SEIEM 2021



Valencia del 8 al 10 de septiembre de 2021

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XXIV

Pascual D. Diago
Dionisio F. Yáñez
Mª Teresa González-Astudillo
Dolores Carrillo

SEIEM
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Facultat de Magisteri
Departament de Didàctica de la Matemàtica
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Vicerectorat de Cultura i Espor
UCC+i
GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN
Servicio de Formación Permanente e Innovación Educativa (SFPIE)
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA
FECYT
65 RUBIO

Investigación en Educación Matemática
XXIV



VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Investigación en Educación Matemática XXIV

Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Valencia, 8, 9 y 10 de septiembre de 2021

Investigación en Educación Matemática XXIV

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n 18071 Granada (España)

Dr. Pascual D. Diago
Dr. Dionisio F. Yáñez
Dra. Mª Teresa González-Astudillo
Dra. Dolores Carrillo

Comité Científico

Dra. Mª Teresa T. González-Astudillo (coordinadora)
Dra. Dolores Carrillo (coordinadora)
Dra. Edelmira Badillo
Dra. María C. Cañadas
Dr. Carlos de Castro
Dr. José Antonio González-Calero
Dr. Pedro Ivars

© de los textos: los autores

ISBN: 978-84-09-32184-1
ISSN: 1888-0762

Cítese como:
Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.) (2021). *Investigación en Educación Matemática XXIV*. Valencia: SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

La publicación de estas actas ha contado con la ayuda del proyecto UV-SFPIE_PID20-1351257 de la Universitat de València.

Presentación

En septiembre de 2019 nuestro compañero José María Marbán cerraba las actas del XXIII simposio de la SEIEM, celebrado en Valladolid, con el deseo del mayor de los éxitos al próximo simposio a celebrar en Valencia en 2020. Pocos sabíamos entonces lo que se nos venía, pues el XXIV simposio no se celebraría hasta dos años después, a causa de las medidas restrictivas impuestas para luchar contra la COVID-19. Quizá aquel esperado éxito haya sido el poder haber estado juntos en Valencia en septiembre de 2021, después de un largo periodo de confinamiento personal y académico. Juntos (con las medidas sanitarias de rigor) hemos podido retomar nuevamente del 8 al 10 de septiembre de 2021 nuestra reunión anual para debatir, comentar, razonar o simplemente charlar sobre temas académicos ligados a la Educación Matemática.

En esta ocasión, la Facultat de Magisteri de la Universitat de València ha sido la sede encargada de alojar el evento. A pesar de haber sido este un simposio especialmente marcado por las distancias de seguridad, el uso de mascarillas obligatorio o los "no-*coffee breaks*", podemos considerarlo exitoso desde el punto de vista de la asistencia, con un total de 192 congresistas que recogieron su documentación, 66 comunicaciones presentadas y 46 pósteres expuestos.

El simposio arrancó la mañana del miércoles 8 de septiembre con la sesión de formación y docencia universitaria titulada *Relación entre investigación y formación de maestros y profesores de matemáticas*, a cargo de la Dra. Mar Moreno y la Dra. Julia Valls (Universitat d'Alacant). Después de comer, en el edificio de La Nau de la Universitat de València tuvo lugar la inauguración del simposio y el primero de los dos seminarios monográficos que habitualmente se programan. Así, coordinado por la Dra. Gloria Sánchez-Matamoros (Universidad de Sevilla) se abordó el seminario *La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad*. Este primer seminario contó con la participación de la Dra. Ana Cláudia Correia Batalha (Universidade De Lisboa, Portugal), la Dra. Irene Biza (University of East Anglia, UK) y del Dr. Matías Camacho (Universidad de La Laguna).

El segundo día del simposio comenzó con la primera de las dos sesiones dedicadas a comunicaciones, organizadas en 7 espacios paralelos y la primera de las cuatro sesiones de pósteres. Antes de comer tuvo lugar el primero de los bloques de los grupos de trabajo. En este primer bloque compartieron espacio los grupos *Didáctica de la matemática como disciplina científica*, *Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor* e *Historia de las Matemáticas y Educación Matemática*. En particular, cabe destacar el sentido homenaje que se hizo a Mª Luz Callejo y a Pepe Carrillo en el primero de los grupos[1]. Por la tarde se continuó con el segundo de los bloques dedicado a los grupos de investigación; reuniéndose, en esta ocasión, los grupos transversales de *Investigación en Educación Matemática Infantil*, *Jóvenes investigadores e investigadoras de la SEIEM* y *Entornos Tecnológicos en Educación Matemática*. Finalmente, la tarde del jueves

[1]El homenaje puede verse online en `https://www.youtube.com/watch?v=-vMGWtaqDyk`.

se cerró con la segunda sesión de pósteres, la celebración de la asamblea y la posterior cena en el restaurante Àtic, situado en la Alameda de Valencia.

El viernes 10 de septiembre tuvo lugar la segunda sesión de comunicaciones y la tercera de pósteres. A media mañana la Dra. Marta Molina (Universidad de Salamanca) coordinó, y participó junto al Dr. Miguel Ángel Montes (Universidad de Huelva) y la Dra. María de la Cinta Muñoz (Universidad de Sevilla) en el segundo de los seminarios de investigación: *Metodologías cualitativas de investigación en educación matemática*. Tras la pausa para comida se dedicó un tercer espacio para la reunión de los grupos de investigación: *Aprendizaje de la Geometría*, *Didáctica del Análisis Matemático*, *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* y *Pensamiento Numérico y Algebraico*. Tras la última sesión de pósteres, se inició el tercer bloque de comunicaciones para, posteriormente, dar clausura al XXIV Simposio.

Con la edición de estas actas, se deja constancia de las aportaciones científicas que han configurado este XXIV Simposio. Aprovechamos estas líneas para agradecer a todas las personas que han trabajado en el Comité Científico y en el Comité de Organización Local por las horas de trabajo y esfuerzo dedicadas sin las que, sin duda, el XXIV Simposio no habría sido posible. También agradecemos la colaboración e implicación de todas las instituciones participantes, especialmente a la Facultat de Magisteri, al Vicerrectorat de Cultura i Esport y al Rectorat de la Universitat de València, quienes desde el primer momento mostraron su apoyo, su interés y su confianza para que este evento pudiera celebrarse y llevarse a cabo en nuestra casa.

En València, a *9 d'octubre* de 2021
Dia de la Comunitat Valenciana
Pascual D. Diago
Coordinador Local del XXIV Simposio de la SEIEM

Índice

Presentación **vii**

Seminario de investigación I: La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad **1**

INTRODUCCIÓN SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD
Sánchez-Matamoros, G. 3

APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR: PRÁTICAS DE NATUREZA EXPLORATÓRIA COM SUPORTE DA TECNOLOGIA
Henriques, A. 5

TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS AT UNIVERSITY LEVEL
Biza, I. 19

AGENDA DE INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO
Camacho Machín, M. 33

Seminario de investigación II: Metodologías cualitativas de investigación en educación matemática **51**

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO: INVESTIGACIÓN CUALITATIVA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Montes, M. 53

REFLEXIONES PARA UNA FUNDAMENTACIÓN DEL ESTUDIO DE CASO COMO DISEÑO METODOLÓGICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Muñoz-Catalán, M. C. 65

INVESTIGACIÓN DE DISEÑO EDUCATIVA: UN MARCO METODOLÓGICO EN EVOLUCIÓN
Molina, M. 83

Comunicaciones **99**

APRENDIENDO PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL: ¿CÓMO INFLUYE EL CONTEXTO DE ENSEÑANZA?
Acosta, Y. y Alsina, Á. 101

COHERENCIA EN LA ENSEÑANZA DE LA MEDIDA EN CIENCIAS Y MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS COMPARATIVO
Aguayo, C. G. y Montoro A. B. 109

UNIDIMENSIONALIDAD DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO INICIAL DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO
Albarracín, L., Rojas, F., Chandia, E., Ubilla, F. M. y Gorgorió, N. 117

CORRESPONDENCIA Y GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE ÚLTIMO CURSO DE EDUCACIÓN INFANTIL
Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. 125

ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS
Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, Á. 133

CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS DE CONVERSIÓN ENTRE REPRESENTACIONES DE INTERVALOS DE LA RECTA REAL PROPUESTAS EN LIBROS DE TEXTO
Arce, M. y Conejo, L. 141

LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS. PERFILES DE PROFESORES EN FORMACIÓN SEGÚN SUS NIVELES DE VAN HIELE
Arnal-Bailera, A. y Manero, V. 149

ANÁLISIS DE VÍDEOS EDUCATIVOS EN LÍNEA POR ESTUDIANTES DE MÁSTER DE SECUNDARIA
Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. 157

UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE POLÍGONO EN ESTUDIANTES DE 9 AÑOS
Bernabeu, M., Moreno, M., Llinares, S., y Gutiérrez, Á. 165

UN ESTUDIO SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA, BASADO EN APOE Y EOS
Borji, V., Sánchez, A., Font, V. y Garcés, W. 173

ANSIEDAD MATEMÁTICA Y LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE: EL CASO DE DOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO
Buforn, À., Pérez-Tyteca, P. y Monje, J. 181

CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE INCERTIDUMBRE
Castilla-Mora, L., Rifo, L. y Climent, N. 189

EVALUACIÓN DE UNA INTERVENCIÓN FORMATIVA CON FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA SOBRE ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO
Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. 197

PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS POR ESTUDIANTES QUE RESUELVEN DE MANERA EXITOSA TAREAS QUE INVOLUCRAN EL ÁREA DE FIGURAS PLANAS
Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. 205

UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE ÁREA EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO
Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. 213

NEOTRIE VR COMO ESPACIO DE TRABAJO PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA FRACTAL
Chavil-Montenegro, D. Y., Rodríguez-Blancas, J. L. y Romero-Albaladejo, I. 221

PROCESO DE EVALUACIÓN ENTRE PARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FUTUROS DOCENTES. ESTUDIO DE UN CASO
de Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J. y Sosa-Martín, D. N. 229

CARACTERIZANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE EDUCACIÓN INFANTIL ENSEÑANDO PRISMAS
Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. 237

RECURSOS TECNOLÓGICOS PARA LA INTERVENCIÓN TEMPRANA EN CASOS DE DISCALCULIA
Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. 245

DIFICULTADES Y PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA MULTIGRADO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO DESDE LA VISIÓN DE LOS MAESTROS
Esteve, S., Barquero, B. y Domingo-Peñafiel, L. 253

RESPUESTAS NUMÉRICAS RAZONABLES EN ALUMNADO DE SECUNDARIA
Fariña, M. y Bruno, A. 261

FUNCIONES $F(X) = 3X$ Y $F(X) = 5X$ EN PRIMERO DE PRIMARIA: ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES UTILIZADAS POR ALUMNOS
Fuentes, S. y Cañadas, M. C. 269

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA DE CIENCIAS. ANÁLISIS EXPLORATORIO
García-Alonso, I. 279

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA: ANÁLISIS EXPLORATORIO
García-Alonso, I., Sosa-Martín, D. N. y García-Díaz, A. 287

INFLUENCIA DEL TIPO DE TAREA EN EL INTERÉS: RÉPLICA DE UN ESTUDIO EN EL CONTEXTO EDUCATIVO ESPAÑOL
García-Cerdá, C. y Ferrando, I. 295

ENSEÑANZA ONLINE EN DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS IMPUESTA POR LA COVID-19: VISIÓN DEL ALUMNADO UNIVERSITARIO
Gómezescobar, A. 303

ESTRATEGIAS POR ALUMNOS CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA AL RESOLVER UNA TAREA QUE INVOLUCRA UNA RELACIÓN FUNCIONAL
Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I. 311

FORMAS DE RESPONDER SOBRE LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA
González-Forte, J. M., Fernández C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. 319

NIVELES DE RESPUESTA DE ESTUDIANTES DE TEORÍA DE GRAFOS USANDO DEFINICIONES DESDE EL MODELO DE VAN HIELE
González, A., Gallego-Sánchez, I., Puertas, M. L., Gavilán-Izquierdo, J. M. 327

PRÁCTICAS DE AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PROMOVIDAS POR FUTUROS PROFESORES
Hidalgo-Moncada, D., Vanegas, Y. y Díez-Palomar, J. 335

ARGUMENTACIÓN PRÁCTICA SOBRE EL TEOREMA DE PITÁGORAS POR PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN UN CURSO DE FORMACIÓN
Hummes, V., Sol, T. y Breda, A. 343

CARACTERIZACIÓN DEL PERFIL DE INGRESO A LOS GRADOS EN MAESTRO: RELACIÓN ENTRE BACHILLERATO CIENTÍFICO Y GÉNERO
Lasa, A., Belletich, O., Elorza, J., Iribas, H. y Wilhelmi, M. R. 351

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN LA INTERPRETACIÓN DE NOTICIAS
Lavela, J. F., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. 359

UN ANÁLISIS ONTO-SEMIÓTICO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN
Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. 367

DESARROLLO DEL EQUIPAMIENTO PRAXEOLÓGICO DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE CLASES
Lendínez, E. M. y García, F. J. 377

LOS CONOCIMIENTOS LÓGICOS EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICO-DIDÁCTICA DE MAESTROS
Lerma, A. M., Barquero, B., García, F. J., Hidalgo-Herrero, M., Ruiz-Olarría, A. y Sierra, T. 385

¿ESTA ECUACIÓN DESCRIBE ESTA SITUACIÓN? EXPLORANDO EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA
López Centella, E., Slezáková, J. y Jirotková, D. 393

MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA PRENSA ESPAÑOLA DEL SIGLO XVIII: UN INSTRUMENTO PARA SU ANÁLISIS
Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. 401

DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UNA ESCALA DE AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE EN CONTEXTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Marbán, J. M. y Fernández-Gago, J. 409

UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DE LA ESTADÍSTICA
Markulin, K., Bosch, M. y Florensa, I. 417

GESTIÓN DE NORMAS QUE REGULAN EL PASO DE LA CONJETURA AL TEOREMA EN UN CURSO DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO
Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. 425

UN AÑO DESPUÉS DE UN MÓDULO DE ENSEÑANZA: ANTICIPACIÓN DE RESPUESTAS DE PROBLEMAS DE DIVISIÓN MEDIDA CON FRACCIONES
Montero, E., Callejo, M. L. y Valls, J. 433

LA ARITMÉTICA EN LA REAL ACADEMIA MILITAR DE MATEMÁTICAS DE ZAMORA (1789-1808)
Monterrubio-Pérez, M. C. 441

ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE VÍDEOS EDUCATIVOS SOBRE PROBABILIDAD ELABORADOS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO
Muñiz-Rodríguez, L., Alonso-Castaño, M., y Rodríguez-Muñiz, L. J. 449

NOTAS AL PIE EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES DEL SIGLO XIX. EL CASO DE JUAN CORTÁZAR
Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. 457

MEDIACIONES UTILIZADAS CON ESTUDIANTES DE SEGUNDO Y CUARTO DE PRIMARIA AL REALIZAR UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN
Narváez, R y Cañadas, M. C. 465

IMÁGENES EN LOS TEXTOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA: ¿CUÁNTO APORTAN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?
Olivares, D., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. 473

COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE TABLAS ESTADÍSTICAS Y SU DISTRIBUCIÓN EN TEXTOS CHILENOS DE EDUCACIÓN BÁSICA
Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P. 481

EXPLORANDO LA DEMANDA COGNITIVA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE BÚSQUEDA DE PATRONES DISEÑADAS POR FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Pincheira, N. y Alsina, Á. 489

ESTUDIANTES DE SEXTO DE PRIMARIA COMPARAN FUNCIONES LINEALES: EL ROL DEL LENGUAJE NATURAL
Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. 497

SIMULACIÓN DE INTERVENCIONES DOCENTES ANTE CONJETURAS DE LOS ESTUDIANTES EN UN ENTORNO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON RECURSOS TIC
Pochulu, M., Font, V. y Breda, A. 505

ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA
Porras, K., Castro-Rodríguez, E. y Aguayo-Arrigada, C. G. 513

LA ACTITUD DE FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA ANTE EL USO DE ROBOTS PROGRAMABLES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS
Roanes, E., Fernández-Salinero, C. 521

DE LA CONSTRUCCIÓN A LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Rodríguez, M. L., Gómez, B. y Filloy, E. 529

SENTIDO ESPACIAL EN FUTUROS MAESTROS
Roura, R. y Ramírez, R. 537

ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA PARA LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD USANDO UN RECURSO COMPUTACIONAL
Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C., Salinas-Hernández, U., Sánchez, E. y Carrillo, J. . . 545

UN ESTUDIO DE CASO DE CÓMO ENTIENDE LA CREATIVIDAD Y SU DESARROLLO EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS UN FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS
Sánchez, A., Font, V., Diamantidis, D. y Breda, A. 553

RELACIONES NUMÉRICAS ESTABLECIDAS POR ALUMNADO DE PRIMARIA
Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A. 563

SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA HERMENÉUTICA EN LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA
Sanz, H., Cuida, A. y Martínez-Moro, E. 571

ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE VISUALIZACIÓN EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3D Y REALIDAD AUMENTADA
Sua, C., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. 579

ESTRATEGIAS DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE EN LAS AULAS DE MATEMÁTICAS Y DE FÍSICA
Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J. 587

RESOLUCIÓN E INVENCIÓN DE PROBLEMAS: LA ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN CON RELACIÓN AL PROBLEMA INVENTADO
Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. 595

PRIMERAS EXPERIENCIAS CON UNA TABLA EN SEGUNDO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. APROXIMACIÓN FUNCIONAL AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Torres, M. D., Brizuela B., Cañadas, M. C. y Moreno, A. 603

REPRESENTACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA (11-13 AÑOS) EN UNA TAREA FUNCIONAL
Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M. y Cañadas, M. C. 613

LA GESTIÓN DE UN REI EN SECUNDARIA: ¿CUÁNTO TIEMPO SE TARDA EN ABRIR UN CANDADO?
Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. 621

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO A PARTIR DE UNA TAREA FORMATIVA SOBRE VISUALIZACIÓN
Vergara, L., Climent, N. y Codes, M. 629

Pósteres **637**

LOS MODELOS DE CONOCIMIENTO PROFESIONAL COMO HERRAMIENTAS PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA INVESTIGADORA
Aguilar-González, A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 639

LA COMPRENSIÓN Y HABILIDAD LECTORA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON FRACCIONES
Atienza-Prieto, A., Sanz, M. T. y López-Iñesta, E. 640

CREENCIAS Y EMOCIONES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN ALUMNADO CON DIFICULTADES AFECTIVAS Y/O SOCIALES
Blanco, T. F., Conde-Lago, J., y Diego-Mantecón, J. M. 641

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE FUTUROS MAESTROS EN UN PROGRAMA DE ESTÍMULO MATEMÁTICO
Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C. y González-Sequeiros, P. 642

LA DIFICULTAD PARA OPERAR CON LO DESCONOCIDO EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA MEDIANTE LA HOJA DE CÁLCULO
Cabero, I. y Arnau, D. 643

REPERCUSIÓN DE LA TIPOLOGÍA DE PRESENTACIÓN DE LOS DATOS EN EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES
Cabero, I., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Wu, Y., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. 644

IMPLICACIONES DE LA PRÁCTICA DE REFERENCIA EN EL ESTUDIO DEL CAMBIO
Cabrera-Chim, L. M. y Martínez-Maldonado, J. A. 645

¿QUÉ CARTA SOY? JUGANDO CON LA PROBABILIDAD PARA PARA POTENCIAR LOS AFECTOS POSITIVOS
De La Fuente, A. y Garrido-Martos, R. 646

RESOLVIENDO PROBLEMAS VERBALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA CON UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE: ¿QUÉ PIENSAN LOS ESTUDIANTES AL RESPECTO?
del Olmo-Muñoz, J., Tirado-Olivares, S., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. 647

CONOCIMIENTO DE LOS FUTUROS DOCENTES SOBRE LA HISTORIA DE LA INTEGRAL DEFINIDA
Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T. 648

MODIFICACIÓN DE UNA TAREA DE LIBRO DE TEXTO SOBRE LONGITUD POR FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA
Fernández-Plaza, J. A. y López Centella, E. 649

DIVULGACIÓN DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO MEDIO DE FORMACIÓN DE PROFESORES
Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Cruz-Márquez, G., Flores-Medrano, K. y Quiñones-Baldazo, N. 650

UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES SOBRE LOS NÚMEROS COMPLEJOS DE ALUMNOS UNIVERSITARIOS
García-Caro, D., Valenzuela, C., García, M. y Sanz, M. T. 651

ATENCIÓN A LOS ALUMNOS CON DIFICULTADES EN TAREAS ARITMÉTICAS Y ALGEBRAICAS
Garrido, R. G. y Figueroa M. de J. 652

CONFLICTOS COMOGNITIVOS EN EL DISCURSO SOBRE TEORÍA DE GRAFOS
Gavilán-Izquierdo, J. M., Gallego-Sánchez, I., González, A. y Puertas, M. L. 653

ESTRATEGIAS INFORMALES DE ESTUDIANTES CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PRODUCTO CARTESIANO
González-De Cos, L., Van Vaerenbergh, S., Goñi-Cervera, J. y Polo-Blanco, I. 654

INFLUENCIA DEL CONTEXTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LENGUAJE INCONSISTENTE EN ALUMNADO CON TRANSTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA
Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., Bruno, A. y Fernandez-Cobos, R. 655

ESTUDIO COMPARATIVO DEL ERROR DE INVERSIÓN EN DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS
Gutiérrez-Soto, J. y Liern-García, M. 656

EL JUEGO COMO HERRAMIENTA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD
Herreros-Torres, D. y Sanz, M. T. 657

EL DOCENTE COMO CLAVE EN EL DESEMPEÑO DEL ESTUDIANTADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Herreros-Torres, D., Sanz, M. T. y Gómez-Ferragud, C. B. 658

LA FORMACIÓN MATEMÁTICA EN LOS GRADOS DE EDUCACIÓN INFANTIL EN ESPAÑA
Hidalgo-Méndez, M. A., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y Casas-Rosal, J. C. . . 659

PREFERENCIAS DE LOS ESQUEMAS PARA LA PRUEBA DE ESTUDIANTES DE LOS GRADOS DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
Jerez-Santana, K. O. y Camacho-Machín, M. 660

EL IMPACTO DISCURSIVO DE LAS RESPUESTAS DEL PROFESOR A MOMENTOS ENSEÑABLES CLAVE
Kribs, C. y Joswick, C. 661

AUTORREGULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL ALUMNADO DEL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M. 662

LA PERSPECTIVA DE GÉNERO EN LA BIBLIOGRAFÍA PARA LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE LOS MAESTROS DE INFANTIL EN LAS UNIVERSIDADES CASTELLANOLEONESAS
Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Jiménez-Fanjul, N. 663

ANÁLISIS DE LA FLEXIBILIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN POR FUTUROS MAESTROS
Martínez-Lastras, S., Cáceres-García, M. J., González-Astudillo, M. T., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Sánchez-Barbero, B. 664

CARACTERÍSTICAS DE FLEXIBILIDAD MOSTRADAS POR ESTUDIANTES OLÍMPICOS DE ENSEÑANZA PRIMARIA
Mora, M., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. 665

DISCURSO MATEMÁTICO DE UN PROFESOR DURANTE LA ENSEÑANZA
Múnera, N. 666

CLASIFICACIÓN DE TAREAS CREADAS POR EL ALUMNADO PARA UNA RUTA MATEMÁTICA HISTÓRICAMENTE CONTEXTUALIZADA
Olmos, R. y Martí-Contreras, O. 667

¿NOS AYUDA LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A NO DEJARNOS ENGAÑAR POR LAS FAKE NEWS?
Olmos, R. y Martí-Contreras, O. 668

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE PRIMARIA SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL
Olvera, C., García, E. y Escudero-Ávila, D. 669

CUESTIONARIO PARA IDENTIFICAR EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO SOBRE NECESIDADES ESPECÍFICAS DE APOYO EDUCATIVO EN MATEMÁTICAS
Padilla-Padilla, E., González, M. J. y Van Vaerenbergh, S. 670

ANÁLISIS TEMPORAL DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN BASADA EN LA MEDIDA DE MAGNITUDES
Pla-Castells, M., Chaparro, G. y Melchor-Borja C. 671

PROGRAMAS EFECTIVOS DE DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE. UN ESTUDIO DE CASO CENTRADO EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA
Ramos-Rodríguez, E., Fernández-Ahumada, E., Adamuz-Povedano, N. y Morales, A. . . 672

VISUALIZANDO LA TERCERA DIMENSIÓN DESDE DIFERENTES REALIDADES
Rotger, L., Ribera, J. M. y Cuadrado, M. L. 673

ESTRATEGIAS DE PARTICIPANTES DE OLIMPIADA EN UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD CONDICIONAL
Rubio-Chueca, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P. 674

EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR APROXIMACIÓN DE LA REGLA MEDIA DE ANDRÉS PUIG (1672). UNA EXPERIENCIA EN EL AULA
Ruiz-Catalán, J. y de la Torre-Molina, F. A. 675

PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN ALUMNADO CON TEA: PROPUESTA DE INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
Sabariego, P., García-Moya, M., Goñi-Cervera, J. y Polo-Blanco, I. 676

LOS HUERTOS ESCOLARES COMO ESPACIOS PARA APRENDER MATEMÁTICAS Y CIENCIAS EXPERIMENTALES: UNA REALIDAD O UNA INNOVACIÓN EDUCATIVA EN LA PROVINCIA DE CASTELLÓN
Salvador-Beltri, A., Lorenzo-Valentín, G, Santágueda-Villanueva, M. y Monferrer-Sales, L. 677

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON FRACCIONES: UN ESTUDIO COMPARATIVO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO
Sanz, M. T., Valenzuela, C., Figueras, O. y Gómez, B. 678

RESULTADOS DE DIFERENTES SISTEMAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A PARTIR DE CUESTIONARIOS DE PRIMER CICLO DE ED. PRIMARIA
Sotos, M. 679

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL
Terroba, M., Ribera, J. M. y Lapresa, D. 680

"NO SÉ HACERLO, PREGÚNTAME MÁS". UNA EXPERIENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON HINTS
Tirado-Olivares, S., del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. 681

INTELIGENCIA ARTIFICIAL PARA LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: RESUMEN Y TAXONOMÍA
Van Vaerenbergh, S. y Pérez-Suay, A. 682

ENSEÑANZA INDIVIDUALIZADA DE MATEMÁTICAS MEDIANTE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN ENTORNOS ESCOLARES TRADICIONALES
Varela-Uribe, A., Van Vaerenbergh, S., y Pérez-Suay, A. 683

DESCRIPCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE SÓLIDOS POR FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Vargas-Herrera, J., Giménez, J. y Vanegas, Y. 684

Índice de autores **685**

Palabras Clave **689**

Keywords **693**

Seminario de investigación I: La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad

Coordina: Dra. Gloria Sánchez-Matamoros (Universidad de Sevilla)

Ponentes:

- Dra. Ana Henriques (Universidade De Lisboa, Portugal): *Aprendizagem da Matemática no ensino superior: práticas de natureza exploratória com suporte da tecnología.*
- Dra. Irene Biza (University of East Anglia, UK): *Teaching and learning of mathematics at University Level.*
- Dr. Matías Camacho Machín (Universidad de La Laguna): *Agenda de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario.*

INTRODUCCIÓN SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD

Introducción seminario de investigación I: La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la universidad

Sánchez-Matamoros, G.

Universidad de Sevilla

En uno de los seminarios de investigación del simposio de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación Matemática) celebrado en el 2011 se ofreció una panorámica de las investigaciones en educación matemática en los niveles de bachillerato y universidad en la última década del siglo XX y primera década del siglo XXI, centrándose, en aquella ocasión, en trabajos relacionados con conceptos del Análisis Matemático (Camacho, 2011).

Podemos considerar que el origen del área de investigación en educación matemática a nivel universitario está en el libro "Advanced Mathematical Thinking" (Tall, 1991) aunque es en los últimos años cuando dicha área está creciendo a un ritmo muy rápido (Artigue, 2016). Así, en la actualidad, ha aumentado significativamente el número de artículos dedicados a esta área de investigación, hecho que también se ha visto reflejado en la formación de grupos de trabajo específicos en congresos internacionales como el grupo de trabajo 2 (TSG2) sobre educación matemática a nivel universitario en el ICME (International Congress on Mathematical Education) o el grupo de trabajo 14 (TWG14) con la misma temática en el CERME (Congress of European Society for Research in Mathematics Education). Además, recientemente (desde 2016) también se celebran las conferencias INDRUM (conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics) reconocidas como conferencias temáticas del ERME (European Society for Research in Mathematics Education).

Todo esto está haciendo posible que se esté considerando la investigación en la educación matemática universitaria como un área distinta de investigación dentro de la educación matemática. Las investigaciones actuales en esta área de investigación, están contribuyendo al conocimiento sobre:

- La enseñanza y el aprendizaje de conceptos específicos en matemáticas de nivel universitario.

  Los conceptos matemáticos que se introducen a nivel escolar generalmente se vuelven a tratar a nivel universitario. Sin embargo, muy a menudo, estos conceptos no se retoman a partir de lo aprendido en la etapa anterior.

- La transición de la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria a las matemáticas universitarias.

  En relación con los temas relacionados con la transición de las matemáticas de la educación secundaria a la universidad se pueden considerar distintas formas de enseñanza, de estrategias de aprendizaje, … (Biza et al., 2016). Así como diferentes formas de ver las matemáticas (conceptos matemáticos específicos, objetivos de aprendizaje, …).

- Las prácticas docentes de los profesores universitarios de matemáticas.

  A los estudiantes a nivel universitario se les pide que se involucren en prácticas matemáticas que son, a menudo, nuevas para ellos.

- Desafíos y enfoques novedosos en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario.

Sánchez-Matamoros, G. (2021). Introducción seminario de investigación I: La enseñanza - aprendizaje de las matemáticas en la universidad. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 3 – 4). Valencia: SEIEM.

Actualmente, se considera que el enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje a nivel universitario no puede ser la mera transmisión de conocimientos, definiciones y procedimientos. Si no que es necesario mirar el proceso de enseñanza y aprendizaje desde una nueva perspectiva, repensando los métodos de enseñanza para que los estudiantes confíen en sus habilidades matemáticas, siendo un objetivo esencial de la educación matemática, la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes (Fonseca y Henriques, 2018).

- El papel de las herramientas TIC y otros recursos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas universitarias.

  El uso de recursos tecnológicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas universitarias puede proporcionar un entorno de aprendizaje rico y eficaz que ayude a los estudiantes a lograr una comprensión conceptual y a llegar a la resolución de problemas. El uso de estos recursos se debe hacer de forma planificada e integrada en el currículo para que sea eficaz.

- Enfoques teóricos y metodológicos de la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas universitarias.

  La investigación empírica sistemática en educación matemática empezó a llevarse a cabo en el contexto de las matemáticas escolares, desarrollándose perspectivas teóricas y enfoques metodológicos específicos de investigación en educación matemática. Cuando las investigaciones se extendieron del nivel escolar al nivel universitario, las herramientas teóricas y metodológicas que se habían desarrollado a nivel escolar se han empezado a usar también en el nivel universitario.

Este Seminario quiere abrir el debate sobre algunos de los puntos previamente mencionados, para ello vamos a contar con tres ponencias que van a aportar distintos puntos de vista. Deseamos que este seminario sirva para profundizar en los diferentes temas abordados, y para que surjan nuevas cuestiones con las que poder seguir discutiendo a nivel nacional e internacional en un futuro.

Finalizar agradeciendo a la Junta Directiva de la SEIEM la invitación a coordinar este seminario, y el trabajo y dedicación de los ponentes que lo han hecho posible.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2016). Educación matemática Investigación a nivel universitario: Logros y desafíos. En E. Nardi, C. Winslow, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 1st Conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 11–27). Montpellier, Francia: INDRUM.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-art and Looking Ahead.* ICME-13 Topical Surveys, Springer International Publishing AG Switzerland. Available at http://www.springer.com/gp/book/9783319418131.

Camacho, M. (2011) Investigación en Didáctica de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de Universidad". En Marín, M. Fernández, G., Blanco, L. y Palarea, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV,* pp. 195-223. Universidad Castilla la Mancha.

Fonseca, V., & Henriques, A. C. (2018). Compreensão da definição formal de limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. *Bolema 32*(62), 1030-1049.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR: PRÁTICAS DE NATUREZA EXPLORATÓRIA COM SUPORTE DA TECNOLOGIA

Learning mathematics in Higher Education: Practices of an exploratory nature supported by technology

Henriques, A.

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Resumo

A aprendizagem da matemática depende das práticas pedagógicas adotadas, em particular a natureza das tarefas e o modo como são implementadas em sala de aula. Nesta comunicação são apresentados estudos, realizados em Portugal e no Brasil, basedos em experiências de ensino que contemplam uma abordagem exploratória com integração da tecnología, visando contribuir para o debate sobre práticas para o ensino e a aprendizagem da matemática a nivel universitário, focado em: qual o potencial das tarefas exploratórias para promover o raciocínio matemático dos estudantes; como o ensino exploratório permite desenvolver a compreensão de conceitos matemáticos; e qual o contributo da tecnología para uma aprendizagem com compreensão. Os resultados destes estudos mostram repercursões positivas na aprendizagem dos estudantes, e estimulam a reflexão sobre como o ensino exploratório responde aos desafíos e necesidades atuais.

***Palavras chave**:* aprendizagem da matemática, educação superior, ensino exploratório, recursos tecnológicos.

Abstract

The learning of mathematics depends on the pedagogical practices adopted, in particular the nature of the tasks and the way they are implemented in the classroom. This communication presents studies, carried out in Portugal and Brazil, based on teaching experiences that include an exploratory approach with the integration of technology, aiming to contribute to the debate on practices for teaching and learning mathematics at university level, focused on: what is the potential of exploratory tasks to promote students' mathematical reasoning; how exploratory teaching provide the development of mathematical concepts understanding; and what is the contribution of technology to learning with understanding. The results of these studies show positive repercussions on students learning, and stimulate reflection on how exploratory teaching approach responds to current challenges and needs.

Keywords: mathematics learning, higher education, exploratory teaching, technological resources

INTRODUÇÃO

Os conceitos matemáticos abordados no ensino superior revestem-se de grande complexidade, exigindo uma aprendizagem com compreensão, que é uma competência que tem que ser adquirida

Henriques, A. (2021). Aprendizagem da matemática no Ensino Superior: Práticas de natureza exploratória com suporte da tecnologia. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 5 – 18). Valencia: SEIEM.

pelos estudantes mas que não surge naturalmente, depende das práticas pedagógicas adotadas, em particular a natureza das tarefas e o modo como são implementadas em sala de aula. No entanto, uma das causas das taxas de reprovação nas disciplinas de introdução ao Cálculo de muitos cursos de Matemática no ensino superior é a utilização de um método predominantemente centrado na exposição dos conteúdos e sem a interação dos estudantes, em que os conceitos matemáticos são transmitidos como verdades inquestionáveis e sem torná-los significativos para os estudantes (CBMS, 2012; Garzella, 2013). Este contexto é frequentemente motivo de questionamento dos estudantes sobre a importância desses conteúdos para a sua formação e prática.

A atual preocupação dos professores de cursos superiores com o ensino e aprendizagem da Matemática, não só focada no insucesso e abandono escolar mas, sobretudo, no que se prevê ser o futuro deste ensino, incluindo contextos educacionais que facultem um desenvolvimento profissional. é um fenómeno universal e devido a recentes mudanças sociais, pedagógicas e curriculares e ao rápido desenvolvimento tecnológico, que têm afetado o referido ensino. Existe, desta forma, uma convicção de que o foco do processo de ensino-aprendizagem já não pode ser a transmissão de conhecimentos estabelecidos, de definições e procedimentos de cálculo. É necessário encarar o processo de ensino e aprendizagem segundo uma nova perspetiva, repensando os métodos didáticos que tornem os estudantes confiantes nas suas habilidades matemáticas, permitam aprender por si novos conteúdos, e proporcionem aprendizagens significativas que os apoiem a desenvolver um conjunto vasto de competências requeridas para desempenhar, com eficiência, funções na sociedade atual. Em particular, o desenvolvimento do raciocínio e comunicação matemática, e de uma profunda compreensão dos conceitos e princípios matemáticos (Saxe, K. & Braddy, 2015; Small, 2008).

Esta preocupação tem-se refletido num significativo aumento da investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática a nivel universitário (Artigue, 2016), permitindo criar conhecimento que possa ajudar a estruturar e melhorar contextos educativos para ultrapasar os problemas relacionados com a aprendizagem dos estudantes com compreensão e as inúmeras dificuldades vividas por eles. Neste contexto, a importancia do ensino exploratório (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012) tem sido salientado na investigação (Henriques, 2012; Fonseca & Henriques, 2018).

Atendendo ao exposto, esta comunicação visa contribuir para o necessário debate sobre práticas adequadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática a nivel universitário, partilhando ideias, embora possam ser parciais e específicas, de pesquisas realizadas sobre educação matemática no ensino superior e o que permitiram alcançar visando responder aos desafios e necessidades mencionados para o futuro deste ensino. Com este objetivo apresento e reflito sobre estudos desenvolvidos em Portugal e Brasil, no decorrer da minha experiencia de investigadora e professora universitária, que contemplam contextos educativos envolvendo uma abordagem de ensino exploratório (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012) e o uso integrado da tecnología. Estes aspectos são valiosos no auxílio do ensino e aprendizagem em disciplinas universitarias (e.g. Análise Numérica e Cálculo), em que o estudante assume um papel ativo como corresponsável nesse processo.

Em particular, os estudos apresentados pretendem responder às seguintes questões:

- Qual o potencial das tarefas de exploração para promover o raciocínio matemático dos estudantes?
- Como a abordagem de ensino exploratório permite que os estudantes desenvolvem a compreensão de vários conceitos e procedimentos matemáticos?
- Qual o contributo da tecnología para uma aprendizagem com compreensão?

As secções seguintes integram orientações teóricas de temas essenciais à fundamentação das experiências de ensino dos estudos apresentados, que visam caracterizar as abordagens de ensino ativas para promover a aprendizagem da Matemática dos estudantes, com compreensão. São também

apresentados resultados do trabalho realizado por estudantes nas atividades exploratórias contempladas nos estudos, evidenciando o seu contributo para a sua aprendizagem, particularmente o raciocínio matemático e a compreensão de conceitos matemáticos que foram capazes de alcançar. E finalmente as conclusões, que contemplam uma reflexão sobre as abordagens pedagógicas e uma apreciação dos resultados dos estudos, identificando o potencial para o ensino e aprendizagem dos estudantes universitários.

PRÁTICAS EXPLORATÓRIAS E RECURSOS TECNOLÓGICOS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA COM COMPREENSÃO

Aprendizagem com compreensão

A aprendizagem da Matemática, com compreensão, tem ganho saliência e consenso crescente na investigação em Educação Matemática (Carpenter & Lehrer, 1999; Domingos, 2001, 2003; Fonseca & Henriques, 2018; Henriques, 2012; Simon, 2017). Para estes autores, sendo reconhecida como um objetivo essencial da Educação Matemática, a compreensão dos conceitos matemáticos deve ser um foco do processo de ensino e aprendizagem para os estudantes desenvolverem esta capacidade, caracterizada pela correlação de três dimensões (Figura 1): desenvolver significados dos conceitos; trabalhar as suas diferentes representações; e a sua mobilização na resolução de problemas que os envolvem, contrapondo-se à aprendizagem assente na aquisição de habilidades isoladas que só posteriormente desenvolve compreensão associada aos conceitos aprendidos. Quando necessário, envolve ainda a conexão de diferentes conceitos, dentro da mesma área de conhecimento ou entre outras áreas, devendo ser desenvolvida pelos estudantes desde o início do seu processo de aprendizagem.

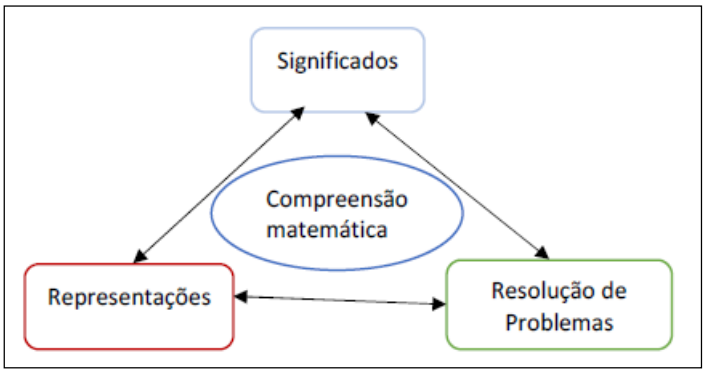


Figura 1. Modelo da compreensão matemática (Fonseca & Henriques, 2018)

Práticas exploratórias

Para desenvolver de uma forma ampla e sólida a aprendizagem com compreensão dos conceitos matemáticos é fundamental que os estudantes tenham oportunidade de realizar tarefas matemáticas significativas, que lhes permita um envolvimento maior com o que é ensinado e que os desafiem intelectualmente com o propósito de criar compreensão (Domingos, 2001; NCTM, 2000; Ponte, 2005). A literatura tem salientado que as tarefas exploratórias cumprem este papel, pois são desafiantes, de cunho aberto e focadas no raciocínio matemático dos estudantes, dando-lhes oportunidade de: (re)construir diferentes estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios, visando a descoberta autónoma da resposta e do que não é apresentado de forma explícita no seu enunciado; representar conceitos matemáticos; raciocinar matematicamente sobre ideias importantes, formulando conjeturas e discutindo-as para apresentarem justificações matemáticas

adequadas ao seu nível etário; e favorecer a reflexão e discussão de significados, buscando uma consolidação mais eficiente da aprendizagem dos estudantes (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012; Ponte, 2005, 2014).

Para além da natureza das tarefas em que os estudantes se envolvem, a forma como são realizadas na sala de aula pode influenciar e estruturar a forma como raciocínam e a visão que constroem da Matemática, incluido a aprendizagem dos conceitos. Isso exige que o profesor, no contexto de sala de aula, adopte estratégias de ensino-aprendizagem com enfoques dinâmicos e construtivos, envolvendo uma abordagem de ensino exploratório (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012), centrada no trabalho dos estudantes quando se envolvem na realização de tarefas matemáticas de natureza exploratoria (Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), e no uso integrado de recursos tecnológicos. Este contexto é fundamental no auxílio do ensino e aprendizagem da Matemática para os estudantes universitários, promovendo o seu raciocínio matemático e a construção de significados corretos de novos conceitos, e permitindo superar as suas possíveis dificuldades (Henriques, 2012; Fonseca & Henriques, 2018). No entanto, nas disciplinas de Matemática universitárias, estes contextos ainda têm sido pouco vivenciados (Gonçalves & Kalish, 2008; Small, 2008).

Uma aula de natureza exploratória é geralmente estruturada em três fases (Menezes, Canavarro & Oliveira, 2012): (i) a "introdução" da tarefa pelo professor, promovendo a adesão dos estudantes à sua realização estabelecendo conexões com a experiencia anterior, e garantindo a correta interpretação da mesma e a familiarização dos estudantes com o seu contexto; (ii) a sua "exploração" autónoma, realizada pelos estudantes individualmente ou em pequenos grupos, em que o professor monitoriza este trabalho procurando garantir que todos participam de forma produtiva. E também os apoia com comentários e ou respostas às eventuais dúvidas dos estudantes, mas através de questionamento para não reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998) e para desafiá-los no processo de exploração, de forma que alcancem os objetivos de aprendizagem propostos, nomeadamente a descoberta e a construção do conhecimento; e (iii) a "discussão" coletiva das resoluções dos estudantes, seleccionadas pelo profesor que asume o papel de mediador, e "síntese" das principais ideias matemáticas envolvidas na tarefa.

A realização de actividades de natureza exploratória é salientada como uma abordagem capaz de vincular os estudantes universitários a uma aprendizagem entusiástica, efectiva e eficaz, como uma forma de ultrapassar as limitações do ensino tradicional, e contribuir de forma significativa para a compreensão de novos conceitos da Análise Numérica, e para desenvolver o raciocínio matemático dos alunosestudantes, certamente mais adequada em disciplinas em que se pretende desenvolver competências diversificadas (Henriques, 2011).

O raciocínio matemático descreve uma capacidade cognitiva crítica envolvendo um conjunto de processos complexos, que incluem experimentações, formulação de conjecturas, generalização e justificação, através dos quais novos conhecimentos são obtidos a partir de conhecimentos prévios (Mata-pereira & Ponte, 2018). A capacidade de raciocinar matematicamente é, assim, fundamental para os estudantes alcançarem uma aprendizagem conceitual da Matemática, com compreensão, que tem ganho atenção e consenso crescente em resultados de investigações em Educação Matemática (Carpenter & Lehrer, 1999; Domingos, 2001, 2003; Fonseca & Henriques, 2018; Henriques, 2012; Simon, 2017).

Neste contexto, as representações matemáticas são também enfatizadas como elemento central no ensino e aprendizagem com compreensão de conceitos, por serem a base de toda a comunicação em Matemática (Duval, 2006), e pela visualização em Matemática ser reconhecida como fundamental nessa aprendizagem por estimular a intuição e suportar o raciocínio matemático (Arcavi, 2003). A visualização é considerada uma atividade cognitiva do estudante que o permite estabelecer conexões entre as suas imagens ou representações mentais e as experiências externas sobre um conceito

matemático, apoiadas em registos visuais, com o fim de representar, comunicar, interpretar e desenvolver novos conhecimentos sobre este conceito (Arcavi, 2003; Kidron & Tall, 2015).

Recursos tecnológicos

Tall (2003) aponta para a existência de evidências de que o uso de recursos tecnológicos proporciona uma melhor compreensão conceitual dos estudantes e ajuda-os na resolução de problemas, se comparado com os estudantes que tendem a utilizar processos de resolução mais processuais, em aulas tradicionais. Contudo, também revela que a tecnologia usada de forma inadequada geralmente não traz resultado significativo ao ensino dos conceitos, sendo necessário que o seu uso seja feito de maneira planeada e integrada com o currículo e a didática em sala de aula. Em particular, o ensino de conceitos matemáticos com recurso a tarefas exploratórias integrando o uso de software de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, tem recebido bastante atenção nas pesquisas em Educação Matemática, pelas vantagens em viabilizar um ambiente de aprendizagem rico e eficaz, em que as estratégias didáticas permitem aos estudantes ultrapassar as suas dificuldades e alcançar aprendizagens mais efetivas (Leung, 2017).

Reconhecendo os contributos do GeoGebra para a aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos, alguns estudos têm vindo a considerá-lo como recurso no ensino e aprendizagem dos conceitos do Cálculo, confirmando algumas potencialidades no seu uso (Aydos, 2015; Dikovic, 2009; Slavícková, 2013, Fonseca & Henriques, 2018). A multiplicidade de recursos do GeoGebra favorece a criação de applets com construções geométricas dinâmicas do conceito, contendo pequenos controles para os seus parâmetros que, ao serem manipulados pelo estudante, produzem movimentos e transformações planas e/ou espaciais que lhes poderão ser úteis à compreensão desse conceito (Dikovic, 2009; Ocal, 2017). Por exemplo, os recursos que permitem o esboço de gráficos de diversas classes de funções, favorecem a criação de representações geométricas dinâmicas do conceito de limite, possibilitando que os estudantes, ao explorá-las, formulem conjeturas, as testem experimentalmente e tentem comprová-las, favorecendo assim a abstração sobre este conceito e maior compreensão das suas propriedades (Dikovic, 2009). A aprendizagem destes conceitos, com compreensão, é necessária para que os estudantes avancem, no seu percurso escolar, para uma aprendizagem mais formal e rigorosa do Cálculo (Cottrill, Nichols, Schwingendorf, Thomas & Vidakovic, 1996; Sealey, Deshler & Hazen, 2014).

EXPERIÊNCIAS DE ENSINO QUE CONTEMPLAM UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA COM INTEGRAÇÃO DA TECNOLOGÍA

Os estudos a seguir descritos, que visam apoiar esta comunicação com foco em práticas adequadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática a nivel universitário, foram realizados como investigações orientadas para a preparação e experimentação de contextos de ensino que contemplam uma abordagem exploratória com integração da tecnología.

A aprendizagem da Análise Numérica num contexto de ensino exploratório

Visando comprender o processo de aprendizagem da Análise Numérica e do raciocínio matemático de estudantes universitários portugueses que frequentava esta disciplina, centrado em actividades de exploração, o estudo de Henriques (2011) recorreu a uma experiência de ensino na qual foram usadas tarefas exploratórias, com recurso à calculadora gráfica, para abordar diversos conceitos dos tópicos programáticos. Neste texto destaco, em particular, o trabalho dos estudantes na exploração da tarefa "Equacionando" (Fig. 1), Esta tarefa é um ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de métodos numéricos para resolver equações não lineares, visando envolver os estudantes em: Construir e interpretar tabelas e gráficos relativos a funções não lineares; Calcular a raiz de uma equação não linear; Deduzir métodos de resolução de equações não lineares; e Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre equações não lineares.

Os resultados apresentados resultam de uma análise qualitativa dos dados recolhidos, com base em exemplos de resoluções escritas da tarefa pelos estudantes, que evidenciam aprendizagens significativas ao nivel de conceitos e procedimentos que servem de base para abordar os métodos de resolução de equações não lineares e como ultrapassam as dificuldades e compreendem esses conceitos. E também permite discutir o modo como os estudantes tiram vantagem do trabalho realizado em torno das representações e o seu contributo para a emergência do raciocínio matemático.

Q1. Considere a função $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$. Como resolve a equação $f(x) = 0$?

Q2. Observe a seguinte sequência de intervalos de valores reais contendo a raiz de f,

[1.000, 2.000][1.000, 1.500][1.250, 1.500][1.250, 1.375][1.250, 1.313][1.281, 1.313]

a) Qual será o próximo elemento da sequência? Explique como chegou a essa conclusão.

b) Será possível encontrar uma regra geral para construir qualquer elemento da sequência apresentada?

Fig. 1. enunciado da tarefa "Equacionando"

Algumas tendências. Na primeira questão é proposta a resolução (não analítica) de uma equação não linear para a qual os estudantes ainda não têm procedimentos disponíveis, pretendendo analisar que estratégias utilizam e/ou constroem e a que conhecimentos anteriores de Matemática recorrem. Esta questão constitui um exemplo de possibilidade de utilização da calculadora como meio auxiliar não só de cálculo, mas também de visualização da informação disponibilizada. A segunda questão envolve uma sequência de intervalos que tem uma lei de formação implícita mas que é inequívoca pelas condições dadas. Constitui o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização dos métodos numéricos para resolução de equações não lineares. Em particular, pretende iniciar a discussão sobre o método da bissecção, levando os estudantes a deduzi-lo e a compreender a fundamentação desse procedimento. Esta questão, de natureza mais aberta, desafia os estudantes a descrever o próximo intervalo da sequência e a estabelecer uma generalização para o processo de formação dessa sequência, criando procedimentos (algoritmos) de resolução de equações não lineares com base na identificação de padrões e regularidades que permitam realizar generalizações.

A exploração desta tarefa inicia-se com a leitura individual do enunciado, pelos estudantes, e depois iniciam o trabalho em pares, onde discutindo com os colegas tentam encontrar estratégias para responder às questões. Os estudantes privilegiam a manipulação algébrica para encontrar a solução da equação apresentada, tentanto simplificar a expressão de modo a isolar a variável, sem se aperceberem da sua não linearidade e de não ter resolução analítica, pelo que não são bem sucedidos nas suas tentativas de resolução como clarifica Luís: "Não consegui isolar totalmente a variável *x* de modo a obter um valor para esta variável". Esta opção parece estar relacionada com as suas experiências escolares em que a manipulação algébrica é a estratégia habitualmente utilizada para resolver equações, como Gonçalo explica: "tentámos resolver como antigamente [refere-se à resolução analítica através de manipulação algébrica] mas não conseguimos chegar a nenhum valor".

Ao verificar que esta estratégia não resulta, os estudantes direccionam a sua atenção na procura de estratégias de resolução e, como esperado, optam por uma resolução aproximada da equação a partir da representação gráfica, recorrendo à máquina de calcular, mostrando competencia no seu uso e diferentes estratégias (Fig. 2):

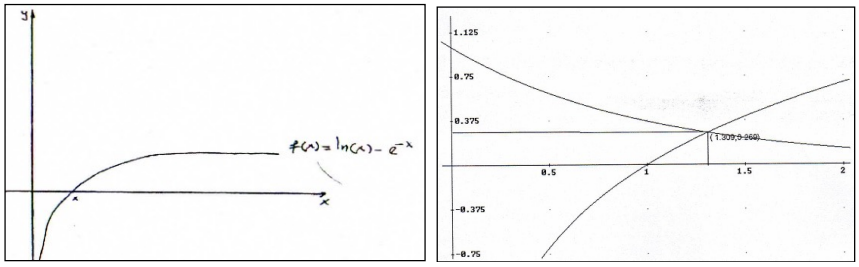


Fig. 2. Exemplos de estratégias na resolução gráfica da equação (Luís e Gonçalo)

A primeira, mais imediata, em que os estudantes inserem na máquina de calcular a expressão do membro não nulo da equação e procuram o ponto de intersecção do seu gráfico com o eixo dos *xx*. A outra estratégia compreende uma fase inicial de manipulação algébrica, em que os estudantes transformam a equação inicial numa igualdade entre duas funções, cujas expressões inserem na máquina de calcular, para depois procurarem o ponto de intersecção dos seus gráficos.

Em qualquer das estratégias os estudantes interpretam correctamente o gráfico apresentado e descrevem e justificam o processo de obtenção da solução, usando a linguagem natural, dando significado à solução ao manipular conceitos e adicionar informações através de conexões com conhecimento previo, e revelam facilidade em realizar conversões entre a representação algébrica e gráfica das funções:

> Dada a função f(x), os seus zeros são as raízes da equação f(x)=0. Sendo assim, os zeros da função são as abcissas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo dos xx. (Luís)

> Ao igualarmos a nossa função f(x) = ln(x) – e-x a zero, temos que ln(x) = e-x. O valor que procuramos trata-se do x para o qual as duas funções são iguais. Então fizemos o traçado do gráfico das duas funções para ver qual o valor de x no qual se dava a intersecção. (Gonçalo)

Na questão seguinte, durante a realização do trabalho de grupo, os estudantes procuram regularidades e tentam identificar padrões na observação da sequência de intervalos apresentados. Para isso recorrem a diversos esquemas, usados como ferramentas de registo e compreensão sobre propriedades dos elementos da sequência, ajudando-os a focarem-se no raciocínio. Por exemplo, Gonçalo utiliza símbolos de mais e menos para indicar as alterações ocorridas na referida sequência e organiza a informação em forma de tabela:

> Tentámos encontrar um padrão e perceber o que estava a acontecer em concreto de intervalo para intervalo. Observamos que quando ocorriam alterações no extremo superior, se tratava deste ser reduzido, no caso do extremo inferior, se ocorresse alteração, estes seriam aumentados.
>
> 1 – [1.000 2.000] -
> 2 – [1.000 1.500] +
> 3 – [1.250 1.500] -
> 4 – [1.250 1.375] - (…)

As representações facilitaram um proceso indutivo de raciocínio que conduz os estudantes à formulação de uma conjetura baseada na identificação, correta, do padrão dos extremos dos intervalos e de diminuição da sua amplitude. Depois de identificado o padrão, os estudantes utilizam a linguagem natural para apresentar as suas conjeturas sobre o modo de formação dos elementos da sequência, explicando: "Apercebemo-nos que o valor da amplitude do intervalo seguinte é sempre metade da amplitude do intervalo anterior. Depois apercebemo-nos que o valor a somar ou a subtrair era sempre metade do valor do intervalo anterior" (Gonçalo).

Durante o trabalho de grupo, os estudantes verificam a validade da regra de formação, procedendo à sua experimentação apenas para os elementos da sequência apresentada no enunciado. Para a generalização da regra, e uma vez que a mesma não pode ser representada por uma expressão algébrica única, os estudantes, a trabalhar em grupo, apresentam a lei de formação dos intervalos na forma algorítmica, usando um misto de linguagem natural e simbólica, como nos seguintes exemplos:

> A partir do que foi dito anteriormente, podemos definir a seguinte regra:
>
> Se x-max > (f(x) = 0), então o intervalo seguinte será [min, x - max] ou [x + min, max] se e só se x-maz < (f(x) = 0) (Luís)

Como regra geral e tomando em conta o modo como chegamos ao intervalo seguinte, temos o intervalo [a, b] com vméd = (a+b)/2. Fazemos os seguintes passos:

1.º Encontrar o valor médio vméd = (a+b)/2

2.º Encontrar f(vméd)

Se f(vméd) > 0 então ficamos com o intervalo seguinte [a, vméd]

Se f(vméd) < 0 então ficamos com o intervalo seguinte [vméd,b]. (Gonçalo)

A validação e justificação de estratégias foram foco de aprofundamento na discussão da tarefa, por estes processos estarem pouco presentes na exploração desta questão, sendo necessário chamar a atenção da turma para uma leitura atenta do enunciado e para os levar a testarem as suas conjecturas com base nas novas condições (a raíz da equação pertencer sempre ao intervalo) e a identificarem alguns erros possíveis na sua formulação. No entanto, são notórias algumas tentativas de as justificar, recorrendo a teoremas matemáticos. Gonçalo faz uma descrição, em linguagem natural, do modo de formação dos intervalos da sequência com base em algumas propriedades e teoremas matemáticos seus conhecidos, nomeadamente o Teorema de Bolzano e os seus corolários: "Como a função é contínua, e como f(a) < 0 e f(b) > 0, apenas tínhamos que manter os extremos com estes sinais para que o próximo intervalo contivesse também o zero. Sendo vméd sempre extremo, bastava ver o sinal de f(vméd)".

No final desta tarefa, os estudantes são desafiados a resolver uma outra equação não linear mas que está contextualizada num problema:

A velocidade de lançamento de um míssil a partir de um submarino é calculada através da fórmula $v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$, onde v é a velocidade de lançamento na vertical, u é a velocidade de saída do combustível relativamente ao míssil, m_0 é a massa inicial do míssil ($t = 0$), q é a taxa de consumo do combustível, g = 9,8 m/s^2 a aceleração da gravidade. Sabendo que u= 2200 m/s, m_0= 160000 Kg e q= 2680 Kg/s, ao fim de quanto tempo é atingida a velocidade de 1000 m/s?

É interessante observar que os estudantes foram capazes de fazer escolhas apropriadas de representações gráficas e com facilidade interpretaram o problema, identificando os dados e a questão e classificando-o como sendo a resolução de uma equação não linear. Os estudantes respondem ao problema, revelando empenho na utilização dos conceitos e métodos que foram adquiridos recentemente para desenvolverem as suas estratégias. É o caso de alguns que apresentam um erro asociado à solução encontrada, em forma de intervalo, considerando que o valor encontrado não é exacto, e depois de resolverem o problema, procuram estratégias alternativas para a sua resolução e optam por utilizar o algoritmo que deduzem na questão anterior desta tarefa. Este tipo de tentativas revela, igualmente, uma tendência para que os estudantes evoluam na compreensão dos processos de resolução de problemas, como é natural, à medida que vão adquirindo mais experiência.

A aprendizagem da taxa de variação instantânia com recurso ao Geogebra.

O conceito de taxa de variação instantânea de uma função destaca-se como fundamental para a aprendizagem do Cálculo. No entanto, os estudantes universitários têm revelado muitas dificuldades e incompreensões na aprendizagem deste conceito. Algumas das mais comuns são: i) incompreensões do declive da reta tangente como a aproximação convergente do declive da reta secante, do papel do quociente diferencial $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e do limite quando h→0 na expressão algébrica da taxa de variação instantânea; ii) incapacidade de tradução do declive da reta tangente pela taxa de variação instantânea, e iii) fragilidade algébrica na aplicação da taxa de variação instantânea para resolver problemas que a envolve (Biza & Zachariades, 2010; Sahin et al., 2015). Estas dificuldades podem

estar relacionadas com problemas no ensino da taxa de variação instantânea aos estudantes, que considera, predominantemente, a memorização e execução de procedimentos ao invés da sua compreensão relacional (Sahin et al 2015). Por isso, alguns autores sugerem que o ensino da taxa de variação instantânea seja enriquecido com explorações de suas diferentes representações (verbal, algébrica e geométrica) associada ao declive da reta tangente, que encaminhe os estudantes à sua aplicação na resolução de problemas, e integre o uso de tecnologia digitais (Ocal, 2017; Orts et al., 2016).

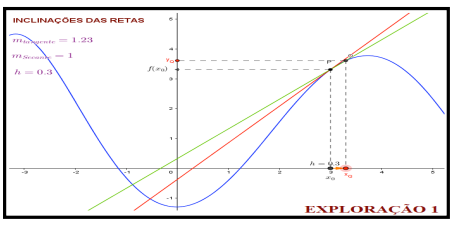
Atendendo a este contexto, o estudo de Fonseca e Henriques (2018) foi realizado com base numa experiência de ensino seguindo uma abordagem exploratória, integrando o uso do GeoGebra, com estudantes brasileiros que frequentavam a disciplina de Pré-Cálculo, visando a aprendizagem do conceito de limite. Nesta comunicação, dou destaque à resolução de duas tarefas exploratórias da experiência de ensino (T_12 e T_14) que visam promover a aprendizagem da taxa de variação instantânea de uma função. Estas tarefas foram construídas com base em aspetos referidos na literatura que se constituem como objetivos de aprendizagem da taxa de variação instantânea, num curso de introdução ao Cálculo, nomeadamente: i) reconhecer que declive da reta tangente é obtido pelo aproximação convergente do declive da reta secante; ii) reconhecer que o declive da reta tangente é expresso algebricamente pela taxa de variação instantânea da função, ou seja, $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; iii) reconhecer que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo é nulo e traduzi-lo pela equação $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ e iv) aplicar os conhecimentos sobre taxa de variação instantânea na resolução de problemas que a envolve (Ocal, 2017; Sahin et al., 2015).

Os estudantes resolveram estas tarefas trabalhando em pares, após terem sido conduzidos à aprendizagem das noções intuitivas, do cálculo algébrico e da definição formal do conceito de limite. Também foram construídas três applets no GeoGebra para serem exploradas pelos estudantes na resolução dessas tarefas, visando conduzi-los à experimentação, visualização e descoberta da taxa de variação instantânea, como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função.

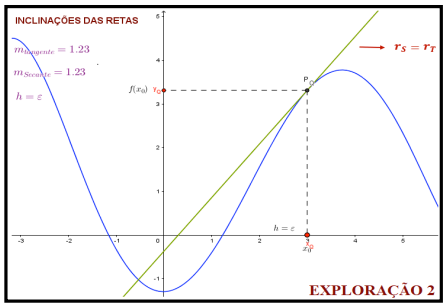
Na tarefa T_12, os estudantes precisaram realizar simulações dinâmicas, numa applet do GeoGebra, de reta secante $r_S = \overleftrightarrow{PQ}$ que converge para a reta tangente r_T ao gráfico de uma função *f* no ponto P(x_0, f(x_0)), a fim de deduzir que o declive da referida reta tangente (m_T) é expresso algebricamente pela taxa de variação instantânea da função. Verifica-se que todos os pares dos estudantes reconheceram corretamente que o declive da reta tangente (m_T) é obtido pela aproximação convergente do declive da reta secante (m_S). A partir da visualização das explorações realizadas no GeoGebra os estudantes concluíram que o valor de m_S alcança o valor de m_T, sendo h→0 o recurso que garante essa convergência, tal como exemplificado no diálogo de Gil e Maria e sua exploração na applet ao resolver a Q_7 T_12: "Quando esse valor existe, o declive da reta tangente é alcançado (atingido) pela aproximação dos declives das retas secantes? Porquê?"

Gil: Olha aqui! Pela direita … Pela esquerda … Tá vendo? [arrasta o ponto x_Q fazendo $Q \to P$ e observa $r_S \to r_T$ e $m_S \to m_T$ − **Exploração 1**].

Maria: Mas o que acontece com os declives m_S e m_T das retas?



Gil: O valor do declive da reta secante vai se aproximar do valor do declive da tangente, conforme o ponto Q fica mais próximo do ponto P.



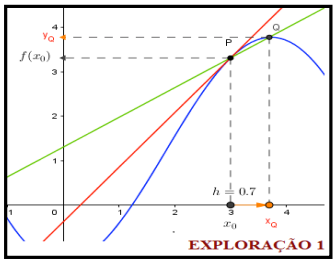
Maria: Ok! […] O declive da reta tangente é alcançado pela aproximação dos declives da reta secante? [Lê a Q_7T_{12}]. Sim! [faz $r_S \to r_T$ e observa que $h = \varepsilon$ e $m_S = m_T$ – **Exploração 2**]

Gil: Sim! Porque a diferença entre os valores de m vai ser muito pequena […] [visualiza convergência dos valores de m_T e m_S].

Maria: Sim, pois o h está tendendo a zero.

Gil: O h é justamente isso. Olha ali [visualiza $h = \varepsilon$ e $r_S \to r_T$ na *applet*]. O h tende a zero.

Deste diálogo é possível inferir que a visualização simultânea das convergências $r_S \to r_T$, Q→P e h→0, e da igualdade numérica $m_S \to m_t$, resultados de explorações realizadas na applet do GeoGebra, permitiram os estudantes reconhecerem que o declive da reta tangente é obtido pela aproximação convergente dos declives das retas secantes. E também há evidência de que as simulações no GeoGebra ajudaram alguns dos estudantes a desenvolverem experimentações e generalizações algébricas das coordenadas do ponto Q e do declive m_T, permitindo-lhes expressar as coordenadas de Q(x_0+h,f(x_0+h)) e $m_T = \lim_{h\to 0} m_S$, e correlacionar esses conhecimentos para deduzir, de forma autónoma, que o declive da reta tangente é expresso algebricamente pela taxa de variação instantânea da função, $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Tal é observado no diálogo entre Eliseu e Vítor ao responder a Q_6 T_12: "Escreva uma expressão algébrica (em função de x_0 e h) que represente o valor do declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x_0. Explique porque é que essa expressão realmente atende ao que é pedido nesta questão."

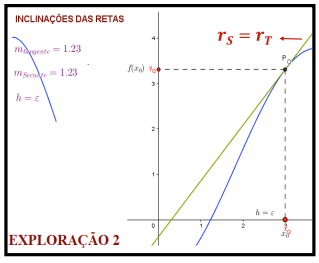


Eliseu: Ele quer saber as coordenadas de Q em função de x_0 e h. Esse ponto aqui vai ser sempre $x_0 + h$ [indica a coordenada x_Q]

Vítor: Sim, $x - x_0 = h$. Aqui no eixo Ox é $x_0 + h$ e no eixo Oy é $f(x_0 + h)$. O ponto P é $(x_0, f(x_0))$, certo? […]

Eliseu: Certo! $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ […] Achar a expressão algébrica de m_T em função de x_0 e h [Lê a Q_6T_{12}]. Volta lá e clica pela direita de novo [Vítor arrasta x_Q fazendo $h \to 0$] […]

Vítor: [faz $Q \to P$ e visualiza $h \to 0$, $r_S \to r_T$ e $m_S = m_T$] Acho que entendi. Tipo, vai ser esse $m_S = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ e como r_T é alcançada [pela aproximação de r_S], faz $h \to 0$ para chegar a esse limite $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.



Eliseu: Calma aí, Vítor, como é essa história aí?

Vítor: Para a gente achar o declive dessa aqui que se movimenta [indica a r_S na *applet*] é essa aqui [indica na folha de resposta $m_S = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$], ok?

Eliseu: Sim.

Vítor: E agora para a gente achar a inclinação de r_T, que é parado, basta pegar esse que se movimenta $\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]$, substituir as coordenadas de $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ e vai ter m_T. Aí fica $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_o+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Salienta-se ainda que o momento de discussão coletiva da tarefa, em que o profesor usou a applet do GeoGebra para realizar simulações dinámicas da aproximação da secante à reta tangente e conduziu

o diálogo com os estudantes com questionamentos, a fim de que eles compreendessem que o declive da reta tangente (m_T) é obtido pela convergência do declive da reta secante (m_S), ou seja, $m_T = \lim_{h\to 0} m_S$, contribuíram para que alguns estudantes ultrapassem dificuldades que encontraram na aprendizagem da taxa de variação instantânea. Os estudantes quando não conseguem realizar procedimentos algébricos para calcular o limite, $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ recorrem frequentemente às explorações das applets do GeoGebra, para construir gráficos de funções, realizar simulações dinâmicas e/ou testes experimentais, permitindo-lhes resolver problema graficamente (T_12) e/ ou delinear a estratégia para a sua resolução algébrica (T_14).

Após essa experiência, a aprendizagem da taxa de variação instantânea foi retomada na tarefa T_14 em que os estudantes foram conduzidos no processo de modelação da confeção de uma caixa de formato paralelepípedo. Eles realizaram explorações dinâmicas na planificação e formato tridimensional da caixa, acompanhadas de simulações das medidas de suas dimensões e volume, na *applet* do GeoGebra, e conseguiram mobilizar conhecimentos sobre a taxa de variação instantânea para resolver um problema de otimização, que consistia em determinar as dimensões da caixa de volume máximo. Neste proceso apresentaram facilidade em traduzir a expressão algébrica da função V que modela o volume da caixa, conforme se comprova no excerto "Isso aqui é 10 menos x daqui, e menos x daqui. Ou seja $10-2x$. Isto daqui também é $10-2x$" (Miriam) e "Então fica $(10-2x)\cdot x\cdot(10-2x)$ … Então ficou $V(x)=4x^3-40x^2+100x$" (Fátima).
Desta forma, conclui-se que as experimentações das dimensões da caixa na *applet* do GeoGebra, permitiram esses estudantes generalizarem as medidas da caixa em função de x e traduzir a expressão algébrica da função V que modela o seu volume.

CONCLUSÕES

Através destes estudos tentei partilhar algumas das minhas experiências no campo da educação matemática no ensino superior, na última década. Organizei as conclusões baseadas na reflexão sobre este campo da investigação, convencida que pode ajudar a comprender e apreciar os resultados, identificando os pontos fortes para o futuro ensino. E tentei tornar claro os avanços substanciais que foram feitos do ponto de vista teórico e empírico.

Nestes estudos, os estudantes foram desafiados a realizar tarefas de natureza diferente das que estão habituados nas aulas de Matemática do ensino superior, que os estimularam a experimentar diversos processos característicos do raciocínio matemático, como a procura de regularidades, formulação e teste de conjeturas, generalização e justificação.

Os resultados dos estudos apresentados sugerem que a realização de tarefas exploratórias com o uso integrado de recursos tecnológicos pode ser usada no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos de Cálculo e Análise Numérica, no ensino superior, para conduzir a uma aprendizagem com compreensão dos mesmos. Este tipo de estratégia didática contribuiu para uma participação mais ativa dos estudantes na realização das tarefas e para promover aprendizagens mais efetivas sobre os conceitos matemáticos e a sua aplicação na resolução de problemas.

O trabalho colaborativo entre os estudantes, a partir da resolução das tarefas exploratórias integrando a calculadora ou o GeoGebra, a descentralização do ambiente de exposição de conteúdos no quadro e o incentivo, os desafios e as explicações do professor, em geral, ajudaram os estudantes a consolidar as aprendizagens e a realização de novas descobertas. Também as interações entre os estudantes (pares ou trio) que permitiu a partilha e discussão de seus conhecimentos, e a verbalização de seus raciocínios na realização, teste, validação ou refutação de hipóteses e na aplicação dos conceitos aprendidos para resolver problemas, favoreceram o desenvolvimento de um ambiente no qual pudessem aprender a trabalhar cooperativamente, favorecendo o trabalho investigativo. Para além

disso, essas interações proporcionaram ao estudante um ambiente em que ele pôde analisar as suas ideias e, quando questionado, justificá-las, contribuindo assim para a identificação dos seus erros apresentados no momento da resolução das tarefas ou reforço da sua aprendizagem. tal como atesta Leung (2017).

É possível inferir que o uso do GeoGebra contribui para a criação de um ambiente de aprendizagem rico e promotor de aprendizagens significativas. Esses resultados permitem concluir que os três elementos evidenciadores das potencialidades do GeoGebra, nomeadamente, visualização, conexões entre representações e processos de raciocínio matemático, se revelam adequados para analisar o papel deste software na aprendizagem da taxa de variação instantânea de uma função.

