¿A qué número se aproxima x? c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)? d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x. e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0	x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1	f(x)									
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1																																
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81																																
x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1																																
f(x)																																									

Figura 2. Tareas 1 y 8

Análisis

En primer lugar, tres investigadores realizaron una lectura conjunta de las respuestas a cada uno de los ítems con el objetivo de generar criterios y unificar la codificación dicotómica, (1 respuesta correcta, 0 incorrecta). A continuación, ejemplificamos este proceso a partir de las respuestas dadas por una estudiante a la tarea 1. En la Tarea 1 (Figura 2) el ítem 1a y el 1b reflejan la aproximación a un número en el dominio y el rango, respectivamente, el ítem 1c la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, y el ítem 1d la formalización. La respuesta a la Tarea 1 de la estudiante EST 74 (Figura 3) fue codificada como (1,1,1,0) al responder de forma correcta a los ítems 1a, 1b, y 1c al asociar la aproximación a un número en el dominio a un número natural ($x = 3$), la aproximación en el rango a un número natural ($f(x) = 15$), y al coordinar las aproximaciones en el dominio y el rango (Cuando más se acerca x al 3, más se acercará f(x) al 15). Finalmente, el ítem 1d se codificó 0 al no haber sido contestado.

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número x se aproxima x ? 3

b) ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$? 15

c) Describe el comportamiento de la función, $f(x)$, en relación al comportamiento de la variable x
cuanto más se acerca x al 3, más se acercará $f(x)$ a 15.

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 3} =$ _____

Figura 3. Respuesta de EST74 a la Tarea 1

En segundo lugar, se llevó a cabo un análisis estadístico implicativo (Gras et al., 2008) con el objetivo de dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas. Trigueros y Escandon (2008) señalan que, en la estadística implicativa, dada una población E , los estudiantes, y un conjunto de variables, los ítems del cuestionario, “se busca dar sentido estadístico a una implicación no estricta $a \Rightarrow b$ ” (pág. 66). En esta metodología, “la implicación $a \Rightarrow b$ será admisible en una experiencia si el número de individuos de E que la contradicen es muy pequeño, en términos probabilísticos, en relación con el número de individuos esperado bajo la hipótesis de ausencia de relación. Si esto ocurre, se puede decir que A , conjunto de observaciones que satisfacen la característica a , está “casi” contenido en B , conjunto de observaciones que satisfacen la característica b ” (pág. 67).

Para realizar el análisis estadístico implicativo se usó el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Gras et al., 2008). Este análisis traduce gráficamente el conjunto de las relaciones cuasi-implicativas entre las variables en distintos niveles de significación. Para realizar este análisis se configuraron un total de 30 variables a partir de los elementos matemáticos del esquema del límite de una función vinculados a cada ítem y al modo de representación usado en la redacción de cada problema. Las variables fueron simbolizadas mediante un código. En dicho código, la letra E_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) indica el elemento matemático que se pone de manifiesto en el ítem, la letra que le sigue hace referencia a la inicial del modo de representación usado en la presentación del problema (G, N, AN) y, por último, el número y la letra en minúscula hacen referencia, respectivamente, a la tarea y al ítem al referenciado. Por ejemplo, el ítem

¿A qué número se aproxima x ?

fue codificado como “E1N1a” indicando: el elemento “aproximación a un número” E1, en modo numérico (N), en la tarea 1, y en el ítem a . Las respuestas de los 129 estudiantes fueron organizadas en una tabla de doble entrada, 30x129.

El análisis implicativo realizado al 99% de significación estadística muestra diferentes ideas, a través de implicaciones señaladas por las flechas de la figura 4, que indican de qué manera se articula la comprensión de la idea de aproximación en el dominio y en el rango para construir el significado de la idea de límite y su formalización, así como la manera en qué intervienen los diferentes modos de representación en este proceso. Además, usamos una de las posibilidades del programa

CHIC “suprimir o centrarse” solamente en determinadas variables (Gras y Kuntz, 2009). En los gráficos implicativos generados, las respuestas de los estudiantes a los ítems que inician las ramas conllevan que esos estudiantes respondan acertadamente a la mayoría de los ítems que aparecen en la parte inferior del gráfico.

Resultados

Los resultados están organizados en dos secciones. En la primera sección se describen las relaciones implicativas considerando los distintos modos de representación y el acceso a la idea de aproximación a un número. En la segunda sección describimos la relación entre la aproximación a un número y la comprensión dinámica de límite.

Acceso a la idea de aproximación a un número. El papel de los modos de representación.

En el diagrama implicativo al 99% de significación (Figura 4) hemos seleccionado las variables que hacen referencia a los elementos matemáticos E0 y E1. Este gráfico muestra dos ideas relevantes relativas al papel de los modos de representación y el acceso a la idea de aproximación a un número (Figura 5a y b, extraídas de la figura 4).

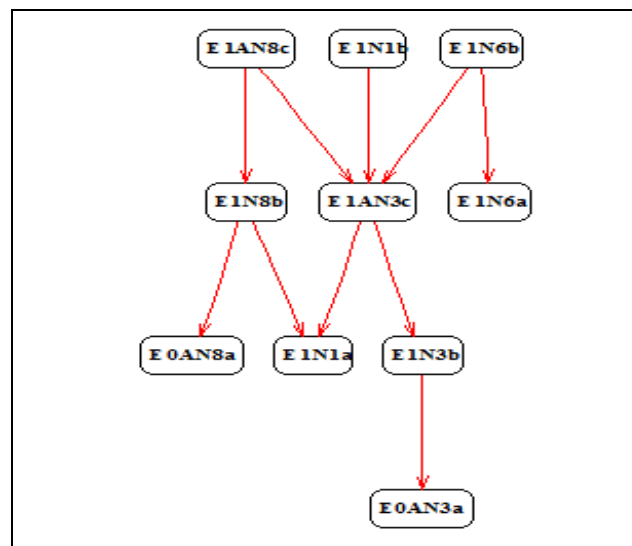


Figura 4. Relaciones implicativas al 99% de las variables relativas a los elementos E0 y E1

Las figuras 5a-b se pueden interpretar indicando que si los estudiantes comprenden:

- en modo numérico, la aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales coinciden, son capaces de identificar esta misma aproximación en modo algebraico-numérico ($E1N1b \Rightarrow E1AN3c$). La misma relación se da cuando las aproximaciones laterales en modo numérico no coinciden ($E1N6b \Rightarrow E1AN3c$).

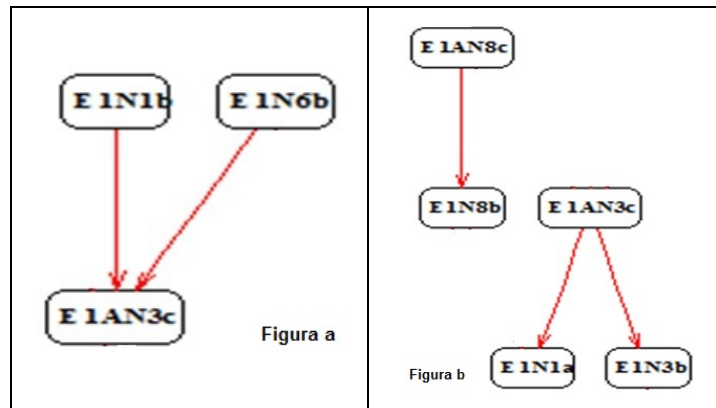


Figura 5a-b. Relaciones al 99% de variables en modos N y AN relativas al elemento E1

- b. en modo algebraico-numérico, la aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales coinciden, son capaces de identificar esta misma aproximación en modo numérico ($E1AN3c \Rightarrow E1N1a$ y $E1AN3c \Rightarrow E1N3b$). La misma relación se da cuando las aproximaciones laterales en modo algebraico-numérico no coinciden ($E1AN8c \Rightarrow E1N8b$).

Estas dos ideas indican que los estudiantes utilizan indistintamente los modos de representación numérico y algebraico-numérico para acceder a la idea de aproximación a un número.

La idea de aproximación a un número y la comprensión dinámica de límite

En la figura 6a (extraída de la figura 4) se puede interpretar que comprender la aproximación a un número en el dominio está vinculado al cálculo de los valores de la función en un punto ($E1N8b \Rightarrow E0AN8a$, y $E1N3b \Rightarrow E0AN3a$), necesario para la construcción de la sucesión de números que muestran la aproximación en el rango. Estas dos implicaciones deben ser entendidas en el contexto del tipo de ítems que constituían el cuestionario presentado a los estudiantes.

Por otra parte, las cuatro variables que hacen referencia a la idea de aproximación en el rango (Figura 6b, extraída figura 4) dan lugar a dos relaciones implicativas: $E1AN8c \Rightarrow E1AN3c$, y $E1N6b \Rightarrow E1AN3c$ indicando que: (i) la comprensión de la aproximación a un número en el rango se inicia en modo algebraico-numérico y se consolida en este mismo modo, y en él numérico, y (ii) la comprensión de la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden ($E1AN8c$, y $E1N6b$), se apoya en la comprensión de la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden ($E1AN3c$).

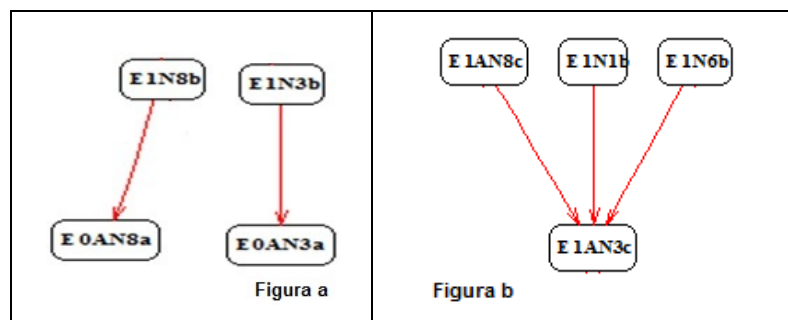


Figura 6a-b. Relaciones al 99% entre las variables "idea de aproximación numérica", en el rango (E1)

Si analizamos la subestructura de la Figura 6b, en función del resto de variables y relaciones de la Figura 4, podemos inferir que: (a) la comprensión de la aproximación a un número en el rango (cuando las aproximaciones laterales coinciden, y cuando no) está vinculado a la comprensión de la aproximación a un número en el dominio (en modo numérico), y que (b) la aproximación a un número en el dominio no implica necesariamente la comprensión de la aproximación a un número en el rango. Este hecho establece una diferencia cognitiva entre los procesos de aproximación en el dominio y en el rango.

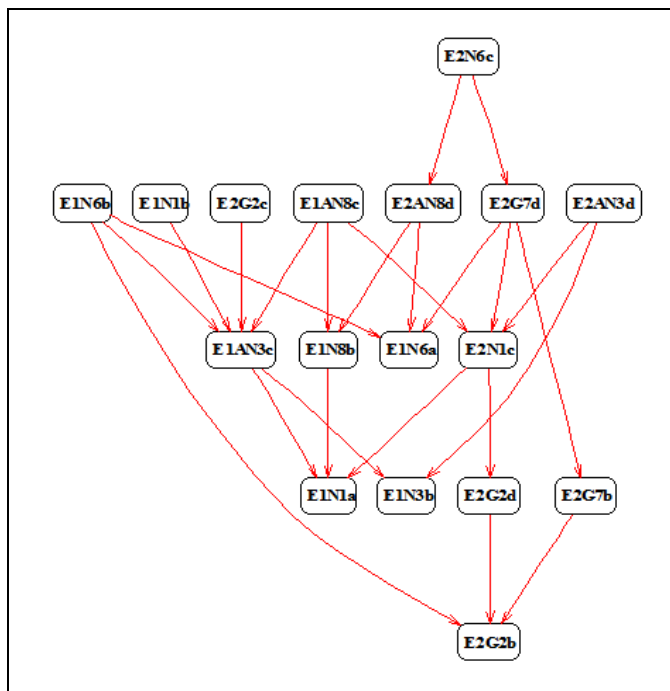


Figura 7. Relaciones al 99% entre las variables relativas a los elementos E1 y E2

Del diagrama implicativo al 99% (Figura 7) en el que hemos seleccionado todas las variables que hacen referencia a los elementos matemáticos “aproximación a un número” (E1) y “coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango” (E2), hemos extraído relaciones en las que toma parte la idea de aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden (Figura 8). Su análisis permite identificar dos ideas relevantes relativas al papel que desempeña la idea de aproximación a un número en la comprensión dinámica de límite.

La figura 8 se puede interpretar como que si los estudiantes comprenden la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden:

- en modo algebraico-numérico, son capaces de identificar: (i) la aproximación en el dominio, en modo numérico ($E1AN8c \Rightarrow E1N8b$); (ii) la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, en modo algebraico-numérico ($E1AN8c \Rightarrow E1AN3c$); y (iii) la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, en modo numérico ($E1AN8c \Rightarrow E2N1c$).
- en modo numérico, son capaces de identificar: (i) la aproximación en el dominio, en modo numérico ($E1N6b \Rightarrow E1N6a$); (ii) la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, en modo algebraico-numérico ($E1N6b \Rightarrow$

E1AN3c); y (iii) la coordinación por la izquierda las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando estas coinciden, en modo gráfico ($E1N6b \Rightarrow E2G2b$).

Estos datos indican que comprender la aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales no coinciden implica ser capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden. Es decir, la no coincidencia de las aproximaciones laterales a un número en el rango “incide” en la generación de relaciones implicativas.

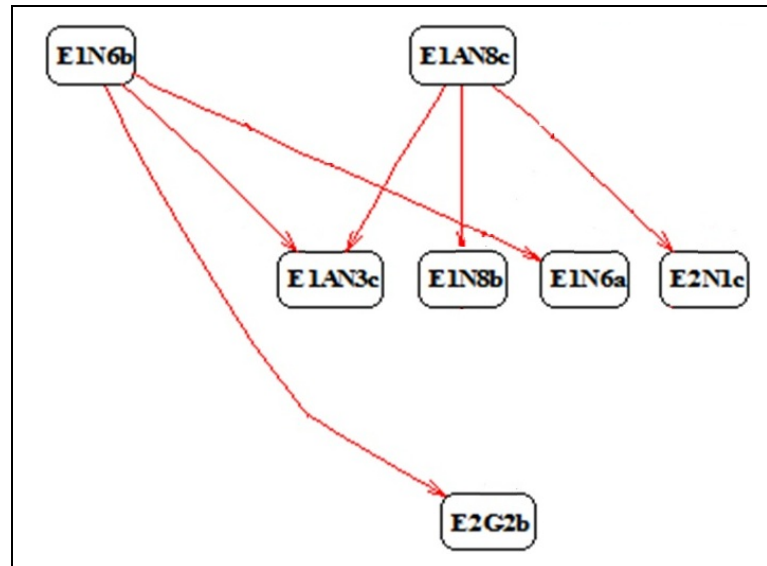


Figura 8. Relaciones al 99% entre variables relativas a los elementos E1 y E2

Conclusión

El objetivo de esta comunicación ha sido aportar información sobre cómo los estudiantes de primero y segundo de bachillerato construyen, en este nivel, el significado para el concepto de límite de una función en un punto a partir de la aproximación a un número, y qué papel desempeñan los modos de representación. Los resultados indican que la comprensión de la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales en el rango es un elemento importante en el proceso de construcción del significado de límite de una función en un punto. Además, indican que la construcción de la concepción dinámica del límite se realiza de forma paulatina.

En un primer momento, la idea de aproximación a un número en el dominio se apoya en el cálculo de valores de la función dada en modo algebraico y que la idea de aproximación en el rango se apoya en la idea de aproximación en el dominio. Además, la idea de aproximación en el rango se inicia en modo algebraico-numérico y se consolida en los modos numérico y algebraico-numérico. Nuestros resultados indican que los modos numérico o algebraico-numérico desempeñan un papel relevante en el desarrollo de la comprensión de la concepción dinámica de límite.

Además, la idea de aproximación a un número en el rango, cuando las aproximaciones laterales no coinciden, en los modos numérico y algebraico-numérico, se apoya en la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, cuando las aproximaciones laterales coinciden. Es decir, que la construcción paulatina de la concepción dinámica del límite se realiza mediante los procesos de aproximación diferenciando por una parte los que se realizan en el dominio, de los que se realizan en el rango, y dentro de estos últimos aquellos en los que las aproximaciones laterales

coinciden de aquellos en las que no coinciden. Sin embargo, un hecho importante puesto de manifiesto por nuestros resultados es que la comprensión de la idea de aproximación en el rango, cuando las aproximaciones laterales no coinciden, implica la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, cuando las aproximaciones laterales coinciden, pero no implica necesariamente ser capaz de establecer esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden. La importancia de este hecho radica en que podría señalar la diferencia cognitiva que para el estudiante resulta tener que en la aproximación a un número en rango, coincidan o no las aproximaciones laterales (Valls et al., 2011; Pons et al., 2011)

Referencias

- Bergsten, C. (2006). Trying to Reach the Limit – The Role of Algebra in Mathematical Reasoning. *Proceedings of the 30nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 2, 153 – 160.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 219- 236.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, 67 – 83.
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167 – 192.
- Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, D., Müller, D. y Gregorini, M.I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *UNIÓN*, 11, 113 – 132.
- Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical Implicative analysis. Theory and Applications*. London: Springer.
- Gras, R. y Knutz, P. (2009). El análisis estadístico implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. En P. Orús, L. Zamora, P. Gregori (ed), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 3-49). Castellón, España: Innovacio Digital Castello.
- Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(6), 695-717
- Oehrtman, M. (2009). Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Students Metaphors for Limit Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (4), 396 – 426.
- Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2011). Coordination of Approximations in Secondary School Students' Understanding of Limit Concept. *Proceedings of the 35nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 3, 393 – 400.
- Przenioslo, M. (2004). Images of the Limit of a Function in the Course of Mathematical Studies at the University. *Educational Studies Mathematics*, 55, 103 – 132.

- Roh, K. H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies Mathematics*, 69, 217 – 233.
- Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D.Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 3 – 21). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. En Grows J. (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. MacMillan Publishing, Reston. pp. 495 – 511.
- Trigueros, M. y Escandon, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 13 (36), 59 – 85.
- Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 325 – 338.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE FUTUROS MAESTROS SOBRE FRACCIONES. EL ROL DE LA UNIDAD

EARLY YEARS' PROSPECTIVE TEACHERS MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF FRACTIONS. THE ROLE OF THE WHOLE

Ribeiro, C.M.

*Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO),
Universidade do Algarve*

Resumen

El tema de fracciones es uno de los más complejos a los que los alumnos de los primeros años de escolaridad han de enfrentarse, mostrando grandes dificultades en su aprendizaje. En este estudio se aborda el conocimiento del profesor para la enseñanza de este tópico, enfocando las causas matemáticas que podrían estar asociadas a las dificultades mencionadas. Se utiliza el modelo del Mathematical Knowledge for Teaching, centrándonos en el dominio del conocimiento del contenido. Se discuten aspectos del conocimiento que revelan futuros profesores sobre fracciones y el papel de la unidad, como génesis de una problematización de su formación como futuros profesores.

Abstract

The topic of fractions is one of the more complex concepts children encounter in their schooling, revealing serious difficulties in its understanding. In this paper the focus is on future teachers' knowledge on this topic, focusing on the possible mathematical reasons in which the students' difficulties may be grounded. The Mathematical Knowledge for Teaching conceptualization is considered as a way to focus on teachers subject matter knowledge. Some dimensions of future teachers' knowledge on fractions concerning fractions and the role of the whole are discussed, as a starting point for reflecting upon teachers' training.

Palabras clave: *Fracciones; Mathematical knowledgge for teaching; Formación inicial de maestros.*

Key words: *Fractions; Mathematical Knowledge for Teaching; initial teachers' training.*

Introdução

A formação de professores é uma das áreas em que, nos anos recentes, o governo português tem investido verbas significativas tendo, por objetivo último, ainda que nem sempre explícito, melhorar os resultados escolares dos alunos (e.g., GAVE, (2010). Estes investimentos e tentativa de normalização da formação fornecida a nível nacional efetivaram-se, por um lado, na implementação de um Programa Nacional de Formação Contínua para professores do 1.º e 2.º Ciclos, em que um dos objetivos era o de incrementar o conhecimento matemático, didático e curricular dos professores¹ (na perspetiva de Shulman (1986)). Por outro lado, por força da implementação do Processo de Bolonha, foi definido, ministerialmente, um conjunto de orientações relativas ao número de ECTS's de cada área curricular. Estas alterações consideram, de forma explícita, que o professor tem uma influência maior nos resultados dos alunos que qualquer outro fator (e.g., tamanho da turma ou escola, ou mesmo sistema escolar (Nye, Konstantopoulos & Hedges, 2004)).

Conquanto estas alterações na formação, um dos tópicos com que os alunos continuam a lutar concerne frações e, em particular, no que se refere a entenderem a matemática subjacente e as diferentes interpretações e representações que as frações podem assumir (e.g., Behr, Lesh, Post e Silver (1983). Estas dificuldades podem advir das abordagens efetuadas pelos próprios professores (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993), dificuldades essas que se relacionam, obviamente, com o seu conhecimento deste tópico. Apesar do reconhecimento destas dificuldades (dos alunos), e deste tópico se encontrar entre os conceitos matemáticos mais complexos que os alunos encontram durante os primeiros anos (Newstead & Murray, 1998), a maioria das investigações sobre frações centra-se nos alunos, relegando para segundo plano o papel do professor (e do seu conhecimento sobre o tema) nas aprendizagens matemáticas dos alunos.

Por outro lado, o conhecimento do professor tem sido foco de atenção (e discussão) ao longo dos tempos, encontrando-se os trabalhos de Shulman (1986) na génese de muitas das concetualizações emergentes. Uma dessas concetualizações refere-se ao *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames & Phelps, 2008) que, focando-se somente nas dimensões que se encontram relacionadas com a especificidade do conteúdo, considera diferentes subdomínios do conhecimento do professor. Esta conceptualização encontra-se, ainda, em elaboração (e.g., Ball et al., 2008; Jakobsen, Thames, Ribeiro e Delaney, 2012) sendo, portanto, de fulcral importância, um aprofundamento e clarificação sobre o conteúdo de cada um dos seus subdomínios, possibilitando um seu enriquecimento ou mesmo uma sua reelaboração.²

De modo a podermos conceptualizar formas de melhorar a formação, a prática e o conhecimento docente, promovendo uma discussão da conceptualização do MKT, é essencial aceder às áreas do conhecimento matemático em que os professores, atuais ou futuros, se encontram mais deficitários, permitindo conduzir, assim, a uma reestruturação dos programas de formação, na sua essência mas também no seu foco (Ribeiro & Carrillo, 2011a). Este texto forma parte de uma investigação que tem vindo a ser desenvolvida tendo como objetivo amplo proporcionar, por um lado, um enriquecimento do conteúdo dos diferentes subdomínios do MKT e, por outro, equacionar um refinamento dessa conceptualização, sendo que uma das aproximações se prende com um foco na formação inicial de professores. Nesse contexto, pretende-se

¹ Para mais informações consultar, por exemplo, Canavarro e Rocha (2008).