Da análise dos resultados destaca-se, como aspecto significativo, a variedade de representações que os estudantes são capazes de utilizar, associadas às diferentes funções que desempenham na exploração das tarefas de investigação propostas. Os estudantes têm tendência para privilegiar a representação algébrica na exploração das tarefas de investigação. Mesmo quando conhecem e têm à sua disposição outras representações que permitem abordagens mais eficientes, optam por usar manipulação algébrica para deduzir regras ou para encontrar soluções. De forma geral, os estudantes usam a representação gráfica para obter soluções, explicar raciocínios e verificar resultados observa-se um aumento gradual do recurso à representação gráfica para analisar e desenvolver compreensão sobre a informação disponibilizada no enunciado, como suporte e ilustração de raciocínios e para confirmar resultados obtidos através de outras formas de representação. No final da experiência de ensino os estudantes são ainda capazes de planear e seleccionar as suas estratégias com base na análise de gráficos e, deste modo, a representação gráfica passa a ter um papel importante na justificação dos seus raciocínios e das soluções encontradas.

Finalmente, os resultados destes estudos evidenciam o potencial das tarefas de exploração para promover o raciocínio matemático dos estudantes, desenvolvendo a sua compreensão de vários processos que caracterizam a atividade matemática, permitindo-lhes trabalhar e familiarizarem-se com diferentes formas de representação e construir conhecimento de conceitos e procedimentos da disciplina. Sugerem, igualmente, que este tipo de tarefas podem ser usadas com sucesso, nos cursos de ensino superior, nomeadamente em domínios da Análise Numérica e do Cálculo. No entanto, alguns aspetos devem ser aferidos de forma a introduzir melhoramentos.

Em relação às atividades propostas, saliento a necessidade de algum cuidado na elaboração e/ou seleção das tarefas. Estas devem ser suficientemente ricas para permitirem explorações e investigações que conduzam os estudantes a desenvolver capacidades de raciocínio, a aumentar ou reorganizar os seus conhecimentos e a uma verdadeira compreensão de novos conceitos. Uma vez criadas, é ainda de considerar possíveis alterações às tarefas, de forma a adaptá-las em função do tempo disponível para a sua realização, dos conceitos ou conteúdos programáticos que se pretende abordar e dos processos matemáticos cuja utilização se pretende fomentar.

Os estudantes, de forma geral, têm a ideia pré-concebida de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas ou conclusões. A evolução para uma postura realmente investigativa é um processo demorado e deve ser objecto de um trabalho sistemático por parte do professor, voltado para a promoção de certos processos matemáticos menos considerados pelos estudantes. Para isso é necessário proporcionar aos estudantes um contacto mais frequente com este tipo de actividades, onde experimentem vários processos de resolução não normativos e encontrem varias soluções igualmente correctas, onde a discussão em grupo é promovida e pode ser altamente proveitosa e onde a calculadora ou o Geogebra, entre outros recursos, pode desempenhar um papel para lá do mero instrumento de cálculo. As discussões finais das tarefas, em grande grupo, revelaram-se momentos cruciais para o trabalho investigativo dos estudantes. Mais do que apresentar resultados, estes momentos deverão servir para desafiar os estudantes a prolongar a investigação.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Artigue, M. (2016). Mathematics education Research at University Level: Achievements and Challenges. In E. Nardi, C. Winslow, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 1st Conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 11–27). Montpellier, France: INDRUM.

Aydos, M. (2015). *The impact of teaching mathematics with geogebra on the conceptual understanding of limits and continuity: the case of turkish gifted and talented students*. Dissertação de Mestrado, Universidade Ankara, Turquia.

Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understandig* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Conference Board of the Mathematical Sciences – CBMS (2012). *The mathematical education of teachers ii.* Providence, RI and Washington, DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Cottrill, J., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996) Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of mathematical behavior, 15*, 167-192.

Dikovic, L. (2009). Examining continuity/discontinuity of a function by using geogebra. *Teaching Mathematics and Computer Science 7*(2), 241-257.

Domingos, A. (2001). Contextos escolares que favorecem o pensamento matemático avançado. In D. Moreira et al. (Eds.). *Matemática e comunidades: A diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática. Anais do Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE* (pp. 113-122). Consolação: SEM-SPCE.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A Matemática no ínicio do superior.* Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*, 103-131.

Fonseca, V., & Henriques, A. C. (2018). Compreensão da definição formal de limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. *Bolema 32*(62), 1030-1049.

Garzella, F. (2013). *A disciplina de cálculo i: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos*. Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Gonçalves, S. & Kalish, A. (2008). Método Expositivo. *OPDES, 1*. http://ndsim.esec.pt/pagina/opdes/brochuras/01.pdf em 3/11/08.

Henriques, A. C. (2011). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.

Henriques, A. C. (2012). O raciocínio matemático na exploração de atividades de investigação: Um estudo com alunos universitários. *Quadrante, 21*(2), 139-163.

Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 183-199. DOI 10.1007/s10649-014-9567-x.

Leung, A. (2017). Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls* (pp. 3–16). Cham: Springer.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2018). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema, 32*(62), 781-801. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

Menezes, L., Canavarro, A. P., & Oliveira, H. (2012). Teacher practice in an inquiry-based mathematics classroom. *Hellenic Mathematical Society-International Journal for Mathematics in Education, 14*, 357-362.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ocal, M. (2017). The effect of geogebra on students' conceptual and procedural knowleDGS: The case of applications of derivative. *Higher Education Studies, 7*(2), 67-78. https://doi.org/10.5539/hes.v7n2p67

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2014). Formação do professor de matemática: perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 343-360). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Saxe, K. & Braddy, L. (2015). *A Common Vision for Undergraduate Mathematical Sciences Programs in 2025*. Available in https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/CommonVisionFinal.pdf.

Sealey, V., Deshler, J., & Hazen, K. (2014). Strengthening student understanding of mathematical language through verbal and written representations of the intermediate value theorem. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 24*(2), 175-190. https://doi.org/10.1080/10511970.2013.858282

Slavícková, M. (2013). Changes in teaching of calculus at the university level. In. Acta *Didactica Universitatis Comenianae, Mathematics*, *13*, 33-45.

Simon, M. (2017). Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics, 94*, 117-137. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9728-1

Small, D. (2008). *An urgent call to improve traditional college algebra programs*. Available in https://www.maa.org/an-urgent-call-to-improve-traditional-college-algebra-programs.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Tall, D. O. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L. M. Carvalho and L. C. Guimarães, *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1–28, Rio de Janeiro, Brasil.

TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS AT UNIVERSITY LEVEL

Biza, I.

University of East Anglia, School of Education and Lifelong Learning, Norwich, UK

Abstract

In my contribution to the plenary panel of the Spanish Society for Research in Mathematics Education Symposium, I draw on recent research to discuss issues related to University Mathematics Education (UME). I start with a discussion on what makes UME special. Then, I outline recent research programmes and the perspective they bring in UME research. Finally, I discuss a range of teaching and learning issues related to UME with attention to the transition between school and university mathematics. Overall, my position is that UME is a distinctive area of research in terms of content and practices; the students and their aspirations; and, the teachers, their engagement with research and their expectations from the students. Research enquiry in UME is better situated to the context of the institutions, communities, and practices under consideration instead of a discussion about teaching and learning in abstract.

Keywords: *university mathematics education, teaching, transition, institutions, communities*

INTRODUCTION

It is thirty years after the publication of the "Advanced Mathematical Thinking" (Tall, 1991) volume, one of the first signals of the emergence of a new area of research in mathematics education on what was called at that time "Advanced Mathematical Thinking". This publication was followed by the 1998 *ICMI* study that produced "The teaching and learning of mathematics at university level" (Holton, 2001) volume. Research has developed since then with a rich body of specialised in University Mathematics Education (UME) events and fora such as the *EMF* (Espace Mathématique Francophone) conferences since 2006; the *RUME* (Research in Undergraduate Mathematics Education) conference; the *Delta* (Southern Hemisphere Conference on the Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics); the *TSG2* on Mathematics Education at Tertiary Level at the International Congress in Mathematical Education; the *TWG14* on Advanced Mathematical Thinking and, since 2011, on University Mathematics Education at the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education *(CERME);* and, recently, since 2016, the INDRUM conference[1]. A substantial body of research emerged out of the above vibrant activity around the globe that makes research in UME a distinct area of research within mathematics education. In my contribution to the plenary panel of the Spanish Society for Research in Mathematics Education (SEIEM) Symposium, I draw on the aforementioned body of research to discuss issues related to the teaching and learning of mathematics at university level.

In the discussion in this paper, I would like to note that, although very often we use the term "university" to describe the education after school, there is not always a uniformly agreed way of what we mean with the teaching and learning of mathematics at "university level". In practice, there are different institutions that fit under the "university" term with a diverse range of aims and

[1] INDRUM stands for the International Network for Didactic Research in University Mathematics and the INDRUM conferences are recognised as ERME (European Society for Research in Mathematics Education) topic conferences with three conferences completed so far: 2016 (Montpellier, France); 2018 (Kristiansand, Norway); 2020 (Bizerte, online, Tunisia)

Biza, I. (2021). Teaching and learning of Mathematics at University level. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 19 – 31). Valencia: SEIEM.

priorities. In some educational systems, there is a pre-university level that follows the compulsory education in which students are prepared for university admission. Very often, mathematical areas, such as Calculus or Linear Algebra, are introduced to the students at this level and then are expanded further at their university studies. In other educational systems, students are introduced to these areas in the first years of their university studies. A characteristic example is the mathematical area of Calculus, which appears in the upper secondary high school curriculum (post-16) with a variation on the emphasis on rigor, proof and definition (e.g., Ellis, Kelton & Rasmussen, 2014; Törner, Potari & Zachariades 2014) as I discuss in the next sections. Even further, within university level institutions, mathematics courses are offered to a range of audiences with a variation of interests, backgrounds and professional aspirations. For example, mathematics courses are offered to a variation of programmes such as mathematics, engineering, economics, psychology, teacher education, etc.. These programmes aim to address students with different needs and background. In some educational systems, students from different programmes are taught together either because they have not chosen their specialisation yet (e.g., in the US) or because of managerial and administrative reasons (e.g., due to the available resources). To highlight the complexity of UME even further, I would also add the variety of the teaching offered in different educational systems. In some universities, sessions are offered by mathematicians who are active researchers in mathematics or in mathematics education. In other systems, early year university courses are offered by postgraduate researchers or teaching staff with no involvement in research. In several cases, there is a combination of sessions where lectures are offered by more experienced teachers or/and researchers while seminars and workshops are offered by postgraduate researchers. The variability in the attention to rigor, abstraction and formal mathematical theory, the variety of students' background and aspirations, and, the range of teachers' expertise and expectations are essential factors for consideration in our study of the teaching and learning of mathematics at university level, as I elaborate further in this paper. My position is that, in order to address such complexity in UME, it is more efficient to situate the discussion in the context of the institutions, communities and practices under consideration instead of a discussion about teaching and learning in abstract.

In my contribution to the plenary panel, I start with a discussion on what makes the teaching of mathematics at university level special, especially in comparison to school mathematics, before outlining recent research programmes and the perspective they bring in university mathematics and its teaching and learning. Then, I discuss a range of teaching and learning issues related to university mathematics with attention to the transition between school and university mathematics.

WHAT MAKES THE TEACHING OF MATHEMATICS AT UNIVERSITY LEVEL SPECIAL

There has always been a discussion amongst university mathematics teachers about mathematical content and appropriate teaching approaches. University teachers are interested in the history, epistemology and philosophy of mathematics and how these are related to mathematical instruction. Very often, communities of mathematicians are involved in the policy and curriculum development of mathematics education at school level and beyond (e.g., the Hellenic Mathematical Society in Greece or the Sociedade Brasileira de Matemática in Brazil). However, such engagement with policy and curriculum development is not always accompanied with empirical research on the teaching and learning of mathematics. In parallel, systematic empirical research in mathematics education, a rather new research field, was initiated and flourished initially in the context of school mathematics. In this context, theoretical perspectives and methodological approaches specific to the research in mathematics education developed. When the interest of empirical research expanded from school level to university level, theoretical and methodological tools that developed within research at school level were employed at more advanced level as well. A reasonable question in

this expansion is *what is special in the teaching and learning of mathematics at the university level in comparison to the school level?*

At the inaugural summary of the WG14 (University Mathematics Education) at the *CERME11* conference, group leaders (Nardi, González-Martin, Gueudet, Iannone & Winsløw, 2011) described the distinctiveness of UME through a range of characteristics:

> Firstly, the classic distinction between 'teacher' and 'researcher' does not always apply in UME as researchers in mathematics education in this area are often university-level teachers of mathematics themselves. In particular, there is a growing group of mathematicians specializing in research on mathematics education at university level, where advanced mathematical knowledge and experience is really an asset (if not a necessity). Secondly, mathematics education theories and research methods find new uses, and adaptations, at the university level. These adaptations are often quite radical as the post-compulsory educational context is different in many ways – the voluntary presence of students, the important role of mathematics as a service subject, the predominance of lecturing to large numbers of students, the absence of national programmes for university education, to mention but a few. In this sense UME is a distinct area of mathematics education research, not merely a mirror of mathematics education research at a more advanced educational level." (pp. 1923-1924)

Following the observation of Nardi and colleagues (2011), I would highlight that school teaching very often focuses on application of mathematics with less attention to proof and proving. At school level, mathematical facts are justified through perceptual and inductive arguments or mere reliance on formulae and application of these formulae. There are limited opportunities for proof and proving – for example in geometry – and abstraction – for example from arithmetic to algebra. In UME, we expect students to engage with mathematical theory and its axiomatic foundations; to prove mathematical arguments; to be attentive to definitions; and, to endorse the logical structure of mathematical theory. However, although such rigor is expected in courses for mathematics specialists, it is not so essential in courses for non-mathematics specialists. Mathematics courses for engineers or for economists, for example, might be more attentive to applications of mathematics, modelling and programming instead of the axiomatic principles of mathematical theory (Hitt & González-Martín, 2016). Thus, looking at the mathematical content at university level in comparison to school level, foci in relation to the balance between mathematical abstraction and applications of mathematical ideas varies.

As I mentioned earlier, mathematics courses at university level are offered in programmes for mathematics specialists as well as in programmes of non-mathematics disciplines – this is what Rasmussen, Marrongelle and Borba (2014) call *client disciplines*. Such disciplines might be in science (e.g. engineering, physics, biology, etc.) or in social science (e.g. economics, psychology, education including teacher education, etc.). For simplicity, in this paper I use STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) and STEMSS when Social Science subjects such as Economics or (Teacher) Education are included. As Artigue (2016) has noted, much research on UME focuses on the needs of pure mathematicians and mathematics teachers with less attention to the needs of students in other disciplines. Recently there is an increase of attention to these client disciplines in mathematics education (Biza, González-Martín & Pinto, under review; Rasmussen et al., 2014; Hitt & González-Martín, 2016).

Focusing now on the teachers at UME, as Nardi et al. (2011) mentioned in the quotation at the beginning of this section, the distinction between 'researcher' and 'teacher' is not as clear as at school level. Very often, UME researcher are teachers themselves or teachers at university are researchers in mathematics or mathematics education. Very often, there are tensions and productive synergies between the different communities (Nardi, 2008), but undoubtedly the boundaries between the communities are not as clear as at school level mathematics education.

Some studies look at mathematicians' research practices and how these practices are reflected in their teaching. Misfeldt and Johansen (2015), for example, interviewed 13 mathematicians

regarding their approaches to selecting mathematical problems to work with in their research. Their findings identify a variation of criteria that affect mathematicians' choices including "personal interest, continuity with previous work, the danger of getting stuck, and how fellow mathematicians will respond to the findings" (p. 357). The authors see potentialities in using these criteria in facilitating (and getting more insight into) students' engagement with problem solving. Lockwood, Ellis and Lynch (2016) conducted a study on how mathematicians choose and use examples to prove a conjecture through a survey of 220 and proof-based interviews with 19 mathematicians. The analysis identified key traits in mathematicians' work with examples which suggest "four pedagogical implications for helping students more effectively leverage examples in their proof activity: [d]o not discourage or denigrate example use", although examples "do not constitute proof"; "[e]ncourage and foster deliberate awareness and discussion of example use"; "[e]xplicitly highlight example use in proving"; and, after seeing mathematicians back-and-forth, non-linear, full of struggles proof activity, "shift norms about what it means to be a competent or successful prover" (pp. 193-194). Furthermore, recent studies have raised the question of how and to what extent lecturers' research background influence their teaching practices (Mali & Petropoulou, 2017; Mali, Petropoulou, Biza & Hewitt, 2021; Petropoulou, Jaworski, Potari & Zachariades, 2020). In observations of research mathematicians' teaching approaches in mathematics departments in Greece and the UK, Mali and Petropoulou (2017) identified mathematicians' practices concerning the extension of students' mathematical thinking. Such practices include: interpreting a task; asking a challenging question; transforming a mathematical representation; formulating a conjecture; and, generalising, justifying, and providing mathematical heuristics, through the use of graphical representations, challenging questions and, different types of proof. Such practices are attributed to mathematicians' own mathematical research. Furthermore, some studies have observed that research mathematicians' and educators' teaching approaches differ when they teach mathematics at university level. For example, Cooper and Zaslavsky (2017) studied the co-teaching of a mathematician and a mathematics educator in an undergraduate course for prospective mathematics teachers. They found that the mathematician's focus was on the "correctness" of the proof, whereas the mathematics educator was more attentive to the person behind the proof, and to pedagogical aspects of proof and proving. Overall, the aforementioned studies put forward the conjecture that teacher education can learn from mathematicians' research and teaching practices and that teachers' research background influences mathematics teaching at university level.

I would conclude this section by returning to the question: *what is special in the teaching and learning of mathematics at the university level in comparison to the school level?* UME is quite different in relation to school mathematics in terms of mathematical content and mathematical practices; in terms of the students who are involved, their needs and their aspirations; and, in terms of the teachers, their engagement with research, their background and their expectations from the students.

RECENT RESEARCH PROGRAMMES IN UME

In this section, I focus on recent research programmes and the perspectives they bring to university mathematics and its teaching and learning. I will start from a quotation from Nardi (2017) in her plenary lecture in *CERME10* with title: "From advanced mathematical thinking to university mathematics education: A story of emancipation and enrichment". In this plenary talk, Nardi mentions that between CERME1 (1998) and CERME9 (2015) there were "approximately two hundred and fifty papers with their focus directly, or a little less so, on the teaching and learning of mathematics at university level, starting from about a dozen in CERME1 and rising to several dozens in CERME9" (p. 10) and she presents a story:

> of gradual emancipation from a relatively limited initial focus on cognitive aspects of the student learning experience in university mathematics to the grander vista of issues – also inclusive of

> pedagogical, institutional, affective and social issues – that studies presented at CERME nowadays address. (p. 10)

As she adds in the conclusions:

> "Most of my examples have aimed to illustrate the benefits that emancipation from an individualistic, narrowly psychological, cognitive perspective has brought to UME research." (p. 22)

I elaborate this shift from individualistic cognitive perspectives to a discursive contextual perspective through an example from my own research. In earlier stages of my work (Biza, Christou, & Zachariades 2008; Biza & Zachariades, 2010), I studied upper secondary and university students' perspectives on the tangent line to the function graph, especially in relation to students' experiences with tangent lines across mathematical domains (Geometry, Algebra, Calculus and Mathematical Analysis). The analysis of student responses identified three clusters of perspectives: *analytical local*, *geometrical global* and *intermediate*. The analytical local perspective is closer to how tangents are used in Calculus and Mathematical Analysis, where a tangent is defined at a point through derivatives or limiting positions of secants. Students with this perspective typically accept a line as a tangent even if it has many points in common with the graph. The geometrical global perspective is closer to how tangents are used in geometry. Students with this perspective typically do not accept a tangent line that has more than one point in common with the graph. Intermediate perspectives are between the other two: for example, students employ properties from geometry in a local part of the graph (e.g., the tangent line should have one point in common with the curve at a neighbourhood of the tangency point). These three perspectives were identified through the analysis of students' written responses to a questionnaire. This analysis focussed on whether the responses were correct or not.

Recently, after noticing the broad spectrum in how students use and argue about tangents, the subtlety of which is not reflected in the three aforementioned perspectives, I returned to a different analysis of these responses (Biza, 2021). For example, for a student who responded that "a line ε is not a tangent to a function graph because this line intersects the function graph at another point", the response had been characterised as evidencing geometrical global perspective. However, the word "intersect" in the response might have been used with different meanings: "intersect" may mean that a line and a graph have a common point in which the line cuts across the graph; or, it may mean that the line and the graph have a common point regardless of whether the line cuts across the graph or not (e.g., the line might be a tangent to the graph at this point). Different meanings of "intersecting" could affect the responses in other parts of the questionnaire. Such differences could not be captured by looking only at whether a student response, or justification, is correct or not. Furthermore, in the three aforementioned perspectives, I could see elements of what students had learned in previous years intertwined together. However, my previous analysis did not account for the subtlety of the effect that these previous experiences had on students' responses about tangents. In order to gain insight into the subtlety of students' responses I employed a discursive approach (Sfard, 2008) and introduced the notion of the *discursive footprint* (Biza, 2021). The discursive footprint captures students' curricular experiences of tangents and comprises word use around tangents, narratives of what a tangent line is, visual mediators related to tangents and routines employed to determine and substantiate whether a line is tangent to a certain curve. In order to trace the discursive footprint of tangents in the curriculum, I reviewed how tangents are presented in the school textbooks student participants had been taught with in the past and before participating in the study. Then, I identified manifestations of this discursive footprint in students' responses. My approach in the analysis shifted from an individualistic cognitive approach that was interested in students' perspectives on the tangent line to a discursive approach in which students' responses were seen embedded in the curriculum discourse of tangents. The discursive approach shed light in the variation of student responses. For example, even if students do not provide a mathematically

accurate response, the analysis provides evidence that some learning did take place. Such learning can be seen through the lens of students' previous experiences.

I draw now on another example from research in which teaching and learning of mathematics is seen embedded in certain institutional practices. Winsløw, Barquero, De Vleeschouwer and Hardy (2014) drew on the Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard 2003) to analyse institutional practices of teaching and learning mathematics such as dual vector spaces in Linear Algebra, limits of functions in Analysis and modelling of population growth. In their study, institutional context justified the mathematical praxeologies that include relevant tasks, appropriate solutions (techniques) for such tasks; the justifications of such solutions (technologies); and the theoretical rationale (theories) behind such solutions. According to the researchers, it is not expected to see the same approaches to the teaching of the same mathematical content to mathematicians, to engineers or to prospective teachers, because teaching to each one of these groups justifies different praxeologies. However, very often, teaching brings the praxeologies of the teacher, the taught curriculum and the expectations of the students in conflict. Recent research acknowledges such conflicts and invests more effort in addressing them.

In relation to the teaching of mathematics, recent studies consider mathematical teaching as a communication act with attention to mathematical and pedagogical discourses. Viirman (2014, 2015), for example, considered university mathematics teaching as a highly situated discursive practice. Through the lens of Sfard's discursive framework (2008), he studied the teaching practices of seven mathematics teachers on the topic of functions. In Viirman (2014), he focused on the mathematical discourse and offered a categorization of the construction and substantiation routines used by the teachers. Later, in Viirman (2015), a more refined analysis indicated that, although teachers' mathematical discourse has similarities to each other regarding the word use and visual mediators, their didactical discourse had different routines. The routines of participants' didactical discourse were categorized as explanation, motivation, and question posing routines. Within these general categories, a number of different sub-categories of routines were found, each used in different ways and to different extent by different teachers. According to Viirman (2015), this classification of routines, although not meant to be complete and developed in only a single content context, can also be useful in the investigation of teaching other mathematical topics.

In another example, Park (2015) analysed the teaching of derivative in calculus courses by seeing the features of three teachers' classroom discourse on the derivative in relation to word use, gestures and the use of different visual mediators (symbolic, algebraic, and graphical), emphasizing the connection between graphical and symbolic representations, and the transitions between a point-specific and an interval view of the derivative. The results indicated that the use of words and visuals were consistently reflected in the teachers' routines and endorsed narratives. Moreover, these three teachers seemed to assume that a point-specific and an interval view of the derivative are clear to their students without making explicit reference to these views. However, students did not see the difference. This observation indicated a disconnection between the endorsed narrative of the teacher and the students' interpretation of what teacher is saying (Park, 2015).

Furthermore, in the discussion around how university mathematics teachers communicate mathematical ideas, Weinberg, Fukawa-Connelly and Wiesner (2015) described teachers' gestures and how these contribute to opportunities to communicate mathematical ideas in an abstract algebra lecture. Gestures, and specifically teacher use of the hand and fingers to point during undergraduate mathematics lectures, is also the focus of a study from Hare and Sinclair (2015), who observed a teacher in a third-year Group Theory lecture. Results suggested that pointing seems to act as a significant interface between speech and written text on the board. The authors argue that gestures are important components of communication as they bring "mathematical objects into being", relate "these objects to each other", and connect "the spoken with the written and drawn" (Hare & Sinclair, 2015, p. 33).

As we can see in the examples of the studies I reviewed in this section, including the example from my research, investigations of university mathematics teaching and learning has moved beyond the mathematical content with attention to the context in which teaching and learning take place. Such studies adopt institutional, sociocultural and discursive perspectives that have the affordances to address the complexity of university mathematics teaching and learning.

Before closing this section, I will return to Nardi's (2017) plenary with an observation of how teaching at university level has changed in the recent decades. Teaching at university level used to be with large cohorts of students sitting at a distance from the teacher in lecture rooms – the familiar image of large amphitheatres full of students attending the lecture is often invoked when we think about teaching at university level. Lecturing large cohorts is still the primary mode of teaching especially in the first years of university. However, there are many other modes of teaching in nowadays, as Nardi (2017) describes:

> As university lecturers today – in mathematics and in other disciplines – we lecture. But we also do much more: we coordinate seminars, we conduct individual or small group tutorials, we run workshops and drop-in clinics, we supervise dissertations, we advise students on academic and on pastoral matters and we assess students in a variety of ways (all the way from closed-book examinations to mini-projects and oral presentations). Our professional worlds are far from monotonous. In fact, they require us to be quite versatile. (p. 10)

TEACHING AND LEARNING PROBLEMS IN THE TRANSITION BETWEEN SCHOOL AND UNIVERSITY

Since the 90s, we can find several studies that discuss issues related to the transition from school to university mathematics (e.g, Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz & Rasmussen, 2016; Corriveau, 2017; Gueudet, Bosch, DiSessa, Kwon & Verschaffel, 2016; Gueudet, 2008; Hochmuth, Broley & Nardi, 2021; Thomas et al., 2015). Such studies identify tensions in relation to "(dis)connections between mathematics and between students' attitudes, practices, and performances at school and tertiary level" as well as in relation to "the transition to abstraction and formal mathematical thinking" (Biza et al., 2016, p. 16). Hochmuth et al. (2021), in a review of studies that were presented in *INDRUM 2016* and *INDRUM2018*, discuss three types of transition: from school to university; within and across university courses and from university to the workplace. In this section, I will address issues related to the first type of transition and I will close the section with some thoughts in relation to the other two types.

Issues related to transition from school to university include "teaching styles, instructional approaches, studying and learning strategies as well as views about mathematics, specific mathematical concepts, mathematical knowledge, and goals of learning" (Biza et al., 2016, p. 16). In relation to specific mathematical concepts, very often, mathematical concepts that are introduced at school level are revisited again at university level. A very common example of such concept is the concept of *limits* of functions or sequences. Students are introduced to limits at school level with attention to applications of limits. In most of the cases, the formal definition (ε-δ definition) is not provided or, if it is provided, it is not questioned (Hochmuth et al., 2021). The attention is mostly on techniques related to calculation of limits and on the algebra of limits. When the students enter the university, at least for mathematical studies, the concept of limits appears again in courses of Calculus, Real Analysis, etc.. In principle, the concept is revisited. However, in practice, the concept is introduced from scratch without attention to what students have learned in the past. As a result, teaching aims towards a theoretically robust introduction of the concept, while students are not offered the opportunity to connect and balance what they have learned at school with the new knowledge introduced at university level. Such lack of connection generates problems in the learning of limits. Similar issues we see with other concepts especially from Calculus and Algebra, but also from Geometry and Number Theory. Such disconnection between school and university mathematics leads to the observation that very often university studies are not seen as a

continuation, extension or generalisation of what was previously studied at school level; instead, university studies are seen as a new stage of learning disconnected from students' previous experiences (Biza et al., 2016). Such disconnection generates raptures and potentially conflicts in students' learning experiences that obstruct students' transition to university studies.

Another issue that impacts students' transition from school to university is the differences between mathematical practices. School mathematics approaches very often focus on the application of procedures and less on the questioning or (and reasoning about) these procedures. Students at the university level are asked to engage with mathematical practices which are new to them. Very often, they cannot see the purpose of engaging with these practices. Returning to the concept of limits, for example, students cannot see the purpose of using the ε-δ definition to prove that the limit of $\sqrt{x}$ is 0, when x tends to 0. It is easy for them to calculate $\sqrt{0}$ without questioning whether the function is continuous or not and whether this is a legitimate way to find the limit – a practice that was perfectly acceptable at school level.

In addition, research often investigates whether students are prepared for the type of argumentation that is required at university level. Kempen and Biehler (2014), for example, investigated university newcomers' argumentation skills on tasks related to elementary number theory. They found that the students have not developed at school level the argumentation skills needed for these tasks. The authors suggest the need for introductory courses at the beginning of university studies that will introduce the students to basic skills on proving and arguing. In some educational systems such courses are called bridging courses (Kempen & Biehler, 2014). They aim to facilitate a smooth transition to university studies, to reduce withdrawals and to increase graduation rates (e.g. Bausch et al. 2014; Duah, Croft & Inglis 2014).

Furthermore, recent studies shift the attention to social aspects of the transition from school to university. Such aspects regard changes in students' lives. For example, students very often in the first year of their university studies, find themselves away from family and friends; they have to live in a different city or country; or, they have to live alone or share accommodation with others. Also, they find themselves in an educational environment that is less guided, an environment that requires individual learning approaches that they are not prepared for. Such social aspect of the transition is relevant to any subject, not just mathematics. In relation to mathematical studies, however, institutions are more attentive to issues related to mathematics as a subject and less to changes in students' social environment. Very often students cannot overcome the challenges they have with mathematics because they do not have the support they need from peers and staff (Bampili, Zachariades & Sakonidis, 2017, 2019). As a response to such observations, multi-dimensional approaches have been introduced in some universities to enhance the experience of first year mathematics students. One example is from Engelbrecht and Harding (2015) who propose an introductory programme that addresses five key aspects related to students' transition to university studies: mathematical preparedness; social transition; learning style; support; and, conceptual understanding. As the authors argue, students need to change their way of arguing about and working with mathematics in a new social environment.

Another aspect that should be considered in students' transition from school to university mathematics is the role of courses that are usually located between compulsory education and university studies. Usually, these courses are offered at post-16 education and they are either part of the upper secondary education (high school) or based in individual institutions (e.g. colleges) or part of universities (e.g. foundation courses, pre-admission courses). The aim of these courses is twofold: to prepare the students for their university studies and to train the students for the university entrance examinations. These two aims would appear complementary: students who succeed in those examinations are better prepared for their university studies. However, in practice, students' experiences of these courses are not necessarily what they need for their university

studies. Preparation towards the examinations does not prepare mathematics students for the rigor, reasoning and abstraction they need for their studies. This preparation is not appropriate for candidates in non-mathematics disciplines. As a result, these courses end up serving the aim of preparing students for the selection process through the university entrance examinations, but not for their university studies. One example of mathematical area that has been discussed extensively in the literature in relation to its role in students' selection/preparation is Calculus (Biza et al., under review). Törner et al. (2014), reviewed the educational system of seven countries (Belgium, Cyprus, France, Germany, Greece, Italy and UK-England) and found that the current approach to Calculus in schools is more intuitive, with less or no proofs and more emphasis on student engagement, problem-solving, applications, modelling and the gradual introduction/use of digital technologies. Calculus is compulsory for students who aspire to pursue STEMSS-related studies and it is included in their university entrance examinations. Furthermore, teaching approaches are mainly procedural oriented with focus on student preparation for the examinations. Calculus notions are not introduced through their formal definitions. Such informal introduction, "especially of the concept of limit, does not seem to encourage the progression to the formal definitions later at university" (Törner et al., 2014, p. 558). In the USA, on the other hand, 20% of students take Calculus at high school level (Bressoud, 2020) while most of the tertiary level institutions offer a series of Calculus courses (*Calculus I, II* and *III*). Over 50% of the students who take *Calculus I* have also taken a Calculus course in secondary school (Ellis et al., 2014). In comparison to secondary school, Calculus I, II and III courses are usually more rigorous in the discussion of notions such as limits, graphical interpretations, definitions, etc. and applications of these notions. Proofs, however, are typically not part of these courses (Ellis et al., 2014). Tertiary level calculus serves as a prerequisite for STEMSS studies and selection takes place during the first year of university studies. In this sense, Calculus courses are very essential in students' progression towards further studies in STEMSS (Bressoud, 2020).

Before closing, I would like to mention briefly the other types of transition Hochmuth et al. (2021) discuss: transition within and across university courses and from university to the workplace. In relation to the transition with and across university courses, research has identified tensions in the transition between mathematical domains, such as from Calculus to Real (or Mathematical) Analysis (e.g., Kondratieva and Winsløw, 2018) or from single variable Calculus to multivariable Calculus (Brandes & Hardy, 2018). In relation to the transition from university to the workplace, there is an emerging body of research on the role of mathematical courses in the preparation of professionals. Some of these studies investigate what non-mathematics disciplines and professionals need in terms of mathematical knowledge and whether the mathematical courses satisfy these needs. For example, studies in engineering have shown the low level of calculus techniques, as well as details about these techniques, required in that discipline (Faulkner, Johnson-Glauch, San Choi & Herman, 2020; González-Martín, 2021; González-Martín & Hernandes-Gomes, 2020; González-Martín, Gueudet, Barquero & Romo Vázquez, 2021).

Especially for mathematics teachers, although there is the assumption that a good mathematical background is necessary for high quality teaching, research has reported disconnection between teachers' undergraduate studies in mathematics and what they use in their teaching profession (Even, 2011). Specifically, teachers identify some aspects in which their undergraduate or college studies have influenced their teaching such as knowledge on specific topics, problem solving, use of mathematics in other disciplines and the role of intuition in doing mathematics (e.g., Adler, et al., 2014; Even, 2011; Zazkis & Leikin, 2010). Also, teachers declared the contribution these studies had in their confidence and their understanding of students' difficulties through their own experience as students (e.g., Barton & Paterson, 2009; Even, 2011; Zazkis & Leikin, 2010). Although in some studies there are clear testimonials from teachers on how their engagement with the mathematical content contributed to the quality of their teaching (e.g., Barton & Paterson,

2009), in other studies this connection is not evident and teachers expressed difficulty to identify how this content is used in their teaching (Wasserman, Weber, Villanueva & Mejia-Ramos, 2018; Winsløw & Grønbæk, 2014; Zazkis & Leikin, 2010). It would appear that there are diverse views on how these undergraduate and collegial courses influence teachers.

I conclude with the observation that university and school are different institutions, governed by different rules, principles and discourses (Gueudet et al., 2016). Such new discourses may excite or may alienate newcomers to university or to the teaching profession. Acknowledging explicitly these differences and making connections between these discourses is the route with the highest potential in addressing students' needs in their transition from school to university mathematics.

References

Adler, J., Hossain, S., Stevenson, M., Clarke, J., Archer, R., & Grantham, B. (2014). Mathematics for teaching and deep subject knowledge: Voices of mathematics enhancement course students in England. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*, 129-148.

Artigue, M. (2016). Mathematics education research at university level: achievements and challenges. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 11–27). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

Bampili, A.-C., Zachariades, T., & Sakonidis, C. (2019). The transition from high school to university mathematics: The effect of institutional issues on students' initiation into a new practice of studying mathematics. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2418-2425). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Bampili, A.-C., Zachariades, T., & Sakonidis, C. (2017). The transition from high school to university mathematics: a multidimensional process. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1985–1992). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education & ERME.

fBarton, B., & Paterson, J. (2013). Does Mathematics Enhance Teaching? Does Summer Hiking Tone Winter Thighs?. *Canadian Journal Of Science, Mathematics & Technology Education*, *13*(2), 198-212.

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., et al. (2014). *Mathematische Vor-und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven.* Wiesbaden: Springer.

Biza, I. (2021). The discursive footprint of learning across mathematical domains: The case of the tangent line. *Journal of Mathematical Behavior, 61*. Online First.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 53-70.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-art and Looking Ahead.* ICME-13 Topical Surveys, Springer International Publishing AG Switzerland. Available at http://www.springer.com/gp/book/9783319418131.

Biza, I., González-Martín, A. S., & Pinto, A. (under Review). 'Scaffolding' or 'filtering': A review of studies on the diverse role of calculus courses in the preparation of students, professionals and teachers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education.*

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(4), 218-229.

Brandes, H., Hardy, N. (2018). From single to multi-variable Calculus: A transition?. *INDRUM 2018 Proceedings,* pp. 477-486.

Bressoud, D. M. (2020, Online First). The strange role of calculus in the United States. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01188-0

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury & M. Caillot (Eds.), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81– 104). Paris: Faber.

Cooper, J., & Zaslavsky, O. (2017). A mathematics educator and a mathematician co-teaching mathematics – Affordances for teacher education. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 1945-1952). Dublin, Ireland.

Corriveau, C. (2017). Secondary-to-tertiary comparison through the lens of ways of doing mathematics in relation to functions: a study in collaboration with teachers. *Educational Studies in Mathematics, 94*(2), 139-160.

Duah, F., Croft, T., & Inglis, M. (2014). Can peer assisted learning be effective in undergraduate mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 45 (4), 552–565.

Ellis, J., Kelton, M., & Rasmussen, C. (2014). Student perceptions of pedagogy and associated persistence in calculus. *ZDM - Mathematics Education, 46*(4), 661–673.

Engelbrecht, J., & Harding, A. (2015). Interventions to Improve teaching and learning mathematics in first year courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(7), 1046–1060.

Even, R. (2011). The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: practitioners' views. *ZDM Mathematics Education*, *43*(6), 941-950.

Faulkner, B., Johnson-Glauch, N., San Choi, D., & Herman, G. L. (2020). When am I ever going to use this? An investigation of the calculus content of core engineering courses. *Journal of Engineering Education, 109*(3), 402–423.

González-Martín, A. S. (2021). $\boxed{V_B - V_A = \int_A^B f(x)dx}$. The use of integrals in engineering programmes: a praxeological analysis of textbooks and teaching practices in Strength of Materials and Electricity and Magnetism courses. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7*(2), 211-234.

González-Martín, A.S., Gueudet, G., Barquero, B., & Romo Vázquez, A. (2021). Mathematics and other disciplines, and the role of modelling: advances and challenges. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi & C. Winsløw (Eds.), *Research and Development in University Mathematics Education* (pp. 169-189). Routledge ERME Series: New Perspectives on Research in Mathematics Education.

González-Martín, A. S., & Hernandes-Gomes, G. (2020). Mathematics in engineering programs: what teachers with different academic and professional backgrounds bring to the table. An institutional analysis. *Research in Mathematics Education, 22*(1), 67–86.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237–254.

Gueudet, G., Bosch, M., DiSessa, A. A., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. Springer Open

Hare, A., & Sinclair, N. (2015). Pointing in an undergraduate abstract algebra lecture: Interface between speaking and writing. In K. Beswick, T. Muir, T., & J. Wells (Eds.), *Proceedings of PME39* (Vol. 3, pp. 33–40). Hobart, Australia: PME.

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2016). Generalization, covariation, functions, and Calculus. In A. Gutiérrez, G. L. Leder & P. Boero (Eds.), *Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (pp. 3–38). Rotterdam: Sense Publishers.

Hochmuth, R., Broley, L., & Nardi, E. (2021). Transition to, across and beyond universities. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi & C. Winsløw (Eds.), Research and Development in University Mathematics Education (pp. 193-215). Routledge ERME Series: New Perspectives on Research in Mathematics Education.

Holton, D. A. (Ed.). (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study.* Dordrecht,: Kluwer Academic Publishers.

Kempen, L., & Biehler, R. (2014). The quality of argumentations of first-year pre-service teachers. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the joint meeting of PME38 and PME-NA36* (Vol. 3, pp. 425–432). Vancouver, Canada: PME.

Kondratieva, M., & Winsløw, C. (2018). Klein's Plan B in the Early Teaching of Analysis: Two Theoretical Cases of Exploring Mathematical Links. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 119-138.

Lockwood, E., Ellis, A., & Lynch, A. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of research in undergraduate mathematics education, 2*(2), 165.

Mali, A., Petropoulou, G. (2017). Characterising undergraduate mathematics teaching across settings and countries: An analytical framework. *Nordic Studies in Mathematics Education, 22*(4), 23-42.

Mali, A., Petropoulou, G., Biza, I., & Hewitt, D. (2021).The research mathematicians in the classroom: How their practice has potential to foster student horizon. In M. Goos & K. Beswick (Eds.),*Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges,*(pp. 63-82). New York: Springer.

Misfeldt, M., & Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Educational Studies of Mathematics, 89,* 357–373.

Nardi, E. (2017). From advanced mathematical thinking to university mathematics education: A story of emancipation and enrichment. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 9-30). Dublin, Ireland.

Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level.* New York: Springer.

Nardi, González-Martin, Gueudet, Iannone & Winsløw (2011). Introduction to the papers of WG14: University mathematics education. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 1923-1927).

Park, J. (2015). Is the derivative to function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 233–250.

Petropoulou, G., Jaworski, B., Potari, D., & Zachariades, T. (2020). Undergraduate Mathematics Teaching in First Year Lectures: Can It Be Responsive to Student Learning Needs? *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 6*(3), 347–374.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M.C. (2014) Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*, 507–515.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing.* New York, NY: Cambridge University Press.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thomas, M. O. J., de Freitas Druck, I., Huillet, D., Ju, M.-K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education,* 265–284.

Törner, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM – Mathematics Education, 46*(4), 549-560.

Viirman, O. (2014). The functions of function discourse: University mathematics teaching from a commognitive standpoint. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(4),512–527.

Viirman, O. (2015). Explanation, motivation and question posing routines in university mathematics teachers' pedagogical discourse: A commognitive analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(8), 1165–1181.

Wasserman, N., Weber, K., Villanueva, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2018). Mathematics teachers' views about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 74-89.

Weinberg, A., Fukawa-Connelly, T., & Wiesner, E. (2015). Characterizing instructor gestures in a lecture in a proof-based mathematics class. *Educational Studies in Mathematics, 90*(3), 233–258.

Winsløw, C., Barquero, B., De Vleeschouwer, M., & Hardy, N. (2014). An institutional approach to university mathematics education: From dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 95–111.

Winsløw, C., & Grønbæk, C. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(1), 59–86.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 263-281.

AGENDA DE INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

Research Agenda for the teaching and learning Mathematics in the Universitary level

Camacho Machín, M.

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo, se presenta una revisión de las diferentes investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Universidad, especialmente en el marco de los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, con el propósito de establecer una propuesta de agenda de investigación que pueda servir de guía para los diferentes colectivos que se dedican a este campo. Después de analizar una serie de factores que hemos considerado relevantes para nuestro objetivo, se elabora una lista de propuestas de investigación, que no pretende ser exhaustiva, pero que pudiera servir de ayuda para nuestro campo de interés.

Palabras clave: *Matemáticas universitarias, enseñanza, aprendizaje, agenda de investigación.*

Abstract

In this paper, we present a review of the different research on the teaching and learning of mathematics at the University, especially within the framework of the Symposia of the Spanish Society for Research in Mathematics Education, with the purpose of establishing a proposal for a research agenda that can serve as a guide for the different groups involved in this field. After analyzing a series of factors that we have considered relevant to our objective, a list of research topics are drawn up, which is not intended to be exhaustive, but which could be of help to our field of interest.

Keywords: *University mathematics Education*, *teaching, learning, research agenda*

INTRODUCCIÓN

Han pasado diez años desde que se llevó a cabo el Seminario *La investigación en Educación Matemática en diferentes niveles* (Ciudad Real, 2011- XV Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática). En dicho Seminario, en la ponencia llevó por título *La Investigación en Didáctica de las Matemáticas en Bachillerato y Universidad* se discutió parcialmente el tema de investigación que se presenta ahora en este Simposio una década después. En (Camacho, 2011) se desarrolló un análisis de la investigación realizada en los niveles educativos mencionados, tanto en el nivel universitario como en los últimos cursos de bachillerato en los ámbitos internacional y nacional. En una primera parte de ese trabajo, se revisaron las publicaciones reseñadas en Gutiérrez

Camacho Machín, M. (2021). Agenda de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 33 – 48). Valencia: SEIEM.

y Boero (2006) y Lester (2007) en el ámbito internacional y, para el ámbito nacional, se analizaron las publicaciones de los trabajos presentados en los catorce simposios anteriores de la SEIEM, así como las Tesis Doctorales defendidas entre nuestro país hasta ese momento, que se relacionaban con la enseñanza y aprendizaje en ambos niveles educativos. En dicho seminario se pudo constatar que, a partir de la revisión realizada, la gran mayoría de las treinta comunicaciones/ponencias que mostraban investigaciones situadas en la universidad, se correspondían al campo de investigación de Didáctica del Análisis Matemático (19/30) y en particular en torno a los conceptos de límite, derivada e integral. Además, las Tesis Doctorales que se revisaron -un total de veinte- casi todas eran también sobre dichos conceptos, salvo algunas centradas en la modelización matemática. Como conclusiones, en dicho trabajo se señala, entre otras cosas y refiriéndose al análisis desarrollado, que

> ……..el camino recorrido por la investigación en el bachillerato y universidad no ha seguido un camino paralelo a las necesidades del sistema educativo. La mayoría de investigaciones nos suministran resultados que confirman resultado obtenidos en otras o encuentran pequeños avances pero una gran parte de ellos deben ser incorporados a la enseñanza efectiva, buscando puentes que hagan visibles esas pequeñas aportaciones (p. 216).

y se añade la importancia de "promover la elaboración de materiales curriculares que permitan implementar esos avances" y se propone, para concluir, la necesidad de poner un mayor énfasis en la conexión entre los diferentes ámbitos, indicándose que

> …..deben crearse cuanto antes unas nuevas agendas de investigación en las que se incorporen nuevos aspectos que investigar acordes con la evolución de las investigaciones desarrolladas a nivel internacional (p. 216)

La situación ha cambiado bastante, y en la actualidad, esos cambios han venido implicados, sobre todo en el ámbito internacional por varios elementos importantes tales como el cambio de planes de estudio avalados por el nuevo espacio de educación superior (Bolonia), la ampliación de los ámbitos de investigación, anteriormente centradas en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo y del Análisis Matemático. También se ha podido constatar un aumento de experimentos de enseñanza en la Universidad. Por otra parte, el trabajo de investigación desarrollado ha provocado un fortalecimiento de los diferentes marcos teóricos y conceptuales. Otro elemento importante que podrá contribuir a la elaboración de una agenda de investigación viene implicado por la ampliación de los ámbitos de difusión de las diversas investigaciones del campo. Estas y otras circunstancias implican la necesidad de retomar y actualizar, ahora más específicamente en la universidad, la evolución de este campo de investigación tanto en el ámbito internacional como en las adaptaciones e interpretaciones que se están haciendo en nuestro país. Al igual que en el aquel entonces, nos centraremos principalmente al trabajo desarrollado por la Sociedad Española de Investigación Matemática (SEIEM) y haremos una mirada al ámbito internacional que surge de la creación de un nuevo foro internacional que surgió a partir de la organización de los CERME.

En esta ponencia, a la vista una revisión general de la literatura actual, se tratará de configurar una primera aproximación para la elaboración de una posible agenda de investigación para los próximos años que permita avanzar en una consolidación mayor de este campo de investigación en nuestro país.

Algunas de las preguntas que motivarán este trabajo, sin pretender responder aquí a todas, podrían ser las siguientes ¿Cuáles son los problemas de aprendizaje de las matemáticas que se pueden encontrar en los diferentes estudios universitarios? ¿Son los mismos que todas las ramas de las Ciencias y en particular son los mismos que en el Grado de Matemáticas? ¿Varían este tipo de problemas en el campo de la ingeniería? ¿Los programas actuales tienen una concepción diferente de las Matemáticas que los anteriores? ¿los marcos teóricos y conceptuales que se emplean en las investigaciones realizadas hasta ahora son consistentes con la investigación en estos niveles

educativos? ¿responden los experimentos de enseñanza que se van realizando a las diferentes demandas que se necesitan?

El objetivo de este trabajo consiste en realizar una primera reflexión que nos ayude a establecer una agenda de investigación para los próximos años que permita avanzar en una consolidación mayor del campo de investigación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias en nuestro país (UME)[1]y que surja principalmente de una revisión sobre las aportaciones presentadas en los Simposios de la SEIEM, congresos y publicaciones internacionales.

Abordaremos a continuación algunos de estos aspectos mencionados. Después de hacer una revisión de los diferentes trabajos en este campo de investigación que han ocupado el espacio de los últimos ocho Simposios de la SEIEM, se hablará de la ampliación de los ámbitos de difusión a nivel internacional, para mostrar como consecuencia de esto el fortalecimiento de los diferentes marcos teóricos y conceptuales, así como la diversificación en el tipo de investigaciones desarrolladas, para finalizar con una tentativa agenda de investigación.

Conviene señalar que en este trabajo al igual que en el anterior realizado en el año 2011, pese a que los profesores de Matemáticas se forman en la Universidad, no estamos considerando las investigaciones en formación de profesores, tanto de Educación Primaria como Educación Secundaria, como objeto de estudio de lo que denominamos investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas universitarias (UME) pese a que obviamente estos se forman en la Universidad.

LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA UNIVERSITARIA EN LA SEIEM

En este apartado, se desarrollará la revisión de las diferentes comunicaciones y pósteres que han sido presentados en los Simposios de la SEIEM desde el año 2011 hasta el último celebrado en 2019. Creemos que varias de esas comunicaciones derivan en la presentación de Tesis Doctorales, por lo que consideramos también esos trabajos de Tesis como indicadores del tipo de investigación que se ha venido realizando en estos últimos años. Es evidente, que casi con toda seguridad, nuestra revisión no es del todo completa, sobre todo por la fuente que ha sido utilizada que es principalmente los materiales a los que se tiene acceso mediante la página web de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

En los Anexos 1, 2 y 3 se han incluido, agrupadas por año las referencias bibliográficas de las comunicaciones, los pósteres y las Tesis Doctorales, respectivamente.

Comunicaciones y Pósteres

El análisis realizado de las Actas de los diferentes Simposios de la SEIEM, llevó a desarrollar la revisión de un total de veintiséis comunicaciones cuyo ámbito de trabajo se refiere a estudios de matemáticas universitarias. Se observó que el conjunto de trabajos presentados incorporan temas más diversificados que los que se encontraron en la revisión anterior (Camacho, 2011), tanto por los participantes en las diferentes investigaciones (titulaciones) como en los temas y tópico tratados.

Se han analizado también los veintitrés pósteres presentados en los Simposios a partir del año 2015. También tan diversificados como las comunicaciones, principalmente si se tiene en cuenta las titulaciones de los participantes. Hemos optado por agrupar los trabajos revisados en torno, a los temas o tópicos principalmente tratados. De esta manera, consideramos un primer grupo de trabajos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del Álgebra y Números, el segundo grupo, al Análisis Matemático y la Modelización, un tercer grupo que trata de probabilidad y estadística

[1] Utilizaremos en alguna ocasión el término internacionalmente aceptado de UME (University Mathematics Education)

(principalmente estadística) y finalmente un grupo de comunicaciones y pósteres sobre temas variados Geometría, aspectos afectivos, resolución de problemas, la transición del Bachillerato a la Universidad, el aprendizaje de la prueba.

La Tabla 1 resume el número de trabajos presentados en torno a la clasificación que se ha hecho. Se incorpora entre paréntesis cuáles son los trabajos que hemos considerado en cada uno de los tópicos.

	2011-2014	**2015-2019**		**Total**	
	C	**C**	**P**	**C**	**P**
Álgebra y Números	4 (C4,11,12,16)	3 (C20,21,22)	4 (P1,3,9,10)	7	4
Análisis y Modelización	3 (C3,10,14)	1 (C18)	3 (P12,13,19)	4	3
Probabilidad y Estadística	3 (C5,9,15))	3 (C19, 23,24)	7 (P4,6,7,18,20,21,22)	6	7
Aspectos afectivos, prueba, Geometría, Transición, RP	6 (C1,2,6,7,8,13)	3 (C17, 25,26)	9 (P2,5,8,11,14,15,16,17,23)	9	9
Totales	**16**	**10**	**23**	**26**	**23**

Tabla 1. Comunicaciones y pósteres presentados en los Simposios de la SEIEM relacionados con las Matemáticas Universitarias

Tesis Doctorales

Se han revisado catorce Tesis Doctorales entre los años 2012 y 2018, lo que ha supuesto un incremento de trabajos en comparación con las defendidas en los casi veinte años anteriores. Se pueden encontrar investigaciones sustentadas por diferentes Marcos Teóricos (TAD[2], OSO[3], APOE[4]) así como marcos conceptuales según indica Eisenhart (1991, op.c. en Camacho, 2011) en el sentido de que

> Un Marco Conceptual puede estar basado en diferentes teorías y una noción fundamental para este tipo de marcos es la de justificación; resulta fundamental explicar por qué se hacen las cosas y por qué son razonables las explicaciones e interpretaciones (p. 206)

Se observa una amplia variabilidad (mayor que en el estudio anterior) en el empleo de marcos de referencia así como de temáticas de investigación y ámbitos de la investigación (derivada, la prueba y la demostración, uso de tecnologías digitales para el aprendizaje, geometría, Álgebra Lineal, concepciones…) curiosamente no encontramos ninguna Tesis Doctoral sobre Probabilidad y Estadística.

	2012-2014	2015-2018	Total
Álgebra y Números	0	3 (TD11,13,14)	3
Análisis Matemático y Modelización	4 (TD1,3,4,5)	3 (TD6,10,12)	7
Otros: Ámbito afectivo Prueba, Geometría, RP	1 (TD2)	3 (TD7,8,9	4
Totales	**5**	**9**	**14**

Tabla 3. Tesis doctorales presentadas en los distintos Simposios de la SEIEM relacionadas con las Matemáticas Universitarias

[2] Teoría antropológica de lo Didáctico
[3] Enfoque Ontosemiótico
[4] Acción, Proceso, Objeto y Esquema

LA AMPLIACIÓN DE LOS MEDIOS DE DIFUSIÓN DE LA INVESTIGACIÓN EN EL CAMPO

Se puede considerar que uno de los factores más importes que favorecen el interés por el desarrollo de un campo cualquiera de investigación, es el poder disponer de lugares específicos en los que se puedan visibilizar los avances del mismo. Con ello se consigue, de alguna manera, compartir los avances y recibir la colaboración del colectivo que se interesa por el mismo.

La publicación de una revista a nivel internacional denominada *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education (IJRUME),* la cual tiene ya siete volúmenes, ha resultado ser de gran importancia para este campo de investigación dado que se muestra como un lugar en el que se pueden visualizar a nivel internacional las guías que dirigen las investigaciones en el nivel universitario. Actualmente se han publicado en sus veinte números, más de cien trabajos de investigación centrados todos en las Matemáticas a nivel universitario.

El Surgimiento de un espacio de discusión específico sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en el nivel universitario auspiciado por la ERME[5] y derivado directamente del "Working Group" 14 de los últimos CERME[6]. Este nuevo espacio es una red temática denominada *International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM)* creada en el año 2016, contando como principales impulsores de esta iniciativa con un grupo de investigadores de la Universidad de Barcelona, liderados por la Dra. Marianna Bosch que es miembro activo de la SEIEM. Esta red internacional ha celebrado tres congresos en los últimos años: 2016 (Montpellier, Francia), 2018 (Kristiansand, Noruega) y. 2020 (Bizarta,Túnez), este último celebrado tele-presencialmente, debido a la situación sanitaria que nos ha asolado en el pasado año y lo que va del presente año. El próximo está previsto celebrarse en Alemania en 2022 y en su comité organizador participará nuestra compañera Berta Barquero de la Universidad de Barcelona, quien participa activamente en la SEIEM.

En la Tabla 1 se recogen el número de comunicaciones y pósteres presentados en los diferentes grupos temáticos en los que se estructuran los congresos celebrados, revisadas de Nardi, et al (2016), Durand-Guerrier et al. (2018) y Hausberger et al. (2020)

Se puede observar una mayor diversidad de temas que los que se observaron en las comunicaciones y pósteres de los Simposios de la SEIEM, principalmente relacionados con las prácticas tanto de los profesores como de los estudiantes en las distintas instituciones.

También se ha podido constatar una preponderancia de las investigaciones sobre tópicos específicos del Cálculo y el Análisis Matemático, algo que ocurría en los Simposios de la SEIEM con anterioridad al año 2011, pero desde múltiples perspectivas, así como un importante número de trabajos dedicados a las a la Modelización Matemática y Matemáticas en otras disciplinas. Los trabajos presentados en Números, Álgebra y Lógica ocupan también un lugar destacado.

Revisando en detalle el conjunto de investigación que se muestran en los Proceedings analizados, la presencia española está muy limitada a investigaciones que se pueden situar en corrientes epistemólogicas de lo didáctico y hay apenas representación de investigaciones que incorporen otros marcos teóricos o conceptuales con enfoques cognitivos. Consideramos que ese déficit de trabajos debe ser superado con la presencia de investigadores de la SEIEM que se sitúen en estas otras corrientes de investigación de la Educación Matemática en la Universidad, compartiendo y enriqueciendo con ello los avances de la investigación en el campo de la UME

[5] European Society for Research in Mathematics Education
[6] Congress of the European Society for Research in Mathematics Education

	INDRUM2016		INDRUM2018		INDRUM2020		Total	
Grupos temáticos de trabajo (TWG)[7]	**C**	**P**	**C**	**P**	**C**	**P**	**C**	**P**
TWG1. Calculo y Análisis	13	3	7	0	11	0	31	3
TWG2. Modelización y Matemáticas en otras disciplinas (*)	7	2	10	4	11	2	28	8
TWG3. Numeros, Álgebra y Lógica	8	1	9	0	11	0	28	1
TWG4. Prácticas de los profesores e instituciones. (**)	8	6	8	7	11	3	45	22
TWG5. Prácticas de los estudiantes (**)	10	3	8	3				
TWG6. Transición hacia y dentro de la universidad	0	0	9	0	0	0	9	0
Totales	**46**	**15**	**51**	**14**	**44**	**5**	**141**	**34**

Tabla 1: Investigaciones presentadas en los diferentes INDRUM celebrados en los últimos seis años
(*) en el INDRUM 2020 se incorporó en este grupo temático Matemáticas para ingenieros
(**) en el INDRUM 2020 se configuró un único Grupo temático combinando el 4 y el 5

EL FORTALECIMIENTO DE DIFERENTES MARCOS CONCEPTUALES Y TEÓRICOS

Artigue (2019) desarrolla un análisis sobre la evolución que ha habido en el ámbito de investigación de la Didáctica de la Matemática en la Universidad. Dicha evolución la caracteriza a partir de diferentes ideas que se relacionan principalmente la complementación de las perspectivas epistemológicas y la aproximación sociocultural. Destaca que no existen rupturas entre las diferentes perspectivas, sino que en algunos casos se podrían considerar como enriquecimiento de las tales enfoques teóricos.

Si se analizan en detalle los diferentes congresos de la sociedad de investigación europea CERME y se revisan las diferentes investigaciones que aparecen en los Proceedings de los INDRUM, se puede observar una cierta preponderancia en los informes de la investigación de diferentes aproximaciones asociadas a la corriente francesa de la Didáctica de la Matemática, que lideran de alguna manera los avances en sus marcos teóricos. Desde la perspectiva cognitiva, el marco teórico APOE[8] de Dubinski ha recibido muchas aportaciones de las investigaciones que se han presentado en las diferentes comunicaciones, pósteres y Tesis Doctorales derivados de la SEIEM (Anexos 1, 2 y 3),

Otra evidencia que permite reconocer este fortalecimiento proviene de sus propios productos la *Encyclopedia of Mathematics Education* publicada en su segunda edición recientemente (Lerman, 2020) y que ha incorporado nuevas entradas (un total de nueve referencias nuevas) relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario, mientras que en la primera edición había una única referencia (Artigue, 2019). Las diez referencias que se pueden encontrar en esta segunda edición son las siguientes:

[7] TWG1: Calculus and Analysis
TWG2: Mathematics for engineers; Mathematical Modelling; Mathematics and other disciplines
TWG3: Number, Algebra, Logic
TWG4: Students' practices
TWG5: Teachers' practices
TWG6: Transition to and across university

[8] Acción-Proceso-Objeto-Esquema

- Abstract Algebra Teaching and Learning (Hausberger, T.) p. 5-8
- Analysis Teaching and Learning (Winsløw, K.) p. 50-53
- Differential Equations Teaching and Learning (Kwon, O.N.) p. 220-223
- Linear Algebra Teaching and Learning (Trigueros, M. & Wawro, M.) p. 474-478
- Logic in University Mathematics Education (Durand-Guerrier, V. & Dawkins, P. C.) p.481-485
- Preparation and Professional Development of University Mathematics Teachers (Jaworski, B.) (670-675
- Secondary-Tertiary Transition in Mathematics Education (Gueudet, G. &Thomas, M.O.J.)762-766
- Service Courses in University Mathematics Education (Hochmuth, R.) p. 770-774
- Teaching Practices at University Level (Nardi, E. & Rasmussen) p. 840-844
- University Mathematics Education (Winsløw C. & Rasmussen C.) p. 881-890

Pese a que no constituyen un número elevado de referencias, puede interpretarse, a partir del análisis de estas entradas de la *Encyclopedia*, el importante papel que ha jugado el reforzamiento de los diferentes Marcos teóricos y conceptuales en la incorporación de estos tópicos, específicamente situados en el campo de investigación de la UME.

DIVERSIFICACIÓN DEL TIPO DE INVESTIGACIONES

El cambio de planes de estudios para la formación matemática de los estudiantes universitarios consideramos que ha jugado un papel importante en la investigación. En concreto, en los estudios para la obtención del título de graduado en Matemáticas y Física la disminución de cursos, ha provocado en nuestro país una sintetización en la metodología de enseñanza que ha hecho que esos estudiantes tengan muchas dificultades a la hora de aprender lo que es una demostración o prueba matemática lo que viene condicionado por sus propias concepciones o creencias sobre la prueba. En (Jerez-Santana, 2021) se presentan los resultados de un estudio exploratorio desarrollado con el objetivo de

> Analizar las concepciones y creencias que tienen los estudiantes de primeros cursos universitarios sobre el papel de la prueba en su aprendizaje de las matemáticas, así como el tipo de argumentaciones que consideran más rigurosas, válidas, claras y más comunicables a los demás, cuando se encuentran con una situación, propiedad o resultado matemático (p. 18)

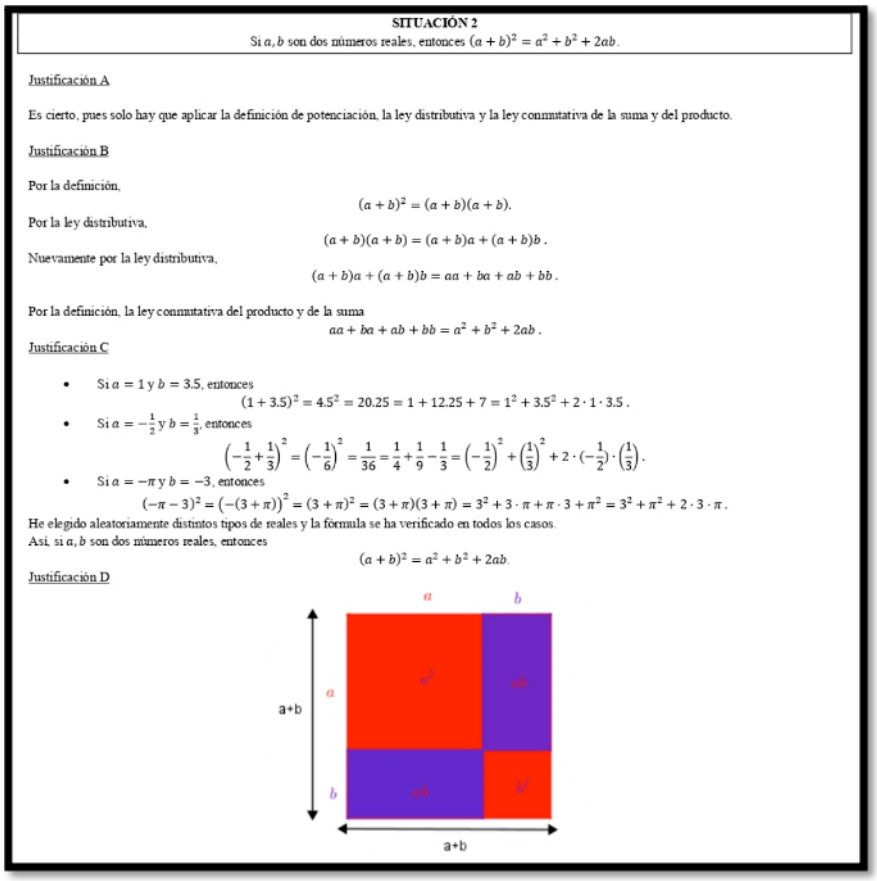
En el aprendizaje de las matemáticas por parte de estudiantes universitarios, varias investigaciones han mostrado que los estudiantes consideran más importante el formato de la prueba de una afirmación matemáticas que en el propio contenido de las mismas (Harel y Sowder, 1998) otras investigaciones concluyen que existe una resistencia por parte de los estudiantes a utilizar diagramas y esquemas visuales para justificar y dar explicaciones sobre la falsedad o veracidad de las tesis planteadas (González-Martín y Camacho-Machín, 2004). Por otra parte, Stylianou et al. (2015) afirman en su investigación, que los estudiantes universitarios sienten una predilección hacia el empleo de argumentos de tipo deductivo para hacer justificaciones de resultados o proposiciones matemáticas, aunque dependiendo preferentemente de la naturaleza de relación que se estaba estudiando y el contexto de uso.

(Jerez-Santana, 2021) realiza un estudio con 66 estudiantes de primer curso universitario (42 del Grado en Física y 24 del Grado en Matemáticas) adaptando los instrumentos utilizados en la investigación desarrollada por (Stylanou et al., 2015) con el objetivo de explorar, tanto "la relación entre las creencias de los estudiantes respecto a las pruebas y su comprensión, como el tipo de argumentos que prefieren cuando se les presenta la justificación o prueba de un argumento relativamente sencillo" (Jerez-Santana y Camacho-Machín, 2021).

Se utilizó un cuestionario dividido en tres partes. En la primera parte se hacia una recopilación de datos de los estudiantes. La segunda parte era la parte central de dicho cuestionario y presentaba cuatro conjeturas o resultados matemáticos elementales (llamadas situaciones), con cuatro preguntas para cada situación, dando lugar a dieciséis preguntas. Se trataba de conocer qué tipo de justificación prefieren los estudiantes como prueba de cada una de las afirmaciones o propiedades que se presentaban, así como cuál darían ellos si se les pidiese que eligieran una, cuál era más rigurosa, y cuál más clara y cuál más consistente. También se les preguntaba su opinión sobre el valor de cada justificación.Esas preguntas se adaptaron del trabajo de Stylianou et al (2015).De esta forma, cada una de las cuatro conjeturas propuestas presentaban cuatro opciones y el estudiante debería elegir una delas justificaciones propuestas, como la justificación "más valorada por el profesor si así lo hiciese". Las justificaciones incorporadas en el cuestionario presentaban cuatro argumentaciones.

- Un argumento específico o empírico,
- Un argumento presentado en forma visual o gráfica,
- Un argumento escrito en forma narrativa que es en cierta manera deductivo y que se denomina deductivo-narrativo y
- Una prueba deductiva escrita formalmente con argumentaciones lógicas que se denominará deductivo-simbólico.

La Figura 1 muestra una de las situaciones propuestas (igualdad algebraica) con sus cuatro justificaciones.



SITUACIÓN 2

Si a, b son dos números reales, entonces $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Justificación A

Es cierto, pues solo hay que aplicar la definición de potenciación, la ley distributiva y la ley conmutativa de la suma y del producto.

Justificación B

Por la definición,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b).$$

Por la ley distributiva,

$$(a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b\,.$$

Nuevamente por la ley distributiva,

$$(a+b)a + (a+b)b = aa + ba + ab + bb\,.$$

Por la definición, la ley conmutativa del producto y de la suma

$$aa + ba + ab + bb = a^2 + b^2 + 2ab\,.$$

Justificación C

- Si $a = 1$ y $b = 3.5$, entonces
$$(1+3.5)^2 = 4.5^2 = 20.25 = 1 + 12.25 + 7 = 1^2 + 3.5^2 + 2\cdot 1\cdot 3.5\,.$$
- Si $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$, entonces
$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} = \frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right).$$
- Si $a = -\pi$ y $b = -3$, entonces
$$(-\pi-3)^2 = \left(-(3+\pi)\right)^2 = (3+\pi)^2 = (3+\pi)(3+\pi) = 3^2 + 3\cdot\pi + \pi\cdot 3 + \pi^2 = 3^2 + \pi^2 + 2\cdot 3\cdot\pi\,.$$

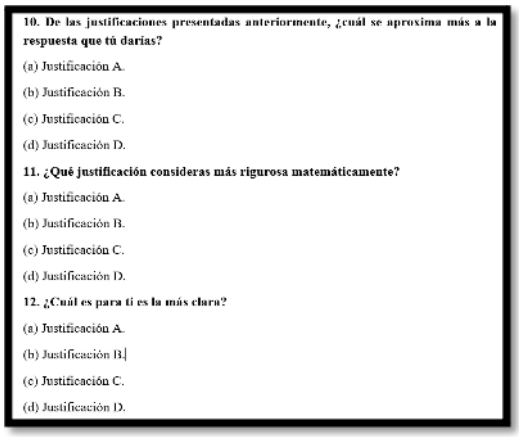
He elegido aleatoriamente distintos tipos de reales y la fórmula se ha verificado en todos los casos.
Así, si a, b son dos números reales, entonces

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Justificación D

Figura 1. La situación 2 y sus argumentos: deductivo-narrativo (A), comprobación empírica (B), deductivo-simbólico (D), y visual o gráfico(C).

Se pide a continuación que los estudiantes indiquen cual de estas justificaciones elegirían para presentar a alguien, cuál considerar más rigurosa y cuál más clara (Figura 2) finalmente la Figura 3 muestra la pregunta que se hace a los estudiantes en relación con su opinión sobre cada una de las justificaciones para los cuatro argumentos.



10. De las justificaciones presentadas anteriormente, ¿cuál se aproxima más a la respuesta que tú darías?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

11. ¿Qué justificación consideras más rigurosa matemáticamente?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

12. ¿Cuál es para ti es la más clara?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

Figura 2. Opinión sobre la claridad y rigurosidad de las justificaciones sobre los cuatro argumentos

13. Para cada justificación señala lo que opinas (solo una por solución).

	Justificación A	Justificación B	Justificación C	Justificación D
Es imperfecta lógicamente				
Es un argumento correcto, pero no riguroso				
No es una demostración, sino una comprobación				
Es un argumento consistente				

Figura 3. Opinión sobre si es consistente, riguroso o si no es una demostración

Del análisis de los resultados obtenidos, se observa que existe una tendencia mayoritaria, a elegir preferentemente las argumentaciones de tipo deductivo-simbólico, así como una resistencia generalizada a seleccionar la argumentación visual para justificar cualquier tipo de relación, ya sea geométrica o numérica. Esto difiere de los resultados de Stylianou et al. (2015), quienes encontraron que la predilección por el argumento deductivo se reduce prácticamente a la mitad y que el argumento visual constituye elección más elegida por los participantes en su investigación al justificar una relación geométrica.

La predilección por el argumento deductivo-simbólico no parece fortuita, pues tal y como muestra el análisis, la mayor parte de los participantes consideraron que es la justificación más rigurosa y la más fácil de comprender. Se puede concluir además que los estudiantes del Grado en matemáticas son más proclives a considerar como claras las justificaciones de tipo deductivo-simbólico que los estudiantes de la otra especialidad. En contrapartida, los estudiantes del Grado en Física se inclinan más a considerar como claras las comprobaciones empíricas que los de matemáticas. En estas preferencias, también se mostraron diferencias con los resultados de la investigación de Stylianou et al. (2015), mayoritariamente los estudiantes encuestados consideraron los argumentos narrativos mayoritariamente cuando se trata de una relación numérica y el

argumento visual, cuando se trata de una propiedad geométrica.

UNA POSIBLE AGENDA DE INVESTIGACIÓN

De cara a establecer una agenda de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en nuestro país, conviene tener más en cuenta lo que hasta ahora lo que está ocurriendo en el ámbito internacional. Si hacemos una comparación del tipo de trabajos que se recogen en las Actas de la SEIEM y de los Proceedings de los INDRUMs, se puede observar que existen algunas semejanzas entre los temas tratados, pero también algunas diferencias. El agrupamiento por temas de investigación podría ser de ayuda para esto.

Del análisis detallado de las diferentes comunicaciones y pósteres, se puede observar cómo hay un número amplio de las investigaciones que han dado lugar a las comunicaciones son encaminadas al estudio de las matemáticas por parte de estudiantes de otros estudios diferentes al Grado de Matemáticas.

Habría que potenciar los estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje de estudiantes de las diferentes ingenierías, ciencias experimentales, económicas y otras ciencias que requieran una formación matemática diferente a la de los matemáticos. Es necesario dar un impulso a la investigación sobre la modelización matemática pero analizado desde otras perspectivas diferente a las epistemológicas.

Desde nuestra perspectiva, las investigaciones del campo afectivo, relacionadas con las creencias y concepciones sobre las matemáticas, la enseñanza y sobre su propia naturaleza, deberían jugar un papel importante.

Las prácticas tanto de los profesores como los estudiantes y las instituciones, deben también conformar una línea de investigación que en la actualidad es poco atendida en nuestro país.

Pese a que hay algunos estudios sobre la transición del bachillerato a la universidad, requieren también de una mayor atención.

Desde hace ya décadas, las TIC están a la disponibilidad de todos los estudiantes universitarios, por lo que es fundamental seguir desarrollando investigaciones en torno al uso de esos recursos como materiales de apoyo para es aprendizaje.

La resolución de problemas haciendo uso de tecnologías digitales es también esencial. Hay una escasez de proyectos de investigación que emplean para su desarrollo Entornos dinámicos de trabajo como GeoGebra.

Es también importante determinar el papel de la prueba y la argumentación en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. El uso de los diferentes teoremas matemáticos sin entender y distinguir la hipótesis de la tesis y el desarrollo de argumentos que los justifiquen requieren también de mayor atención.

Estamos de acuerdo con (Artigue, 2019) cuando señala que la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario (UME) requiere de, no solamente intentar comprender sus procesos de enseñanza y aprendizaje "sino también desarrollar acciones didácticas en sintonía con las visiones epistemológicas, cognitivas y didácticas que sustentaban la investigación y nutriéndose de los conocimientos que ésta producía" (p. 88), estas acciones didácticas se refieren al desarrollo de investigaciones basadas en propuestas innovadoras de enseñanza. También será importante incorporar a la agenda elementos que se derivan de las prácticas de enseñanza, como señala Artigue (2019), tales como:

- El desarrollo de cursos de matemáticas para la transición del Bachillerato a la Universidad

- La potenciación del trabajo colaborativo (estudiantes, profesores y especialistas en didáctica de las matemáticas)
- La ampliación de recursos tecnológicos para apoyar el trabajo de los estudiantes y de los docentes
- La formación del profesorado universitario

AGRADECIMIENTOS
Este trabajo ha sido subvencionado por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional del MICINN con Referencia EDU2017-84276-R.

Referencias

Artigue, M. (2019). Evolución de las investigaciones en Didáctica de la Matemática a nivel universitario. *Revista de la Academia de Ciencias Canaria 31,* 75-93.

Camacho, M. (2011) Investigación en Didáctica de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de Universidad". En Marín, M. Fernández, G., Blanco, L. y Palarea, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV,* pp. 195-223. Universidad Castilla la Mancha.

Durand-Guerrier, V., Hochmuth, R., Goodchild, S. & Hogstad, N. M. (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics.* 2018. Kristiansand, Norway: University of Agder and INDRUM.

https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2018

Gutiérrez, A.; Boero, P. (Eds.)(2006) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in college mathematics education III* (pp. 234-283). Providence: American Mathematical Society.

Hausberger, T. Bosch, M. & F. Chellougui, F. (Eds.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. 2020. Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2020

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 479-486.

Jerez-Santana, K. O. (2021) *Preferencias sobre la prueba en Matemáticas: un estudio exploratorio con estudiantes del primer curso de los Grados de Física y Matemática*. Trabajo de Fin de Máster (sin publicar). Universidad de La Laguna. España.

Jerez-Santana, K. O.; Camacho-Machín, M. (2021) Preferencias sobre la prueba en Matemáticas: un estudio exploratorio con estudiantes del primer curso de los Grados de Física y Matemática. (Pendiente de publicar en este mismo Volumen).

Lerman (Ed.) (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition*). New York: Springer.

Lester, F.K. (Ed.) (2007) *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte: Information Age Publishing

Nardi, H., Winsløw, C., & Hausberger, T. (eds.) *Proceedings of INDRUM 2016 First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics.* 2020. Montpellier : University of Montpellier and INDRUM.

http://indrum2016.sciencesconf.org/conference/indrum2016/pages/indrum2016proceedings.pdf

Stylianou, D., Blanton, M. y Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships Between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*, 91-134.

ANEXO 1. COMUNICACIONES

Referencia	Simposio	CÓD
Cañadas, G., Díaz, C., Batanero, C. y Arteaga, P. (2011). Estimación de la asociación por estudiantes de psicología. En Actas del 15° Simposio de la Sociedad Española de Investigación de Educación Matemática. Ciudad Real. SEIEM Pp. 297-305.	2011	C1
Montoro Medina, A. B. y Gil Cuadra, F. (2011). Concentración y disfrute con actividades matemáticas. En Actas del 15° Simposio de la Sociedad Española de Investigación de Educación Matemática. Ciudad Real. SEIEM Pp. 451-460.		C2
Silva Muslera, A. y De La Torre Fernández, E. (2011). La herramienta arrastre en funciones usando geogebra. En Actas del 15° Simposio de la Sociedad Española de Investigación de Educación Matemática. Ciudad Real. SEIEM Pp. 555-564.		C3
Almeida, R., Bruno, A., Perdomo-Díaz, J. (2012). Sentido numérico de alumnado del Grado en Matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 99 - 111). Jaén: SEIEM.	2012	C4
Cañadas, G.R., Batanero, C., Díaz, C., Gea, M.M. (2012). Comprensión del test chi-cuadrado por estudiantes de Psicología. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 153 - 163). Jaén: SEIEM.		C5
Martins, J.A., Nascimento, M.M., Estrada, A. (2012). Caminando: las actitudes hacia la estadistica en estudiantes universitarios en el norte de Portugal. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 375 - 383). Jaén: SEIEM.		C6
Rodríguez, F., Gutiérrez, A. (2012). Software DeMMaTTouL: una herramienta para la investigación sobre la estructura argumentativa de la demostración. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 457 - 468). Jaén: SEIEM.		C7
Rodríguez del Tío, P., Hidalgo, S., Palacios, A. (2012). La ansiedad matemática en alumnos de Grados en Estadistica. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 469 - 478). Jaén: SEIEM.		C8
Cañadas, G. R., Batanero, C., Estepa, A. y Arteaga, P. (2013). Juicios de asociación en tablas de contingencia con datos ordinales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 209-217). Bilbao: SEIEM.	2013	C9
Delgado, M. L., González, M.T., Monterrubio, C. y Codes, M. (2013). El mecanismo collecting para la comprensión del concepto de serie numérica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 245-252). Bilbao: SEIEM.		C10
Ordóñez, C., Ordóñez L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM.		C11
Cañadas, G. R., Batanero, C., Arteaga, P., Gea, M. M. (2014). Medidas de asociación en tablas 2x2: evaluación de una experiencia de enseñanza con estudiantes universitarios. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 207-216). Salamanca: SEIEM.	2014	C12
Gaita, C. y Ortega, T. (2014). Unidades elementales en problemas de lugar geométrico en los cuadros geométrico y algebraico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 317-326). Salamanca: SEIEM.		C13
González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F., Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 385-394). Salamanca: SEIEM		C14

Nascimento, M. M., Martins, J. A., Estrada, A. (2014). La vida es sueño: proyectos de estadística en ingenierías. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 475-483). Salamanca: SEIEM		C15
Soneira, C., Souto, M. J., Tarrío, A. D. (2014). La variable sintáctica en el paso del lenguaje natural al algebraico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 563-572). Salamanca: SEIEM.		C16
Boigues, F. J., Estruch V. y Vidal A. (2015). El perfil afectivo/matemático de estudiantes de Ciencias e Ingeniería. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp.183-190). Alicante: SEIEM.	2015	C17
Fuentealba C., Badillo E. y Sánchez-Matamoros G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: comprensión en alumnos universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 259-268). Alicante: SEIEM.		C18
Inzunsa, S. y Ward, S. E. (2015). Explorando el razonamiento covariacional mediante un ambiente computacional en un curso introductorio de estadística. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 317-325). Alicante: SEIEM.		C19
Mendoza, E., Rodríguez, F. M. y Roa, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 371- 379). Alicante: SEIEM.		C20
Ordóñez, C., Ordóñez L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes de Ingeniería Informática. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 431- 440). Alicante: SEIEM.		C21
Cañadas, G. R., Arteaga, P., Contreras, J. M. y Gea, M. M. (2016). Comprensión de medidas de asociación en tablas RxC por estudiantes de Psicología. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 187-196). Málaga: SEIEM.	2016	C22
Vera, O. D., Díaz, C., Batanero, C. y López Martín, M. M. (2016). Evaluación de dificultades en el análisis de varianza elemental por estudiantes de Psicología. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 539-548). Málaga: SEIEM.		C23
González-Ruiz, I., González- López, M. J. y González-Astudillo, M. T. (2018). Contextos médicos de los datos en problemas de inferencia sobre la media en libros de bioestadística. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 251-260). Gijón: SEIEM.	2018	C24
Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 437-446). Gijón: SEIEM.		C25
Rodríguez-Cisneros, L. y Perdomo-Díaz, J. (2019). Modelos para el estudio de la transición entre secundaria y universidad en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. MuñozEscolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 523-532). Valladolid: SEIEM.	2019	C26

ANEXO 2. PÓSTERES

Cárcamo A., Gómez J. y Fortuny J. (2015). La modelización matemática para iniciar la construcción de conjunto generador y espacio generado. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (p. 543). Alicante: SEIEM.	2015	P1
Comas, C., Estrada, A., Nascimento, M. y Martins, A. (2015). Evolución de las actitudes hacia la Estadística en estudiantes de Psicología. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (p. 545). Alicante: SEIEM.		P2
Rodríguez, M. y Sánchez, A. B. (2015). Errores en la sustracción cometidos por estudiantes universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (p. 585). Alicante: SEIEM.		P3
Boigues, F., Estruch, V. y Vidal, A. (2016). Homologando dados virtuales: Una aproximación a la probabilidad frecuencial. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 569). Málaga: SEIEM.	2016	P4
Díaz, F. J. y Marbán, J. M. (2016). Análisis de la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 591). Málaga: SEIEM.		P5
Gavilán-Izquierdo, J.M. y González, A. (2016). Investigación sobre el concepto de grafo a través del modelo de Van Hiele. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 597). Málaga: SEIEM		P6
Marín-Che, A. y Pinto-Sosa, J. (2016). Evaluación de alfabetización estadística en una universidad pública. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 619). Málaga: SEIEM.		P7
Mejía, A. y Sánchez, J. G. (2016). Diferencias en actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas en estudiantes universitarios de matemáticas e ingeniería. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 621). Málaga: SEIEM.		P8
Rodríguez, M. M., Sánchez, A. B. y López, R. (2016). Caracterización de la estructura de las sustracciones en las que estudiantes universitarios cometen errores. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 635). Málaga: SEIEM.		P9
Ventura-Campos, N., Arnau, D., Gutiérrez-Soto, J., González-Calero, J. A. y Ávila, C. (2016). Diseño de una investigación sobre el error de inversión y las bases neuronales subyacentes. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 655). Málaga: SEIEM.		P10
Díaz, F.J. y Marbán, J.M. (2017). Conexiones de la formación matemática con las competencias profesionales en los actuales Grados en Administración y Dirección de Empresas. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 513). Zaragoza: SEIEM.	2017	P11
Muñoz Orozco, A., Arenas-Peñaloza, J. y Rodríguez Vásquez, F. M. (2017). Análisis de la comprensión sobre el concepto de función. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 561). Zaragoza: SEIEM.		P12

Pinto-Rojas, I. y Parraguez, M. (2017). Articulando modos de comprender la derivada desde una perspectiva local. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 565). Zaragoza: SEIEM.		P13
Piñero, J.C. y Guerrero, A.Á. (2017). Un paso más en el aprendizaje basado en problemas: aprendizaje mixto en enseñanzas superiores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 567). Zaragoza: SEIEM.		P14
Sánchez-Cruzado, C., Sánchez-Compaña, T. y García-Pardo, F. (2017). Metodología clase invertida como alternativa para la educación matemática en la enseñanza universitaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 581). Zaragoza: SEIEM.		P15
Ariza Muñoz, E., González-Calero, J. A. y Cozar Gutierrez, R. (2018). Una mirada a las competencias generales y específicas de los futuros licenciados en matemáticas de Colombia. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (p. 608). Gijón: SEIEM.	2018	P16
Díaz, F. J. y Marbán, J. M. (2018). Acotación competencial de la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (p. 622). Gijón: SEIEM.		P17
Alvarado, H. y Retamal, L. (2019). Renovación metodológica en estadística basada en la creación de problemas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 607). Valladolid: SEIEM.	2019	P18
Cox-Figueroa, E., Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2019). Ideas previas a un curso de cálculo: concepciones de los alumnos sobre continuidad de una función. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 616). Valladolid: SEIEM.		P19
González, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Presencia de la teoría de grafos en la enseñanza de grado en España. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 622). Valladolid: SEIEM.		P20
González-Ruiz, I, Estrella, S., González, M. J. y González-Astudillo, M. T. (2019). Orientación cognitiva de tareas sobre intervalos de confianza en libros de bioestadística. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 623). Valladolid: SEIEM.		P21
López-Iñesta, E., García-Costa, D., Grimaldo, F. y Vidal-Abarca, E. (2019). Analítica de datos de aprendizaje en un curso universitario de estadística con *Read and Learn*. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 626). Valladolid: SEIEM.		P22
Pedrosa-Jesús, C., León-Mantero, C., Maz-Machado, A, Casas-Rosal, J. C. y Gutiérrez-Rubio, D. (2019). Género y actitudes hacia las matemáticas en la universidad. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (p. 636). Valladolid: SEIEM.		P23

ANEXO 3. TESIS DOCTORALES

TESIS DOCTORAL	AUTOR	DIRECTORES	AÑO	CÓD
Análisis de la Construcción del Concepto de la Derivada en un Primer Ciclo de Enseñanza Superior asistida por Ordenador	María Angélica Vega Urquieta	José Carrillo Yañez y Jorge Soto Andrade	2012	TD1
Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales	Juan Carlos González Vara	Tomás Ortega del Rincón	2012	TD2
La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica	Lidia Serrano	Marianna Bosch y Josep Gascón	2013	TD3
Enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias en contexto: una secuencia de enseñanza basada en la interpretación de modelos matemáticos	Carolina Guerrero Ortiz	Hugo Rogelio Mejía Velasco y Matías Camacho Machín	2013	TD4
Análisis del uso del concepto de derivada por estudiantes universitarios en el estudio de conceptos económicos	Ángel Luis Ariza Jiménez	Salvador Llinares Ciscar	2014	TD5
Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.	Catarina Oliveira Lucas.	Dr. Cecilio Fonseca Bon, Dr. Josep Gascón Pérez y Dr. José Manuel Casas Mirás	2015	TD6
El paso de la geometría sintética a la geometría analítica	Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre	Tomás Ortega del Rincón	2015	TD7
El Perfil Emocional y Competencial Matemático del Alumnado de Grados en Estadística.	Mª del Pilar Rodríguez del Tío	Dr. Andrés Palacios Picos y Dr. Tomás Ortega del Rincón	2016	TD8
Análise das eleições e decisões dos Estudiantes quando enfrentam situações-problema de matemática	Humberto Plácido Gusmao de Moura	Dra. Mª Teresa Fernández Blanco	2016	TD9
La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de GeoGebra en un primer curso de ciencias Administrativas y Económicas en Colombia.	Francisco Infante Mejía	Dr. Luis Puig Espinosa	2016	TD10
Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado	Andrea Cárcamo Bahamonde	Dr. Joan Gómez y Dr. Josep M. Fortuny	2017	TD11
Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios	Claudio Fuentealba Aguilera	Dra. Edelmira Badillo, Dra. Gloria Sánchez-Matamoros	2017	TD12
La investigación en didáctica del álgebra lineal: una perspectiva de su contribución a la enseñanza a través de la reflexión sobre la práctica	Ricardo Jorge Castro Gonçalves	Dra. Mª Cecilia Rosas Pereira Peixoto da Costa y Dra. Paula Mª Machado Cruz Catarino	2018	TD13

La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en álgebra superior mediada por un entorno informático.	Carmen Ordóñez Cañada.	Dr. Ángel Contreras de la Fuente y Dra. Lourdes Ordóñez Cañada	2018	TD14

Seminario de investigación II: Metodologías cualitativas de investigación en educación matemática

Coordina: Dra. Marta Molina (Universidad de Salamanca)

Ponentes:

- Dr. Miguel A. Montes (Universidad de Huelva): *Características de la investigación cualitativa y sus implicaciones en la investigación en Educación Matemática.*
- Dra. María de la Cinta Muñoz-Catalán (Universidad de Sevilla): *El estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática.*
- Dra. Marta Molina (Universidad de Salamanca): *Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución.*

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO: INVESTIGACIÓN CUALITATIVA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Introduction to the seminar: qualitative research in mathematics education

Montes, M.

Universidad de Huelva, Centro de Investigación COIDESO

INTRODUCCIÓN

El origen de la investigación cualitativa se remonta a los años 20-30 del siglo pasado, momento en el que la escuela de sociología de Chicago estableció la importancia de este tipo de aproximación para el estudio del ser humano. Desde entonces, y hasta ahora, la investigación cualitativa ha pasado por diferentes momentos históricos en su desarrollo (Denzin y Lincoln, 2000). No es hasta los 90 y principios de este siglo que dicho tipo de investigación adquiere un papel relevante en Educación Matemática a nivel internacional (Bikner-Ahsbahs, Knipping y Presmeg, 2014).

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática tiene ya más de dos décadas de recorrido, en las que ha sido habitual el desarrollo de investigaciones de corte cualitativo (en particular, Rico, 1998; Azcárate, 1998; Huerta, 1998; Ortiz, 1998; Contreras, 2001; Godino, Carrillo, Castro, Lacasta, Muñoz-Catalán y Wilhelmi, 2011; Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011, son ejemplos de ponencias en seminarios dedicadas a ellas). Este seminario es el tercero que centra su atención en elementos metodológicos, y en particular, en los cualitativos. Anteriormente, se puso el foco en la entrevista como metodología de investigación (en el simposio de 1998), y el análisis de las metodologías seguidas en las comunicaciones de los diferentes simposios de la SEIEM (en el de 2011).

En este trabajo asumimos que las investigaciones desarrolladas desde una perspectiva metodológica cualitativa no se reducen al uso de métodos cualitativos, sino que implican un conjunto de posicionamientos epistemológicos, ontológicos y axiológicos, que tienen como consecuencia el uso de diferentes métodos y técnicas (Ernest, 1998; Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011; Scheiner, 2019), por lo que tiene sentido hablar de investigación cualitativa.

En este seminario abordamos la investigación cualitativa en Educación Matemática, poniendo especial énfasis en dos diseños concretos: los estudios de caso y la investigación de diseño. Así, este seminario se estructurará en tres partes. Esta primera parte tendrá como objetivo clarificar algunos aspectos que caracterizan las aproximaciones cualitativas a la investigación en Educación Matemática, así como mostrar aspectos generales de las investigaciones cualitativas publicadas en AIEM desde el año 2014 hasta 2021. La segunda tendrá como objetivo caracterizar los estudios de caso en profundidad, y la tercera se centrará en describir la investigación de diseño.

En esta introducción profundizaremos en las características fundamentales de la investigación cualitativa (Toulmin, 1990; Flick, 2007), reflexionando sobre cómo dichas características se relacionan con los elementos centrales en cualquier investigación (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; Bikner-Ahsbahs, 2019). Finalmente, se hará un recorrido por las investigaciones cualitativas desarrolladas en Avances de Investigación en Educación Matemática, la revista oficial de la SEIEM, desde su inicio hasta el número publicado en mayo de 2021.

Montes, M. (2021). Introducción al Seminario: Investigación cualitativa en educación matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 53 – 63). Valencia: SEIEM.

CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA

Encontrar una definición para la noción de investigación cualitativa, que ponga el énfasis en la naturaleza cualitativa de la misma, es una de las tareas pendientes para los investigadores en ciencias sociales (Aspers y Corte, 2019). Esto ocurre especialmente en educación matemática, disciplina en la que se conjugan fundamentos psicológicos, sociológicos, o antropológicos, entre otros, además de su naturaleza intrínsecamente ligada al contenido matemático. Sin embargo, existe cierto acuerdo en torno a algunas de las características, propósitos y fundamentos que tiene el quehacer de aquellos que desarrollan investigaciones de índole cualitativa.

Tradicionalmente existen tres grandes posiciones en investigación cualitativa, provenientes de la sociología: el interaccionismo simbólico, la etnometodología, y el estructuralismo (Flick, 2007).

El interaccionismo simbólico, cuyo inicio se atribuye a los trabajos de Blumer (1969), se fundamenta en estudiar los significados que las personas atribuyen a objetos, eventos, comportamientos, o fenómenos de forma subjetiva. Este posicionamiento sobre la subjetividad del significado tiene su origen en asumir que la sociedad, y todos los fenómenos que en ella ocurren, se construye a través de la interpretación humana, incluso aquellos elementos que derivan de la investigación. Así, desde esta perspectiva se pretende explorar los significados atribuidos a los diferentes elementos, así como a los procesos de atribución de significado.

La etnometodología tiene su base en el análisis de las interacciones humanas como medio para comprender la construcción de la realidad (Garfinkel, 1967). Este tipo de trabajos se centra especialmente en los métodos utilizados por los miembros de la sociedad para crear la realidad (Bergman, 1981, citado en Flick, 2007). Esta perspectiva fundamenta las investigaciones basadas en el análisis de la conversación (Bryman, 2004).

Mientras que el interaccionismo simbólico y la etnometodología se centran en los significados construidos y en los procesos interactivos de construcción de significados, el estructuralismo, por su parte, asume la existencia de organizadores sociales implícitos, contenidos en los modelos culturales, que estructuran la actividad humana (Bordieu, 1968). Desde esta perspectiva, el investigador tiene la función de extrapolar dichas estructuras, habitualmente a través de análisis lingüísticos o de las expresiones usadas.

Estas tres posiciones comparten ciertas asunciones epistemológicas, ontológicas, metodológicas, y axiológicas, que pueden encontrarse en la mayoría de las investigaciones de índole cualitativa en Educación Matemática. En general, las investigaciones de tipo cualitativo se basan en hacer un acercamiento a la realidad con el propósito de comprenderla a través de la mirada de aquellos que viven en ella. Esto supone una posición construccionista, en la que los fenómenos a ser investigados son resultado de las interacciones entre individuos, frente a posiciones que entienden que son fenómenos externos a aquellos que los construyen. Así, se tiende a asumir un paradigma interpretativo o transformativo (Scheiner, 2019), asumiendo la existencia de múltiples percepciones de lo real. Estas aproximaciones suelen tener un carácter inductivo, dado que generalmente se tiende a construir los elementos teóricos desde el análisis e interpretación de la realidad. El acercamiento que se hace al objeto de investigación suele implicar tomar como informantes a individuos o conjuntos de individuos no demasiado numerosos, lo cual lleva a reconstruir los procesos de atribución de significado que los individuos estudiados hacen. En Educación Matemática es necesario ampliar la perspectiva sobre los informantes, tomando en ciertos casos como tales libros de texto (López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015), cuadernos (Arce, Conejo, Ortega, 2014), o diseños de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Dentro de la investigación cualitativa, existen múltiples posibles diseños de investigación, desde aquellos de corte descriptivo-interpretativos: etnográfico, fenomenológico, biográfico, narrativo, investigación-acción, o documental; a aquellos de carácter más inductivo, que persiguen la generación de teoría, entre los que destacan lo basados en la Teoría Fundamentada (Charmaz, 2014).

En general, podemos asumir que la investigación cualitativa tiene cuatro características fundamentales (Toulmin, 1990; Flick, 2007). La primera de ellas es consecuencia directa de pretender acercarse a la realidad a través de quienes viven en ella, para lo cual es se requiere dar voz a dichos sujetos en el proceso de investigación, con lo que las investigaciones cualitativas tienen un profundo *énfasis en la oralidad*. Esto tiene un profundo impacto, por ejemplo, en las técnicas de recogidas y análisis de información, que implican entrevistas, cuestionarios, o narrativas, entre otras técnicas de recogida de información, así como en los posibles focos de investigación, que incluyen el análisis de aspectos lingüísticos y de comunicación. En este sentido, es habitual trabajar sobre textos escritos, derivados de la transcripción de registros orales (incorporando, eventualmente, descripciones de aspectos de comunicación no verbal). La segunda característica está ligada a la *particularidad* de los resultados pretendidos, y, por tanto, a la dificultad de desarrollar teorías generales desde enfoques que tratan problemas circunscritos, por ejemplo, a comunidades concretas (e.g. Planas y Civil 2010). Desde este tipo de enfoques es imposible generalizar, pero permiten hacer aportaciones a las que la teoría debe ser sensible. El tercer rasgo se centra en lo *local* de los objetos y problemas investigados, lo cual se relaciona, por un lado, con que el acercamiento implique tomar una cantidad limitada de participantes, y por otro, con el habitual interés de que dichos participantes pertenezcan a grupos que compartan una idiosincrasia o característica particular. Esto se relaciona de forma inmediata con lo anterior, dada la imposibilidad de construir teorías generalizadoras desde casos particulares, o desde información proveniente de un sujeto o pequeño conjunto de sujetos elegidos por compartir cierta característica. Finalmente, los trabajos cualitativos, como sucede en general en la investigación educativa, deben centrarse en problemas de investigación oportunos y relevantes en el contexto social y educativo.

Cada uno de estos cuatro rasgos tienen implicaciones en diferentes aspectos de cualquier investigación en educación matemática que se pretenda plantear desde una perspectiva cualitativa. Así, en el siguiente apartado abordaremos cómo estos rasgos permiten dar forma a cada uno de los cinco elementos fundamentales que cualquier investigación debe considerar (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2006; Bikner-Ahsbahs, 2019).

IMPLICACIONES DE LA APROXIMACIÓN CUALITATIVA EN EL DISEÑO DE UNA INVESTIGACIÓN

En el diseño de cualquier investigación se han de tener en cuenta cinco elementos fundamentales y relacionados (Bikner- Ahsbahs y Prediger, 2006; Bikner-Ahsbahs, 2019): el propósito y objetivo de la misma, la pregunta de investigación, el objeto investigado, el conjunto de métodos y técnicas, y la situación de la investigación en el área[i]. Así, la asunción de un enfoque cualitativo es consecuencia de diferentes decisiones alrededor de estos cinco elementos, a la vez que tiene implicaciones en el resto de componentes de una investigación. Por tanto, elegir un enfoque cualitativo lleva a asumir que estos cinco aspectos han de ser tratados con la especificidad que dicho enfoque exige. No profundizaremos en este trabajo en el último de los elementos, que da cuenta de si existen, por ejemplo, aproximaciones cualitativas al objeto de estudio, y permite identificar aquellos aspectos a ser abordados en un nuevo trabajo de investigación, así como algunas de las técnicas que tienden a ser usadas. Esto forma parte del proceso de familiarización con el objeto de estudio, que entendemos previo a cualquier decisión metodológica.

En cuanto a los propósitos y objetivos, que provienen de un problema o conjunto de aspectos problemáticos, en investigación cualitativa se suelen circunscribir a un ámbito *local* con características de interés para la investigación, para lo que se suele tomar como participantes en la investigación a individuos o grupos de individuos que no suponen una muestra cuantitativamente representativa de la población estudiada, siendo estos miembros representativos del contexto a estudiar, o singularidades interesantes. En este sentido, los objetivos de la investigación no suelen perseguir la generalización o la generación de teorías generalistas, aunque en ciertos casos se puede

reflexionar sobre generalizaciones plausibles (Bassey, 1999; Muñoz-Catalán, 2009) desde la particularidad estudiada hacia otras comunidades con ciertas relaciones.

El propósito y objetivo de las investigaciones se ligan de forma indisociable a un objeto de investigación. Este objeto puede considerarse en un primer nivel epistemológico general (e.g. 'el conocimiento del profesor', 'el aprendizaje de la geometría'), y se concreta posteriormente, dada la localidad y particularidad de las aproximaciones cualitativas, que van definiendo la investigación (e.g. 'el conocimiento del profesor para la enseñanza de la geometría en un contexto multilingüe). Es habitual que el objeto de investigación se vea modificado durante la investigación, tanto como consecuencia del progresivo aumento de la comprensión del investigador sobre dicho objeto, como debido a limitaciones emergentes en la investigación, lo cual tiene repercusión tanto en los propósitos y objetivos de la investigación, como en la pregunta de investigación.

Así, si nos centramos en la pregunta de investigación, en primer lugar, esta ha de ser tomada desde una perspectiva flexible en cuanto a su posible modificación. Así, es habitual que las preguntas de investigación varíen durante el desarrollo de la propia investigación, (Creswell, 2007; Agee, 2009), de forma que se ajustan y adaptan a la realidad a la que se accede y a las sucesivas concreciones y modificaciones del objeto investigado. Esto supone, por parte del investigador un reconocimiento implícito de la complejidad del objeto investigado (Davis, 2019). En segundo lugar, dado el foco *local* y *particular* de los propósitos de la investigación, la pregunta de investigación de las investigaciones de índole cualitativa tiende centrarse en los 'cómo', los 'qué' y los 'por qué' (Agee, 2009), pretendiendo así dar voz a los participantes en la investigación desde constructos teóricos (generados desde la propia investigación, o ya existentes).

Con un ojo en los métodos y técnicas usados en la investigación cualitativa, lo primero que cabe destacar es que, como en cualquier otra investigación, debe haber coherencia entre los tres elementos anteriormente descritos (propósito y objetivos, objeto, y pregunta de investigación) y los métodos y técnicas usados. Así, por ejemplo, la *particularidad*, suele llevar a que la cantidad de participantes sea reducida, lo cual implica la adopción de diseños como el estudio de caso (Muñoz-Catalán, en este volumen). Este tipo de diseño, con un bajo número de participantes requiere, por un lado, la recogida de una gran cantidad de información, y, si bien la generalización de sus resultados a nivel general no suele ser el objetivo, sí que permite establecer generalizaciones plausibles (traducción libre del término inglés *fuzzy generalizations* propuesto por Bryman, 1999, para un mayor desarrollo, consultar la ponencia de Muñoz-Catalán en este volumen), en las que no existe una certeza absoluta de que un resultado de investigación sea aplicable a toda la población, pero sí una posibilidad razonable. En este sentido, la *localidad* de la investigación suele acotar el alcance de las generalizaciones plausibles que se pueden establecer.

Las técnicas usadas en investigación cualitativa se caracterizan, fundamentalmente, por la *oralidad* de los datos obtenidos (y la consiguiente textualidad, una vez procesada la información, si fuera necesario), y por la *particularidad* que contemplan. En ese sentido, la observación (participante o no participante), las entrevistas, los cuestionarios (semi)abiertos, o las narrativas, son técnicas habituales en la investigación cualitativa. Estas técnicas permiten al investigador dar voz, de forma libre o guiada, a los informantes, para que así pueda interpretar o analizar la perspectiva que dichos informantes poseen de la realidad. Así, dada la profundidad que se persigue en la comprensión del fenómeno estudiado, se hace necesario obtener un gran volumen de datos (Rodríguez, Gil y García, 1996; Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011). En este tipo de técnicas, es habitual que la validación de los procesos analíticos involucre la obtención de datos por medio de múltiples técnicas (triangulación por uso de múltiples instrumentos), y/o la realización del análisis por parte de varios investigadores, y su comparación, ya sea a través de la comparación directa de sus resultados (e.g. Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2018), o a través del uso de parámetros estadísticos como la Kappa de Fleiss (e.g. Fernández-Plaza et al., 2019). Las técnicas cualitativas, en general, van asociadas a una cantidad pequeña de participantes, como antes se indicaba.

LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA EN AIEM DESDE SU FUNDACIÓN HASTA LA ACTUALIDAD

Desde el inicio de su publicación en 2012, la revista "Avances de Investigación en Educación Matemática" ha ido consolidándose como uno de los referentes de la investigación de calidad en Educación Matemática en habla hispana. Tanto por su vinculación con la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática como por su proyección, es interesante estudiar la presencia y las características de la investigación cualitativa publicada en esta revista. Para ello, analizaremos dieciséis de los dieciocho números publicados hasta mayo de 2021. Excluimos de este análisis los dos primeros números de la revista, correspondientes al año de su fundación, ya que responden a artículos de corte fundamentalmente teóricos o descriptivos de líneas de investigación. Usaremos como dimensiones de análisis, las siguientes: el área de estudio, los informantes del trabajo, el tipo de diseño, las técnicas usadas, y el nivel educativo en el que se contextualiza el estudio. Así, esbozaremos un panorama de algunas de las características de las investigaciones cualitativas publicadas en la revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

En primer lugar, de los 97 artículos analizados, un total de 39 corresponden a aproximaciones cualitativas, mientras que el resto corresponde, fundamentalmente, a trabajos cuantitativos o teóricos. Esto implica un 39.2% del total de artículos publicados. Esto refleja que la presencia de este tipo de investigaciones en la revista AIEM, es similar a su presencia en las actas de la SEIEM (en el periodo revisado por Godino et al. (2011) corresponde a un 34.69%).

En cuanto a las áreas de estudio abordadas en los artículos que narran investigaciones de carácter cualitativo en AIEM (Tabla 1), destacan la de aspectos afectivos, socioculturales y de género, con un 28.2% de los trabajos, las investigaciones sobre conocimiento, formación, y desarrollo profesional, con un 23.1%, el estudio de procesos matemáticos genéricos (como la modelación o la ejemplificación), también con un 23.1%, y las ligadas a la Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, con un 12.8%. En menor medida aparecen trabajos ligados a la Didáctica del Análisis. Sólo un artículo corresponde al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico, mientras que otro no corresponde a ningún grupo, centrándose en el desarrollo de tareas de forma no ligada a un contenido específico.

Área de Estudio	Frecuencia	Porcentaje
Aspectos afectivos, socioculturales y de género	11	28.2%
Estudio de procesos matemáticos genéricos	9	23.1%
Conocimiento, formación y desarrollo profesional	9	23.1%
Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria	5	12.8%
Didáctica del Análisis	3	7.7%
Pensamiento Numérico y Algebraico	1	2.6%
Diseño de tareas	1	2.6%

Tabla 1: Áreas de estudio en las que se desarrollan investigaciones cualitativas en AIEM.

Con la mirada puesta en los informantes en los que ponen su atención los estudios cualitativos desarrollados en AIEM (Tabla 2), se centran fundamentalmente en tres grandes grupos. El 38.4% de las investigaciones cualitativas analizadas se centran en el estudio de los alumnos y aspectos ligados al aprendizaje, mientras que un 28.2% se centran en el profesor, ya sea en formación inicial o en ejercicio. Por otro lado, un 15.4% de los trabajos toman como informantes diseños instruccionales, y en una cantidad idéntica, libros de texto. El porcentaje restante está asociado a investigaciones que se centran en documentos como TFM o PAU o en un determinado grupo de población no escolarizada.

Informantes	Frecuencia	Porcentaje
Alumnos	15	38.4%
Profesor	11	28.2%
Diseño instruccional	6	15.4%
Libro de texto	4	10.3%
Trabajo Fin de Máster/PAU	2	5.1%
Grupo de población no escolarizada	1	2.6%

Tabla 2: Informantes en las aproximaciones cualitativas en AIEM.

Centrándonos en el tipo de diseño que siguen las distintas investigaciones cualitativas publicadas en AIEM (Tabla 3), destaca en primer lugar que 12 de los 39 estudios, un 30.8%, no indican el tipo de diseño que siguen de forma explícita. En cuanto a aquellas investigaciones que declaran el diseño de investigación, un 23.1% desarrollan un estudio de caso, y un 20.5% desarrollan investigaciones de diseño. Por otro lado, un 15.4% desarrollan investigaciones de carácter documental, ligadas a las anteriormente indicadas de libros de texto y TFM o PAU, mientras que las investigaciones que declaran seguir un diseño ligado a la teoría emergente o a estudios etnográficos constituyen un porcentaje cercano al 10%.

Tipo de diseño	Frecuencia	Porcentaje
Estudio de caso	9	23.1%
Investigación de diseño	8	20.5%
Documental	6	15.4%
Teoría emergente	3	7.6%
Etnográfico	1	2.6%
No declaran tipo de diseño	12	30.8%

Tabla 3: Tipos de diseño de las investigaciones cualitativas en AIEM.

Con la mirada puesta en las técnicas de recogida de datos (Tabla 4), destaca especialmente el uso de la grabación de aula como registro de la observación de la misma, con un 53.8% del total de artículos analizados. Asimismo, en un 28.2% de las investigaciones se recogen datos de tareas o producciones escritas de alumnos o profesores. Destaca también el uso de entrevistas con diferentes grados de estructuración, con un 17.9%, y de cuestionarios, con un 5.1%. Finalmente, en 6 de los trabajos la recogida de datos se hace a través de la selección de documentos, ya sean libros de texto, o pruebas escritas no diseñadas ad hoc para la investigación, como Trabajos Fin de Máster o pruebas de acceso a la universidad. La variedad de técnicas usadas tiene en común el énfasis en la oralidad, evidenciándose que dicha oralidad tiene una traslación a un registro textual, ya sea a través de una transcripción (grabaciones de aula, entrevista), o por tomar los datos en un formato que obliga a la textualidad (tareas, documentos).

Técnica de recogida de datos	Frecuencia	Porcentaje
Grabación de aula	21	53.8%
Tareas	11	28.2%
Entrevista	7	17.9%
Recolección de documentos	6	15.2%
Cuestionario	2	5.1%

Tabla 4: Técnicas de recogida de datos de las investigaciones cualitativas en AIEM.

Para finalizar, con la mirada puesta en el nivel educativo en el que se desarrollan las investigaciones (Tabla 5), existe una cantidad muy significativa de estudios desarrollados en contextos universitarios. En particular, un 23.1% del total de estudios se desarrollan en contextos de formación de profesores, 3 de ellos en formación de maestros y los otros 6 en formación de profesores de secundaria. En 18 de los 39 estudios, un 46.2%, el contexto se centra en Secundaria y Bachillerato, mientras que un 15.4% del total de trabajos se centran en Educación Primaria. Existe sólo un trabajo que se centre en Educación Infantil. Cabe mencionar que sólo uno de los trabajos aborda varios niveles educativos a la vez, Primaria y Secundaria.

Nivel educativo	Frecuencia	Porcentaje
Universidad (no formación de profesores)	5	12.8%
Universidad (formación de profesores)	9	23.1%
Bachillerato	4	10.3%
Secundaria	14	35.9%
Primaria	6	15.4%
Infantil	1	2.6%
Contexto no escolar	1	2.6%

Tabla 5: Niveles educativos en los que se centran las investigaciones cualitativas en AIEM.

REFLEXIONES FINALES

Esta introducción supone un sucinto esbozo de las características de la investigación cualitativa, así como de la relación de dichas características con los diferentes elementos de cualquier investigación. El objetivo es evidenciar que la investigación cualitativa no sólo se caracteriza por el uso de ciertas técnicas, sino que implica un tejido complejo y coherente de decisiones que dan forma a un acercamiento a la realidad a estudiar. Asimismo, se ha evitado conscientemente cualquier comparación con la investigación de carácter cuantitativo, para huir de lo que Bryman (2001) califica como "guerra de paradigmas" debido al profundo apego que los investigadores sujetos a ciertas tradiciones de investigación sienten por cada tipo de aproximación metodológica.

La investigación cualitativa en general, y en Educación Matemática en particular, es consecuencia de la toma de decisiones de forma coherente, sobre cada uno de los distintos elementos de la investigación anteriormente descritos. Así, el objetivo, la pregunta, el objeto, y los métodos y técnicas de investigación se deben definir de tal manera que sean compatibles, llegando al grado de profundización que el investigador o equipo de investigadores pretenda, para dar respuesta a la pregunta de investigación. La elección de la concreción de cada elemento debe ser posteriormente acompañada de la decisión de cómo realizar la obtención y el procesamiento de los datos del estudio, de forma que, durante el proceso, el investigador se familiariza con los mismos, pudiendo llegar al momento del análisis. Dicho análisis puede adoptar muchas formas, si bien la elección más habitual es el análisis temático o análisis cualitativo de contenido (Krippendorf, 2013; Kuckartz, 2019). En este sentido, es necesario remarcar que la elección del tipo de análisis debe ser consecuencia de decisiones anteriores (sobre el objeto investigado, pregunta, etc.), y puede ser matizada por la idiosincrasia propia de la investigación que se desarrolla, desapegándose de la estructura estandarizada de análisis que se elija (Simon, 2019).

Este trabajo ha abordado algunos aspectos generales de la investigación cualitativa, si bien no todos. Un investigador que desarrolla una investigación cualitativa debe tener en cuenta, además de los descritos aquí, cuestiones como la estructura de análisis, la generación del reporte de investigación (en forma, por ejemplo, de artículo), o la posible transferencia de sus resultados a la sociedad. De forma transversal a todo el proceso de investigación, es necesario tener en mente aspectos éticos, que no suelen ser objeto de discusión, pero que, especialmente durante el proceso de formación de nuevos investigadores, deberían ser explicitados. Así, emergen cuestiones como la necesidad de informar a los profesores o alumnos (y sus tutores legalmente responsables) de que son objeto de estudio, así como del propósito de este. En el caso de que existan posibles relaciones de poder entre el investigador y el investigado, también se hace necesario explicitar al segundo la

voluntariedad de la participación en el estudio. Asimismo, debe existir, por parte de cualquier investigador en Educación Matemática, el compromiso de no manipular los datos obtenidos de forma que alteren la información que aportan. Finalmente, es importante que el investigado conozca el uso que se hará de los datos, así como la difusión que éstos puedan tener, dando su consentimiento informado, quedando esto registrado, o bien por escrito, o bien en una (video)grabación que permita identificarle.

En la revisión realizada de los trabajos de AIEM se observa la heterogeneidad de áreas de estudio y niveles educativos en los que se desarrollan investigaciones de naturaleza cualitativa, así como la variedad de técnicas e informantes que se toman, no limitándose estos últimos a personas físicas. Destaca también que los dos diseños más habitualmente elegidos son los que se presentan en este seminario: estudio de caso e investigación de diseño. Tras esta revisión, observamos por un lado que la investigación cualitativa tiene una presencia significativa en AIEM, y que. Por otro destaca, en relación con la dimensión ética anteriormente indicada, que no se explicita en los trabajos analizados el compromiso ético con los informantes, por lo que entendemos que lo asumen de forma implícita. También llama la atención que una porción significativa de los estudios no indica el diseño de investigación usado. Creemos que en próximos trabajos sería interesante contemplar explícitamente aspectos éticos, así como hacer un esfuerzo por caracterizar el tipo de diseño seguido, en pro de promover la claridad y transparencia en la difusión de los trabajos de investigación desarrollados.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto: "Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado" (RTI2018-096547-B-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España), y ha sido apoyado por el grupo de investigación DESYM (HUM-168), y el centro de investigación COIDESO. Asimismo, está vinculado a la Red MTSK, auspiciada por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Agee, J. (2009) Developing qualitative research questions: a reflective process. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 22(4), 431-447.

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2014). ¿Cómo transcriben los alumnos en sus cuadernos las reglas y técnicas de derivación? Un estudio en tres aulas de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 137-146). Salamanca: SEIEM.

Arnal-Bailera, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2018). Análisis de las anotaciones realizadas por profesores al calificar pruebas escritas de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar- González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 131- 140). Gijón: SEIEM.

Aspers, P. y Corte, U. (2019). What is qualitative in quantitative research. *Qualitative sociology, 42*, 139-1260.

Azcárate, C. (1998). Las entrevistas en investigaciones de didáctica de las Matemáticas. Análisis de algunas experiencias próximas. En E. Lacasta y J.R. Pascual (Eds.), *Actas del II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 125-31). Pamplona: SEIEM

Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Celtic Court: Open University Press.

Bergman, J.R. (1981). Ethnomethodologische Konversationsanalyse. En P. Schröder y H. Sterger (Eds.). Dialogforschung. (pp. 9-51). Düsseldorf: Schwann.

Bikner-Ahsbahs, A. (2019). The Research Pentagon: A Diagram with Which to Think About Research. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 153-180). Springer: ICME

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. y Presmeg, N. (2014). *Approaches to qualitative methods in mathematics education—Examples of methodology and methods*. Suiza: Springer.

Bikner- Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2006). Diversity of Theories in Mathematics Education. How can we deal with it?. *ZDM, 38*(1), 52-57.

Blumer, H. (1969). Symbolic interactionism: Perspective and method. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Bordieu, P. (1968). Structuralism and theory of sociological knowledge. *Social Research, 35*(4), 681-706.

Bryman, A. (2004). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la seiem (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En Marín, M., Fernández, G., Blanco, L. y Palarea, M. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 77-98). Ciudad Real: SEIEM.

Charmaz, K. (2014). *Constructing Grounded Theory*. Second Edition. London : Sage

Contreras, L.C. (2001). Un estudio cualitativo de corte interpretativo en el ámbito del pensamiento del profesor de secundaria. En M. Moreno, F. Gil, M. Socas y J.D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática V* (pp. 72-83). Almería: SEIEM.

Creswell, J. (2007). *Qualitative inquiry and research design.* 2ª ed. Thousand Oaks, CA: Sage.

Davis, B. (2019). Going to where your research takes you. En K.R. Leatham (Ed.), *Designing, Conducting, And Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 143-154). Suiza: Springer.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2000). Handbook of Qualitative Research (segunda edición). Sage

Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: a Postmodern perspective. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (Vol.. 9, pp. 22–39). NCTM

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 293-302). Valladolid: SEIEM.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Garfinkel, H. (1967). *Studies in Ethnomethodology.* Englewood Prentice Hall

Godino, J.D., Carrillo, J., Castro, W.F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M.C. y Wilhelmi, M.R. (2011). Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea, (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 33-50). Ciudad Real: SEIEM.

Huerta, P. (1998). La entrevista clínica y los mapas conceptuales. En E. Lacasta, J.R. Pascual (Eds.), *Actas del II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.56-66). Pamplona: SEIEM.

Krippendorf, K. (2013). *Content Analysis: an introduction to its methodology*. Thousand Oaks: Sage.

Kuckartz, U. (2019). Qualitative Text Analysis: A Systematic Approach. En G. Kaiser, N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*, (pp. 181-197). Suiza: Springer.

López, E.M., Guerrero, A.C., Carrillo, J. y Contreras, L.C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 73-94.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel.* Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Ortiz, A. (1998). Entrevistas semiestructuradas. Una aplicación en educación primaria. En E. Lacasta y J.R. Pascual (Eds.), *Actas del II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 33-55). Pamplona: SEIEM.

Planas, N. y Civil, M. (2010). El aprendizaje matemático de alumnos bilingües en Barcelona y Tucson. *Quadrante,* 19(1)*, 5-28*.

Rico, L. (1998). Presentación del primer seminario. En E. Lacasta y J.R. Pascual (Eds.), *Actas del II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 17-23). Pamplona: SEIEM.

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores J. y García Jiménez, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Simon, M. (2019). Analyazing Qualitative Data in Mathematics Education. En K.R. Leatham (Ed.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 111-122).

Scheiner, T. (2019). If we want to get ahead, we should transcend dualisms and foster paradigm pluralism. En G. Kaiser, N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*, (pp. 511-532). Suiza: Springer:

Toulmin, J. (1990). *Cosmopolis. The hidden agenda of modernity*. Nueva York: Free Press

[i] Asumimos que la toma de decisiones se realiza cuando el investigador ya se ha posicionado respecto del paradigma de investigación. Una casuística habitual en la investigación en Educación Matemática es la no explicitación del mismo, por lo que Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) invitan a realizar dicha explicitación.

REFLEXIONES PARA UNA FUNDAMENTACIÓN DEL ESTUDIO DE CASO COMO DISEÑO METODOLÓGICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Reflections for a foundation of the case study as a methodological design in Mathematics Education

Muñoz-Catalán, M. Cinta

Universidad de Sevilla

Resumen

En esta ponencia se presenta una caracterización del Estudio de Caso (EC) como diseño de investigación en Educación Matemática, diseño importado de las Ciencias sociales. Sobre la base de elementos discutibles identificados en las actas de los simposios de la SEIEM de los últimos cinco años, se identifican los rasgos definitorios del EC, el propósito y pertinencia de los distintos tipos de EC, y se discute qué es un caso, su diferenciación con el informante y su relación con el fenómeno del cual es un ejemplo. A continuación, se discuten las posibilidades epistemológicas del EC, cuestionando el papel de la generalización en este diseño y se presenta una articulación de actitudes y decisiones metodológicas que promueven un EC de calidad. Este abordaje del EC pretende aportar elementos para una adecuada fundamentación metodológica de una investigación conducida con EC. Se aportan preguntas finales para continuar con el debate metodológico.

Palabras clave: *estudio de caso, diseño metodológico, Educación Matemática, paradigma interpretativo, particularización versus abstracción.*

Abstract

This work aims to characterize Case Study (CS) as a research design in Mathematics Education, since it is has been imported from Social Sciences. On the basis of debatable elements identified in the last five years proceedings of the SEIEMsimposia, defining features of the CS and the purpose and relevance of the different types of CS are identifed. With respect the case, a discussion of what is a case is presented, its differentiation with the informant and his relationship with the phenomenon of which he is an example. Next, the epistemological possibilities of CS are discussed, questioning the role of generalization in this design and an articulation of attitudes and methodological decisions that promote a quality CS is presented. This approach to CS aims to provide elements for an adequate methodological foundation of a research conducted with CS. Final questions are provided to continue the methodological debate.

Keywords: *case study, methodological design, Mathematics Education, interpretative paradigm, particularization versus abstraction.*

INTRODUCCIÓN

En la literatura sobre metodología se usa diversidad de términos para referirse al Estudio de Caso (en adelante usaré el acrónimo EC). El modo en que designamos los conceptos informa de la naturaleza que se le otorga y del papel que juega en su contexto. Es habitual designarlo como método, pero en Educación Matemática, este término se usa para referirnos a las técnicas utilizadas tanto para la recogida como para el análisis de datos (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011; Muñoz-Catalán y Monteiro, 2016)[i]. Aunque en el contexto de un EC se utilizan diversos métodos para recoger y analizar los datos (ya sean de naturaleza cualitativos como cuantitativos), en él se

Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65 – 80). Valencia: SEIEM.

incluyen otros aspectos definitorios, como el caso propiamente dicho, y una perspectiva de cómo acercarse al estudio de ese caso. Por eso, el EC debe considerarse un diseño de investigación, porque constituye un marco general que guía el proceso de aplicación de métodos de investigación (Muñoz-Catalán y Monteiro, 2016).

No es fácil definir el EC, pues se trata de un diseño usado desde distintas áreas, con distintos enfoques e, incluso, desde distintos paradigmas. Mi objetivo en este trabajo es presentar una reflexión sobre el EC desde la Educación Matemática, para avanzar en la legitimación de la investigación en esta área, como demandan investigadores como Pirie (1998). El trabajo de Ponte (1994) supuso una contribución importante en este sentido, pero después de casi 30 años, con un importante desarrollo de la investigación en nuestra área de conocimiento, merece la pena convertirlo en objeto de reflexión y debate.

Considero que un buen investigador en Educación Matemática debe poseer una buena formación en metodología que le permita ser consciente de cada una de las fases del proceso de investigación y de las repercusiones que sus decisiones y lenguaje poseen en la coherencia de los elementos de la misma y, en definitiva, en la calidad de la investigación. He afrontado la caracterización del EC considerando la literatura metodológica en Ciencias Sociales, de donde procede este diseño; las aportaciones metodológicas realizadas desde el área, que no son frecuentes ni abundantes, y mi experiencia investigadora con EC desarrollada en el grupo SIDM[ii] desde hace casi 20 años,, en cuya agenda se ha priorizado la investigación siguiendo este tipo de diseño.

Desarrollo y organizo este trabajo sobre aspectos discutibles del EC identificados en la revisión de las últimas cinco actas publicadas de los simposios de la SEIEM. Así, presento los rasgos definitorios del EC, que son la singularidad, la profundidad y su desarrollo en contextos naturales (Bassey, 1999). Muestro distintos criterios para identificar tipos de EC y reflexiono sobre el propósito y pertinencia de cada uno de ellos para la Educación Matemática. Prosigo poniendo el foco en el propio caso, planteando su conceptualización como elemento diferente al informante, con el que habitualmente se identifica. A continuación, discuto las posibilidades epistemológicas del EC, cuestionando el papel de la generalización en este diseño. He querido finalizar con una propuesta de articulación de actitudes y decisiones metodológicas que promueven un EC de calidad, con especial interés en poner de relieve la especificidad impuesta por este tipo de diseño. Este abordaje del EC pretende aportar elementos para una fundamentación metodológica (no solo una descripción de cómo se ha procedido). Termino con unas reflexiones en las que planteo preguntas que pueden guiar la necesaria y continua reflexión en nuestra área de indagación.

1. PROBLEMATIZANDO EL ESTUDIO DE CASO DESDE SU USO EN LAS ACTAS DE LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM

Comencé este trabajo revisando las comunicaciones presentes en las últimas cinco actas de los simposios de la SEIEM, con foco en las que manifestaban utilizar un diseño de EC, con el fin de comprender cómo nuestra comunidad parece concebirlo y usarlo. Este análisis me ha permitido identificar aspectos que pueden ser objeto de discusión, sobre los cuales organizar este trabajo.

En casi la mitad de los estudios, la descripción del diseño no lleva asociada una referencia de expertos metodólogos en EC. Esta omisión pone de relieve que sus autores parecen aceptar la existencia de un consenso sobre su definición y características básicas, que contrasta frontalmente con la opinión de los expertos (Given, 2008; Bassey, 1999; Yin, 1984, entre otros). De la otra mitad, la mayoría cita, sobre todo, a Robert Stake, seguido de João Pedro da Ponte y, de manera puntual a Yin, Creswell o Bassey. ¿Existe realmente un consenso sobre lo que caracteriza a un estudio de caso? ¿Para qué tipo de preocupaciones es pertinente usar el EC? ¿Realmente es indiferente el autor en el que descansemos la fundamentación del diseño?

En general, he encontrado dificultades para localizar cuál era el caso: en muchas ocasiones no aparecía en el apartado de metodología, nombrándose muy someramente en el resumen o en el apartado de análisis y resultados. En la mayoría de ocasiones, solían ser personas (profesores, estudiantes para maestros, alumnos, formadores) pero, en otras ocasiones, lo conformaban otras unidades, como un conjunto de libros de texto de una editorial. De estos datos, emergen las siguientes preguntas: ¿Es relevante definir cuál es el caso en este tipo de diseño y por qué? ¿Es caso sinónimo de informante? ¿Qué puede ser un caso? ¿Es relevante plantearse de qué lo es?

Llama la atención que en algunas comunicaciones se utilicen términos como "muestra" o "sujetos" para referirse al caso. ¿Somos conscientes del posicionamiento ontológico y epistemológico con el que accedemos a la investigación? ¿Cuidamos deliberadamente el lenguaje que usamos como reflejo y búsqueda de coherencia con dicho posicionamiento? ¿Es compatible usar un diseño de EC con una metodología experimental como ocurre en una de las comunicaciones?

En lo que sí parece haber acuerdo es en concebir el EC como el estudio de la singularidad, pues el número de informantes oscila entre 1 y 9, a excepción de los estudios cuyos focos es un grupo de alumnos con su profesor. ¿Es suficiente esta justificación para considerar que la investigación sigue un diseño de este tipo? ¿Se podría considerar como EC una investigación con un informante, en la que se utilice un único instrumento de recogida de información aplicado de manera puntual? Entonces, ¿cuáles son los rasgos definitorios de un EC como diseño de investigación?

En íntima relación con esta idea, en las conclusiones de algunas comunicaciones se indica que el diseño seleccionado es una limitación del estudio porque la muestra es reducida. ¿Se trata realmente de una limitación o de una fortaleza? ¿Qué elementos caracteriza una investigación de calidad desarrollada con un EC? ¿En dónde reside, por tanto, el potencial de este diseño de investigación? En los siguientes apartados, se irá abordando la respuesta a las preguntas planteadas.

2. UN ENFOQUE PARA CARACTERIZAR EL EC DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: RASGOS DEFINITORIOS

En la revisión de la literatura metodológica sobre el EC, se observa la gran variedad de aportaciones y caracterizaciones proporcionadas, que ponen de relieve que no hay consenso sobre qué es, ni sobre sus características básicas. La mayoría de referencias o, al menos las pioneras (Yin, Stake, principalmente), proceden de la investigación en Ciencias Sociales por lo que esta complejidad se intensifica si tratamos de acercarnos a este diseño de investigación desde la especificidad de la Educación Matemática como área de indagación y de su objeto de estudio: el fenómeno educativo asociado al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Una manera de aproximarnos a la caracterización de un objeto consiste en diferenciarlo de otros que son próximos o parecidos en algún aspecto. Muchos de los estudios suelen considerar que utiliza un EC solo por el hecho de que se trabaja con un número reducido de informantes. Existen otros diseños que también se hacen desde la singularidad, como los diseños tipo *experimento* o la *investigación acción*[iii]. Por tanto, si la singularidad no es suficiente ¿cuáles son los rasgos distintivos de este tipo de diseño?

Los EC son elegidos cuando la pretensión del investigador es la comprensión de un fenómeno social en profundidad. En Educación Matemática nos ocupamos de fenómenos sociales de índole educativo en los que están implicados los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. ¿Cuáles son estos fenómenos sociales y cuál es su naturaleza?

Son ejemplos de estos fenómenos: el desarrollo profesional del maestro novel respecto de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento especializado movilizado para enseñar geometría, o el proceso de aprendizaje del concepto de área bajo un diseño de resolución de problemas. Todos ellos poseen una naturaleza compleja, están influenciados por diversas variables organizadas de manera sistémica y con distinto grado de afectación en función de la distancia al informante.

Strauss y Corbin (1994) representan esta influencia de variables como una matriz condicional, formada por círculos concéntricos que corresponden a distintos aspectos del mundo: "En los anillos más externos se colocan aquellos rasgos más distantes de la acción/interacción; mientras que los más internos pertenecen a aquellos rasgos que se encuentran más próximos a la secuencia de acción/interacción" (p. 275). Además, los fenómenos son el resultado de los significados que los informantes les atribuyen a su realidad, los cuales surgen a través de procesos de interacción en los distintos contextos a los que pertenecen y de interpretación (como indica el Interaccionismo Simbólico, Blumer, 1969). Esta manera de conceptualizar la realidad es consistente con la perspectiva ontológica del *construccionismo* (constructionism) que Bryman (2012) caracteriza así:

> Los fenómenos sociales y sus significados continuamente son construidos por los actores sociales. Esto implica que los fenómenos sociales y las categorías no solo se producen a través de la interacción social, sino que están en un constante estado de revisión (p. 17).

Dar cuenta de esta realidad exige del investigador un compromiso con lograr una comprensión profunda del fenómeno que estudia, es decir, una postura en la que se opte por ir más allá de los rasgos observables para penetrar en la complejidad de la realidad, tratando de dar explicaciones del delicado equilibrio entre las variables y de las posibles aparentes contradicciones. Aunque las variables ubicadas en todas las capas de esa matriz condicional son importantes, las capas más internas son las que resultan clave para comprender la realidad tal y como es vivida por el informante. Es más fácil acceder a esas capas cuando penetramos en esferas más íntimas del entorno del informante y permanecemos tiempo con él y en sus entornos.

La comprensión que se logra en un EC es una construcción que el investigador realiza como consecuencia de los significados que va atribuyendo al fenómeno estudiado, a través de la interacción con el informante y con los contextos donde este se desarrolla (postura denominada "interpretativism", Bryman 2012). En sintonía con Bassey (1999), el investigador, por tanto, se constituye en una variable potencial de la investigación, con cuyas preguntas y presencia durante las observaciones puede cambiar la situación que está estudiando. Por tanto, los datos que habitualmente se recogen son principalmente de naturaleza verbal (notas de campo, diarios, transcripciones de entrevistas y de observaciones de aula, entre otros) y, aunque en ocasiones se puedan realizar análisis numéricos puntuales (como la primera fase del análisis de interacciones que realicé en Muñoz-Catalán, 2009), la riqueza está en el análisis cualitativo que ayuda a descubrir los significados que los informantes le atribuyen a su realidad (enfoque cualitativo).

Otro aspecto de los fenómenos que estudiamos es que son únicos para cada persona, pues se producen a través de la conjunción de las características y decisiones personales y de los contextos en los que se desenvuelve la persona. Contextos que, por otra parte, son también únicos y dinámicos. Esta complejidad, junto con la exigencia de la profundidad en la comprensión, determina que un rasgo propio del EC sea el estudio de la singularidad.

Considerando lo destacado hasta el momento, el EC puede definirse como: "el estudio de una singularidad conducido en profundidad en entornos naturales" (Bassey, 1999, p. 47). Este estudio se sostiene en la creencia de que los sistemas humanos se desarrollan de una manera holística, integral, por lo que para comprender "por qué las cosas suceden como lo hacen, y generalizar o predecir a partir de un solo ejemplo, se requiere una investigación en profundidad de las interdependencias de las partes y de los patrones que emergen" (Sturman, 1997, p. 61).

El lector habrá apreciado que el modo en que he descrito la naturaleza del fenómeno educativo que estudiamos en Educación Matemática (postura ontológica), lo que podemos conocer de él (postura epistemológica) y el modo en que lo abordamos (postura metodológica) son consistentes con el paradigma de investigación interpretativo (Bassey, 1999; Bryman, 2012).

Este posicionamiento nos[iv] lleva a estar más próximos a autores como Stake (1995, 2005) o Bassey (1999) y más alejados de Yin (1984). Yin no es explícito a este respecto, pero el modo en que describe el EC y aborda aspectos de objetividad y validez de la investigación, parece indicar que su postura ontológica y epistemológica está más próxima a una tradición positivista (como también ha constatado Bassey, 1999). Desde esta perspectiva se deduce que la referencia que se utiliza para fundamentar o explicar el enfoque adoptado sobre el EC no es baladí, pues da cuenta del paradigma del investigador y este siempre ha de buscar la coherencia con el resto de la investigación.

3. FINALIDAD DEL ESTUDIO DE CASOS Y TIPOS

¿Cuándo es pertinente usar el EC como diseño de investigación? Los rasgos definitorios proporcionados en el apartado anterior suponen una primera aproximación a esta pregunta, pero la respuesta sería incompleta si no nos planteamos a qué tipo de objetivos permite dar respuesta y qué distintos tipos de EC existen. Mi reto es plantear la reflexión a estas cuestiones sobre su pertinencia en Educación Matemática, a la luz de mi experiencia.

En la literatura de investigación existen diferentes propuestas de clasificación del EC en función de varios criterios. Yin (1993) identifica 3 formas de EC: *exploratorio, descriptivo* y *explicativo*, que describe de la siguiente forma:

> Un estudio de caso exploratorio ... tiene como objetivo definir las preguntas e hipótesis de un estudio posterior (no necesariamente de caso) ... Un estudio de caso descriptivo presenta una descripción completa de un fenómeno dentro de su contexto. Un estudio de caso explicativo presenta datos relacionados con las relaciones causa-efecto, explicando qué causas produjeron qué efectos. (p. 5)

La selección del diseño de investigación viene definida por el tipo de pregunta al que se pretende dar respuesta. Para Yin (1993), el EC es apropiado para responder preguntas que comiencen por "¿cómo (acontece un determinado fenómeno)?" y "¿por qué (se produce de una determinada manera)?". Eso no significa que sea el único diseño que responde ese tipo de preguntas, pero destaca que es el único tipo de diseño que permite abordar fenómenos contemporáneos (para diferenciarlo de estudios históricos), en el que no es posible o deseable realizar un control de variables (para diferenciarlo de los experimentos).

Desde el campo educativo, Bassey (1999) ofrece una clasificación centrada en el tipo de resultados que pueden obtenerse, identificando tres tipos:

> *Estudios de caso evaluativos*: "investigación en programas, sistemas, proyectos o eventos educativos para determinar su valía, juzgados por el análisis de los investigadores con el fin de transmitirlo a las audiencias interesadas" (p. 58). Se incluirían en esta categoría aquellos EC orientados a evaluar un nuevo enfoque pedagógico para la enseñanza de las matemáticas en un centro educativo, por ejemplo. En épocas de cambio curricular suelen proliferar este tipo de estudios.
>
> *Estudios de caso de narración de historias y dibujo de imágenes*: "Historias narrativas o informes narrativos de proyectos, programas, instituciones o sistemas educativos que merecen ser contados a audiencias interesadas" (p. 58).
>
> *Estudios de caso de desarrollo y comprobación de teoría*: "son estudios particulares de cuestiones generales que tienen el objetivo de desarrollar 'generalizaciones difusas' (de carácter más provisionales) o generalizaciones (menos provisionales) y transmitirlas junto a su contexto y evidencias a las audiencias interesadas" (p. 58).

Aún con distinto criterio, esta clasificación también identifica la pertinencia de este diseño para el desarrollo de teoría, por permitir poner el foco en la explicación de los fenómenos, que ahondan en *cómo* y *por qué* ocurren. Se hará referencia a estas generalizaciones difusas o *fuzzy generalization* en el siguiente apartado.

La clasificación que proporciona Stake (1995, 2005) pone el acento en el grado de interés que posee el caso por sí mismo en una investigación. Diferencia entre los EC *intrínsecos* y EC *instrumentales*. Un *EC* intrínseco es aquel en el que el investigador desea adquirir una mejor comprensión de un caso particular porque por sí mismo es de interés. Este tipo de EC se da, por ejemplo, cuando un profesor decide estudiar un alumno por las dificultades específicas que plantea o cuando existe un centro educativo que resulta interesante por adoptar un enfoque pedagógico particular. Para Bassey (1999), los *EC de narración de historias o dibujo de imágenes* serían de este tipo y podría corresponderse con los estudios *descriptivos* de Yin (1993). Stake también consideraría como un EC intrínseco una investigación centrada en la evaluación de un programa educativo.

El *EC* instrumental es aquel que permite lograr una mejor comprensión respecto de un tema determinado o pretende desarrollar una proposición teórica. El EC se convierte en un medio para lograr una mejor comprensión de un fenómeno general, del cual el caso seleccionado es un ejemplo. Para Bassey (1999), sus *EC de desarrollo y comprobación de teoría* entrarían dentro de esta clase y, con relación a la clasificación de Yin (1993) diferenciaría el *EC de desarrollo de teoría* como un *EC exploratorio* y el *EC de comprobación* de teoría como un *EC explicativo*.

Dentro de los EC instrumentales, Stake (1995) incluye los *estudios de caso colectivo*, en los que el foco se encuentra en el estudio de más de una singularidad con la finalidad de comprender mejor el fenómeno del que forman parte. El informe final no es la suma de los casos estudiados, sino que debe ser consecuencia de la articulación de los estudios individuales, identificando los rasgos claves y propios que aportan información relevante sobre el fenómeno estudiado.

La familiarización con estas clasificaciones da al investigador la posibilidad de adoptar mayor control del proceso de investigación al proporcionarle mayor comprensión de las particularidades de su EC, argumentos sobre la finalidad pretendida, tipo de preguntas a las que responder y el rol del caso, y así disponer de fundamentos para las decisiones metodológicas sucesivas. Estas cuestiones, sin embargo, no son contempladas en la mayoría de las comunicaciones que usan el EC, solo en aquellas cuyos investigadores están habituados a trabajar con este diseño.

Sin menoscabo a otros tipos, los EC instrumentales (Stake, 1995) son pertinentes para indagar en los fenómenos que preocupan en Educación Matemática. En los estudios acometidos en el SIDM, el acceso a profesores en sus aulas nos está permitiendo responder a la inquietud que moldea nuestra agenda de investigación de comprender el conocimiento y desarrollo profesional respecto de la enseñanza de las matemáticas. En ellos, no solo respondemos a "cómo" y "por qué" como plantea Yin (1993), sino que abordamos la respuesta a "qué". Consideramos que también es relevante identificar el conocimiento especializado de un profesor respecto de la enseñanza de un determinado contenido porque nos proporciona contenido para la formación del maestro emergente desde la práctica. No obstante, nuestra concepción de "qué sabe" está intrínsecamente unida a "cómo lo sabe", aspecto que no suele ser accesible mediante un cuestionario, por ejemplo, pues el conocimiento del profesor no es explícito o proposicional. Para tal fin, se requiere interpretación del investigador sobre la base de las manifestaciones, artefactos y acciones de los informantes. En definitiva, la respuesta a ese "qué" requiere comprender al profesor en su contexto e interactuando con sus alumnos o en los contextos donde participa.

En algunos de nuestros estudios hemos contado con informantes muy interesantes como docentes de matemáticas por el compromiso que tenían por la mejora de su práctica a través de la reflexión individual y la investigación colaborativa. Esta descripción podría encajar con los EC intrínseco (Stake, 1995), pero en estos casos, la línea divisoria entre este tipo y los EC instrumentales aparece muchas veces difusa, como se verá en el siguiente apartado.

4. CARACTERIZACIÓN DEL CASO. FOCO EN LA PARTICULARIZACIÓN.

Es difícil encontrar o proporcionar una definición de caso, al igual que ocurre con el propio EC, por las mismas razones antes aludidas. Para diversos autores, lo que caracteriza al caso es que se trata de un sistema delimitado y complejo (Stake, 1995, 2005, Cohen y Manion, 2007), cuyas partes constituyentes no tienen por qué funcionar bien. Para Stake (1995) un caso puede ser un alumno, un profesor, un programa educativo, un centro escolar, la unidad formada por el profesor y sus alumnos. No sería para él un caso la enseñanza de un profesor porque "carece de la especificidad, de la delimitación para ser denominada como caso" (p. 2).

La motivación por estudiar un caso puede ser variada. Unas veces, el caso viene dado, como cuando un profesor decide estudiar un alumno que muestra una dificultad especial o cuando se debe evaluar un programa. Otras veces, el caso es consecuencia de una decisión deliberada, bien porque queramos aprender sobre ese caso particular (que daría origen al EC intrínseco) o bien, porque nos permita aprender sobre un problema más general (motivaría EC instrumental). La frontera entre estas dos motivaciones últimas no está muy bien definida pues incluso en los estudios en los que el informante es muy interesante por sí mismo, se pretende extraer una mayor comprensión sobre otro proceso más general. Eso es lo que ocurre, por ejemplo, en el Estudio de Caso de Abigaíl (Rothery y Flores, 2014) sobre los conceptos de orden y distancia de las fracciones y decimales en la recta numérica. En este estudio, como en la mayoría de los consultados, no se explicita que se trate de un EC intrínseco, pero puede considerarse como tal por el hecho de ponerle nombre al informante y hacer referencia a él en todo el texto e incluso en el título. Sin embargo, tres de las cuatro conclusiones se formulan sin referencia a Abigaíl, observándose un esfuerzo por trascender el caso.