² Será também fulcral uma discussão teórica sobre alguns dos pressupostos em que esta se fundamenta.

aceder e explorar o MKT de futuros professores dos primeiros anos³ por forma a conceptualizar estratégias que contribuam para um seu incremento. Aborda-se, aqui, o tópico de frações, focando concretamente o papel da unidade, as relações entre as partes e o todo e dos diferentes possíveis “tipos de todo”, a partir de uma tarefa que, na sua génese, tinha sido preparada para alunos do 5.º ano – etapa educativa que estes futuros professores poderão vir a lecionar. A questão é a seguinte:

Que MKT (conhecimento do conteúdo) revelam futuros professores dos primeiros anos sobre frações e o papel da unidade numa tarefa preparada para alunos do 5.º ano de escolaridade, por forma a podermos especificar aspetos críticos a abordar na formação por forma a melhorá-la?

Alguns apontamentos teóricos

As frações são, atualmente, um dos tópicos incluídos no tema de Números e Operações, desde o 1.º Ciclo (Ponte et al., 2007) em que os alunos revelam uma dificuldade acentuada e que tem despertado variados focos de interesse (e.g., Monteiro e Pinto (2005)), advindo também essas dificuldades do facto de as frações corresponderem a um constructo multifacetado (e.g., Kieren (1995)). De modo a que estas dificuldades possam ser superadas é fulcral que seja dada especial atenção ao conhecimento do professor e à sua formação – encarando a formação como um processo evolutivo onde os alunos de hoje serão os professores de amanhã.

Esse conhecimento pode ser encarado sob múltiplas perspetivas e com distintos focos. Considero a linha do *mathematical knowledge for teaching* (MKT) (e.g., Ball et al., 2008) conjugando aspetos de outras aproximações que se encontram em desenvolvimento (e.g., Fernández e Figueiras, 2011; Jakobsen et al., 2012). A opção por esta conceptualização prende-se com o facto de considerar os subdomínios do MKT (veja-se breve especificação mais adiante), como um ponto de partida primordial para a conceptualização de tarefas para a formação (matemática) dos professores, e para investigar que alterações (*inputs*) na formação de professores produzem efeitos nos alunos e nas práticas. Nesse sentido considero, também, pertinente equacionar formas de contribuir para promover uma melhoria da conceptualização em si.

A conceptualização do MKT considera apenas as dimensões relacionadas com a especificidade do conteúdo (comparando-as também com o conhecimento matemático envolvido noutras atividades profissionais). Pela natureza do trabalho que aqui se reporta (veja-se epígrafe seguinte), irei referir-me apenas aos três subdomínios do conhecimento do conteúdo matemático. Neste domínio encontra-se incluído o *common content knowledge* (CCK), que se configura como o conhecimento matemático que permite saber fazer (na ótica do utilizador – que corresponde a muito do conhecimento matemático envolvido noutras atividades profissionais); *specialized content knowledge* (SCK), que se corresponde com o conhecimento que, ao complementar o CCK, possibilita, ao professor, abordar os tópicos com efetiva compreensão, permitindo, posteriormente, torná-los compreensíveis para os outros, possibilitando uma navegação frutífera entre diferentes representações, e o *horizon content knowledge* (HCK), que é considerado como o conhecimento matemático que permite uma visão simultaneamente

³ Pelo Processo de Bolonha, os três primeiros anos de formação inicial dos professores do pré-escolar, do 1.º e do 2.º ciclo são comuns (alunos desde os 6 meses até aos 12 anos) efetuando posteriormente masters profissionalizantes de 18 ou 24 meses, especificamente, para a(s) faixa(s) etária(s) que pretendem.

global e local de como os distintos tópicos evoluem ao longo da escolaridade (também no sentido da longevidade das generalizações) e se (inter)relacionam.

Esta especificidade do MKT, quando comparada com o conhecimento matemático de outros profissionais, encontra-se diretamente associada com as tarefas que os professores desenvolvem (e a(s) forma(s) como o fazem, ou deveriam/poderiam fazer) e incluem, entre outras, responder a questões de porquê, utilizar uma linguagem matematicamente adequada ou reconhecer o que se encontra envolvido na utilização de determinada representação.

O contexto de formação de professores e da investigação

Este texto forma parte de um estudo mais amplo que pretende, por um lado, problematizar a conceptualização dos subdomínios do MKT e seu conteúdo e, por outro, contribuir de forma explícita para melhorar a formação de professores – possibilitando discutir a especificidade do conhecimento do professor e os tipos e foco das tarefas propostas na formação. Nesse sentido têm vindo a ser desenvolvidos trabalhos em distintos tópicos e aspetos matemáticos (e.g. quadriláteros, gráficos, definições), sendo que aqui efetuamos uma primeira aproximação ao MKT de futuros professores no que concerne às interpretações sobre fração, ao(s) papel(eis) da unidade e tipo(s) de unidade.

Combina uma metodologia qualitativa com um estudo de caso instrumental (Stake, 2005), envolvendo 60 futuros professores (distribuídos por dois grupos) que frequentavam uma Unidade Curricular (UC) onde este tópico era um, entre vários, a ser abordado. Para este tema, as tarefas foram selecionadas de um conjunto de tarefas a propor a alunos dos primeiros anos (Monteiro & Pinto, 2007) e, posteriormente, adaptadas ao contexto da formação de professores. Foram resolvidas, primeiramente, em grupos de quatro ou cinco estudantes e posteriormente discutidas em grande grupo. A recolha de dados consiste das resoluções dos alunos e notas de campo, focadas nas discussões ocorridas nos grupos durante a resolução das tarefas e, posteriormente, aquando da discussão em grande grupo.

Em todas as tarefas foi solicitado que os futuros professores apresentassem respostas às questões como se fossem alunos dos primeiros anos e, posteriormente, enquanto professores, discutindo ambas as respostas. Aqui discuto apenas parte de uma das tarefas e apenas as respostas enquanto professores: *A professora Maria pretende explorar com os seus alunos do 1.º ano algumas noções associadas às frações, tendo com esse intuito preparado um conjunto de tarefas envolvendo cinco barras de chocolate iguais. Que quantidade de chocolate receberá cada uma de seis crianças se dividirmos equitativamente as cinco barras de chocolate entre elas?*

Para a análise, as situações matematicamente críticas assumem papel de destaque, tendo por intuito obter um mais amplo entendimento dos motivos matemáticos que levam a que essas situações não façam parte da sua zona de conforto, bem como de modo a obter informação sobre o conteúdo de cada subdomínio. Estas assumem-se como fundação para preparar materiais que potenciem um incremento no MKT dos professores e problematizar a nossa própria atuação. Dessas análises emergiram um conjunto de categorias que se prendem, por um lado, com o recurso exclusivo a representações pictóricas ou numéricas, ou a estratégias mistas e, por outro, à forma como é considerada a unidade. Saliente-se que mais do que mostrar que existem carências (algo já bastante explorado) aqui o intuito é, primordialmente, dar significado aos motivos que as sustentam, e equacionar formas de poderem ser colmatadas.

Discutindo alguns resultados

Em primeiro lugar, há que salientar que apenas um dos grupos de trabalho apresentou uma resposta matematicamente correta, o que se configura como um resultado preocupante quando encaramos o MKT dos (futuros) professores como um dos pilares basilares de uma prática matemática que promova o desenvolvimento de um amplo e sustentado conhecimento matemático dos alunos.

As resoluções incorretas apresentadas podem ser agrupadas tendo em consideração o(s) tipo(s) de representação utilizados (fundamentalmente pictóricas (Figura 1) ou numéricas e as que tentam efetuar correspondências entre estas (Figura 2)) ou considerando as formas de encarar a unidade (uma das barras ou toda a quantidade de chocolate (considerando inclusivamente em algumas situações essa quantidade total como quantidade contínua ou discreta).

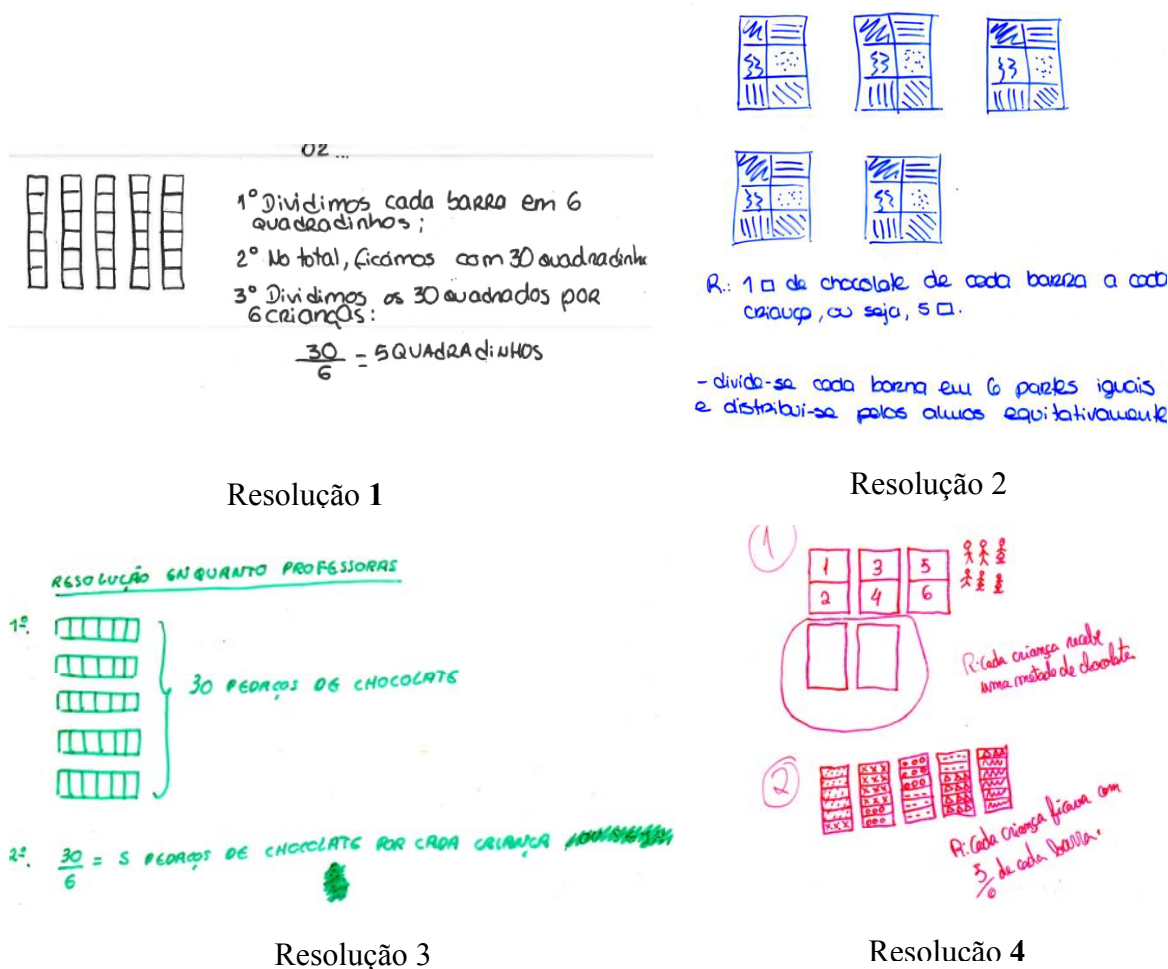


Figura 3 – Resoluções fundamentalmente pictóricas

Estes futuros professores tendem a recorrer, essencialmente, à utilização de quantidades inteiras, enumerando a quantidade de “pedaços” que cumpre a cada criança, sem equacionarem se se trata, ou não, de uma divisão equitativa ou se tal seria (im)possível. Ao referirem que “dividem as barras em seis quadradinhos” (assumindo-as como retângulos – Resolução 1), não problematizam sequer as condições em que

poderiam fazê-lo (as lacunas em termos de CCK não permitem perspetivar conexões com outros tópicos – HCK, no sentido de Fernández e Figueiras (2011)). Estas formas de abordar o problema poderão estar (estarão) também relacionadas com as suas experiências prévias (e.g., Behr et al., 1993), as quais urge ampliar, incrementando o seu MKT – sendo que para isso é fulcral conhecer as áreas em que estes se encontram mais deficitários, conceptualizando formas de o ensinar.

Para além de não atribuírem qualquer importância à unidade que pretendem dividir (é indiferente dividir cinco barras unitariamente, ou uma quantidade contínua de chocolate formada por estas), não consideram também a importância de relacionar as partes que se dividem com a unidade (seja ela qual for). Este não considerar a importância da unidade parece refletir o facto de “ensinarmos como fomos ensinados” naquela etapa educativa (Mellado, Ruiz & Blanco, 1997) e poderá estar relacionado com o Programa que se encontrava em vigor na altura (e as orientações vigentes) cumprindo, assim, à formação inicial contribuir para colmatar essas lacunas, potenciando a elaboração de conhecimentos incluídos noutros (sub)domínios do MKT. Estas respostas revelam incorreções que ilustram entendimentos díspares sobre frações e o papel da unidade (e.g., as partes não têm de ser, necessariamente, equitativas; o todo e as partes podem ser indiferenciados), equiparando-se a um conhecimento ao nível dos alunos que estes futuros professores poderão vir a ensinar (e.g., Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005) contribuindo, também, para um equacionar do conteúdo de diferentes subdomínios do MKT – que pelas carências reveladas levam à elaboração de vinhetas (Jakobsen et al., 2012) que permitem fundamentar uma discussão mais profícua sobre cada um dos tópicos em concreto. Associada a estas distorções no CCK encontra-se o recurso a uma linguagem matemática menos adequada revelando, mais uma vez, a forma como MKT e comunicação matemática se encontram imbrincados (Ribeiro, Carrillo & Monteiro, 2009).

⇒ Dividindo cada barra por 3 ...

Alunos ① ② ③ ④ ⑤ ⑥

Barra 1 2 3 4 5 6

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{12}{18} + \frac{6}{18} = \frac{18}{18} = \frac{5}{6}$$

⇒ Dividindo cada barra por 2 ...

Alunos ① ② ③ ④ ⑤ ⑥

Barra 1 2 3 4 5 6

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Resolução 5

Resoluções:

Consideremos os alunos A, B, C, D, E e F.



Portanto, a cada um cabe $\frac{1}{2}$ de uma barra e ainda $\frac{1}{3}$ de outra:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{5 \text{ barras}}{6 \text{ alunos}}$$



Nesta situação, a cada um cabe $\frac{3}{4}$ de barra e $\frac{1}{3}$ de outra barra:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \frac{13}{12} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{5 \text{ barras}}{6 \text{ alunos}}$$

Concluindo, independentemente da forma como se dividem as barras de chocolate, vai sempre caber $\frac{5}{6}$ do total (aumentando oralmente) das barras, a cada aluno, ou $\frac{5}{6}$ de cada barra. (Na aula concluímos que a cada aluno cabe $\frac{5}{6}$ de uma barra. O grupo havia considerado que $\frac{5}{6}$ do total ou de uma barra, era o mesmo.

Resolução 6

Figura 4 – Resoluções pictóricas e algébricas

Um outro *cluster* de alunos (que assumia deter um mais sólido conhecimento matemático) conjugou a representação pictórica com uma abordagem algébrica (Figura 2), porém indiciam considerar a álgebra pela álgebra (transformando o objetivo central da tarefa), destituindo sentido ao que fazem e porque o fazem, o que se indicia problemático no desenvolvimento de um pensamento algébrico nas suas múltiplas formas imbricadas (Kaput, 1999). Outros diferenciam a quantidade do total do chocolate da quantidade de chocolate “de cada barra” que cada criança receberia. Apesar de apresentarem uma resposta numericamente correta ($5/6$), assumem que essa quantidade corresponde, indiferentemente, a uma parte de uma barra para cada criança (não se equacionando da impossibilidade de tal divisão) ou ao total das barras (e.g., Resolução 6), encarando, assim, de forma indiferenciada, a unidade como parte e como todo (sem que definam/deem sentido a algum deles).

Algumas notas finais e implicações (tanto para a formação como para a prática)

O CCK destes futuros professores revela-se, ainda, bastante limitado, o que impossibilitará o desenvolvimento de outras das dimensões do MKT que, não sendo colmatadas estas e potenciados outros conhecimentos associados, na pior das hipóteses levará a que, na sua prática futura, conduza a conceções/conhecimentos erróneos e limitadores das aprendizagens imediatas dos alunos e condicionadores do papel que os alunos se atribuem a si próprios, à matemática e ao seu ensino (Ribeiro & Carrillo, 2011b).

A discussão e reflexão focada nestas situações críticas configuram-se como um bom ponto de partida para problematizar o conteúdo de cada um dos subdomínios do MKT e os subdomínios em si, pois fornecem algumas luzes sobre os motivos matemáticos em que estas se fundamentam, perspetivando formas de as colmatar, transpondo-as para a zona de conforto, bem como equacionar alguns aspetos da especificidade do conhecimento do professor. Essa discussão e reflexão permitirá, também, (re)equacionar a formação de professores (tanto na natureza como tipo e foco), possibilitando uma sua melhoria. Uma vez que este MKT pode ser ensinado (Hill & Ball, 2004), é essencial discutir a sua concetualização e conteúdo, de modo a promover uma formação que possibilite, efetivamente, a elaboração de um tal conhecimento potenciando uma prática crítica e reflexiva, fundamentada num conhecimento matemático que potencie uma abordagem e exploração aos/dos conteúdos com e para a compreensão, de modo a incrementar o conhecimento (comum) dos alunos sobre frações, possibilitando, dessa forma, perspetivar aprendizagens integradas, integradoras e com efetivo entendimento – tanto imediato como na perspetivação de outras longínquas.

Agradecimentos:

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Este trabalho forma parte do Projecto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referências

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 91-126). New York: Academic Press, Inc.
- Canavarro, A. A., & Rocha, I. (2008). Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática: Mais valias e desafios do Programa de Formação Contínua em Matemática nos distritos de Évora e Leiria. In R. Luengo, B. Alfonso & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 577-586). Badajoz: SEIEM.
- Fernández, S., & Figueiras, L. (2011). El conocimiento del profesor necesario para una educación matemática continuada. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291-301). Lleida, Espanha: SEIEM.
- GAVE (2010). *Relatório 2010*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.
- Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.
- Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). *Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge*. Proceedings of the 12th ICME, Seoul.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classroom that promotes understanding* (pp. 133-155). Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Kieren, T. E. (1995). Creating Spaces for Learning Fractions. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades* (pp. 31-66). Albany: State University of New York
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-107.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o Sentido do Número Racional*. Lisboa: APM.
- Newstead, K. & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, 3, 295-303. Stellenbosch, South Africa.
- Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 26(3), 237-257.

- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação-DGIDC.
- Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011a). Discussing Maria's MKT and beliefs in the task of teaching. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceedings do International Symposium Elementary Maths Teaching (SEMT 11)* (pp. 290-297). Praga: Charles University, Faculty of Education.
- Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011b). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. In M. M. Rodríguez, G. F. García, L. J. Blanco & M. P. Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 513-521). Ciudad Real: SEIEM.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis y influencia en la práctica de una maestra. In M. J. González & J. Murrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 415-423). Santander: SEIEM.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

SOFTWARE DEMMATTOUL: UNA HERRAMIENTA PARA LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA ESTRUCTURA ARGUMENTATIVA DE LA DEMOSTRACIÓN

DEMMATTOUL SOFTWARE: A TOOL FOR THE RESEARCH ON ARGUMENTATIVE STRUCTURE OF PROOF

Rodríguez, F. ⁽¹⁾, **Gutiérrez, A.** ⁽²⁾

Universitat de les Illes Balears ⁽¹⁾, *Universitat de València* ⁽²⁾

Resumen

Las necesidades surgidas en una investigación sobre algunos aspectos de la demostración nos condujeron a la posibilidad de usar Software de Mapas de Argumentos para facilitar el análisis de la información recogida en la fase experimental de nuestra investigación. Sin embargo, el software existente presenta una serie de limitaciones, provocando un desajuste entre las características ofrecidas y las necesidades de nuestra investigación. El objetivo principal de esta comunicación es presentar la herramienta informática creada a partir de dichas necesidades, así como ejemplificar su uso. De esta manera intentamos mostrar que el Software de Mapas de Argumentos desarrollado es una herramienta útil para la investigación en Educación Matemática sobre la estructura argumentativa de las demostraciones.

Abstract

The needs that came up in a research on some aspects of proof led us to the possibility of using Argument Mapping Software in order to facilitate the analysis of the information collected during the experimental phase of our research. However, the current software presents some limitations, causing disparity between its features and our research needs. The main goal of this communication is to present the tool developed from these needs, just as to give examples of its use. This way we try to show that the Argument Mapping Software developed is a useful tool for Mathematics Education research on argumentative structure of proof.

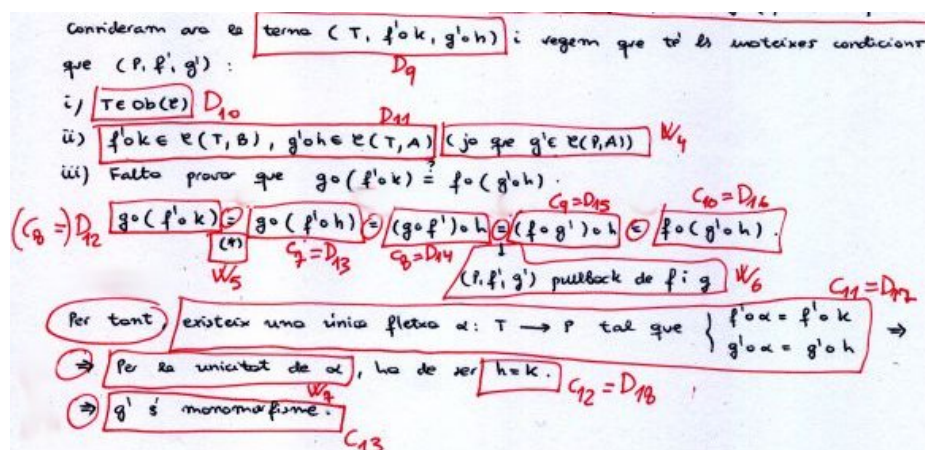
Palabras clave: *Demostración, Toulmin, Software de Mapas de Argumentos.*

Key words: *Proof, Toulmin, Argument Mapping Software.*

Introducción al problema

El análisis de los procesos de aprendizaje de la demostración matemática en los diferentes niveles educativos es una agenda de investigación importante en la actualidad. En este contexto, estamos desarrollando un estudio sobre algunos aspectos de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la demostración en los estudios universitarios de Matemáticas. Durante la fase experimental de esa investigación, se recogieron algunas demostraciones realizadas por alumnos de todos los cursos, así como filmaciones en vídeo de clases. De entre la multitud de puntos de vista y marcos teóricos para analizar las demostraciones obtenidas, uno de los que utilizamos es el modelo de Toulmin para analizar su estructura argumentativa.