Precisamente debido a ese esfuerzo por trascender el caso, por obtener una mejor comprensión del fenómeno del que el caso es un ejemplo, en muchas ocasiones el caso suele elegirse y caracterizarse en términos de representatividad. ¿Es este enfoque el más apropiado? ¿Qué cuestiones debemos considerar al elegir o presentar un caso?

La literatura de investigación y nuestra experiencia con los EC ponen de relieve la necesidad de la consideración conjunta de dos aspectos. En primer lugar, es fundamental identificar el caso en términos de "¿de qué es un caso?", es decir, del fenómeno educativo sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas del cual constituye un ejemplo (sin el matiz de ejemplar). Ese ajuste es clave para valorar la idoneidad del informante elegido, por lo que la definición/caracterización de la unidad de análisis debe explicitarse en el informe de investigación del EC. Pero, ¿qué información hay que proporcionar sobre esa unidad? Para responder a esa pregunta, conviene romper la habitual e incorrecta asociación entre informante y caso, asociación que suele acentuarse cuando el informante es único. El caso está formado por el informante y los límites que enmarca la relación con él en el marco de la investigación. Según Silverman (2008), esos límites deben identificarse en una fase temprana de la investigación y se refieren a dos dimensiones. La dimensión temporal hace referencia tanto al tiempo empleado en el trabajo de campo como al periodo al que se refieren los datos finalmente seleccionados. La dimensión contextual hace referencia a los contextos familiares, de centro, de aula, de formación en los que se desarrolla la acción. En el informe de investigación, habría que justificar aquellos aspectos incluidos en esos límites que son necesarios para comprender el caso, así como la pertinencia del informante elegido.

Ilustraré esta idea con Inés, una informante muy especial, de los EC de Climent (2005) y de Aguilar (2016). Cuando participó en el primer estudio llevaba más de 20 años como maestra de Primaria. Su inicial rechazo a las matemáticas y la conciencia de sus carencias en el conocimiento matemático le llevó a comprometerse con mejorar su formación y a participar en un contexto colaborativo de desarrollo profesional con formadores-investigadores. Inés se constituyó en una informante idónea para comprender cómo puede caracterizarse el desarrollo profesional de una maestra experta, en parte por la capacidad, implicación y transparencia (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011) de sus

reflexiones vertidas en los diarios, reflexiones que tenían potencial para promover su desarrollo profesional. El EC de Climent fue de naturaleza longitudinal y se utilizaron una gran variedad de instrumentos de recogida de información (observaciones de aula, entrevistas, diarios de reflexión, sesiones de formación audiograbadas, entre otros). Mientras que en ese proceso de desarrollo sus concepciones sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas sufrieron un afianzamiento, su conocimiento para enseñar matemáticas se vio enriquecido, tomando conciencia de que necesitaba saber más matemáticas que el contenido matemático escolar. Estos resultados, junto a sus características personales como profesora, la convirtieron en informante idónea para el EC de Aguilar. Siendo la misma informante, no obstante, no constituía el mismo caso atendiendo a los límites de Inés como informante en cada estudio. Desde un punto de vista temporal, al tratarse de un estudio transversal, solo se tomaron como datos las observaciones de una secuencia didáctica particular sobre polígonos diseñada desde la perspectiva de resolución de problemas en el contexto de la investigación de Climent; y, desde la perspectiva contextual, no se consideró el contexto de formación en el que Inés participó.

En cualquiera de los dos estudios, Inés como caso no era típico, sino singular. En el EC de Aguilar deseábamos adquirir una mejor comprensión de su conocimiento especializado para enseñar polígonos y de sus concepciones, porque su práctica era por sí misma muy significativa. De ahí que consideráramos que esta investigación se trataba de un EC intrínseco (Stake, 1995). Esta es una de esas investigaciones en las que las fronteras entre el EC intrínseco e instrumental están difusas, pues los resultados obtenidos con el caso de Inés ¿no podían contribuir a comprender mejor el conocimiento necesario para enseñar polígonos en primaria (desviándose el foco al fenómeno educativo del que el caso de Inés es un ejemplo)?

De ahí que, en sintonía con Stake (1995), y según nuestra experiencia, consideramos que, a la hora de elegir un informante y presentarlo como caso, se debe poner el acento en las posibilidades de aprendizaje que nos proporciona, frente a su tipicidad: "El primer criterio debería ser maximizar lo que podemos aprender" (p. 4). Todo caso posee rasgos singulares y rasgos comunes a otros. Es habitual en los informes de EC poner el acento en el mayor número de atributos comunes, es decir, en lo que lo hacen típicos o representativos de la clase a la que pertenecen, en parte debido al interés por *generalizar* los resultados (aspecto que se abordará en profundidad en el siguiente apartado). Bajo este criterio también se suelen optar por EC colectivos, pero su potencial para la generalización es común a los EC de informante único. Según nuestra experiencia, coincidimos con Stake quien, de una manera sensata, advierte: "En un EC instrumental, algunos casos harían un mejor trabajo que otros. Algunas veces, un caso "típico" funciona bien, pero a menudo, un caso inusual ayuda a ilustrar aspectos que se pasan por alto en casos típicos" y que "muchos investigadores … sienten que un buen estudio de caso no depende de ser capaz de defender la tipicidad de theta (así designa el caso)". (p. 4)

No obstante, con independencia de si en el caso predominan los rasgos comunes o singulares o de si se trata de un EC instrumental o intrínseco, la preocupación primera del investigador ha de ser el propio caso. Stake (1995) nos insta a comprender el caso, a buscar su singularidad, la cual no está reñida con el interés por *trascender* el caso, el cual surge en una fase final de la investigación.

5. POSIBILIDADES EPISTEMOLÓGICAS DEL EC: EL PROCESO DE ABSTRACCIÓN

Como se ha destacado en apartados anteriores, el estudio de la singularidad es uno de los rasgos esenciales de este diseño cuya ventaja radica en que permite ganar en profundidad en la comprensión del fenómeno estudiado. Sin embargo, esta fortaleza se suele valorar como una limitación del estudio, tanto por los propios investigadores, como por los revisores de revistas, que priorizan estudios cuantitativos, centrados en el uso de muestreo, los cuales ganan en extensión, aunque pierdan en profundidad.

Lo que sustenta esta posición es un desconocimiento del papel epistemológico del EC, pero también manifiesta una concepción particular sobre el significado del término generalización en un EC. En una revisión que Bassey (1999) realiza sobre la caracterización del EC en manuales y *handbook* sobre metodología de investigación en Educación, se pone de relieve que desde el principio estaba presente la preocupación por el papel que la generalización posee en este diseño. Es Stenhouse (1988) quien comienza a matizar qué se entiende por generalización en un EC:

> El EC no excluye el interés por la generalización, y muchos investigadores buscan desarrollar teorías que profundicen en las condiciones variables de la acción o en aplicaciones fundadas en la comparación de caso con caso. La generalización y la aplicación son cuestiones de juicio más que de cálculo, y la tarea del estudio de caso es producir informes ordenados de la experiencia que inviten al juicio y ofrezcan evidencia a la que el juicio pueda apelar. (p. 49)

Yin (1984), considerado como uno de los mayores exponentes del EC en Ciencias Sociales, para responder a la pregunta de cómo se puede generalizar de un caso único propuso la diferenciación entre la *generalización estadística* y la *generalización analítica*. La primera se produce cuando se realizan inferencias sobre una población o universo partiendo de los datos empíricos obtenidos en una muestra. Habitualmente, los resultados de una investigación en las Ciencias Experimentales suelen expresarse así: "si (se dan las siguientes condiciones) entonces (se producirá tal cosa)". Si trasladáramos al campo educativo esta expresión podría considerarse como equivalente a: "Haz y en lugar de x y tus alumnos (o los profesores) aprenderán más". Coincido con Bassey (1999) en que esta forma discursiva va en contra de la ética de la investigación educativa al omitir los detalles del contexto y las circunstancias que le dan significado a esa relación observada. Por otro lado, porque en las generalizaciones estadísticas no hay lugar para la excepción, ya que, en caso de haberla, la declaración se refuta y deja de ser válida. Yin, abogaba por la generalización analítica, proceso por el cual los investigadores "expanden y generalizan teorías" (p, 21).

En 1978, Stenhouse también planteaba la distinción entre dos tipos de generalizaciones: las generalizaciones predictivas y las retrospectivas, equivalentes a las generalizaciones estadísticas y analíticas, respectivamente, propuestas por Yin (1984). A Stenhouse le preocupaba la trasferencia de los resultados de la investigación al aula por parte de los maestros y, en este sentido, aclaraba que "mientras que las generalizaciones predictivas pretenden reemplazar la necesidad del juicio individual, las generalizaciones retrospectivas buscan fortalecer el juicio individual donde no puede ser reemplazado" (Stenhouse, 1978, en Bassey, 1999, p. 32).

En la investigación en Educación Matemática, como ocurre en el ámbito de las Ciencias Sociales, la perspectiva ontológica *construccionismo* (Bryman, 2012) supone asumir el carácter pragmático de las teorías sobre "la verdad" (Ritchie y Lewis, 2005), según la cual, una interpretación es verdadera si proporciona ayuda para realizar acciones que produzcan los resultados deseables o permite predecir. En este sentido, Glaser y Strauss (1967), creadores de la *Grounded Theory*, cuando justifican la necesidad de desarrollar teoría como consecuencia de una investigación sobre fenómenos sociales, explican el valor epistemológico de las *teorías emergentes* en cualquiera de sus niveles (sustantiva o formal) sobre la base de su plausibilidad, puesta de relieve bajo dos criterios de evaluación: *el ajuste*, o la facilidad que presenten para aplicarlas a los datos de los cuales han surgido y, *el funcionamiento*, es decir, la capacidad para explicar la conducta estudiada.

Por estos motivos, un EC debe tender a la conceptualización del caso frente a su mera descripción. Se trata de trascender lo observado en el caso, identificando los procesos que subyacen a él; capturar las variables que lo condicionan, las relaciones que se establecen; atender a las regularidades, a los rasgos clave, a los cambios en los modelos o patrones de acción e interacción (Muñoz-Catalán, 2009). Este acto de trascender el caso proporciona oportunidades para el desarrollo de proposiciones teóricas (en cualquier nivel de desarrollo teórico). Además, en la medida en que analizamos y especificamos en el estudio las condiciones y las consecuencias de las

proposiciones teóricas, éstas van adquiriendo la capacidad de predicción "en el sentido de que, si se cumplen condiciones similares, ocurrirán aproximadamente consecuencias similares" (Strauss y Corbin, 1994, p. 278). En realidad, están demandando una "apertura del investigador, basada en el carácter del 'para siempre' provisional de una teoría" (Strauss y Corbin, 1994, p. 279).

Considerando la posibilidad predictiva de los resultados de un EC, Bassey (1999) propuso el término de las generalizaciones difusas (fuzzy generalizations) para caracterizar las teorías procedentes de un estudio de caso cualitativo, con el fin último de que la investigación fuera una herramienta que influyera en la política educativa. Propone que las aseveraciones teóricas adopten esta estructura: "*haz y en lugar de x y tus alumnos puede que aprendan más*". Supone decir que algo puede ocurrir, pero sin medir su probabilidad. La introducción de un elemento de incertidumbre, ni es un cambio trivial, ni se trata de una confesión de debilidad sobre el modo en que se ha conducido la investigación. Trata de considerar la complejidad del proceso de aprendizaje y enseñanza. Por tanto, la credibilidad de una 'generalización difusa' procede de la relación que debe existir entre esta y el informe escrito que la apoya, en el que es imprescindible que vaya acompañado de las condiciones en las que se ha desarrollado el fenómeno estudiado. Un informe con estas características, según Bassey (1999), puede animar a otros a actuar en sus propias escuelas y circunstancias, fortaleciendo el juicio y la responsabilidad individual, a los que aludía Stenhouse (1978). Invita al lector a identificar las evidencias que apoyan la proposición teórica, a discutirla con compañeros, a reflexionar sobre ella, a comprobar en su clase su eficacia y a informar de los resultados. Desde esta perspectiva, se da la oportunidad para que la investigación se convierta en acumulativa, pues si un profesor-investigador replica un determinado estudio y encuentra dificultades que el primero no había observado, la 'generalización difusa' podría incluir una expresión del tipo "…siempre y cuando…". Este aspecto de la acumulación del conocimiento es especialmente significativo en el EC, pues la comprensión del fenómeno de estudio se va enriqueciendo a medida que se van abordando desde distintos casos, cada uno de los cuales con elementos de variación que ayudan a completar y matizar las teorías obtenidas (respecto de nivel educativo, tipo de centro, grado de experiencia, contenido matemático, etapa educativa, etc.).

Con independencia de si el formato resultante de un EC es una aseveración (*assertion*) (Stake, 2005), una teoría emergente (Glaser y Strauss, 1967), o una generalización difusa (Bassey, 1999), los autores comparten el hecho de que el informe de investigación resultado de un EC, desde un enfoque epistemológico, se caracteriza por los siguientes atributos:

> -Contiene los resultados de la investigación del propio caso, junto con las variables que han condicionado el fenómeno de estudio para dar cuenta de la complejidad inherente a él.
>
> -Aspira a trascender al caso estudiado: Tender a la conceptualización, frente a la descripción del caso (Pretensión teórica).
>
> -El grado de "verdad" de las aseveraciones teóricas se valoran desde su plausibilidad y carácter pragmático (Ritchie y Lewis, 2005), esto es, si iluminan la toma de decisiones para obtener resultados deseables o permiten realizar predicciones.
>
> -La generalización de las proposiciones teóricas obtenidas en un EC no se caracteriza por ser estadística, sino analítica. Integran un matiz de provisionalidad e incertidumbre, aspectos que apelan al juicio y responsabilidad del que interpreta y usa los resultados de la investigación.
>
> -A diferencia de las generalizaciones estadísticas que se validan o refutan; las generalizaciones analíticas se "acumulan", incorporando las nuevas condiciones y consecuencias obtenidas.

6. REFLEXIÓN SOBRE LA CALIDAD DE UN EC: ACTITUDES Y DECISIONES METODOLÓGICAS QUE LA PROMUEVEN

La calidad de la investigación siempre ha sido una preocupación en nuestra comunidad de investigación. Sin embargo, el modo de caracterizar la calidad depende de la existencia de distintas posturas (Bryman, 2012). Inicialmente se importaron los criterios utilizados para valorar las investigaciones realizadas con un enfoque positivista. No obstante, la toma de conciencia de una perspectiva ontológica según la cual se considera que no existe una realidad objetiva, al menos a la que podamos acceder o captar en nuestros informes, y de que la medición de los fenómenos que estudiamos no forma parte de la preocupación de los investigadores cualitativos, hizo que se optara por adaptar la definición de dichos criterios, sobre todo, los de fiabilidad (reliability) y validez (validity) (pues el de replicación no es posible porque los fenómenos educativos son irrepetibles) al caso de la investigación con paradigma interpretativo. Dado que la medición no es una preocupación en este paradigma el criterio de validez podría no ser aplicable a estos estudios por no captar la naturaleza de esta investigación.

Otra postura ha consistido en modificar también la terminología para referirse a los criterios. Aunque fuera fácil identificar su equivalencia a los criterios clásicos, pretendían poner el acento en cuestiones propias de este tipo de investigación. Así, Guba y Lincoln (1994) propusieron los criterios generales de Autenticidad y Confiabilidad para valorar los estudios cualitativos. Este último está conformado por cuatro criterios que, de alguna manera, tienen una correspondencia con los criterios tradicionales, incluidos en paréntesis: Credibilidad (validez interna), transferibilidad (validez externa), confiabilidad (reliability) y conciencia y control de los propios valores y posicionamientos (*confirmability* en inglés (objectivity). Así, con el criterio de Autenticidad, plantea la necesidad de que se valore si en la investigación se integra con justicia la perspectiva de los miembros del entorno social, si les ayuda a comprender mejor su entorno y sus perspectivas o si les anima a implicarse en mejorar sus circunstancias; cuestiones relacionadas con el impacto político y social más amplio de la investigación.

En esta línea, pero desde la Educación Matemática, Kilpatrick (1995) propone: pertinencia, validez, objetividad, originalidad, rigor y precisión, capacidad para predecir, reproductibilidad, y relación con las matemáticas y su enseñanza. Estos criterios han sido redefinidos por otros investigadores (Schoenfeld, 2000) con el objetivo de comunicar la naturaleza de la investigación en Educación Matemática. Sin embargo, también han sido cuestionados por considerarse bastante rígidos. En esta línea, Simon (2004) afirma que "el fortalecimiento de la investigación en Educación Matemática no se basa en la aceptación de un conjunto de criterios, sino más bien en una discusión dinámica y continua sobre la calidad de la investigación" (p. 157) y asienta precisamente en ese continuo debate el progreso de esta área de investigación. Esta idea es apoyada por Niss (2018), que insiste en esa idea de superar el estricto cumplimiento de los criterios de calidad e invita a los investigadores a reconsiderar, analizar y discutir las cuestiones de calidad, porque "de la misma manera que no debemos respaldar solo una comprensión y versión de democracia…no debemos permitir que paradigmas demasiado estrechos y rígidos pongan en peligro nuestras discusiones o nuestro campo de investigación" (p. 48).

Los actuales enfoques en Educación Matemática apuestan por considerar la calidad de la investigación en relación con la fuerza de los argumentos del investigador. Esta idea es el punto de partida de la propuesta de Simon (2004) y está presente en las reflexiones que plantean Potari (2019) y Kaiser (2019) sobre cómo se aborda el proceso de revisión en las prestigiosas revistas *Journal of Mathematics Teacher Education* y *ZDM*, respectivamente.

Como cualquier investigación en Educación Matemática con un enfoque cualitativo, los EC deben satisfacer las siguientes dos asunciones principales indicadas por Simon (2004):

a) La investigación ha de ser una indagación auténtica. No se debería acometer un EC solo por la existencia de un informante sobre el que recoger datos, sino que el estudio de ese caso debe ayudar a dar respuestas a preguntas significativas y relevantes para el área.

b) La investigación ha de promover avance en el conocimiento del área de Educación Matemática. La contribución de un EC puede estar relacionada con hallazgos empíricos importantes o con nuevas perspectivas teóricas o metodológicas. De manera general, puede estar orientada a la comprensión de la naturaleza del pensamiento matemático o del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (enfoque teórico), o a la mejora de la enseñanza de las matemáticas (enfoque práctico) (Schoenfeld, 2000), siendo el primero la base para el segundo. Esto es posible si en un EC se articulan 2 procesos de manera consecutiva: la particularización en el caso (comprensión de la complejidad inherente al caso) y la abstracción, identificando los rasgos del fenómeno estudiado que, junto a los rasgos claves del caso, permitan a interesados valorar la adecuación de los resultados.

Para Simon (2004) un trabajo de investigación de calidad, ya sea una investigación empírica como teórica, es aquel en el que la investigación se ha conceptualizado como la construcción de un argumento bien fundamentado, el cual requiere: la formulación de preguntas de investigación pertinentes para el área de conocimiento; la explicitación y justificación de marco teórico y metodológico; una evidencia empírica sólida de las afirmaciones e interpretaciones proporcionadas; coherencia entre preguntas de investigación, marco teórico, diseño y resultados; y la existencia de una contribución que sea significativa para el área. ¿Qué actitudes y decisiones metodológicas contribuyen a lograr un EC de calidad? Sin pretensión de exhaustividad, proporciono una articulación de ideas que considero que pueden ser pertinentes para promover el debate sobre cómo otorgar calidad a una investigación con EC.

a) Adoptar una postura ética, tanto respecto a los informantes (a su dignidad y privacidad) como al propio proceso de investigación, en el que prime la honradez en la recogida, análisis y publicación de los resultados como en la búsqueda de "la verdad" socialmente mediada.

b) Poseer una actitud de *reflexividad* (reflexivity), como imperativo epistemológico. Como una investigación no es neutra y el investigador es una variable potencial de la investigación (Bassey, 1999), muchos investigadores sociales, como Hammersley y Atkinson (1995), Stake (2005), Ritchie y Lewis (2005) instan a reflexionar sobre las implicaciones que sus métodos, sus valores, sesgos, decisiones e, incluso, su mera presencia en las situaciones, poseen en el conocimiento del mundo social que construyen. La toma de conciencia de estas cuestiones ayuda a tener más control sobre cómo guiar el proceso de investigación.

c) Apostar por la exigencia en la justificación de las decisiones adoptadas, haciéndolas explícitas, en aras de mostrar que la investigación realizada es comprensible y razonable en sus procedimientos y resultados. No es cuestión solo de mostrar la honestidad del investigador, sino de la apertura a la crítica externa (Pirie, 1998). Burton (2002), en su capítulo "Where is the why?", criticaba la ausencia de transparencia y claridad con la que los investigadores en Educación Matemática proporcionan acceso a las elecciones realizadas y a las razones que las motivaron. Simon (2004) fundamenta en esta idea la calidad de la investigación, incidiendo en los aspectos que se sintetizan en la figura 1. Muchos de ellos respaldados por Potari (2019) y Kaiser (2019).

Junto a la explicitación y justificación de estos elementos, añadiría la referencia al paradigma de investigación, con la toma de conciencia, por parte del investigador, de sus tres elementos constituyentes (perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica, descritas en Muñoz-Catalán y Monteiro, 2016). El paradigma es el elemento metodológico que da cohesión y orienta todas las decisiones de la investigación. En Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) constatamos que en los estudios de índole cualitativo publicados en las Actas de los simposios de la SEIEM en sus primeros 15 años

de existencia, los autores no lo explicitaban, hecho que se ha repetido en la mayoría de artículos analizados para este trabajo.

d) Ser meticuloso con caracterizar la especificidad del diseño de EC utilizado. No suele haber dos EC iguales, ni incluso tomando a la misma persona como informante. Así, no solo se trata de justificar por qué el EC es el diseño que mejor se ajusta a las preguntas de investigación formuladas, sino también justificar de qué tipo de EC se trata, quién es el informante y caracterizarlo como caso, especificando de qué es un caso, su papel en la investigación respecto del fenómeno del que es un ejemplo, así como sus límites temporales y contextuales (como se ha indicado en el apartado 4).



Figura 1: Elementos cuya justificación otorgan calidad a una investigación con EC (Simon, 2004)

e) Gestionar la complejidad de un EC desde la flexibilidad metodológica da origen a *diseños emergentes* (Goetz y LeCompte, 1988). Hay un tipo de complejidad que concierne a cómo enfocar la recogida de la información del propio caso, un sistema integrado, complejo y cambiante, para, siendo respetuoso, poder acceder a él de manera profunda y amplia. Esto implica permanecer en el campo de estudio tiempo suficiente y utilizar variedad de instrumentos de recogida de información, probablemente, en más de una ocasión. Este proceso debe ir guiado por las preguntas de investigación, el ajuste entre el informante y el instrumento de recogida de información y el grado de novedad de los datos que se van obteniendo. Como consecuencia, el investigador debe abordar el segundo aspecto de la complejidad de un EC: cómo gestionar el análisis del volumen de datos obtenido. Aquí se exige dosis de creatividad para valorar qué datos conviene analizar, cómo afrontar su análisis en función de su especificidad, cómo abordar la evolución del análisis incluso de un mismo tipo de informe, y cómo impulsar nuevas comprensiones. Sirva de ejemplo el uso de la noción de *momento,* en su sentido físico, que utilizamos en Muñoz-Catalán (2009). El análisis conjunto de los datos agrupados en un determinado *momento* nos proporcionaba un nuevo enfoque sobre aspectos particulares del desarrollo profesional de la informante de mi tesis, que nos permitía construir una interpretación complementaria a la realizada en cada informe individual de datos.

f) Apostar por la triangulación para lograr una comprensión en profundidad del objeto de estudio, como modo de abordar la citada complejidad y para reducir posibles sesgos del investigador. Denzin y Lincoln (2000) describen cuatro tipos: la metodológica (diferentes métodos), la de datos (datos en diferentes momentos), la de investigadores (más de un investigador analizando) y, por

último, la de teorías (diversas teorías enfocando el mismo fenómeno). No es frecuente que puedan aplicarse todos los tipos de triangulación en cada estudio, pero sí es posible aplicar algunos.

g) Poner esmero en las conclusiones con el fin de trascender el caso estudiado. En sintonía con lo indicado en el apartado 5 y lo recomendado por Simon (2004), no basta con la descripción o caracterización del fenómeno estudiado; se necesita articular unas conclusiones, trascender el caso en cuestión y aportar nuevo conocimiento, que sea relevante y suponga una verdadera contribución al área (doble enfoque de particularización y abstracción del caso). Estas conclusiones deben ir acompañadas de las condiciones en las que se ha desarrollado el fenómeno de estudio para facilitar la transferencia del conocimiento, basada en el juicio y responsabilidad individual. Se contribuye así a que el conocimiento sea acumulativo si cada práctico que lo usa lo complementa con nuevos hallazgos y condicionantes.

h) Cuidar que el EC aborde fenómenos relevantes relacionados con la naturaleza específica de las matemáticas como materia de enseñanza y aprendizaje. Aunque pueda parecer una obviedad, me parece pertinente destacar este aspecto que para Kilpatrick (1995) constituye un criterio de calidad, porque en muchos estudios esta materia aparece como un mero contexto y ponen el foco en aspectos en los que el contenido matemático es irrelevante.

Finalmente, conviene destacar que la calidad de la investigación se va fortaleciendo a medida que: el proceso avanza, aumenta la familiarización con el caso, se presenta en foros de distinta naturaleza, se discute con otros investigadores y se procede a su publicación en revistas de investigación.

REFLEXIONES FINALES

Afrontar una investigación con EC es costosa en tiempo y esfuerzo; sin embargo, es uno de los diseños más interesantes para abordar la complejidad de los fenómenos educativos en Educación Matemática y acceder a las realidades como la perciben los informantes. Desde mis comienzos, me he posicionado en sintonía con la pregunta que formula Burton (2002): “Where is the why?”, con la que insta al investigador a justificar, no meramente describir, todas las decisiones tomadas y a ser consciente de sus repercusiones. En este trabajo he tratado de reflejar los principales rasgos que caracterizan al EC desde un paradigma interpretativo, he planteado respuestas sobre sus aspectos más debatibles y he sintetizado aquellas decisiones y actitudes del investigador que, desde la literatura y mi experiencia, permiten garantizar la realización de un EC de calidad. El enfoque adoptado puede ayudar a un investigador a afrontar un EC con herramientas que le permitan no solo describir su diseño, sino fundamentar sus decisiones metodológicas.

Las siguientes preguntas que planteo pueden contribuir al necesario debate de legitimación metodológica necesaria en Educación Matemática (Pirie, 1998, Simon, 2004). Un EC desarrollado desde un paradigma positivista ¿qué características compartiría con el descrito desde el paradigma interpretativo y qué exigencias metodológicas plantearía? Por otra parte, ¿qué unidades de análisis pueden ser consideradas como casos en EM? ¿Es aceptable considerar un conjunto de libros de texto como caso? Finalmente, en este trabajo se ha puesto el acento en los EC instrumentales frente a los EC intrínsecos (Stake, 1995, 2005) ¿existen realmente en Educación Matemática? De ser así, ¿cómo habría que caracterizarlos y qué relevancia tendrían?

Para finalizar, me gustaría destacar que, a la luz de nuestra experiencia, considero que el EC gana en poder epistemológico cuando se integra como un diseño metodológico en una agenda de investigación, en el que la progresiva selección de casos críticos contribuye a ir profundizando y extendiendo el desarrollo teórico que se va obteniendo.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto: "Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado" (RTI2018-096547-B-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España). Asimismo, está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Aguilar, Á. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de figuras planas. Un estudio de caso*. Huelva: Universidad de Huelva. http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006

Bassey, M. (1999). *Case Study reserarch in educational setting*. Buckingham: Open University Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism. Perspective and Method*. Englewood Cliffs: N. J. Prentice Hall.

Brymann, A. (2012). *Social Research Methods (4th edition)*. New York: Oxford University Press.

Burton, L. (2002). Methodology and methods in mathematics education research: where is "the why"? En S. Goodchild y L. English (Eds.), *Researching mathematics classrooms: a critical examination of methodology*. Chapter 1. (p. 1-10). Westport: CT, Praeger

Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín et al, *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 77-98). Ciudad Real: SEIEM.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso, Doctoral dissertation*. Michigan: Proquest Michigan University.

Cohen, L. y Manion, L. (1989) *Research Methods in Education* (3rd ed) London: Routledge.

Denzin, N., y Lincoln, Y. (Eds.) (2000). *Handbook of qualitative research. 2nd ed*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. *Academy of Management Review*, *14*, 532-550.

Glaser, B. y Strauss, A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine De Gruyter.

Given, L. M. (Ed.) (2008). *The Sage Encyclopedya of qualitative research methods*. Thousand Oaks, Inc: Sage Publications.

Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Guba, E. G. y Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N.K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp.105-117). Thousand Oaks, CA: Sage.

Hammersley, M. y Atkinson, P. (1995). *Ethnography*. London: Routledge.

Kaiser, G. (2019). ZDM, Mathematics Education- Its Development and Characteristics. En G. Kaiser and N. Presmeg (eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 481-492). ICME-13 Monographs.

Kilpatrick, J. (1995). Staking claims. *Nordic Studies in Mathematics Education, 3*(4), 21-42.

Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Huelva: tesis doctoral. http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949.

Muñoz-Catalán, M. C. y Monteiro, R. (2016). Afrontando la controversia: Discusión sobre la naturaleza de los elementos metodológicos en la investigación en Educación. *OMNIA. Revista Interdisciplinar de Ciências e Artes*, *4*, 23-30.

Niss, M. (2018). The very multi-faceted nature of mathematics education research. In E. Bergvist, M. Osterholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 35–50). Umeå, Sweden: PME.

Pirie, S. (1998). Toward a definition for research. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (Vol. Monograph No. 9, pp. 17–21). Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Potari, D. (2019). Publishing in the Journal of Mathematics Teacher Education. En G. Kaiser and N. Presmeg (eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 455-466). ICME-13 Monographs.

Ritchie, J. y Lewis, J. (Eds.) (2005). *Qualitative Research Practice: a guide of Social Science Students and Researchers*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Rothery, T.G., y Flores, A. (2014). Orden y distancia de fracciones y decimales en la recta numérica: El caso de Abigaíl. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *5*, 73-90.

Schoenfeld, A.H. (2000). *Purposes and methods of research in mathematics education* (pp. 641–649). June/July: Notices of the AMS.

Silverman, D. (2008): *Doing qualitative research (2nd edition)*. Thousand Oaks: Sage Publication

Simon, M.A. (2004). Raising Issues of Quality in Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 157-163.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N.K. Denzin, y Y. Lincoln, (Eds) *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, C.A.: Sage.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research. 3rd edition* (pp. 443-166). Thousand Oaks: Sage Publications.

Stenhouse L (1978) Case Study and Case Records: towards a contemporary history of education. *British Educational Research Journal, 4*(2), 21-39.

Stenhouse, L. (1988) Case study methods. En J.P. Keeves (Ed), *Educational Research, Methodology, and Measurement: an international handbook* (p. 49-53). Oxford: Pergamon.

Sturman, A. (1997). Case study methods. En J.P. Keeves (Ed), *Educational research, methodology, and measurement: an international handbook*. (2nd edition) (p. 61-66). Elsevier Science LTD.

Yin, R. K. (1984). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Yin, R. K. (1993). *Applications of Case Study Research*. London: Sage.

[i] En la investigación en Ciencias Sociales, los métodos solo se conciben para la recogida de datos, por lo que, el diseño de investigación se restringe al proceso de recogida de datos (Bryman, 2012).

[ii] El SIDM es un grupo de investigación coordinado desde la Universidad de Huelva con preguntas de investigación comunes y orientado a promover las competencias investigadoras de sus miembros.

[iii] Para mayor detalle sobre estos diseños invito a los lectores a leer Bassey (1999).

[iv] En este texto hago uso de la primera persona del plural pues mi posicionamiento es compartido con mi equipo de investigación, aunque asumo la responsabilidad de fundamentar y justificar las bases de dicho posicionamiento.

INVESTIGACIÓN DE DISEÑO EDUCATIVA: UN MARCO METODOLÓGICO EN EVOLUCIÓN[1]

Educative Design Research: A Methodological Framework in Evolution

Molina, M.

Universidad de Salamanca

Resumen

Esta ponencia se centra en caracterizar la investigación de diseño, un marco metodológico en evolución dentro de la investigación en ciencias del aprendizaje con cada vez mayor presencia en la literatura científica del área de Educación Matemática. Engloba estudios diversos que buscan crear y analizar nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje en contextos reales. Se caracterizan por ser intervencionistas, adaptativos, multivariables, multiniveles, orientados por teoría, generadores y cíclicos. Así mismo se destacan tres formas de conocimiento hipotético que actúan de guía en estos estudios: conjeturas, trayectorias hipotéticas de aprendizaje y principios de diseño. Tras desarrollar esta caracterización, la ponencia concluye con algunas consideraciones sobre la evaluación de la calidad de la investigación de diseño y diversas lecciones aprendidas en el proceso de publicación de resultados de investigaciones de diseño en artículos científicos.

Palabras clave: *investigación de diseño, estudio de diseño, experimento de enseñanza, investigación cualitativa.*

Abstract

This work focuses on characterizing design research, a methodological framework in evolution within research in learning sciences which has a growing presence in the Mathematics Education scientific literature. It encompasses diverse studies that aim to create and analyse new teaching and learning possibilities in real contexts. They are characterized by being interventionist, adaptative, multivariable, multilevel, orientated by theory, generative and cyclic. Three forms of hypothetical knowledge act as a guide in these studies: conjectures, hypothetical learning trajectories and design principles. After developing this characterization, this work is closed with some considerations about the assessment of the quality of design research and some lessons learned in the process of publishing design research results in research articles.

Keywords: *design research, design studies, teaching experiments, qualitative research.*

Introducción

La investigación de diseño, también llamada investigación basada en diseño, es un marco metodológico en evolución, sin límites cerrados hasta el momento, que engloba variedad de diseños de investigación. En esta ponencia me referiré a investigación de diseño educativa en tanto que tiene como objeto de estudio alguna dimensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es por tanto un marco metodológico propio de las ciencias del aprendizaje.

[1] Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto con referencia SA050G19 financiado por la convocatoria de concesión de subvenciones destinadas al apoyo de grupos de investigación reconocidos de universidades públicas de Castilla y León (2018).

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83 – 97). Valencia: SEIEM.

En comparación con otros enfoques metodológicos es relativamente nuevo, pero su inclusión en variedad de *handbook* (e.g., Luckin, Puntambekar, Goodyear et al, 2013; Green, Camilli, Ellmore y Skukauskaite, 2006) y libros sobre investigación educativa (e.g.., Bikner-Ahsbahs, Knipping y Presmeg, 2015; Markauskaite, Freebody y Irwin, 2011) así como su presencia en la literatura científica educativa (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Fonger, Stephens, Blanton et al, 2018; Montes, Pascual, y Climent, 2021) dan evidencia de su aceptación en la comunidad de investigadores.

La investigación de diseño indaga en cómo la educación puede o debería ser creando condiciones nuevas de aprendizaje que la teoría sugiere que pueden ser productivas pero que no son comunes o no se comprenden del todo (Bakker, 2019; Design-Based Research Collective (DBRC), 2003; Shavelson, Phillips, Towne y Feuer, 2003). Son estudios[i] que parten de preguntas de investigación tales como ¿cuáles son las características que ha de tener un tipo de intervención para lograr un efecto pretendido?, ¿cómo determinados objetivos de aprendizaje pueden alcanzarse? o ¿cómo puede resolverse un determinado problema educativo? (Baker, 2019).

La esencia de estos estudios radica en combinar la investigación sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza, en la que se desarrolla o evalúa teoría, con el diseño de estrategias, herramientas, entornos u otras dimensiones del proceso educativo (en adelante productos) (Swan, 2020). El diseño de ambientes de aprendizaje y el desarrollo iterativo de propuestas innovadoras o soluciones a problemas educativos son el contexto para la investigación. De este modo, se persigue incrementar la aplicabilidad del conocimiento generado en la investigación educativa. Hay un compromiso por obtener, al mismo tiempo, resultados teóricos y soluciones prácticas captando la complejidad de los contextos de enseñanza/aprendizaje (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

A continuación, caracterizo la investigación de diseño combinando información procedente de la literatura metodológica educativa y mi experiencia utilizando este marco metodológico en varios proyectos de investigación[ii] y en mi propia tesis doctoral (Molina, 2006). Posteriormente, centro la atención en tres formas de conocimiento hipotético que actúan de guía en estos estudios y describo algunas de las dimensiones que diferencian la diversidad de estudios de diseño que se engloban en este marco metodológico. Finalmente, concluyo con algunas consideraciones sobre la evaluación de la calidad de la investigación de diseño y lecciones aprendidas en el proceso de publicación de resultados de investigaciones de diseño en artículos científicos.

Características de los estudios de diseño

En la diversidad de estudios de diseño ya publicados puede observarse que se definen a partir de una serie de características compatibles con el uso de variedad de diseños de investigación (e.g., experimentos de enseñanza, estudios de caso) tanto cualitativos como cuantitativos. A su vez implican el empleo de diversidad de técnicas particulares de recogida de datos (e.g., video-grabación, entrevistas, cuestionarios). Por tanto, es más general que la mayoría de los diseños de investigación y se define como un marco metodológico. Se caracterizan por ser estudios intervencionistas, adaptativos, multivariables, multiniveles, orientados por teoría, generadores, cíclicos. A continuación, se detallan cada una de estas características.

Intervencionistas o transformativos

Como ya se ha comentado, los estudios de diseño crean y estudian nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje en contextos reales. Cambiar y comprender la situación investigada van de la mano. Idealmente ayudan a entender la complejidad de los contextos educativos a partir del diseño de sus elementos y anticipando cómo estos funcionan conjuntamente para sustentar el aprendizaje y qué impacto tienen en docentes, estudiantes y otros participantes (Cobb et al, 2003;

Swan, 2020). Para ello los investigadores participan del proceso de enseñanza o trabajan junto a docentes y otros agentes del sistema educativo.

Adaptativos

Estas investigaciones combinan el carácter abierto del diseño con las restricciones de la investigación (Cobb y Gravemeijer, 2008). No consisten en la confirmación de unos constructos teóricos previamente construidos ni en la implementación de un producto diseñado a priori, sino en la acomodación del modelo teórico y del diseño del producto a la realidad observada. Se trabaja con dos propósitos en oposición. Por una parte, se persigue averiguar si el modelo teórico permanece viable a la vista de los datos obtenidos y si el producto cumple el propósito pretendido. Por otra, los investigadores están dispuestos a modificar el modelo y diseño a partir de la información que van obteniendo en el proceso de investigación que les conduce a una mejor comprensión del fenómeno en estudio (Confrey, 2006; Steffe y Thompson, 2000).

Multivariables

Son estudios complejos por variedad de motivos, principalmente por ocurrir en contextos naturales donde habitualmente se produce algún tipo de aprendizaje y perseguir caracterizar la situación en toda su complejidad. En consecuencia involucran múltiples variables: algunas son variables en estudio y otras actúan como condiciones del entorno no pudiéndose o pretendiéndose controlarlas (Barab y Squire, 2004; Cobb et al., 2003 Collins, Joseph, y Bielaczyc, 2004). En este sentido se dice que es un enfoque metodológico abierto (Bakker y van Eerde, 2015).

Esta complejidad aquí descrita exige realizar recogidas de datos exhaustivas, implicando variedad de técnicas de recogida de información. De este modo, de forma retrospectiva, si se identifican variables relevantes para el fenómeno en estudio que inicialmente no fueron consideradas, estas puedan ser integradas en el análisis (Hjalmarson y Lesh, 2008; Shavelson, Phillips, Towne y Feuer, 2003).

Multiniveles

Son estudios multiniveles en diferentes sentidos. Por una parte, partiendo de la concepción de los contextos educativos como sistemas interactivos, algunos estudios de diseño abarcan varios niveles dentro de dichos sistemas. Por ejemplo, cuando se persigue un gran alcance se combina el trabajo con grupos de estudiantes de cierto nivel educativo, con docentes de dichos niveles o elementos de la estructura organizativa del centro escolar o del sistema educativo a nivel de región o país (Cobb, 2003; Henrik, Cobb y Jackson, 2014). Por otra parte, pueden distinguirse diferentes niveles según los participantes implicados en el estudio que construyen algún conocimiento: por ejemplo, el alumno construye conocimiento matemático, el docente y el investigador construyen conocimiento sobre la construcción de conocimiento matemático por parte de los alumnos, los investigadores construye conocimiento sobre el proceso de desarrollo profesional del docente y los investigadores construyen conocimiento sobre las interacciones que se producen entre el docente y los alumnos (Confrey, 2006; Lesh y Kelly, 2000).

Orientados por teoría

La teoría se utiliza para fundamentar y diseñar los diferentes componentes de la investigación. Así mismo, durante el proceso de investigación, la teoría junto con las evidencias que se van obteniendo son clave para formular, testar, y refinar conjeturas, trayectorias de aprendizaje o principios de diseño relativos al fenómeno en estudio y los medios que lo sustentan. De este modo, durante el proceso se pone a prueba y se desarrolla el modelo teórico y los principios que guían el diseño y la indagación en el problema de investigación (Shavelson, Phillips, Towne y Feuer, 2003).

Lo habitual es utilizar variedad de teorías de forma combinada. Se asume que la resolución de problemas realistamente complejos requiere, en la mayoría de los casos, de estudios coordinados que se apoyen en múltiples perspectivas teóricas y prácticas, en diversidad de lugares y por largos periodos de tiempo, dando lugar a acumulación de conocimiento (Lesh y Sriraman, 2005).

Generadores

Son estudios generadores en múltiples sentidos: generan teoría, productos y preguntas de investigación.

Estos estudios aportan dos tipos de conocimiento empíricamente fundamentado: conocimiento teórico sobre enseñanza/aprendizaje relativo a un dominio de aprendizaje específico y conocimiento sobre el diseño. El primero de estos supone el refinamiento y desarrollo de los principios teóricos de los que parte la investigación. Es situado, integra varias teorías y tiene un propósito. Además, es un conocimiento útil, sensible al contexto, pero suficientemente general para ser utilizado en nuevas situaciones. La investigación basada en diseño debe conducir a teorías que puedan ser compartidas con los docentes y diseñadores educativos y aportarles implicaciones relevantes (DBRC, 2003).

El conocimiento relativo al diseño sirve de guía para otros diseños (Bannan-Ritland y Baek, 2008). Este conocimiento refiere a cómo y por qué se produce el proceso de aprendizaje descrito o funciona el producto diseñado. Para que una innovación curricular sea transferible a otros contextos u otras escalas se necesita explicar por qué y cómo funciona, atender a las interacciones entre los participantes y otras partes del sistema y sugerir formas en los cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias. Se considera que el cambio real solo es posible cuando además de conocerse qué y cómo puede hacerse algo, se conoce también por qué es así (McKenney y Reeves, 2019).

Por otra parte, estos estudios generan productos innovadores. Pueden estudiarse y obtenerse tanto productos educativos como procesos, materiales, software, programas o políticas educativas (Hjalmarson y Lesh, 2008; McKenney y Reeves, 2019).

En último lugar, destacamos la capacidad de estos estudios para generar cuestiones de investigación a abordar en trabajos posteriores o en el propio estudio. El problema de investigación está bien definido desde el primer momento, pero durante el proceso se pueden identificar cuestiones relevantes que inicialmente no eran previsibles (e.g., se detectan fenómenos o problemas en los que indagar por su relevancia). En ocasiones, también ocurre que los objetivos específicos de la investigación no se precisan inicialmente sino más adelante en el proceso cuando se ha obtenido alguna información que ayuda a clarificar el fenómeno en estudio.

Cíclicos

Estos estudios constan de dos tipos de ciclos a los que me referiré como microciclos y macrociclos. Un estudio de diseño está compuesto como mínimo por un macrociclo que se estructura en tres fases: 1) preparación y diseño, 2) implementación/intervención, 3) análisis retrospectivo. En la figura 1 se ilustra la estructura general de un estudio de diseño, distinguiendo con diferente color cada una de estas tres fases y destacando sus principales componentes.

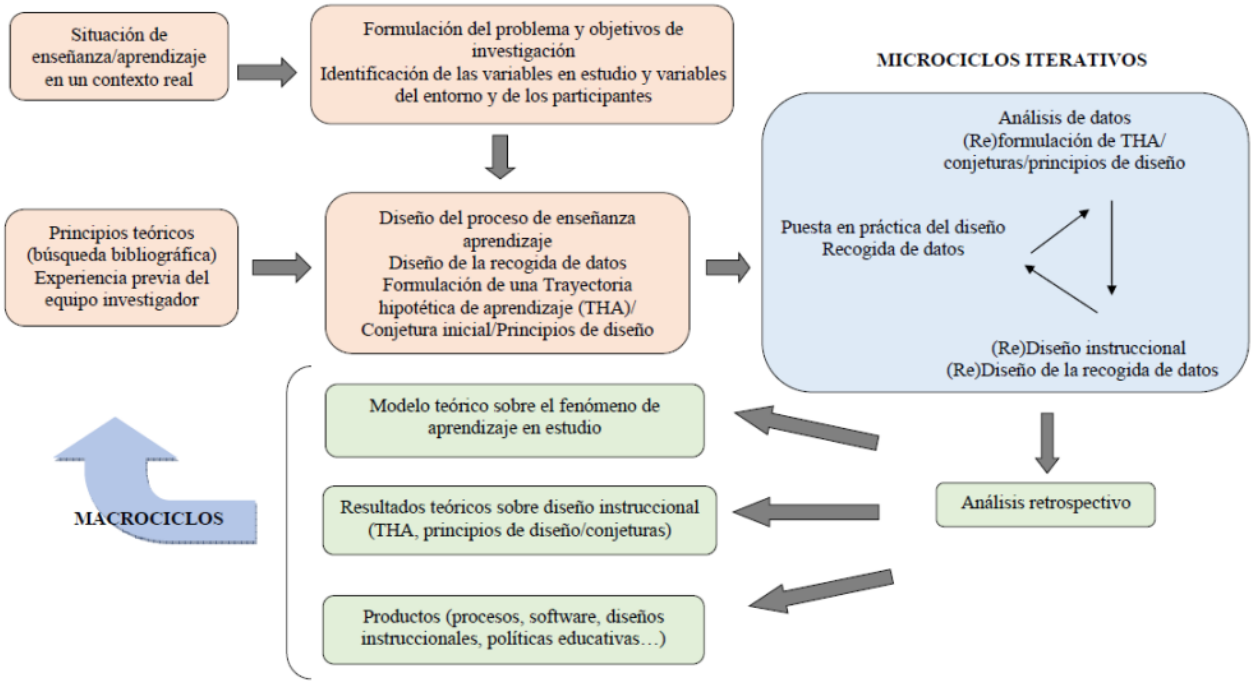


Figura 1. Esquema general de un estudio de diseño

En la primera fase, el equipo investigador define el problema de investigación que va a abordar en relación con una situación de enseñanza/aprendizaje concreta, delimita las variables a estudiar y aquellas que se van a considerar condiciones del entorno, identifica los participantes y decide qué tipo de conocimiento se quiere generar y qué se va a diseñar. Estas decisiones conducen a concretar y diseñar un proceso de enseñanza/aprendizaje y un proceso exhaustivo de recogida de datos. El equipo investigador debe también formular una primera trayectoria de aprendizaje, conjetura o principios de diseño. Para el desarrollo de esta fase se parte de principios teóricos existentes así como de la experiencia previa del equipo investigador en relación con el problema de investigación.

La segunda fase se compone de microciclos de actuación, observación, análisis y rediseño (Collins et al., 2004; Swan, 2020). Es el momento de implementar el proceso de enseñanza/aprendizaje ideado, ir refinando las ideas teóricas que subyacen al mismo en forma de trayectorias de aprendizaje, conjeturas y/o principios de diseño así como rediseñar el producto que están siendo implementado y el proceso de recogida de datos. En estos microciclos se recoge y analiza información del proceso de enseñanza/aprendizaje para informar el proceso de investigación y diseño de forma iterativa. A estos análisis de los datos recogidos que forman parte de cada microciclo se les denomina preliminares. Las cuestiones a las que da respuesta este primer análisis de los datos son típicamente de carácter práctico y están directamente relacionadas con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes participantes (Cobb, 2000). Esta fase se acaba cuando se considera recopilada suficiente información para dar respuesta a los objetivos de investigación.

En la tercera fase se da por concluida la recogida de datos y tiene lugar el análisis retrospectivo de los mismos que conduce a formular un modelo teórico del fenómeno de aprendizaje en estudio, resultados teóricos sobre el diseño instruccional y ciertos productos educativos (Cobb, 2000). Este será el análisis que dé respuesta a los objetivos de investigación planteados inicialmente. En este momento se elabora la versión final de la trayectoria hipotética de aprendizaje, conjetura o principios de diseño que han guiado el estudio. Es necesario demostrar que los resultados de aprendizaje o desarrollo en los estudiantes no se habrían producido sin su participación en el estudio, documentar cómo cada aprendizaje emerge e identificar los aspectos específicos del ambiente de aprendizaje que son necesarios para que emerja (Cobb, Jackson y Dunlap, 2014).

Se produce así un cierre del proceso de investigación que puede ser continuado en un nuevo macrociclo que parte de todo el conocimiento y productos generados para continuar avanzando en el estudio del mismo problema de investigación (o una parte del mismo) en otro contexto o en otro nivel del proceso educativo. De este modo se busca aumentar la robustez de los modelos teóricos, la aplicabilidad de los principios de diseño formulados y la relevancia de los productos innovadores generados. A lo largo de sucesivos macrociclos de investigación, el diseño se refina y se experimenta en contextos más amplios. Así se va avanzando en la comprensión de cómo funciona el diseño, la definición de los principios en los que se basa, la identificación de las adaptaciones necesarias para su implementación a mayor escala y se enriquece la teoría en la que se sustenta.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje, principios de diseño y conjeturas

Los principios de diseño, conjeturas y trayectorias hipotéticas de aprendizaje son puntos de inicio y guía de las investigaciones de diseño, que van siendo reformulados a lo largo de las mismas en los procesos iterativos que caracterizan este marco metodológico. Son formas de conocimiento hipotético que actúan de intermediarias entre teoría y práctica educativa (Euler, 2017, Bakker, 2019). Su generabilidad depende de un proceso iterativo en el que son puestas a prueba para determinar si funcionan en la práctica, siendo discutidas, adaptadas o incluso descartadas.

Formular unos principios de diseño, conjetura o trayectoria hipotética de aprendizaje fuerzan al investigador a ser tan explícito como sea posible sobre sus supuestos teóricos de partida, valores, experiencias y objetivos. No solo es de utilidad para comunicar el trabajo a otros investigadores, también como parte de un proceso personal de diálogo consigo mismo como investigador. A continuación, se clarifican las diferencias entre estas diferentes formas de conocimiento hipotético.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

El término trayectoria hipotética de aprendizaje, propuesto por Simón (1995, 2014), es conocido por su utilidad en la planificación docente y la investigación educativa. Esta noción parte de una visión constructivista de la enseñanza de las matemáticas y presume que el aprendizaje de un individuo presenta ciertas regularidades. Es un modelo teórico[iii] compuesto por tres componentes relativas tanto al aprendizaje como al proceso de enseñanza: a) el objetivo u objetivos de aprendizaje que definen la dirección, b) las actividades de aprendizaje planificadas, y c) las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje (predicción de cómo el pensamiento y comprensión de los estudiantes evolucionará en el contexto de dichas actividades, pudiéndose presentar diferentes caminos).

Principios de diseño

Los principios de diseño[iv] exponen un conocimiento hipotético sobre qué acciones y bajo qué circunstancias, conducirán a qué tipo de consecuencias pretendidas (Argyris, 1996), aportando al mismo tiempo justificación teórica y empírica. Se formulan en términos de acción, quedando implícito su carácter hipotético. Van den Akker (2013, p. 67) propone un formato posible para su redacción que enfatiza los componentes necesarios:

> "Si quieres diseñar una intervención X [para la función Y en el contexto Z]
>
> Entonces es recomendable darle a dicha intervención las características C1, C2, …, Cm
>
> Por medio de los procesos P1, P2, …, Pn
>
> Debido a los argumentos teóricos T1, T2, …, Tp
>
> Y los argumentos empíricos E1, E2, …, Eq"

En Kali (2008) se ejemplifican de forma sencilla los principios de diseño de una investigación de diseño en el marco de un curso de filosofía de la educación. El foco de estudio en este trabajo es la evaluación por pares tomando como indicador de su calidad el grado de correlación con las evaluaciones dadas por el docente. La figura 2 muestra los principios de diseño con los que se inicia la investigación y los que van siendo incorporados en tres microciclos sucesivos del estudio de diseño realizado. En el primer diseño elaborado con base en los tres primeros principios, las evaluaciones del docente y de los estudiantes presentaron una correlación baja. Un análisis cualitativo de los datos permitió detectar que algunos estudiantes tenían dificultad para gestionar sus puntos de vista de opiniones extremas, de otros compañeros, sobre la educación. Por ese motivo se incorporaron dos principios dirigidos a ayudar a los estudiantes a diferenciar entre puntos de vista personales y otros más objetivos. En el segundo microciclo la correlación entre las evaluaciones del docente y los estudiantes mejoró, pero el análisis de datos cualitativo permitió identificar que las evaluaciones de los estudiantes habían estado influenciadas por valores políticos y culturales y que no siempre se habían respetado las normas de la clase. Por ese motivo, en una tercera iteración Kali incorporó el sexto principio que se recoge en la figura 2 que dio lugar a un aumento en la correlación entre las evaluaciones y un nivel alto en la satisfacción y aprendizaje en los estudiantes.

PRINCIPIOS DE DISEÑO DE PARTIDA

1. Involucrar a los estudiantes en el desarrollo de criterios para la evaluación por pares
2. Asegurar anonimato para evitar la parcialidad en las evaluaciones por pares
3. Hacer visible a los estudiantes la síntesis de la evaluación por pares

PRINCIPIOS DE DISEÑO AÑADIDOS TRAS LA PRIMERA ITERACIÓN

4. Permitir a los estudiantes expresar puntos de vista personales no objetivos sobre el trabajo de sus compañeros
5. Promover la discusión de los criterios de evaluación no objetivos

PRINCIPIO DE DISEÑO AÑADIDO TRAS LA SEGUNDA ITERACIÓN

6. Cuando los contenidos en evaluación son sensibles social o culturalmente, evitar calificar a los estudiantes en función de los resultados de la evaluación entre pares. En su lugar, evaluar a los estudiantes como evaluadores.

Figura 2. Ejemplo de principios de diseño sobre evaluación entre pares en un curso de filosofía de la educación (Kali, 2008)

Conjeturas

Las conjeturas en este contexto son inferencias basadas en pruebas incompletas o no concluyentes sobre cómo promover particulares formas de aprendizaje o alcanzar determinados objetivos educativos (Confrey y Lachance, 2000; Sandoval, 2014). Difieren de los principios de diseño en la forma en que son formulados: las conjeturas son explícitamente hipotéticas y predictivas en cambio los principios de diseño, como se ha mencionado, se redactan en términos de acción quedando implícito su carácter hipotético. La figura 3 muestra un ejemplo extraído de Bakker (2019) en el que se formula de forma alternativa un mismo conocimiento hipotético como conjetura y como principio de diseño.

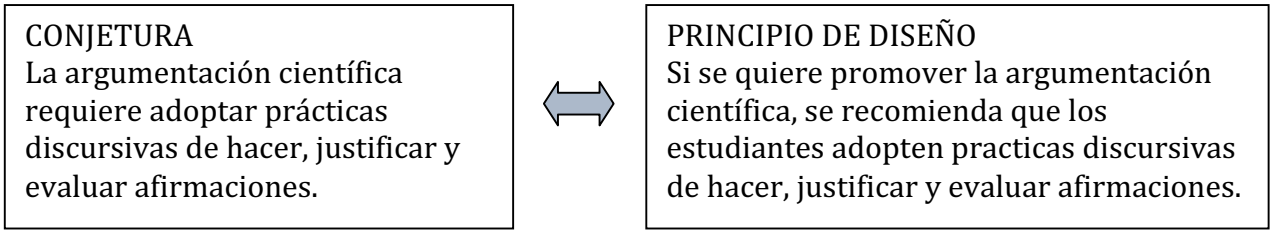


Figura 3. Ejemplos contrapuestos de una conjetura y un principio de diseño

Pueden considerarse dos tipos de conjeturas según refieran al diseño o sean teóricas. Las conjeturas sobre el diseño explicitan cómo el equipo investigador espera que los elementos del diseño materializados generen procesos mediadores en el fenómeno de enseñanza/aprendizaje en estudio. Las conjeturas teóricas refieren a cómo dichos procesos mediadores producen los resultados deseados.

Sandoval (2014) propone el mapa o mapeo de conjeturas (ver figura 4) como una forma de articular la conceptualización y desarrollo de las investigaciones de diseño. Dicho mapa explicita cómo características teóricas particulares, materializadas en un diseño, producen ciertos procesos mediadores que conducen a resultados deseables.

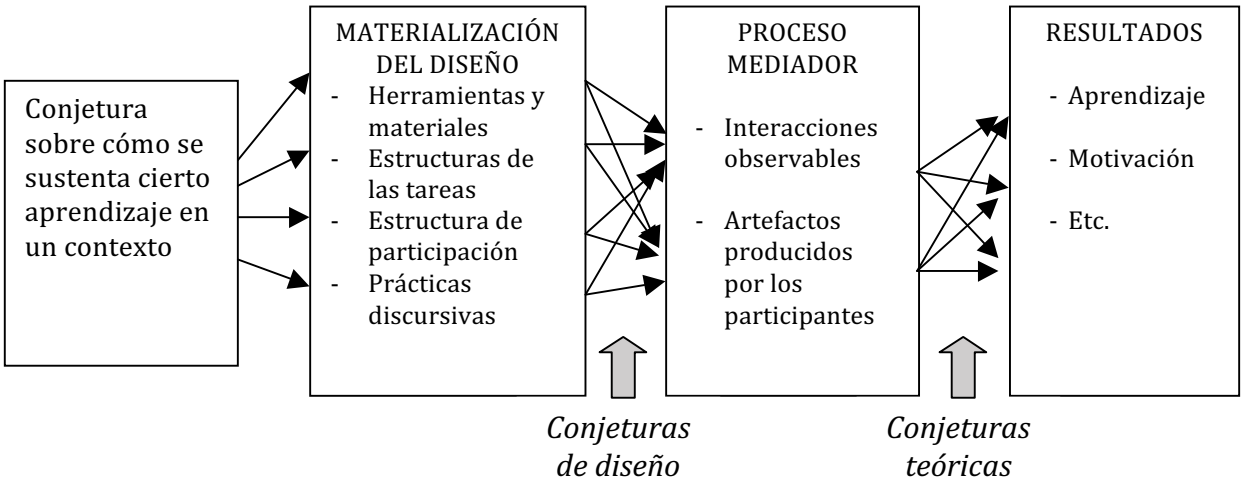


Figura 4. Componentes de un mapa de conjeturas

Variedad dentro de los estudios de diseño

En la literatura se identifican diversidad de estudios de diseño. Se diferencian en el contexto en el que se desarrollan, la pluralidad de personas involucradas, la finalidad que persiguen y los niveles del sistema educativo implicados en la investigación, entre otros elementos.

Los contextos que suelen considerarse en la investigación de diseño son, entre otros, situaciones de enseñanza/aprendizaje en las que el contenido a ser aprendido es nuevo, el conocimiento didáctico de un contenido es escaso, no hay materiales instruccionales disponibles o los que hay no son adecuados o no se dispone de conocimiento didáctico sobre cómo emplearlos, las habilidades y conocimiento de los docentes son insuficientes o existen factores complejos (e.g., sociales, políticos) que pueden afectar negativamente al proceso de enseñanza/aprendizaje (Kelly, 2013).

La participación de diversidad de personas con diferentes campos y grados de experiencia es un elemento que enriquece el proceso de diseño y diferencia estos estudios (Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004). Por ejemplo, los estudios de diseño pueden implicar un equipo de investigadores trabajando con un solo estudiante o con un grupo de alumnos; un grupo de investigadores trabajando en un aula en colaboración con un docente que se implica completamente en el proceso

de investigación; un equipo de investigadores organizando y estudiando la educación de futuros docentes o el desarrollo profesional de docentes en activo; un grupo de investigadores y docentes en activo promoviendo conjuntamente el desarrollo de una comunidad profesional; un equipo de investigadores, docentes, directores de centros educativos y otros agentes implicados que persiguen un cambio organizativo; etc. (Cobb et al., 2003).

En cuanto a los objetivos que se persiguen, Nieveen, McKennet y Van den Akker (2006) llaman la atención sobre la diferente finalidad de los estudios de validación y los estudios de desarrollo. Los primeros abordan el diseño de trayectorias de aprendizaje para desarrollar, elaborar y validar teorías sobre el proceso de aprendizaje y las implicaciones resultantes del diseño de ambientes de aprendizaje. Por otra parte, los estudios de desarrollo persiguen solventar un problema educativo usando conocimiento teórico relevante e implicando la interacción de docentes, investigadores, expertos y demás agentes implicados.

Otro elemento que difiere en estas investigaciones es la escala en la que se plantean en relación con los diferentes niveles de los sistemas educativos. En el área de Educación Matemática las investigaciones de diseño más frecuentes son los experimentos de enseñanza (Molina et al, 2011). Estos son estudios a nivel de aula que consisten en una secuencia de episodios de enseñanza en los que participan un investigador-docente, alumnos y un investigador-observador (e.g., Molina y Castro, 2021, Ventura, Brizuela, Blanton, Sawrey, Gardiner y Newman-Owens, 2021). Son menos frecuentes los estudios de diseño que se centran en el desarrollo profesional de docentes (e.g., Montes, Pascual y Climent, 2021) o que atienden a mayor escala a los procesos que condicionan la calidad de la enseñanza de las matemáticas (Henrik, Cobb y Jackson, 2014). Henrik et al (2014) describen un estudio de estas características que busca tener impacto a la mayor escala posible en la mejora de la enseñanza de las matemáticas (llamado "Designing Learning Organizations for Instructional Improvement in Mathematics"). En este último caso los microciclos son más extensos e implican una fase en la que se informa a los líderes del sistema educativo sobre la implementación de estrategias de mejora. En este trabajo las conjeturas que guían el estudio refieren tanto al aprendizaje de los estudiantes y de los docentes como a la actividad a desarrollar por los directores de los centros, coordinadores de área en el centro y líderes del sistema educativo, entre otros agentes implicados; todo ello de forma coordinada.

Comparativa con otros métodos de investigación educativa

La investigación de diseño suele compararse con la ingeniería didáctica (e.g., Artigue, 2015; Godino et al, 2013) y la investigación acción (Bakker, 2019, Molina et al, 2011) ambos diseños de investigación con los que comparte algunas características.

Artigue (2015) caracteriza la ingeniería didáctica como una metodología de investigación en la que se concibe, implementa, observa, analiza y se evalúa un diseño instruccional dirigido al aprendizaje de un contenido específico. En cuanto a la comparativa con la investigación de diseño, cabe señalar que ambos enfoques se organizan en torno al diseño de ciertas herramientas educativas. En ambos casos dicho diseño está informado por teoría educativa y contribuye al desarrollo de dicha teoría. Así mismo, ambos enfoques rechazan procesos de validación estandarizados basados en la comparación de grupos control y experimental.

En cuanto a las características que los diferencian, la ingeniería didáctica es una herramienta para responder cuestiones didácticas en la que los enfoques preliminares, con sus diferentes dimensiones epistemológica, institucional y didáctica, son una parte esencial del proceso investigador. Impone una visión sistémica de la educación matemática y la consideración de la clase como una organización social (Artigue, 2015). En este proceso se reconoce la relevancia de la Teoría de las Situaciones como sustento teórico de este tipo de investigaciones[v]. En cambio, en la investigación de diseño, se combinan variedad de teorías no existiendo vinculación con ningún marco teórico

específico ni un interés explícito por cuestiones epistemológicas (Walker, 2011). En este caso destaca la naturaleza iterativa e intervencionista y el carácter cíclico de la investigación. Este enfoque se basa en una visión de la educación matemática como ciencia de diseño cuyo objetivo es la producción controlada de herramientas educativas.

En lo que respecta a la investigación acción, comparte con la investigación de diseño su carácter intervencionista, su estructuración en ciclos iterativos y su motivación por conectar la investigación y la práctica educativa (Bakker, 2019; Molina et al, 2011). Sin embargo, tradicionalmente la investigación acción es realizada por agentes naturales de la situación considerada, persigue el desarrollo de las personas involucradas y tiene como foco un problema de su práctica y la búsqueda de guías prácticas que les ayude a resolverlo o mejorar la situación (Elliot, 1990). Si bien pueden implicar diseño, este es opcional. En cambio, en los estudios de diseño el objetivo es el desarrollo de una teoría, no de las personas intervinientes en el mismo, aunque sin duda éstas aprenderán en el transcurso del estudio. Así mismo, los investigadores no han de ser necesariamente los agentes naturales de la situación en estudio ni han de abordar una problemática existente (Molina et al, 2011).

Evaluación de la calidad

Los principales criterios de evaluación de los estudios de diseño son fiabilidad, generabilidad y utilidad.

La *fiabilidad* consiste en demostrar que el análisis retrospectivo fue sistemático y exhaustivo (Cobb, 2000) y ha permitido refutar conjeturas, principios de diseño y trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Debe ponerse de manifiesto que los resultados obtenidos son independientes del investigador y que pueden esperarse resultados similares en circunstancias similares (Bakker, 2019). El análisis ha de describirse con el suficiente grado de detalle para que otros investigadores puedan monitorizarlo y las inferencias y afirmaciones puedan ser justificadas (Molina et al., 2011). La grabación en video y/o audio de los datos contribuye a la fiabilidad de la investigación en tanto que se evitan problemas de memoria o de falta de información en el registro del observador y, además, permite a varios investigadores analizar los mismos datos. Otras medidas a tener en cuenta son la triangulación mediante el uso combinado de diferentes fuentes de información sobre el proceso en estudio o el análisis simultáneo de datos por varios investigadores.

La *generabilidad* refiere a ser capaz de transferir resultados teóricos y/o intervenciones prácticas a otros contextos (Bakker, 2019; McKenney y Reeves, 2014). La idea es que los resultados generados son útiles para organizar y guiar nuestra experiencia sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Steffe y Thompson, 2000). La capacidad de generalización en este tipo de trabajos no está condicionada por la representatividad de la muestra; los resultados no son generalizables desde un punto de vista estadístico. Se trata de una generabilidad teórica o analítica, íntimamente relacionada con la replicabilidad. Implica que otros serán capaces de usar los resultados que deriven de la investigación (modelo teórico, productos educativos y principios de diseño/conjeturas/trayectorias de aprendizaje) para promover el aprendizaje en otros contextos con las adaptaciones pertinentes. En concreto los macrociclos de estos estudios (al igual que estudios posteriores que se apoyen en los resultados obtenidos) contribuyen a aumentar la capacidad de generalización al permitir desarrollar el modelo teórico, el producto y/o la información relativa a este.

Finalmente, la *utilidad* se relaciona con el grado de claridad con la que se exponen las conclusiones y aportes para la enseñanza, de modo que los docentes puedan utilizarlas en la planificación y actuación en el aula. Los productos resultantes de estos estudios son juzgados en términos de su grado de innovación y utilidad (Kelly, 2006).

A estos criterios cabe añadir otras consideraciones generales de aplicación a cualquier investigación educativa que suelen guiar los procesos de revisión por pares en las revistas científicas del área. Por ejemplo, citando a Simon (2004), mencionamos las siguientes: las preguntas de investigación son pertinentes para el área de conocimiento y son coherentes con el resto de componentes de la investigación (i.e., marco teórico, diseño de la recogida de datos, análisis de los datos, etc.), el marco teórico y metodológico son explícitos y están justificados, se hace una aportación significativa al área, etc.

Publicación de estudios de diseño

Antes de poner cierre a este trabajo se destacan algunas ideas, extraídas de la experiencia publicando investigaciones de diseño, que se consideran útiles para guiar a los nuevos usuarios de este marco metodológico.

Una de las principales dificultades de elaborar publicaciones de este tipo de estudios es decidir cómo fraccionar la investigación en partes que tengan entidad y relevancia en sí mismas. En este tipo de estudios se genera una gran cantidad de información del proceso de investigación que solo puede publicarse en su totalidad en formato de libro. Algunas opciones de fragmentación de la investigación realizada son focalizar la atención en algunos descriptores concretos del aprendizaje alcanzado (e.g., tipos y concepciones de las representaciones empleadas por los estudiantes), alguna componente del producto diseñado (e.g., un tipo de tareas que han evidenciado un efecto determinado de relevancia en el proceso de aprendizaje), la información disponible sobre uno o varios sujetos cuyos datos aportan resultados de especial relevancia, los datos recogidos en una iteración concreta o con un instrumento particular, etc.

Elegida la parte a publicar, surge la duda de qué información metodológica incluir y cuál no detallar. Los revisores no familiarizados con este diseño metodológico suelen confundirlo con otros enfoques metodológicos y demandan un amplio detalle del proceso de diseño y experimentación, lo cual redunda en un aumento considerable de la extensión de cualquier artículo. Por tanto, conviene optar por revistas que tienen unos límites de extensión más amplios o revistas especialmente interesadas en este tipo de estudios (e.g., Educational design research, Educational designer) que no requerirán tal grado de detalle.

Para describir metodológicamente un estudio de diseño, es recomendable incluir en el marco teórico las principales razones que justifican el diseño, reduciendo así la cantidad de información necesaria para describir la fase de implementación. En el apartado de resultados es necesario explicitar cómo el proceso de enseñanza o aprendizaje se desarrolla y como este está conectado con características particulares del diseño.

Si bien esta es una decisión delicada, en ocasiones no añade información o no es pertinente indicar que se ha hecho un estudio de diseño, lo que permite reducir significativamente el grado de detalle a aportar sobre la fase de implementación del estudio. Por ejemplo, este es el caso cuando solo se ha desarrollado un microciclo de la fase de implementación o cuando, en el marco de un estudio de diseño, se desarrollan investigaciones que no son en sí mismas estudios de diseño.

Conclusiones

La investigación de diseño es un marco metodológico bien caracterizado en la actualidad, como se ha puesto de manifiesto, que da cabida a diversidad de estudios que buscan tener impacto en la práctica docente tanto a través de los modelos teóricos que se obtienen como de los productos que se diseñan. Crear, experimentar y comprender nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje es la inspiradora motivación que subyace en todos los casos. La combinación de teorías, de agentes implicados, de técnicas de recogida de datos e incluso de métodos de investigación son algunas de

sus fortalezas. También cabe destacar el potencial que se deriva de considerar los contextos educativos en toda su complejidad (con los problemas cotidianos del aula, colegios y comunidades educativas) y la flexible articulación de diseño e investigación en un proceso iterativo y cíclico. De este modo capturan las especificidades de la práctica y las ventajas potenciales de adaptar la teoría a su contexto de forma iterativa y refinadora (Shavelson et al., 2003). Relacionar el proceso de aprendizaje con el modo en que ha sido promovido aumenta la aplicabilidad de los resultados de la investigación.

Por otra parte, destacamos la complejidad y algunos puntos de debilidad de estas investigaciones. Son estudios complejos principalmente debido a la consideración de situaciones naturales en las que no se controlan deliberadamente muchas variables, la necesidad de coordinación entre los diversos investigadores implicados y la gran cantidad de datos que se recogen durante el proceso. Así mismo, el carácter cíclico del proceso y el continuo diálogo entre la teoría y los datos recogidos dificultan delimitar el origen del conocimiento que los investigadores adquieren a lo largo del proceso de investigación (Collins et al., 2004; Dede, 2004). En la práctica, los resultados suelen derivar de un bajo porcentaje de los datos recogidos, lo que exige una cuidada y transparente argumentación que evidencie cómo se extraen los resultados a partir de los datos (Kelly, 2004). Los criterios de fiabilidad y generabilidad discutidos previamente son la clave para que estas debilidades no mermen la calidad de la investigación desarrollada.

Referencias

Argyris, C. (1996). Actionable knowledge: Design causality in the service of consequential theory. *The journal of applied behavioral science, 32*(4), 390-406.

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: The case of didactical engineering. En A. Bikner-Ahsbahs, C., Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods* (pp. 467- 496). Países Bajos: Springer.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International journal of science and mathematics education, 18*(7), 1271–1291.

Bakker, A. (2019). *Design research in education.* New York: Routledge.

Bakker, A. y Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner-Ahsbah, C., Knipping y N. Presmeg (Eds), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 429-466). New York: Springer.

Bannan-Ritland, B. y Baek, J. Y. (2008). Investigating the act of design in design research: The road taken. En A. E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 299-319). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14.

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. y Presmeg, N. (2015). *Approaches to qualitative research in mathematics education. examples of methodology and methods*. Países Bajos: Springer.

Clements, D. H., Wilson, D. C. y Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: a learning trajectory. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 163-184,

Cobb, P. (2000). The Importance of a situated view of learning to the design of research and instruction. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 45- 82). Londres: Ablex Publishing.

Cobb, P., Confrey, J. diSessa, A, Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Jackson, K. y Dunlap, C. (2014). Design research: An analysis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). New York: Routledge.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). *Design research: theoretical and methodological issues. Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-152). New York: Cambridge University Press.

Confrey, J. y Lachance, A., (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). New Jersey: LEA.

Dede, C. (2004). If design-based research is the answer, what is the question? A commentary on Collins, Joseph, and Bielaczyc; diSessa and Cobb; Fishman, Marx, Blumenthal, Krajcik, and Soloway in the JLS Special Issue on Design-Based Research. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 105-114.

Design-Based Research Collective (DBR). (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5–8.

Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.

Euler, D. (2017). Design principles as bridge between scientific knowledge production and practice design. *EDeR – Educational design research*, *1*(1), 1-15.

Fonger, N. L., Stephens, A., Blanton, M., Isler, I., Knuth, E., Gardiner, A. (2018). Developing a learning progression for curriculum, instruction, and student learning. *Cognition and Instruction, 36*(1), 30–55.

Green, J. L., Camilli, G., Ellmore, P. B. y Skukauskaite, A. (2006). *Handbook of complementary methods in education research*. Washington, DC: American Educational Research Association.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño.* Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_2013_Ingenieria_didactica.pdf

Henrick E., Cobb P. y Jackson K. (2015). Educational design research to support system-wide instructional improvement. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Advances in mathematics education* (pp. 497-530). Dordrecht: Springer.

Hjalmarson, M. A. y Lesh, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 520-534). Londres: Routledge.

Kelly, A.E. (2004). Design research in education: Yes, but is it methodological? *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 115-128.

Lesh, R. y Sriraman, B. (2005). Mathematics education as a design science. *ZDM, 37(*6), 490-505.

Kelly, A. E. (2006). Quality criteria for design research. En J. Van de Akker, K. P. E. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 107-118). Londres: Routledge.

Kelly, A. E. (2013). When is Design Research Appropriate? En T. Plomp y N. Nievee (Eds.), *Educational design research. Part A: An introduction.* (pp. 134-151). Enschede, Países Bajos: SLO.

Lesh, R.A. y Sriraman, B. (2005). Mathematics education as a design science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*, 490–505.

Lesh, R. A. y Kelly, A. E. (Eds.) (2000). Multitiered teaching experiments. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Luckin, R., Puntambekar, S., Goodyear, P., Grabowski, B., Underwood, J. y Winters, N. (2013). *Handbook of Design in Educational Technology.* Abingdon: Routledge.

Markauskaite L., Freebody, P. y Irwin, J. (2011). *Methodological choice and design*. Países Bajos: Springer.

McKenney, S. y Reeves, T. C. (2014). Educational Design Research. En J. M. Spector, M.D. Merrill, J. Elen y M.J. Bishop (Eds.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (pp. 131-140). New York: Springer.

McKenney, S. y Reeves, T. C. (2019). *Conducting educational design research.* New York: Routledge.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de primaria.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, M. y Castro E. (2021). Third grade students' use of relational thinking. *Mathematics, 9*(2), 187.

Molina, M, Castro, E., Castro E. y Molina, J. L. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Montes, M., Pascual, M. I. y Climent, N. (2021). Una aproximación a la formación especializada en matemáticas de maestros egresados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24*(1), 83–104.

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L. y Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational researcher*, *32*(1), 25-28.

Sandoval, W. A. (2014). Conjecture mapping: An approach to systematic educational design research. *Journal of the learning sciences*, *23*(1), 18-36.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M. (2004). Raising Issues of Quality in Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 157-163.

Simon, M. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 272-275). Países Bajos: Springer.

Steffe, L. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 129-162.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Swan, M. (2020). Design research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 192-195). Dordrecht: Springer.

Van den Akker, J. (2013). Curricular development research as specimen of educational design research. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research. Part A: An introduction* (pp. 53-70). Países Bajos, Enschede SLO.

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in Kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *62*, articulo 100866.

Walker R. (2011) Design-based research: Reflections on some epistemological issues and practices. En: Markauskaite L., Freebody P., Irwin J. (Eds), *Methodological choice and design. Methodos series (Methodological prospects in the social sciences),* vol 9. Dordrecht: Springer.

---

[i] Los estudios que se realizan bajo este marco reciben múltiples denominaciones tales como experimento de diseño, experimento basado en diseño, estudio de diseño, investigación de desarrollo (del currículo), experimentos formativos, investigación de implementaciones basadas en diseño (Bakker, 2019; MacKenney y Reeves, 2014). En este trabajo se emplean de forma sinónima los términos genéricos estudio de diseño e investigación de diseño.

ii En http://www.pensamientoalgebraico.es se describe gran parte de esta experiencia.

[iii] Pueden consultarse ejemplos de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en Clements, Wilson y Sarama (2004) y Steffe (2004), entre otros.

[iv] Una base de datos de principios de diseño accesible en http://www.edu-design-principles.org/dp/designHome.php recopila principios de diseño de diferentes investigaciones con el propósito de que sean puestos a prueba en otros contextos.

[v] En la actualidad desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico la ingeniería didáctica está siendo desarrollada para adaptarse a los actuales intereses de investigación (Artigue, 2015).

Comunicaciones

APRENDIENDO PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL: ¿CÓMO INFLUYE EL CONTEXTO DE ENSEÑANZA?

Learning patterns in early childhood education: how does the teaching context influence it?

Acosta, Y. y Alsina, Á.

Universitat de Girona

Resumen

Se estudia el aprendizaje de los patrones con 24 alumnos de 3º de Educación Infantil en función del tipo de contexto. Se analiza, de manera cualitativa y cuantitativa, las producciones de los participantes en los tres niveles propuestos por el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM): informal (vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos); intermedio (recursos literarios y tecnológicos); y formal (recursos gráficos). Los resultados indican que la comprensión del patrón es mayor en el nivel informal, siendo del 91,7% frente a un 75% y 66,7% de los niveles intermedio y formal respectivamente. Se concluye que es necesario: a) priorizar prácticas de enseñanza que consideren los contextos informales para iniciar de manera concreta y próxima el aprendizaje de los patrones; y b) acompañar el proceso de abstracción de la unidad de repetición favoreciendo su comprensión y transferencia.

Palabras clave: *patrones matemáticos, itinerario de enseñanza, contextos educativos, Educación Infantil*

Abstract

The learning of patterns is studied with 24 pupils in the 3rd year of Infant Education according to the type of context. We qualitatively and quantitatively analyse the participants' productions at the three levels proposed by the Mathematics Education Itineraries Approach (EIEM): informal (everyday life, manipulative materials and games); intermediate (literary and technological resources); and formal (graphic resources). The results indicate that the understanding of the pattern is higher at the informal level, being 91.7% compared to 75% and 66.7% at the intermediate and formal levels respectively. It is concluded that it is necessary: a) to prioritise teaching practices that consider informal contexts in order to initiate the learning of patterns in a concrete and close way; and b) to accompany the process of abstraction of the repetition unit, favouring its comprehension and transfer.

Keywords: *mathematical patterns, teaching itinerary, educational contexts, Early Childhood Education*

INTRODUCCIÓN

La identificación y el análisis de patrones contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico y otorga la oportunidad temprana de observar y verbalizar generalizaciones, junto con facilitar el acceso al registro simbólico (Tsamir et al., 2018). Sin embargo, son pocos los estudios que han analizado el papel de los patrones como un elemento importante en el desarrollo del conocimiento matemático temprano (Morales et al., 2017; Rittle-Johnson et al., 2015), y menos aún en analizar cómo puede influir el contexto de enseñanza en el aprendizaje de los niños. En este sentido,

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2021). Aprendiendo patrones en educación infantil: ¿cómo influye el contexto de enseñanza?. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 101 – 108). Valencia: SEIEM.

asumimos el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM, a partir de ahora), que plantea la planificación de prácticas de enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil en una diversidad de contextos (Alsina, 2019, 2020a).

El aprendizaje de los patrones en Educación Infantil

Los patrones matemáticos contribuyen a que los niños sean capaces de reconocer, ordenar y organizar su mundo, ya que se ha evidenciado que el reconocimiento, la comparación y el análisis de patrones son factores que determinan y favorecen el desarrollo intelectual de los pequeños (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2003). De aquí que Clements y Sarama (2015) defiendan que los patrones matemáticos permiten buscar regularidades y estructuras matemáticas, ya que van más allá de un simple contenido. Mulligan y Mitchelmore (2009) afirman que, al hablar de patrones, es necesario distinguir entre patrón -como una seriación o secuencia-, y estructura de patrón, es decir, organización, regla o núcleo que subyace al patrón. En esta línea exponen que los patrones comprenden dos componentes: 1) cognitivo, relacionado con el conocimiento de la estructura; y 2) meta-cognitivo, unido a la capacidad de búsqueda y análisis de patrones.

Bock et al., (2018) indican que los patrones, según su regularidad y contenido, pueden ser de diversos tipos: patrones con unidades que se repiten, que es el tipo de patrón en el que se focaliza este estudio; patrones que se ordenan de manera estructural o simétrica; o patrones que crecen. Acosta y Alsina (2020), a partir de un estudio longitudinal con 24 alumnos de 1º de Educación Infantil (3-4 años), indican que los niños primero aprenden a trabajar con patrones de repetición de tipo simple (AB) y luego progresan en la identificación de patrones más complejos (ABB, AAB, ABC, etc.) hasta avanzar hacia el reconocimiento de su unidad de repetición. Además, verifican que el término "patrón" resulta complicado de comprender debido al grado de abstracción que requiere (Lüken y Sauzet, 2020), por este motivo se puso mayor énfasis en la lectura de la seriación y menos en el reconocimiento de su unidad de repetición. Estos hallazgos apoyan las conclusiones de Papic, Mulligan y Mitchelmore (2011), quienes también observaron que los estudiantes de esta edad no identifican el patrón que sustenta la seriación sin la intervención directa del docente. De igual manera, autores como Rittle-Johnson et al., (2015) confirman la necesidad de utilizar explicaciones instructivas para reforzar la abstracción del patrón y que este aprendizaje se realiza con éxito a partir de los cuatro-cinco años. ¿Pero cómo influye el contexto que se planifica para enseñar el patrón?; y ¿cómo influye en su comprensión?

Para tratar de dar respuesta a estos interrogantes, se asume el EIEM de Alsina (2019, 2020a), que se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la repetición y la memorización y, en su lugar, plantea la enseñanza de las matemáticas como un recorrido de lo concreto hacia lo abstracto, a través de secuencias de enseñanza intencionadas. Dichas secuencias o itinerarios consideran distintos niveles de enseñanza (informal, intermedio y formal) formados por recursos que avanzan de lo particular a lo general (Figura 1).

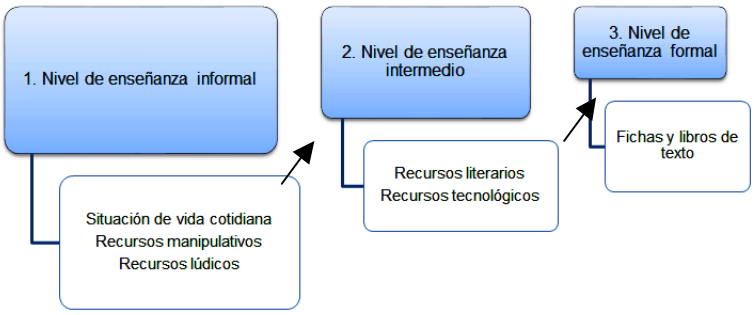


Figura 1. Niveles y contextos que conforman el EIEM (Alsina, 2019).

Tal y como se aprecia en la figura 1, en el nivel informal la enseñanza se inicia en situaciones reales, aprovechando el entorno inmediato del alumno, o bien haciendo uso de materiales manipulativos y juegos, donde las estrategias y la comprensión de la situación se apoyan en los conocimientos informales, el sentido común y la propia experiencia. En estos contextos, las demandas cognitivas se focalizan en la exploración del entorno, la manipulación o la experimentación como requisitos para poder visualizar las ideas matemáticas de manera concreta.

En el nivel intermedio, la enseñanza se vehicula en contextos que conectan los escenarios reales o realistas de la fase inicial con los contextos formales de la fase final. En estos contextos, las demandas cognitivas se focalizan en la exploración y la reflexión, que conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático. Finalmente, en el nivel formal, la enseñanza del contenido concluye en formatos gráficos que fomentan la representación y formalización del conocimiento matemático con la finalidad de completar el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico. En estos contextos, pues, las demandas cognitivas se focalizan en la abstracción y la generalización, principalmente.

Con base en estos fundamentos, se ha diseñado un itinerario de enseñanza de patrones de repetición, es decir, seriaciones iterativas que muestran regularidades o repeticiones de características cualitativas y/o cuantitativas específicas (color, formas, tamaño, sonidos, o números, por ejemplo, "verde, rojo, rojo, verde, rojo, rojo" o "▲○■▲○■").

Considerando estos antecedentes, el objetivo de esta investigación consiste en analizar y comparar la comprensión de los patrones de repetición en cada nivel de enseñanza (informal, intermedio y formal) teniendo en cuenta cada uno de los contextos que lo conforman.

MÉTODO

El presente estudio forma parte de una investigación basada en el diseño (*Design-based research* [DBR]) de carácter longitudinal, secuenciada a lo largo de 3 cursos escolares con un mismo grupo de alumnos (desde 1º a 3º de Educación Infantil), donde se han diseñado y validado itinerarios de enseñanza de los patrones que contemplan los tres niveles del EIEM. De acuerdo con Anderson y Shattuck (2012), el (DBR) pretende aumentar la transferencia y la traducción de la investigación educativa en una práctica mejorada, con el objetivo de enfatizar y guiar tanto la praxis docente como la investigación en contextos educativos.

Es preciso destacar que, de manera también longitudinal, cada año las propuestas de enseñanza han sido validadas de manera externa por 8 expertos del Grupo de Trabajo "Investigación en Educación Matemática Infantil" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Este juicio de expertos se ha diseñado a través de un cuestionario de evaluación, donde se han valorado aspectos didácticos, organizativos, metodológicos y pedagógicos del itinerario de enseñanza. Dicho procedimiento, junto con la práctica reflexiva desarrollada tras cada sesión, han favorecido la articulación de análisis continuos y retrospectivos que informan sobre el diseño y facilitan su mejora de manera longitudinal, es de decir, al largo de los tres años de intervención. Se puede ampliar dicho proceso de validación y reestructuración consultando los resultados publicados en Acosta y Alsina (2018).

La implementación se ha llevado a cabo con 24 alumnos (12 niños y 12 niñas) de 3º de Educación Infantil de una escuela pública de Girona, cuya edad media es de 5 años y 8 meses. Todos tienen conocimientos previos en relación con el trabajo con patrones. Tras dos años de intervención los alumnos son capaces de a) identificar patrones (AB), (AAB) y (ABB); b) completar y extender seriaciones con patrones de repetición; c) anticipar acciones a partir de la identificación de una determinada secuencia temporal; y d) leer y representar los patrones (AB), (AAB) y (ABB).

Tabla 1. Actividades diseñadas y validadas para los tres niveles de enseñanza del EIEM.

En cada actividad, los alumnos han seguido el mismo procedimiento: a) llevar a cabo una

Contextos informales	**Situaciones de vida cotidiana**	1. A partir de una caja con diversos elementos de la vida cotidiana (calcetines, zapatillas, camisetas, recipientes decorados, cintas, guías de viaje, etc.) se pide a los alumnos que identifiquen y reconozcan seriaciones presentes en los elementos. Después de la manipulación, se les motiva a descubrir la unidad de repetición y a crear nuevas seriaciones con el patrón identificado. 2. Se propone ir a "cazar" patrones matemáticos en el patio de la escuela: cuando identifican una seriación, deben extraer el patrón de repetición y reproducir en un papel nuevas seriaciones con el mismo núcleo.
	Recursos manipulativos	3. Se muestran tarjetas con un determinado patrón (AB) (AAB) (ABB) y (ABC), y se invita a los alumnos a escoger un patrón y crear un collar enfilando piezas translúcidas sobre la mesa de luz. 4. Se pide que construyan, en grupos de 5 alumnos, un mandala gigante con material reciclado y estructurado (*Pattern Block*) siguiendo el patrón que se decida de manera colectiva.
	Recursos lúdicos	5. Se plantea seguir la coreografía de la canción "El baile de los pajaritos", procurando que reconozcan el patrón que se establece y que anticipen la acción que corresponde. 6. Se presentan las normas del juego motriz "Mar-Tierra" con el objetivo de que sean capaces de identificar el patrón de la consigna y anticipar la acción siguiente.
Contextos intermedios	**Recursos literarios**	7. Se invita a los niños a escuchar activamente el cuento "¿A qué sabe la luna?" con el objetivo de anticipar los hechos y representar de manera cooperativa la secuencia de aparición de los personajes.
	Recursos tecnológicos	8. A partir de la interacción con el robot "Cubetto", se crean patrones de acciones con las fichas de programación; se comprueba el recorrido diseñado y se coloca al final del trayecto un edificio construido con piezas de lego Duplo siguiendo el mismo patrón que se ha usado con las fichas de programación.
Contextos formales	**Recursos gráficos**	9. A través de fichas previamente diseñadas se invita a los alumnos a observar, identificar, analizar y leer las seriaciones propuestas para reconocer los elementos que componen la unidad mínima del patrón y poder completar la seriación.

interacción directa a través de la manipulación y la acción lúdica; b) establecer un diálogo para compartir las acciones realizadas y los aprendizajes descubiertos; y c) iniciarse en el uso de símbolos en sus producciones escritas, dando lugar, en algunos casos, a una primera aproximación de la representación simbólica.

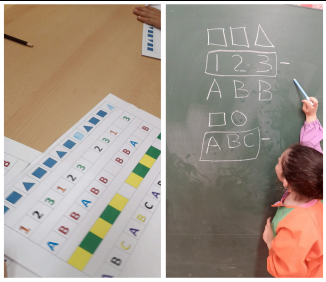
Para la obtención y análisis de los datos, se han combinado técnicas cualitativas y cuantitativas de recogida de información. Desde el punto de vista cualitativo, se ha optado por emplear esquemas metodológicos etnográficos de observación participante haciendo uso del diario de campo como herramienta para registrar expresiones espontáneas de los niños durante la realización de las actividades; y se han documentado a través del registro audiovisual, fijo y móvil, todas las propuestas. Este hecho adopta un carácter reflexivo que da voz al pensamiento del niño, reconociendo al observador como un agente activo que co-construye significado de manera

reflexiva, activa y recíproca con la finalidad de crear un espacio plural y transformador (Mitchelmore, 2018). Con una visión más cuantitativa, se han recogido, en formato dibujo, todas las producciones escritas de los niños en las nueve actividades. Se han categorizado las producciones en dos grupos de casos: 1) "correcto", cuando los alumnos han sido capaces de representar en un papel el patrón identificado en la propuesta, sin cometer errores y 2) "incorrecto", cuando la representación realizada presenta errores y omiten o intercambian unidades. Para realizar el análisis, las variables categóricas han sido descritas según el número y el porcentaje de casos de cada categoría, señalando además como "no válidos" los niños que el día de la intervención no asistieron a la escuela, y las variables continuas han sido descritas mediante estadísticos de tendencia central como la media y la desviación estándar.

RESULTADOS

Desde un punto de vista cualitativo, en la tabla 2 se muestran diversos fragmentos de la documentación realizada (diario de campo y trascripciones del registro audiovisual). Por razones de espacio, se ha seleccionado una propuesta de cada nivel.

Tabla 2. Evidencias cualitativas del itinerario de enseñanza.

Nivel	Documentación pedagógica	Anotaciones en el diario de campo
Informal: actividad 4	 Actividad 4 perteneciente al contexto de: Recursos manipulativos	**Alumno:** Nuestro mandala tiene patrones y seriaciones. **Docente:** ¿Ah sí? ¿Y cuál es la diferencia? **Alumno:** El patrón es el más pequeño y la seriación son muchas veces seguidas el patrón. Mira, entre los palos de helados hemos puesto el patrón de la seriación que rodea el plato rojo. *El alumno señala un patrón del tipo ABC con las tapas de botellas (rojo-verde-azul) e identifica la seriación correspondiente.*
Intermedio: actividad 8	 Actividad 8 perteneciente al contexto de: Recursos tecnológicos	**Alumno 1:** El Cubettos gira a un lado, y avanza dos, gira a un lado y avanza dos... y con la ficha azul se repite todo. **Alumno 2:** Entonces el edificio tendrá 3 colores. **Alumno 1:** No, dos colores porque solo gira y avanza. **Alumno 2:** Pero avanza dos y hay que poner dos fichas. **Alumno 3:** Sí, hay que poner dos piezas de Lego, pero del mismo color porque es girar, avanzar, avanzar. **Alumno 2:** Vale entonces lo hago así: amarillo, azul, azul.
Formal: actividad 9	 Actividad 9 perteneciente al contexto de: Recursos gráficos	Después del trabajo individual: a) identifican el patrón cooperativamente; b) escriben los núcleos identificados; y c) descubren los patrones iguales. Una parte del grupo defiende que los patrones iguales son ABB y ABC porque están formados por letras. Otros 4 alumnos exponen que son iguales los patrones 123 y ABC porque los tres componentes son diferentes. Llegados a este punto se comparte con toda la clase la solución, fomentando así el aprendizaje entre iguales.

Como se observa en la tabla 2, los alumnos de 5 años ya son capaces de identificar, en su mayoría, la unidad de repetición de una seriación. Presentan habilidades para abstraer el patrón y transferir esta capacidad a otros contextos de enseñanza más abstractos.

Respecto al análisis cuantitativo, en la tabla 3 se muestran los resultados según el nivel del itinerario de enseñanza: informal, intermedio y formal.

Tabla 3. Resultados según el nivel del itinerario de enseñanza

TOTAL NIVEL INFORMAL	Frecuencia	Porcentaje	Pct. Válidos
Correcto	22	91,7	100,0
Incorrecto	0	0,0	0,0
Total válidos	22	91,7	100,0
No válidos	2	8,3	
Total	24	100	
TOTAL NIVEL INTERMEDIO	Frecuencia	Porcentaje	Pct. Válidos
Correcto	18	75,0	81,8
Incorrecto	4	16,7	18,2
Total válidos	22	91,7	100,0
No válidos	2	8,3	
Total	24	100	
TOTAL NIVEL FORMAL	Frecuencia	Porcentaje	Pct. Válidos
Correcto	16	66,7	69,6
Incorrecto	7	29,2	30,4
Total válidos	23	95,8	100,0
No válidos	1	4,2	
Total	24	100	

En la tabla 3 se observa que el grado de éxito en la comprensión del patrón es considerablemente mayor en el nivel informal, siendo del 91,7% frente a un 75% y 66,7% de los niveles intermedio y formal respectivamente. En relación con los errores obtenidos, se aprecia que fue mayor en el nivel formal, ya que 7 alumnos realizaron la propuesta de manera incorrecta, frente a 4 para el nivel intermedio y ninguno para el nivel informal.

En la figura 2 mostramos un análisis más detallado, en función de cada uno de los contextos presentes en el itinerario de enseñanza.

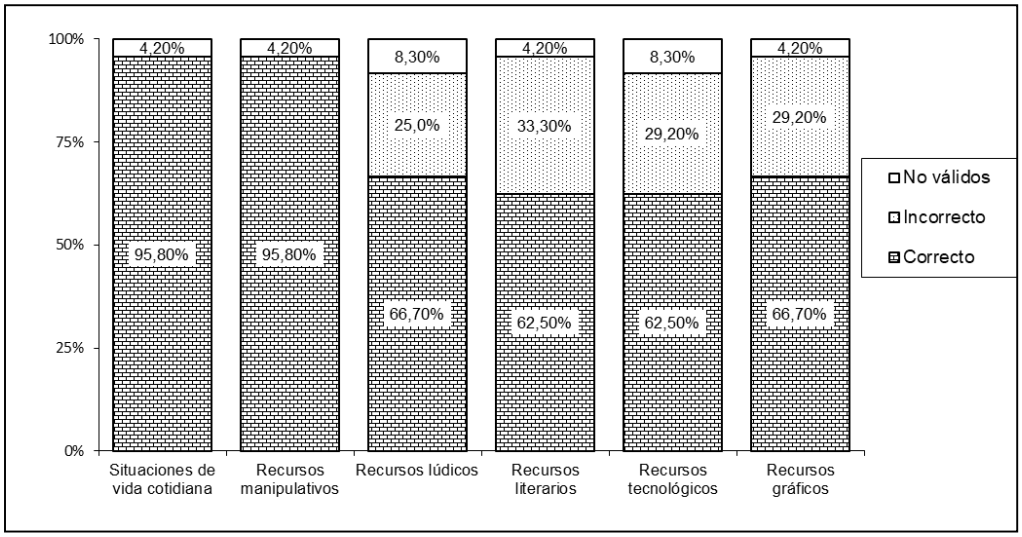


Figura 2. Resultados según los contextos de enseñanza que se incluyen en el itinerario

En la figura 2 se observa que en las actividades de vida cotidiana y con materiales manipulativos es donde se obtienen las puntuaciones más altas, siendo el grado de éxito de 95,80% para ambos. Por

otro lado, el mayor porcentaje de puntuaciones incorrectas se ha obtenido en el recurso literario (33,30%), seguido del recurso tecnológico y el recurso gráfico (29,20% en ambos casos).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se ha analizado la comprensión de los patrones de repetición en diversos contextos de enseñanza, considerando que las habilidades para crear patrones y reconocerlos se desarrollan de manera natural entre los 3 y 5 años de edad (Lüken y Sauzet, 2020). Los datos obtenidos han evidenciado que la comprensión es más precisa en contextos en los que se prioriza la enseñanza a partir de situaciones informales de exploración del entorno, manipulación de materiales y juegos. De acuerdo con Castro y Castro (2016) los niños aprenden a través de experiencias concretas con materiales y mediante interacciones lúdicas intencionadas y previamente planificadas. Es así como hemos comprobado, a partir de las evidencias recogidas, que cuanto menos concreto ha sido el contexto, menor ha sido el grado de comprensión de los niños. En esta línea, hemos observado que el tipo de contexto influye directamente en la comprensión del patrón y que esta comprensión se ha visto favorecida por la posibilidad de visualizar el núcleo del patrón en contextos concretos para luego transferirla a contextos más abstractos.

En la capacidad de identificación del patrón han sido claves aspectos como la comunicación y el razonamiento, pues mediante la argumentación interpersonal e intrapersonal se han creado sinergias cooperativas en la resolución y comprensión de las tareas. En este sentido, "el lenguaje permite la adquisición de nueva información, así como la apropiación de ideas y procesos complejos" (Castro y Castro, 2016, p.30). Adicionalmente, la adquisición progresiva de procedimientos matemáticos como los mencionados permiten comprender y compartir la realidad. Por esta razón, resulta imprescindible fomentar el uso de currículos y prácticas educativas que pongan en evidencia los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento y prueba, así como los de representación, comunicación y conexión de las ideas matemáticas (NCTM, 2003).

Desde esta perspectiva, y asumiendo que existe una estrecha relación entre la capacidad matemática de los niños y la repetición de patrones, puesto que la identificación de secuencias predecibles basadas en reglas subyacentes juega un papel crucial (Zippert et al., 2020), consideramos necesario priorizar prácticas de enseñanza de patrones que: a) contemplen los contextos informales para iniciar de manera concreta y próxima el aprendizaje de los patrones; b) aboguen por el acompañamiento del proceso de abstracción de la unidad de repetición de manera comprensiva y transferible a contextos más abstractos; y c) fomenten espacios que promuevan el intercambio de ideas y puntos de vista divergentes, desde el respeto y la escucha activa haciendo uso de diferentes lenguajes (oral, escrito, simbólico…) con la finalidad de dar respuestas efectivas a preguntas que estimulan el pensamiento matemático (Alsina, 2020b).

Este planteamiento está en sintonía con las aportaciones de otros autores como Sterner et al., (2019), quienes subrayan que es fundamental conectar el conocimiento informal con los símbolos escritos, ya que de esta manera se establece un vínculo significativo entre las habilidades informales y formales, creando una base sólida para las etapas posteriores de escolarización (Rittle-Johnson et al., 2019). Es así como se considera relevante fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura ejercitación, o el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición (Alsina, 2019). Por tanto, apostamos por una enseñanza-aprendizaje de los patrones en Educación Infantil a partir de un enfoque que considere un itinerario significativo que avance de manera progresiva hacia la abstracción, contemplando a la vez diversos contextos de enseñanza y procesos matemáticos.

Referencias

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: El caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno, *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111-120). Gijón: SEIEM.

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 6 a 12 años.* Graó.

Alsina, Á. (2020a). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2020b). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar, 28*, 1-13.

Anderson, T., y Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher, 41* (1), 16–25. https://doi.org/10.3102/0013189X11428813

Bock, A.M., Cartwright, K.B., McKnight, P.E., Patterson, A.B., Shriver, A.G., Leaf, B.M., Mohtasham, M.K., Vennergrund, K.C., y Pasnak, R. (2018). Patterning, Reading, and Executive Functions. *Frontiers in Psychology*, *9*, 1802.

Castro, E., y Castro E. (2016). Matemáticas en educación infantil. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 19-41). Ediciones Pirámide.

Clements, H.D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Learning Tools LLC.

Lüken, M.M., y Sauzet, O. (2020) Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(1), 28-48.

Mitchelmore, S. (2018). Providing Insight Through Pedagogical Documentation: Seeing Research as an Everyday Practice. En M. Fleer y B. van Oers (Eds.), *International Handbook of Early Childhood Education Volume I* (190-195). Springer.

Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2009). Conocimiento de patrones y estructuras en el desarrollo matemático temprano. *Revista de investigación en educación matemática, 21* (2), 33–49.

Morales, R., Cañadas, M. C., y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA, 11*(4), 233-252

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*, 237-268.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31,* 101-112.

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., y Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quaterly, 46*, 166-178.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E.S., y Barkai, R. (2018). Early Childhood Teachers' Knowledge and Self-efficacy for Evaluating Solutions to Repeating Pattern Tasks. En Elia I., Mulligan J., Anderson A., Baccaglini-Frank A., Benz C. (Eds.) *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education.* ICME-13 Monographs. Springer

Zippert, E., Douglas, A.-A., y Rittle-Johnson, B. (2020). Finding patterns in objects and numbers: Repeating patterning in pre-K predicts kindergarten mathematics knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology*.

COHERENCIA EN LA ENSEÑANZA DE LA MEDIDA EN CIENCIAS Y MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS COMPARATIVO[1]

Coherence in Measurement Teaching in Science and Mathematics: A comparative analysis

Aguayo, C. G.[a] y Montoro A. B.[b]

[a]Universidad de Almería, [b]Universidad de Granada

Resumen

El presente trabajo compara la propuesta de enseñanza de la medida de magnitudes propuesta en el currículo y libros de texto de Educación Primaria para el área de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas en Andalucía. Los resultados analizados muestran incoherencias en la distribución de contenidos relativos a la medida del volumen incluidos en el currículo para estas áreas. Dichas incoherencias se reflejan en la propuesta de los libros de texto analizados. Además, se encuentran diferencias en las estrategias, unidades de medida e instrumentos utilizados en las dos áreas. Por otro lado, el énfasis en la estimación y medida de magnitudes del currículo de matemáticas de Educación Primaria no se ve reflejado en los libros de texto, que se limitan a trabajar cambios de unidades y operaciones con medidas a partir de cuarto curso.

Palabras clave: *medida, currículo, libros de texto, Educación Primaria*

Abstract

The present study compares the magnitude teaching proposal by the Andalusian curriculum with Primary Education textbooks for the area of Mathematics and Science. The analysed results show inconsistences regarding the sequence of contents related to volume measurement included in the Mathematics and Science curriculum. These inconsistences are reflected in the proposal of the textbooks analysed. Moreover, differences on strategies, measurement units and instruments used in both areas were found. Furthermore, the emphasis on the estimation and measurement of magnitude expressed in the curriculum for Mathematics teaching in Primary Education is not manifested in textbooks. Textbooks merely work on changes of measurement units and operations from 4th year of Primary Education onwards.

Keywords: *measurement, curricula, textbook, Primary Education*

INTRODUCCIÓN

El enfoque de enseñanza STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) ha cobrado mucha relevancia entre investigadores y profesores en los últimos años, aunque no todos ellos entienden dicha metodología o enfoque de la misma manera. Entre los aspectos que diferencian las distintas posturas sobre qué se considera educación STEM se encuentra el número de áreas que deben trabajarse y su grado de integración. Los modelos de enseñanza STEM varían desde aquellos que trabajan estas disciplinas de manera independiente a otros que exigen la integración de las cuatro, siendo una de las opciones más habituales la integración de ciencias y matemáticas (Dare, Ring-Whalen y Roehrig, 2019).

La dinámica de trabajo en Educación Primaria, donde un solo profesor es el encargado de trabajar las asignaturas troncales, como son Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza, hace que sea más

[1] Trabajo realizado con el apoyo del proyecto PCG2018-095765-B-100 del Plan Nacional de I+D+I.

Aguayo, C. G. y Montoro A. B. (2021). Coherencia en la enseñanza de la medida en ciencias y matemáticas: un análisis comparativo. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 109 – 116). Valencia: SEIEM.

factible la introducción en el aula de propuestas STEM desde un enfoque interdisciplinar que priorice la integración de estas dos disciplinas.

Desde los organismos gubernamentales se establecen las enseñanzas mínimas para cada etapa educativa. Sin embargo, en la práctica, la mayoría de profesores opta por el seguimiento de propuestas educativas planteadas en los libros de texto de alguna editorial, que supone una concreción e interpretación del currículo. Por ello, consideramos interesante hacer una revisión del currículo y los libros de textos Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas, permitiéndonos ver los contenidos que se trabajan en ambas áreas, como punto de partida en el diseño de propuestas STEM integradas. En concreto, dado que la medida de magnitudes es un elemento clave en ambas áreas y está presente en numerosas situaciones de la vida diaria, centraremos este trabajo en dicho contenido.

MARCO TEÓRICO

El análisis y comparación de libros de texto compone una línea de investigación con una amplia trayectoria en el área de matemáticas (Schubring y Fan, 2018) y ciencias (Occelli y Valeiras, 2013), dada la elevada presencia de este recurso en las aulas y el interés de la comunidad académica por analizar la calidad de estas propuestas educativas. Sin embargo, en la última década escasean las investigaciones sobre análisis de libros de texto que aborden la enseñanza de la medida y sus magnitudes.

En Mengual, Gorgorió y Albarracín (2017) se presenta un análisis de las actividades de medida propuestas por los libros de texto de la editorial Vicens Vives de toda la etapa de Educación Primaria. Estas tareas se clasifican en nueve categorías extraídas del currículo: Magnitudes y selección de unidad, comparación y ordenación de medidas, medir, leer y escribir medidas, cambios de unidades y operaciones, medidas geométricas, estimación, proporciones y escalas y problemas contextualizados en la medida. En sus resultados, en el primer ciclo la actividad prioritaria es la medición, seguida de la comparación y ordenación de medidas, mientras que en los dos últimos ciclos se centran en los cambios de unidades, las medidas geométricas y los problemas contextualizados que requieren operaciones con medidas.

Otra investigación relevante para nuestro estudio es la realizada por Díez, Cañadas, Picado, Rico y Castro (2016), que estudiaron la evolución en el tratamiento de las magnitudes y su medida desde 1945 a 2013 en el currículo de Educación Primaria y libros de texto editados durante las distintas leyes educativas. En el caso de los libros de texto, solo presenta los resultados relativos al uso de dos instrumentos de medida: el metro y el reloj. Las categorías utilizadas en su análisis fueron las siguientes:

- Identificación, comparación y medida de magnitudes. Se refiere a los conceptos, estrategias e instrumentos de medición, incluyendo actividades de medición y la introducción a la estimación de magnitudes.
- Sistemas de medida, es decir, las unidades de medida, cómo se leen y se representan, las equivalencias entre unidades y su conversión.
- Operaciones aritméticas con distintas cantidades de medida de una misma magnitud.
- Resolución de problemas relacionados con magnitudes y medida en diferentes contextos.

De dicho estudio se desprende la ausencia de una propuesta estable para la enseñanza de la medida de magnitudes.

Dentro de la Didáctica de la Matemática se considera que la enseñanza de medida de magnitudes consta de varias componentes: percepción y comparación de la magnitud que se desea medir, la medida y la estimación de la medida de magnitudes presentes en distintos objetos (Gil, Moreno y

Montoro, 2015). La comparación consiste en indicar qué elemento presenta mayor cantidad de magnitud, mientras que la medida y la estimación requieren que se determine el número de veces que cabe la unidad en un objeto. En ocasiones, es el propio estudiante quien debe escoger la unidad de medida más adecuada, ya sea con unidades estándar o no estándar. En el caso particular de las tareas de medida se requiere de la reiteración física de la unidad hasta cubrir el objeto o el uso de instrumentos para ver cuántas unidades son necesarias, mientras que en la estimación esta tarea debe realizarse mentalmente, valiéndose de estrategias como la descomposición y recomposición y el uso de referentes (Chang, Males, Mosier y Gonulates, 2011). Por otro lado, existen diversas formas de comparar la magnitud de objetos como son la comparación perceptiva, comparación directa, comparación con intermediarios y la comparación de medidas. En el caso de las magnitudes multidimensionales, su enseñanza contempla una última etapa (medida indirecta) en la que se construyen o aplican fórmulas para obtener el área o volumen de objetos a partir de la medida de ciertas longitudes (Gil, Moreno y Montoro, 2015)

Nuestro trabajo va en la línea de las investigaciones anteriores, ya que analiza la propuesta didáctica para la enseñanza de la medida en Educación Primaria en el currículo y libros de texto de matemáticas. No obstante, presenta como principal diferencia la comparación del tratamiento dado a la medida en las asignaturas de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza. En concreto, se pretende:

- Describir y comparar los aspectos relativos a la enseñanza de la medida incluidos en el currículo de Educación Primaria para el área de Matemáticas y de Ciencias de la Naturaleza.
- Describir y comparar la propuesta de enseñanza de la medida en los libros de texto de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza de Educación Primaria.
- Analizar la coherencia entre el tratamiento dado a la medida en el área de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza, así como entre la propuesta del currículo y los libros de texto.

METODOLOGÍA

Este estudio se enmarca dentro de un proyecto de investigación sobre competencia profesional del profesor y educación STEM de la Universidad de Granada, en el que se pretende desarrollar y evaluar propuestas STEM en Andalucía. Este hecho nos llevó a analizar el Decreto 97/2005 de 3 de marzo, por el que se establece el currículo correspondiente a Educación Primaria en Andalucía (Junta de Andalucía, 2015), y la propuesta didáctica de la colección "más Savia" de la Editorial SM para las asignaturas de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza que se utilizan actualmente en colegios andaluces. Para cada curso académico, esta colección divide los contenidos a trabajar en doce temas que distribuye en tres libros, uno por trimestre, de cuatro temas cada uno.

Inicialmente se decidió analizar todos estos libros, pero, tras un análisis preliminar, descartamos de nuestro análisis aquellos temas en las que las magnitudes aparecían únicamente como parte del contexto de un problema aritmético, es decir, no formaban parte del contenido principal del tema. Tras dicho filtro, obtuvimos cuatro libros de Ciencias de la Naturaleza y doce de Matemáticas. La Tabla 1 resume el número de libros y temas que trabajan de manera explícita las magnitudes y su medida que, por tanto, forman parte de nuestra muestra. Las unidades de análisis las conforman todos aquellos fragmentos que implican una demanda cognitiva al estudiante, ya sean realizar una tarea o leer explicaciones o ejemplos.

Tabla 1. Descripción de la muestra

	Matemáticas						Ciencias de la Naturaleza					
Curso	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Libros	2	3	2	2	2	1	0	1	1	1	1	0
Temas	7	10	3	5	4	4	0	1	1	1	1	0

Nuestra categorización toma como referencia las categorías utilizadas por Díez et al. (2016), es decir, conceptos y procedimientos de medida, sistemas de medida, operaciones y resolución de problemas de medida. Sin embargo, consideramos adecuado desglosar la primera categoría, relativa a los conceptos y procedimientos de medida, para distinguir qué componente del sentido de la medida se trabaja en la unidad de análisis, esto es, si se propone la percepción o comparación de magnitudes, la medida o la estimación de cantidades de magnitud. Por otro lado, se indicará el tipo de unidades que se utilizan en la medida (unidades no estándar o estándar), y, al igual que Mengual, Gorgorió y Albarracín (2017), incluimos una categoría que hace referencia al uso de instrumentos (los autores la llamaban "leer y escribir medidas") y otra para la selección de unidades de medida. Destacar que en la categoría de resolución de problemas de medida aparecían tareas contextualizadas que requieren suma y resta de medidas. Es decir, no son problemas abiertos que requieran del uso de heurísticos, por lo que preferimos denominarla "tareas contextualizadas". En el apartado de resultados se muestran algunos ejemplos de unidades de análisis y la categoría a la que pertenecen.

RESULTADOS

En primer lugar describiremos la propuesta de enseñanza de las magnitudes en el currículo de Andalucía, que en el Decreto 97/2005 aparece en área de Matemáticas y de Ciencias de la Naturaleza.

Dentro del área de Matemáticas, que cuenta con un bloque de contenidos exclusivo para las magnitudes y su medida, se establece la necesidad de trabajar la medida de longitud, masa, capacidad y tiempo en todos los ciclos de Educación Primaria, haciendo referencia a la importancia de seleccionar la unidad de medida más adecuada y el uso de instrumentos de medida. En este sentido, en el primer ciclo se especifica que debe trabajar la medida con unidades convencionales y no convencionales y su expresión simple. Es decir, se centra solo en algunas subcategorías del aspecto conceptual y procedimental de la medida. En el segundo ciclo se enfatiza el uso de unidades estándar y las relaciones entre sus múltiplos y submúltiplos y la expresión de medidas de forma simple y compleja (sistemas de medida), la suma y resta de medidas de longitud, capacidad, masa y tiempo (operar) y resolver problemas que involucren medidas (tareas contextualizadas). Además, se incluye la capacidad de estimación. Por último, en el tercer ciclo, se introduce la superficie, volumen y amplitud angular, incluyendo indicadores relativos a la comparación de superficies y ángulos.

En el caso del área de Ciencias de la Naturaleza, las magnitudes aparecen dentro del bloque de Materia y Energía, como propiedades de la materia. Además, solo aparece en el segundo ciclo de Educación Primaria, donde se especifica que los estudiantes deben utilizar balanzas y recipientes graduados para medir la masa y el volumen de objetos. Dicho aspecto aparece vinculado a los conceptos de densidad y flotabilidad.

Pero, ¿cómo se refleja esto en los libros de texto? Siguiendo las categorización propuesta Díez et al. (2016), en la Tabla 2, se indica las magnitudes sobre las que aparecen unidades de análisis de cada categoría (conceptos y procedimientos asociados a la medida, sistemas de unidades, operaciones con medidas y resolución de problemas) en el libro de texto de cada curso, para el área de Matemáticas (M) y de Ciencias de la Naturaleza (C).

Como podemos observar, la editorial analizada prioriza en los primeros cursos el trabajo con aspectos conceptuales y procedimentales de medida, incluyendo únicamente el conocimiento de unidades de medida estándar de longitud y tiempo, sus equivalencias y resolución de problemas en dichas magnitudes. A medida que avanzan los cursos, la editorial amplía la cantidad de magnitudes trabajadas, incluyendo amplitud angular, superficie y volumen, y comienza a centrarse en el

conocimiento de los sistemas de medida estándar de dichas magnitudes y la resolución de problemas. En este sentido, a partir de tercero se incluyen las equivalencias entre unidades de medida y la resolución de problemas que implican cambios de unidades y operaciones con medidas. Estas unidades se introducen poco a poco: comienzan con las más usuales en la vida diaria (cm, m, km, kg, g, L, m^2, dm^2, cm^2, m^3, dm^3, cm^3), incorporan los submúltiplos del metro y del litro, y, finalizando con los múltiplos y submúltiplos. Además, se centra de manera especial en las operaciones con medidas de tiempo y ángulos, dedicando un tema completo a este aspecto en quinto curso. Salvo en el caso de la superficie, que se encontró una actividad centrada exclusivamente en operaciones con medidas en sexto, con el resto de magnitudes aparece siempre dentro de problemas o tareas contextualizadas. En el caso de Ciencias de la Naturaleza, vemos que solo aparecen aspectos conceptuales y procedimentales de medida de masa y volumen.

Tabla 2. La medida en libros de texto de Educación Primaria de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza

Curso	Conceptos y procedimientos de medida	Sistemas de medida	Operaciones	Tareas contextualizada
1ºM	L,C, M, T	T		
2ºM	L, C, M, T	L, T		L, T
3ºM	L, C, M, T, S, A,	L, C, M, T		L, C, M, T
4ºM	L, M, S, A, V	L, C, M, T	T	L, C, M,T
5ºM	L, S, A	L, C, M T, S, A	T, A	L, C, M, T, S, A
6ºM	L, C, M, S, V	L, C, M, S, V	S, A	L, C, M, S, V
3ºC	M, V			
4ºC	M, V			
5ºC	M, V			

Nota. L= longitud. C = capacidad. M = masa. T= tiempo. V = volumen. S = superficie. A = ángulos

Tal y como se indicó en la metodología, a continuación, se presenta un análisis más detallado de los aspectos conceptuales y procedimentales de la medida. Es decir, indicaremos, dentro de la categoría 1, si se trabaja la comparación, la elección de la unidad de medida, la medida con unidades estándar o no estándar, el uso de instrumentos o la estimación (Tabla 3).

Tabla 3. Conceptos y procedimientos de medida en libros de texto de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza

Curso	Comparar	Elección de unidades	Medida no estándar	Medida estándar	Instrumentos	Estimar
1ºM	C, M	L	L		M, T	
2ºM	C, M, T	L	L, C	L, C, T	L, M, T	
3ºM	L, C, M, A		L, S	L, A	M, T, A	
4ºM	M, S, A	L	L, S, V	L, S*	M, A	
5ºM			L	S*	M, A	
6ºM	S, V	L, C, M, V	L, S, V		M	
3ºC	M, V			M, V	M, V	
4ºC	M, V			M, V	M, V	
5ºC				M, V	M, V	

Nota. L= longitud. C = capacidad. M = masa. T= tiempo. V = volumen. S = superficie. A = ángulos
*Medida indirecta.

Según Gil, Moreno y Montoro (2015), el proceso de medida comienza con la percepción y comparación de magnitudes. En este sentido, la editorial comienza la enseñanza de la medida de la masa y la capacidad de objetos proponiendo a los estudiantes comparar perceptivamente y usar la balanza y el trasvase de líquidos como estrategias de comparación de la masa y la capacidad,

respectivamente. En contraste, solo se propone la comparación perceptiva de ángulos y la comparación de superficies y volumen a través de su medida.

Por otro lado, se puede observar que, a pesar de contar únicamente con una actividad de comparación en el tercer curso, la magnitud con mayor presencia en los libros de texto de matemáticas es la longitud. De hecho, todos los cursos comienzan pidiendo medir objetos con unidades de medida corporales para hacer consciente de que la medida depende la persona que hace la medición (Figura 1). Con este hecho, justifica la necesidad de utilizar unidades estándar, que se introducen en segundo curso. Dicha justificación solo aparece en la longitud, superficie y volumen, aunque se trabajan unidades no estándar como el vaso en la capacidad.


1 Observa las siguientes unidades de medida. Elige una unidad para medir el largo de la clase. ¿Obtienes el mismo resultado si mides el largo de la clase en palmos, pies o pasos? ¿Por qué?

• Compara tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Habéis obtenido los mismos resultados? ¿Por qué?

Figura 1. Medida de la longitud con unidades no estándar. 6º de Matemáticas

Un aspecto muy importante a la hora de medir es la elección de una unidad adecuada. Sin embargo, en los primeros cursos solo aparecen actividades con esta demanda sobre la longitud, teniendo que esperar al libro de sexto curso para encontrar actividades que soliciten la elección de unidades de medida de otras magnitudes. Por otro lado, las actividades sobre medida estándar son cerradas, ya que se indica el objeto y la unidad de medida a utilizar, centrándose únicamente en la longitud (incluyendo la medida indirecta de la superficie y el volumen) y los ángulos en el área de Matemáticas, y en la masa y el volumen en el de Ciencias de la Naturaleza. El instrumento de mayor relevancia en los libros de Matemáticas es la balanza de platillos, presente en todos los cursos, aunque también se muestra el uso del transportador de ángulos, el reloj y la regla.

Como se mencionó anteriormente, en los libros de Ciencias de la Naturaleza se trabajan únicamente la masa y volumen de objetos. Sin embargo, la forma de introducirlos y las estrategias de medida e instrumentos utilizados son muy diferentes. En primer lugar, en el libro de segundo, se definen el concepto de masa y de volumen como propiedades generales de la materia, previo a la introducción del concepto de densidad. El de tercero comienza con un intento de romper la idea de que los objetos con mayor volumen pesan más, recuerda la definición de masa, volumen y densidad e indica sus unidades e instrumentos de medida. En este curso, además, explica cómo medir la masa y el volumen de líquidos y sólidos utilizando básculas digitales y probetas.

Como se puede observar en la Figura 2, las unidades y el procedimiento de medida del volumen explicados en el libro de Ciencias de la Naturaleza y el de Matemáticas son muy diferentes. Mientras que en el primero se utiliza el principio de Arquímedes y el litro como principal unidad de medida, en Matemáticas se promueve la medida directa con el centímetro cúbico.

Esta equivalencia $1L=1dm^3$ aparece en los libros de Matemáticas tan pronto como se introduce el volumen. Sin embargo, es en sexto cuando se realizan actividades para pasar de unas unidades a

otras, y, aunque explica la diferencia entre capacidad y volumen, no lo aplica en los problemas. Por ejemplo, indica que el volumen de una bañera coincide con el volumen del líquido que cabe dentro.

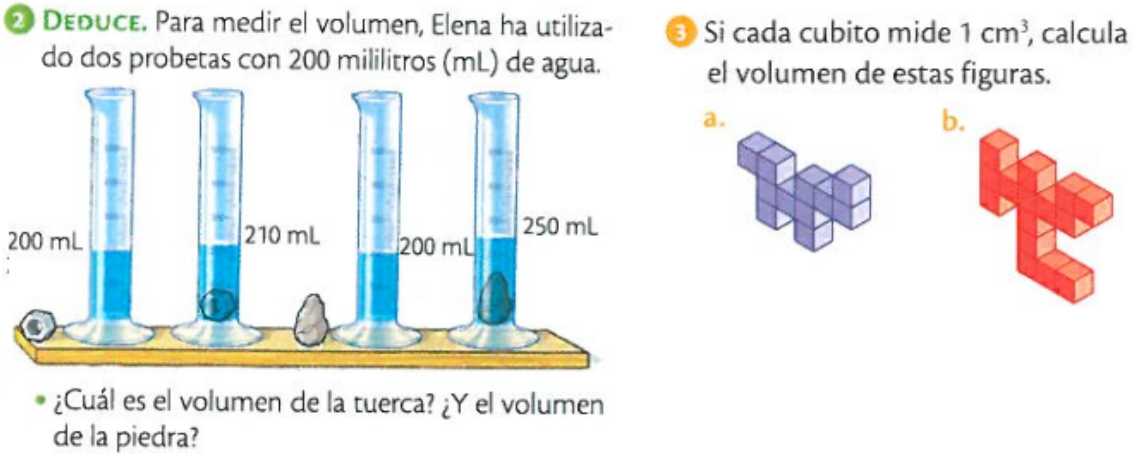


Figura 2. Uso de instrumentos de medida del volumen en 5º de Ciencias de la Naturaleza (izquierda) y medida del volumen en 6º de Matemáticas (derecha)

Otra diferencia que encontramos es que, en los libros de Ciencias de la Naturaleza se abordan las dos magnitudes de manera conjunta, mostrando como objetivo principal diferenciar entre masa y volumen, vinculándolos a conceptos de densidad y flotabilidad. Por ello, pide ordenar tres objetos según su volumen (perceptual) y su masa (ordenación de medidas), hace énfasis en el hecho de que "si dos objetos tienen el mismo volumen pero peso diferente, entonces es más denso el que pesa más" y que "si dos objetos pesan lo mismo, es más denso el que tiene menor volumen".

Finalmente, cabe destacar que no se han encontrado ninguna actividad que trabaje la estimación. Es decir, en todas las propuestas del libro de texto que aparentemente podrían trabajar la estimación, se pide vincular tres objetos de la vida diaria de tamaños muy diferentes con tres medidas, por lo que podría resolverse ordenando perceptivamente los objetos y las medidas (Figura 3).



Figura 3. Ordenación de objetos según su masa. 3º de Matemáticas

CONCLUSIONES

Esta investigación arroja luz sobre la coherencia entre el planteamiento de enseñanza de la medida presente en la propuesta curricular de Andalucía y la interpretación realizada por una editorial al plasmarlo en los libros de texto de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza.

En primer lugar, encontramos que, en el currículo de Educación Primaria, la enseñanza de las magnitudes recae principalmente en el área de Matemáticas, donde se trabajan todas las magnitudes. En cambio, se considera la asignatura de Ciencias de la Naturaleza, donde únicamente se propone el uso de instrumentos de medida de la masa y el volumen, como un contexto ideal para aplicar la medida de magnitudes. Esta idea aparece dentro de la descripción de la contribución de las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas a la "Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología" (Junta de Andalucía, 2015).

En segundo lugar, encontramos una incoherencia en el currículo al proponer en el área de Ciencias de la Naturaleza la medida del volumen en el segundo ciclo y no hacer referencia explícita a dicha magnitud en el área de Matemáticas hasta el tercero. Esto se refleja en los libros de texto, que proponen usar instrumentos de medida de volumen en tercero para introducir el concepto de densidad y no aparece en Matemáticas hasta sexto. Además, la falta de conexión se pone de manifiesto también en el tipo de instrumentos y estrategias de medida de masa (balanza y báscula) y volumen (iteración de cubo e inmersión de objetos y cálculo del volumen desplazado con una probeta), así como las unidades que se utilizan para medir el volumen. Incoherencia similares aparecen en la investigación sobre la resolución de ecuaciones en Física y Matemáticas (Monterrubio-Pérez, González-Astudillo, García-Olivares, Rodríguez-Cornejo y Rodríguez-Barrueco, 2019). Las diferencias encontradas en las finalidades de ambas asignaturas y las propuestas realizadas por el libro de texto requieren que sean los propios maestros quienes elaboren propuestas integradoras de ambas asignaturas.

Por último, centrándonos en el área de Matemáticas, si bien el currículo enfatiza la medida y la estimación de magnitudes en los dos últimos ciclos, la propuesta de este libro de texto se centra principalmente en la equivalencia entre unidades de medida estándar, la ordenación de medidas y resolución de tareas contextualizadas que requieren operaciones con medidas. Es decir, el tratamiento del libro de texto a las magnitudes y su medida está orientado a trabajar conceptos numéricos, siendo escasas las tareas de medida y el uso de instrumentos reales y omitiendo los aspectos esenciales de las magnitudes como es la estimación. Estos resultados concuerdan con los encontrados por Mengual, Gorgorió y Albarracín (2017). En este sentido, es necesario concienciar a los maestros de los aspectos esenciales de la medida y proporcionarles herramientas para evaluar libros de texto y realizar propuestas que trabajen la medida en contextos realistas.

Referencias

Chang, K., Males, L. M., Mosier, A. y Gonulates, F. (2011). Exploring US textbooks' treatment of the estimation of linear measurements. *ZDM, 43 (5),* 697–708

Dare, E. A., Ring-Whalen, E. A. y Roehrig, G. H. (2019). Creating a continuum of STEM models: Exploring how K-12 science teachers conceptualize STEM education, *International Journal of Science Education, 41(12)*, 1701-1720.

Díez, A. Cañadas, M.C., Picado, M., Rico, L. y Castro, E. (2016). Magnitudes y su medida en el currículo de primaria en España (1945-2013). *Revista de currículum y formación del profesorado, 20(1),* 341-363.

Junta de Andalucía (2015). Decreto 97/2015, de 3 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo correspondiente a la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía (BOJA núm. 50, 13.03.2015). Sevilla: Autor.

Gil, F., Moreno, M. F. y Montoro, A. B., (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico (Eds). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, Ll. (2017). Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: El caso de la medida. *REDIMAT, 6(2),* 136-163.

Monterrubio-Pérez, M. C., González-Astudillo, M. T., García-Olivares, A., Rodríguez-Cornejo, P. y Rodríguez-Barrueco, M. J. (2019). ¿Existe desconexión en la enseñanza de las matemáticas y la física en Educación Secundaria? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 443-451). Valladolid: SEIEM.

Occelli, M. y Valeiras, N. (2013). Los libros de ciencias como objeto de investigación: Una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias, 31(2)*, 133-152.

Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. *ZDM, 50(5)*, 765–771

UNIDIMENSIONALIDAD DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO INICIAL DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO[1]

One-dimensionality of initial mathematical knowledge of prospective teachers

Albarracín, L. [a], Rojas, F.[b], Chandia, E.[c], Ubilla, F. M.[a] y Gorgorió, N.[a]

[a]Universitat Autònoma de Barcelona, [b]Pontificia Universidad Católica de Chile, [c]Universidad de Concepción

Resumen

Este trabajo presenta un estudio sobre la medición del conocimiento matemático inicial de los futuros maestros de Educación Primaria que han ingresado en el grado de maestro. Se ha utilizado un cuestionario que contiene dos tipos de ítems, respuesta abierta y respuesta cerrada. Han participado 125 estudiantes de la Universitat Autònoma de Barcelona (Barcelona) y 158 de la Pontificia Universidad Católica de Chile (Santiago de Chile). A partir de un estudio cuantitativo mediante análisis factoriales, se ha observado que este conocimiento se estructura de forma unidimensional, y se ha validado un conjunto de items para su medición estandarizada.

Palabras clave: *formación inicial de maestros, evaluación de los estudiantes para maestro, conocimiento matemático fundamental, educación matemática*

Abstract

In this work, we present a study on the measurement of the initial mathematical knowledge of the future teachers who have entered a degree on Primary Teaching Education. A questionnaire containing two types of items, open answer and closed answer, was used, and 125 students from the Autonomous University of Barcelona (Barcelona) and 158 from the Pontifical Catholic University of Chile (Santiago de Chile) participated. From a quantitative study using factor analysis, it has been observed that this knowledge is structured in a one-dimensional way, and a set of items has been validated for its standardized measurement.

Keywords*: pre-service teacher education, student-teacher evaluation, elementary school mathematics, Mathematics education*

INTRODUCCIÓN

Hace más de una decada, el estudio TEDS-M (*Teacher Education Study in Mathematics*) de la IEA (INEE, 2012) analizó a nivel internacional el conocimiento matemático que han adquirido los estudiantes para maestro al terminar su formación. En TEDS-M las características individuales de los alumnos aparecen como la causa principal de su rendimiento en matemáticas. Sin embargo, el conocimiento matemático del profesor aparece como la causa más clara entre aquellas no relacionadas directamente con el alumno, con una incidencia mayor que el contexto social o el tiempo dedicado a la enseñanza de las matemáticas (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). En concordancia con estos resultados, Lacasa y Rodríguez (2013) señalan que existe una clara correlación entre el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes para maestro en España y su nivel de conocimientos de didáctica de las matemáticas, y determinan que la causalidad se

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo de los proyectos "Validación internacional de instrumentos de caracterización de conocimiento matemático escolar de futuros profesores de educación básica en matemáticas" INTERDISICPLINA II18001 (Vicerrectoría de Investigación - Pontificia Universidad Católica de Chile), y "Estudio de los requisitos de acceso a los grados de maestro de Educación Primaria desde la perspectiva del conocimiento matemático" EDU2017-82427- R (Ministerio de Economía, Industria y Competitividad, España).

Albarracín, L., Rojas, F., Chandia, E., Ubilla, F. M. y Gorgorió, N. (2021). Unidimensionalidad del conocimiento matemático inicial de estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 117 – 124). Valencia: SEIEM.

mueve desde los primeros hacia los segundos. En la misma línea, el informe del Eurydice Network (P9 Eurydice Network, 2011) establece que los docentes tienen un papel central en el desarrollo de las reformas necesarias para la mejora de la educación matemática de los jóvenes, teniendo como reto el fortalecer el conocimiento y las habilidades matemáticas de los maestros para mejorar su práctica docente en matemáticas.

Para cumplir con este desafío, se hace necesario contar con herramientas que permitan comprender cómo se estructura el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro al inicio de su formación, y no solo al final. Por ello, en este trabajo presentamos un estudio sobre la medición del conocimiento matemático inicial de los futuros maestros de Educación Primaria que han ingresado en el grado de Maestro, tomando como referencia la definición de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) (Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014). Por medio de un cuestionario que contiene dos tipos de ítems, de respuesta abierta y respuesta cerrada, indagamos en el conocimiento de estudiantes de la Universitat Autònoma de Barcelona (Barcelona) y la Pontificia Universidad Católica de Chile (Santiago de Chile), identificando a partir de un estudio cuantitativo cómo se estructura este conocimiento, a la vez que se valida un conjunto de ítems para su medición estandarizada.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL (CMF)

En las últimas décadas se han desarrollado diversos modelos teóricos que describen el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, atendiendo a las necesidades específicas de la enseñanza de esta materia y que siguen la estela del trabajo inicial de Shulman (1986). Entendemos esta diversidad de marcos teóricos como un reflejo de la complejidad de los conocimientos y las competencias requeridos en la práctica del profesor de matemáticas. Sin embargo, los marcos teóricos centran su atención en el desarrollo del conocimiento profesional durante la formación inicial (durante los estudios de grado) o en la práctica del ejercicio profesional (posterior al grado). La atención prestada desde la investigación a establecer cuál es conocimiento matemático de los estudiantes en el momento de su ingreso al grado de maestro es mucho menor. Linsell y Anakin (2012) cuestionan que el conocimiento con el que los estudiantes llegan a su formación inicial de maestros sea adecuado y suficiente para construir y desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza. En esta línea, Martinez et al. (2019) señalan que las creencias de los estudiantes para maestro hacen alusión a una concepción aritmetizada de las matemáticas, la cual se asocia a una alta percepción de autoeficacia. Esto impacta en la formación inicial de maestros al desafiarla para generar oportunidades de aprendizaje que construyan esos conocimientos necesarios y modifiquen el tipo de creencias presentes.

En Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió (2014) se presenta una primera definición del CMF como el conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de su didáctica, tomando en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas de la educación primaria. El CMF sería el conocimiento disciplinar inicial que los formadores de maestros esperan y a partir del cual el estudiante construiría el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido necesarios para iniciar su práctica docente. Idealmente, el CMF requiere que los futuros maestros posean un conocimiento profundo de las matemáticas elementales, ya que constituye los cimientos que sostienen su aprendizaje matemático durante los cursos de matemáticas para maestros y su didáctica.

Esta interpretación del CMF se aproxima a la que proponen Linsell y Anakin (2012) del *conocimiento del fundamento del contenido* de los estudiantes que inician su formación como maestros que incluye, enlazados de manera inseparable, conocimientos conceptuales y procedimentales. Según estos autores las características de este conocimiento están relacionadas, entre otros aspectos, con la capacidad para modelizar, razonar y conjeturar, usar múltiples

representaciones, generalizar, trabajar con números reales y conocer hechos matemáticos básicos. En Gorgorió, Albarracín y Villareal (2017) se concreta la definición de CMF en términos de competencias y contenidos. Esta concreción es la que guía la construcción de los instrumentos que utilizamos en este estudio.

MEDICIÓN DEL CMF DE LOS FUTUROS MAESTROS

En España, los estudios dirigidos a determinar el conocimiento matemático inicial de los alumnos que acceden al Grado de Educación Primaria siguen evidenciando la necesidad de encontrar estrategias para garantizar su adecuada formación inicial. A pesar de que los estudiantes que llegan a la universidad han superado con éxito las etapas educativas previas – al menos desde el punto de vista del sistema – son varios los estudios que muestran que los estudiantes que acceden al GEP siguen teniendo dificultades con las matemáticas.

Algunos estudios que se han centrado en evaluar el conocimiento inicial de los estudiantes del grado de maestro han utilizado instrumentos propios de la medición escolar. Arce, Marbán y Palop (2017), utilizando una prueba de competencias básicas de 6º de Primaria, identificaron carencias y dificultades de los alumnos que acceden a la formación de maestros relativas a aspectos esenciales como la proporcionalidad directa y los porcentajes, la aplicación de procedimientos de medida o la interpretación de resultados en situaciones que involucran la magnitud tiempo. Sus resultados son coherentes con los de Nortes y Nortes (2013), que en su trabajo utilizaron una prueba de competencias básicas de 3º de Educación Secundaria. Posteriormente, Nortes y Nortes (2018) utilizaron la prueba de matemáticas de ingreso al Cuerpo de Maestros de la Comunidad de Madrid con alumnos de 2º y 4º del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Murcia, mostrando que únicamente un 17.8% de los futuros graduados superarían dicha prueba.

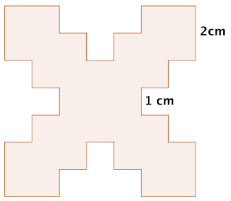
Si bien estos resultados son orientadores, para conocer en profundidad el conocimiento inicial de quienes ingresan al grado de mestro se requieren de instrumentos que estén diseñados para tal fin. En este sentido, en los últimos años se han desarrollado algunos instrumentos para determinar hasta qué punto los estudiantes que acceden al grado de maestro poseen los conocimientos matemáticos deseados para seguir su formación con éxito (Barquero et al., 2019; Gorgorió y Albarracín, 2020; Martinez et al. 2019). Estos instrumentos de evaluación se dirigen a identificar si los aspirantes a futuros maestros dominan los aspectos esenciales de las matemáticas elementales, aunque no hayan elaborado un tejido completo de relaciones entre conceptos, procedimientos y estructuras. Estos trabajos son evidencias que apuntan a la necesidad de actuar para dotarnos de herramientas que permitan garantizar que los estudiantes que acceden a un grado de maestro poseen un sólido conocimiento matemático.

METODOLOGÍA

Con el propósito de avanzar en la medición del conocimiento inicial de los estudiantes que ingresan a los programas de formación de maestros de primaria y con el objetivo de caracterizar su estructura, se generó un instrumento tipo cuestionario a partir de aquellos desarrollados por Gorgorió y Albarracín (2020) y Martínez et al. (2019). Este consta de 50 preguntas separadas en dos grupos, uno de 25 preguntas de respuesta abierta breve y otro de 25 preguntas de selección múltiple. El primer grupo de preguntas es el mismo cuestionario que se aplicó en Gorgorió y Albarracín (2020) y que cohortes anteriores de la universidad catalana ya habían respondido. El segundo grupo de preguntas es una selección del cuestionario presentado en Martínez et al. (2019). En la confección de este grupo de preguntas se aplicaron criterios de pertinencia curricular, ya que, al estar confeccionado en Chile, algunas preguntas no se trabajaban necesariamente en el currículo escolar catalán. En dicho proceso, se consideró una selección ponderada en función de los tópicos matemáticos escolares, respecto del cuestionario original. La Tabla 1 muestra los enunciados de dos

ítems usados en las pruebas. El primero pertenece a una pregunta abierta y el segundo a una pregunta de respuesta cerrada.

Tabla 1: Muestra de enunciados usados en las pruebas.

Abiertas A08. ¿Por cuál número natural debe substituirse Δ para que la expresión $\Delta \times \Delta = 3 \times 3 \times 7 \times 7$ sea correcta?
Cerradas A30. En la siguiente figura, solo hay segmentos de 1 y 2 centímetros. Además, solo se forman ángulos rectos entre dos segmentos consecutivos. ¿Cuál es el perímetro de la figura? A) 11 cm B) 33 cm C) 36 cm D) 44 cm 

El cuestionario fue aplicado a dos muestras de estudiantes de primer año de carrera en Cataluña y Chile. Se invitó a participar a los estudiantes de la cohorte 2019 de la carrera de Pedagogía en Educación Básica de la Pontificia Universidad Católica de Chile y los estudiantes de la cohorte 2018-2019 del Grado de Educación Primaria de la Universitat Autònoma de Barcelona. Respondieron el cuestionario 283 estudiantes, de los cuales 158 en Chile y 125 en Cataluña.

Cada cuestionario fue corregido asignando 1 o 0 punto a cada pregunta según si era correcta o incorrecta su respuesta. El conjunto de las puntuaciones asignadas constituye los datos de nuestro estudio. Se analizaron en cuatro etapas. La primera etapa, además del análisis descriptivo, incluye una correlación ítem-test usando el coeficiente *r* de Pearson, que busca determinar los ítems que se relacionan o no con la escala de ítems construida. En la segunda etapa, se realiza un análisis factorial exploratorio (AFE), que busca identificar los factores latentes y contrastarlos con los teóricos que agrupan los ítems, a saber, cada uno de los tópicos de la matemática escolar. En la tercera etapa, se realiza un análisis factorial confirmatorio (AFC) a la estructura latente identificada en la etapa anterior, tratando de conservar la mayor varianza posible. Por último, en la cuarta etapa, se determina la consistencia interna de la escala y sub-escalas identificadas. Los coeficientes de consistencia que se van a determinar son las cotas determinadas por Guttman (1945), entre las cuales se encuentra el coeficiente Alfa de Cronbach.

Los índices estadísticos empleados para determinar el ajuste de los modelos AFE y AFC son el absoluto χ^2, el índice relativo Tucker-Lewis (TLI) y el índice comparativo de ajuste (CFI). Por último, se estimará el Error Cuadrático Medio de Aproximación (RMSEA). Para el ajuste de los modelos, se han considerado como aceptables valores TLI y CFI mayores a 0.9, y valores mayores a 0.95 se han considerado como buenos. Por último, para RMSEA, se han considerado valores menores a 0.05 como buen ajuste, y entre 0.05 y 0.08 como un ajuste regular.

RESULTADOS

Análisis descriptivo

El grupo de estudiantes de Barcelona, en promedio, presenta un rendimiento mejor que los alumnos de Santiago, tanto en los ítems abiertos como en los cerrados. Respecto de la distribución de los puntajes, el análisis de simetría permite ver que esta es negativa, tanto para ítems abiertos como cerrados en ambas instituciones, lo que da cuenta que las respuestas tienden a ser más bien correctas que incorrectas. Además, el análisis de la curtosis muestra que los ítems abiertos, en ambos centros, se alejan de la media y permiten distinguir claramente entre contenidos consolidados o por consolidar entre los estudiantes. Por su parte, los ítems cerrados se concentran principalmente en la

media de sus respuestas. De estos análisis de simetría y curtosis se puede desprender que los ítems no se distribuyen de forma normal, que supone un primer indicio de que los ítems abiertos y cerrados no corresponden a una misma escala. En la Tabla 2 se resumen los resultados de estos análisis.

Tabla 2: Distribución de puntaje, simetría y curtosis.