Tras analizar los elementos argumentativos de algunas demostraciones seleccionadas, el resultado obtenido eran papeles llenos de recuadros y anotaciones que, además de no posibilitar su posterior modificación, no facilitan en absoluto el tratamiento de la información obtenida de ellos, teniendo que recurrir a transcripciones totales de las demostraciones para la representación de la estructura de las argumentaciones con ayuda de software y un posterior registro y tratamiento de algunos parámetros mediante el uso de otro software, como por ejemplo una hoja de cálculo.



Identificación sobre el papel de los elementos argumentativos de un fragmento de una demostración

Existen varios programas informáticos diseñados para crear *mapas de argumentos*, pero ninguno de los que hemos analizado cumple con las necesidades de nuestra investigación. Por este motivo, decidimos crear una herramienta informática adaptada a nuestras necesidades de representar diagramáticamente demostraciones complejas. El objetivo de esta comunicación es presentar el programa informático creado y mostrar su utilidad como herramienta para la investigación en Educación Matemática.

Antecedentes y marco teórico

Antes de describir el marco teórico que fundamenta el trabajo que aquí presentamos, es preciso aclarar el uso que hacemos de algunos términos. Sin entrar en el debate existente entre la relación de los términos *demostración* y *argumentación* (véase por ejemplo Reid y Knipping, 2010, capítulo 8), aceptamos la visión de la demostración

como un caso particular de argumentación. Además, consideramos que esa posición es complementaria y coherente con los conceptos *indagar* y *persuadir* que conforman el *esquema de demostración* de una persona (Harel y Sowder, 1998). En lo que sigue, también utilizamos el término *demostración* en un sentido amplio, de modo que incluya cualquier argumentación elaborada para convencer de la veracidad (o falsedad) de una afirmación matemática.

Modelo de Toulmin y representación visual de argumentos

Según Aberdein (2005), la obra “The uses of argument” de Stephen Toulmin, publicada en 1958, es quizá el trabajo más influyente en la teoría moderna de la argumentación. En el capítulo titulado “La forma de los argumentos”, Toulmin (2007) desarrolla un modelo para analizar la estructura argumentativa.

Sintetizando mucho la idea de dicho modelo, podemos decir que un *argumento* es una *conclusión* (*C*: Claim) que se deriva de un *dato* o hecho (*D*: Data) de acuerdo con una justificación o *garantía* (*W*: Warrant). Esta terna (*D*, *W*, *C*) se conoce como el *modelo básico de Toulmin*, pero esta visión del argumento resulta excesivamente simplista y es complementada con otros elementos que aparecen en las estructuras argumentativas. Por una parte, un argumento puede incluir términos como, por ejemplo, “necesariamente”, “presumiblemente” o “con cierta probabilidad”. Dicho elemento, que explica la fuerza que se le otorga a la garantía, es denominado *calificador modal* (*Q*: modal Qualifier). Si la garantía no proporciona necesidad, significa que existe la posibilidad de encontrar una excepción o *refutación* (*R*: Rebuttal) de dicha garantía, por lo que en ocasiones se presenta un apoyo o *respaldo* (*B*: Backing) a la garantía. De esta manera, el *modelo completo de Toulmin* está formado por esos seis elementos (*D*, *W*, *B*, *Q*, *R*, *C*) relacionados de la manera descrita anteriormente.

Dicha relación suele representarse de una manera visual en forma de diagrama, utilizada por el propio Toulmin (2007), que facilita la identificación de sus elementos:

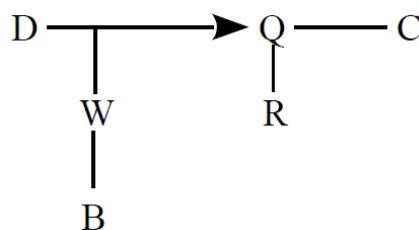
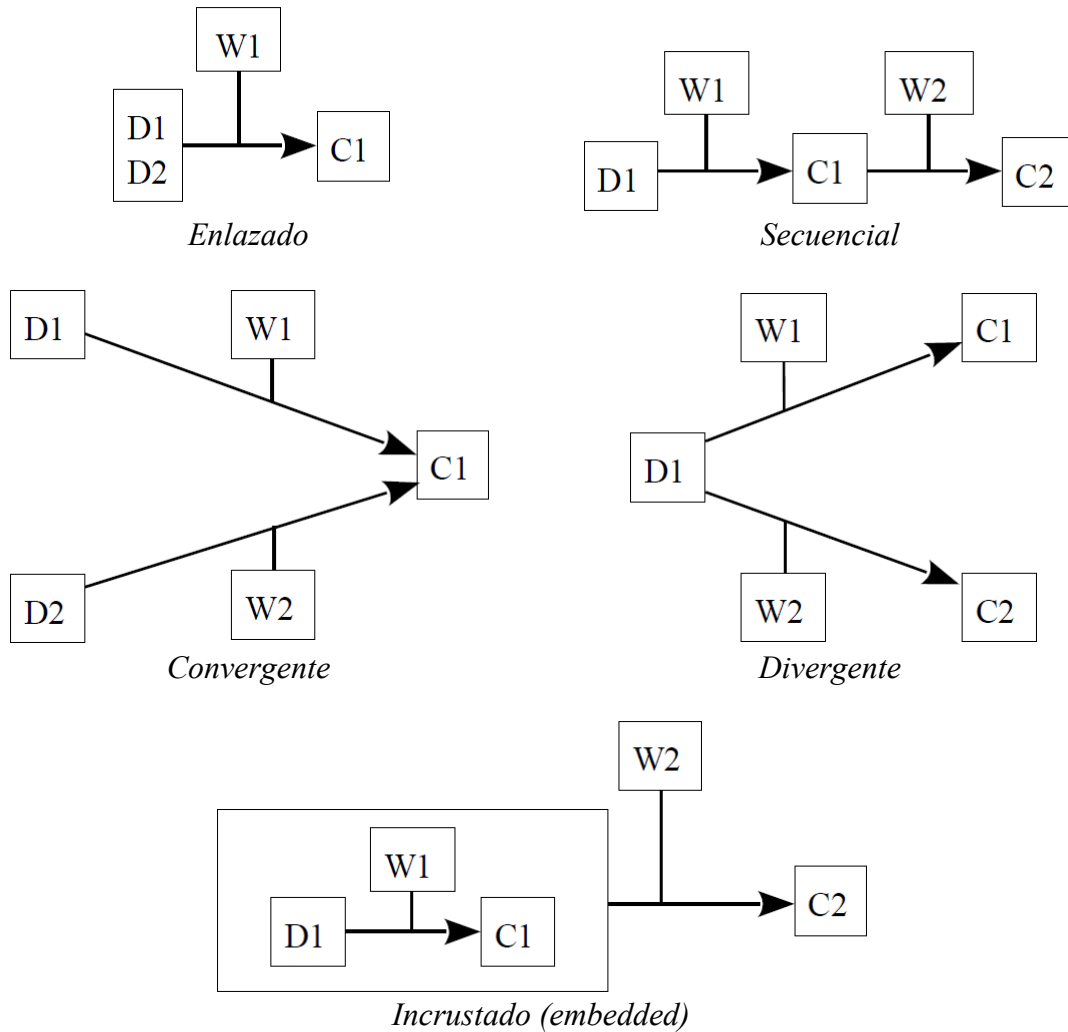


Diagrama del modelo de Toulmin

El diagrama anterior representa una argumentación simple, con una única implicación. Sin embargo, esto no se corresponde con la mayoría de argumentaciones matemáticas, por lo menos las que se dan en los niveles educativos superiores, dado que suelen contener varias implicaciones encadenadas, en las que la conclusión de un argumento es un dato del siguiente. Es por ello que resulta necesario combinar diagramas simples para formar diagramas que reflejen la estructura de argumentaciones más complejas. Aberdein (2006) explica cinco tipos de combinación de diagramas simples básicos (*D*, *W*, *C*) para construir diagramas complejos: enlazado, secuencial, convergente, divergente e incrustado.



En cuanto a los pros y contras de la representación visual de argumentos mediante diagramas, también conocida como *mapas de argumentos*, Aberdein (2006) realiza el siguiente comentario: “Una representación visual compartida puede facilitar significativamente la comunicación, tanto colaborativa como pedagógica, de ideas complejas. El modelo de Toulmin, que normalmente es representado gráficamente, es un buen ejemplo de esto. Sin embargo, la representación visual también tiene sus inconvenientes. Construir los diagramas puede suponer un consumo de tiempo y puede resultar frustrante actualizarlos, comentar sobre ellos o integrarlos con otros sistemas. Estos problemas se intensifican conforme los diagramas se tornan más complejos.”.

Software de Mapas de Argumentos

Representar gráficamente el mapa de argumentos puede suponer una ardua y costosa tarea, no sólo desde la perspectiva del docente que quiere utilizar mapas de argumentos en sus clases, sino también desde la perspectiva del investigador que quiere reconstruir una argumentación compleja, como es el caso de las demostraciones matemáticas. Dibujar los mapas de argumentos a mano o utilizar software estándar de dibujo o de ofimática son opciones que tienen el inconveniente, entre muchos otros, de no facilitar la modificación de los diagramas una vez construidos, si esto fuera necesario. No obstante, existe una alternativa interesante y más específica para representar los diagramas de las argumentaciones: el *Software de Mapas de Argumentos*

(SMA a partir de ahora, para abreviar). Según Aberdein (2006), “estos problemas [referidos anteriormente] pueden ser en buena parte eliminados a través del uso de software apropiado. Ahora están disponibles varios programas que, en mayor o menor medida, automatizan el proceso de construir diagramas de argumentos.”

Citamos algunos ejemplos de SMA existente: *Araucaria*, *Argumentative*, *Argunet*, *Carneades* y *Rationale*. Cada uno de ellos representa de manera diferente la estructura de argumentos; alguno de ellos utiliza, o puede ser adaptado para trabajar, el modelo de Toulmin (por ejemplo *Araucaria* incorpora la opción de trabajar explícitamente con el modelo básico de Toulmin).

El uso didáctico del SMA y el desarrollo de habilidades, como el razonamiento crítico, en los alumnos que trabajan con este software son temas que ya están siendo investigados y puestos en práctica en otras disciplinas como Derecho, Filosofía, Economía, Ciencias Políticas y Ciencias de la Salud. Si queremos utilizarlos en Educación Matemática, lo primero que debemos tener en cuenta es que el SMA citado anteriormente no está desarrollado bajo unos objetivos que persigan el trabajo específico de las matemáticas.

Limitaciones del software de mapas de argumentos existente

De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, desde la perspectiva de nuestra investigación es lógico que encontremos una serie de limitaciones en el SMA existente. A continuación listamos algunas de las más importantes:

1. Todos utilizan una estructuración de la argumentación más simple que la que aporta el modelo de Toulmin completo.
2. Ninguno permite realizar un tratamiento estadístico de los elementos presentes en la estructura de la argumentación.
3. Ninguno está diseñado con el objetivo de analizar demostraciones matemáticas, por lo que no están preparados para trabajar con el lenguaje y los símbolos propios de las matemáticas.
4. Excepto *Rationale*, el resto de programas no permite incluir imágenes como contenido de los elementos del diagrama.
5. Excepto *Argunet*, el resto de programas no permite mover libremente los elementos del diagrama, en ocasiones presentando una estructura rígida impuesta por el propio programa que puede no ajustarse al objetivo del usuario.

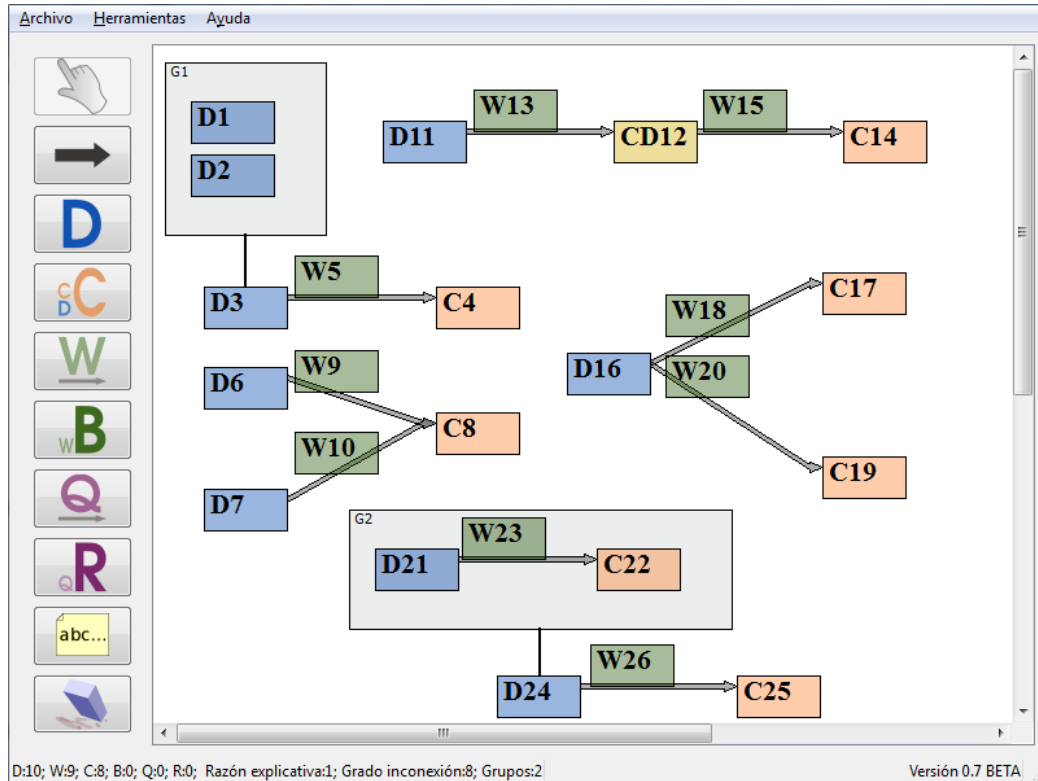
Especialmente la inflexibilidad provocada por las limitaciones 3, 4 y 5 puede conducir al investigador con objetivos similares a los nuestros a abandonar el uso del SMA, renunciando a algunas de sus características en aras del pragmatismo. En ese caso, la mejor opción es utilizar software de representación de diagramas, como por ejemplo *Dia*, que permite representar diagramas de una manera cómoda, flexible y relativamente rápida, pero que presenta especialmente las limitaciones 2 y 3, además de no trabajar con ninguna estructura específica de la argumentación (equivalente a la limitación 1, pero de mayor magnitud).

El nuevo software desarrollado: DEMMATTOUL

Al ver que el SMA existente no cubre de manera satisfactoria las necesidades surgidas durante nuestra investigación sobre la estructura argumentativa de las

demostraciones, el camino escogido fue diseñar y desarrollar un nuevo software que se ajustase mejor a nuestros objetivos.

El nombre de la aplicación informática creada es DeMMaTTouL¹, un software libre y de código abierto disponible en castellano, catalán e inglés cuya interfaz gráfica es ejecutable en varios sistemas operativos (Linux, MS Windows y Mac OS X).



Interfaz gráfica de DeMMaTTouL

Con el uso de DeMMaTTouL se suavizan considerablemente las limitaciones mencionadas en el apartado anterior:

- Se trabaja con el modelo completo de Toulmin. Además, se ha reestructurado el diagrama simple de dicho modelo para optimizar el espacio utilizado, quedando de la siguiente manera:

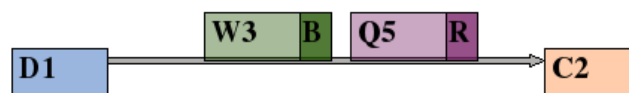
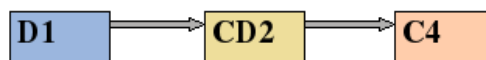


Diagrama de Toulmin en DeMMaTTouL

DeMMaTTouL permite realizar todas las combinaciones de diagramas simples citadas en un apartado anterior. Cuando se combinan dos argumentos de manera secuencial, el elemento que es a la vez conclusión del primer argumento y dato del siguiente, se etiqueta automáticamente como CD y se muestra de la siguiente manera:



Combinación secuencial de argumentos

¹

<http://demmattoul.blogspot.com>

Además, DeMMaTTouL se encarga automáticamente de velar por la coherencia del modelo de Toulmin en el mapa que creamos. Por ejemplo, si en un mapa de argumentos eliminamos la única implicación que llega a una conclusión, este elemento se transforma automáticamente en un dato (dado que ya no es la conclusión de ningún argumento).

- Se calcula en tiempo real el número de elementos argumentativos de cada tipo que contiene la estructura, así como la razón explicativa (número de implicaciones con garantía sobre el total de implicaciones existentes en la estructura) y el grado de inconexión (número de grupos inconexos de elementos que forman la estructura).

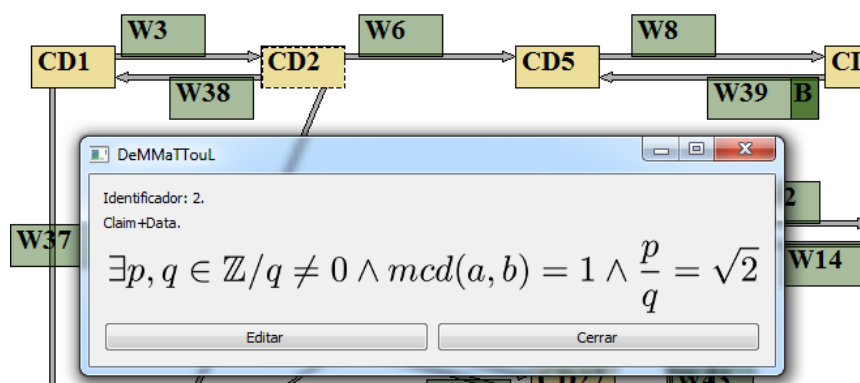
D:15; W:28; C:16; B:1; Q:0; R:0; Razón explicativa:0.9333; Grado inconexión:1; Grupos:0

La barra de estado muestra el número de elementos y los parámetros

Además, se incorpora una herramienta denominada Estadísticas, que calcula totales, máximos, mínimos y medias de los elementos, de la razón explicativa y del grado de inconexión de varias demostraciones.

- Si bien DeMMaTTouL no está preparado para trabajar directamente con símbolos propios del lenguaje matemático, aportamos una solución aprovechando la superación de la siguiente limitación.
- El contenido de los elementos puede ser texto, imagen o referencias a archivos de audio y vídeo. Esto posibilita insertar diferentes fragmentos de una demostración realizada en papel, previamente escaneada o fotografiada, o una demostración realizada en la pizarra y grabada en vídeo, sin tener que transcribirlas y conservando la apariencia de los fragmentos de la producción original.

También es posible, utilizando software complementario como *KLatexFormula*, insertar como imagen expresiones matemáticas escritas en *LaTeX*, superando en cierto modo la limitación 3.



Ventana que muestra el contenido de un elemento

- DeMMaTTouL permite mover los elementos libres (datos y conclusiones) del mapa de argumentos, sin más restricción que el tamaño de la zona de dibujo.

Ejemplos de mapas de argumentos contruidos con DEMMATTOUL

Para ejemplificar el uso de la herramienta creada hemos escogido una situación de clase en la que una proposición es enunciada y demostrada por uno de los docentes de una asignatura anual de primer curso de la Licenciatura en Matemáticas de la

Universitat de les Illes Balears. Dicho momento se sitúa en el curso 2007-2008, transcurridos aproximadamente 2 meses desde que los alumnos comenzaron sus estudios universitarios. El enunciado de la proposición es el siguiente:

Si $f: [a,b] \rightarrow R$ es continua, entonces f tiene un máximo y un mínimo absoluto en $[a,b]$.

El docente, tras hacer hincapié en la necesidad de que la función sea continua y que el intervalo sea cerrado, comienza a demostrar la afirmación realizada, indicando “yo veré por ejemplo que tiene un máximo, que tiene un mínimo se hace exactamente igual”. Debido al límite de extensión del presente texto no incluimos la transcripción de dicha demostración, simplemente señalamos que se utilizó el método de reducción al absurdo. Utilizando DeMMaTTouL dicha transcripción no es necesaria, pues el contenido de los mapas de argumentos que hemos realizado son mayoritariamente recortes de imágenes capturadas del vídeo de la grabación de la clase en las que se ve la pizarra.

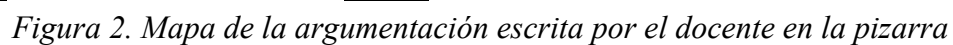
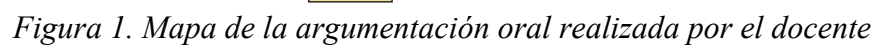


Ventana que añade como contenido una imagen capturada del vídeo

Una vez analizada la demostración e identificados sus elementos argumentativos, los representamos en un mapa de argumentos con DeMMaTTouL, de manera parecida a la utilización de software de representación de diagramas. Nos parece interesante el hecho de que se producen variaciones en la argumentación en función de la fuente de información escogida, por lo que reconstruimos 3 mapas de argumentos, que se corresponden con:

- i) la argumentación oral que realizó el docente para demostrar la proposición (Figura 1),
- ii) la argumentación que escribió el docente en la pizarra (Figura 2), y
- iii) la argumentación que quedó en los apuntes de una alumna que asistió a clase (Figura 3).

Para facilitar la comparación entre los mapas de argumentos construidos, hemos mantenido la posición en el mapa de los elementos argumentativos, así como también su numeración. Es decir, el mismo elemento está situado en la misma posición y posee la misma numeración en todos los mapas de argumentos en los que aparece.