		Puntaje		Simetría			Curtosis		
		media	sd	media	sd	intervalo	media	sd	intervalo
Barcelona	Abiertos	0.62	0.17	-1.33	1.61	[-6.15;0.51]	2.28	8.51	[-1.96; 36.06]
	Cerrados	0.83	0.14	-2.69	1.89	[-7.62;0.05]	8.79	13.58	[-2.02;56.55]
Santiago de Chile	Abiertos	0.58	0.21	-0.48	1.07	[-2.51;1.42]	-0.65	1.73	[-2.01;4.32]
	Cerrados	0.71	0.25	-1.20	1.66	[-3.79;3.79]	2.13	4.48	[-1.77;12.42]

Homogeneidad, fiabilidad y consistencia interna

Tanto el análisis de homogeneidad, realizado mediante el cálculo de la correlación ítems-test, como el de fiabilidad y consistencia interna, realizado mediante la determinación del coeficiente de Alpha de Cronbach, el cual requiere de los supuestos de simetría, tau-equivalencia (Novick & Lewis, 1967), evidencian una separación de la escala entre los ítems abiertos y cerrados. En primer lugar, se considera un único constructo teórico medido, para luego separar el conjunto de ítems por las áreas curriculares escolares con las cuales se separaron de forma teórica. Dadas las diferencias escolares entre España y Chile, se realiza este análisis en cada una de las muestras.

Respecto de los ítems abiertos, el análisis de homogeneidad y la determinación del coeficiente Alpha de Cronbach, muestran un comportamiento diferenciado para algunos ítems entre las muestras de Barcelona y Santiago de Chile, tal como se observa en la Tabla 3. Pese a estas diferencias, el promedio de las correlaciones ítems-test son relativamente altas, con una media igual 0.31 (SD=0.15) para Barcelona y de 0.37 (SD=0.11) para Santiago. Por su parte, el coeficiente Alpha de Cronbach para la muestra de Barcelona es de 0.72 y de 0.75 para Santiago.

Tabla 3: Coeficientes de fiabilidad Alpha de Cronbach y correlación ítems-test para los ítems abiertos[2].

	Barcelona			Santiago de Chile		
	Alpha	r.cor	r.drop	Alpha	r.cor	r.drop
A1	0.71	0.4329*	0.3570*	0.74	0.42*	0.383*
A2	0.70	0.4651*	0.3964*	0.74	0.39*	0.357*
A3	0.71	0.3673*	0.3136*	0.73	0.43*	0.398*
A4	0.70	0.4555*	0.3891*	0.73	0.45*	0.422*
A5	0.71	0.3976*	0.3300*	0.74	0.37*	0.323*
A6	0.71	0.3809*	0.3053*	0.74	0.37*	0.325*
A7	0.71	0.4588*	0.3734*	0.75	0.11	0.023
A8	0.69	0.5826**	0.4950**	0.73	0.52**	0.507**
A9	0.72	0.1319	0.0974	0.75	0.24*	0.183
A10	0.71	0.3277*	0.2691*	0.74	0.39*	0.343*
A11	0.71	0.3564*	0.3073*	0.74	0.30*	0.249*
A12	0.72	0.2507*	0.1983	0.74	0.35*	0.306*
A13	0.72	0.1777	0.1480	0.73	0.46*	0.428*
A14	0.71	0.4358*	0.3721*	0.73	0.44*	0.402*
A15	0.72	0.1880	0.1601	0.73	0.44*	0.408*
A16	0.73	0.1486	0.1073	0.74	0.29*	0.228*
A17	0.72	0.1861	0.1530	0.73	0.50**	0.481*

[2] **Alpha** = Coeficiente Alpha de Cronbach de la escala sin el ítem; **r.cor** = Correlación del ítem con la escala completa, considerando al ítem en la escala completa; **r.drop** = Correlación del ítem con la escala sin considerar el ítem en ella. **p<0.05;**p<0.01.*

A18	0.71	0.3447*	0.3011*	0.73	0.46*	0.423*
A19	0.73	0.0867	0.0238	0.74	0.32*	0.273*
A20	0.72	0.1645	0.1123	0.73	0.45*	0.423*
A21	0.71	0.4399**	0.3578*	0.73	0.55**	0.542**
A22	0.73	0.0061	-0.0028	0.74	0.30*	0.236*
A23	0.72	0.2281	0.1931	0.75	0.29*	0.221*
A24	0.70	0.5177**	0.4145**	0.74	0.32*	0.258*
A25	0.72	0.1434	0.1088	0.76	0.13	0.045

Los ítems A16, A19 y A22 presentan una baja correlación con la escala, por lo que al eliminarlos produce un aumento del coeficiente Alpha de Cronbach para la muestra de Barcelona, lo que no ocurre en la muestra de Santiago de Chile. Por su parte, los ítems A7, A9 y A23 presentan una correlación baja con la escala y un aumento en el coeficiente Alpha de Cronbach en la muestra de Santiago, lo que no ocurre en la muestra de Barcelona. Ahora bien, el ítem A25 presenta una correlación baja y un aumento del coeficiente Alpha de Cronbach en ambas muestras. Dada la necesidad de homogeneidad, y antes de proceder a eliminar los ítems mencionados de la escala, se determinaron los mismos índices a ítems agrupados por tópicos (numeración, álgebra, geometría y Estadística). Los valores del coeficiente Alpha de Cronbach para cada una de las agrupaciones de preguntas por tópicos son los siguientes: Numeración= 0.65; Álgebra= 0.32; Geometría =0.36; Estadística= 0.23. Estos valores muestran baja correlación con la escala, lo que nos lleva a considerar a toda la escala de la prueba como única, dado la veracidad del supuesto tau-equivalencia de los ítems para el coeficiente de confiabilidad y la alta correlación ítems, los cuales mejoran al eliminar los ítems A7, A9, A16, A19, A22, A23 y A25. Así, la confiabilidad aumenta de 0.72 a 0.75 y de 0.75 a 0.78 para los ítems abiertos en las muestras de Barcelona y Santiago de Chile, respectivamente. De manera conjunta ambas muestras presentan un coeficiente Alpha de Cronbach igual a 0.76.

En cuanto a los ítems cerrados, estos presentan un comportamiento totalmente diferente entre las muestras. En Barcelona solo un ítem presenta una correlación ítem-test superior a 0.3 cuando es eliminado de la escala, lo que afecta al coeficiente Alpha de Cronbach, que no supera el 0.57, lo cual es considerado como una muy baja confiabilidad para una escala (Novick & Lewis, 1967). En Santiago de Chile en cambio, la escala presenta buenos índices de correlación ítems-test, como también los coeficientes de confiabilidad, el cual llega a 0.77, siendo el de la escala completa 0.75, considerado como muy bueno (Novick & Lewis, 1967). Dado este comportamiento irregular entre ambas muestras, se decidió solo considerar los ítems abiertos del instrumento para realizar el análisis de validez de constructo.

Validez del constructo: Análisis factorial

Dada la homogeneidad presentada por los ítems abiertos, los valores del índice Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) de adecuación muestral y los valores del test Bartlett de esfericidad (significativos al 99%) para las muestras de Barcelona, Santiago de Chile y de forma conjunta, respetan los límites y nos permite realizar un análisis factorial. (Barcelona: KMO=0.64 y Bartlett $\chi^2(153, n=125)=311.48, p<.001$; Santiago: KMO=0.75 y Bartlett $\chi^2(153, n=158)=380.73, p<.001$; Conjunta: KMO=0.82 y Bartlett $\chi^2(153, n=283)=585.35, p<.001)$.

En primer lugar, se ejecuta un análisis factorial exploratorio considerando una forma de extracción *PA* (Ejes principales)[3] y rotación Varimax. El número de factores a retener se determina considerando la regla de Kaiser-Gutman, el *scree-test* de Cattell y el análisis paralelo. La regla de Kaiser-Guttman (valores propios superiores a 1.00) sugirió la retención de un solo factor, al igual que el examen del *scree-test*. Así, el modelo con un solo factor presenta buenos índices de ajustes

[3] Para todas estas extracciones de factores se usó la función *fa* del paquete *psych* de R.

tanto absolutos como relativos para cada una de las muestras (Barcelona*: $\chi^2(153, n=125)=151.14, p>0.10; TLI=0.90; RMSEA=0.04;$* Santiago: $\chi^2(153, n=158)=151.99, p>0.10; TLI=0.92; RMSEA=.03;$* Conjunta: $\chi^2(153, n=283)=145.68, p>0.2; TLI=0.97; RMSEA=0.02$*).

Con la confirmación de la existencia de un solo factor, se realiza un análisis factorial confirmatorio a toda la muestra. Para esto se usa el modelo de extracción Maximum Likelihood y la función de enlace *probit*, dado que las variables son de carácter ordinal, presentando índices de ajuste absolutos y relativos muy buenos ($\chi^2(135, n=283) = 150.17, p=0.17; CFI = 0.97\ TLI = 0.96; RMSEA = 0.02; SRMR = 0.05$). Dos ítems presentan cargas absolutas inferiores a 0.3, por lo que se eliminan. Con esto, el modelo mejora sus índices de ajuste ($\chi^2(104, n=283) = 116.57, p=0.19; CFI = 0.97; TLI = 0.97; RMSEA = 0.02; SRMR = 0.04$), las cargas finales se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6: Cargas factoriales de los ítems del modelo de un solo factor

Ítems	Carga Factorial	Ítems	Carga Factorial
A1	0.44**	A13	0.33**
A2	0.42**	A14	0.46**
A3	0.49**	A15	0.36**
A4	0.38**	A17	0.40**
A5	0.34**	A18	0.40**
A6	0.34**	A20	0.37**
A8	0.51**	A21	0.48**
A12	0.36**	A24	0.44**

*Nota: *p<0.05; **p<0.01.*

CONCLUSIONES

A partir de estos resultados, se puede ver cómo se estructura el conocimiento inicial de los estudiantes que ingresan al grado de maestro, tanto en el grupo de Barcelona como en el de Santiago de Chile. Los resultados del análisis de dimensionalidad de los datos ponen de manifiesto que este conocimiento se presenta como unidimensional, donde el constructo no puede diferenciarse por tipo de contenido matemático escolar. Esto es plausible contextualmente si se considera que quienes rinden este cuestionario han tenido una trayectoria de formación matemática en la escuela de más de 6 años a partir de la finalización de la educación primaria. De este modo, se presenta un fuerte desafío para las instituciones formadoras de maestros: desempaquetar el conocimiento matemático que traen los estudiantes con tal de otorgar oportunidades de aprendizaje que permitan avanzar a una comprensión profunda de las matemáticas elementales y sus conexiones conceptuales.

Dado que sería muy complejo modificar el conocimiento inicial si no se conoce de antemano cómo se estructura, se requieren instrumentos que permitan identificarlo antes del ingreso al grado. En este sentido, los resultados de este estudio ofrecen un conjunto inicial de ítems validados con un comportamiento psicométrico suficiente para asegurar que los resultados de rendimiento sean fiables. Sin embargo, no todos los grupos de ítems se comportan de forma adecuada en cualquier contexto. Los análisis muestran que el grupo de ítems abiertos funciona en los contextos evaluativos catalán y chileno, no así los ítems cerrados o de selección múltiple, que solo funcionan en Chile. La cultura evaluativa de cada contexto puede ser una razón de peso para el comportamiento de los ítems cerrados en Cataluña, ya que no se suele aplicar este tipo de reactivos ni en los contextos escolares ni en las pruebas de ingreso a la universidad. Esto hace necesario generar instrumentos evaluativos de carácter abierto, que permitan caracterizar el conocimiento matemático en quienes ingresan al grado de educación primaria.

Referencias

Arce, M., Marbán, J.M. y Palop, B. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria de nuevo ingreso desde la prueba de evaluación final de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 119-128). Zaragoza: SEIEM.

Barquero, B., Sala, G., Badillo, E., Clabuig, M. T. Esteve, S., Julià, C., Prat, M., Ricart, M. y Vidal, S. (2019). Evaluación de la competencia lógico-matemática: La prueba CLOM para los grados de maestro. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas, 86*, 17-24.

Castro, Á., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Eurydice Network –P 9 Eurydice– (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Gorgorió, N., Albarracín, L., & Villareal, A. (2017). Examen de competència logicomatemàtica en la nova prova d'accés als graus de mestre. *Noubiaix, 39*, 58-64.

Gorgorió, N., y Albarracín, L. (2020). El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba para su evaluación. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. González-Astudillo (Eds.), *RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores,* (pp. 111-132). Salamanca, España: Ediciones Universidad de Salamanca.

Guttman, L. (1945). A basis for analyzing test-retest reliability. *Psychometrika, 10*, 255–282.

INEE (2012). *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. IEA. Madrid: Secretaría General Técnica.

Lacasa, J. M. y Rodríguez, J. C. (2013). Diversidad de centros, conocimientos y actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas de los futuros maestros en España. En IEA (Ed.), *TEDS-M Informe español. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Volumen II. Análisis secundario. (pp. 63-108). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Linsell, C. y Anakin, M. (2012). Diagnostic Assessment of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 14*(2), 4–27.

Martínez, M. V., Rojas, F., Ulloa, R., Chandía. E., Ortíz, A. y Perdomo-Díaz, J. (2019). Creencias y conocimiento matemático escolar al comienzo de la formación inicial docente en estudiantes de Pedagogía General Básica. *Pensamiento Educativo*, *56*(2), 1-19.

Nortes, A. y Nortes, R. (2013). Formación inicial de maestros: un estudio en el dominio de las matemáticas. *Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado, 17*(3), 185-200.

Nortes, R. y Nortes, A. (2018). ¿Tienen los futuros maestros los conocimientos matemáticos elementales? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 397-406). Gijón: SEIEM.

Novick, M. R. & Lewis, C. (1967). Coefficient alpha and the reliability of composite measurements. *Psychometrika 32*, 1–13.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. (2014). Formación Inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación, 363*, 35-59.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

CORRESPONDENCIA Y GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE ÚLTIMO CURSO DE EDUCACIÓN INFANTIL

Correspondence and generalization in students in their last year of early childhood education

Anglada, M. L.[a] y Cañadas, M. C.[b]

[a] Centro Adscrito de Magisterio Mª Inmaculada de Antequera, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación sobre el pensamiento funcional en estudiantes de los primeros cursos. Nuestro objetivo principal es indagar sobre la capacidad de los alumnos de estas edades para identificar y expresar relaciones entre variables, y si generalizan estas relaciones. Realizamos este estudio con 25 estudiantes del último curso de educación infantil (5 años). Diseñamos y aplicamos una tarea de generalización que involucraba la función f(n)=n+2 en un contexto de trabajo con robots programables. Entre los resultados, destacamos que la mayoría de los estudiantes establecieron la relación de correspondencia en la tarea, y algunos generalizaron.

Palabras clave: *generalización, educación infantil, pensamiento funcional, robótica educativa*

Abstract

This paper is part of a research about students' functional thinking at their early stages. Our main research goal is to investigate the ability of students at these ages to identify and express relationships between variables, and whether they generalize these relationships. We conducted this study with 25 students from the last year of early childhood education (5 years old). We designed and applied a generalization task that involves the function f(n)=n+2 in a context of working with programmable robots. Among the results, we highlight that most of the students established the correspondence relationship in the task, and some of them generalized.

Keywords*: Early Childhood education, educational robotics, functional thinking, generalization*

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones ponen de manifiesto que los niños desde edades muy tempranas evidencian signos propios del pensamiento algebraico. Desarrollar el pensamiento algebraico desde educación infantil no solo prepara a los alumnos para el álgebra en etapas posteriores; sobre todo, les ayuda desde muy pequeños a estructurar su pensamiento y a desarrollar su capacidad de razonar (Alsina y Giralt, 2017).

Uno de los enfoques para introducir el pensamiento algebraico en niveles elementales es el pensamiento funcional, un modo de pensamiento algebraico cuyo foco se sitúa en las funciones; entendiendo las funciones como una relación de dependencia entre cantidades covariantes. Este enfoque del álgebra es considerado por numerosos autores como el más adecuado para introducir el pensamiento algebraico en los primeros niveles (e.g., Carraher, Martínez, y Schliemann, 2008; Usiskin, 1999). El pensamiento funcional permite el uso del álgebra en situaciones concretas de una forma significativa (Drijvers, Dekker y Wijers, 2011) y promueve en los estudiantes la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales (Cañadas y Molina, 2016).

El trabajo en educación infantil debe basarse en experiencias perceptivo-motrices utilizando un material adecuado (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis y Heinze, 2019; Warren, Miller y Cooper, 2013). Nosotros vamos a utilizar robots programables adecuados a la edad de los estudiantes.

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125 – 132). Valencia: SEIEM.

Hasta el momento no tenemos constancia de que se hayan utilizado para trabajar el pensamiento funcional, menos aún en estos niveles.

Con este trabajo, partiendo de nuestros antecedentes (Castro, Cañadas y Molina, 2017; Majón, 2016), profundizamos en el pensamiento funcional de estudiantes de último curso de educación infantil (5 años). En particular, indagamos sobre su capacidad para identificar y expresar relaciones entre variables, y si generalizan.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional es la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Este tipo de pensamiento tiene por objeto establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos que están inmersos en una situación cotidiana para el estudiante (Cañadas y Fuentes, 2015). Estas relaciones, que llamamos relaciones funcionales, fueron clasificadas por Smith (2008) en tres tipos: recurrencia, correspondencia y covariación. En este trabajo nos centramos en la relación de correspondencia, que consiste en una regla que asocia a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente. Identificar la correspondencia implica hallar la regla que permite determinar un valor de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (Blanton, Levi, Crites, Dougherty y Zbiek, 2011).

En el pensamiento funcional, la generalización se considera un elemento fundamental (Warren, Cooper y Lamb, 2006). Generalizar es pasar de lo particular a lo general y ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Desde el enfoque funcional del pensamiento algebraico, la generalización incluye establecer relaciones generales entre cantidades que covarían, expresando dichas relaciones mediante diferentes representaciones (verbal, tabular, pictórica, manipulativa y simbólica), así como razonar con esas representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011).

Las investigaciones realizadas hasta el momento han evidenciado que los estudiantes de educación primaria son capaces de identificar relaciones funcionales entre dos variables, representar esas relaciones de diferentes formas (incluyendo el simbolismo algebraico), generalizar relaciones entre dos variables y utilizar relaciones funcionales para interpretar problemas (e.g., Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2015; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016).

En este ámbito, las investigaciones con niños de educación infantil son muy escasas. En ocasiones, los niños de estas edades se incluyen en estudios donde participan también otros de educación primaria. Blanton y Kaput (2004) presentan un estudio que aborda cómo los alumnos desde 5 a 10 años trabajan con funciones. Los autores evidencian que los alumnos de 5 años establecieron correspondencias, relaciones de covariación y utilizaron tablas como medio para organizar las variables. Para ello, utilizaron materiales manipulativos. No hay evidencias de que los estudiantes generalizaran. Warren et al. (2013) investigan cómo escolares australianos de 5 a 9 años comprenden y expresan generalizaciones, y cómo identifican patrones y funciones. Se apoyan en un material concreto, una "máquina" que realiza transformaciones cuantitativas y cualitativas. Destacan que los gestos y acciones corporales tanto de los estudiantes como del investigador son una dimensión importante del proceso de generalización y que es determinante la inclusión de materiales manipulativos concretos.

En el contexto español, Majón (2016) describe y caracteriza el razonamiento inductivo de 12 estudiantes de 5 y 6 años al resolver un problema de generalización en un contexto funcional del algebra escolar. Los principales resultados muestran que los estudiantes identificaron patrones, justificaron sus respuestas y 1 estudiante de los 12 participantes generalizó la relación funcional involucrada en el problema. En la misma línea, Castro et al. (2017) realizan un estudio con otros 12 alumnos de 5 años, con objeto de identificar evidencias de pensamiento funcional en los estudiantes

participantes en la investigación y describir el pensamiento funcional mostrado. Concluyen que estos estudiantes evidencian pensamiento funcional a través de las relaciones funcionales de correspondencia y covariación, llegando algunos a la percepción de patrones y a la generalización.

Diversos autores ponen de manifiesto la importancia de usar un material adecuado a estas edades y uno de ellos pueden ser los robots programables (Eck et al., 2013; Sánchez, Cózar y González-Calero, 2019). Alsina y Acosta (2018) han utilizado con éxito la robótica como recurso para trabajar con patrones en educación infantil, pero no encontramos evidencias de investigaciones sobre pensamiento funcional en esta etapa utilizando robots. El uso de robots y de la programación en bloques, adaptados a primeras edades escolares, se está extendiendo cada vez más como vía para la investigación y la innovación educativa (Bizarro, Luengo y Carvalho, 2018).

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de nuestra investigación es describir el pensamiento funcional de estudiantes de último curso de educación infantil en el contexto español. Para alcanzar este objetivo planteamos los siguientes objetivos específicos:

OE1. Describir si los niños identifican la relación de correspondencia, en el trabajo con casos particulares o en el caso general de la función involucrada.

OE2. Identificar y describir las generalizaciones realizadas por los alumnos.

MÉTODO

Este estudio es de tipo exploratorio y descriptivo. Trabajamos en un entorno de resolución de problemas utilizando como recurso un robot programable.

Los sujetos participantes fueron 25 niños del último año de educación infantil (5-6 años). Fueron 14 niñas y 11 niños de un colegio concertado de Antequera. La elección del centro escolar fue intencional, de acuerdo con los objetivos de investigación y la disponibilidad del centro y de los docentes.

En la recogida de datos participaron la investigadora (primera autora de este trabajo) y dos alumnas del Grado de Educación Infantil, que actuaron como asistentes de la investigadora y se encargaron de las grabaciones. Utilizamos una cámara fija ubicada al final del aula y una cámara móvil.

Respecto al papel del investigador que llevó a cabo las sesiones, no hubo una instrucción previa de los alumnos, y su intervención se limitó a hacer preguntas que provocaran desafíos y favorecieran la discusión y el diálogo con expresiones como: “qué pasaría si”, “supongamos que “... , además, las tareas propuestas eran autocorrectivas.

Para realizar las tareas usamos un robot programable tipo Logo, el ratón Code & Go que podemos ver en la Figura 1. Estos son robots de suelo que el usuario programa para ejecutar un movimiento o trayectoria,

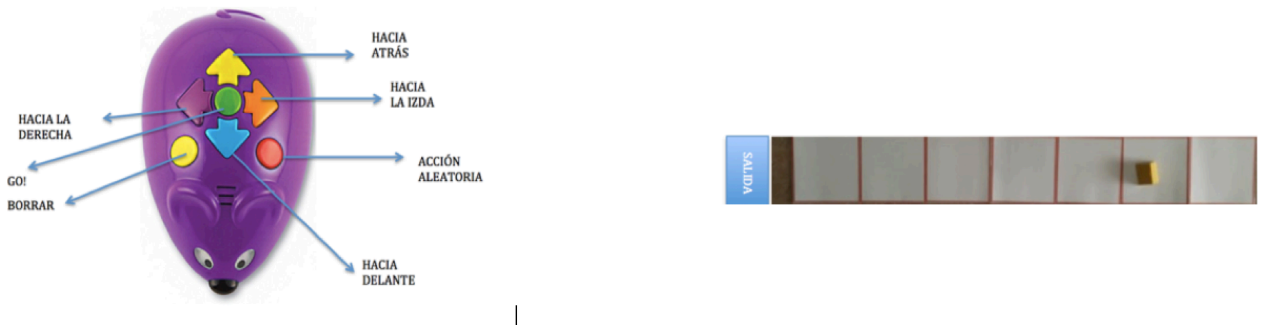


Figura 1. Ratón code & go y tablero de juego

Trabajamos con las funciones f(n) = n y f(n) = n +2, en ambos casos la variable independiente es el número de veces que se pulsa la flecha azul, y la dependiente el número de casillas que el ratón recorre en el tablero. Para la primera función usamos siempre un ratón de color azul al que llamaremos Martina y para la segunda un ratón morado que llamaremos Bruno (en este caso, después de borrar cada vez, la investigadora da dos veces a la flecha azul sin que los alumnos lo perciban, con lo que el ratón recorre siempre dos casillas más que el número de veces que los niños le dan a la flecha azul).

A modo introductorio, realizamos una primera sesión de 90 minutos con toda la clase en la que trabajamos la función identidad directa e inversa. A continuación, organizamos a los niños en cinco grupos de cinco alumnos cada uno e implementamos una sesión de aproximadamente 60 minutos con cada uno. En esta sesión comenzamos repasando la función identidad directa e inversa y a continuación, pasamos a plantear preguntas que involucraban a la función f(n)=n+2. Comenzamos con ejemplos concretos en los que los alumnos solo tienen que observar qué hace el robot en cada caso.

Diez de los 25 niños del grupo no quisieron participar en las tareas o no respondieron. Por tanto, dados nuestros objetivos de investigación, en este trabajo nos centramos en los 15 alumnos restantes. A estos alumnos los simbolizaremos por An, n=1...15 para salvaguardar su identidad.

A medida que íbamos trabajando y observando las respuestas de los alumnos, decidimos utilizar la función inversa solo para casos particulares con números pequeños, de la misma forma, la generalización se planteó solo a los estudiantes que avanzaron en las preguntas sobre casos particulares pequeños y grandes.

En la Tabla 1 mostramos los distintos tipos de preguntas y ejemplos. Al plantearles preguntas sobre casos particulares, distinguimos entre números pequeños y grandes. Los números pequeños son del 1 al 12 porque los niños los conocen y están acostumbrados a trabajar con ellos. Al tener el tablero 12 casillas pueden basarse en un conteo y una manipulación. A partir de 12 son números grandes para ellos y tienen que realizar una abstracción. Nuestro objetivo no se centra en el cálculo, así que para que este no sea una dificultad añadida, para números grandes tomamos números acabados en 10.

Tabla 1
Tipos de preguntas planteadas

Tipos de preguntas	Ejemplos de preguntas
Relación directa. Casos particulares	
Números pequeños	Coloca el ratón en la línea de salida, dale 2 veces a la flecha azul. ¿Qué ha pasado?... Si le damos 3 veces a la flecha azul y Bruno está en la línea de salida casilla[1] llegará Pon el queso en la casilla a la que crees que llegará". Lo comprobamos.
Números grandes	Imaginamos que el camino es muy muy largo, ¿qué ocurre si le damos a la flecha azul 10 veces? ¿Y 20? ¿Y 100?
Relación inversa. Casos particulares	
Números pequeños	Colocamos el queso en la casilla 4, colocamos el ratón en la línea de salida y preguntamos: "¿cuántas veces tendrás que darle a la flecha azul para que Bruno llegue al queso?
Relación directa. Generalización	Los alumnos de la otra clase no han jugado nunca con Bruno, ¿puedes explicarles qué hace?

[1] A las casillas las nombramos como casilla uno, casilla dos, casilla tres... evitando así el uso de ordinales.

La primera sesión nos sirvió como estudio piloto con la función identidad, particularmente en lo relativo al lenguaje, y para iniciar a los niños en el trabajo con robots; pero nuestro estudio se va a centrar en la función f(n)=n + 2.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Transcribimos las grabaciones en video, realizamos un análisis preliminar de los datos para definir las categorías de análisis con base en el objetivo de investigación, el marco conceptual y los antecedentes.

Para las preguntas que tienen que ver con casos particulares, usamos dos categorías de análisis: (a) no responde y (b) respuesta correcta/incorrecta. Para la pregunta sobre el caso general, las categorías son: (a) no responde y (b) expresa generalización, correcta o incorrecta. En la Tabla 2 recogemos las respuestas de los alumnos siguiendo las categorías de análisis establecidas.

Consideramos que un alumno ha sido capaz de establecer una relación de correspondencia cuando responde correctamente, al menos para dos casos particulares y/o al general.

Tabla 2
Resultados para f(n) = n + 2

	Casos particulares			
Alumno	Relación directa n < 13	Relación directa, n = 20, 100, 1000…	Relación inversa, n<13	Relación directa Generalización
A1	X*	NR	X*	-
A2	X	X	X	NR
A3	X	X	X	X*
A4	X	X	X*	X*
A5	X	X	X*	NR
A6	X	X	X	X
A7	X	X	X	X
A8	X	X	X	X
A9	NR	NR	NR	-
A10	X	X*	X*	NR
A11	X*	NR	X*	-
A12	X*	NR	X*	-
A13	X	NR	X*	-
A14	X	NR	X*	-
A15	X*	NR	X*	-

Nota. *= Respuesta incorrecta; NR = No responde; - = No se le ha hecho la pregunta.

En la Tabla 2 observamos que la mayoría de los alumnos responden a las preguntas que se les plantean sobre casos particulares. Para la relación directa con números pequeños, de los 15 alumnos, 10 responden correctamente, 4 dan respuestas incorrectas y 1 no responde. Para la relación directa con números grandes responden correctamente 7, que ya habían respondido bien en el caso anterior, 1 da una respuesta incorrecta y 7 no responden. Para la relación inversa con números pequeños 5 alumnos responden correctamente, estos alumnos respondieron correctamente en los dos casos anteriores, 9 dan respuestas incorrectas y 1 no responde.

Podemos observar en la Tabla 2 que hay cinco alumnos que no han evidenciado ninguna relación de correspondencia entre las variables. En particular, A9 no contestaba o esperaba a que los demás lo hicieran por él; entre los que respondieron de forma incorrecta: A1, A11, A12 y A15 analizamos si, a pesar de esto, siguen alguna regularidad,; observamos que no elegían siempre la misma regularidad para responder, aunque todos sabían que el valor que tomaba la variable dependiente era mayor que el que tomaba la variable independiente. A siete estudiantes no se les plantearon preguntas sobre generalización.

Observamos que de 10 alumnos que responden correctamente a la pregunta para la función directa con números pequeños, 7 también lo hacen con números grandes y 5 con la relación inversa.

Respecto a la generalización, los estudiantes A3 y A4 generalizaron de forma incorrecta. Identificaron una correspondencia, pero la expresión de la generalización no es correcta. Al ver que dándole dos veces iba al cuatro, estos alumnos conjeturaron que la regla era "el doble". A pesar de que mostramos que no era así mediante un contraejemplo, mantuvieron su conjetura.

En el siguiente fragmento del diálogo con A3 y A4 sobre qué es lo que hace

Bruno.

A3: Que si le damos dos se va al doble.

Investigadora (I): Ajá, porque el doble de dos es...

A3: Cuatro

I : ¿Y cuál sería el doble de tres?

A3: Cinco

I : Pues mira a ver, pongo tres dedos y otros tres, ¿eso es el doble no?

A3: Sí

I : Pues cuenta cuántos dedos te enseño.

A3: Seis.

(...)

A4: Se va a los dobles, al número doble de ese número.

(...)

I : Entonces, ¿qué hace?

A3: El doble.

Tres alumnos —A6, A7 y A8— descubren pronto la generalización y la expresan verbalmente, los tres la expresan de la misma forma: refiriéndose a qué ocurre cuando se le da un número de veces cualquiera a la flecha azul: "se salta dos". Estos alumnos respondieron correctamente a todas las preguntas de los casos anteriores.

CONCLUSIONES

En este trabajo abordamos el pensamiento funcional en educación infantil. En ese nivel educativo hemos encontrado pocos antecedentes a nivel internacional. En concreto, el uso de robots no ha sido abordado en el contexto del pensamiento algebraico en las primeras edades. Estas dos razones hacen que este trabajo sea innovador y lo consideremos una primera aproximación en el contexto de una investigación más ambiciosa. La relevancia de la tecnología y los beneficios del pensamiento funcional son los fundamentos de nuestro estudio.

Evidenciamos que hay niños del último curso de educación infantil (5-6 años) que identifican la relación de correspondencia en una tarea que involucra la función $f(n) = n + 2$ cuando trabajan con casos particulares y en algunos casos llegan a expresar una generalización. La mayoría lo hacen de forma correcta. Estos resultados están en consonancia con nuestros antecedentes (Blanton y Kaput, 2004; Castro et al., 2017; Majón, 2016). Como hemos recogido en los resultados, hubo alumnos que identificaron la generalización pero no expresaron corectamente la regla de correspondencia, observamos que en los casos particulares establecieron correctamente la correspondencia para números pequeños y grandes. Es posible que la expresión de la generalización como "el doble"se deba a sus conocimientos previos sobre esta noción. Estos niños habían trabajado la idea de doble de

una cantidad previamente pero también podrían haberlo confundido con sumar dos en caso de que no hubieran interiorizado correctamente su significado.

Entre los niños que no identificaron la relación de correspondencia, algunos expresaron ciertas regularidades. Por ejemplo, decían: "Bruno siempre se pasa"; indicando así que la variable independiente tomaba siempre un valor mayor que la dependiente, aunque no llegaran a cuantificar la regularidad.

Respecto al uso de los robots, hemos comprobado que ha sido un elemento motivador para los niños, en consonancia con trabajos previos (e.g., Sánchez et al., 2019). También percibimos que la actividad habría sido más ágil si cada niño hubiera tenido un robot en lugar de tener que compartir. Esto lo reconocemos como una debilidad y lo consideraremos para el futuro. En general, el acceso a ciertas herramientas y no a otras tiene un impacto en el desempeño de los niños en distintas tareas, con lo cual hay que atender no solo a las consignas específicas, sino también a las herramientas a las que damos acceso (Brizuela y Blanton, 2014). Sería interesante profundizar en cómo los diferentes contextos de enseñanza y aprendizaje afectan en la manera en la que los estudiantes se acercan a la generalización.

Agradecimiento

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771 y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

REFERENCIAS

Alsina, Á. y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional: una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 52*, 218-235.

Alsina, Á. y Giralt, I. (2017). Introducción al álgebra en educación infantil: un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones. *Didácticas Específicas, 16*, 113-129.

Bizarro, N., Luengo, R. y Carvalho, J. L. (2018). Desarrollo de nociones espaciales básicas a través del trabajo con robótica educativa en el aula de educación infantil y análisis de datos cualitativos con software *WebQDA. CIAIQ2018, 1*.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, EE. UU.: NCTM.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP), 14*, 37-57.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner. A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34-63.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.
004

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early Algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3-22.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6* (2) 1-13.

Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Eck, J., Hirschmugl-Gaisch, S., Hofmann, A., Kandlhofer, M., Rubenzer, S. y Steinbauer, G. (2013). Innovative concepts in educational robotics: Robotics projects for kindergartens in Austria. *Austrian Robotics Workshop 2013*, *14*, 12.

Majón, M. V. (2016). Generalización y razonamiento inductivo de alumnos de Educación Infantil en tareas de patrones numéricos (Trabajo de Fin de Master). Universidad de Granada, España.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dortrech, Paises Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M. y Heinze, A. (2019). Developing algebraic reasoning in primary school using a hanging mobile as a learning supportive tool. Infancia y Aprendizaje, 42(3), 615-663. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02103702.2019.1612137

Sánchez, E., Cózar, R. y González-Calero, J. A. (2019). Robótica en la enseñanza de conocimiento e interacción con el entorno. Una investigación formativa en educación infantil. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado 94,* 11-28

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group and NCTM.

Usiskin, Z. (1999). Why is algebra important to learn (Teachers, this one's for your students!). Algebraic Thinking Grades K-12: *Readings from NCTM's school-based journals and other publications*, 22-30.

Warren, E. y Cooper, T. J. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11* (1), 9-14.

Warren, E., Cooper, T. J. y Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 208-223.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS

Strategies used by primary school students when solving geometric pattern problems

Arbona, E.[a], Beltrán-Meneu, M. J.[b] y Gutiérrez, Á.[a]

[a] Depto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

[b] Depto. de Educación y Didácticas Específicas, Universitat Jaume I

Resumen

Presentamos parte de un proyecto de investigación que tiene como objetivo general, analizar la progresión en el pensamiento algebraico de estudiantes de Educación Primaria al resolver una secuencia de problemas de patrones geométricos. Para ello, es necesario analizar las distintas estrategias que emplean los estudiantes al resolver este tipo de problemas. Tras estudiar las estrategias recogidas en la literatura, presentamos una nueva clasificación a modo de marco teórico para nuestra investigación, cuyo objetivo es hacer más detallado y profundo el análisis de las respuestas de los estudiantes. En esta clasificación diferenciamos entre las estrategias empleadas en cuestiones de relación directa e inversa. Describimos cada estrategia e incluimos ejemplos de respuestas producidas por estudiantes de Primaria.

Palabras clave: *problemas de patrones geométricos, pensamiento algebraico, estrategias de resolución, educación primaria, altas capacidades matemáticas*

Abstract

We present part of a research project aimed to analyze the progress of primary school students' algebraic thinking when solving a sequence of geometric pattern problems. To accomplish this, it is necessary to analyze the diversity of strategies used by students when solving these problems. After having analyzed the strategies found in the literature, we present a new classification as a theoretical framework for our research. The aim of this new framework is to allow a more detailed and deeper analysis of students' responses. In this classification we distinguish between strategies used on direct and inverse question. We describe each strategy and show examples of answers by primary school students.

Keywords: *geometric pattern problems, algebraic thinking, solving strategies, primary education, mathematical giftedness*

INTRODUCCIÓN

El álgebra es uno de los contenidos clave en las matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Sin embargo, muchos estudiantes presentan dificultades durante su aprendizaje, como la falta de comprensión de las nociones de variable e incógnita y de las expresiones algebraicas o en el uso de operaciones aritméticas en estas expresiones (Jupri, Drijvers, y Van den Heuvel-Panhuizen, 2015). Para tratar de combatir estas dificultades, el *pensamiento algebraico* plantea empezar el aprendizaje del álgebra trabajando y operando con variables e incógnitas sin hacer uso de expresiones simbólicas alfanuméricas (Radford, 2011), lo cual puede servir de puente para la introducción del álgebra en estudiantes de Educación Primaria.

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, Á. (2021). Estrategias empleadas por estudiantes de primaria en la resolución de problemas de patrones geométricos. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 133 – 140). Valencia: SEIEM.

Diversos autores han destacado los problemas de patrones geométricos como un contexto idóneo para el desarrollo de la generalización y el pensamiento algebraico. En concreto, los *problemas de patrones geométricos* (Figura 1) muestran los primeros términos de una sucesión creciente de números naturales representados mediante figuras formadas por piezas cuya cantidad coincide con el valor del término. Estos problemas piden calcular: un término *inmediato*, situado en las dos o tres posiciones siguientes a los términos dados; un término *próximo*, cuyo valor se pueda calcular mediante la representación gráfica o la recursividad; un término *lejano*, que, por su posición, sea costoso de calcular mediante las estrategias anteriores y sugiera la conveniencia de desarrollar una estrategia nueva para obtener una generalización; y, por último, expresar verbal y/o algebraicamente el *término general* de la sucesión (Benedicto, Jaime, y Gutiérrez, 2015).

Además de estas cuestiones, denominadas de *relación directa*, se pueden plantear cuestiones de *relación inversa* (Rivera, 2013), en las cuales se da el valor de un término y se pide calcular su posición. Estas cuestiones inician a los estudiantes en el planteamiento y resolución de ecuaciones.

La resolución de problemas de patrones geométricos también resulta especialmente interesante para los estudiantes con altas capacidades matemáticas, ya que su estructura permite a los profesores graduar la complejidad y adaptarlos a las necesidades y capacidades de los distintos estudiantes de los grupos ordinarios de Educación Primaria (Jaime y Gutiérrez, 2014).

En clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día:



a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día?
e) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?

Figura 1. Problema de patrón geométrico

Marcos teóricos previos

Estudios previos han descrito diversas estrategias, algunas con distintas denominaciones, que utilizan los estudiantes al resolver cuestiones de relación directa en problemas de patrones geométricos basados en relaciones funcionales lineales, $f(n)=an$, o afines, $f(n)=an+b$ (Stacey, 1989; Lannin, Barker, y Townsend, 2006; Jurdak y El Mouhayar, 2014; García-Reche, Callejo, y Fernández, 2015). Principalmente podemos dividir estas estrategias en: i) *recuento* (*counting method)*, si se cuentan las piezas del término a partir de su dibujo; ii) *recursiva (recursive)*, si se añade de forma reiterada la diferencia constante entre el valor de dos términos consecutivos a uno conocido; iii) *múltiplo de la diferencia (difference method* o *chunking)*, si se añade al valor de un término anterior la diferencia constante entre los valores de dos términos consecutivos multiplicada por la distancia entre la posición del término anterior y el demandado; iv) *funcional (functional, linear method* o *explicit)*, si se establece una relación funcional entre la posición del término y su valor; y v) *proporcional (whole-object method*, *unitising* o *proportional)*, si se hace uso de una relación de proporcionalidad, aunque algunos autores también referencian una variante aditiva.

Centrándose en el contexto de estudiantes con altas capacidades matemáticas, Amit y Neria (2008) identificaron dos tipos de estrategias en su estudio con estudiantes superdotados de 11-13 años (cursos 6 y 7): la *recursiva-operacional-local*, que les permitía extender la secuencia a nivel operacional pero estaba limitada por su carácter local, y la *funcional-conceptual-global*, cuando identificaban las variables y constantes y establecían una relación de dependencia entre ellas.

En cuanto a las estrategias empleadas para resolver cuestiones de relación inversa, Arbona (2016) describió 3 categorías: *ensayo y error con cálculos de relación directa*, si se prueba con distintos términos hasta encontrar el valor señalado; *inversión de las operaciones*, si se resuelve invirtiendo el orden de los cálculos realizados al resolver cuestiones de relación directa; y *resolución de ecuaciones*, si se plantea una ecuación.

Al empezar a analizar las respuestas de estudiantes recogidas en nuestras experimentaciones aplicando las estrategias mencionadas, nos dimos cuenta de que estas no diferencian determinados tipos de respuestas que, aunque tienen un estilo común de estrategia, muestran características específicas diferentes que es conveniente conservar. Por ello, hemos procedido a integrar el conjunto de estrategias descritas en la literatura en un nuevo marco teórico que contempla nuevas categorías y subcategorías emergidas del análisis de nuestros datos.

Objetivos

El trabajo presentado en esta comunicación forma parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo general es analizar la progresión de estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria en una secuencia de problemas de patrones geométricos e identificar características diferenciadoras de los estudiantes con altas capacidades matemáticas en este contexto.

El objetivo específico de esta comunicación se centra en presentar un nuevo marco teórico que recoja los distintos tipos de estrategias empleadas por los estudiantes al resolver problemas de patrones geométricos, para el cálculo de los valores de los términos de la sucesión (cuestiones directas) y de sus posiciones (cuestiones inversas).

METODOLOGÍA

Para dar respuesta al objetivo general de investigación planteado, empleamos una metodología cualitativa de *investigación de diseño* (Cobb, Jackson, y Dunlap, 2015), realizando diversas experimentaciones, en las que la primera autora era la profesora, con una muestra heterogénea de conveniencia de estudiantes de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria que no habían trabajado previamente con problemas de patrones geométricos y no tenían conocimientos de álgebra: dos estudios longitudinales con una duración de 3 sesiones por curso, uno de 3 años con 39 estudiantes y otro de 2 años con 30 estudiantes de un centro público; un estudio no longitudinal de una duración de 4 sesiones con 112 estudiantes de otro centro público; y una sesión con un grupo de 16 estudiantes superdotados (11-12 años) que asistían a un taller extraescolar de matemáticas.

Las experimentaciones se centraron en la resolución de problemas de patrones geométricos basados en relaciones funcionales lineales y afines. Estos problemas estaban ordenados con un aumento gradual de dificultad y con distintas versiones de cuestiones enfocadas a la asimilación de diversos objetivos de aprendizaje. Tras la resolución de los problemas por los estudiantes, se realizaba una puesta en común de las estrategias empleadas, para ampliar su conocimiento y descartar las erróneas, y se introducían conceptos nuevos relacionados con los objetivos de aprendizaje.

Finalizada la experimentación, iniciamos el análisis de las respuestas de los estudiantes tomando como referencia las categorías encontradas en la literatura, pero diversas estrategias empleadas por los estudiantes no se recogían o no quedaban bien definidas en ellas, por lo que surgió la necesidad de elaborar una clasificación más fina. Para ello, realizamos varias veces un proceso cíclico en el que los tres autores analizábamos, de forma independiente, las respuestas de algunos estudiantes y,

después, hacíamos una puesta en común con el fin de discutir las diferencias y refinar las definiciones de las categorías problemáticas. Este nuevo marco teórico aporta una clasificación de las estrategias usadas en las cuestiones directas e inversas de los problemas de patrones geométricos nueva y más completa y detallada que las anteriores, lo cual supone un avance en la evaluación de los conocimientos y estrategias empleadas por los estudiantes.

MARCO TEÓRICO PROPUESTO

A continuación, describimos los diferentes tipos de estrategias que consideramos que los estudiantes de Educación Primaria pueden emplear al resolver problemas de patrones geométricos basados en relaciones funcionales lineales y afines. Presentamos también ejemplos de resoluciones del problema de la Figura 1, extraídas de las experimentaciones descritas. Para su clasificación, diferenciamos entre las estrategias utilizadas al resolver cuestiones de relación directa e inversa. En las estrategias que han sido descritas en la literatura que hemos consultado, incluimos su denominación en inglés para facilitar la relación de este texto con dicha literatura. Las estrategias sin denominación en inglés son las que hemos introducido para completar los tipos existentes.

Estrategias en cuestiones de relación directa

Las estrategias empleadas en cuestiones de relación directa son las siguientes:

- *Recuento* (Counting method): Consiste en dibujar la representación gráfica del término requerido y contar sus piezas como unidades independientes.

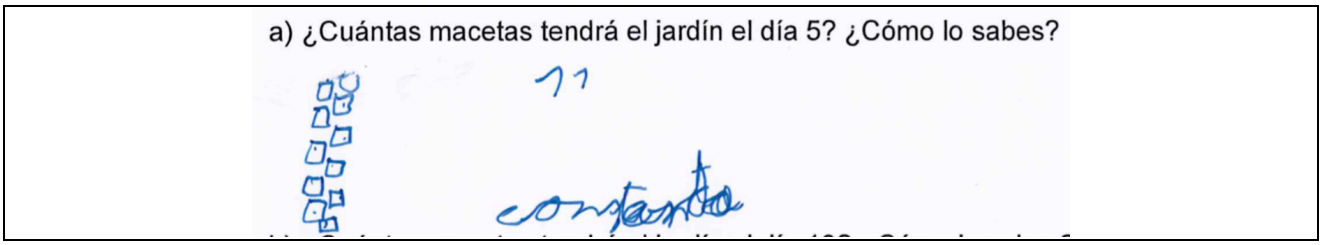


Figura 2. Ejemplo de estrategia de recuento

En la figura 2, el estudiante dibujó la figura correspondiente al término 5, siguiendo el patrón de los primeros términos, y contó la cantidad total de macetas.

- *Recursiva* (Recursive): Se caracteriza por calcular el valor de un término sumando de forma reiterada a un término ya conocido la diferencia numérica constante entre los valores de dos términos consecutivos.

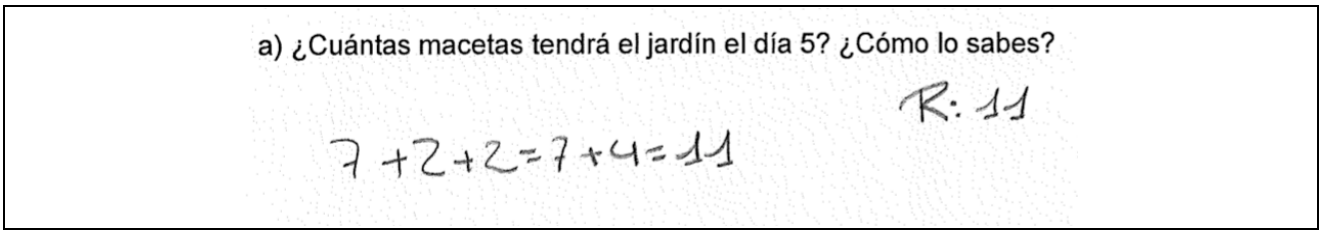


Figura 3. Ejemplo de estrategia recursiva

En la figura 3, el estudiante contó la cantidad de macetas en el término 3 (7 macetas) y sumó 2 (diferencia entre los valores de dos términos consecutivos) las veces necesarias hasta llegar al término 5.

- *Funcional* (Functional): Los estudiantes calculan el valor de un término prestando atención a la correspondencia entre su posición y la cantidad de piezas que lo forman. Podemos encontrar dos tipos de estrategia funcional:

- *Descomposición*: Se basa en dividir la representación gráfica de un término en partes, con el fin de encontrar una relación entre la posición del término y la cantidad de piezas que tiene cada parte.

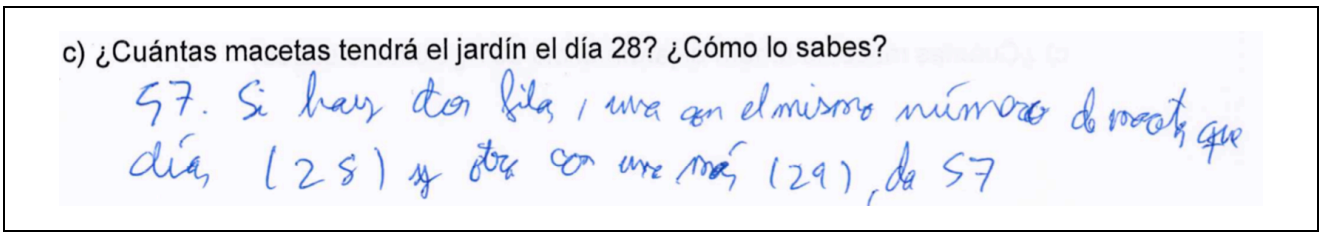


Figura 4. Ejemplo de estrategia de descomposición

En la figura 4, el estudiante dividió la representación gráfica de los términos en las dos columnas (él las llama filas) y relacionó cada columna con la posición del término. De este modo, la cantidad de macetas equivalía a la posición del término (28) en la columna de la izquierda y a la posición más uno (29) en la columna de la derecha.

- *Múltiplo de la Diferencia* (Chunking): Se caracteriza por sumar al valor de un término la diferencia constante entre los valores de dos términos consecutivos multiplicada por la distancia entre la posición del término requerido y la de ese término. Esta estrategia puede aplicarse de dos modos distintos:
  - *Auxiliar*: Si el término utilizado es un término no proporcionado en el enunciado del problema ni calculado en cuestiones anteriores.

    En la figura 8, el estudiante calculó primero el término 10 (22) y a continuación le sumó 2 (diferencia entre dos términos consecutivos) multiplicado por 3 (distancia entre las posiciones 10 y 13).
  - *Anterior*: Si el término utilizado es un término proporcionado en el enunciado del problema o calculado en cuestiones anteriores.

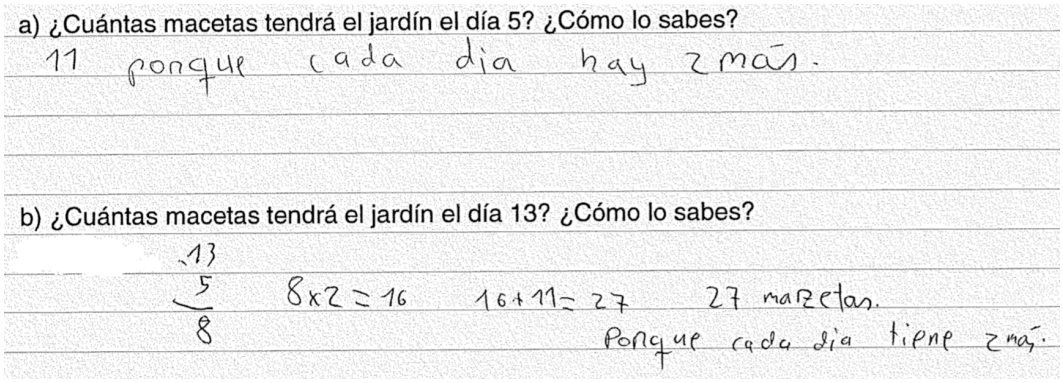


Figura 5. Ejemplo de estrategia anterior

En el apartado *b)* de la figura 5, el estudiante multiplicó la diferencia entre las posiciones de los apartados *a)* y *b)* (13-5=8) por la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2) para, posteriormente, sumar el resultado de la multiplicación (16) al valor de la posición del apartado *a)* (11).

- *Construcción* (Whole-object): Los estudiantes utilizan los valores de uno o varios términos previos conocidos para obtener, mediante operaciones aritméticas, el valor del término requerido. Dentro de esta categoría podemos encontrar tres estrategias:

- *Proporcional* (Proportional): Consiste en usar una relación de proporcionalidad, que en los patrones basados en relaciones funcionales afines es errónea, entre las posiciones de dos términos y sus valores para calcular el valor de uno de los términos.

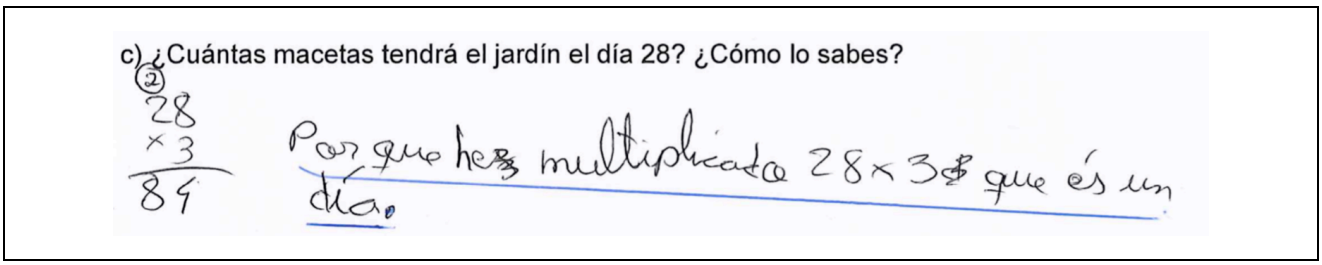


Figura 6. Ejemplo de estrategia proporcional

En la figura 6, el estudiante usó el valor (3) del término 1 para obtener el valor demandado mediante una relación errónea de proporcionalidad.

- *Aditiva*: Consiste en establecer una relación aditiva entre las posiciones de términos conocidos y del término requerido y obtener el valor de este aplicando la misma relación a los valores de los términos conocidos.

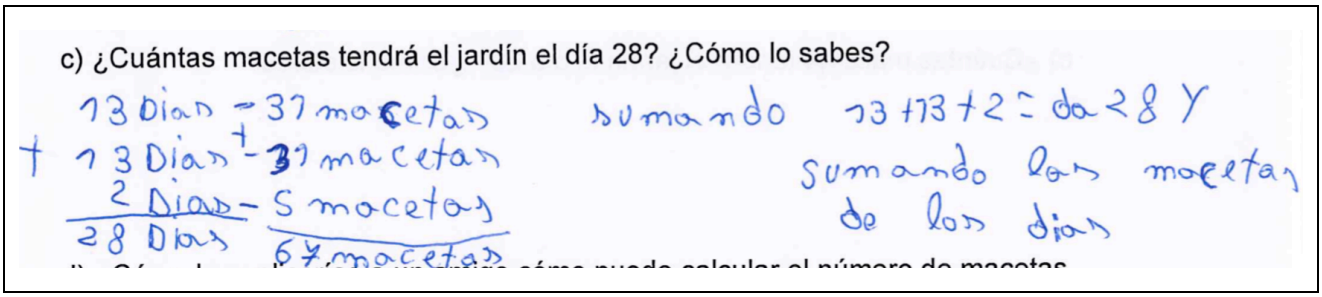


Figura 7. Ejemplo de estrategia aditiva

En la figura 7, el estudiante obtuvo la posición del término requerido a partir de la suma de las posiciones de otros términos y utilizó los valores de estos términos para calcular el resultado.

- *Combinada*: Se basa en calcular el valor de un término a partir de una combinación de relaciones proporcionales y aditivas entre otros términos con valores conocidos.

  No hay ejemplos de esta estrategia en las respuestas que hemos analizado hasta ahora.

- *Otras*: Estrategias que no pueden incluirse en ninguna de las categorías anteriores o que son combinaciones de estas.

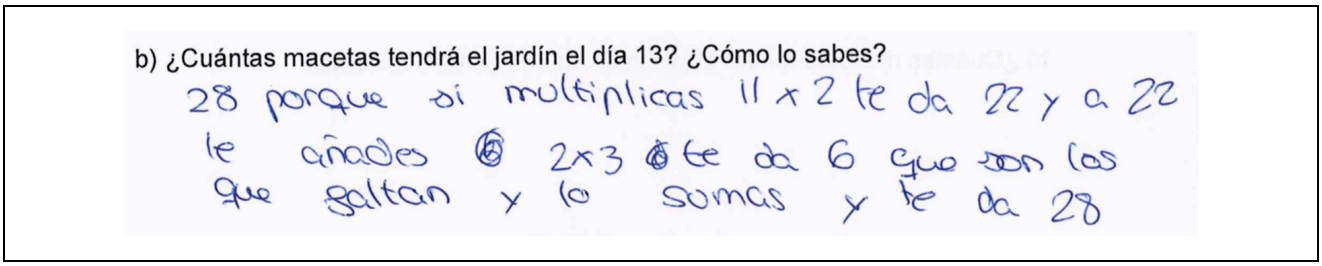


Figura 8. Ejemplo de estrategia otras

En la figura 8, el estudiante empleó dos de las estrategias descritas previamente. Primero, utilizó la estrategia proporcional, al usar el valor del término 5 (11) para obtener el valor del término 10 (*f(10)=f(5)x2*) y, después, utilizó la estrategia múltiplo de la diferencia (auxiliar), al calcular la diferencia entre las posiciones del término 10, que no había sido proporcionado

anteriormente, y del 13 y multiplicarla por la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2x3).

Estrategias en cuestiones de relación inversa

Las estrategias utilizadas en cuestiones de relación inversa podemos clasificarlas en:

- *Inversión*: Consiste en invertir los cálculos aritméticos hechos en las cuestiones de relación directa.

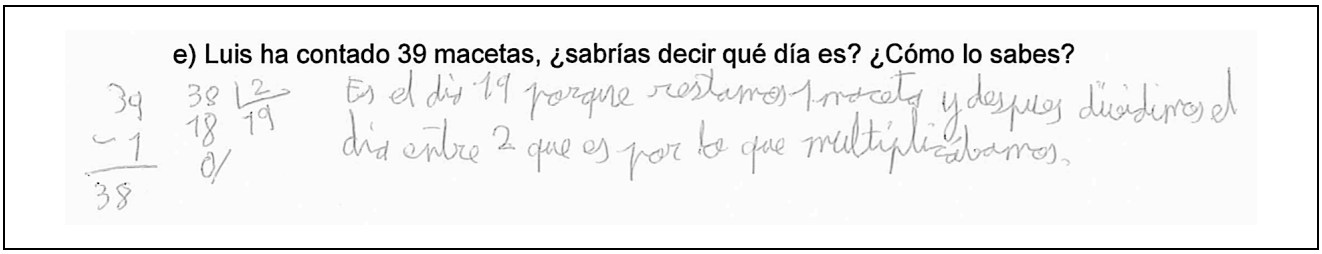


Figura 9. Ejemplo de estrategia de inversión

En la figura 9, el estudiante realizó las operaciones inversas y en el orden contrario (restar 1 y dividir entre 2) a las que había realizado en las cuestiones directas (multiplicar por 2 y sumar 1).

- *Ecuación*: Se caracteriza por formular una ecuación y resolverla.

  No hay ejemplos de esta estrategia en la respuestas que hemos analizado hasta ahora.

- *Operaciones directas*: Se basa en usar una estrategia que podría aplicarse para obtener la solución de las cuestiones de relación directa.

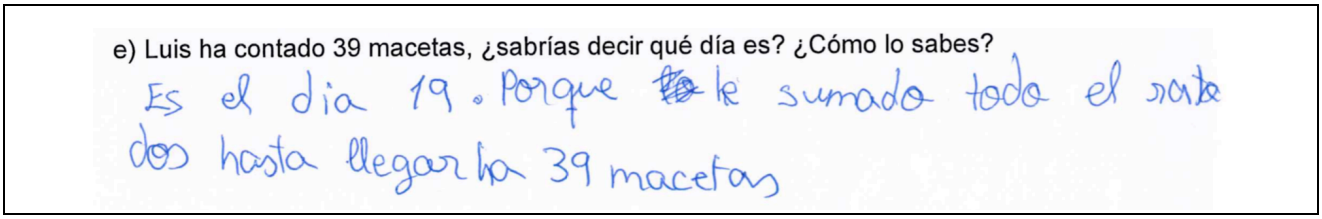


Figura 10. Ejemplo de estrategia de operaciones directas

En la figura 10, el estudiante utilizó la estrategia recursiva para calcular la posición a partir de un término previo conocido, sumando a ese término la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2) las veces necesarias hasta obtener 39 macetas.

- *Otras*: Estrategias que no pueden incluirse en ninguna de las categorías anteriores.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta comunicación es presentar un nuevo marco teórico para analizar las respuestas de los estudiantes a problemas de patrones geométricos. Empezamos analizando las respuestas de los estudiantes de nuestra muestra mediante las estrategias de resolución encontradas en la literatura, pero observamos dificultades para clasificar algunas respuestas y también que algunas categorías recogían respuestas de características bastante diferentes que era necesario distinguir.

Un proceso recursivo de identificación y análisis de respuestas problemáticas dio lugar a la identificación y definición de nuevas categorías emergentes. Para las cuestiones de relación directa, hemos desarrollado tipos específicos de estrategias *funcionales*, entre los que podemos destacar *descomposición* y los subtipos de *múltiplo de la diferencia*, que permiten distinguir diferentes formas de obtener la relación funcional que caracteriza el término general de las sucesiones, y de la

estrategia *construcción*, que permiten diferenciar varias maneras de relacionar términos con valores conocidos para calcular el valor de un nuevo término.

Para las cuestiones de relación inversa, hemos descrito diferentes formas de realizar los cálculos de la posición de los términos proporcionados, que van desde procedimientos rudimentarios próximos al tanteo a procedimientos aritméticos depurados y procedimientos algebraicos.

El uso de este marco teórico, más preciso y desarrollado que los anteriores, nos está permitiendo realizar un análisis más detallado y minucioso de las respuestas de nuestros estudiantes, que dará lugar a unos resultados más ricos y clarificadores, como la ausencia de estrategias proporcionales en los estudiantes con altas capacidades matemáticas.

Esta investigación forma parte del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y la ayuda predoctoral FPU16/04513.

Referencias

Amit, M., y Neria, D. (2008). «Rising to the challenge»: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 111-129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5

Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas* (Trabajo Fin de Máster). Valencia: Universitat de València. http://hdl.handle.net/10550/56731

Benedicto, C., Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Cobb, P., Jackson, K., y Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203448946

García-Reche, A., Callejo, M. L., y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Jupri, A., Drijvers, P., y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving grade 7 atudents' achievement in initial algebra through a technology-based intervention. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *1*(1), 28-58. https://doi.org/10.1007/s40751-015-0004-2

Jurdak, M. E., y El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 75-92. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9494-2

Lannin, J., Barker, D., y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Heidelberg, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Nueva York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2712-0

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS DE CONVERSIÓN ENTRE REPRESENTACIONES DE INTERVALOS DE LA RECTA REAL PROPUESTAS EN LIBROS DE TEXTO

Characteristics of the conversion tasks among representations of intervals of the real line proposed in textbooks

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

Resumen

Los intervalos de la recta real tienen un papel relevante en el aprendizaje de diversos contenidos matemáticos. Sin embargo, apenas se ha investigado sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje y, en particular, los de sus representaciones. Se presentan los resultados de un análisis de las tareas propuestas en libros de texto que solicitan convertir un intervalo de un sistema de representación a otro. La muestra está compuesta por 25 libros de 4º de ESO y 1º de Bachillerato de LOE y LOMCE. Se han detectado algunos comportamientos globales que pueden comprometer la riqueza y variedad de oportunidades de aprendizaje de las conversiones provistas por los libros, como la frecuencia de aparición muy desigual entre unas conversiones y otras, la falta de consideración del registro verbal y el abuso de expresiones algebraicas y verbales que promuevan conversiones por congruencia.

Palabras clave: *intervalos de la recta real, conversión entre representaciones, libros de texto*

Abstract

Intervals of the real line play an important role in the learning of several mathematical concepts. However, hardly any research about their teaching and learning processes has been done, either about their representations. The results of the analysis of the conversion tasks among representations of intervals proposed in textbooks are set out. The sample consists of 25 textbooks of grades 10 and 11 related to LOE and LOMCE. Global tendencies which can affect the richness and variety of learning opportunities of conversions given by textbooks have been detected, such as big differences of the frequency of each conversion, the lack of conversions involving the verbal representation and the abuse of algebraic and verbal expressions which promotes congruent conversions.

Keywords: *intervals of the real line, conversions among representations, textbooks*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Los intervalos son uno de los subconjuntos más importantes de los números reales, ya sean acotados o no acotados (estos últimos también llamados semirrectas), al ser necesarios para desarrollar acciones como, por ejemplo, resolver inecuaciones o estudiar y expresar propiedades de funciones, a nivel global o local. El estudio de estos subconjuntos es considerado por el currículo español en 4º de ESO y 1º de Bachillerato (Grados 10 y 11), siendo necesario conocer su significado, así como conocer y dominar sus diferentes formas de expresión y representación.

Uno de los procesos matemáticos clave en el desarrollo de la comprensión y aprendizaje de los objetos matemáticos es el de representar (Goldin, 2002). En él se incluye la realización de conversiones y coordinaciones de objetos matemáticos entre diferentes sistemas de representación como un aspecto relevante para evidenciar la comprensión de los mismos (Duval, 1999, 2006). Este proceso de representación toma especial relevancia en el aprendizaje de los números reales, como explican Rico, Castro y Romero (2000). Es posible encontrar estudios relacionados con la representación de números

Arce, M. y Conejo, L. (2021). Características de las tareas de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real propuestas en libros de texto. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 141 – 148). Valencia: SEIEM.

reales en la recta real (Montoro, Cifuentes, Salva y Bianchi, 2017; Rico et al., 2000; Scaglia y Coriat, 2003), pero hay una práctica ausencia de investigaciones centradas en los intervalos, acotados o no acotados, como se indica en Pecharromán, Arce y Conejo (2019).

Entre esos antecedentes, Pecharromán, Arce, Conejo y Ortega (2018) realizan un estudio teórico de las conversiones entre diferentes representaciones de intervalos. Pecharromán et al. (2019) analizan las estrategias de conversión entre representaciones de intervalos no acotados utilizadas por estudiantes de 4º de ESO y 1º de Bachillerato. Se presenta aquí una investigación complementaria a las anteriores, centrada en los libros de texto (en adelante, LT) que, como muestra la revisión de Fan, Zhu y Miao (2013), sigue siendo un recurso muy influyente en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los objetivos de esta investigación son detectar las características de las tareas de conversión de intervalos entre sistemas de representación propuestas por una muestra de LT de 4º de ESO y 1º de Bachillerato y valorar y discutir esas características en términos de la riqueza y variedad de las oportunidades de aprendizaje de las conversiones que proveen.

MARCO TEÓRICO

Se parte de considerar los objetos matemáticos como propios de un dominio conceptual (Rico, 2009), que no tienen existencia material pero que sí pueden ser percibidos y producidos por la razón. Los signos que permiten hacer presentes los objetos matemáticos y comunicar ideas sobre ellos suelen denominarse *representaciones* (Castro y Castro, 1997), dotándose de sentido en sistemas compartidos de significados y relaciones (Rico, 2009). Goldin (2002) distingue dos nociones de significado en un sistema de representación: una *sintáctica*, que refiere únicamente a los signos y elementos propios del sistema semiótico; y una *semántica*, en la que el significado es inherente a los objetos.

Castro y Castro (1997) distinguen dos grandes grupos de sistemas o de registros de representación, el gráfico, que usa representaciones continuas de tipo figurativo, y los simbólicos, que utilizan representaciones discretas de caracteres alfanuméricos. Aquí se considerará el *registro gráfico* (G), en el que los intervalos se representan como segmentos o semirrectas de la recta real numérica y, entre los sistemas simbólicos, distinguiremos entre el *registro verbal* (V), que hace uso de caracteres propios del lenguaje natural; el *registro algebraico* (A), que contiene algún carácter que representa una variable que se mueve en un conjunto; y el *registro numérico* (N). La Figura 1 muestra un ejemplo de intervalo acotado y de no acotado en estos cuatro registros.

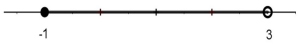
Registro gráfico (G)	Registro verbal (V)	Registro algebraico (A)	Registro numérico (N)
	Números comprendidos entre -1 y 3, incluyendo el -1	$-1 \leq x < 3$	$[-1, 3)$
	Números mayores que 1	$x > 1$	$(1, +\infty)$

Figura 1. Ejemplo de intervalo acotado y de no acotado en los cuatro registros considerados

Coincidimos con Duval (1999) en que el aprendizaje y la comprensión de un concepto matemático está muy ligado a dominar sus representaciones en diferentes registros, coordinar estas y distinguir entre representante y objeto representado. Sobre las representaciones pueden desarrollarse acciones como el reconocimiento de un objeto o sus componentes en un sistema, la transformación dentro de un sistema, la conversión del objeto de un sistema de representación a otro y la coordinación (conversión bidireccional) entre representaciones en diferentes sistemas (Duval, 2006). El umbral de comprensión de un concepto matemático se sitúa en la coordinación espontánea y sin contradicciones de al menos dos de sus sistemas de representación (Duval, 2006).

En particular, nuestro foco está en las conversiones de intervalos de uno a otro de los cuatro registros comentados, como paso previo para las coordinaciones. La docencia sobre intervalos en Secundaria debe proveer de suficientes *oportunidades de aprendizaje* de las diferentes conversiones, entendidas

como situaciones que permitan a los alumnos reorganizar su estructura conceptual o cambiar su conocimiento o concepciones sobre estas conversiones (adaptado de Morera, 2013). Denotaremos las conversiones con las iniciales de los registros involucrados y una flecha que va del registro de salida al de llegada (por ejemplo, V→N es una conversión del registro verbal al numérico).

Para Duval (1999), un aspecto clave que marca la dificultad de una conversión es la congruencia entre las representaciones del registro de salida y el de llegada. La congruencia entre dos representaciones se define a partir del grado de correspondencia entre las unidades significantes que constituyen una y otra representación (Duval, 1999). Uno de los criterios que determinan la congruencia es el *orden de aprehensión entre las unidades significantes*, que se cumple cuando las unidades significantes asociadas al mismo significado en uno y otro registro se presentan en el mismo orden en ambas representaciones. Por ejemplo, para las representaciones gráfica y algebraica del intervalo no acotado de la Figura 1, este criterio no se cumple ya que en "$x>1$" no se mantiene el orden de presentación de los elementos de la recta real, aspecto que sí se cumpliría si se escribiera el intervalo como "$1<x$". El hecho de que en un registro existan varias representaciones distintas del mismo objeto es destacada por Pecharromán et al. (2018); en el registro algebraico, con el uso posible de la desigualdad en ambos sentidos, y en el verbal, con el uso de mayores, menores u otras fórmulas. La representación escogida puede afectar al cumplimiento del criterio sobre el orden de aprehensión y, por ende, a la congruencia.

Además de considerar las diferentes conversiones, la docencia también debería proveer de suficientes oportunidades de aprendizaje en registros donde un intervalo admite escrituras diversas válidas. Extendiendo la noción sintáctica y semántica de Goldin (2002) en el sentido de Pecharromán et al. (2019), la variedad y riqueza de estas oportunidades de aprendizaje buscarán favorecer el desarrollo de conversiones sustentadas en un significado semántico, a partir del significado global inherente del objeto representado. Con ellas podrán superarse estrategias basadas solo en un significado sintáctico como la llamada conversión por congruencia, que genera la escritura con la traducción sintáctica concatenada de cada signo de un sistema semiótico a otro. Esta estrategia solo proporciona respuestas correctas si hay alta congruencia, y provoca muchos errores (Pecharromán et al., 2019).

Este estudio se centra en los libros de texto (LT), recurso habitual cuya presencia e influencia en los docentes llevó a Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt y Houang (2002) a situar los LT en un nivel de currículo potencialmente implementado, como mediadores entre el currículo y la instrucción real en las aulas, lo que ha situado todo lo que rodea los LT como una temática relevante de investigación (Fan et al., 2013). De los tres tipos de investigaciones sobre LT indicados por Fan et al. (2013), este estudio se encuadra dentro del tipo de análisis de los LT, sobre cómo un contenido es tratado en ellos. En particular, nos centramos en las tareas de conversión de intervalos propuestas por los LT seleccionados, analizando sus características y la variedad de oportunidades de aprendizaje de estas conversiones que son ofrecidas para su posible aprovechamiento en el contexto de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Los estudios de análisis de LT suponen un grueso importante de las investigaciones relacionadas con LT (Fan et al., 2013), pero nuestro estudio es novedoso al centrarse en el análisis de un contenido muy poco estudiado. Además, como señalan Chang, Cromley y Tran (2016), los estudios centrados en el análisis en libros de texto de las tareas ligadas a las representaciones en la rama de análisis matemático son escasos, destacando precisamente el de Chang et al. (2016) y el de Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo (2018).

MÉTODO

La muestra está formada por 25 LT de cuatro editoriales de amplio uso en España: Anaya, Edelvives, Santillana y Vicens Vives (Tabla 1). Se han considerado los LT de las dos últimas leyes educativas, LOE y LOMCE, para abarcar el análisis de las tareas de conversión de intervalos propuestas en la última década y que corresponden a los cursos y asignaturas de matemáticas en que se centra la docencia sobre intervalos: 4º de ESO (Opciones A y B en LOE, Matemáticas Aplicadas y Académicas en LOMCE) y 1º de Bachillerato (Matemáticas I y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I).

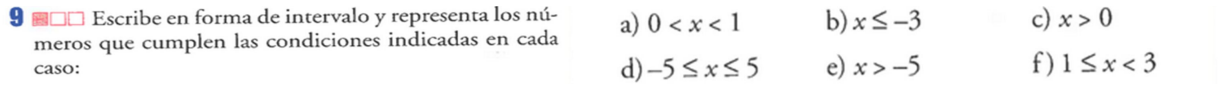
Al no disponer de las muestras completas de algunas editoriales, se realizará un análisis conjunto de las tareas de conversión de intervalos en la muestra para detectar comportamientos y tendencias globales en los planteamientos editoriales, sin pretender establecer comparaciones entre unos y otros.

Tabla 1. Libros de texto analizados de cada editorial

Anaya			Edelvives			Santillana			Vicens Vives		
Curso	*Año*	*Ley*	*Curso*	*Año*	*Ley*	*Curso*	*Año*	*Ley*	*Curso*	*Año*	*Ley*
4º A	2008	LOE	4º A	2008	LOE	4º A	2011	LOE	4º A	2008	LOE
4º B	2008	LOE	4º B	2008	LOE	4º B	2011	LOE	4º B	2008	LOE
1º Ci	2008	LOE	1º Ci	2008	LOE	1º Ci	2008	LOE	1º Ci	2008	LOE
1º CS	2008	LOE	4º Ap	2016	LOMCE	1º CS	2008	LOE	1º Ci	2014	LOMCE
4º Ap	2016	LOMCE	4º Ac	2016	LOMCE	1º Ci	2015	LOMCE	1º CS	2015	LOMCE
4º Ac	2016	LOMCE	1º Ci	2015	LOMCE						
1º Ci	2015	LOMCE	1º CS	2015	LOMCE						
1º CS	2015	LOMCE									

Se ha aplicado la metodología de *análisis de contenido*, "un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos" (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563), con el que se busca pasar de la descripción de los datos escritos a su interpretación y a la formulación de inferencias en base al contexto. Aquí, la unidad de análisis ha sido cada una de las tareas de conversión de intervalos encontradas en los LT, ya sean tareas cuya resolución es ilustrada por el propio LT, como tareas propuestas al alumno.

A partir de los objetivos y marco teórico descritos, se ha elaborado un instrumento *ad hoc* de análisis y codificación de los datos brutos de los LT. Las variables de análisis consideradas son: enunciado de la tarea y lenguaje usado para solicitar la conversión, tipo de intervalo (acotado, no acotado…), número del extremo inferior y superior del intervalo (si los hay), inclusión de los extremos en el intervalo, registro de salida y de llegada de la conversión, conversión solicitada, escritura del intervalo seleccionada cuando el registro de salida es el verbal o el algebraico y efecto de esa escritura en la congruencia de la conversión. Ilustramos el análisis con un ejemplo de tarea mostrada en la Figura 2.


9 Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) $0 < x < 1$ b) $x \leq -3$ c) $x > 0$

d) $-5 \leq x \leq 5$ e) $x > -5$ f) $1 \leq x < 3$

Figura 2. Tareas de conversión de intervalos extraídas del LT de 4º de ESO Opción A de ANAYA en LOE (Colera, Martínez, Gaztelu y Oliveira, 2008, p. 60)

Esta actividad consta de seis apartados y el enunciado solicita dos conversiones, por lo que hay 12 tareas de conversión en ella. Ilustramos el análisis para el apartado a). El enunciado usa "en forma de intervalo" para referirse al registro numérico y "representa" para referirse al gráfico. El intervalo es acotado. El extremo inferior es 0 y el superior es 1, ninguno incluido en el intervalo. El registro de salida es el algebraico, y los de llegada son el numérico y el gráfico, siendo las conversiones A→N y A→G. Por último, la expresión "0<x<1" hace uso del signo "<" y el orden de lectura sigue el orden numérico y el de la recta real, lo que aumenta la congruencia de las dos conversiones propuestas.

Tras el análisis de cada tarea por los dos autores, estos compartieron su codificación discutiendo los casos no coincidentes hasta llegar a un consenso. Tras esto, se analizaron los resultados en cada variable y en la interrelación de unas con otras buscando describir cómo son las tareas de conversión solicitadas en la muestra de LT e interpretar los resultados en términos de las características de las representaciones y las oportunidades de aprendizaje de las conversiones provistas por los LT.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se han encontrado 1082 conversiones, de las que 568 (un 52,50%) son intervalos acotados, 501 (un 46,30%) son semirrectas y en 13 se pide representar el conjunto de los números reales (enunciado

como (-∞, ∞) o "Todos los números reales"). Los 568 intervalos acotados se distribuyen de forma más o menos uniforme entre cerrados, abiertos, semiabiertos por la derecha y por la izquierda.

En el análisis de los enunciados se ha observado que ninguna de las editoriales utiliza la denominación de los registros indicada en el marco teórico, sino que se refieren a ellas de diversas maneras. Para solicitar una conversión con llegada en el registro algebraico, los LT suelen solicitar que se escriba como desigualdad, en forma de conjunto, de forma simbólica, o indicando que se defina el intervalo. Si es al registro gráfico, se suele pedir que se representen los intervalos o que se marquen en la recta real. Si la llegada es al registro verbal, se pide que se describan los intervalos. Por último, para solicitar la llegada al registro numérico se han localizado algunas tareas que piden que se escriba en notación matemática pero la mayoría pide que se escriba en forma de intervalos o semirrectas. Esta identificación de la palabra intervalo (o semirrecta) con el registro numérico parece indicar que para algunas editoriales de LT únicamente son intervalos si se expresan en este registro, cuando en realidad el intervalo es el concepto (subconjunto de la recta real), que puede expresarse en diferentes registros.

Conversiones entre representaciones de intervalos solicitadas en las actividades

En cada una de las 1082 tareas se ha analizado el registro de salida (escritura del intervalo dada), el registro de llegada solicitado y, juntando ambos datos, la conversión requerida. La Tabla 2 recoge la frecuencia de aparición de cada conversión (entre paréntesis las frecuencias correspondientes a cada curso, 4º ESO + 1º Bachillerato), y las frecuencias totales de cada registro de salida y de llegada.

Tabla 2. Frecuencia de aparición de cada registro y cada conversión en los LT

		Registro de llegada				
		A	*G*	*N*	*V*	Total
Registro de salida	*A*	**	148 (95+53)	228 (135+93)	0 (0+0)	376 (230+146)
	G	43 (27+16)	**	46 (30+16)	16 (0+16)	105 (57+48)
	N	133 (71+62)	210 (111+99)	**	37 (12+25)	380 (194+186)
	V	47 (12+35)	72 (34+38)	102 (52+50)	**	221 (98+123)
	Total	223 (110+113)	430 (240+190)	376 (217+159)	53 (12+41)	1082 (579+503)

En la Tabla 2 se observa que los dos registros de salida más utilizados son el numérico, en 380 conversiones (35,12% del total), y el algebraico, en 376 (34,75%). En menor medida son usados el registro verbal, en 221 ocasiones (un 20,43%) y el registro gráfico, mucho menos frecuente (solo 105 veces, un 9,70%). En los LT analizados no se proporciona un número equilibrado de oportunidades de aprendizaje para leer y detectar las características de los intervalos dados en diferentes registros. En particular, las oportunidades para el registro gráfico como registro de salida son escasas, resultado coincidente con el de Vargas et al. (2018) en el análisis de tareas sobre la derivada en LT. Esto podría deberse a aspectos de edición (restricciones para incluir imágenes, o necesidad de más espacio para incluir este registro) o a considerar menos necesario o importante un aprendizaje adecuado de la lectura gráfica de intervalos y de sus características en la recta real en comparación con otros registros.

Atendiendo a la frecuencia del registro de llegada en las tareas, los datos evidencian una mayor aparición de los registros gráfico (430 veces, un 39,74%) y numérico (376 veces, un 34,75%), una aparición moderada del registro algebraico (223 veces, un 20,60%) y una muy escasa del registro verbal, solo en 53 casos, que representan un 4,90% del total. La distribución presenta diferencias muy importantes, por lo que tampoco se proveen las mismas oportunidades de aprendizaje de la escritura de los intervalos en los cuatro registros considerados. Destaca la gran presencia de los registros numérico y, sobre todo, gráfico. Esto último contrasta con el comportamiento general observado en los registros de salida, lo que podría interpretarse como una posible compensación o mostrar una consideración mucho mayor de la importancia del aprendizaje de la escritura gráfica de intervalos en la recta real frente a su lectura. Por el contrario, el registro verbal apenas tiene presencia como registro de llegada, y solo se ha detectado en una de las editoriales seleccionadas. Esto podría mostrar que los

editores creen menos necesario el aprendizaje de la escritura verbal de intervalos o reflejar una falta de consideración de este registro como registro de llegada en la propia presentación del concepto.

Además, el amplio rango de frecuencias con la que se solicita cada una de las 12 conversiones posibles, que van desde la no aparición de la conversión A→V hasta las 228 veces que se demanda una conversión A→N, pone de manifiesto la muy desigual provisión de oportunidades de aprendizaje de las conversiones entre diferentes registros en los LT analizados. Además de A→N (21,07%), destaca por su asiduidad la conversión N→G, presente 210 veces (19,41%). Las conversiones A→G y N→A también aparecen en un porcentaje superior al 10% del total.

En los registros algebraico y verbal hay varias escrituras válidas de cada intervalo, acotado o no acotado. En Pecharromán et al. (2019) detectamos la mayor dificultad de los alumnos para realizar correctamente tareas de conversión de semirrectas con llegada en estos dos registros. El análisis de las tareas propuestas por los LT evidencia que, salvo la conversión N→A, el resto de las conversiones con llegada en los registros algebraico o verbal tienen una reducida presencia (inferior en todos los casos al 5% del total). Así, los LT analizados no aportan las suficientes oportunidades de aprendizaje de estas conversiones y más teniendo en cuenta su mayor dificultad para los aprendices. La posición de los LT como mediadores del currículo realmente implementado en las aulas que indican Valverde et al. (2002) puede hacer que, en algunos casos, esa insuficiencia de oportunidades de aprendizaje en los LT se traslade a las aulas y contribuir también a explicar estas mayores dificultades del alumnado.

En los 12 LT de 4º de ESO de la muestra hemos encontrado 579 tareas de conversión, con una media de 48,25 tareas por LT; en los 13 LT de 1º de Bachillerato el número de tareas es de 503, con una media de 38,69 tareas por LT. Este hecho puede evidenciar un comportamiento global de mayor importancia a las conversiones entre intervalos en 4º de ESO que en 1º de Bachillerato, donde parece tratarse más como un contenido de repaso, en el tema inicial el curso y con una cantidad menor de tareas de conversión propuestas. La comparativa de las frecuencias por curso para cada conversión (Tabla 2) muestra algunas pequeñas diferencias entre cursos, como una mayor presencia del registro algebraico como registro de salida en 4º de ESO, de la conversión A→G en este mismo curso y del registro verbal en 1º de Bachillerato.

Congruencia de las conversiones demandadas en los registros algebraico y verbal

Al analizar enunciados de tareas de conversión de intervalos, únicamente disponemos de la escritura de cada intervalo en el registro de salida propuesta por el LT. Reflejaremos los resultados del análisis de la escritura del intervalo dada en cada registro de salida en términos de su efecto en la congruencia de la conversión solicitada. En los registros numérico y gráfico hay una única escritura válida, salvo cambio en el modo de escribir alguna unidad significante (por ejemplo, escribir un corchete invertido en lugar de un paréntesis en el registro numérico), variabilidad que no se ha detectado en la muestra de LT analizada. Así, analizaremos estos posibles efectos en los registros algebraico y verbal.

Para el registro algebraico, una escritura que hace uso de los signos "<" o "≤" permite conversiones *con mayor congruencia*, al coincidir el orden de lectura de la expresión con el de escritura en el registro numérico y de ubicación en la recta real. Por el contrario, ">" o "≥" dan lugar a conversiones *con menor congruencia.* En el registro verbal, las expresiones que permiten conversiones de semirrectas con mayor congruencia hacen uso de palabras como "menores que" o "menores o iguales que" y, en los intervalos acotados, aluden a los extremos en orden creciente, al coincidir con el orden de escritura en el registro numérico y de ubicación en la recta real. Si se usa "mayores que" o "mayores o iguales que" en semirrectas, o se alude a los extremos en un orden distinto al de la recta real en intervalos acotados, la expresión dará lugar a conversiones con menor congruencia. La Tabla 3 recoge los datos de conversiones con salida en los registros algebraico y verbal, según el tipo de intervalo y el posible efecto de la escritura seleccionada en la congruencia de la conversión. Se recogen en "Otras escrituras" las formas verbales "Todos los números reales" y "Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos".

Tabla 3. Frecuencia de escritura en los registros algebraico y verbal según su efecto en la congruencia

Tipo de intervalo	Registro algebraico		Registro verbal		
	Mayor congruencia	*Menor congruencia*	*Mayor congruencia*	*Menor congruencia*	*Otras escrituras*
Intervalo acotado	204	2	80	9	9
Intervalo no acotado por izda.	64	2	60	0	0
Intervalo no acotado por dcha.	26	78	12	47	0
Todos los números reales	0	0	0	0	4
Total	294	82	152	56	13

La Tabla 3 pone de manifiesto que, para los registros de salida algebraico y verbal, los LT tienden a proporcionar escrituras que permitan conversiones con mayor congruencia: un 78,19% en el registro algebraico y un 68,78% en el registro verbal. El número de oportunidades de aprendizaje provistas para conversiones con menor congruencia es bajo, lo cual es una limitación de los LT al ser las conversiones con mayor dificultad (Duval, 1999) y las que favorecen la generación de conversiones basadas en un significado semántico y no solo sintáctico (Goldin, 2002; Pecharromán et al., 2019).

Si atendemos al desglose por tipo de intervalo, se detecta otro comportamiento global relevante. En los registros algebraico y verbal, las escrituras que dan lugar a conversiones con más congruencia se concentran en intervalos acotados (como los apartados a, d y f en la Figura 2) y en intervalos no acotados por la izquierda (apartado b en la Figura 2), mientras que las de conversiones con menor congruencia se concentran en intervalos no acotados por la derecha (apartados c y e en la Figura 2). Es decir, cada tipo de intervalo tiende a escribirse siempre de un mismo modo, proveyendo los LT de oportunidades de aprendizaje suficientes para estos modos, pero siendo muy anecdótica la presencia de otras escrituras que facilitarían un aprendizaje más completo de los registros algebraico y verbal para leer y escribir intervalos. En general, los LT tienden a escribir las semirrectas utilizando lo que en Pecharromán et al. (2018) llamábamos orden lingüístico, presentando en primer lugar el elemento genérico del intervalo ("x" o "los números"). Los LT parecen preferir escrituras como $x>0$ (como en el apartado c de la Figura 2) en lugar de $0<x$. Ese comportamiento se amplía en el registro verbal a los intervalos acotados, usando en casi todos los casos expresiones del tipo "Números menores (mayores) que…" o "Números comprendidos entre…". Es cierto que en el registro verbal estas escrituras empezando por los constituyentes del intervalo (núcleo del sintagma) son más naturales, y parece aplicarse ese criterio a la escritura algebraica, quizá teniendo presente la amplia congruencia entre los registros algebraico y verbal al traducir expresiones entre ellos (Pecharromán et al., 2018).

CONCLUSIONES Y PROPUESTA DE LÍNEAS FUTURAS

Los resultados muestran una desequilibrada presencia de oportunidades de aprendizaje de las diversas conversiones y de la lectura y escritura de intervalos en los diferentes registros. Este desequilibrio también se ha detectado en otros estudios, como Chang et al. (2016) para el caso de funciones. Como indican Chang et al. (2016), sería deseable una presencia similar de todas las conversiones, al ser todas importantes para desarrollar la comprensión del concepto (Duval, 2006). Añadimos que debería ser mayor el número de oportunidades de aprendizaje en las conversiones que pueden provocar más dificultades, como aquellas con menor congruencia (Duval, 1999) o aquellas con llegada en los registros algebraico y verbal (Pecharromán et al., 2019). Sin embargo, en ambos casos el comportamiento global que hemos detectado en la muestra analizada ha sido el contrario. Además, en varios LT se asocia indebidamente el nombre de intervalo solo al registro numérico. Por todo ello, además de desarrollar más estudios sobre el aprendizaje de los intervalos, es necesario transferir estos resultados a los editores de los LT para que los tengan presentes en la generación de contenido, así como conocer los criterios que han seguido al configurar el tratamiento del concepto en sus libros.

Una continuación natural de este estudio es completar la muestra de LT, incluso con otras editoriales, para poder realizar un análisis comparativo entre editoriales donde, además de analizar las tareas de

conversión, se analice la presentación del concepto y el modo en que tratan el aprendizaje de los diferentes registros y conversiones. En este sentido, también se propone como línea futura analizar en los LT las aplicaciones de los intervalos en contenidos posteriores de álgebra o funciones, puesto que la selección de las oportunidades de aprendizaje provistas de los registros y conversiones puede relacionarse con su necesidad de aplicación posterior.

Referencias

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Chang, B. L., Cromley, J. G. y Tran, N. (2016). Coordinating multiple representations in a Reform Calculus Textbook. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*, 1475-1497.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres, UK: Routledge.

Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I. y Oliveira, M. J. (2008). *Matemáticas 4. Opción A*. Madrid: Anaya.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education, 45*, 633-646.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Montoro, V., Cifuentes, M., Salva, N. y Bianchi, M. J. (2017). Estudiantes pensando en la recta numérica. *Infancia y Aprendizaje, 40*(2), 302-342.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Tesis doctoral no publicada. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Pecharromán, C., Arce, M. y Conejo, L. (2019). Estrategias y errores de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(3), 169-187.

Pecharromán, C., Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2018). Metodología teórica para analizar la congruencia entre representaciones de objetos matemáticos: el caso de los intervalos no acotados de la recta real. *Educación Matemática, 30*(3), 184-210.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En J. A. Beltrán, V. Bermejo, L. F. Pérez, M. D. Prieto, D. Vence y R. González (Eds.), *Intervención psicopedagógica y currículum escolar* (pp. 153-182). Madrid: Pirámide.

Scaglia, S. y Coriat, M. (2003). Dos conflictos al representar números reales en la recta. *La Gaceta de la RSME*, *6*(1), 131-168.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 594-603). Gijón: SEIEM.

LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS. PERFILES DE PROFESORES EN FORMACIÓN SEGÚN SUS NIVELES DE VAN HIELE

The proof in Mathematics. Profiles of prospective teachers attending to their van Hiele levels

Arnal-Bailera, A.[a] y Manero, V.[b]

[a]Facultad de Educación (Universidad de Zaragoza), [b]Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación (Universidad de Zaragoza)

Resumen

En el presente trabajo se abordan los resultados de la administración de un cuestionario para conocer el nivel de van Hiele de los alumnos del Máster de Secundaria en cuanto a la demostración en Geometría. Observamos la presencia de tres perfiles de alumnos cuyas características nos permiten prever ciertas diferencias a la hora de llevar a cabo la enseñanza de la demostración en secundaria. Destaca la presencia de un perfil con un nivel más bajo que el que se supone a algunos alumnos de Bachillerato. Los otros dos perfiles muestran diferencias en cuanto a la presencia de algunas estrategias avanzadas de demostración.

Palabras clave: *demostración, niveles de van Hiele, profesorado en formación*

Abstract

In this work, we show the results of a questionnaire answered by students of a Secondary school Masters degree to know their van Hiele level regarding the proof in Geometry. We observe three different profiles whose characteristics allow us to foresee certain differences when carrying out proof teaching in secondary school. The presence of a profile with a lower level than that assumed for some high school students stands out. The other two profiles show differences regarding the presence of some advanced demonstration strategies.

Keywords: *proof, van Hiele levels, pre-service teachers*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La enseñanza de la demostración ha sido una preocupación en el contexto de la formación del profesorado de Secundaria tanto desde el punto vista de las tareas a realizar (Martin, McCrone, Bower y Dyndial, 2005) como desde el del conocimiento pedagógico mostrado por los futuros profesores (Dos Santos y Ortega, 2013; Arnal y Oller, 2017). Así mismo, numerosos estudios se han preocupado por el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes para profesor de matemáticas siguiendo el modelo de van Hiele (Lee, 2015; Mayberry, 1983; Ndlovu, 2014; Pandiscio y Knight, 2010; Wang y Kinzel, 2014).

Llevamos a cabo un estudio con 25 alumnos del Máster de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Zaragoza. Administramos un cuestionario de preguntas abiertas para evaluar su nivel de van Hiele de razonamiento geométrico. Por razones de espacio nos limitaremos a analizar en este artículo las cuestiones relativas a los niveles de van Hiele respecto de la demostración, aún sabiendo que acometer la enseñanza de la demostración requiere además conocer las características del alumnado, del currículo, etc... La pregunta de investigación que querríamos responder sería ¿Tiene el Profesorado de Secundaria en Formación el nivel de van Hiele necesario para acometer la enseñanza de la demostración que requiere el currículo de secundaria? Para acercarnos a la respuesta de la misma, planteamos dos objetivos de investigación:

Arnal-Bailera, A. y Manero, V. (2021). La demostración en matemáticas. Perfiles de profesores en formación según sus niveles de Van Hiele. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 149 – 156). Valencia: SEIEM.

- Evaluar los niveles de razonamiento geométrico, respecto del proceso de demostración, del Profesorado de Secundaria en Formación bajo el modelo de van Hiele.
- Identificar y diferenciar perfiles del Profesorado de Secundaria en Formación respecto al razonamiento geométrico, en particular para el proceso de demostración.

MARCO TEÓRICO

En los años 50, van Hiele (1957) y van Hiele-Geldof (1957) desarrollaron un modelo que describe el desarrollo del pensamiento geométrico. Este modelo establece que existen cinco niveles de razonamiento geométrico (Van Hiele, 1957, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990). Además estos niveles tienen una naturaleza secuencial y jerárquica, por lo que a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría se pasa por todos ellos en un orden determinado. En este trabajo nos centramos en los niveles intermedios: Nivel 2 (Análisis). Nivel 3 (Deducción informal). Nivel 4 (Deducción formal).

En el contexto de este trabajo, centrado en la demostración, el nivel 2 se caracteriza por pruebas limitadas a verificar que una cierta propiedad se satisface en uno o pocos casos particulares. En el nivel 3, las propiedades se pueden verificar en algunos ejemplos aunque se buscan explicaciones informales basadas en propiedades matemáticas. Por último, en el nivel 4 se realizan pruebas matemáticas de tipo formal. (Jaime y Gutiérrez, 1994).

La elaboración de cuestionarios que midan correctamente los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele ha sido un tópico muy trabajado durante muchos años. Usiskin (1982) ya planteó un test de respuesta múltiple compuesto por 25 preguntas. Mayberry (1983) evaluó la naturaleza jerárquica de estos niveles. Con este objetivo, diseñó un test con 128 cuestiones que llevó a cabo con 19 alumnos. Burger y Shaughnessy (1986) diseñan un cuestionario tipo entrevista que consta de un total de 8 actividades. Además describen indicadores de nivel sobre los que estos autores se apoyan para situar las respuestas de cada alumno en un nivel u otro.

La asignación de niveles de van Hiele plantea algunas dificultades, entre ellas, donde situar a alumnos que dan muestras de estar entre dos niveles consecutivos. Para solventar esta dificultad Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) proponen una forma alternativa de evaluar los niveles de van Hiele describiendo un modo de obtener también el grado de adquisición que tienen de ese nivel. En dicho trabajo los autores describen ocho tipos de respuestas diferentes que indican distintos grados de adquisición dentro de un mismo nivel. Así, al evaluar una respuesta la podemos situar dentro de uno de estos tipos para después asignarle un grado de adquisición numérico según la Tabla 1:

Tabla 1. Grado de adquisición

Tipo	0	1	2	3	4	5	6	7
Valor numérico	0	0	20	25	50	75	80	100

Por otra parte, autores como De Villiers, (1987) plantean el estudio de niveles de van Hiele a través de su análisis en diversos procesos o componentes. Jaime y Gutiérrez, (1994) describen los procesos clave que observan para los niveles de van Hiele: Identificación (establecer a qué familia pertenece un cierto objeto geométrico); definición (uso y formulación de definiciones); clasificación (poner distintos objetos geométricos en diversas familias) y demostración (pruebas de afirmaciones). Gutiérrez y Jaime (1995) concretan un test con ocho ítems que permite valorar los primeros 4 niveles de van Hiele de cada alumno así como su grado de adquisición de cada nivel. Además, describen para cada una de las cuestiones, cuáles son los procesos claves que se están evaluando. Notar que este test tiene una fiabilidad superior a los cuestionarios de respuesta múltiple y además permite ser administrado a muestras mayores que los cuestionarios de tipo entrevista. Por todo ello, en el presente trabajo utilizaremos como herramienta dicho test.

Pandiscio y Knight (2010) analizaron los niveles de van Hiele de estudiantes para profesor de Matemáticas en secundaria, obteniendo que su nivel no era el deseado ya que no alcanzaban el nivel

4. Los investigadores consideraban como deseable tener adquirido este nivel para poder promover la adquisición del nivel 3 y el progreso al nivel 4 en alumnos de secundaria.

A lo largo del presente trabajo nos vamos a centrar en medir los niveles de van Hiele respecto de la demostración, entendida esta como demostración analítica o teórica en el sentido descrito por Gutiérrez (2005). En el mismo artículo se presentan tipos de demostración menos rigurosas como ejemplo genérico o experimento mental que en este trabajo consideraremos tipos de justificación. La presencia de la demostración en la enseñanza ha sido puesta en valor en numerosas ocasiones (Schoenfeld, 1994; Mariotti, 2006), tanto para mostrar la necesidad de sustentar el conocimiento matemático como para la comprensión de los conceptos involucrados.

La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) establece el aprendizaje de la demostración en Bachillerato como obligatorio y transversal a todos los contenidos al situarlo en el bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas). Las referencias explícitas a la demostración solo aparecen en bachillerato Matemáticas I y II englobando aspectos como la iniciación a la demostración mediante varios métodos (reducción al absurdo, inducción…) y razonamientos (deductivo/inductivo) así como diversos lenguajes propios de la demostración (gráfico, algebraico…). En las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales o en las Matemáticas de la ESO las referencias más próximas a la demostración son acerca de la justificación: "Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes".

MÉTODO Y MUESTRA

Un grupo de 25 alumnos de la especialidad de Matemáticas del Máster de formación del Profesorado de la Universidad de Zaragoza respondieron el cuestionario durante 2 horas.

El cuestionario que utilizamos está centrado en las propiedades de los polígonos y consta de ocho ítems de respuesta abierta, algunos con varios subapartados. En particular, en este estudio nos centramos en las cuestiones que evalúan los niveles de van Hiele asociados al proceso clave de demostración, ítems 5, 6, 7 y 8. Por razones de espacio no presentamos el cuestionario completo, éste se puede consultar, entre otros trabajos, en Gutiérrez y Jaime (1995). Cuestionarios similares, centrados en otros objetos matemáticos se pueden encontrar en la literatura, ver por ejemplo el de Gualdrón y Gutiérrez (2007) focalizado en la semejanza.

Nuestro estudio tiene carácter exploratorio y una finalidad esencialmente descriptiva (Edmonds y Kennedy, 2017). Fundamentalmente, las técnicas utilizadas en el análisis cuantitativo son de tipo estadístico y en el cualitativo, el análisis de contenido (Rico, Fernández-Cano, 2013).

Para decidir el grado de adquisición de cada nivel de razonamiento en cada alumno, seguimos la metodología elaborada por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) basada en que varios expertos en Didáctica de la Matemática consideran los rasgos del razonamiento matemático mostrado en las tareas del cuestionario por encima de su corrección matemática. Para cada respuesta de un estudiante a un cierto ítem, se obtiene una 3-tupla que indica el porcentaje de adquisición de los niveles de van Hiele que dicho ítem mide. Finalmente, para el cálculo de los grados de adquisición de cada estudiante, realizamos la media de los valores obtenidos en cada ítem.

El análisis cuantitativo incluye la elaboración de conglomerados mediante el uso de SPSS. Dichos conglomerados se obtienen en base a las 3 variables grado de adquisición (nivel 2, nivel 3 y nivel 4). Para la construcción de los conglomerados, aplicamos el algoritmo de K-medias con la distancia euclídea al cuadrado. El número de conglomerados se determina mediante el criterio de Hartigan.

Para caracterizar cada uno de los conglomerados anteriores realizamos un análisis cualitativo consistente en un análisis de contenido. Se toman como unidades las frases aportadas por los alumnos en los ítems referidos. Del análisis realizado en cada ítem emergen varias categorías, entre ellas, uso de las representaciones gráficas o extensión de la respuesta.

RESULTADOS

Análisis cuantitativo

Tras evaluar las respuestas al test obtenemos que el indicador Alfa de Cronbach de consistencia interna es superior a 0,7 (0,836) por lo que consideramos que el test es fiable.

Construcción de conglomerados

La aplicación del criterio de Hartigan nos lleva a utilizar 3 conglomerados. Mostramos en la Tabla 2 los grados de adquisición de cada nivel de van Hiele (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991).

Tabla 2. Puntuación media y grado de adquisición de cada nivel para cada conglomerado.

	Conglomerado 1		Conglomerado 2		Conglomerado 3	
	Puntuación media	*Grado de adquisición*	*Puntuación media*	*Grado de adquisición*	*Puntuación media*	*Grado de adquisición*
Nivel 2	100	Completo	100	Completo	81,46	Alto
Nivel 3	100	Completo	85,68	Completo	32,97	Bajo
Nivel 4	74,17	Alto	40,80	Medio	2,50	Ninguno

El conglomerado 1 reúne al 24% de los individuos (6), los cuales tienen adquiridos los cuatro niveles de van Hiele, si bien el cuarto nivel en un grado de adquisición alto. El conglomerado 2 engloba al 44% de los individuos (11) que muestran una adquisición completa de los niveles 2 y 3 y un grado medio de adquisición del nivel 4. El tercer conglomerado recoge al 32% de los individuos (8), estos tienen un grado de adquisición alto en el nivel 2, bajo en el nivel 3 y nulo en el nivel 4.

Diferencias entre conglomerados

El test Shapiro-Wilk mostró que ninguna de las variables "grado de adquisición de nivel" sigue una distribución normal. Aplicamos el análisis no paramétrico de Kruskal-Wallis de igualdad de medias concluyendo que para los tres niveles existe al menos un conglomerado con diferencias significativas en cuanto al grado de adquisición. Para distinguir qué medias son estadísticamente diferentes, aplicamos el test de Mann-Whitney para el estudio por parejas. A la luz de los resultados del test de Mann-Whitney, podemos concluir que existen diferencias significativas de adquisición de los niveles para todos los conglomerados y niveles salvo para el caso del nivel 2 en los conglomerados 1 y 2, ya que ambos presentan un grado de adquisición completo en dicho nivel.

Análisis cualitativo

Para distinguir de forma cualitativa los conglomerados más próximos y debido a la falta de espacio, se estudiarán las respuestas dadas por los alumnos de los conglomerados 1 y 2 al ítem 8 y las dadas por los alumnos de los conglomerados 2 y 3 al ítem 5. Elegimos estos ítems en particular por ser algunos de los que permiten asignar los niveles de van Hiele en los que estos conglomerados muestran mayores diferencias.

Al realizar el análisis de contenido en las producciones de los alumnos observamos la aparición de ciertas categorías específicas para cada ítem. En el ítem 8: extensión de la respuesta (número de palabras empleadas), uso de las representaciones gráficas (razonamientos basados en los dibujos frente a razonamiento basado en la información dada), sensibilidad a la necesidad de doble implicación en definiciones equivalentes (demostración o no por doble implicación). En el ítem 5: fundamentación de los argumentos (obtención de conclusiones parciales a partir de propiedades matemáticas o de propiedades numéricas observadas), uso de las representaciones gráficas, formula obtenida (multiplicativa o aditiva),

Diferencias cualitativas entre los conglomerados 1 y 2

El ítem 8 del cuestionario plantea demostrar la equivalencia entre las definiciones de paralelogramo como “cuadrilátero con dos pares de lados paralelos” (a la que llama definición usual) y

"cuadrilátero en el que la suma de dos ángulos consecutivos cualesquiera es 180°". En el caso de no aceptarse la equivalencia entre definiciones, se pide dibujar un contraejemplo.

Tabla 3. Diferencias cualitativas entre los conglomerados 1 y 2.

Categoría (indicador)	Conglomerado 1	Conglomerado 2
Extensión de la respuesta (número medio de palabras)	66,2	38,9
Uso de representaciones gráficas (% alumnos que basa su razonamiento en la percepción de los dibujos vs información dada)	Percepción: 50% Información: 50%	Percepción: 82% Información: 18%
Sensibilidad a la doble implicación	Si: 50% No: 50%	Si: 9% No: 91%

Utilizamos las respuestas de los alumnos a este ítem de los conglomerados 1 y 2 para describir algunas de sus prácticas en la demostración. Los alumnos del conglomerado 1 tienen un grado de adquisición alto del nivel 4 mientras los del conglomerado 2 tienen un grado de adquisición medio.

Lo primero que se observa (ver Tabla 3) es una diferencia en la extensión de las demostraciones, siendo mayores las del conglomerado 1. Esta diferencia se puede explicar observando que las demostraciones del conglomerado 2 suelen hacer una referencia indirecta a los resultados matemáticos que se usan encontrándose ejemplos como "Sí, por las propiedades de los ángulos" (Alumno 17). Sin embargo, entre los alumnos del conglomerado 1 nos encontramos con alusiones más explícitas a resultados matemáticos "…ya que s y t son secantes a las paralelas m y n."

Respecto de la importancia de las representaciones gráficas, algunos alumnos del conglomerado 2 obtienen conclusiones fundamentadas total o parcialmente en una representación gráfica "Luego a+b=180º ya que prolongando un lado nos ocurre lo mismo que anteriormente…" (Alumno 19) o "si tenemos 2 lados paralelos, lo podemos representar de la siguiente manera." (Alumno 09). La mayoría de los alumnos del conglomerado 2 asumen propiedades basadas en la percepción del dibujo, como que los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales. Sin embargo, la mitad de los alumnos del conglomerado 1 no lo asumen y lo prueban a partir del paralelismo de los lados.

Si bien los alumnos de ambos conglomerados aceptan que puede haber definiciones equivalentes del paralelogramo, los alumnos del conglomerado 2 no son conscientes de la necesidad de hacer una doble implicación para demostrar dicha equivalencia y realizan una sola de las implicaciones, habitualmente la que tiene como hipótesis la definición usual.

Diferencias cualitativas entre los conglomerados 2 y 3

El ítem 5 se compone de dos subapartados (5.1 y 5.2). El subapartado 5.1 plantea deducir la fórmula del número de diagonales de un polígono conocido el número de lados sin ayuda y demostrarla posteriormente. El subapartado 5.2 del cuestionario plantea deducir la fórmula del número de diagonales de un polígono conocido el número de lados a través del estudio de dos casos particulares (n=5 y n=6) y su generalización posterior; en este caso pide justificar la fórmula hallada, no pide demostrarla explícitamente.

Tabla 4. Diferencias cualitativas entre los conglomerados 2 y 3.

Categoría (indicador)	Conglomerado 2	Conglomerado 3
Fundamentación de los argumentos (% de estudiantes que obtienen conclusiones parciales a partir de propiedades matemáticas vs. propiedades numéricas)	Matemáticas: 91% Numéricas: 9%	Matemáticas: 0% Numéricas: 100%
Usos de las representaciones gráficas (% de alumnos que se basan en dibujos para plantear ejemplos exploratorios o casos particulares para generar una sucesión numérica o para razonar sobre la fórmula)	Ej. exploratorios: 46% Razonamiento sobre la fórmula: 27%	Casos particulares para generar sucesión: 91% Razonamiento sobre la fórmula: 9%
Número medio de dibujos realizados	4.2	6

Formula obtenida (% de estudiantes que razona la fórmula de modo aditivo vs. multiplicativo)	Aditiva: 45% Multiplicativa: 45%	Aditiva: 25% Multiplicativa: 12%

Utilizamos las respuestas de los alumnos a este ítem de los conglomerados 2 y 3 para describir sus prácticas a la hora de justificar o demostrarla fórmula obtenida (ver Figura 2). Los alumnos que forman el conglomerado 2, tienen un grado de adquisición completo del nivel 3 mientras los del conglomerado 3 tienen un grado de desarrollo bajo.

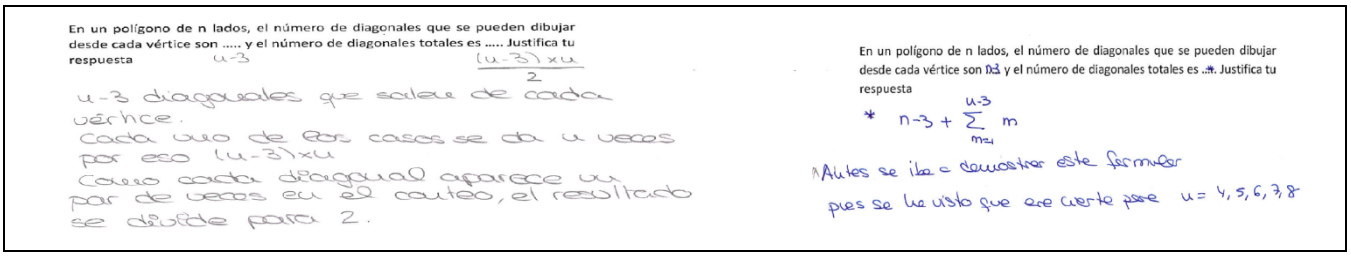


Figura 2. Ejemplos de demostración de alumnos del conglomerado 2 (izquierda) y 3 (derecha)

Revisando el subapartado 5.2 observamos una gran diferencia en la fundamentación de los argumentos expuestos por los alumnos de los conglomerados 2 y 3 (ver Tabla 4). Los alumnos del conglomerado 2 realizan explicaciones basadas en propiedades matemáticas de los polígonos (por ejemplo, el número de diagonales que parten de cada vértice) mientras que los alumnos del conglomerado 3 lo hacen basándose en las regularidades numéricas observadas en los casos previos sin ser capaces de dar una fundamentación matemática a los mismos más allá de ligar las letras que aparecen en la fórmula con el número de vértices o lados (ver Figura 2 - derecha).

Respecto de los dibujos empleados por los alumnos para tratar de demostrar o justificar la fórmula, encontramos un número significativamente mayor (al 90%) de representaciones gráficas en los alumnos del conglomerado 3 (una media de 6 por estudiante) que en el conglomerado 2 (una media de 4,2 por estudiante). Esto estaría en relación con la mayor cercanía de los estudiantes del conglomerado 3 con las prácticas propias del nivel 2 de van Hiele en el que se sustentan los razonamientos de este tipo exclusivamente en el estudio de casos particulares.

Respecto del uso las representaciones gráficas hechas por los estudiantes, se aprecia un uso fundamentalmente exploratorio en los miembros del conglomerado 2 que realizan dibujos como medio de situarse frente al enunciado a demostrar (46%). En el conglomerado 3, los dibujos son utilizados para obtener el número de diagonales y construir con estos números una sucesión numérica de la que se quiere encontrar el término general.

A la hora de construir la fórmula sin ayuda, encontramos dos posibles soluciones correctas. Una fórmula basada en razonamientos de tipo aditivo (ver Figura 2 - derecha) y otra basada en razonamientos de tipo multiplicativo (ver Figura 2 - izquierda). En el conglomerado 2 casi todos los estudiantes obtienen una fórmula correcta, habiendo un equilibrio entre los que dan la fórmula de modo multiplicativo y los que la dan en forma aditiva. Por su parte, en el conglomerado 3 más de la mitad de los estudiantes no obtienen la fórmula correcta, llegando solo uno a su forma multiplicativa.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Respecto del primer objetivo, "evaluar los niveles de razonamiento geométrico, respecto del proceso de demostración, del Profesorado de Secundaria en Formación bajo el modelo de van Hiele" la utilización del cuestionario (Gutiérrez y Jaime, 1995) se ha mostrado adecuada dando unos valores de consistencia adecuados.

Respecto del segundo objetivo, "identificar y diferenciar perfiles del Profesorado de Secundaria en Formación respecto al razonamiento geométrico, en particular para el proceso de demostración"

hemos podido construir tres conglomerados correspondientes con tres perfiles estadísticamente diferentes con características cualitativas propias. La distinción entre los conglomerados formados por estudiantes con diferentes desarrollos del nivel 4, muestra la necesidad de profundizar más allá de los niveles de van Hiele a la hora de caracterizar los grupos de estudiantes para profesor cuando realizan demostraciones (Wang y Kinzel, 2014). El conglomerado 1 está formado por alumnos que dan respuestas de mayor extensión que el resto utilizando de un modo formal resultados matemáticos anteriores en sus procesos e incluyendo ideas como la equivalencia entre definiciones junto con un uso de las representaciones gráficas solamente como medio para la representación del problema. El conglomerado 2 está formado por alumnos que apoyan sus demostraciones en explicaciones de propiedades matemáticas, si bien suelen hacer referencias indirectas o informales a las mismas junto con un uso de las representaciones gráficas de las que obtienen datos basándose en su percepción. El conglomerado 3 está formado por alumnos que tienen dificultades para llevar a cabo las demostraciones propuestas y que, si acaso, logran avanzar apoyando sus razonamientos en dibujos y regularidades numéricas por encima de propiedades o resultados matemáticos.

La literatura dice que los alumnos de secundaria y bachillerato estarían situados mayoritariamente entre los niveles 2 y 3 (Gutiérrez y Jaime, 1995), encontrándose algunos alumnos en bachillerato incluso con un grado de adquisición intermedio-alto del nivel 3 y que debería promoverse su progresión hacia el nivel 4 (Pandiscio y Knight, 2010). Esto nos hace distinguir entre aquellos alumnos del máster que tienen adquirido de forma relevante el tercer nivel (68%) y aquellos que no (32%). Por otra parte, el Currículo de Bachillerato enfoca el trabajo con la demostración desde un punto de vista formal. Entre los contenidos figuran: "Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc. Razonamiento deductivo e inductivo." Estos contenidos se podrían situar más en el nivel 4 que en el nivel 3 ya que corresponden con métodos formales de demostración. A la vista de los datos de la Tabla 2 y del currículo, los alumnos presentes en el conglomerado 1 (24%) van a tener un nivel de razonamiento geométrico en los aspectos relacionados con la demostración suficiente para enseñar a sus futuros alumnos dado el currículo actual; los del conglomerado 2 (44%), pueden encontrar algunas dificultades sobre todo en Bachillerato y los del conglomerado 3 (32%) tienen un nivel inferior al de sus futuros alumnos y al requerido para poner en práctica el currículo y hacer progresar a sus alumnos desde el nivel 2 al 3 o incluso al 4. Esto es consistente con los resultados de Pandiscio y Knight (2010) que mostraban que, en media, los estudiantes para profesor de secundaria estaban estadísticamente por debajo del nivel 4.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Grupo de Investigación en Educación Matemática (S60_20R) del Gob. de Aragón y el P. de Investigación XXXXXXX del MINECO

Referencias

Arnal-Bailera, A., y Oller-Marcén, A. (2017). Formación del profesorado y demostración matemática. Estudio exploratorio e implicaciones. *Bolema, Rio Claro (SP)*, *31*(57), 135-157.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development on geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31-48.

De Villiers, M. D. (1987). Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hiele theory: Some critical comments. (Research Unit for Mathematics Education, Univ. Of Stellenbosch: Stellenbosch, R. Of South Africa).

Dos Santos, C., y Ortega, T. (2013). Perfiles del Profesorado sobre la Enseñanza y Uso de la Demostración. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4,* 27-45.

Edmonds, W.A. y Kennedy, T.D. (2017). *An applied reference guide to research designs: Qualitative, quantitative and mixed methods*. London: SAGE.

Gualdrón, E. y Gutiérrez, J. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele para la semejanza. En P. Flores y P. Bolea (Eds.) *Investigación en Educación matemática XI*, (pp. 369-380). La Laguna: SEIEM.

Gutiérrez, A. (2005): Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* 27-44.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the students reasoning in geometry. *Proceedings of the 19th PME conference*, (vol. 3, pp. 11-18). Recife, Brasil: PME.

Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 237-251.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla, España: Alfar.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceedings of the 18th PME conference*, (vol. 3, pp. 41-48). Lisboa, Portugal: PME.

Lee, M. Y. (2015). The Relationship between Pre-service Teachers' Geometric Reasoning and their van Hiele Levels in a Geometer's Sketchpad Environment. *Korean Mathematical Education Journal Series D: Mathematics Education Research*, *19*(4), 229–245.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense.

Martin, T. S., McCrone, S. S., Bower, M. L., y Dyndial, J. (2005). The interplay of teacher and student action in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 95-124.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *JournalforResearch in MathematicsEducation*, *14*(1), 58-69.

Ndlovu, M. (2014). Pre-service teachers' understanding of geometrical definitions and class inclusion: an analysis using the Van Hiele model. *INTED2014 Proceedings*, (pp. 6642-6652). Valencia, España: INTED.

Pandiscio, E. A., y Knight, K. C. (2010). An investigation into the van Hiele levels of understanding geometry of preservice mathematics teachers. Journal of Research in Education, 20(1), 45-53.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en Educación matemática.* (pp. 1-22). Granada.

Schoenfeld, A. (1994) What do we know about curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (ERIC Document Reproduction Service Nº ED 220 288). Columbus, USA.: ERIC.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School. Tesis doctoral no publicada. Utrech, Holanda: Universidad de Utrech. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la compresión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral no publicada. Utrech, Holanda: Universidad de Utrech. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Nueva York, USA: Academic Press.

Wang, S., y Kinzel, M. (2014) How do they know it is a parallelogram? Analysing geometric discourse at van Hiele Level 3, *Research in Mathematics Education, 16*(3), 288-305.

ANÁLISIS DE VÍDEOS EDUCATIVOS DE MATEMÁTICAS EN LÍNEA POR ESTUDIANTES DE MÁSTER DE SECUNDARIA

Analysis of online mathematical educational videos by prospective teachers

Beltrán-Pellicer, P.[a], Burgos, M.[b], Giacomone, B.[c]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Universidad de Granada, [c]Università di San Marino

Resumen

Este trabajo se enmarca en una línea de investigación más amplia sobre vídeos educativos de matemáticas en línea. Se trata de un recurso muy utilizado, tanto por el alumnado que acude a ellos para resolver dudas como por parte del profesorado, y que merece la atención del área. Aquí presentamos una experiencia con 24 estudiantes de máster de secundaria, futuros profesores. A los participantes se les propuso analizar seis vídeos sobre repartos directamente proporcionales, previamente seleccionados y evaluados por los investigadores. Como resultado, se observa que, si bien las valoraciones globales otorgadas por los participantes son muy similares a las desarrolladas por los autores (salvo para un vídeo) a través de los componentes y e indicadores de idoneidad epistémica en Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos (2018), ciertos errores e imprecisiones son pasados por alto. Se concluye la necesidad de llevar a cabo acciones formativas desde la didáctica específica, orientadas al desarrollo de competencias y conocimientos especializados.

Palabras clave: *didáctica de la matemática, formación de profesores, vídeos educativos, proporcionalidad, idoneidad didáctica*

Abstract

This work is part of a broader line of research on educational online math videos. It is a widely used resource, both by students who come to them to solve questions and by teachers, and thus deserves the attention of the area. On this occasion, we present an experience with high school master students, prospective teachers. Participants were asked to analyse six videos on directly proportional shares, previously selected and evaluated by the researchers. As a result, it is observed that the global ratings given by the participants are very similar to those of the researchers (except for one video) but certain errors and inaccuracies are overlooked. It concludes the need to carry out training actions from specific didactics, aimed at developing specialized knowledge and competence.

Keywords: *didactics of mathematics, teacher education, educational videos, proportionality, didactical suitability*

INTRODUCCIÓN

Los vídeos educativos en línea constituyen un fenómeno interesante para la comunidad de investigadores en didáctica de la matemática. Por un lado, es un recurso que utiliza el alumnado para resolver dudas (Ramírez, 2010) y, por otro lado, son un elemento clave en el desarrollo de ciertas propuestas pedagógicas, como la clase invertida o *flipped learning* (Davies, Dean y Ball, 2013). Dejando aparte las consideraciones metodológicas de este tipo de propuestas, sobre las que cabría discutir e investigar (Arce, Conejo y Muñoz, 2019), en esta comunicación presentamos la continuación de nuestra línea de trabajo sobre la idoneidad epistémica de los vídeos educativos de matemáticas, preguntándonos cómo los perciben los profesores de secundaria en formación (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos, 2018; Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). Como veremos, es algo que requiere de la atención de la comunidad de investigadores, pues los vídeos disponibles en línea alcanzan diversos grados de idoneidad didáctica y muchos de ellos contienen errores e imprecisiones, además de ofrecer significados que no puede manejar de forma coherente el alumnado.

Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2021). Análisis de vídeos educativos en línea por estudiantes de máster de secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 157 – 164). Valencia: SEIEM.

Nos interesa, como objetivo de investigación, evaluar qué criterios de idoneidad utilizan implícitamente los futuros profesores y cómo de pertinentes son sus valoraciones contrastándolas con las realizadas a priori por los investigadores.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Idoneidad didáctica

Esta investigación sigue una metodología cualitativa, de carácter interpretativo-valorativo, apoyada por herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). En el EOS se define el constructo *idoneidad didáctica* como el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que permiten calificarlo como adecuado para la adaptación entre los significados personales obtenidos por los alumnos (aprendizaje) y los significados institucionales, ya sean pretendidos o implementados (enseñanza), considerando la influencia del entorno (Godino, 2013). De esta manera, se distinguen seis facetas o componentes, interrelacionados entre sí (Godino et al., 2007, p. 133): *epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional*. Para cada una de ellas, Godino (2013) propone un sistema de criterios generales para que sean consideradas de calidad. Estos criterios de idoneidad didáctica son "potentes herramientas para organizar la reflexión y evaluación de un proceso de instrucción" (Breda, Pino-Fan y Font, 2017, p. 1893), por lo que resulta conveniente utilizarlos a priori para analizar y valorar los vídeos de la muestra considerada.

Idoneidad epistémica y vídeos educativos en línea de matemáticas

Cuando se trata de evaluar la adecuación de vídeos educativos en línea, sin considerar la propuesta didáctica en la que se podrían enmarcar, cabe preguntarse por la idoneidad epistémica. Esta faceta de la idoneidad se refiere a la "enseñanza de una *buena matemática*" (Breda et al., 2017, p. 1898), por tanto, se considera mayor en la medida que los contenidos pretendidos o implementados representan bien a los contenidos de referencia. Así, para que el proceso de enseñanza observado sea considerado de calidad, se deben tener en cuenta dos criterios fundamentales (Godino, 2013). Por un lado, la presencia de diversos significados del contenido correspondiente y su interconexión. Por otro, el reconocimiento de la diversidad de objetos primarios y procesos implicados para los diversos significados.

Las situaciones-problemas tienen un rol central en el EOS, de modo que los objetos matemáticos participan y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas (acciones realizadas por un sujeto para resolver un problema). Desde esta perspectiva ontosemiótica, la actividad matemática se puede describir y analizar a partir de una tipología explícita de objetos, los cuales interactúan entre sí formando una red de conocimiento. Según su naturaleza y función, estas entidades primarias se clasifican en lenguajes, situaciones-problema, reglas (conceptos-definición, proposiciones y procedimientos) y argumentos (Godino et al., 2007)

En un trabajo anterior, los autores evaluamos la idoneidad epistémica de una muestra de vídeos disponibles en YouTube sobre repartos directamente proporcionales (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos, 2018). Los repartos constituyen un contenido matemático que aparece en un momento muy concreto en el currículo de secundaria en España, 2º de ESO (13-14 años) y que, por tanto, permite plantear preguntas específicas acerca de la idoneidad de los vídeos: ¿es adecuado el lenguaje para el nivel objetivo? ¿cuáles son los significados presentes en el vídeo? ¿se alinean con los pretendidos por un alumno de esa edad? Además, existen diversas investigaciones sobre proporcionalidad y, específicamente, sobre repartos, que facilitan responder a estas preguntas (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2019).

Las conclusiones de dicho estudio se alinean con las de otros autores y se pueden sintetizar en la importancia de que sean los propios docentes los que seleccionen y recomienden los vídeos para su alumnado (Jones y Cuthrell, 2011; Santos, 2018), debido a varios motivos. Entre ellos, que algunos

de los vídeos muestran procedimientos formalmente incorrectos; que no todos los vídeos indican el nivel educativo al que se dirigen; que los significados puestos en juego en el vídeo pueden no estar en consonancia con lo que se está tratando en clase; o que la mayor popularidad de un vídeo no es indicativa de su idoneidad.

La selección crítica de cualquier tipo de recurso o material por parte del profesorado exige acciones para desarrollar la competencia de análisis (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018). En lo que respecta a la selección de vídeos hemos comenzado a plantear acciones formativas, como la mostrada en Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino (2020), donde se describe el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa con futuros maestros centrada en el desarrollo de conocimientos y competencia para el análisis de la idoneidad epistémica de vídeos educativos sobre proporcionalidad. Se trataba de proporcionar a los futuros maestros una herramienta teórica para el análisis de la idoneidad epistémica, teniendo en cuenta la variedad de situaciones-problemas propuestos, la presencia de distintos registros de representación, la claridad y corrección de las definiciones, proposiciones y procedimientos, así como la justificación de los procedimientos y proposiciones con argumentos pertinentes y adaptados al nivel educativo correspondiente. Mientras que el análisis a priori del vídeo hecho por los investigadores teniendo en cuenta estos criterios llevó a los investigadores a valorar la idoneidad epistémica del vídeo en una escala ordinal baja, media, alta, la mayoría de los futuros docentes, tras el proceso formativo aplicado, valoraron el grado de idoneidad del vídeo como alto en casi todos los componentes, sin identificar sus carencias.

MÉTODO

Contexto de la investigación, participantes, recogida y análisis de datos

La experiencia se llevó a cabo con 24 estudiantes del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, del curso 2018/19, a los que se planteó la siguiente actividad, en una sesión de dos horas de duración:

> Valora cómo de adecuados sería cada uno de los siguientes seis vídeos para un alumno de 2º de ESO que busca en YouTube sobre repartos directamente proporcionales. Puedes utilizar el anexo, con el currículo vigente de secundaria. Además, indica posibles errores o imprecisiones (si los hay). Da tu opinión general sobre el vídeo y cualquier otro comentario, así como posibles mejoras que incorporarías.

Los participantes dispusieron de ordenador portátil y auriculares con los que poder ver y escuchar los vídeos. No se les proporcionó información teórica adicional. Cada uno tenía que escribir sus comentarios en un fichero de texto o en una hoja de papel, que se recogieron al finalizar la sesión. En asignaturas anteriores, en el primer cuatrimestre, los estudiantes tuvieron la oportunidad de familiarizarse con la terminología de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992, 1999). Merece la pena mencionar este aspecto, ya que alguno de los participantes utiliza terminología propia de la TAD en sus análisis.

En cuanto al análisis de los datos, una vez recogidos, se analizan los informes elaborados por los 24 futuros profesores. Las categorías de respuestas que aparecen incluidas en la Tabla 1 se establecieron después de su análisis. En la Tabla 2 se comparan las valoraciones medias (de ahí la presencia de decimales en las puntuaciones) sobre el grado de idoneidad en escala de 0 a 10 de los vídeos otorgadas por los investigadores (en Beltrán-Pellicer et al., 2018, siguiendo los indicadores de idoneidad epistémica) y las reflejadas por los estudiantes en sus informes.

Análisis de referencia de los vídeos

Los seis vídeos que se propusieron a los participantes fueron seleccionados de la muestra utilizada en un estudio anterior (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos, 2018). De esta manera, elegimos dos vídeos con idoneidad epistémica alta (10 y 8,5, en una escala sobre 10); dos vídeos con idoneidad media (4,5 y 5) y dos con idoneidad muy baja (0,5 y 1). A continuación, los describimos brevemente:

Vídeo 1 (https://youtu.be/1uAbIb-McLo)

No indica el nivel al que está dirigido. Se presenta una explicación sobre cómo se usa la regla de tres como teoría y luego la aplica en un problema de repartos directamente proporcionales. Utiliza los registros lingüísticos simbólico-numérico, tabular y gráfico. Define reparto directamente proporcional como aquel que cumple que "quien cooperó más tiene más dulces y quién cooperó menos, menos dulces", lo cual es incorrecto. Se comprueba que el total coincide como la suma de las partes, lo que, si bien es necesario, no suficiente. Las proposiciones y los argumentos no están conectadas a través de argumentos y no se identifican los diversos significados de los objetos.

Vídeo 2 (https://youtu.be/OsQYTvwt4Fg)

No indica el nivel al que está dirigido. Se plantea un problema sin contexto empleando como método de resolución el de buscar el valor faltante en la ecuación definida por la proporción $x/a = b/c$, es decir, el autor indica "Usamos la propiedad fundamental de las proporciones: si sumamos los antecedentes y sumamos los consecuentes la proporción se mantiene". Se detectan algunas imprecisiones en el lenguaje utilizado, por ejemplo, se define reparto proporcional como aquel que a "mayor número-mayor será el reparto": "Se pide repartir el número 260 directamente proporcional a 8 y 5, lo que quiere decir que el número 8 va a obtener una mayor cantidad que el número 5". Emplea los registros lingüísticos simbólico-numérico y simbólico-algebraico, además del natural verbal, de forma coherente con el tipo de solución presentada. Solo alguna de las proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado.

Vídeo 3 (https://youtu.be/W_4X-n6gV1U)

Se trata de un vídeo mucho más largo, de unos 17 minutos. Muestra varios tipos de resolución: parte-todo (fracción como operador), parte-todo (con porcentajes), reducción unidad, valor faltante en la ecuación definida por la proporción $x/a = b/c$ y, finalmente, regla de tres, donde el autor comenta que es un método que no es de su agrado. Además del lenguaje natural verbal, emplea los registros simbólico-numérico, simbólico-algebraico y gráfico. También hace uso de animaciones por ordenador. No se encuentran errores en la expresión de las reglas o procedimientos, que aparecen articulados a través de diversos argumentos, dando significado a los símbolos que aparecen. Entre los argumentos se encuentra la comprobación necesaria de que la suma de las partes es igual al total, pero el autor avisa de que no es garantía de que esté bien.

Vídeo 4 (https://youtu.be/lySnkOHSzz0)

Vídeo de unos 8 minutos de duración. El autor señala que se trata de "repartir un número en partes directamente proporcionales", ofreciendo una resolución a partir de una ecuación en términos de la constante de proporcionalidad. Además del lenguaje natural verbal, incluye el simbólico-numérico y el simbólico-algebraico, con algunos esquemas. Comienza describiendo una serie de pasos necesarios para resolver el problema. Así, dice que "es conveniente que los números proporcionales sean enteros, entonces buscamos números que estén en la misma relación que las fracciones". Continúa indicando que "para empezar hay que formar las partes multiplicando los índices por una k. Hace uso de literales descontextualizados, sin indicar qué significan. Como argumento, ofrece la comprobación, necesaria pero no suficiente, de que la suma de partes ha de ser el total. Ninguna de las proposiciones o procedimientos tienen una explicación que sirva de argumento, como no lo tiene el "método práctico" que recomienda seguir. Tampoco se identifican los diversos significados de los objetos.

Vídeo 5 (https://youtu.be/BSIABrV2ZeM)

El autor del vídeo no indica el alumnado al que está dirigido el vídeo. En la resolución emplea el procedimiento parte-todo, y la fracción como operador. Utiliza los registros lingüísticos natural y simbólico-numérico, además de animaciones por ordenador. De manera general, los procedimientos que ofrece son claros y correctos, y están acompañados por argumentos pertinentes. Sin embargo,

observamos un uso incorrecto del término razón y proporción. Además, solamente se identifican ya articulan algunos de los significados de los objetos matemáticos que intervienen.

Vídeo 6 (https://youtu.be/NfIOcg9cwKo)

Se plantea la reducción a la unidad como método de resolución, indicando que se dirige a alumnado de 2º de ESO. Como registros lingüísticos, aparecen el natural, gestual y simbólico-numérico. Entre las definiciones y procedimientos encontramos el error de establecer como única condición para un reparto directamente proporcional "más años, más dinero". No justifica por qué es preciso obtener el total de las partes ni el significado de la constante obtenida. Para justificar la corrección del reparto, el argumento que emplea es que el total debe ser la suma de las partes. Algunas proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado, pero no se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen, como los resultados de las operaciones intermedia

RESULTADOS

Comentarios sobre los vídeos e identificación de errores e imprecisiones

En la Tabla 1 se muestra una síntesis del análisis de los resultados que permite caracterizar las reflexiones de los 24 participantes sobre cada uno de los seis videos propuestos. En la columna 'total como suma de partes' se contabilizan los participantes que identifican en cada vídeo que se da la comprobación del total como suma de partes (ninguno de ellos señala que no es suficiente). Por 'argumentos aditivos' nos referimos a aquellos del tipo 'cuanto más aportas, más recibes'. El '-' significa que el vídeo no contenía errores o argumentos de ese tipo.

Tabla 1. Síntesis de los comentarios de los participantes (n=24).

		Errores e imprecisiones				
	Mecanicista	Confuso	Total, como suma de partes (vídeos 1,4,6)	Aritmético-algebraicos	Otras imprecisiones lingüística	Argumentos aditivos (vídeos 1, 2 y 6)
Vídeo 1	21	0	3	14	0	5
Vídeo 2	10	7	-	0	4	0
Vídeo 3	0	0	-	0	0	-
Vídeo 4	9	14	0	1	0	-
Vídeo 5	5	8	-	0	4	-
Vídeo 6	17	0	7	6	0	4

A continuación, se muestran ejemplos de comentarios que realizaron los participantes.

Comentarios del vídeo 1

Casi todos los participantes se ponen de acuerdo en calificar el vídeo 1 como mecanicista. En esta categoría hemos incluido aquellos comentarios que hacían referencia a la ausencia de explicaciones. Por ejemplo, P2 indica que "no se explica ni contextualiza la tecnología que sostiene el algoritmo, ni se contextualizan las operaciones"; P3 que "se limita a la transmisión de la receta". Es llamativo el comentario de P22, que apela a la ética cuando señala que el vídeo es "demasiado mecanizado, desde el punto de vista docente no es ético". En cuanto a los errores, los participantes identifican los fallos en la notación aritmética debidos al encadenamiento de falsas igualdades. Así, señalan imprecisiones del tipo *12*x*450=5400*x*36* (P2, P11).

En este vídeo, para indicar que se trata de un reparto directamente proporcional, se utiliza un argumento del tipo "el que más aporta es el que más recibe". Se trata de una condición necesaria, pero no suficiente y que fomenta la ilusión de linealidad (De Bock, Verschaffel y Janssens, 1998). P10 señala que "faltaría decir que a doble de aportación se recibe el doble si se quiere ser más preciso". Por otro lado, únicamente tres participantes se hacen eco de que el vídeo 1 comenta que la

suma de las partes tiene que ser igual al total, pero ninguno señala que no sea una comprobación suficiente.

Comentarios sobre vídeo 2

14 participantes indican que el problema matemático no está contextualizado; en este sentido, 7 de ellos señalan que las explicaciones son confusas y, 10 de ellos indican que la resolución es mecanicista. Algunos señalan ciertas imprecisiones del lenguaje, como P9, "en la expresión de cálculos del tipo $x/8=y/5=(x+y)/(8+5)$. Si no se explica la propiedad puede generar confusiones respecto a las propiedades de la suma de fracciones". Otros, como P19, se quejan de la notación de la x "tanto como incógnita como para indicar multiplicación, pues visualmente resulta confuso para un alumno".

Comentarios sobre el vídeo 3

Todos los participantes están de acuerdo en la claridad de la explicación, indicando también, la larga duración como un factor que podría ser negativo en cuanto a producción del vídeo. Solamente dos de los participantes señalan inconvenientes. Así, P2 indica que "no termina de dar una explicación más directa de la razón, como cantidad del dinero del premio que se corresponde por euro invertido". También, P4 señala que el diseño del vídeo y la paleta de colores empleada son mejorables, y P5 alude a una duración excesiva.

Comentarios sobre el vídeo 4

De manera general los participantes consideran el vídeo como "muy confuso" y de presentación poco apropiada. Un par de estudiantes del máster hacen referencia a que "no cubre las exigencias del currículum" (P2, P6).

Comentarios sobre el vídeo 5

Algunos participantes (por ejemplo, P2 y P6) dan cuenta del error en el uso del término razón. Así, P6 afirma "llama proporción a la razón, cuando el currículo determina que se debe enseñar la diferencia entre ambas". Varios participantes (P11, P13, P15) consideran que el autor hace un énfasis excesivo e innecesario en la simplificación de fracciones. En este sentido, P16 menciona "explica la factorización y multiplicación de fracciones, pero deja de lado el tema central que es la proporcionalidad directa."

Comentarios sobre el vídeo 6

Algunos participantes consideran un vídeo de carácter mecanicista. En este sentido, P23 indica que "no dota de sentido, poco explicado, da una serie de reglas vagas". Otros participantes señalan falta de explicaciones y conceptualizaciones. Por ejemplo, P5 apunta "le falta explicar el significado de esa constante con la cual halla todas las demás cantidades"; P14 indica "presenta una receta que no ayuda a comprender la proporcionalidad". Como errores o imprecisiones, P2 indica "define qué significa que dos magnitudes sean proporcionales sin terminar de explicar que han de cumplir una condición de regularidad o linealidad." Por otro lado, P21 comenta "comete el fallo de decir que a más años te va a tocar más dinero, siendo lo realmente cierto que al doble de años trabajados te correspondería el doble de dinero". Otras imprecisiones de tipo aritmético sugeridas hacen referencia al redondeo usado; por ejemplo, P9 indica que el autor "justifica su resultado no exacto por redondeo", o P11 sugiere "Los redondeos realizados antes de tiempo (...) podrían evitarse".

Valoración otorgada a los vídeos

Finalmente, a los participantes se les pedía asignar una calificación, en una escala de 0 a 10, a cada vídeo. Teniendo presente que el asignar un número a la idoneidad es orientativo, en un intento de sintetizar los resultados del análisis realizado, resulta interesante comparar las valoraciones numéricas de los participantes, con las otorgadas por los investigadores (Beltrán-Pellicer et al., 2018). En la

Tabla 2 se aprecia bastante coherencia en las valoraciones de los participantes (desviaciones típicas entre 1,0 y 2,4) y, como aspecto más llamativo, es destacable la diferencia de valoración en el vídeo 5, que los investigadores valoramos con una elevada idoneidad epistémica. Se trata de valoraciones medias, de ahí que se muestren con un decimal.

Tabla 2. Valoraciones de idoneidad para cada uno de los vídeos.

		Alumnado participante (n=24)	
	Investigadores	*M*	*DT*
Vídeo 1	0,5	2,9	2,1
Vídeo 2	5	3,6	2,1
Vídeo 3	10	8,8	1,0
Vídeo 4	1	3,8	2,3
Vídeo 5	7,5	4,4	1,9
Vídeo 6	4,5	3,3	2,4

Esta discrepancia puede ser debida a que el vídeo 5 fue percibido como mecanicista y confuso por parte de muchos participantes. En la valoración de los investigadores se siguió un esquema de calificación riguroso e igual para todos los vídeos (Beltrán-Pellicer et al., 2018), en el que se tenían en cuenta la diversidad de lenguajes y una serie de indicadores más detallados. Si bien la confusión que mencionan los participantes es un factor que tuvimos en cuenta (claridad en la exposición de las reglas y procedimientos), en la ponderación con los demás indicadores su efecto quedó diluido.

CONCLUSIONES

En el análisis realizado, se evidencia que los participantes utilizan determinados criterios de idoneidad didáctica para analizar y valorar los videos, los cuales "funcionan implícitamente como regularidades en el discurso de los profesores sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para pautar su reflexión" (Hummes, Breda y Seckel, 2019, p. 401). Como se refleja en la Tabla 2, las valoraciones asignadas a los videos por los estudiantes son muy similares a las asignadas por los investigadores, salvo para el vídeo 5. Esto, posiblemente, se solucionaría proporcionando una rejilla de valoración que permitiera tener en cuenta otros indicadores de valoración, ponderando de forma rigurosa. En este sentido, queda reflejada la importancia de brindar a los futuros profesores herramientas específicas que les permitan utilizar criterios para reflexionar sobre los distintos componentes e indicadores de la faceta epistémica. Tal como señalan Godino y Giacomone (2016) se trata de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio.

En cuanto a los resultados, muy pocos participantes identifican como error la definición de reparto proporcional como aquel en el que más aporta es el que más recibe, lo que sugiere un conocimiento limitado de la proporcionalidad y la necesidad de efectuar acciones formativas para desarrollar el conocimiento especializado del contenido. La experiencia que se ha descrito en esta comunicación continúa con una discusión en el aula de los resultados, donde se abordan estas cuestiones y se profundiza sobre proporcionalidad. Este tipo de propuestas sea alinean con las de otros autores (Davis, 2015), ya que conjugan contenido disciplinar con el conocimiento y competencias didácticas, buscando un mayor aprovechamiento del tiempo disponible en la formación inicial.

Agradecimientos

Esta investigación se ha desarrollado dentro de los proyectos PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), PID2019-105601GB-I00 y dentro de los grupos FQM-126 (Junta de Andalucía) y S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics | Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria | The issue of didactical suitability in mathematics educational videos: experience of analysis with prospective primary school teachers. *Revista Española de Pedagogía, 78*(275), 27-49.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Davies, R. S., Dean, D. I. y Ball, N. (2013). Flipping the Classroom and Instructional Technology Integration in a College-level Information Systems Spreadsheet Course. *Educational Technology Research and Development, 61*(4), 563-580.

Davis, B. (2015). Las matemáticas que los profesores de educación secundaria conocen (o necesitarían conocer). *Revista Española de Pedagogía, 73*(261), 321-342.

De Bock, D., Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 65-83.

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-26.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Giacomone, B. (2016). Competencias y conocimientos didácticos del profesor de matemáticas según el EOS. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.)*, Investigación en Educación Matematica XX* (p. 606). Málaga: SEIEM.

Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 393-402). Valladolid: SEIEM.

Jones, T. y Cuthrell, K. (2011). YouTube: Educational potentials and pitfalls. *Computers in the Schools, 28*(1), 75-85.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J.M. y Oller-Marcén, A.M. (2019). Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 413-422). Valladolid: SEIEM.

Ramírez, A. (2010). YouTube™ y el desarrollo de la competencia matemática: resultados de una investigación cuasi experimental. *Contextos Educativos, 13*, 123-140.