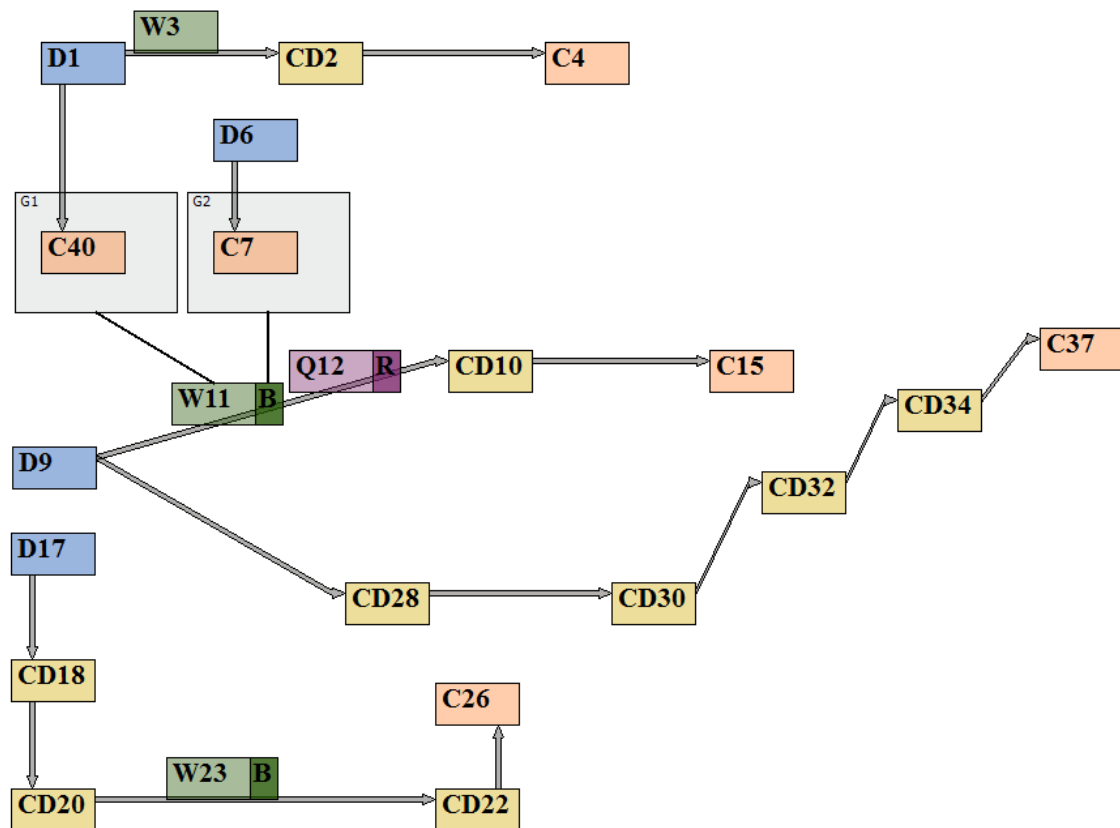


Figura 3. Mapa de la argumentación plasmada en los apuntes de una estudiante

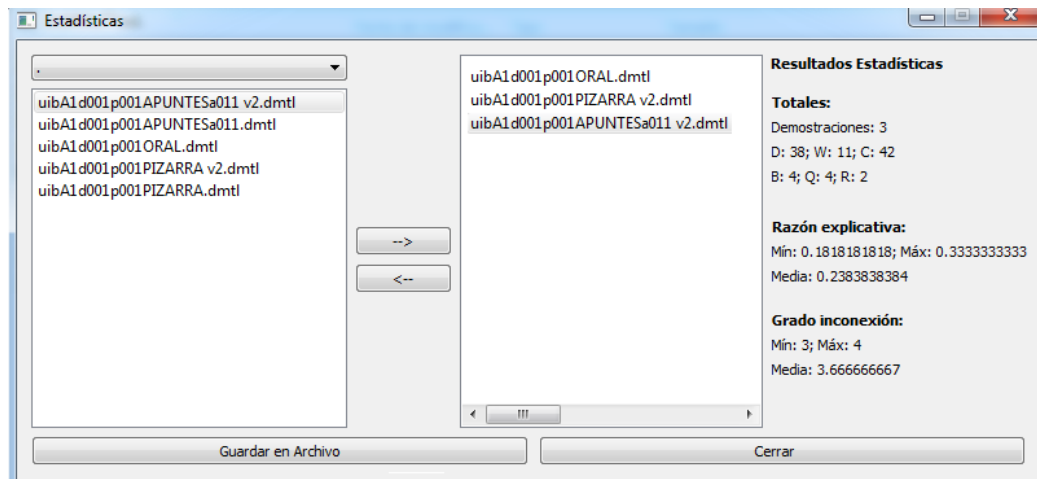
Una de las diferencias, que se observa rápidamente de manera visual, entre los mapas de argumentos anteriores es que la cantidad de elementos argumentativos difiere. También se aprecian fácilmente diferencias en el grado de inconexión de los mapas. Desde ambas perspectivas, la argumentación oral realizada por el docente es la más completa, así como también es la que más garantías aporta (6, de las que el docente sólo escribe en la pizarra 1 y se reflejan 3 en los apuntes de la estudiante). DeMMaTTouL ayuda en dicha tarea comparativa contabilizando aspectos como los que acabamos de citar. Hemos organizado en la siguiente tabla la información calculada por el software:

	D	W	C	B	Q	R	Grupos	Razón explicativa	Grado de inconexión*
Oral	15	6	16	2	3	1	3	0.3333	1
Pizarra	10	1	11	0	0	0	0	0.0909	4
Apuntes	13	3	15	2	1	1	2	0.2	2

Elementos argumentativos y parámetros calculados por DeMMaTTouL

Por otra parte, DeMMaTTouL también posee una herramienta que calcula la media y los valores máximo y mínimo de cada uno de los parámetros anteriores, por lo que, si bien en el caso que mostramos no resulta útil, podría ser de ayuda si quisiéramos trabajar con datos que sean representativos (en el sentido de la media) de un conjunto de argumentaciones (por ejemplo, las plasmadas en los apuntes de todos los alumnos que asistieron a clase).

* El grado de inconexión calculado por DeMMaTTouL todavía no tiene en cuenta las conexiones con grupos de elementos, por lo que hemos tenido que ajustarlo al grado de inconexión real de la estructura argumentativa.



Ventana de la herramienta Estadísticas

Si volvemos a los mapas de argumentos construidos y los analizamos desde el punto de vista de la naturaleza lógica del método utilizado en la demostración, reducción al absurdo, identificamos en la argumentación oral del docente, que puede tomarse como mapa de argumentos de referencia por ser el más completo, una serie de elementos argumentativos y conexiones clave:

- i) el dato $D6$ es la suposición de lo contrario de lo que se quiere demostrar,
- ii) utilizando el dato anterior se deduce $CD15$ y $CD32$, que son conclusiones contradictorias,
- iii) esto origina la conclusión $CD34$ de que se ha llegado a una contradicción, que proviene de suponer lo contrario de lo que se quería demostrar,
- iv) por tanto se concluye $C37$, es cierto lo que quería demostrarse (*f tiene un máximo absoluto en $[a,b]$*)

Sin embargo, algunos elementos y la mayoría de conexiones anteriores son inexistentes tanto en la pizarra como en los apuntes de la estudiante. Este análisis nos permite formular algunas preguntas de investigación: ¿cuáles son las razones por las que la estudiante no incluye dichas implicaciones en sus apuntes: tiene asumido el método y no necesita hacerlo explícito o no es consciente de dichas conexiones lógicas? (viendo su mapa de argumentos se puede descartar que se limite a copiar lo que aparece en la pizarra), ¿qué criterio sigue el docente para decidir si incluye o no un elemento argumentativo en la pizarra? y ¿qué consecuencias tiene la omisión de elementos argumentativos en el aprendizaje de los alumnos de primer curso?

Reflexiones finales

Nos gustaría destacar que, como hemos intentado mostrar mediante un ejemplo extraído de una situación de aula, los mapas de argumentos posibilitan un análisis visual y detallado de la estructura argumentativa de las demostraciones, identificando de manera sencilla aspectos como, por ejemplo, saltos en la argumentación (inconexiones) e implicaciones sin garantía. Los mapas de argumentos también permiten realizar comparaciones entre argumentaciones y consideramos que su uso puede aportar una óptica diferente a la formulación de preguntas de investigación.

Sintetizando, en el ejemplo mostrado en el apartado anterior, el software desarrollado ha sido de utilidad en las siguientes tareas:

- i) construcción de los mapas de argumentos basados en el modelo de Toulmin,

- ii) inserción de imágenes de las grabaciones en vídeo y de lenguaje matemático como contenido de los elementos de los mapas de argumentos,
- iii) exportación a imagen de los mapas de argumentos que se incluyen en este documento,
- iv) recuento de los elementos argumentativos de los mapas de argumentos y
- v) cálculo de los parámetros razón explicativa y grado de inconexión de los mapas.

También hemos comentado que el software incorpora una herramienta que realiza una descripción estadística de un conjunto de mapas de argumentos. Ningún otro SMA existente actualmente es capaz de ofrecer todo lo anterior al investigador, presentando los inconvenientes que detallamos en un apartado anterior, por lo que consideramos que DeMMaTTouL cubre un espacio hasta el momento vacío, presentándose como una herramienta útil en la investigación en Educación Matemática sobre la estructura argumentativa de las demostraciones.

Por otra parte, pensamos que DeMMaTTouL también se puede utilizar como herramienta de apoyo en la enseñanza-aprendizaje de la demostración, especialmente en los primeros cursos del Grado en Matemáticas. Es un software cuyo desarrollo puede continuar, mejorando sus limitaciones e incorporando características nuevas en función de las necesidades que surjan en sus posibilidades de uso.

Finalmente, a modo de vía abierta inexplorada, teniendo en cuenta que la tendencia actual de evolución del SMA parece ser, además de posibilitar la ejecución del software vía web, desarrollar características que permitan la construcción y evaluación de argumentos de manera colaborativa, puede resultar interesante explorar e investigar las posibilidades que este planteamiento ofrece en lo referente a la demostración en Educación Matemática.

Referencias

- Aberdein, A. (2005). The uses of argument in mathematics. *Argumentation*, 19, 287-301.
- Aberdein, A. (2006). Managing informal mathematical knowledge: Techniques from informal logic. *Lecture notes in artificial intelligence*, 4108, 208-221.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, 234-283. Providence: American Mathematical Society.
- Reid, D. A. y Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Toulmin, S. E. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Ediciones Península. [Traducción de Toulmin, S. E. (2003): The uses of argument. Edición actualizada de la 1ª edición de 1958.]

LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN ALUMNOS DE GRADOS EN ESTADISTICA

MATHEMATICS ANXIETY IN STATISTICS UNDERGRADUATES

Rodríguez del Tío, P., Hidalgo, S., Palacios, A.

Universidad de Valladolid

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio sobre los niveles de ansiedad matemática que presentan alumnos universitarios de primer curso matriculados en Grados en Estadística. Analizamos la relación entre este constructo y otros factores como son el género, el perfil del Grado (empresa, matemáticas ó general) y la asignatura de matemáticas cursada en Bachillerato. Los resultados muestran que las alumnas tienen mayor nivel de ansiedad matemática que los alumnos sobre todo en los grupos, determinados por los dos factores anteriores, que presentan mayor nivel de ansiedad. Estos grupos corresponden al perfil Empresa y a alumnos que cursaron en Bachillerato la asignatura “Matemáticas aplicadas a las CCSS”.

Abstract

In this paper we study the level of mathematics anxiety that students in the first grade of Statistics degrees experience. We analyze the relation between this construct and other factors such as gender, degrees profile (Business, Mathematics or General) and the mathematics subject studied in the previous year. The results show that female students have more mathematics anxiety than male students in groups determined by the two already mention factors, which show a higher level of anxiety. This groups belong to the Business profile and to students who studied the previous year the subject “Mathematics for Social Sciences”.

Palabras clave: *Ansiedad matemática, Grado en Estadística, diferencias de género, estudiantes universitarios, dimensión emocional.*

Key words: *Mathematics anxiety, Statistics degree, gender differences, university students, emotional dimension.*

Introducción

En los últimos años, profesores universitarios de titulaciones con alto contenido matemático en sus planes de estudio muestran su preocupación por la actitud de sus alumnos hacia las matemáticas, Symonds, Lawson y Robison (2010) lo hacen con alumnos de Física. Nosotros compartimos la preocupación por la enseñanza de la Estadística, desde los primeros niveles hasta la universidad, que muestran Ning-Zhong Shi, Xuming He y Jian Tao (2009) cuando afirman que la ansiedad matemática ocurre comúnmente entre los estudiantes de estadística. Las actas de los simposios de la SEIEM, si bien no recogen trabajos en los que se estudie la actitud hacia las Matemáticas en alumnos que cursen asignaturas de Estadística, sí lo hacen con la actitud hacia la Estadística, Estrada (2007) estudia las actitudes hacia la Estadística de profesores de educación primaria.

La formación matemática previa del alumno que viene a estudiar un Grado en Estadística es importante para terminar con éxito los estudios, pero aun es más importante la actitud del alumno hacia las matemáticas. El profesorado de los Grados en Estadística, en general, es consciente de la heterogeneidad de los alumnos respecto a su formación matemática anterior pero no es menos consciente de que con una actitud positiva hacia las matemáticas por parte del alumno, la mayoría de las veces, éste consigue llegar a un rendimiento en matemáticas adecuado independientemente de cual sea su formación anterior.

Últimamente se ha producido un incremento de investigaciones en lo que se ha dado en llamar dominio *afectivo* o *alfabetización emocional matemática* (capacidad de conocernos a nosotros mismos, atribuciones de causalidad, perseverancia en el empeño y ante la dificultad, control de ansiedad, autoconcepto, regulación emocional, aburrimiento,..etc. en un contexto de aprendizaje en matemáticas). Véase para su confirmación Gómez-Chacón (2010).

En este trabajo nos centraremos en el análisis de la ansiedad matemática como punto de partida para estudiar el dominio afectivo en los alumnos de Grados en Estadística.

No existe una definición de ansiedad matemática unificada, pero en todas ellas se considera como un sentimiento de tensión, miedo o aprehensión, que implica conductas de evasión y que afecta negativamente al rendimiento en tareas matemáticas. La vivencia de la ansiedad va asociada a una ausencia de placer y a un sentimiento de tensión que interfiere en la realización de operaciones aritméticas y en la resolución de problemas matemáticos (Richardson y Suinn, 1972). En este sentido, Fennema y Sherman (1976) consideran la ansiedad matemática como una serie de sentimientos de terror, nerviosismo y síntomas físicos que surgen al hacer matemáticas. Byrd (1982) se hace eco de esa consideración y define la ansiedad matemática como cualquier situación en la cual sentimos ansiedad cuando nos enfrentamos de una u otra manera con las matemáticas. Tobias y Weissbrod (1980) afirman que la ansiedad matemática describe el pánico, indefensión, parálisis y desorganización mental que surge cuando un sujeto se dispone a resolver un problema matemático.

Hembree (1990) plantea la posibilidad de que sea el escaso dominio de las matemáticas la causa de la aparición de la ansiedad. Guerrero, Blanco y Vicente (2002) sostienen que, cuando una persona interpreta los sucesos como amenazantes o peligrosos, se crea un circuito de retroalimentación negativa entre sus pensamientos y la actividad fisiológica.

Autor y otros (2005) consideran como factor desencadenante de la ansiedad la dificultad intrínseca y acumulativa de las matemáticas. El proceso en resumen sería: la falta de dominio matemático aumentaría la probabilidad de fracaso y el miedo al fracaso determinaría un aumento en los niveles de ansiedad; además, esta ansiedad evitaría la exposición a un mayor conocimiento y, por tanto, generaría un escaso dominio matemático.

Respecto a la ansiedad matemática en alumnos de nuevo ingreso en la universidad, Pérez-Tyteca, et al. (2011a y 2011b) encuentran una diferencia significativa en función del género, resultando que las mujeres tienen un nivel de ansiedad superior al manifestado por los hombres. En su estudio por bloques de titulaciones concluyen que también existen diferencias significativas entre ramas de conocimiento, ordenando éstas de menor a mayor valor para el nivel de ansiedad del siguiente modo: Enseñanzas Técnicas, Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales y Ciencias de la Salud. Anteriormente, Perry (2004) define diferentes tipos de ansiedad matemática en alumnos universitarios: moderada y variante; que acompaña al alumno desde tiempo atrás y que comenzó como consecuencia de la actuación de algún profesor y la causada por el modo mecánico de aprender las nociones matemáticas. Continuando con las diferencias de género en estudiantes universitarios, Gardner(1997) muestra que las estudiantes universitarias sufren más ansiedad matemática que sus compañeros. Sin embargo Tapia y Marsh (2004) no encuentran relación entre ansiedad matemática y género en su muestra de alumnos universitarios.

En este contexto queremos aportar nuevos datos sobre ansiedad matemática en estudiantes de primer curso de Grados en Estadística y estudiar posibles diferencias por los distintos perfiles en el plan de estudios de estos Grados, por el género y por la formación anterior en matemáticas.

Metodología

Muestra

La muestra está formada por 358 alumnos universitarios de primer curso, 295 cursan alguno de los doce Grados en Estadística que se imparten actualmente en España y los 63 restantes cursan Grados en Matemáticas y nos referiremos a ellos como muestra de referencia.

Según el plan de estudios podemos clasificar los Grados en Estadística en tres grupos ó perfiles: perfil empresa, perfil matemático y perfil general. En la muestra hay representación de los doce Grados y de los tres perfiles (71 alumnos cursan grados de perfil empresa, 11 de perfil matemáticas y 213 de perfil general).

Respecto a la muestra de referencia 39 alumnos cursan primero del Grado en Matemáticas ó en Ingeniería Matemática junto a los alumnos del Grado en Matemáticas y Estadística de la Universidad Complutense de Madrid (los dos primeros cursos son comunes a las tres titulaciones) y 24 cursan el Grado en Matemáticas en la Universidad de Valladolid.

Los datos se han tomado a comienzos de los cursos académicos 2010/2011 y 2011/12. Considerando como población los alumnos de nuevo ingreso en alguno de los doce Grados en el curso 2010/11 el tamaño poblacional estaría en torno a 450 alumnos por lo que el error muestral sería menor del 5%. Sin embargo, el perfil matemáticas sería el peor representado en la muestra por lo que hemos añadido la muestra de referencia.

La composición de la muestra de alumnos de Grados en Estadística (GEST) por perfil junto al error muestral se presenta en la tabla 1.

Perfil	muestra	Población aproxim.	Error Muestral aproximado 95%
Empresa	71	129	7.8%
Matemáticas	11	41	25.6%
General	213	275	3.2%
Total	295	442	3.3%

Tabla 1. Errores muestrales por perfil

Instrumento de medida

Para medir la ansiedad hacia las matemáticas se ha utilizado una escala tipo Likert de cinco puntos con 15 ítems. Esta escala es una adaptación de la utilizada por Autor y otros (2008). Tras el análisis de Componentes Principales se obtuvo una solución con un único factor que explica un 44% de la varianza de la prueba. También se realizó un AFC con AMOS 19 bajo la hipótesis de un factor único con los resultados que presentamos en la tabla 2.

	Chi-Cuadrado (g.l.)	RMSEA	NFI	CFI	AIC
Ajuste del modelo	391,682 (90)	0,097	0,832	0,864	481,682

Tabla 2.- Evaluación de la escala de ansiedad hacia las matemáticas mediante un AFC

El modelo alcanza un ajuste aceptable con todos los pesos y varianzas muy significativos ($p < 0,01$), lo que proporciona evidencias añadidas de la validez de todos los ítems de la escala. La escala obtuvo un alfa de Cronbach de 0,904, valor que asegura una alta fiabilidad.

Variables

Las variables que vamos a utilizar son: la ansiedad hacia las matemáticas, el género, la asignatura de matemáticas cursada en Bachillerato (Mat. ó Mat. aplicadas a las CCSS) y el perfil del Grado en Estadística ó pertenencia a la muestra de referencia (Empresa, Matemáticas, General y Referencia). La variable ansiedad está definida como la puntuación total en el cuestionario de ansiedad de 15 ítems. Esta variable identifica el nivel de ansiedad hacia las matemáticas de los alumnos, siendo el nivel de ansiedad mayor cuanto mayor valor registre esta variable. Toma valores entre 0 y 60 puesto que la codificación de las 5 posibles respuestas para cada ítem ha sido de 0 a 4 (“desacuerdo total” a “acuerdo total” sin respuesta central ó neutra).

Análisis de los datos y resultados

Descripción de las variables

En la muestra GEST el 55% son hombres y el 45% mujeres y entre los alumnos que han contestado a la pregunta sobre la asignatura de matemáticas cursada en Bachillerato (282) el 54% cursaron “Matemáticas aplicadas a las CCSS” (MCCSS) y el

46% restante cursaron la asignatura “Matemáticas” (Mat). Entre las mujeres el porcentaje que ha cursado MCCSS es del 64%, significativamente superior al mismo porcentaje en hombres 46%.

A continuación mostramos las distribuciones de frecuencias conjuntas de la variable Perfil por TIPOMATES (tabla 3) y por SEXO (tabla 4) incluyendo los alumnos de la muestra de referencia. En ellas observamos diferencias significativas por Perfil respecto a la asignatura de matemáticas cursada en Bachillerato puesto que el 76% de los alumnos de Empresa han cursado MCCSS, porcentaje significativamente por encima del 46% total ó incluso del 54% en la muestra GEST y por el contrario este porcentaje baja significativamente en los alumnos de la muestra de referencia hasta un 8%. También observamos que en los Grados de perfil Empresa hay un 56% de mujeres, porcentaje significativamente alto en comparación con el resto de perfiles.

		TIPOMATES		Total
		MCCSS	Mat	
Perfil	Empresa	44 76%	14 24%	58
	Matemáticas	2 20%	8 80%	10
	General	100 50%	101 50%	201
	Referencia	5 8%	55 92%	60
Total		151 46%	178 54%	329 100%

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes de TIPOMATES en cada perfil

		SEXO		Total
		Hombre	Mujer	
Perfil	Empresa	27 44%	34 56%	61
	Matemáticas	5 46%	6 54%	11
	General	123 59%	87 41%	210
	Referencia	41 66%	21 34%	62
Total		196 57%	148 43%	344 100%

Tabla 4. Frecuencias y porcentajes de género en cada perfil

Pasemos a describir la variable principal, la ansiedad matemática, en la muestra GEST. En el histograma de esta variable se observa una clara asimetría a la derecha (positiva) de su distribución con una media de 18,5 y una desviación típica de 10,4. El valor de la media es inferior a 20, puntuación que se obtendría si la respuesta fuese “en desacuerdo” para todos los ítems con enunciado positivo respecto a la ansiedad y “de acuerdo” en todos los ítems con enunciado negativo (dominio de la ansiedad). En el diagrama de caja se observan cuatro observaciones atípicas por altas (dos coincidentes), tres de ellas son de alumnos de perfil Empresa y una corresponde a un alumno que estudia un Grado de perfil General, la máxima puntuación es 54, no se alcanza el 60 pero sí se alcanza el 0.

Estudio del nivel de ansiedad por Género

Analizamos la ansiedad matemática de los alumnos de la muestra GEST según el Género. El contraste de hipótesis de Mann-Whitney nos indica que las diferencias son estadísticamente significativas ($p\text{-valor}=0.004$). Las medias se muestran en la tabla 5.

SEXO		N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	Mínimo	Máximo
Ansiedad	Hombre	153	16,74	9,97	0,81	0	54
	Mujer	125	20,20	10,50	0,94	1	47

Tabla 5. Estadísticos descriptivos de Ansiedad por Género

Estudio del nivel de ansiedad por Perfil

Procedemos al estudio comparativo del nivel de ansiedad hacia las matemáticas en los alumnos de primero de los distintos tipos de Grados en Estadística y su comparación con el nivel de ansiedad en los alumnos de la muestra de Referencia. Para ello utilizamos el contraste de Kruskal-Wallis que nos confirma diferencias significativas entre los distintos grupos con un p-valor de 0,000.

Para un análisis más detallado utilizamos la tabla 6 y un análisis de comparaciones múltiples. En este análisis se detectan como diferencias significativas (p-valores $< 0,01$) las que hay entre la ansiedad media de los alumnos de Empresa con cualquiera de los otros tres perfiles y la que hay entre la ansiedad media de los alumnos de perfil General y la de los alumnos de la muestra de Referencia.

Perfil	N	Media	Desviación típica	Error típico	Mínimo	Máximo
Empresa	64	25,03	11,04	1,38	2	47
Matemáticas	11	14,27	8,06	2,43	0	24
General	211	16,76	9,43	,65	0	54
Referencia	63	10,25	6,26	,79	0	26
Total	349	17,02	10,25	,55	0	54

Tabla 6. Estadísticos descriptivos de Ansiedad por Perfil

Estudio del nivel de ansiedad por Perfil y Género

Si estudiamos el nivel de ansiedad por Perfil dentro de cada Género en un análisis de comparaciones múltiples se detectan como diferencias significativas (p-valores $< 0,05$) las que hay entre la ansiedad media de los alumnos de Empresa con General y con Referencia y la que hay entre la ansiedad media de los alumnos de perfil General y de Referencia. El hecho de que no aparezcan diferencias significativas entre Matemáticas y Empresa seguramente se debe al tamaño muestral insuficiente de la muestra de alumnos del Grado en Matemáticas y Estadística. Los estadísticos descriptivos correspondientes a este análisis se muestran en la tabla 7 y el gráfico de medias por perfiles en ambos géneros (gráfico 1) muestra el paralelismo de dichas medias en hombres y mujeres con un claro aumento de la ansiedad en las mujeres que es mayor en el perfil Empresa.

SEXO		N	Media	Desviación típica	Error típico	Mínimo	Máximo
Hombre	Empresa	26	22,23	10,02	1,97	4	47
	Matemáticas	5	13,00	7,68	3,44	0	20
	General	122	15,72	9,70	,88	0	54
	Referencia	41	9,37	6,11	,95	0	23
Mujer	Empresa	33	26,97	12,02	2,09	2	47
	Matemáticas	6	15,33	8,94	3,65	4	24
	General	86	17,94	8,79	,95	1	43
	Referencia	21	11,76	6,44	1,41	3	26

Tabla 7. Estadísticos descriptivos de Ansiedad por Perfil en Hombres y en Mujeres

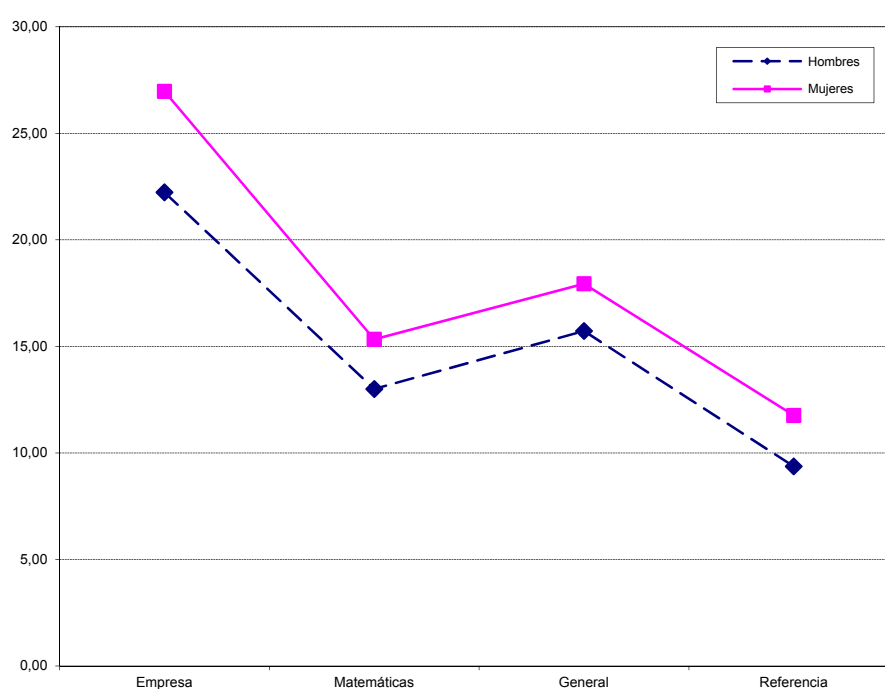


Gráfico 1. Medias de Ansiedad por Perfil en Hombres y en Mujeres

Estudio del nivel de ansiedad por el Tipo de matemáticas cursado en Bachillerato

Aunque en un principio podemos decir que hay diferencias significativas en el nivel de ansiedad según la asignatura de matemáticas cursada en Bachillerato (Mann-Whitney p -valor = 0.035 sin muestra de Referencia y p -valor=0.000 con ella), si analizamos las diferencias dentro de cada perfil obtenemos que no hay diferencias por TIPOMATES entre los alumnos de Perfil General (p -valor=0,5) ni entre los de perfil Empresa (p -valor exacto=0,574) y en la muestra de Referencia o en el Perfil Matemáticas el porcentaje de alumnos que cursaron Matemáticas aplicadas a las CCSS es demasiado bajo para sacar conclusiones. Esto nos lleva a afirmar que las diferencias que se muestran en este apartado se deben más al Perfil del Grado que el alumno cursa ó al Género que a la asignatura de matemáticas cursada en Bachillerato.

Estudio del nivel de ansiedad por el Tipo de matemáticas y el Género

Respecto al nivel de ansiedad por Género en los alumnos que en Bachillerato cursaron “Matemáticas aplicadas a las CCSS” ó “Matemáticas”. En el primer caso hay diferencia significativa por Género (p-valor=0.003) pero en el segundo caso no (p-valor=0.240). En la tabla 8 se muestran los estadísticos descriptivos correspondientes al análisis.

TIPOMATES		N	Media	Desviación típica	Error típico	Mínimo	Máximo
MCCSS	Hombre	69	15,86	9,30	1,12	0	38
	Mujer	75	21,15	10,67	1,23	2	47
	Total	144	18,61	10,35	,86	0	47
Mat	Hombre	114	13,97	9,62	,90	0	54
	Mujer	61	15,57	9,74	1,25	1	45
	Total	175	14,53	9,66	,73	0	54

Tabla 8. Estadísticos descriptivos de Ansiedad por Género en MCCSS y en Mat.

Estudio del nivel de ansiedad por Perfil, Tipo de matemáticas y Género

Tratando de evitar grupos con muy pocos alumnos en la población ó en la muestra, establecemos cinco grupos atendiendo al Perfil y a la asignatura de matemáticas cursada en Bachillerato, para ello agrupamos los individuos de Perfil Matemáticas con los de la muestra de Referencia, además en el Perfil Empresa y el Perfil General separamos a los alumnos por la asignatura de matemáticas cursada en Bachillerato. La Ansiedad media en los grupos quedaría como se indica en la tabla 9. En un análisis de comparaciones múltiples se detectan como diferencias significativas a un nivel 0.05 todas las diferencias de medias salvo las correspondientes a los pares Empresa CCSS con Empresa Mat., Empresa Mat. con General CCSS y General CCSS con General Mat.

	N	Media	Desviación típica	Error típico	Mínimo	Máximo
Empresa CCSS	40	24,93	10,96	1,73	2	47
Empresa Mat.	13	23,85	14,03	3,89	5	47
General CCSS	97	16,56	9,07	,92	0	43
General Mat.	99	15,76	9,61	,97	1	54
Matemáticas	70	10,71	6,52	,78	0	26
Total	319	16,37	10,17	,57	0	54

Tabla 9. Estadísticos descriptivos de Ansiedad por grupos relacionados con Perfil y TIPOMATES

Si dividimos los grupos anteriores por Género obtenemos diferencias significativas de 7 puntos en la ansiedad media de las mujeres de Empresa CCSS respecto a la de los hombres del mismo grupo (Mann-Whitney p-valor exacto=0.039) y de casi 4 puntos entre las mujeres y los hombres de perfil General que han cursado “Matemáticas aplicadas a las CCSS” en Bachillerato (Mann-Whitney p-valor=0.022). La ansiedad media por Género para este análisis se representa en el gráfico 2.

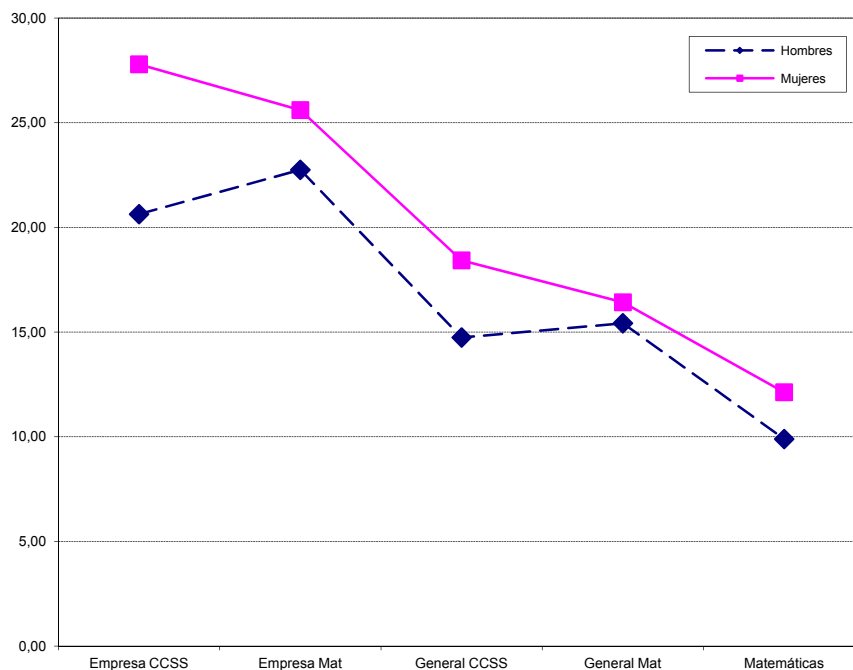


Gráfico 2. Medias de Ansiedad por Perfil y TIPOMATES en Hombres y en Mujeres

Conclusiones

La ansiedad hacia las matemáticas de los alumnos de primer curso de Grados en Estadística en España (puntuación media de 18,5 con error típico de 0,61) es inferior a la tomada como referencia (20). Sin embargo, en los alumnos de Grados en Estadística y Empresa la diferencia se invierte y la ansiedad (media de 25 con error típico de 1,38) supera la de referencia.

La muestra evidencia diferencias significativas respecto a la asignatura de Matemáticas cursada en Bachillerato que indican una puntuación media en ansiedad mayor en los alumnos que han cursado MCCSS, sin embargo esa diferencia se observa en las mujeres pero no en los hombres.

La muestra evidencia diferencias significativas respecto al género hasta el punto que la media en las mujeres (20,20) supera la de referencia, aunque no significativamente. Esas diferencias son mayores en los grupos con mayor nivel de ansiedad (perfil Empresa y alumnos que han cursado MCCSS).

La concatenación de las características: **Grado en Estadística y Empresa, MCCSS y género femenino** nos revela la tipología del alumno del Grado en Estadística con ansiedad matemática elevada.

Estas constataciones parciales nos llevan a concluir que un significativo grupo de los alumnos que acceden a Grados en Estadística no muestra un nivel de ansiedad matemática tan bajo como sería deseable para estos estudios. Adicionalmente, añadimos un nuevo ejemplo a los ya citados en la introducción, en el que se confirma que la ansiedad que presentan las universitarias hacia las matemáticas supera a la de sus compañeros. Todo ello nos llevaría a la recomendación de potenciar, por ejemplo en el contexto de cursos cero para alumnos de nuevo ingreso o similares, una formación emocional matemática que prevenga posibles fracasos académicos no deseados.

Referencias

- Byrd, P.G (1982). A descriptive study of mathematics anxiety: Its nature and antecedents. *Dissertation Abstracts International*, 43, (8-A), 2583
- Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de Educación Primaria en formación y en ejercicio, en Camacho, M, Flores, P. y Bolea, P. (eds). *Investigación en Educación Matemática XI* (pp.121-140). La Laguna: SEIEM.
- Fennema, E. y Sherman, J.A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalog of Selected Documents of Psychology*, 6(31)
- Gardner M.C. (1997). Changing math anxiety and attitudes with the use of graphics calculators: Differences by gender and age of student. Comunicación presentada en el Midwest Research-to-Practice Conference in Adult, Continuing and Community Education.
- Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afectos, en Moreno, M, Estrada, A., Carrillo, J. y Sierra, T. (eds). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.121-140). Lleida: SEIEM.
- Guerrero, E.; Blanco, L. J. y Vicente, F. (2002). Trastornos emocionales ante la educación matemática, en GARCÍA, J.N. (coord.): *Aplicaciones a la Intervención Psicopedagógica*. Madrid, Pirámide, pp. 229-237.
- Hembree, R. (1990). The nature, effect, and relief of mathematics anxiety. *Journal of Research in Mathematics Education*, 21, 33-46
- Autor y otros (2005).
- Autor y otros (2008).
- Pérez-Tyteca, P. y Castro Martínez, E (2011a). La ansiedad matemática y su red de influencias en la elección de carrera universitaria, en Marín, M, Fernández, G., Blanco, L.J. y Palarea, M. (eds). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 471-480). Ciudad Real: SEIEM.
- Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (2011b). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las ciencias*, 29(2), 237-250
- Perry, A.B. (2004). Decreasing math anxiety in college students. *College student journal*, 38(2), pp.321-324.
- Shi, N-Z., He, X. and Tao, J. (2009). Understanding Statistics and Statistics Education: A Chinese Perspective. *Journal of Statistics Education*, 17(3)
- Symonds, R., Lawson, D. y Robinson, C. (2010). An investigation of Physics undergraduates' attitudes towards Mathematics. *Teach. Math. Appl.*, 29(3), 140-154.
- Tapia, M. y Marsh, G.E. (2004). The relationship of math anxiety and gender. *Academic Exchange Quartely*, 8(2), 130-134.
- Tobias, S. y Weissbrod, C. (1980). Anxiety and mathematics: An update. *Harvard Educational Review*, 50(1), 63-70

CARACTERÍSTICAS PARA IDENTIFICAR A PROFESORES DE MATEMÁTICAS EXPERTOS

CHARACTERISTICS TO IDENTIFY EXPERT MATHEMATICS TEACHERS

Rojas, N. ⁽¹⁾, **Carrillo, J.** ⁽²⁾, **Flores, P.** ⁽¹⁾

Universidad de Granada ⁽¹⁾, *Universidad de Huelva* ⁽²⁾

Resumen

Presentamos características que distinguen a los profesores de matemáticas expertos. Las particularidades surgen de la revisión de investigaciones relacionadas con la naturaleza de la experiencia pedagógica, que permiten extraer características primarias y secundarias que distinguen a estos docentes. Las primarias aluden a cuestiones específicas del conocimiento y aspectos de su enseñanza, mientras que las secundarias se refieren a los años de experiencia docente, reconocimiento por parte de su entorno educativo y participación en procesos de actualización constante en su disciplina, entre otros. Finalmente, exponemos el caso de un profesor seleccionado según las características secundarias descritas, revelándose la necesidad de considerar las características primarias si pretendemos profundizar en la comprensión de la naturaleza del conocimiento matemático para la enseñanza.

Abstract

We present characteristics that distinguish expert teachers. The peculiarities arise from the review of research related to the nature of teaching experience, which can be drawn from primary and secondary characteristics that distinguish these teachers. The primary characteristics refer to specific issues and aspects of knowledge of content and its teaching, while the secondary ones refer to the years of teaching experience, recognition by their educational environment, and participation in the process of continuing education, among others. Finally, we present the case of a teacher selected by the secondary characteristics described, revealing the need to consider the primary characteristics, given that our goal is to get a deeper understanding of the nature of the mathematical knowledge for teaching.

Palabras clave: *Profesor de matemáticas experto, pericia docente, experiencia profesional.*

Key words: *Expert mathematics teacher, teaching expertise, professional experience.*

Introducción

En este trabajo, de carácter teórico, resumimos una pluralidad de estudios que identifican características para reconocer a los docentes de matemáticas que se diferencian del común de los profesores y que denominamos expertos. Forma parte de una investigación en la que buscamos caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores expertos de educación obligatoria, al enseñar las fracciones. Queremos determinar atributos particulares del conocimiento matemático y didáctico del contenido a partir de las actuaciones del profesor en el aula (Ribeiro y Carrillo, 2011, p. 515). Para el análisis del conocimiento matemático para la enseñanza nos basamos en Ball, Thames y Phelps (2008), quienes proponen varios subdominios que recogen el conocimiento que el profesor posee en relación a la comprensión de los conceptos y procedimientos, las conexiones entre ellos, principios y valores del quehacer matemático, el uso de representaciones y ejemplos, las dificultades y modos habituales de proceder de los alumnos y el currículo, principalmente.

Estudiar el conocimiento del profesor en la práctica, específicamente del docente experto, puede ayudarnos a interpretar mejor el trabajo del enseñante, profundizar en su naturaleza y relacionar los conocimientos con los de otros profesores. Como especifica Schoenfeld (2011), “comprender la enseñanza de expertos es la ‘diana’ para el desarrollo profesional, ya que puede permitir encontrar maneras de ayudar al profesorado a desarrollar las competencias necesarias para su profesión.” (p.333). También puede facilitar la elaboración de planes de formación más acordes con las características de los docentes (Blanco, 1997).

En este documento presentamos una investigación teórica que hemos llevado a cabo con el objetivo de identificar a profesores expertos. Para llevarla a cabo hemos comenzado por estudiar aspectos teóricos sobre distintas conceptualizaciones que se adoptan para distinguir a los docentes. Posteriormente, la exploración de los estudios nos lleva a diferenciar características primarias propias de las tareas del profesor y secundarias aludidas a aspectos generales de desarrollo profesional del docente. Una vez seleccionadas estas características, presentamos el caso de un profesor experto identificado de acuerdo a características secundarias, en el que hemos apreciado que es importante incorporar características aludidas a la práctica de enseñanza (características primarias) para poder seleccionar profesores expertos cuya práctica suministre información sobre su conocimiento matemático para la enseñanza.

Conceptualización de profesor de matemáticas experto

La experiencia de los profesores ha sido un tema ampliamente investigado (Leinhardt, 1989; Borko y Livingston, 1989), estudiando el papel del docente en la enseñanza y tratando de comprender qué rol juega el conocimiento del profesor en el proceso de enseñanza.

Las investigaciones *proceso-producto* observan aspectos puntuales del profesor mientras enseña (proceso), que generan mejor rendimiento de los estudiantes (producto), identificando la eficacia docente con esas conductas del profesor. Posteriormente, con el realce de la psicología cognitiva y el constructivismo, los estudios se focalizan en los cambios en la estructura cognitiva del sujeto, introduciéndose elementos sobre el procesamiento de la información y la adquisición del conocimiento. Aparece así el *paradigma del pensamiento del profesor* que estudia los procesos de razonamiento que ocurren en la mente del docente durante su actividad

profesional (Marcelo, 1987). Son estudiados los procesos psicológicos, dejando atrás la conducta. Llinares (1991) enfatiza que las investigaciones sobre el pensamiento del profesor determinan una nueva conceptualización del conocimiento del docente con relación a su práctica, basada en: el aprendizaje desde la práctica, la naturaleza contextualizada del conocimiento y la comprensión del profesor de la materia que enseña. Este paradigma condujo a estudios para identificar experiencias pedagógicas de profesores expertos, comparándose a profesores noveles.

En el entorno educativo un profesor experto es reconocido, comúnmente, con los siguientes vocablos: experto, experimentado, buen profesor, competente, profesor con buena o exitosa práctica, entre otros, y en ocasiones, pueden estos términos ser empleados como sinónimos. Sin embargo, en la literatura se distinguen estas expresiones aludiéndose a significados específicos.

Algunos investigadores establecen categorías que definen el desarrollo docente. Por ejemplo Schempp, Tan, Manross et al. (1998) adoptan cinco categorías, enunciadas por Berliner (1988): principiante o novel, principiante avanzado, competente, muy competente y experto. Estas etapas son consideradas graduales, el profesor parte de la base como profesor principiante o novel y puede alcanzar un desempeño profesional experto. El profesor experto es aquel que enseña de manera intuitiva, automática y fluida; el buen desarrollo de su experiencia profesional le permite convertirse en docente experto. Por otro lado, un profesor con años de experiencia en el aula puede ser reconocido como experimentado, atribuyéndose el calificativo según los años de experiencia docente. No obstante, puede suceder que los años de experiencia no indiquen la pericia del profesor en un área determinada. Referente al buen profesor, Niss (2004) dice que es aquél que “de una manera efectiva puede fomentar el desarrollo de las competencias matemáticas en sus estudiantes.” (p.190). Esto conlleva que el buen docente de matemáticas adquiera cierta pericia en relación con el contenido matemático, manifieste destrezas y actitudes en torno a las matemáticas, y a su vez utilice estas características en variados entornos y situaciones. De esto surgen las competencias didácticas y pedagógicas específicas en matemáticas que conviene que desarrolle el profesor: la competencia curricular, de enseñanza, sobre el aprendizaje, de evaluación, de colaboración y para el desarrollo profesional (Niss, 2004). Alude a que el profesor ha de desarrollar la propia competencia como docente de matemáticas, lo que comprende participar en cursos de formación continua, implicarse en proyectos, investigaciones y conferencias, es decir, el profesor ha de participar en actividades que le permitan potenciar su desarrollo profesional. Además, incluye reflexionar sobre la propia enseñanza y sus necesidades, mantenerse actualizado sobre las nuevas perspectivas y tendencias en la investigación y en la práctica (Niss, 2004, p.192).

De lo anterior se desprende que un profesor que posee competencias profesionales imprescindibles y suficientes para desempeñar su labor docente y que consigue las finalidades educativas establecidas puede ser reconocido como un profesor competente. Fenstermacher y Richardson (2000) distinguen las buenas o exitosas prácticas. La buena enseñanza se atribuye a través de que tome en consideración los estándares aplicados a las tareas que competen a la enseñanza y en relación con las normas de la conducta profesional, esto último incluye consideraciones morales, mientras que la enseñanza exitosa pretende que los aprendizajes se logren. Que un profesor realice buenas o exitosas prácticas puede ser un indicador de una persona que denote pericia, al destacarse en su tarea como enseñante. Entonces nos preguntamos ¿qué características debe tener un profesor para ser identificado como experto en el sistema educativo? Para

buscar respuesta a la pregunta, revisamos algunas investigaciones que explicitan las características para identificar a docentes expertos.

Borko y Livingston (1989) abordan el estudio del pensamiento y las acciones de un grupo de profesores expertos y otro de profesores noveles (estudiantes para profesor). En esta investigación se compararon la forma de enseñanza y los procesos de reflexión después de las clases. Los profesores expertos fueron seleccionados por ser reconocidos como profesores con una vasta experiencia pedagógica y recomendaciones emitidas por los directivos de sus centros. Los autores consideraron que las características descritas eran adecuadas para comparar la enseñanza de los profesores seleccionados (Borko y Livingston, 1989, p.475).

Schempp et al. (1998) estudian las diferencias de conocimiento entre profesores noveles (que inician su carrera profesional) y competentes. A diferencia del estudio de Borko y Livingston (1989), estos investigadores comparan a profesores en dos etapas diferentes de la experiencia: novel y competente, de acuerdo a las etapas descritas por Berliner (1988). El profesor competente queda definido como “aquel docente que a través de la experiencia y el continuo aprendizaje ha alcanzado un respetable y reconocible nivel de experiencia pedagógica” (Schempp et al., 1998, pp.11-12). Para identificar y seleccionar a los profesores competentes, utilizan tres criterios: tener cinco o más años de experiencia en la enseñanza, ser recomendado por los compañeros de las escuelas públicas, y ser reconocido por el profesor mentor por su participación y desempeño en su labor.

Queda de manifiesto que la conceptualización de profesor experto depende de las orientaciones de los investigadores (Schoenfeld, 2011). Como describe Chi (2011), un profesor puede caracterizarse como experto en función de variadas dimensiones, tales como sus cualidades académicas, años de experiencia en el trabajo, consenso entre pares, evaluación basada en alguna tarea o evaluación del dominio de conocimiento en su área (p.18). Del mismo modo, y de acuerdo a las cualidades de los sujetos, un profesor puede considerarse experto, por ejemplo, por su capacidad innata, habilidades o su índice de especialización.

De lo anterior observamos dos tipos de características contempladas por los investigadores para identificar a profesores expertos, que denominaremos primarias y secundarias y que conforman nuestra conceptualización de profesor experto.

Las características primarias aluden a aspectos específicos de la tarea de enseñanza y a cuestiones sobre conocimiento; son cualidades que han de confirmarse a través de la observación de clase, de entrevistas sobre el contenido, de instrucción y de actuación.

Características primarias

- a) Comprensión de los contenidos específicos, del aprendizaje de los estudiantes y de estrategias de enseñanza
- b) Procesos de enseñanza más integrados (relaciona el contenido con diversas situaciones, usa variedad de representaciones en la enseñanza de los contenidos)
- c) Presentación a los estudiantes de problemas de mayor dificultad
- d) Uso de distintas estrategias para resolver los problemas
- e) Diseño y elaboración de actividades de enriquecimiento que favorecen la adquisición de los conceptos o procedimientos

Las características secundarias atienden a aspectos generales de la experiencia profesional del profesor.

Características secundarias

- f) Docente en ejercicio, con cinco o más años de experiencia docente en aulas
- g) Profesor destacado según las evaluaciones institucionales y nacionales si se aplican
- h) Haber enseñado el contenido matemático escolar, alusivo al objeto de estudio de interés, más de una vez, en los últimos años de desempeño docente
- i) Docente recomendado por sus pares y por los directivos del centro
- j) Participar en procesos de actualización en su disciplina, como: participación en curso de formación, realización de postgrados (licenciatura, máster, doctorado), implicación en procesos de investigación e innovación educativa
- k) Ser consciente del incesante proceso de cambio de la educación, motivo para ser un docente activo que se actualiza y se preocupa por su mejora continua como profesor
- l) Poseer alguna nominación o adjudicación de premios en concursos de enseñanza
- m) El rendimiento de sus estudiantes en evaluaciones locales, nacionales e internacionales ha de ser destacado

Una vez determinadas las características del profesor experto, y con objeto de emprender una investigación posterior en la que queremos estudiar el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores expertos, pasamos a seleccionar a sujetos que pueden identificarse como profesores expertos a partir de las características secundarias. Asumimos que el docente experto poseerá un mayor conocimiento y, por ello, nos aportará más información sobre la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas para enseñar fracciones.

Análisis de un caso: selección de un profesor de matemáticas experto atendiendo a características secundarias

Con el objeto de profundizar en el conocimiento matemático para la enseñanza seleccionamos el caso de un profesor de matemáticas experto. En este trabajo nos centramos, únicamente, en la selección de un profesor atendiendo a las características secundarias descritas anteriormente. Dado que este estudio no tiene intención de generalizar, sino de profundizar en la comprensión de una realidad singular, hemos elegido el estudio de caso como diseño de investigación (Stake, 1995).

Considerando las características secundarias seleccionamos a uno de los sujetos de nuestra investigación. Aplicamos un cuestionario inicial a Manuel, Licenciado en Matemáticas con 13 años de experiencia como docente de matemáticas en la Educación Secundaria (f) quien ocasionalmente imparte clases en la universidad. Ha participado en congresos sobre Sistemas Dinámicos, al ser una línea de trabajo que lo motiva, y en cursos de perfeccionamientos sobre informática y pedagogía impartidos en su centro (j). Manuel es consciente de los cambios educativos a los que está sujeto (k), y considera que se está preparando para afrontarlos.

Además, entrevistamos a dos de los colegas de Manuel que nos brindaron información sobre su desempeño docente, quienes lo recomiendan para grabar y

estudiar sus clases (i), aludiendo a que es un profesor que “domina la materia que enseña” y “tiene buena relación con el alumnado y la gestión del grupo”. Ambos colegas concuerdan con las apreciaciones aunque uno de ellos enfatiza que nunca ha estado con Manuel dentro del aula. Además, Manuel ha impartido en varias ocasiones el contenido de interés en los últimos años (h), y sus alumnos obtienen buenas calificaciones de media (m).

De la lectura de la encuesta inicial aplicada a Manuel y de la entrevista a sus colegas se desprende que el docente cumple las características secundarias f, h, i, j, k, m, lo que se complementa con la alusión a su dominio de la materia (característica primaria) por parte de sus colegas. Esto nos lleva a seleccionarlo como profesor experto para nuestra investigación.

Una vez seleccionado procedimos a observar su práctica docente, a través de la observación no participante; con un nivel de distanciamiento en las actividades de la sala de clases. La observación del aula ha sido grabada en vídeo desde la parte trasera del salón de clase, con el fin de captar la totalidad del escenario y las interacciones entre el profesor y los estudiantes. En total se observaron doce sesiones de clase, correspondiente al tema de las fracciones.

Tanto al apreciar sus clases como al analizar posteriormente la actividad matemática desarrollada en las sesiones de clase observamos, por un lado, que tiene una fuerte comprensión procedimental de las matemáticas, y por otro, que el contenido no emerge de la discusión de clase, sino que es definido por el profesor, con una mínima participación de los estudiantes en clase.

Su modo de enseñar matemáticas supone un escollo para obtener información, directamente de su práctica (como es nuestra intención), sobre cómo se pone en juego su conocimiento matemático en los momentos de improvisación, por ejemplo ante una dificultad de aprendizaje no prevista. Asimismo, no contempla trabajar con sus alumnos los pasos ocultos de los procedimientos, por lo que no sabemos nada de esa componente de uno de los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza. Los ejemplos y las representaciones del contenido matemático son poco variados, lo que dificulta para profundizar sobre la naturaleza de la relación entre su conocimiento matemático y su conocimiento didáctico del contenido.

Resulta difícil inferir cuál es su conocimiento matemático para la enseñanza, haciéndonos pensar que ese conocimiento se pone escasamente en acción.

Reflexión final

La idea de identificar a un profesor experto sigue estando vigente, y para ello en este estudio se han descrito unas características primarias (de difícil identificación a priori), y secundarias. Hemos seleccionado un profesor, Manuel, atendiendo a las características secundarias, del que pretendemos caracterizar su conocimiento matemático para la enseñanza. Pese a tener un alto grado de estas características, su actuación en clase tiene poca riqueza y matices, lo que nos ha mostrado que las condiciones objetivas que son las características secundarias no son suficientes para identificar a profesores de los que podamos extraer informaciones interesantes para estudios posteriores.

Esto nos lleva a concluir la necesidad de considerar las características primarias para la identificación de profesores expertos, ya que estas, al versar sobre aspectos específicos del conocimiento de las matemáticas y de su enseñanza, tienen mayor

relación que las secundarias con los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza, que es nuestro foco de estudio.

Referencias

- Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Berliner, D. C. (1988). *The development of expertise in pedagogy*. Charles W. Hunt Memorial Lecture presented at the annual meeting of the American Association of Colleges for Teacher Education, New Orleans.
- Blanco, L. (1997). Tipos de tareas para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido. En L. Rico & M. Sierra, (Eds), *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.34-40). Zamora: SEIEM.
- Borko, H., y Livingston, C. (1989). Cognition and Improvisation: Differences in Mathematics Instruction by Expert and Novice Teachers. *American Educational Research Journal*, 26(4), 473-498.
- Chi, M. (2011). Theoretical Perspectives, Methodological Approaches, and Trends in the Study of Expertise. En Y. Li y G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp.17-39). Boston, MA: Springer.
- Fenstermacher, G. D., y Richardson, V. (2000). *On making determinations of quality in teaching*. Paper prepared for the Board on International Comparative Studies in Education of the National Academies of Science and the National Research Council, Washington, DC.
- Leinhardt, G. (1989). Math lessons: A contrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 52-75.
- Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.
- Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor*. Ceac, Barcelona.
- Niss, M. (2004). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Ribeiro, C. M. y Carrillo, J. (2011). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco , y M. Palarea Medina, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 513-521). Ciudad Real: SEIEM.
- Schempp, P. Tan, S. Manross, D. y Fincher, M. (1998). Differences in novice and competent teachers' knowledge. *Teachers and teaching*, 4(1), 9-20.
- Schoenfeld, A. (2011). Reflections on Teacher Expertise. En Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp.327-341) Boston, MA: Springer.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, Cal.: Sage.

EL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO Y PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE LA REGLA DEL PRODUCTO PROBABILÍSTICO

THE REASONING OF THE HIGH SCHOOL AND TEACHERS TRAINING STUDENTS ABOUT THE PRODUCT RULE OF PROBABILITIES

Sánchez. E., Mayén, S., Salazar, A.

Cinvestav-IPN, México

Resumen

Esta comunicación forma parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo es describir la evolución del razonamiento de estudiantes de bachillerato (15-17 años) y profesores de secundaria en formación inicial sobre la fórmula binomial. Se describen y analizan las respuestas a dos preguntas de un cuestionario de 10, que fueron elaboradas para evaluar los niveles de razonamiento de elementos de conocimiento de la fórmula binomial. Se aplicó a tres tipos de estudiantes: un grupo de bachillerato sin instrucción previa de probabilidad; un grupo de bachillerato y otro de futuros profesores que reciente e independientemente habían estudiado un curso. Se concluye con una jerarquía de razonamiento de la regla del producto de probabilidades.

Abstract

This communication is part of a wider investigation in which the goal is describe the evolution of reasoning of high school students (15-17 year-old) and teachers in pre-service about the binomial formula. The responses given by the students to two questions of a ten items questionnaire are described and analyzed. The questions were designed to determine reasoning levels of binomial formula knowledge elements. Three kinds of students were questioned: a group of high school who have not taken a probability course and other two groups that have recently and independently taken a course, one of high school and another of teachers in pre-service. The conclusion is a hierarchy of reasoning on the product rule of probabilities.

Palabras clave: *Regla del producto, jerarquía, sesgo de representatividad, estudiantes de bachillerato, profesores en formación.*

Key words: *Product rule, hierarchy, high school students, teachers in pre-service.*

Introducción

La distribución binomial es la más importante distribución discreta y forma parte del contenido de los temas del currículo de matemáticas de bachillerato y de cualquier curso introductorio de probabilidad y estadística. Los objetivos de la mayoría de programas de bachillerato establecen que los estudiantes aprendan a construir distribuciones de probabilidad de variables aleatorias elementales; a calcular e interpretar su valor esperado y su variancia; y a utilizar distribuciones en la solución de problemas (Jones, Langrall y Mooney, 2007). Esto presupone una comprensión y dominio de la fórmula binomial y de los elementos de conocimiento que la constituyen.

Varios investigadores han verificado la existencia y persistencia de sesgos cognitivos, creencias y concepciones erróneas de los estudiantes cuando resuelven tareas de probabilidad en situaciones de incertidumbre (Kahneman, Slovic y Tversky, 1972; Fischbein y Schnarch, 1997; Batanero y Sánchez, 2005); la percepción de aleatoriedad, los sesgos derivados de la heurística de representatividad, el sesgo del resultado aislado y los sesgos de equiprobabilidad y de linealidad son los más conocidos en didáctica de la probabilidad.

El sesgo de representatividad se presenta en gran variedad de situaciones; Shaughnessy (1992) opina que persiste aún después de que los estudiantes han adquirido técnicas de cálculo de probabilidades que les permitiría evitarlo. La verificación de esta persistencia pondría en entredicho la manera en que se enseña la materia. Sin embargo, a pesar de la importancia de aclarar esta cuestión, no se han encontrado investigaciones que describan y analicen cómo abordan los problemas que propician el sesgo de representatividad estudiantes recientemente preparados en los temas que permitirían superarlo. ¿Las respuestas que ofrecen éstos son similares a las de los que no han llevado el curso de probabilidad?

En este trabajo describimos y analizamos las respuestas de estudiantes sin y con enseñanza de probabilidad a dos ítems, uno conocido en la investigación, que propicia el sesgo de representatividad y otro (cuya procedimiento de solución es el instrumento para resolver el anterior) formulado de manera directa para evitar cualquier interpretación desviada. Las respuestas de los ítems analizados en este reporte ofrecen también la posibilidad de explorar y organizar los diferentes niveles de razonamiento que desarrollan estudiantes frente a estas tareas, dando lugar a una jerarquía sobre la construcción de la *regla del producto* de probabilidades. Con esto se avanza en responder a la pregunta: ¿Cómo evoluciona la comprensión de la regla del producto de probabilidad?

Antecedentes

Es escasa la literatura de investigación que explora la comprensión o razonamiento de la fórmula binomial. Van Dooren et al. (2003) exploran la presencia de la *ilusión de linealidad* y muestran que hay estudiantes de bachillerato que a pesar de haber llevado cursos de probabilidad, caen en este sesgo cuando se les plantea problemas binomiales, cuyo enunciado contiene datos que aparentan ser o son proporcionales. Cabe señalar que los autores se proponen documentar la conducta de resolución de los estudiantes que no responden correctamente a preguntas cuantitativas (hay otras similares de tipo cualitativo) y también que, en gran parte, la causa del fracaso es la ilusión de linealidad. Sin embargo, no enfocan su atención hacia los rasgos

de conocimiento que manifiestan los estudiantes que ofrecen una respuesta correcta, los cuales no son pocos.

Abrahamson (2009a) realiza tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes universitarios frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). En Abrahamson (2009b y 2009c) se reporta una entrevista a profundidad con un niño de 11.5 años; utiliza dispositivos de mediación cuya comprensión requiere diferentes niveles de abstracción. En la entrevista se muestra el proceso de construcción de una distribución (casi) binomial que lleva a cabo el niño con ayuda de la mediación de diferentes artefactos. Abrahamson (2009b) se interesa en el papel de instrumentos de aprendizaje: un dispositivo físico (marbles scooper), tarjetas cuadradas divididas en 4 partes para representar las posiciones de las canicas en el dispositivo y su organización en un histograma. Llama la atención que su diseño que tiene el propósito de que los estudiantes distingan las secuencias THHH, HTHH, HHTH, HHHT en el evento “1T y 3H” no incluya los diagramas de árbol, los cuales son un instrumento de mediación accesible para el mismo fin.

Landín y Sánchez (2010) informan de las respuestas de 66 estudiantes de bachillerato a 4 tareas relacionadas con la fórmula binomial. Tres de esas tareas inducían un sesgo cognitivo. Proponen una jerarquía para evaluar las respuestas de los estudiantes a tareas relacionadas con la fórmula binomial. En Sánchez y Landín (2011), se describe un proceso para mejorar la fiabilidad de la jerarquía de razonamiento reportada en Landín y Sánchez (2010).

Perspectiva teórica

El razonamiento de estudiantes frente a una tarea refleja la comprensión conceptual que han alcanzado y se expresa en el uso de elementos de conocimiento relacionados con la tarea y con el (o los) concepto (s) en cuestión. Las inferencias y explicaciones que realizan estudiantes de un grupo de una edad similar y del mismo nivel educativo al resolver una tarea se pueden organizar en una jerarquía para dar cuenta de los diferentes grados de integración de esos elementos; los procedimientos más eficientes que desarrollan algunos estudiantes del grupo son un indicio, sin ser determinante, de los niveles de desempeño que pueden ser alcanzados por los sujetos de ese rango de edad y nivel educativo; mientras que los niveles inferiores ofrecen indicaciones de las dificultades que encuentran y los conocimientos clave que permiten superarlas y mejorar sus niveles de desempeño.

En la literatura de educación estadística frecuentemente se ha aplicado la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991) para el análisis o evaluación de diferentes conceptos probabilísticos y estadísticos o se han presentado propuestas de jerarquías inspiradas en SOLO. Tarr y Jones (1997) presentan una jerarquía de las nociones de probabilidad condicional e independencia; en Jones, Thornton, Langrall, y Tarr (1999) se extiende a tareas de espacio muestral, probabilidad teórica, probabilidad experimental, comparación de probabilidades, independencia y probabilidad condicional. En este trabajo se retoman los niveles que definieron estos autores en su jerarquía, pero ahora es referida a la fórmula binomial.

Metodología

El presente estudio es de tipo exploratorio y las hipótesis se han precisado o transformado de manera paralela a la observación y al análisis de los datos. En el estado

actual de la investigación y para los fines de este informe se consideran las siguientes hipótesis: 1) Los conocimientos formales de probabilidad son una componente que contribuye a superar los sesgos cognitivos sin necesariamente garantizar su extinción. 2) Los conocimientos más abstractos para los estudiantes de este nivel son las combinaciones y la regla del producto de probabilidades, y para adquirirlos, los estudiantes se apoyan fuertemente en los diagramas de árbol (*instrumentos de mediación*, en terminología de Abrahamson).

Sujetos: tres grupos, uno de 31 estudiantes de bachillerato sin curso previo de probabilidad; uno de 28 estudiantes de bachillerato y otro de 18 profesores de secundaria en formación inicial, ambos con estudios previos de probabilidad.

Instrumentos: Problemas 3 y 4 de un cuestionario de 10 problemas de probabilidad, ambos relacionados con la regla del producto probabilístico y la fórmula binomial, que a continuación presentamos:

3. Considere todas las familias en las que hay 5 hijos. Se elige una familia al azar. Se supone que la probabilidad de ser mujer es igual a la de ser hombre y es igual a $\frac{1}{2}$. De las siguientes afirmaciones ¿cuál es correcta?:

- a) El evento HMMHM es más probable que el evento HHHHH
- b) El evento HHHHH es más probable que el evento HMMHM
- c) El evento HHHHH es igual de probable que el evento HMMHM

Donde HMMHM significa que el mayor es Hombre, el que sigue Mujer, después Hombre y los dos menores Mujeres. HHHHH significa que todos son Hombres. Justifica tu respuesta.

4. ¿Cuál es la probabilidad de que en 5 nacimientos ocurra el evento MMMMM (nacen cinco niñas)? Justifica tu respuesta.

El problema 3 es una versión de un problema que ha sido útil para confirmar un sesgo derivado de la heurística de representatividad (Kahneman y Tversky, 1972). En el problema 4, se pide el cálculo de la probabilidad del evento MMMMM, mientras que el problema 3 induce un sesgo cognitivo al pedir comparar dos eventos, uno de los cuales a simple vista parece más probable que el otro (es más probable que en una familia de 5 hijos haya hijos e hijas a que solo haya hijos del sexo masculino), el problema no requiere hacer comparación alguna y la respuesta es $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

Procedimiento: Se aplicó el cuestionario a cada uno de los grupos examinados en presencia de los investigadores.

Procedimiento de análisis de datos. El análisis de las respuestas es de tipo cualitativo, y consiste en ubicarlas en diferentes niveles en función de los elementos de conocimiento que se ponen en juego y de la precisión de su ejecución. Tales elementos, para las preguntas analizadas se reducen a tres: definición clásica de probabilidad, diagramas de árbol y regla del producto.

Se elaboró una jerarquía de razonamiento siguiendo dos pasos: 1) Se definió una jerarquía teórica de cuatro niveles similares a la propuesta por Jones, Langrall y Mooney, (2007) para otros conceptos de probabilidad, en este caso, referida a la regla del producto probabilístico; 2) Con base en los resultados observados se ajustó la jerarquía de manera que se precisen rasgos o tendencias observadas en los datos que no fueron previstos en la jerarquía teórica. El resultado se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1. Jerarquía de Razonamiento sobre la Regla del Producto de Probabilidades

<i>Nivel subjetivo:</i> • Respuesta no relacionada con la situación o influidas por el sesgo de representatividad • Muestra rasgos de conocimientos pertinentes pero presenta diagrama de árbol defectuoso o cálculos erróneos, de modo que no llega a la solución • Opera con los datos dados, pero de manera inapropiada, con componentes extraños o con gran cantidad de errores <i>Nivel transicional:</i> • Representación parcial o total del espacio muestral con diagramas de árbol y aplicación de la definición clásica de probabilidad. Se incluyen casos en que no llegan a la respuesta correcta, pero su procedimiento es pertinente <i>Nivel cuantitativo informal:</i> • Utiliza la regla del producto, la cual deriva de la representación de un diagrama de árbol o expresada en un árbol de probabilidades • Expresa y utiliza la regla del producto pero comete errores de cálculo <i>Nivel numérico:</i> • Se aplica convenientemente la regla del producto de probabilidades

Resultados

Grupo de bachillerato sin cursos previos de probabilidad. Respecto al problema 3, 28 de las respuestas de estos alumnos se clasificaron en el *nivel subjetivo*, y 3 en ‘sin respuesta’ (Figura 4a). A su vez, estas respuestas se han agrupado en tres clases:

1) Respuestas basadas en conocimientos o experiencias personales del estudiante (conocimientos correctos o incorrectos o experiencias pertinentes o no, pero en todo caso, sin captar el aspecto teórico de la pregunta), 5 estudiantes dieron este tipo de respuesta; por ejemplo:

Respuesta c), Pues yo creo que es igual de probable, porque en mi caso mi familia (papá y mamá) es de HMHM y, y no me voy muy lejos, mi tía (hermana de mi papá) tuvo puros hombres y su otra hermana tuvo puras mujeres, entonces es igual de probable

Respuesta a), yo digo que a) porque en la actualidad el índice de hombres predomina en las familias; hay más hombres que mujeres [Hay que observar, además, que el inciso que está de acuerdo con la idea que expresa es el b y no el a, como dice en su respuesta]

2) Respuestas que eligen el inciso a, probablemente influidos por el sesgo de representatividad y que la “explicación” consiste sólo en la afirmación de la opción elegida, 12 estudiantes dieron este tipo de respuesta, por ejemplo:

Respuesta a), El evento HMHMM es más probable que HHHHH ya que es más probable que algunos sean mujeres a que todos sean hombres

Respuesta a), es correcto; es el inciso a) ya que es más probable que haya más mujeres con hombres que sólo hombres

3) Respuestas que infieren que a partir de la igualdad de los sexos, la secuencias de “Hs y Ms” son equiprobables, pero con explicaciones imprecisas o vagas, detrás de ellas se percibe que hay una intuición correcta pero con escaso nivel de elaboración verbal; 8 respuestas fueron de este tipo; en ningún caso se basan en diagramas de árbol o en operaciones aritméticas o combinatorias.

c) la Respuesta correcta es el inciso c. Ya que existe la misma probabilidad de que nazca un niño ó una niña”

c) porque Mujeres y Hombres tienen exactamente la misma probabilidad

En relación al problema 4 (sin sesgo), 26 respuestas de este grupo se clasificaron en el nivel subjetivo, 4 en el transicional y 1 no contesta. En el *nivel subjetivo* se observan tres tipos de respuestas: las que presentan textos y rasgos incoherentes (12), las que se basan en una información u opinión personal (6) y las que sólo afirman que la probabilidad de ambas secuencias es $\frac{1}{2}$, derivada de la probabilidad de los eventos H y M (8). Las respuestas clasificadas en *nivel transicional* presentan árboles incompletos y la utilización de la definición clásica de probabilidad.

Grupos con cursos previos de probabilidad. En relación con el problema 3, de las 28 respuestas de los estudiantes de bachillerato, 9 se clasifican en el nivel subjetivo, 17 en transicional, 1 en cuantitativo informal y 1 no responde. De las respuestas de los profesores en formación, 8 se clasifican en nivel subjetivo, 7 en transicional, y 2 en cuantitativo informal. La distribución de las respuestas de ambos grupos es similar, aunque con un ligero mejor desempeño en los futuros profesores; las respuestas de estos fueron más limpias y ordenadas, pero con niveles de razonamiento análogos a los del grupo de bachillerato. A continuación se describen los rasgos principales encontrados en las respuestas de ambos grupos.

Las explicaciones que se ubican en el nivel subjetivo, son incoherentes o no ofrecen justificación alguna, a pesar de que en algunos casos eligieron la opción correcta (Figura 1):

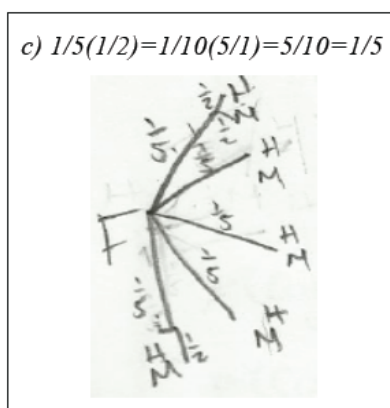


Figura 5. Respuesta del nivel subjetivo

Las respuestas del nivel transicional eligen la opción adecuada, usan árboles parciales o completos, afirman que la probabilidad de cada secuencia es $\frac{1}{2}$ y exhiben un árbol combinatorio, de donde deducen que ambas secuencias tienen la misma probabilidad; en algunos casos exhiben el árbol y encuentran e indican la probabilidad $\frac{1}{32}$, sin embargo, no hacen comentarios suficientes o eligen una opción incorrecta (Figura 2).

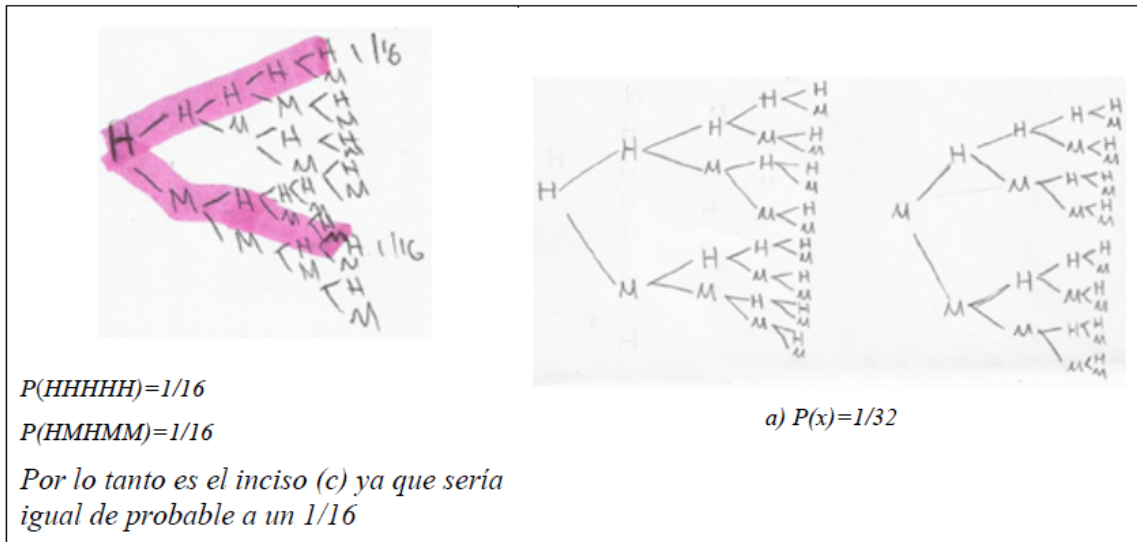


Figura 6. Respuestas del nivel transicional

Es importante señalar que en 2 respuestas del grupo de bachillerato y 5 de los futuros profesores no hay errores importantes, y fueron clasificadas en este nivel, ya que en ellas se elabora un árbol, se encuentra la probabilidad $1/32$ y se elige la respuesta correcta. Estas respuestas están en la frontera entre transicional y cuantitativo informal; se distinguen del resto de las clasificadas en transicional en que no contienen errores, pero no se clasifican en cuantitativo informal debido a que en su justificación no muestran conocimiento de la regla del producto.

Del grupo de futuros profesores, sólo una respuesta se encuentra en nivel cuantitativo informal pues deriva el producto a partir de un árbol de probabilidades (Figura 3):

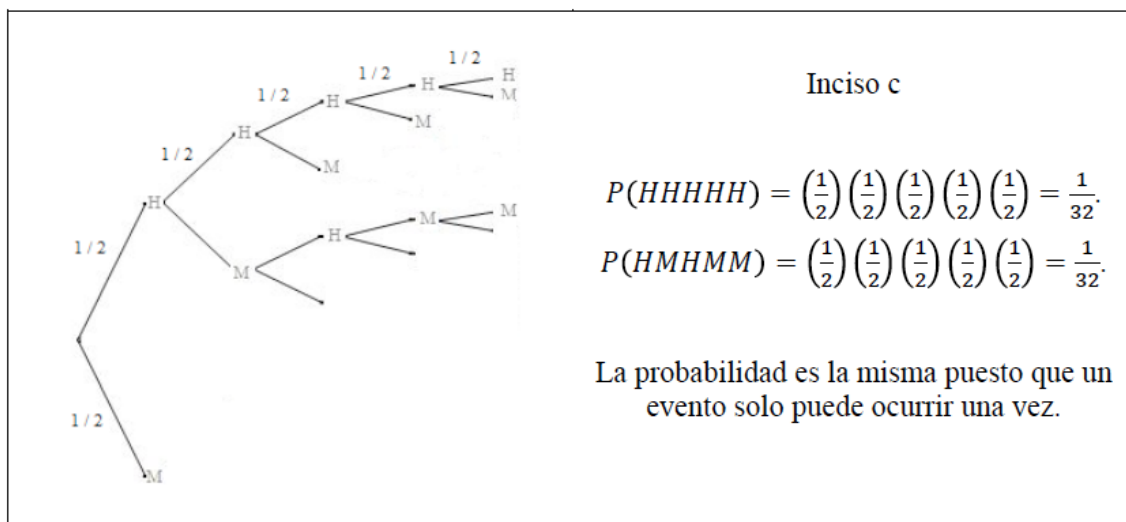


Figura 7. Respuesta del nivel cuantitativo informal

No hubo ninguna respuesta clasificada en el nivel numérico, ya que ninguna se basó solamente en una aplicación directa de la regla del producto de probabilidades.

Respecto al problema 4, de las respuestas de los estudiantes de bachillerato se clasificaron 14 en subjetivo, 8 en transicional, 5 en cuantitativo informal y 1 no contestó. En el caso de las subjetivas, 4 proponen $1/3$ o $1/5$, el 3 asociado a los 3 eventos exhibidos en el problema anterior y el 5 al tamaño de las secuencias. 5

proponen un diagrama de árbol defectuoso y obtienen un número alejado de la solución. 3 proponen $1/16$, pero sin ofrecer indicaciones de cómo lo obtuvieron.

Las Figuras 4 y 5 muestran las frecuencias de respuestas a los problemas 3 y 4, según nivel de razonamiento.

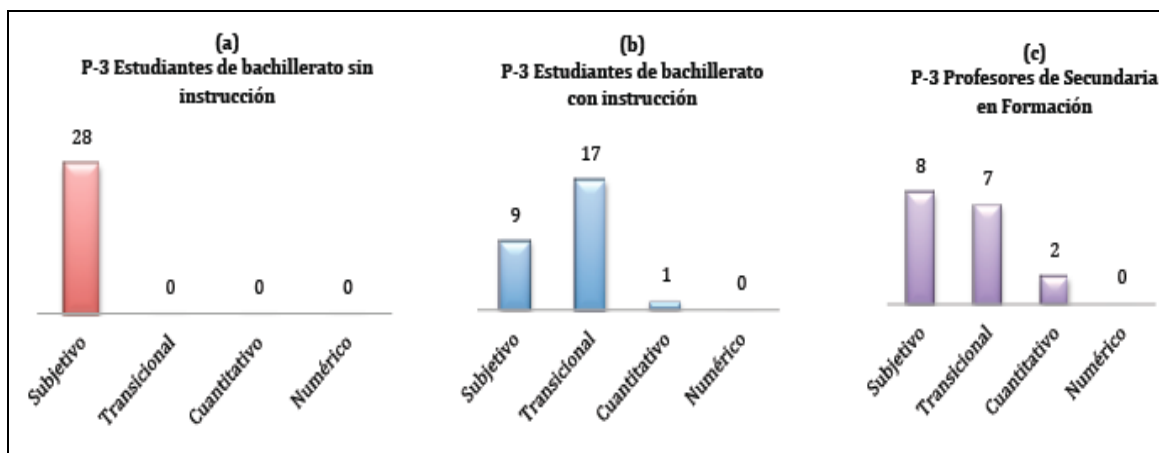


Figura 8. Frecuencias de respuesta al problema 3, según niveles de razonamiento

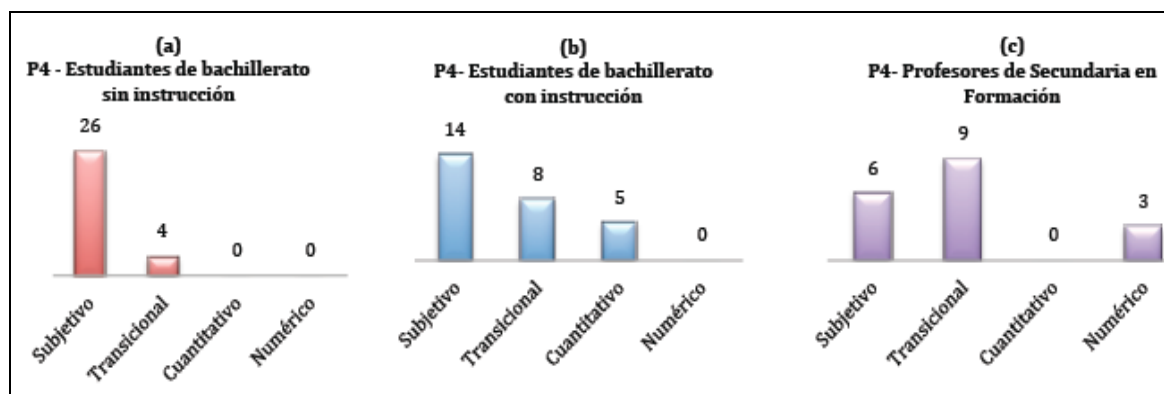


Figura 9. Frecuencias de respuesta al problema 4, según niveles de razonamiento

Conclusión

Respecto a la relación entre el sesgo de representatividad y el conocimiento de probabilidad, se pudo observar que sólo los estudiantes que no estudiaron probabilidad respondieron a la pregunta con base en la heurística de representatividad; además las respuestas de éstos a la pregunta 4 fueron clasificadas en el nivel subjetivo, de modo que no muestran conocimientos de los elementos que hubieran permitido resolver el problema; por otro lado, en las respuestas de los grupos que tuvieron cursos de probabilidad, clasificadas en el nivel subjetivo, sólo un caso puede considerarse influido por la heurística de representatividad; no es posible entonces apoyar la afirmación de que el sesgo persiste aún después de haber adquirido los conocimientos de probabilidad.

Las herramientas que la mayoría de estudiantes de este nivel utilizan para resolver los problemas son la regla clásica de probabilidad y los diagramas de árbol. Estos conceptos o elementos de conocimiento marcan la diferencia entre el nivel subjetivo y el nivel transicional. Las respuestas en este nivel aún no utilizan la regla del producto probabilístico. En el siguiente nivel jerárquico ya se reflejan estos aspectos, y además también se consideran los posibles errores de ejecución que frecuentemente impiden

llegar a la respuesta correcta a pesar de manifestar elementos de conocimiento pertinentes.

Una aportación del análisis mediante una jerarquía es que ofrece información sobre los elementos de conocimiento que les permite a los estudiantes superar el sesgo de representatividad. En las respuestas se aprecia que el uso de diagramas de árbol inhibe la posibilidad de la presencia de este sesgo y que además es un puente para construir la regla del producto. La información que proporciona el análisis mediante una jerarquía, en contraste con los resultados de von Doreen et al. (2003), es que se revisan tanto las causas de los fracasos como las del éxito. Los resultados aquí encontrados también sugieren que para hacer emerger la importancia de la distinción de arreglos ordenados es recomendable considerar en el diseño de situaciones el papel de 'instrumentos' como los diagramas de árbol; la propuesta de utilizar para este fin un dispositivo (como marbles scooper) (Abrahamson, 2009b), es interesante pero los diagramas de árbol también se pueden convertir en instrumentos en el mismo sentido, además de ser útiles para construir la regla del producto de probabilidades.

Reconocimientos

Este trabajo es parte del proyecto 101708, financiado por CONACYT: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México.

Referencias

- Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), pp. 27-47.
- Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction*, 27(3), pp. 175-224.
- Abrahamson, D. (2009c). A students synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researcher's lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), pp.195-226. [En línea: www.iejme.com]
- Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? En G.A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). New York: Springer.
- Biggs, J.B. y Collis, K.F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H.A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96-105.
- Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 909-955. Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.
- Jones, G.A., Thornton, C.A., Langrall, C.W. y Tarr, J.E. (1999). Understanding students probabilistic reasoning. En L. V.Stiff & F. R.Curcio (Eds.), *Developing*

- mathematical reasoning in grades K-12 (1999 yearbook, pp. 146-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3(3), 430-454.
- Landín, P., Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), pp.598-618.
- Sánchez, E., y Landín, P.R. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Rodríguez, G. García, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 533-541). Ciudad Real: SEIEM.
- Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, Va., USA: National Council of Teachers of Mathematics
- Tarr, J. E. y Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9 (1), 39-59.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (2), pp. 113-138.

CÓMO ESTUDIANTES PARA PROFESOR INTERPRETAN EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

HOW PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS NOTICE SECONDARY SCHOOL STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING. DERIVATIVE OF A FUNCTION AT A POINT

Sánchez-Matamoros, G. ⁽¹⁾, **Fernández, C.** ⁽²⁾, **Valls, J.** ⁽²⁾,
García, M. ⁽¹⁾, **Llinares, S.** ⁽²⁾

Universidad de Sevilla ⁽¹⁾, *Universidad de Alicante* ⁽²⁾

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar grados de desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico de la derivada de una función en un punto. A partir de los resultados de las investigaciones previas sobre la derivada diseñamos un cuestionario formado por tres tareas a partir de las respuestas de estudiantes a 3 problemas sobre el concepto de derivada en un punto. Los resultados han permitido generar descriptores de niveles de desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes. Estos resultados aportan información para el diseño de intervenciones en la formación de profesores de matemáticas que tengan como uno de sus objetivos el desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes.

Abstract

The goal of this study is to characterize pre-service mathematics teacher's professional noticing of secondary school students' mathematical thinking in the case of derivative of a function at a point. We designed a test with three tasks taking into account previous research about secondary school students' understanding of derivative. The analysis has allowed building a framework for the development of pre-service teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. These findings have implications for the design of mathematics teacher education programs with a specific focus on the development of pre-service teachers' professional noticing of students' mathematical thinking.

Palabras clave: *Mirada profesional, pensamiento matemático de los estudiantes, niveles de desarrollo.*

Key words: *Professional noticing, student' mathematical thinking, levels of development.*

La competencia docente “mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes”.

En los últimos años las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han subrayado la importancia de la competencia docente “mirar con sentido” (professional noticing) la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs, Philipp, 2010; van Es y Sherin, 2002). Esta competencia docente permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Aunque en los últimos años esta competencia ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas, la idea común que subyace a estos planteamientos es subrayar la manera en la que los profesores interpretan las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Mason (2002) indica como una característica de esta competencia docente el que el profesor sea consciente de cómo interpreta las situaciones de enseñanza-aprendizaje, mirando, de una manera estructurada, lo que puede ser relevante. Por otra parte, Van Es y Sherin (2002) caracterizan esta competencia docente como el ser capaz de identificar aspectos relevantes en una situación de enseñanza y usar el conocimiento sobre el contexto para interpretarlos, realizando conexiones a principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Una de las tareas relevantes para el profesor en las situaciones de enseñanza es interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Jacobs et al. (2010) conceptualizan esta competencia considerando tres destrezas interrelacionadas:

- *identificar* las estrategias usadas por los estudiantes
- *interpretar* la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes
- *decidir* cómo responder teniendo en cuenta la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes

Recientemente el énfasis se sitúa en caracterizar y comprender el desarrollo de esta competencia en estudiantes para profesor en dominios matemáticos específicos (Fernández, Valls y Llinares, 2011; Fernández, Llinares y Valls, 2011 a y b; 2012) planteándonos preguntas como

- En qué medida los estudiantes para profesor *identifican* los elementos matemáticos que utilizan los estudiantes en la resolución de tareas
- Cómo los estudiantes para profesor *interpretan* las respuestas de los estudiantes
- De qué manera las *decisiones de acción* que los estudiantes para profesor plantean tienen en cuenta la manera en la que los estudiantes parecen comprender las nociones matemáticas

El planteamiento de estas cuestiones de investigación se apoya en la existencia de síntesis de resultados de investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes que son referencia para el diseño de los instrumentos y para los análisis generados en esta agenda de investigación.

Las características de la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada

Un dominio de investigación que ha estado aportando resultados relevantes sobre cómo los estudiantes comprenden las nociones matemáticas es el Cálculo (Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Tall, 1990) y dentro de este dominio el concepto de derivada (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Baker, [Cooley](#) y [Trigueros](#), 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011).

Estas investigaciones han mostrado la dificultad que tienen los estudiantes de bachillerato en la construcción de los significados y relaciones de los diferentes elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada en un punto. Además han indicado que los sistemas de representación son considerados como medios que ayudan a los estudiantes a dotar de significado a los conceptos. Diversas investigaciones han mostrado que los estudiantes pueden realizar tareas sobre la derivada en un punto en un modo de representación pero tener dificultades con otro modo de representación. Esto es debido a que los estudiantes consideran los modos de representación separadamente sin ser capaces de establecer relaciones entre ellos. Por ejemplo, los estudiantes pueden hacer uso de la noción de derivada como pendiente de la recta tangente (gráfico) o como razón de cambio (analítico) sin establecer ningún tipo de relación entre ambas. Este hecho subraya la importancia que tiene la coordinación entre los diferentes modos de representación en la comprensión del concepto.

Con estas referencias previas en esta investigación nos centramos en caracterizar en estudiantes para profesor la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico de la derivada de una función en un punto. Las preguntas de investigación planteadas son:

- ¿Qué elementos matemáticos de la derivada de una función en un punto y sus relaciones utilizados por los estudiantes de Bachillerato durante la resolución de problemas son identificados por los estudiantes para profesor?
- ¿Cómo los futuros profesores interpretan la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada de una función en un punto?
- ¿Qué decisiones de acción proponen?

Método

Participantes y contexto

En esta investigación han participado 30 estudiantes del máster de profesorado de educación secundaria (EPPs), especialidad de matemáticas, de las Universidades de Alicante y Sevilla. Estos estudiantes provienen de distintas licenciaturas.

Instrumento

A partir de los resultados de investigaciones previas sobre la comprensión de la derivada diseñamos un cuestionario formado por tres tareas (figura 1). Cada tarea consistía en las respuestas de un estudiante de 1º Bachillerato a tres problemas de derivada en un punto, y extractos de la entrevista en los que el estudiante explicaba como había resuelto cada problema, estos datos fueron extraídos de trabajos anteriores (Sánchez-Matamoros, 2004), las tareas se completaban con tres cuestiones a las que los EPPs tenían que responder:

. Describe cómo ha resuelto el estudiante X cada problema, indicando los elementos del concepto de derivada utilizados y si el procedimiento usado es adecuado y por qué.

. A partir de las descripciones de cómo el estudiante ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante *X* comprende el concepto de derivada de una función en un punto?

. Considerando la comprensión de derivada de la función en un punto del estudiante *X* mostrada en la resolución de los problemas, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?

Los problemas usados en el diseño de las tareas mostraban diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada de una función en un punto en diferentes modos de representación. La figura 2 recoge los tres problemas usados, los elementos matemáticos que lo configuran y los modos de representación considerados.

Estructura de cada una de las tareas propuestas

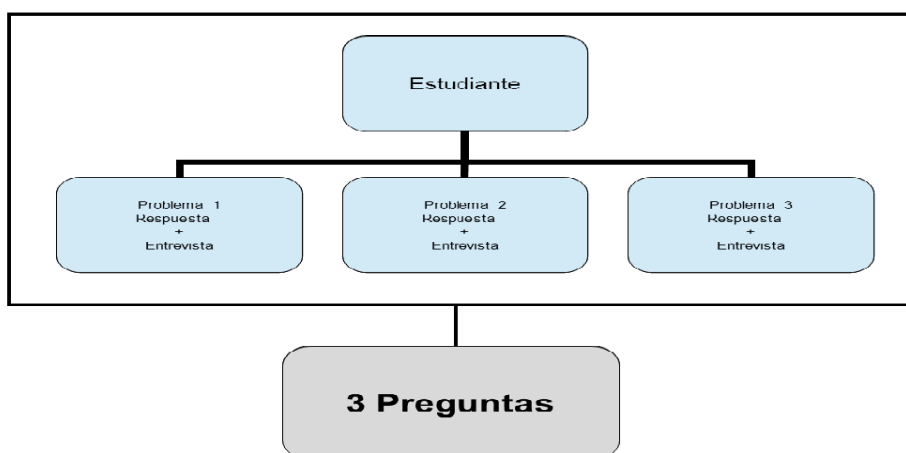


Figura 1. Estructura de una tarea

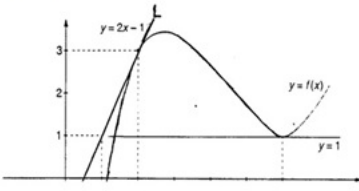
Problema 1 Comprueba que la tasa de variación media de $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ en el intervalo $[1, 2]$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(1, f(1))$ y $Q(2, f(2))$. ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto $(1, f(1))$?	Problema 2 Suponer que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto $(2,3)$ como aparece en la figura. Encontrar $f(2)$ y $f'(2)$. 	Problema 3 De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla: <table border="1" data-bbox="995 360 1345 452"><tr><td>x</td><td>0.9</td><td>0.99</td><td>0.999</td><td>0.9999</td><td>1</td><td>1.0001</td><td>1.001</td><td>1.01</td><td>1.1</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-2.1</td><td>-2.01</td><td>-2.001</td><td>-2.0001</td><td>-2</td><td>-2.00002</td><td>-2.002</td><td>-2.02</td><td>-2.2</td></tr></table> <table border="1" data-bbox="995 409 1345 452"><tr><td>x</td><td>1.9</td><td>1.99</td><td>1.999</td><td>1.9999</td><td>2</td><td>2.0001</td><td>2.001</td><td>2.01</td><td>2.1</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>3.61</td><td>3.961</td><td>3.99601</td><td>3.9996001</td><td>4</td><td>4.0004</td><td>4.00401</td><td>4.0401</td><td>4.41</td></tr></table> a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x=2$. b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x=1$?	x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1	$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2	-2.00002	-2.002	-2.02	-2.2	x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.1	$f(x)$	3.61	3.961	3.99601	3.9996001	4	4.0004	4.00401	4.0401	4.41
x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1																																	
$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2	-2.00002	-2.002	-2.02	-2.2																																	
x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.1																																	
$f(x)$	3.61	3.961	3.99601	3.9996001	4	4.0004	4.00401	4.0401	4.41																																	
Elementos	Elementos	Elementos																																								
M1.1 Tasa de variación media en el intervalo $[a, b]$ M1.2. Relación de la TVM con la pendiente de la secante M1.3. Tasa de variación instantánea M1.4. Relación de la TVI con la derivada en $x=a$. M1.5. Relación de la TVI con la pendiente de la tangente (entrevista)	M2. Interpretación geométrica de la derivada en un punto: la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en el punto	M3.1. Aproximación – Calidad de la aproximación M3.2. Existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental para que la función sea derivable en $x = a$ (aproximación numérica a través de las tablas de valores)																																								

Figura 2. Elementos matemáticos en la resolución de los problemas del cuestionario

Las respuestas de los 3 estudiantes a estos problemas fueron seleccionadas teniendo en cuenta los niveles de comprensión del concepto de derivada obtenidos en las investigaciones previas (Sánchez-Matamoras, García y Llinares, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoras, 2011):

- Nivel INTRA: El estudiante usa elementos de la derivada de una función en un punto en algunos de los modos de representación y no es capaz de relacionarlos cuando resuelve los problemas.
- Nivel INTER: El estudiante usa elementos de la derivada de una función en un punto en algunos de los modos de representación y es capaz de relacionarlos cuando resuelve los problemas.
- Nivel TRANS: El estudiante usa todos los elementos de la derivada de una función en un punto tanto en modo analítico como gráfico y en su aproximación numérica relacionándolos cuando resuelve los problemas.

La Figura 3 muestra parte de una de las tareas del cuestionario (respuesta del estudiante 2 al problema 3, más extracto de entrevista).

Estudiante 2

Iniciales nombre y apellidos

Problema 3De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x=2$.b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x=1$?

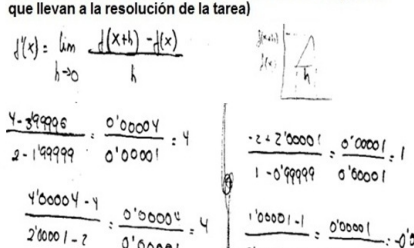
Estudiante 2	
Respuesta al problema	Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea) 	RAZONA LA RESPUESTA El valor de la derivada de f en $x=2$ es 4 E2: aplicando la definición de derivada, encontré que en $x=2$ la aproximación es 4 I: ¿y en $x=1$? E2: me dio 1 por un lado y por el otro $-0,5$ I: y entonces, ¿es derivable? E2: en $x=2$ coinciden. En $x=1$ no coinciden, entonces no será derivable

Figura 3. Ejemplo del problema 3 del cuestionario

Análisis

El análisis se ha realizado en dos fases. En la primera fase se analizaron las respuestas de cada EPPs a cada una de las tres preguntas del cuestionario.

El análisis de la respuesta a la primera pregunta tenía como objetivo ver en qué medida los EPPs identificaban los elementos matemáticos usados por los estudiantes de bachillerato. En el análisis de la segunda pregunta considerábamos en qué medida los EPPs identificaban o no las características de la comprensión de los estudiantes de bachillerato teniendo en cuenta las características de los niveles de comprensión de la derivada en un punto identificados (Sánchez-Matamoras, García y Llinares, 2008; García, Llinares y Sánchez-Matamoras, 2011). Por último, para el análisis de la tercera pregunta categorizamos las acciones de enseñanza que proponían los EPPs de manera inductiva.

La segunda fase del análisis tenía como objetivo generar descriptores de diferentes grados de desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito de la derivada de una función en un punto. Para ello, consideramos conjuntamente los elementos matemáticos y las características de la comprensión de cada estudiante que los EPPs habían identificado. A partir de estos descriptores de los niveles de desarrollo de la competencia docente, asignamos un nivel para cada uno de los estudiantes para profesor.

Resultados

En primer lugar presentamos los elementos matemáticos que los estudiantes para profesor identificaron y cómo eran usados para interpretar las resoluciones de los problemas de los estudiantes (identificar, interpretar y decisiones de acción). En segundo lugar, presentamos los descriptores generados para los niveles de desarrollo de la competencia docente.

- *Identificar*

No todos los EPPs fueron capaces de mencionar explícitamente en su discurso los elementos matemáticos de la función derivada en un punto en los distintos modos de representación y las relaciones entre ellos que eran necesarios para describir las respuestas dadas por los estudiantes. 6 EPPs identificaron los elementos matemáticos cuando se usaba el modo de representación gráfico, 2 EPPs cuando se usaba el modo analítico, 4 EPPs cuando se usaban los modos analítico y gráfico y 3 en modos numérico y gráfico. Por último, 13 EPPs identificaron los diferentes elementos matemáticos en todos los modos de representación.

Por ejemplo, un EPPs (CML) identificó los diferentes elementos matemáticos en todos los modos de representación. En la descripción de la resolución del problema 1 del estudiante 2, mencionó explícitamente los elementos del modo analítico que son pertinentes (figura 4). En la descripción de la resolución del problema 2 del estudiante 2, hace mención explícita al elemento matemático de la interpretación geométrica de la función derivada en un punto (modo gráfico). Por último, hace mención explícita de la igualdad de los límites laterales del cociente incremental, elemento matemático analítico-numérico, en la resolución del problema 3 del estudiante 2 (figura 4).

Describe cómo ha resuelto el estudiante 2 cada uno de los problemas, indicando los elementos relacionados con el concepto de derivada, y si el procedimiento usado es adecuado y por qué.	
Problema 1	La primera parte la realiza correctamente, pues conoce las definiciones exactas de los conceptos de <u>Tasa de Variación Media</u> y de <u>pendiente de una recta</u>. Efectivamente, calcula ambas por separado (expresadas como TVM y m) y ve que coinciden. Respecto a la segunda parte (<u>tasa de variación instantánea</u>), <u>identifica la TVI con la derivada de la función en un punto cuando se lo indica su profesor en la entrevista, y relaciona, ahora sí correctamente por sí sola, esta derivada con la recta tangente a la curva en ese mismo punto.</u>
Problema 2	Tal como indica en la última pregunta de la anterior entrevista, <u>relaciona la derivada en un punto con la recta tangente a la curva en ese mismo punto, y dado que sabe que esa tangente viene determinada por la pendiente (el coeficiente que acompaña a la x), realiza una interpretación geométrica correcta en este apartado. Respecto a $f'(2)$, sabe interpretar la gráfica correctamente y relacionar para qué valor x le corresponde cada valor y.</u>
Problema 3	En cuanto a la derivabilidad de una función, <u>sabe aproximar el valor de la derivada de f en un punto por la izquierda y por la derecha (en todo caso, debería haber probado con más ejemplos). Si, como indica el alumno, estos valores no coinciden, f no será derivable en este punto. A pesar de que para $x=1$ realiza el segundo cociente erróneamente (intercambia el numerador por el denominador), sí conoce que <u>deben coincidir para que la función sea derivable en ese punto.</u></u>

Figura 4. Respuesta de CML a la primera pregunta del cuestionario

- *Interpretar: características de la comprensión*

Igual que en el caso anterior no todos los EPPs fueron capaces de identificar las características de los diferentes niveles de comprensión que mostraban los estudiantes. Para responder a esta pregunta los EPPs debían considerar conjuntamente las respuestas de los 3 estudiantes de bachillerato a los tres problemas e intentar identificar algún rasgo característico en su comportamiento. 8 EPPs no fueron capaces de caracterizar la comprensión de los estudiantes, 9 EPPs fueron capaces de identificar los rasgos característicos de la comprensión de los estudiantes que estaban en el nivel INTRA de desarrollo de la comprensión de la función derivada en un punto. 1 EPPs identificó solo las características de la comprensión que reflejaba el nivel INTRA e INTER en las

resoluciones de los estudiantes y 9 identificaron las características de la comprensión que reflejaba el nivel INTRA y TRANS. Por último, 3 EPPs fueron capaces de reconocer las características de los diferentes niveles de desarrollo de la comprensión (INTRA, INTER y TRANS).

Por ejemplo, el discurso generado por CML mostraba que era capaz de reconocer la diferencia de comprensión de dos estudiantes, si bien no reconoce la del tercer estudiante al considerar CML que las aproximaciones se han de realizar con más de dos valores. Del estudiante 1 reconoce que solo es capaz de usar los elementos de la derivada de una función en un punto en modo analítico pero no los diferentes elementos del modo gráfico y numérico (características del nivel INTRA). Del estudiante 2 no identifica que es capaz de usar y relacionar todos los elementos matemáticos en tres modos de representación (características del nivel TRANS) ya que para CML la aproximación se debe realizar con más de dos puntos. Por último, en relación al estudiante 3 identifica que solo es capaz de hacer uso de los elementos en los modos analítico y numérico (características del nivel INTER), poniendo de manifiesto que el estudiante 3 no es capaz de relacionar la derivada de una función en un punto con la pendiente de la recta tangente.

Estudiante 1	Iniciales nombre y apellidos
Si observas las descripciones realizadas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante 1 comprende el concepto de derivada de una función en un punto? • Este alumno comprende vagamente el concepto de derivada en un punto, pues <u>no sabe relacionarla gráficamente con algún otro concepto, ni sabe acercarse con los diferentes valores dados, y sobre todo interpretar su significado. Tan solo sabe aplicar correctamente la definición de la derivada, como vemos en la tarea 1.</u>	C M L
Si observas las descripciones realizadas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante 2 comprende el concepto de derivada de una función en un punto? Sí, sobre todo en las tareas 1 y 2. En la primera <u>relaciona el concepto de derivada de una función en un punto con la recta tangente a la curva en el mismo punto (su pendiente)</u>, lo que le lleva a interpretar la gráfica de la tarea 2 sin problemas.	C M L
Si observas las descripciones realizadas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante 3 comprende el concepto de derivada de una función en un punto? • El alumno 3 entiende el concepto de derivada de una función en un punto solamente a partir de su definición, con lo cual cuando se le pide relacionarla con algún concepto gráfico (la pendiente de su tangente) no puede. Su <u>mayor fallo</u> es por tanto <u>la comprensión gráfica de la derivada.</u>	C M L

Figura 5. Respuesta de CML a la segunda pregunta del cuestionario

- **Decisiones de acción**

El análisis inductivo realizado de las respuestas dadas por escrito por los EPPs a la tercera pregunta del cuestionario nos permitió generar un sistema de categorías para las acciones de enseñanza que proponían los EPPs en función de las características de la comprensión que habían sido capaces de reconocer. Estas categorías fueron:

- **Sin acción.** No aporta ninguna acción significativa.
- **Acción procedimental.** Acciones centradas en los procedimientos.

- **Acción conceptual sin relaciones.** Acciones centradas en los significados de los elementos matemáticos pero sin establecer relaciones entre los distintos elementos matemáticos y/o modos de representación.
- **Acción conceptual con relaciones.** Acciones centradas en los significados de los elementos matemáticos estableciendo relaciones entre los distintos elementos matemáticos y/o modos de representación.
- **Acción de tematización.** Acciones centradas en que el estudiante sea capaz de pasar de la acción implícita a la utilización consciente, es decir, a la conceptualización de la derivada de una función en un punto.

Por ejemplo, CML (figura 6), propone acciones conceptuales sin relación para el estudiante 2. Mientras que para el estudiante 1 y 3 propone acciones conceptuales con relaciones al proponer textualmente “*haría hincapié en la segunda tarea y como podemos relacionar con otros conceptos más allá de su propia definición*”.

Estudiante 1	Iniciales nombre y apellidos	C M L
Ante las características de la comprensión de derivada de la función en un punto del estudiante 1, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?		
• <u>Incidir</u> en las tareas 2^a y 3^a para que sea capaz de establecer la derivada en un punto <u>a partir de un gráfico o acercarse a ella a partir de una serie de valores dados.</u>		
Estudiante 2	Iniciales nombre y apellidos	C M L
Ante las características de la comprensión de derivada de la función en un punto del estudiante 2, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?		
Análisis (tarea 1) y gráficamente (tarea 2) el alumno no presenta dificultad para interpretar la derivada de una función (aunque sí es cierto que en la primera tarea responde correctamente a partir de las indicaciones del profesor). Sin embargo, numéricamente (las tablas) <u>el alumno debería aproximarse al valor de la derivada mediante más valores para comprender a qué velocidad se acerca al valor de aquella.</u>		
Estudiante 3	Iniciales nombre y apellidos	C M L
Ante las características de la comprensión de derivada de la función en un punto del estudiante 3, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?		
• Para que mejorase su comprensión gráfica de la derivada <u>haría hincapié en la segunda tarea y en como podemos relacionar una derivada con otros conceptos más allá de su propia definición.</u>		

Figura 6. Respuesta de CML a la tercera pregunta del cuestionario

Desde el análisis conjunto de los elementos matemáticos y las características de la comprensión, de los estudiantes de bachillerato, identificadas por los EPPs, generamos descriptores para caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” en seis grupos:

		IDENTIFICAR ELEMENTOS MATEMÁTICOS Y MODOS DE REPRESENTACIÓN		
		Ninguno	Algunos	Todos
INTERPRETAR LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES (Ser capaz de identificar los niveles de comprensión de los estudiantes de Bachillerato)	Ningún nivel	G1. No identifican ningún elemento matemático en ningún modo de representación y no identifican <u>ningún nivel de comprensión</u> . (2 EPPs)	G2. Identifican solo algunos elementos matemáticos en algún modo de representación pero <u>no identifican ningún nivel de comprensión</u> . (5 EPPs)	G3. Identifican los elementos matemáticos en todos los modos de representación pero <u>no identifican ningún nivel de comprensión</u> . (1 EPPs)
	Algún nivel		G4. Identifican los elementos matemáticos en algún modo de representación y son capaces de <u>identificar algún nivel de comprensión</u> . (14 EPPs)	G5. Identifican los elementos matemáticos en todos los modos de representación e identifican <u>algún nivel de comprensión</u> . (5 EPPs)
	Todos los niveles			G6. Identifican los elementos matemáticos en todos los modos de representación e identifican <u>todos los niveles de comprensión</u> . (3 EPPs)

El estudiante CML estaría en G5 ya que ha identificado los elementos matemáticos en todos los modos de representación pero solo ha identificado características de dos niveles de la comprensión de los estudiantes de bachillerato sobre la derivada de la función en un punto.

Discusión

El objetivo de esta investigación es caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio específico de la derivada de la función en un punto y generar descriptores que pudieran indicarnos grados de desarrollo de esta competencia. Para Mason (2002) una manera de tener una mirada “estructurada” en relación a los aspectos relevantes en una situación de enseñanza era el ser consciente de cómo se está “mirando”. Este aspecto se ha intentado poner de manifiesto en esta investigación a través del análisis de discurso generado por los EPPs cuando describían e interpretaban las resoluciones de estudiantes de bachillerato a problemas de derivadas. Los resultados obtenidos indican que aunque los EPPs podían tener una formación matemática adecuada para este contenido matemático, resulta difícil para algunos de ellos describir las resoluciones de los estudiantes de bachillerato usando los elementos matemáticos del concepto y en reconocer las características de la comprensión de los estudiantes. Esta dificultad puso de manifiesto cierta falta de “consciencia” explícita sobre los elementos matemáticos que intervenían en la resolución de los problemas realizados por los estudiantes y su papel en determinar su comprensión. Este resultado pone de relieve el hecho de que tener un cierto nivel de conocimiento del contenido matemático no implica el ser capaz de hablar de cómo ese contenido aparece en la resolución de un problema realizada por un estudiante de bachillerato y generar información sobre su comprensión.

Por otra parte, Sherin et al. (2002) indicaban que un aspecto característico de la competencia docente “mirar con sentido” es el ser capaz de relacionar evidencias específicas a perspectivas más amplias sobre el aprendizaje. Este aspecto se pone de manifiesto en nuestra investigación a través de las interpretaciones generadas por los EPPs sobre la comprensión de la función derivada en un punto de los estudiantes de bachillerato y su vinculación de actividades que proponían (decisiones de acción). Los resultados obtenidos indican que este aspecto fue más difícil de conseguir. Estos

resultados, aunque esperados, debido a que los EPPs no habían recibido instrucción específica sobre la comprensión de la derivada en alumnos de bachillerato, ponen de manifiesto la especificidad del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas y que no deriva necesariamente del conocimiento de matemáticas.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 y PSI2008-02289 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España. Y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante. España.

Referencias

- Asiala M., Cottrill J., Dubinsky E. y Schwingendorf K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.
- [Baker, B.](#), [Cooley, L.](#) y [Trigueros, M.](#) (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011a) "Mirando con sentido" el pensamiento Matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción. *Acta Scientiae*, 13(1), jan./jun. 2011.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011b). Aprendiendo a "mirar con sentido" el aprendizaje matemático. *XIII Conferencia Interamericana de Educación matemática*- CIAEM. Recife-Brasil. Junio 2011.
- Fernández, C.; Llinares, C. & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-012-0425-y
- Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM,.
- Ferrini-Mundy J. y Graham K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates, and integrals. En Dubinsky y Kaput (Eds.) *Research issues in undergraduate Mathematics Learning*, 31-45.
- García M., S. Llinares S. y Sánchez-Matamoros G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(5), 1023-10451.
- Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Sánchez-Matamoros G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la Universidad sobre la noción matemática de*

derivada (desarrollo del concepto). Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. España. Publicado en 2010 por Edición Digital @ tres, S.L.L.

Sánchez–Matamoros G., García M. y Llinares S. (2006). El desarrollo del esquema de la derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24 (1), pp. 85-98.

Sánchez–Matamoros G., García M. y Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (Ed) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Tall, D. (1990). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Van Es, E. y Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571-596.

LISTADO DE AUTORES

Aké, L.P.	285
Almeida, R.	99
Anasagasti, J.	113
Arias, M.	123
Arteaga, P.	135, 197
Badillo, E.	239
Batanero, C.	135, 153, 197
Berciano, A.	113, 353
Bonilla, M.	145
Bosch, M.	23
Bruno, A.	99
Callejo, M.L.	219
Cañadas, G.R.	135, 153
Cañadas, M.C.	303
Cardeñoso, J.M.	407
Carmona, E.	165
Carrillo, J.	479
Castro, E.	75, 229, 313
Castro, W.F.	427
Cauich, A. R.	177
Chávez, Y.	187
Climent, N.	165
Contreras, J.M.	135, 197
Costa, A.C.	209
Díaz, C.	153, 197
Escudero, I.	275
Estrada, A.	375
Fernández, C.	219, 497
Fernández-Plaza, J.A.	229
Flores, P.	479
Font, V.	239, 427
Gairín, J.M.	249, 261
Gallardo, A.	385

García, M.	497
Gascón, J.	15
Gavilán, J. M.	275
Gea, M.M.	153
Gil, F.	397
Godino, J.D.	49, 285, 427
Goizueta, M.	295
Gómez, P.	123, 341, 303
González, F.	407
González, F.M.	313
González, M.T.	209
Gonzato, M.	285
Gorgorió, N.	323
Guillén, G.	331
Gutiérrez, A.	341, 457
Gutiérrez, G.	353
Hidalgo, S.	177, 469
Lacasta, E.	363
Lasa, A.	363
Llinares, S.	187, 435, 497
Márquez, M.	219
Martins, J.A.	375
Matías, F.	385
Mayén, S.	487
Montoro, A.B.	397
Moreno, A.	407
Muñoz, J.M.	261
Nascimento, M.M.	375
Oller, A.M.	249, 261
Palacios, A.	469
Palarea, M ^a .M.	71
Pazos, A.L.	417
Perdomo-Díaz, J.	99
Pino-Fan, L.R.	427
Planas, N.	295

Pons, J.	435
Prat, M.....	323
Puig, L.	95
Ribeiro, C.M.	447
Rico, L.....	229, 341
Rodríguez del Tío, P.	469
Rodríguez, F.	457
Rojano, T.....	145
Rojas, N.	479
Rubio, N.	239
Ruiz-Hidalgo, J.F.	229
Salazar, A.	487
Salinas, M. J.	417
Sánchez E.	487
Sánchez-Matamoros, G.	275, 497
Siñériz, L.	331
Trigueros, M.....	239
Valls, J.....	435, 497
Wilhelmi, M.R.	285, 363