Santos, J. A. (2018). *Valoración de video tutoriales de matemáticas disponibles en internet. Nuevos instrumentos para el análisis de los procesos educativos* (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE POLÍGONO EN ESTUDIANTES DE 9 AÑOS

A learning trajectory in 9-year-olds' students of concept of polygon

Bernabeu, M. [a], Moreno, M. [a], Llinares, S. [a] y Gutiérrez, A. [b]

[a] Universidad de Alicante, [b] Universidad de Valencia

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar una trayectoria de aprendizaje del concepto de polígono en estudiantes de 9 años. Usamos un experimento de enseñanza y analizamos los datos de 9 estudiantes para caracterizar niveles de sofisticación en el desarrollo del pensamiento geométrico sobre los polígonos. El análisis de tres entrevistas (inicial, media y final) permitió inferir características de cómo dotan de sentido matemático a las partes de las figuras para determinar la pertenencia de un polígono a una clase. Los diferentes niveles de sofisticación de la comprensión del concepto de polígono se usan para caracterizar una trayectoria de aprendizaje del concepto de polígono.

Palabras clave: *concepto de polígono, educación primaria, niveles de sofisticación, pensamiento geométrico, trayectoria de aprendizaje*

Abstract

The aim of this research is to characterize a learning trajectory in 9-year-old students of the concept of polygon. We employed a teaching experiment and analysed data of 9 students to characterize the levels of sophistication in the development of thinking about polygon. Analysis of three interviews (initial, middle and ending) allowed us to infer features of the way in which students made mathematical sense to the parts of the figures to determine the belonging of a polygon to a class. The levels of sophistication are used to characterize a learning trajectory of polygon.

Keywords: *concept of polygon, primary education, levels of sophistication, geometrical thinking, learning trajectory*

INTRODUCCIÓN

La comprensión del concepto de polígono es un paso importante en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes (Hershkowitz, 1989). En el desarrollo de esta comprensión, reconocer y dotar de sentido matemático a las partes de las figuras geométricas es considerado un aspecto clave (Battista, 2007; Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019a, 2019b; Clements, Swaminathan, Hannibal y Sarama, 1999; Levenson, Tirosh y Psamir, 2011; Llinares y Clemente, 2019). La comprensión del concepto de polígono puede ser vista como la conjunción entre reconocer figuras geométricas como polígonos (figura plana cerrada con lados rectos y no cruzados) y determinar la pertenencia de un polígono a una clase de polígonos (p. ej., considerar que un rombo es un ejemplo de la clase de paralelogramos y el trapecio isósceles no es un ejemplo de los paralelogramos). Algunas investigaciones indican que la enseñanza de la geometría en los primeros años debería fomentar el reconocimiento visual de los atributos de los objetos geométricos y el establecimiento de relaciones entre ellos para desarrollar la comprensión de las figuras geométricas (Awnar y Rofiki, 2018; Clements et al., 1999) y de los cuerpos geométricos (Ambrose y Kenehan, 2009; Pittalis y Christou, 2013).

Bernabeu, M., Moreno, M., Llinares, S., y Gutiérrez, Á. (2021). Una trayectoria de aprendizaje del concepto de polígono en estudiantes de 9 años. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 165 – 172). Valencia: SEIEM.

Investigaciones previas han usado los niveles de pensamiento de van Hiele para caracterizar la comprensión de los conceptos geométricos en diferentes niveles educativos (Battista, 2007; Gutiérrez y Jaime, 1998). Otras investigaciones (Clements, et al., 1999) han refinado la transición entre algunos de estos niveles (por ejemplo, en la transición entre lo perceptual y lo analítico). En este caso, Clements y colegas (1999) añaden el nivel *sincrético*, un nivel entre el de *pre-reconocimiento* (Clements y Battista, 1992) y el *analítico*. Sin embargo, hay menos información sobre cómo los estudiantes empiezan a desarrollar el nivel analítico. Por ejemplo, cómo los estudiantes empiezan a razonar con atributos no relevantes del concepto de polígono para generar la idea de clases de polígonos. Esta investigación intenta aportar información sobre dicha progresión en estudiantes de 9 años tras un experimento de enseñanza dirigido a favorecer el análisis de las figuras geométricas y la relación entre ellas.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación, tomamos como referencia la teoría de Duval (1995, 2017) y, en particular, la noción de *deconstrucción dimensional* junto con la coordinación de las *aprehensiones cognitivas*.

Reconocer una figura geométrica como un polígono implica reconocer los atributos relevantes de la definición de polígono. Una evidencia de esto se muestra cuando se reconocen qué atributos relevantes de la definición de polígono no están presentes en una figura y se transforman para construir un polígono *explicando* la transformación realizada. Todo este proceso implica dotar de sentido matemático a las partes de la figura geométrica mediante la *deconstrucción dimensional* (Duval, 2017). El proceso de deconstrucción dimensional se articula a través de diferentes aprehensiones. Mediante la *aprehensión discursiva* se establecen relaciones entre las partes de una figura y la definición de polígono; mediante la *aprehensión operativa*, se transforman los atributos de una figura, que no es un polígono, en un polígono y, mediante la *aprehensión secuencial,* se representa el polígono, mental o físicamente, a través de un dibujo o una construcción con materiales (Duval, 1995). Por otro lado, para determinar la pertenencia de un polígono a una clase es necesario identificar el atributo común que define la clase en un conjunto de figuras diferentes. Por ejemplo, identificar qué tienen en común los polígonos de una clase que permite determinar cuándo una figura es ejemplo de dicha clase.

El proceso progresivo a través del cual los estudiantes razonan con las partes de las figuras y las dotan de sentido matemático puede determinar trayectorias de aprendizaje del concepto de polígono en los estudiantes. Algunas investigaciones usan la idea de *trayectoria de aprendizaje* para mostrar este desarrollo (Anwar y Rofiki, 2018; Clements y Sarama, 2004; Simon, 1995). Una trayectoria de aprendizaje es "una descripción del pensamiento de los niños en un dominio matemático específico*"* (Clements y Sarama, 2004, p. 83). Nosotros usamos este constructo junto con las aprehensiones cognitivas y la deconstrucción dimensional de Duval (1995, 2017) para describir y comprender cómo los estudiantes desarrollan su comprensión sobre los polígonos.

MÉTODO

Participantes y contexto

Se diseñó un experimento de enseñanza en el que participaron 59 estudiantes de tercer curso de educación primaria (9 años). Las tareas del experimento de enseñanza se diseñaron para potenciar la habilidad de deconstruir dimensionalmente las figuras y dotarlas de sentido matemático mediante la coordinación de diferentes aprehensiones (discursiva, secuencial y operativa). Las tareas se organizaron a través de dos dimensiones. En la Dimensión 1 (D1) los estudiantes tenían que reconocer polígonos, y en la Dimensión 2 (D2) los estudiantes tenían que determinar si un polígono pertenencia o no a alguna clase de polígonos a partir: (a) del reconocimiento de los atributos de los polígonos y (b) de la identificación de atributos comunes en un grupo de polígonos para determinar

si un polígono era ejemplo o no de dicha clase. Los estudiantes no habían recibido instrucción previa durante el curso sobre los contenidos geométricos.

Los participantes respondieron a un cuestionario inicial (CI) considerando estas dimensiones. De estos 59 estudiantes, se entrevistó a 9 al inicio, a mitad y al final del experimento de enseñanza. Estos estudiantes fueron seleccionados de acuerdo con los resultados del cuestionario inicial: tres de ellos que no comprendían el concepto de polígono; tres que reconocían los polígonos, pero no atributos no relevantes para determinar una clase de polígonos; y otro tres que reconocían los polígonos y, además, reconocían algunos atributos no relevantes.

El experimento de enseñanza constó de 10 sesiones (Tabla 1). La primera sesión se centró en reconocer polígonos (figura plana cerrada con lados rectos y no cruzados) y no-polígonos (D1). El resto de las sesiones se centraron en reconocer diferentes atributos no relevantes para la definición de polígono pero que podían determinar la generación de una clase (D2) como, por ejemplo, concavidad-convexidad, número de lados, figuras simétricas, relación entre la longitud de los lados en los triángulos, relación entre la amplitud de los ángulos de un triángulo y lados paralelos. Para determinar cómo los estudiantes podían empezar a identificar clases de polígonos se usaron tareas basadas en la metáfora de la *Máquina de Dibujar* (Figura 3) (Battista, 2012). La Máquina de dibujar puede hacer figuras con unos determinados atributos (ejemplos de una clase) y no puede hacer figuras que no cumplan dichos atributos (ejemplos de polígonos que no pertenecen a la clase).

Metodológicamente, en cada sesión, los estudiantes resolvían tareas en gran grupo y contrastaban sus respuestas con las de sus compañeros y, al finalizar la sesión, realizaban tareas individualmente.

Sesión 1: Atributos relevantes de la definición de polígonos. Polígonos según el número de lados	Sesión 2: Diagonales. Polígonos cóncavos/convexos
Sesión 3: Ejes de simetría. Polígonos simétricos	Sesión 4: Clases de ángulos: agudo, recto y obtuso
Sesión 5: Clases de triángulos según la longitud de sus lados: equilátero, isósceles y escaleno	Sesión 6: Clases de triángulos según la amplitud de sus ángulos internos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo
Sesión 7: Clases de triángulos según la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos internos	Sesión 8: Líneas paralelas. Clases de cuadriláteros según el paralelismo de sus lados: paralelogramo, trapecio y trapezoide
Sesión 9: Clases de paralelogramos: relaciones entre cuadrado, rectángulo, rombo y romboide	Sesión 10: Propiedades de las diagonales de los paralelogramos: bisección, congruencia y perpendicularidad.

Tabla 1. Secuencia de las sesiones del experimento de enseñanza

Instrumento y procedimiento

Realizamos tres entrevistas, antes, durante y después de la instrucción, con tareas similares a las realizadas durante el experimento de enseñanza (Tabla 2).

El objetivo de la entrevista inicial era determinar el conocimiento previo de los estudiantes sobre el concepto de polígono. Para la entrevista inicial (EI) se usaron las tareas del cuestionario inicial (CI), y tareas adicionales (Figura 1). El objetivo de la entrevista intermedia era determinar cómo los estudiantes comprendían clases particulares de polígonos, clasificación y relaciones de inclusión. La entrevista intermedia (EM) se centró en determinar cómo los estudiantes identificaban clases de polígonos según la concavidad/convexidad, número de lados y simetría (Figura 4). El objetivo de la entrevista final era determinar cómo los estudiantes razonaban con atributos no relevantes para la definición de polígono. Las tareas de la entrevista final (EF) se centraron en clasificar triángulos según sus lados o ángulos y clasificar cuadriláteros según el paralelismo de los lados o la posición de sus diagonales, aspectos abordados al final de la instrucción.

TAREA 1	
a) Indica si la figura es un polígono. ¿Por qué? 	b) Si la figura "**NO** es un **POLÍGONO**, indica con tus palabras cómo la podemos transformar para que sea en polígono c) Dibújalo.

Figura 1. Tarea en el guion de la entrevista intermedia centrada en reconocer polígonos

Análisis

Las entrevistas fueron transcritas y su análisis siguió un proceso de dos pasos considerando el proceso de generación de una *Teoría fundamentada* (Straus y Corbin, 1990). Esta teoría se deriva de "datos recopilados y analizados sistemáticamente a través de la investigación […] permitiendo que la teoría emerja de los datos*"* (p. 12). Primero, en cada una de las entrevistas, se identificaron cómo los estudiantes reconocían las figuras como polígonos o no-polígonos (D1), y cómo los estudiantes dotaban se sentido matemático a las partes de las figuras para considerar clases de polígonos (D2). Segundo, comparamos las resoluciones de las tareas de las tres entrevistas (inicial, intermedia y final). El objetivo fue inferir características de los cambios al reconocer polígonos, al identificar clases y cómo se identificaba una figura como ejemplo de una clase. Estas características nos permitían tener información para articular trayectorias de aprendizaje considerando cómo los estudiantes realizaban la deconstrucción dimensional y coordinaban las aprehensiones cognitivas en los ejemplos particulares de figuras que se les presentaban.

Este proceso permitió inferir cuatro niveles de sofisticación de la comprensión del concepto de polígono (Tabla 2) que condujo a caracterizar diferentes trayectorias de aprendizaje. Cada nivel fue caracterizado a través de las dos dimensiones D1 y D2, y del uso del vocabulario geométrico empleado. En primer lugar, en términos de la habilidad en reconocer polígonos, transformar ejemplos de no-polígonos en polígonos (D1) y, por la habilidad de identificar clases de polígonos y determinar cuándo una figura es un ejemplo de dicha clase (D2). En segundo lugar, considerando el uso del vocabulario empleado por los estudiantes como un uso del vocabulario geométrico *estandarizado* cuando usan expresiones del tipo *lados paralelos* o *ejes de simetría*, y un uso de vocabulario geométrico *no-estandarizado* cuando prevalecen expresiones como *líneas* para referirse a lados o *picos hacia dentro* para expresar la idea de concavidad.

En este informe, usamos los datos de un estudiante para mostrar una de las trayectorias de aprendizaje identificada considerando los niveles de sofisticación de la comprensión del concepto de polígono inferidos del análisis.

Tabla 2. Niveles de sofisticación de la comprensión del concepto de polígono

N	**D**	**Teoría Generada por la perspectiva analítica**
1	D1	No reconocen algunos atributos relevantes de la definición de polígono. Usan mayoritariamente vocabulario geométrico no-estandarizado
	D2	No reconocen atributos no relevantes de la definición de polígono No identifican clases de polígonos (Es decir, no identifican el atributo que define la clase, no representan un ejemplo de la clase, no identifican no ejemplos, …). Usan mayoritariamente vocabulario geométrico no-estandarizado
2	D1	Reconocen los atributos relevantes de la definición de polígono de manera no-sistemática (es decir, reconocen, en algunos casos, pero no en otros). Usan vocabulario geométrico estandarizado y no-estandarizado
	D2	Usan vocabulario geométrico mayoritariamente no-estandarizado: D2a) Reconocen de manera no-sistemática atributos no relevantes de la definición de polígono D2b) Identifican de manera no-sistemática el atributo que define una clase de polígonos
3	D1	Reconocen los atributos relevantes de la definición de polígono. Usan vocabulario geométrico estandarizado y no-estandarizado

	D2	Usan vocabulario geométrico estandarizado y no-estandarizado: D2a) Reconocen atributos no relevantes de la definición de polígono D2b) Identifican de manera no-sistemática el atributo que define una clase de polígonos
4	D1	Reconocen los atributos relevantes de la definición de polígono. Usan mayoritariamente vocabulario geométrico estandarizado
	D2	Usan mayoritariamente vocabulario geométrico estandarizado: D2a) Reconocen atributos no relevantes de la definición de polígono D2b) Identifican clases de polígonos (es decir, identifican el atributo que define la clase, representan/ reconocen ejemplos de dicha clase, y reconocen no ejemplos de la clase)

RESULTADOS

La figura 2 muestra una representación de la Trayectoria de Aprendizaje de uno de los estudiantes reflejando los cambios en los niveles de sofisticación en su pensamiento sobre el aprendizaje del concepto de polígono.

	Entrevista inicial (EI)			Entrevista intermedia (EM)			Entrevista final (EF)	
	Reconocer polígonos (D1)	Reconocer atributos de polígonos (D2a)	Identificar ejemplos de una clase (D2b)	Reconocer polígonos (D1)	Reconocer atributos de polígonos (D2a)	Identificar ejemplos de una clase (D2b)	Reconocer atributos de polígonos (D2a)	Identificar ejemplos de una clase (D2b)
N1								
N2								
N3								
N4								

Figura 2. Trayectoria de aprendizaje del estudiante descrita a través de los niveles de sofisticación del pensamiento sobre los polígonos

Inicialmente, el estudiante reconoce, en algunos casos, cuándo una figura no es un polígono. Por ejemplo, aunque inicialmente no reconoce el lado ligeramente curvado (Figura 3, diálogos 2 y 4), luego si es capaz de indicar que este atributo hace que la figura no sea un polígono (Figura 3, diálogo 5). Este estudiante usa un vocabulario a veces estandarizado (*cerrar*) y a veces no-estandarizado (*línea*) (N2) (Figura 3). Además, el estudiante reconoce algunos atributos no relevantes para la definición de polígono, como el número de lados y el paralelismo usando vocabulario estandarizado y no-estandarizado (N3). Sin embargo, solo es capaz de identificar el atributo común de un conjunto de polígonos cóncavos-convexos de forma perceptual, representando ejemplos y no ejemplos de esta clase. En este caso, el estudiante emplea vocabulario estandarizado y no-estandarizado, predominando el no-estandarizado (Figura 4, diálogo 8) (N2).

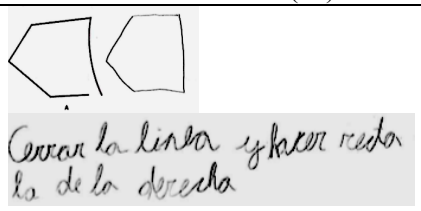
Posteriormente, en la entrevista intermedia, reconoce todos los atributos de la definición de polígono, empleando mayoritariamente un vocabulario geométrico estandarizado (*lado*) (N4) (Figura 3, diálogo 7). Además, en algunos casos reconoce atributos de un polígono (concavidad/convexidad, número de lados y simetría) que permite determinar una clase, pero no de manera sistemática (en todos los casos) y emplea un vocabulario geométrico mayoritariamente no-estandarizado (N2). Por ejemplo, representa polígonos con condiciones (polígono cóncavo o de seis lados), pero no sabe representar un polígono que tenga que cumplir las tres condiciones (polígono de seis lados, cóncavo y con al menos un eje de simetría). En estos casos emplea vocabulario geométrico estandarizado y no-estandarizado.

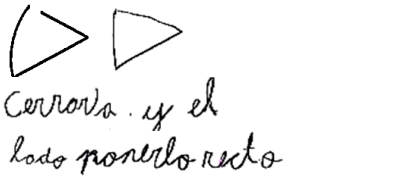
Finalmente, en la entrevista final, reconoce los atributos que determinan la clase de triángulos, según la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos, y clases de cuadriláteros (N4). Además, identifica el atributo que determina una clase (cuadriláteros con lados congruentes) (Figura 4, diálogo 10). Esto se evidencia cuando indica que una cometa no es un ejemplo de cuadrilátero con

todos los lados congruentes. El estudiante usa mayoritariamente un vocabulario geométrico estandarizado (N4).

Las siguientes figuras muestran los cambios que caracterizan la trayectoria de aprendizaje en relación con el reconocimiento de polígonos y la transformación de no-polígonos en polígonos (Figura 3) y la identificación del atributo que define una clase de polígonos para considerar ejemplos y no ejemplos de dicha clase (Figura 4).

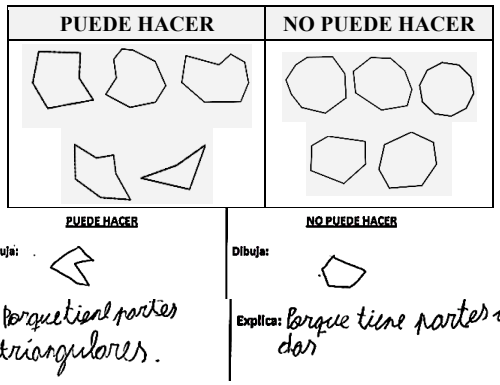
<table>
<tr><td colspan="3">La figura no es un polígono. Indica con tus palabras qué cambiarías para que fuera un polígono. Dibújalo</td></tr>
<tr><td>Cuestionario Inicial (CI)</td><td>Cuestionario Adicional (EI)</td><td>Entrevista Intermedia (EM)</td></tr>
<tr>
<td> 

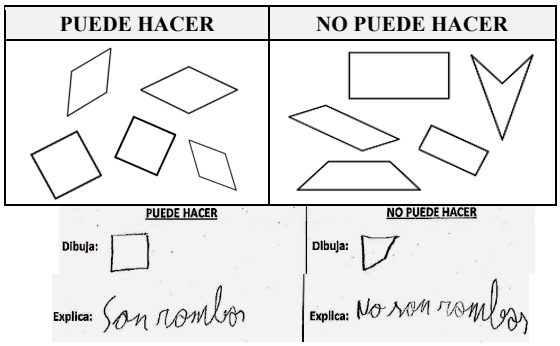
1. INV: ¿Qué cambiaste?
2. EST: Cerrarla.
3. INV: ¿Hiciste algo más?
4. EST: No.</td>
<td> 

5. EST: Esta que está curvada ponerla recta, y cerrarla.</td>
<td> 

6. INV: ¿Qué cambiarías?
7. EST: Cerrarla, y este lado ponerlo recto.</td>
</tr>
</table>

Figura 3. Cambios en relación con el reconocimiento de polígonos y transformación de ejemplos de no-polígonos en poligonos

<table>
<tr><td colspan="2">Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común. Dibuja otro polígono diferente que la Máquina de Dibujar sí pueda hacer y di por qué. Dibuja otro polígono diferente que la Máquina de dibujar no pueda hacer y di por qué.</td></tr>
<tr><td>Entrevista Inicial (EI)</td><td>Entrevista Final (EF)</td></tr>
<tr>
<td> 

8. EST: Yo creo que es porque tienen forma aquí de triángulo y estas de cuadradas. Tienen partes cuadradas [convexos] y estas como partes triangulares [cóncavos].</td>
<td> 

9. INV: […] ¿Por qué esta no es un rombo? [polígono del grupo “no puede hacer”]
10.EST: Porque aquí las líneas miden igual [puede hacer], y aquí no [no puede hacer].</td>
</tr>
</table>

Figura 4. Cambios en el pensamiento geométrico en relación con la identificación del atributo común no-relevante que define la clase

DISCUSIÓN

El objetivo de esta investigación es caracterizar una trayectoria de aprendizaje del concepto de polígono en estudiantes de 9 años vinculada a un experimento de enseñanza. La trayectoria de aprendizaje se ha caracterizado identificando: (a) cambios en la manera en la que el estudiante reconoce figuras como polígonos y transforma figuras que no son polígonos en polígonos; y, (b) cambios en cómo usa atributos no relevantes para la definición de polígono para identificar clases de polígonos y considerar o representar ejemplos y no ejemplos de estas clases.

La caracterización de la trayectoria de aprendizaje ha sido generada considerando los niveles de sofisticación de cómo el estudiante dota de sentido matemático, de manera progresiva, a las partes de las figuras. Es decir, cómo el estudiante progresivamente identifica atributos no relevantes para la definición de polígono, dotándolos de significado matemático, lo que le permite empezar a considerar clases de polígonos. En este proceso, identificar atributos comunes a un grupo de figuras y dotarlos de sentido matemático parece ser un factor clave en la trayectoria de aprendizaje. Esta idea muestra que, identificar atributos en los polígonos (como por ejemplo la concavidad/convexidad) es un primer paso para razonar con ellos e identificarlo como un atributo común a un grupo de figuras, lo que permite identificar la clase. Esta progresión en el pensamiento geométrico de los estudiantes se apoya en el desarrollo de la capacidad de análisis de las figuras geométricas (Sarama y Clements, 2009; Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019a), reconociendo atributos no relevantes para la definición y la capacidad para dotarlos de sentido matemático (deconstrucción dimensional) (Duval, 2017). En particular, una característica de la progresión, que determina la trayectoria de aprendizaje que hemos descrito se da cuando el atributo no relevante de una figura pasa a ser considerado como un atributo común a un grupo de figuras (lo que tiene en común dos figuras que las diferencian de una tercera) y se llega a representar un polígono como elemento de la clase (aprehensión secuencial) (Duval, 1995) (Figura 4). En paralelo a esta progresión, en cómo se dota de significado matemático a las partes de las figuras en el proceso de construir el significado de una clase, se produce el desarrollo en el uso del vocabulario a través de la justificación (aprehensión discursiva) (diálogos 6-7 y 9-10). La descripción de la trayectoria de aprendizaje proporciona información sobre cómo los estudiantes desarrollan el nivel analítico razonando con atributos no relevantes del concepto de polígono para generar la idea de clases de polígonos.

La trayectoria de aprendizaje muestra que la comprensión del concepto de polígono es un proceso progresivo, aunque no lineal y depende: del tipo de tarea y de los atributos considerados (Battista, 2007; Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019a, 2019b; Hershkowitz, 1989). La propuesta de enseñanza desarrollada en el experimento usa como atributos no relevantes para el concepto de polígono: la concavidad/convexidad, la simetría, el número de lados, la longitud de los lados en los triángulos y la amplitud de sus ángulos, el paralelismo en los cuadriláteros y la posición relativa de sus diagonales. Los estudiantes reconocen de manera diferente cada uno de estos atributos en los ejemplos individuales de polígonos, así como reconocerlo como un atributo común a un grupo de polígonos, que permite generar la idea de clase. Una implicación instruccional de estos resultados es que resulta esencial fomentar el análisis de las figuras geométricas, de forma individual y conjunta desde edades tempranas (Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019a; Sarama y Clements, 2009).

Agradecimientos

Esta investigación ha contado con el apoyo de la Universidad de Alicante: contrato predoctoral (FPU2017-014) y ayuda para estancias breves en España y en el extranjero de investigadores/as predoctorales del programa propio del VITC 2019 (UAEEBB2019-03).

Referencias

Ambrose, R., & Kenehan, G. (2009). Children's evolving understanding of polyhedra in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 158-176. http://dx.doi.org/10.1080/10986060903016484

Anwar, A., & Rofiki, I. (2018). Investigating students' learning trajectory: a case on triangle. *Journal of Physics: Conference Series, 1088* (1), 012021. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1088/1/012021

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843- 908). Charlotte, EEUU: NCTM-IAP.

Battista, M. T. (2012). *Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes: Building on students' reasoning.* EE. UU.: Heinemann.

Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2019a). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en educación matemática. *Uni-pluri/versidad*, *19*(2), 103. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07

Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2019b). Identificación y uso de los atributos de los polígonos por estudiantes de tercero de Educación Primaria: relaciones implicativas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 213-222). Valladolid: SEIEM.

Clemente, F. & Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación matemática XVII (pp. 229- 236) Bilbao: SEIEM.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). NY, EEUU: Macmillan.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192–212. https://doi.org/10.2307/749610

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. London, UK: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* Bogotá: una empresa docente y Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 61–76.

Levenson, S., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool geometry. Theory, research and practical perspectives.* Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.

Pittalis, M., & Christou, c. (2013). Coding and decoding representations of 3D shapes. *Journal of Mathematical Behavior, 32,* 673-689. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.08.004.

Sarama, J., & Clements, D.H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. NY, EEUU: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research techniques*. Thousand Oaks, EEUU: Sage publications.

UN ESTUDIO SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA BASADO EN DOS TEORÍAS: APOE Y EOS[i]

A study of the students' understanding of implicit differentiation based on two theories: APOS and OSA

Borji, V.[a], Sánchez, A.[b], Font, V.[b] y Garcés, W.[b]

[a]Ferdowsi University of Mashhad, [b]Universidad de Barcelona

Resumen

El objetivo de este trabajo es caracterizar la comprensión de estudiantes universitarios al resolver ejercicios de derivación implícita, en términos de los niveles (intra, inter y trans) de desarrollo del esquema de derivación implícita, incorporando herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico. 25 estudiantes del primer curso de Cálculo de una universidad de Irán participaron resolviendo ejercicios de derivación implícita que se analizaron con constructos de la teoría APOE y del Enfoque Ontosemiótico. La mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para desarrollar las construcciones mentales y el trabajo práctico necesario para resolver la tarea, en particular las construcciones mentales necesarias para derivar funciones compuestas en las que la función interior incluye la variable y, lo cual hace que la mayoría de los participantes se sitúen en los niveles intra e inter de desarrollo del esquema de derivación implícita.

Palabras clave: *derivación implícita, niveles de desarrollo de esquema, configuración epistémica*

Abstract

The aim of this study is to characterize the university students' understanding to solve tasks related to implicit differentiation, in terms of the levels (intra, inter and trans) of development of the implicit differentiation schema, using theoretical tools from the Ontosemiotic Approach. 25 students of the first course of Calculus from a university in Iran participated solving exercises of implicit differentiation that were analyzed with theoretical constructs from the APOS theory and from the Ontosemiotic Approach. Most of the students in our sample had major problems in developing mental constructions and doing practical work needed to solve the task, particularly those mental constructions that must be made to differentiate the composition functions where the inner function includes y. This makes that most of the participants are placed at the intra and inter levels of development of the implicit differentiation schema.

Keywords: *implicit differentiation, levels of development of schema, epistemic configuration*

INTRODUCCIÓN

En cálculo, la técnica de *derivación implícita* se usa para derivar funciones definidas implícitamente. Esta técnica se estudia, habitualmente, en los cursos de Cálculo I (Cálculo de una variable) en la universidad. Un ejemplo es el libro *Calculus* de Stewart (2010) que sirve de referencia en muchas universidades de Estados Unidos y otros países (Park, 2016). La derivación implícita también se utiliza para derivar funciones implícitas en diversas variables en Cálculo II y otras asignaturas donde se enseñan ecuaciones diferenciales y en las asignaturas de matemáticas del ciclo básico de muchas ingenierías. A pesar de la importancia de la derivación implícita y de la abundancia de investigaciones en el área de educación matemática sobre la derivada, hay pocas que se dediquen específicamente a esta técnica.

Borji, V., Sánchez, A., Font, V. y Garcés, W. (2021). Un estudio sobre la comprensión de los estudiantes de la derivación implícita, basado en APOE y EOS. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 173 – 180). Valencia: SEIEM.

Diversas investigaciones (Badillo, Azcárate y Font, 2011; Font, Trigueros, Badillo y Rubio, 2016; Fuentealba, Sánchez-Matamoros, Badillo y Trigueros, 2017; Mackie, y Court, 2002; Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios, y Breda, 2018; Tall, 2013; Tiwari, 2007) sobre aprendizaje y enseñanza de Cálculo han revelado la complejidad de los objetos matemáticos fundamentales en esta área de las matemáticas (derivadas, integrales, etc.) y la necesidad de enseñar diferentes significados parciales de estos objetos y conectarlos entre sí para su comprensión. Dos de estos enfoques que intentan caracterizar esta complejidad son la teoría APOE y el Enfoque Ontosemiótico (EOS). En el APOE (Fuentealba, et al., 2017), el tipo de comprensión que permite relacionar diferentes significados parciales de un objeto matemático se caracteriza en términos de tematización del esquema y niveles (intra, inter y trans) de desarrollo del esquema. Por esta razón, y dado que hay poca investigación sobre la derivación implícita a nivel internacional, particularmente en Irán, nuestro objetivo es investigar la comprensión de los estudiantes iraníes para resolver tareas usando esta técnica de derivación, caracterizando el esquema de los estudiantes en términos de niveles (intra, inter y trans) de desarrollo del esquema para la derivación implícita. Para ello, en este estudio, la forma de entender la comprensión del APOE se complementa con el uso de herramientas teóricas del EOS, para caracterizar mejor la actividad matemática realizada por el estudiante y poder inferir su comprensión de la tarea. Se incorporan herramientas del EOS porque consideramos, de acuerdo con Font et al. (2016), que un networking entre APOE y EOS proporciona herramientas para explicar mejor las dificultades asociadas con el aprendizaje de conceptos específicos.

Después de esta introducción donde se explica la relevancia y el objetivo de la investigación, en la siguiente sección se hace un breve resumen de las dos teorías consideradas. En la tercera sección se explica la metodología, que básicamente consiste en aplicar las herramientas teóricas de ambos enfoques y su manera de analizar la actividad matemática en las producciones de los alumnos. A continuación, se presentan los resultados, utilizando los niveles de desarrollo del esquema de derivación implícita y destacando para cada nivel los objetos que intervienen en la actividad matemática, desde el punto de vista del EOS. Finalmente, se explican algunas conclusiones.

MARCO TEÓRICO

En este apartado explicamos brevemente los marcos teóricos que utilizamos, APOE y EOS. También se incluye una revisión de algunas investigaciones sobre derivación.

Teoría APOE

APOE es un acrónimo de las iniciales de los términos: acciones, procesos, objetos y esquemas, que son las construcciones mentales que, según esta teoría, un sujeto realiza para construir conceptos matemáticos. Una *acción* es una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo y se lleva a cabo como reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a realizar. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede interiorizarse en un *proceso,* que es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos al individuo, de forma que el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos. Los *objetos* se pueden construir cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como un *objeto*. En este caso, el proceso se ha encapsulado en un objeto. Procesos y objetos se relacionan en virtud de que los primeros actúan sobre los segundos. Una colección de procesos y objetos puede ser organizada de una manera estructurada para formar *esquemas* (Asiala et al., 1996). Un esquema para un determinado concepto matemático es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas conectados de manera consciente o inconsciente en un marco coherente en la mente del sujeto. La propuesta teórica de APOE permite delimitar y describir el camino hacia la construcción de un concepto matemático en la mente de un sujeto.

El desarrollo de esquemas se puede explicar en tres fases (Piaget y García, 1983), conocidas como la "tríada": intra, inter y trans. En la etapa intra, se construyen relaciones internas del objeto o fenómeno. Las explicaciones en este nivel son locales y particulares. En este nivel el estudiante se concentra en una acción repetitiva o una operación, pero no tiene la capacidad para relacionar la acción con el sistema de condiciones a través del cual puede extender sus aplicaciones e incluirlas en un sistema de transformaciones interdependientes. Posteriormente, en la etapa inter, el individuo construye relaciones entre los objetos y fenómenos de conocimiento. En el nivel inter, los estudiantes usan, comparan y reflexionan sobre ideas que ellos tienen aisladas y esto los lleva a construir relaciones y transformaciones. En este nivel los estudiantes pueden establecer relaciones y pueden deducir de una operación inicial, una vez la tienen comprendida, otras operaciones que están implicadas o que pueden coordinarse con operaciones similares. Este proceso lleva a los estudiantes a un grupo de sistemas utilizando un método que incluye nuevas transformaciones. Y, finalmente, en la etapa trans, las relaciones construidas adquieren mayor coherencia y se estructuran las relaciones de la etapa anterior. En el nivel trans, el estudiante reflexiona sobre estas coordinaciones y relaciones desarrollando nuevas estructuras. A través de las síntesis de las transformaciones en el nivel trans, el estudiante construye y tiene conciencia de que el esquema está completo, y puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles anteriores (Baker, Cooley y Trigueros, 2000).

La teoría APOE incluye, como parte de su aplicación a la investigación, un modelo general que describe una posible manera de construir el concepto. Este modelo hipotético se llama *Descomposición Genética* (DG) e incluye un análisis teórico de las acciones, procesos, objetos y esquemas que un estudiante construiría para aprender un concepto matemático concreto. Se utiliza para el diseño de investigaciones y métodos de enseñanza.

El Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El EOS describe la actividad matemática desde un punto de vista institucional y personal. En esta teoría, es importante considerar los objetos implicados en dicha actividad y las relaciones semióticas entre ellos (Font, Godino y Gallardo, 2013). En el EOS, la actividad matemática se puede modelizar en términos de configuraciones de objetos primarios y procesos que aparecen durante la práctica. Una práctica matemática se considera una secuencia de acciones, controladas por reglas institucionales, orientadas hacia un objetivo (generalmente, resolver un problema). En esta teoría, la palabra "objeto" se utiliza en un amplio sentido para referirse a cualquier cosa que sea susceptible de considerarse una entidad que es, de alguna manera, incluida en una práctica matemática y puede reconocerse como una unidad. Por ejemplo, en una práctica de resolución de un problema, podemos describir el uso de diferentes lenguajes (gráfico, simbólico…). Estos lenguajes son la parte ostensiva de un conjunto de definiciones, procedimientos y proposiciones que intervienen en la argumentación y justificación de la solución del problema. Los seis objetos matemáticos primarios son los problemas, el lenguaje, las definiciones, los procedimientos, las proposiciones y los argumentos. Al interconectarse, forman configuraciones de objetos primarios.

Estas herramientas del EOS permiten un análisis de la actividad matemática en el cual, primero, se efectúa el análisis temporal de las prácticas matemáticas realizadas para resolver un determinado problema, luego se analiza la configuración de objetos primarios que intervienen (lo cual muestra los elementos o partes de esta actividad matemática) y después se vuelve a hacer un análisis en términos de procesos que completa el análisis de las prácticas (e informa de la dinámica temporal).

Revisión de la literatura

Algunas investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes con la derivada ofrecen resultados sobre los errores y obstáculos para comprender esta noción, describen las construcciones mentales de los estudiantes e incluyen sugerencias didácticas en relación a la derivada. Pese a los numerosos estudios sobre la comprensión de la derivada, la investigación sobre derivación implícita es escasa.

La regla de la cadena es el concepto subyacente en la derivación implícita. Clark et al. (1997) informan de que algunos estudiantes no son capaces de usar la regla de la cadena en los problemas de derivación implícita. Explican que este problema se debe a la falta de comprensión o errores en la comprensión de la composición de funciones.

En algunas investigaciones realizadas usando como marco teórico el APOE se ha utilizado la tríada (intra, inter y trans) para estudiar la comprensión de los estudiantes de los diferentes conceptos de Cálculo, en particular la derivada. Badillo et al. (2011) estudiaron el nivel de comprensión de la relación entre $f'(a)$ y $f'(x)$ con profesores. Clark et al. (1997) utilizaron la tríada para interpretar las fases de comprensión del esquema de la regla de la cadena. Baker et al. (2000) introdujeron la interacción de dos esquemas. Trigueros y Martínez-Planell (2010) aplicaron la tríada a la comprensión de la gráfica de funciones de dos variables.

Actualmente en Educación Matemática, hay una tendencia a relacionar diferentes teorías. En particular, las posibles conexiones entre APOE y EOS son foco de interés recientemente, lo cual está asociado a una aparente necesidad en el desarrollo del APOE de contribuciones de teorías semióticas (Font, Montiel, Vidakovic y Wilhelmi, 2011; Font et al., 2016). En particular, Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez (2018) usaron la tríada, conjuntamente con nociones del EOS, para describir la comprensión de los estudiantes dado un problema gráfico de derivadas. Borji y Font (2019) también la usaron, conjuntamente con nociones del EOS, para el estudio de la comprensión de la derivación por partes. Fuentealba et al. (2017) utilizaron la teoría APOE, la tríada y una herramienta llamada configuración del concepto de derivada (que es una noción familiar a la noción de configuración epistémica del EOS y de las funciones semióticas entre sus elementos) para focalizarse en el análisis de las respuestas de los estudiantes a una secuencia de tareas sobre las derivadas sucesivas. Siguiendo esta línea, en este trabajo, analizamos la comprensión de los estudiantes al resolver tareas relacionadas con la derivación implícita, con la tríada de niveles de desarrollo del esquema y con uso de herramientas del EOS. Utilizaremos dos lentes: APOE y EOS.

METODOLOGÍA

En esta sección se describen las fases de investigación, el análisis a priori con herramientas del EOS de la tarea y, siguiendo la teoría APOE, la descomposición genética de la derivada implícita.

Participantes

En esta investigación participaron voluntariamente 25 estudiantes del primer curso de Cálculo de una universidad iraní.

Fases

La investigación comprendió las siguientes fases: primero, planteamos las preguntas con algunas funciones implícitas y se pedía a los estudiantes que buscaran y' por derivación implícita. Segundo, hicimos un análisis a priori de la actividad matemática, siguiendo la metodología del análisis onto-semiótico (Pino-Fan, Godino y Font, 2018), que consiste en identificar las prácticas matemáticas y luego considerar los objetos matemáticos primarios activados en ellas. Tercero, hicimos una descomposición genética (DG) basada en la teoría APOE. Nuestra DG describe las construcciones mentales que se necesitarían cuando los estudiantes utilizan los objetos primarios descritos en la segunda fase para resolver ese tipo de tareas. Cuarto, analizamos las evidencias de los estudiantes para determinar las prácticas, los objetos y construcciones mentales de la DG y asignamos a cada estudiante un nivel de desarrollo (intra, inter o trans) del esquema de derivación implícita.

La tarea

En este documento analizaremos una de las tareas propuestas a los estudiantes:

Encuentra y’ por derivación implícita.

a) $x^3 + y^4 = 10$, b) $x^2 + y^2 + xy^3 = 0$, c) $x^4 + x^3y^2 + cos(xy) = 0$

Una mirada desde el EOS: Configuración epistémica (CE) de objetos primarios

A continuación, hacemos un análisis a priori de la actividad matemática para resolver la tarea en términos de prácticas y objetos primarios utilizados.

Práctica: 1) Leer la tarea. 2) Encontrar *y'* para las funciones implícitas.

Configuración epistémica de objetos primarios:

Problema: La tarea propuesta (hallar tres derivadas).

Lenguajes: a) Verbal: función explícita, función implícita, derivada, derivación implícita; b) simbólico: expresiones simbólicas con *x*, *y*, *cos, =, y'*.

Conceptos/definiciones: Función, derivada, función implícita, derivación implícita, producto de funciones, composición de funciones.

Procedimientos:

Pr0: Usar la tabla de derivadas de las funciones elementales y cómo aplicarlas.

Pr1: Derivar a ambos lados de la ecuación implícita respecto a *x* utilizando la regla del producto y la regla de la cadena.

Pr2: Encontrar *y'* a partir de la ecuación que resulta al aplicar Pr1, utilizando métodos algebraicos.

Proposiciones:

1) Fórmulas de las derivadas de las funciones elementales.
2) Reglas de cálculo algebraico (factorización, factor común,…).
3) Regla del producto: Si las funciones *f* y *g* son diferenciables en *x*, entonces su producto *f·g* también lo es, y $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$.
4) Regla de la cadena: Si la función *g* es diferenciable en *x* y la función *f* es diferenciable en *g(x)*, entonces la función compuesta $H = f \circ g$ es diferenciable en *x* y su derivada viene dada por: $H'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Argumentos: Los argumentos a los tres apartados son muy similares, sigue solo el del apartado c):

La respuesta a la tarea 1.c) es $y' = \frac{-4x^3 - 3x^2y^2 + y.\sin(xy)}{2x^3y - x.\sin(xy)}$. La razón que justifica esta respuesta es la correcta aplicación de las reglas de derivación, como se explica a continuación: El primer término, x^4, solo incluye *x*, así que su derivada es $4x^3$. El segundo término x^3y^2 es un producto de x^3 y y^2, así que utilizamos la regla del producto. La derivada de x^3 es $3x^2$, y y^2 es la composición de la función x^2 con la función *y*. Para encontrar la derivada de y^2, derivamos la segunda función x^2 –esto es *2x*- y sustituimos la primera función *y* en ella –por tanto, *2y*-, entonces lo multiplicamos por la derivada de la función interior –es decir, *y'*-, el resultado es *2yy'*. Utilizando la regla del producto, la derivada de x^3y^2 es $3x^2y^2 + x^3(2yy')$. El último término, *cos(xy)*, es la composición de la función exterior *cos(x)* y función interior *xy*. Para encontrar su derivada, derivamos la función exterior y sustituimos la función interior en ella, después multiplicamos por la derivada de la función interior. Así, la derivada de *cos(xy)* es $-sin(xy)\cdot(y+xy')$. Hasta este punto, tenemos el resultado $4x^3 + 3x^2y^2 + x^3(2yy') - sin(xy)\cdot(y+xy') = 0$. Aplicamos reglas de transformación de las expresiones algebraicas a esta ecuación para encontrar *y'*, que es $\frac{-4x^3 - 3x^2y^2 + y.\sin(xy)}{2x^3y - x.\sin(xy)}$.

Básicamente, el argumento consiste en afirmar que se han seguido correctamente las reglas de derivación y las reglas algebraicas para simplificar el resultado.

Descomposición genética

Para llevar a cabo las prácticas descritas en el apartado anterior (y activar la configuración de objetos primarios en ellas), es necesario, según el APOE, que el estudiante realice determinadas construcciones mentales. A continuación, describimos las construcciones mentales que un estudiante necesitaría realizar para aprender a resolver ejercicios de derivación implícita.

Como parte de su esquema previo de función, el estudiante: 1) ha desarrollado una construcción como proceso u objeto de las funciones explícitas e implícitas, y 2) ha desarrollado una construcción proceso u objeto de la composición de funciones. Por otra parte, como parte de su esquema de la derivada, el estudiante ha desarrollado una construcción como proceso u objeto de la derivación y sus reglas, especialmente de la regla del producto y la regla de la cadena. Para poder decir que el estudiante ha comprendido una noción matemática, es necesario que al menos haya desarrollado una construcción proceso de dicha noción.

El estudiante entonces coordina los esquemas previamente construidos de función y derivada para integrar la derivación implícita. La coordinación consiste en, primero, derivar respecto de *x* a ambos lados de la ecuación implícita, término a término, y después encontrar *y'*. Cuando el estudiante repite y reflexiona sobre esta acción, puede llegar a interiorizarla como proceso. Esta construcción mental como proceso de la derivación implícita, después, se encapsula en un objeto. Como resultado de que el estudiante establece relaciones entre estos procesos y objetos y con otros esquemas (función, derivada, ecuación, etc.) construye el esquema de derivación implícita.

RESULTADOS

Analizamos la actividad matemática en las respuestas de los estudiantes y los clasificamos en tres grupos, que se asocian con los niveles intra, inter y trans (Piaget y García, 1983) de desarrollo del esquema de derivación implícita. Primero analizamos las respuestas de los estudiantes en cada nivel basándonos en la configuración epistémica de la fase dos y después las construcciones mentales de la DG de la fase tres.

Intra: Un estudiante en este nivel deriva solo los términos formados por *x*. Considera *y* como una constante. Si un término solo tiene *y*, entonces el estudiante considera que su derivada es cero. Cuando los términos con *x* se multiplican por términos con *y*, entonces el estudiante no sabe utilizar correctamente la regla del producto. Deriva término a término y luego iguala el resultado a *y'*.

Con relación a la CE del EOS, un estudiante en este nivel entiende y puede realizar algunas partes de los procedimientos Pr0 y Pr1 y la proposición 1. Respecto a los argumentos de la CE, el estudiante en el nivel intra no puede responder a las tareas. Cabe señalar que este estudiante no puede hacer los procedimientos Pr1 y Pr2 y por esa razón no puede encontrar *y'* correctamente para todos los apartados de la tarea. Con relación a las construcciones mentales de la DG, como máximo, se ha desarrollado una construcción proceso de la composición de funciones, sin llegar a encapsularla como objeto. 11 estudiantes de nuestra investigación se sitúan en el nivel intra (en la Figura 1 hay un ejemplo de respuesta):

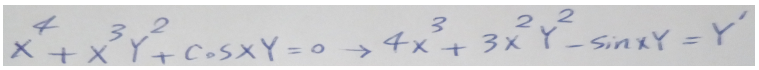


Figura 1. Respuesta de un estudiante en el nivel intra

Inter: Un estudiante en este nivel considera *y* como una función de *x*. Utiliza adecuadamente la regla del producto para los términos que son producto de *y* por una función de *x*, pero no sabe utilizar correctamente la regla de la cadena cuando la función interior incluye *y*.

Respeto a la CE del EOS, un estudiante en este nivel entiende y puede hacer los procedimientos Pr0, algunas partes de Pr1 y Pr2, utiliza las proposiciones 1, 2, 3, y puede utilizar la proposición 4 cuando la función interior incluye solo *x* y no *y*. El hecho de que el estudiante no sepa aplicar la

proposición 4 cuando la función interior incluye *y*, le impide obtener la solución correcta. En cuanto a los argumentos de la CE necesarios para resolver la tarea, el estudiante en este nivel solo puede derivar correctamente los términos que incluyen solo *x* y los términos que incluyen un producto de *y* por una función de *x*. Con relación a las construcciones mentales de la DG, básicamente el estudiante no ha desarrollado una construcción objeto de la regla de la cadena. 9 estudiantes de nuestra muestra se sitúan en el nivel inter (en la Figura 2 hay un ejemplo de respuesta de este nivel):

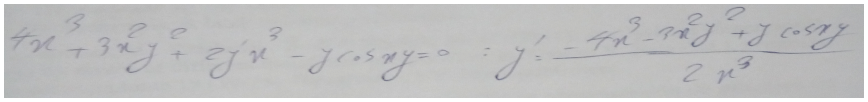


Figura 2. Respuesta de un estudiante en el nivel inter

Trans: Un estudiante en este nivel puede usar correctamente tanto la regla del producto como la regla de la cadena para derivar todos los términos de una función implícita. Sabe generalizar su conocimiento para calcular *y''* en una función implícita. Ha desarrollado todas las construcciones mentales de la DG.

Con relación a la CE del EOS, un estudiante en el nivel trans puede calcular *y'* a partir de una ecuación implícita porque sabe activar todos los objetos primarios de la CE y utilizarlos correctamente en el proceso de resolución de un ejercicio. 5 estudiantes de nuestra investigación están en el nivel trans. Con relación a las construcciones mentales de la DG, básicamente el estudiante ha desarrollado todas las construcciones mentales (en la Figura 3 hay un ejemplo de respuesta de este nivel):

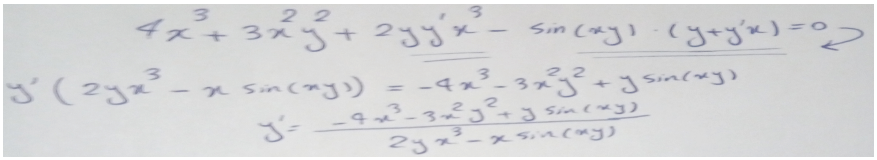


Figura 3. Respuesta de un estudiante en el nivel trans

CONCLUSIONES

Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes de nuestra investigación tuvieron problemas para desarrollar las construcciones mentales y hacer el trabajo práctico necesario para resolver las tareas, particularmente aquellas construcciones mentales que hay que hacer para derivar las funciones compuestas cuando la función interior incluye *y*, por lo que la mayoría de ellos están en los niveles intra o inter de desarrollo del esquema de derivación implícita.

Una de las limitaciones del estudio es que se trabaja la derivación implícita solo con funciones de una variable. Como señalamos al principio, la derivación implícita también tiene un papel importante en los cursos de cálculo en diversas variables. Para analizar mejor la comprensión que tienen los alumnos de esta noción, se podrían incluir ejercicios donde trabajen con funciones implícitas en diversas variables. Por otra parte, la descomposición genética que aquí presentamos está sujeta a modificaciones. La ampliación de la investigación con la posibilidad de entrevistar a los estudiantes probablemente permitiría definir mejor la transición entre las construcciones mentales como acción, proceso y objeto que desarrollan los alumnos.

Referencias

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In *Research in Collegiate mathematics education II*. CBMS issues in mathematics education (Vol. 6, pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)* en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias, 29*(2), 191-206.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578.

Borji, V., y Font, V. (2019). Exploring Students' Understanding of Integration by Parts: A Combined Use of APOS and OSA. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology*, *15*(7), em1721

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., y Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301-2315.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., et al. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 345-364.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97-124.

Font, V., Montiel, M., Vidakovic, D. y Wilhelmi, M. R. (2011). Analysis of dimensional analogy by means of different theoretical perspectives. En R. Nata (Ed.), *Progress in Education* (pp.39-76). New York, USA: Nova Science Publishers.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics, 91*(1), 107-122.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., y Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: Nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International journal of mathematical education in science and technology, 48*(3), 374-392.

Mackie, D., y Court, S. (2002). Using Computer Algebra to Encourage a Deep Learning Approach to Calculus. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Retrieved from in http://users.math.uoc.gr/~ictm2/

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 395-421.

Piaget, J., y Garcia, R. (1983). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press.

Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*. *16*(6) 16, 1091–1113.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*. *21*(1), 63–94.

Stewart, J. (2010). *Calculus*. Mason, OH: Brooks/Cole Cengage Learning.

Tall, D. (2013*). How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge University Press.

Tiwari, T. K. (2007). Computer Graphics as an Instructional Aid in an Introductory Differential Calculus Course. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. *2*(1), 32-48.

Trigueros M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*(1), 3-19.

[i] Estudio realizado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

ANSIEDAD MATEMÁTICA Y LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE: EL CASO DE DOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Anxiety and professional noticing: the case of two pre-service teachers

Buforn, À., Pérez-Tyteca, P., Monje, J.

Universidad de Alicante

Resumen

La ansiedad matemática es una de las respuestas afectivas más influyentes en el aprendizaje de las matemáticas afectando en particular a los estudiantes para maestro, condicionando de esta manera el desarrollo de competencias docentes que deben adquirir, como la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Nuestro objetivo es buscar una primera aproximación sobre el posible vínculo entre ansiedad matemática y mirada profesional a partir de dos estudiantes para maestro Nuestros resultados muestran que, efectivamente, así es. De este modo, podemos sospechar que ambos constructos pueden estar vinculados, lo que puede servirnos de guía en futuras investigaciones donde abarquemos a la totalidad de los estudiantes para maestro.

Palabras clave: *ansiedad matemática, mirar profesionalmente, estudiantes para maestro, educación primaria*

Abstract

Math anxiety is one of the most influential affective responses in the learning of mathematics, particularly affecting pre-service teachers, thus conditioning the development of teaching competences that they must acquire, such as the competence of noticing students' mathematical reasoning. . Our aim is to lock for a first approximation on the possible link between maths anxiety and professional noticing from two pre-service teachers. Our results show that, this is indeed the case. In this way, we can suspect that both constructs may be linked, which can serve as a guide in future research were include all the pre-service teachers.

Keywords: *math anxiety, professional noticing, pre-service teachers, primary education*

INTRODUCCIÓN

En el aprendizaje matemático existen dos componentes psicológicas implicadas: la componente cognitiva y la componente afectiva (McLeod, 1992). Según este autor el dominio afectivo posee tres componentes básicas: las creencias, las actitudes y las emociones. En este trabajo nos centramos en las emociones, que se pueden definir como respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, y surgen en respuesta a un suceso que tiene una carga de significado positiva o negativa para el individuo (Gil, Blanco, y Guerrero, 2005). Una de las emociones que más influyen en el proceso de enseñanza de las matemáticas es la ansiedad matemática (Goldin et al., 2016), entendida como una respuesta afectiva que los estudiantes experimentan al enfrentarse a una tarea matemática concreta y que se manifiesta por medio de una serie de síntomas como son: tensión, nervios, preocupación o incomodidad (Pérez-Tyteca, 2012). Muy al contrario de lo que suele creerse, la ansiedad es innata y beneficiosa para el ser humano, sin embargo, cuando se hace notar de modo prominente es que no está funcionando óptimamente (Schlatter, 2003). Es lo que ocurre en el caso de la ansiedad matemática, ya que, en vez de realizar procesos cognitivos relevantes para la tarea, los estudiantes con un alto grado de ansiedad matemática a menudo están ocupados en cogniciones

Buforn, À., Pérez-Tyteca, P. y Monje, J. (2021). Ansiedad matemática y la competencia mirar profesionalmente: el caso de dos estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 181 – 188). Valencia: SEIEM.

irrelevantes para la tarea y absorbidos por el estrés emocional. Todo ello conduce a una reducción de la capacidad para abordar realmente las tareas que tienen entre manos (OCDE, 2004, p.160).

Uno de los colectivos de estudiantes con mayor nivel de ansiedad matemática es el de los estudiantes para maestro (Pérez-Tyteca, 2012), condicionando su aprendizaje y desarrollo de competencias docentes vinculadas a la enseñanza de las matemáticas (White, Way, Perry y Southwell, 2005). Una de estas competencias, que se debe adquirir para llegar a ser un buen maestro, es la competencia de mirar profesionalmente (Mason, 2002) y, en concreto, la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). La competencia docente mirar profesionalmente permite a los maestros identificar e interpretar aspectos relevantes en las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que otras personas, que no son profesionales, no serían capaces de reconocer (Mason, 2002). Un aspecto particular de esta competencia es la que se centra en el pensamiento matemático de los estudiantes y que Jacobs et al. (2010) conceptualizan como un conjunto de tres destrezas interrelacionadas: (i) identificar en las estrategias de los estudiantes detalles matemáticos relevantes; (ii) interpretar la comprensión matemática de los estudiantes de acuerdo a los detalles matemáticos previamente identificados; y (iii) decidir cómo responder en base a la comprensión de los estudiantes. Recientemente, algunos estudios han mostrado que mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes no es una tarea fácil para los estudiantes para maestro, mostrando una compleja relación entre las tres destrezas: identificar, interpretar y decidir (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Jacobs et al., 2010). Sin embargo, aunque el desarrollo de esta competencia no es fácil, se puede abordar en los programas de formación inicial de maestros favoreciendo que los estudiantes para maestro se trasladen desde meras descripciones de las situaciones a respuestas más analíticas (Coles, 2012; Llinares, 2013).

De acuerdo con Fisher, Jong, Thomas, y Schack (2018) es importante alinear la predisposición afectiva con una práctica de enseñanza efectiva dentro del desarrollo profesional de los maestros. Si centramos la atención en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, podemos comprobar como ésta es una línea de investigación prácticamente inexplorada. Así, en este trabajo realizamos un aporte en este sentido. Concretamente, pretendemos realizar una primera aproximación que nos arroje luz sobre el comportamiento conjunto de la ansiedad matemática y la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, con el fin de comprobar si una mirada profesional adquirida puede asociarse a una ansiedad matemática baja y si una pobre mirada profesional puede asociarse a una alta ansiedad matemática. En caso de que así sea, estaremos en posición de sospechar que existe un vínculo entre mirada profesional y ansiedad, lo que puede servirnos de guía para diseñar futuras investigaciones en las que abarquemos muestras más amplias de estudiantes para maestro donde se observen casos intermedios y particularidades propias de distintos perfiles de estudiantes para maestro. Así pues, para realizar esta primera aproximación hemos buscado casos con mirada profesional extrema (muy buena, que denominaremos adquirida, o muy pobre) y hemos comprobado si su ansiedad matemática también es extrema.

MÉTODO

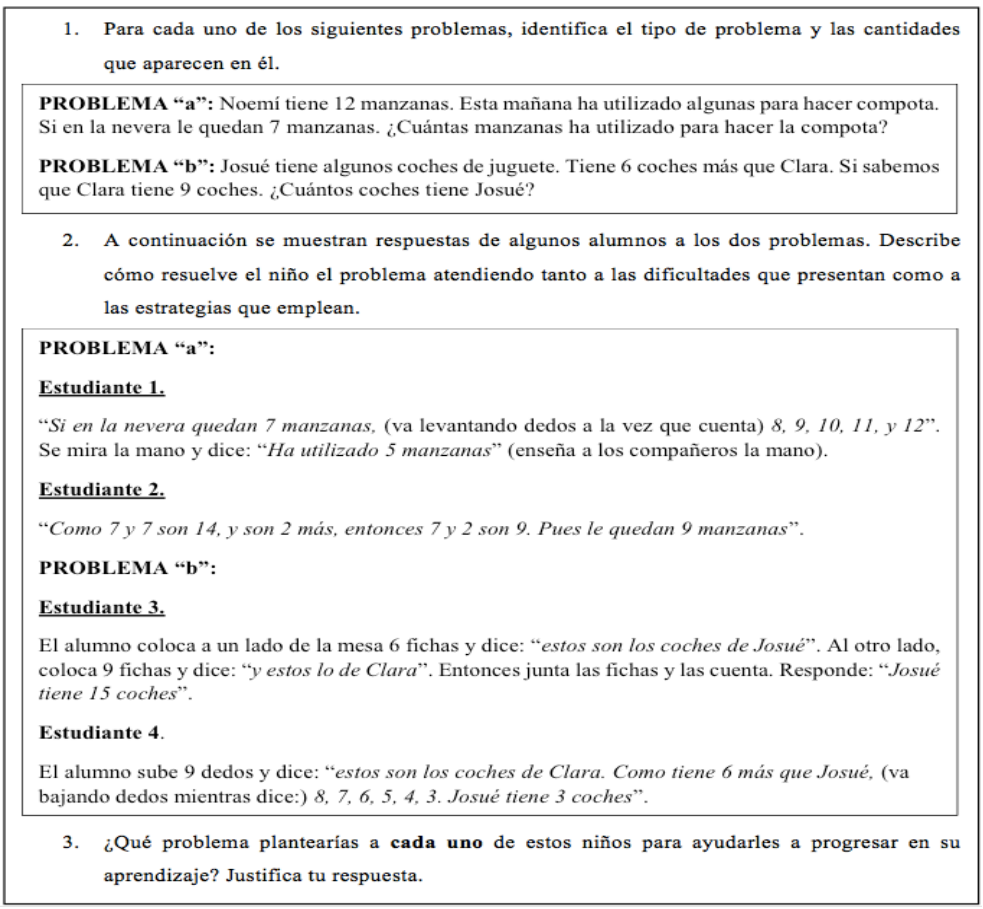
Participantes y contexto

Dado que, para comprobar el comportamiento de las variables a estudiar, necesitamos al menos dos sujetos (uno con mirada profesional pobre y otro con mirada profesional adquirida) con el fin de determinar cómo se comporta su ansiedad matemática, hemos llevado a cabo un estudio no experimental ex post facto con n=2. Así, han participado dos estudiantes para maestro (EPM_1 y EPM_2) que estaban matriculados en el tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Alicante y estaban cursando una asignatura relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Los datos fueron recogidos durante el módulo

sobre la enseñanza y aprendizaje de los problemas aritméticos elementales (PAEs). En este módulo se les proporciona, a los estudiantes para maestro, un documento teórico sobre los PAEs y se realizan diferentes tareas en las que se trabajan tipos de problemas, estrategias, dificultades de los estudiantes, etc. La última tarea de este módulo está vinculada a la competencia mirar profesionalmente, y esta nos permitió seleccionar a dos estudiantes para maestro que presentaban diferentes miradas profesionales. Ambos estudiantes para maestro se seleccionaron de manera intencionada dado que nuestro objetivo comprobar si una mirada profesional adquirida puede asociarse a una ansiedad matemática baja y si una pobre mirada profesional puede asociarse a una alta ansiedad matemática.

Instrumentos

Los datos fueron recogidos a través de dos cuestionarios. El Cuestionario 1 corresponde a la última tarea del módulo sobre PAEs (Figura 1). En la tarea se presentan dos problemas aritméticos elementales y dos respuestas de estudiantes a cada uno de los problemas. Estas respuestas muestran diferentes características de la comprensión de los estudiantes.



1. **Para cada uno de los siguientes problemas, identifica el tipo de problema y las cantidades que aparecen en él.**

PROBLEMA "a": Noemí tiene 12 manzanas. Esta mañana ha utilizado algunas para hacer compota. Si en la nevera le quedan 7 manzanas. ¿Cuántas manzanas ha utilizado para hacer la compota?

PROBLEMA "b": Josué tiene algunos coches de juguete. Tiene 6 coches más que Clara. Si sabemos que Clara tiene 9 coches. ¿Cuántos coches tiene Josué?

2. **A continuación se muestran respuestas de algunos alumnos a los dos problemas. Describe cómo resuelve el niño el problema atendiendo tanto a las dificultades que presentan como a las estrategias que emplean.**

PROBLEMA "a":

Estudiante 1.

"*Si en la nevera quedan 7 manzanas,* (va levantando dedos a la vez que cuenta) *8, 9, 10, 11, y 12*". Se mira la mano y dice: "*Ha utilizado 5 manzanas*" (enseña a los compañeros la mano).

Estudiante 2.

"*Como 7 y 7 son 14, y son 2 más, entonces 7 y 2 son 9. Pues le quedan 9 manzanas*".

PROBLEMA "b":

Estudiante 3.

El alumno coloca a un lado de la mesa 6 fichas y dice: "*estos son los coches de Josué*". Al otro lado, coloca 9 fichas y dice: "*y estos lo de Clara*". Entonces junta las fichas y las cuenta. Responde: "*Josué tiene 15 coches*".

Estudiante 4.

El alumno sube 9 dedos y dice: "*estos son los coches de Clara. Como tiene 6 más que Josué,* (va bajando dedos mientras dice:) *8, 7, 6, 5, 4, 3. Josué tiene 3 coches*".

3. **¿Qué problema plantearías a cada uno de estos niños para ayudarles a progresar en su aprendizaje? Justifica tu respuesta.**

Figura 1. Cuestionario 1 sobre la competencia mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes

Ambos problemas son problemas de estructura aditiva, en concreto el problema "a" es de *cambio decreciente* con incógnita la cantidad de cambio y el problema "b" es de *comparación creciente* con incógnita la cantidad comparada. Respecto a las respuestas del problema "a" el estudiante 1 utiliza la estrategia de conteo "contar hasta" apoyándose con los dedos para contar desde 7 hasta 12 y viendo que el número de dedos levantados es la solución al problema. El estudiante 2 utiliza hechos numéricos para resolver el problema, es decir, utiliza la idea de dobles (7+7) pero se equivoca ya que suma las 2 manzanas de diferencia en lugar de quitarlas. Para el problema "b", el estudiante 3 utiliza una estrategia de modelización (se apoya con fichas), y aunque llega a la solución correcta, no muestra comprensión del problema ya que dice que Josué tiene 6 coches y luego dice que tiene 15 coches. El estudiante 4, hace un "conteo regresivo" incorrecto (se apoya con los dedos) dado que entiende que

Clara tiene 6 coches más que Josué, siendo Josué el que tiene 6 coches más que Clara. Los estudiantes para maestro contestaron tres cuestiones relacionadas con las destrezas que caracterizan la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. La cuestión 1 pedía identificar los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema, la cuestión 2 reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes y la cuestión 3 pedía proponer un nuevo problema (o modificar el problema presentado) para ayudar al estudiante a avanzar en su comprensión.

Para estudiar la ansiedad matemática de los estudiantes para maestro se utilizó un cuestionario correspondiente a una de las subescalas del cuestionario State-Trait Anxiety Inventory for Adults (STAI) de Spielberger, Gorsuch, y Lushene (1982) (Figura 2). Este cuestionario consta de dos subescalas, una referida a la ansiedad como rasgo de la personalidad (caracterización actitudinal de la ansiedad) y otra, que se refiere a la ansiedad como estado transitivo (emoción) ante un estímulo concreto. Esta subescala es la que hemos elegido ya que, en nuestra conceptualización de la ansiedad matemática, la consideramos como una emoción, esto es, como una reacción puntual que el estudiante experimenta, en nuestro caso al resolver problemas. Por este motivo hemos utilizado la versión adaptada a la resolución de problemas de Caballero (2013). En este instrumento se incluyen sentimientos de tensión, nerviosismo, preocupación y aprensión y consta de 20 ítems (10 formulados en positivo y 10 en negativo) con una escala de cuatro posibles respuestas balanceadas para evitar la respuesta indiscriminada: nada, algo, bastante y mucho. Dado que el objetivo era examinar el nivel de ansiedad que tienen los estudiantes para maestro cuando se les presentan problemas matemáticos, se les entregó una hoja con 5 problemas aritméticos de diferentes contenidos y dificultades, aunque todos ellos de un nivel de primaria, para que intentaran resolverlos o al menos pensar cómo se podrían resolver. A continuación, respondieron al cuestionario STAI sobre ansiedad matemática.

¿Qué siento hacia la resolución de problemas de matemáticas de primaria? (STAI-A/E)

Te proponemos que cuantifiques cada una de las siguientes cuestiones, según el grado de acuerdo con las afirmaciones que se expresan.

		Nada	Algo	Bastante	Mucho
1.	Cuando estoy resolviendo problemas matemáticos me siento calmado	0	1	2	3
2.	Cuando estoy resolviendo problemas matemáticos me siento seguro	0	1	2	3
3.	Cuando estoy resolviendo problemas matemáticos estoy tenso	0	1	2	3
4.	Cuando estoy resolviendo problemas matemáticos estoy contrariado	0	1	2	3
5.	Me siento cómodo (estoy a gusto) cuando estoy resolviendo un problema matemático	0	1	2	3
6.	Cuando me enfrento a un problema matemático me siento alterado	0	1	2	3
7.	Cuando estoy resolviendo un problema matemático estoy preocupado por el posible fracaso	0	1	2	3
8.	Al resolver problemas matemáticos me siento descansado	0	1	2	3
9.	Cuando me enfrento a un problema matemático me siento angustiado	0	1	2	3
10.	Me siento confortable cuando estoy resolviendo un problema matemático	0	1	2	3
11.	Al resolver un problema matemático tengo confianza en mí mismo	0	1	2	3
12.	Me siento nervioso cuando me enfrento a un problema matemático	0	1	2	3
13.	Cuando estoy resolviendo un problema matemático estoy desasosegado	0	1	2	3
14.	Me siento muy "atado" (como oprimido" ante la resolución de problemas matemáticos	0	1	2	3
15.	Cuando estoy resolviendo un problema matemático estoy relajado	0	1	2	3
16.	Me siento satisfecho cuando estoy ante un problema matemático	0	1	2	3
17.	Cuando me enfrento a un problema matemático estoy relajado	0	1	2	3
18.	Me siento aturdido y sobre-excitado cuando estoy resolviendo un problema matemático	0	1	2	3
19.	Me siento alegre ante la resolución de problemas matemáticos	0	1	2	3
20.	Cuando estoy resolviendo problemas matemáticos me siento bien	0	1	2	3

Figura 2. Cuestionario STAI adaptado a la resolución de problemas

Análisis

Para analizar el Cuestionario 1 (competencia mirar profesionalmente), se realizó un análisis cualitativo mediante un proceso inductivo. Respecto a la identificación de elementos matemáticos, consideramos si el EPM había identificado el tipo de problema y la incógnita (Id); o si no había identificado el tipo de problema ni la incógnita (N_Id). En relación con la interpretación, consideramos si el EPM reconocía las respuestas de los estudiantes tanto si eran correctas o no y la estrategia usada (In); o si no reconocía si las respuestas de los estudiantes eran correctas o incorrectas y no identificaba las estrategias utilizadas (N_In). Finalmente, en relación a la toma de decisiones se consideró si, por un lado, el EPM proponía un problema de mayor nivel de dificultad cuando el estudiante resuelve correctamente y un problema de menor nivel cuando resuelve incorrectamente, o cambiaba las cantidades del problema para intentar que los estudiantes cambiaran de estrategia (D); y por otro lado, si el problema que proponía era del mismo nivel o inferior al planteado y por tanto no ayudaba a progresar en el aprendizaje, proponía cambios sin sentido, o lo dejaba en blanco (N_D).

Para el análisis de datos del Cuestionario 2 (ansiedad matemática) se realizó un análisis cuantitativo. Las respuestas de cada uno de los ítems fueron codificadas de la siguiente manera: 0 (nada), 1 (algo), 2 (bastante) y 3 (mucho), invirtiendo aquellas puntuaciones correspondientes a los ítems formulados en positivo. Es decir, una puntuación más alta denotará un nivel de ansiedad mayor. Una vez codificadas todas las respuestas se calculó la suma total de las puntuaciones que podría variar entre 0 y 60 puntos. Finalmente se delimitaron diferentes intervalos que corresponden a distintos niveles de ansiedad (Pérez-Tyteca, 2012; Sánchez-Mendías, 2013): de 0 a 10 puntos corresponde un nivel muy bajo de ansiedad; de 10 a 20 puntos se considera un nivel bajo de ansiedad; de 20 a 30 puntos denota una ansiedad moderada; de 30 a 40 puntos se considera una ansiedad notable; de 40 a 50 puntos ansiedad alta; y de 50 a 60 puntos diremos que la ansiedad es muy alta.

Una vez analizados los datos de ambos cuestionarios, se cruzaron los datos con la finalidad de comprobar si la ansiedad matemática del estudiante con mirada profesional adquirida es menor que la del estudiante con una pobre mirada profesional.

RESULTADOS

La Tabla 1 muestra las respuestas del EMP_1 con respecto a la identificación, interpretación y toma de decisiones referentes al problema "a" que aparece en el Cuestionario 1. Estas respuestas muestran que, este estudiante para maestro presenta una mirada profesional limitada al no tener adquiridas las destrezas de la competencia mirar profesionalmente.

Tabla 1. Respuestas del EPM_1 al cuestionario 1, problema "a"

Destreza	Respuesta del EPM_1	Resultado del análisis
Identificar	***P**roblema aritmético de segundo nivel. Sustracción de cambio*	N_Id
Interpretar	*Estudiante 1. Técnica de conteo. Contar hasta. Dificultad en la situación del conteo.* *Estudiante 2. Estrategia de sumar por experiencias anteriores y adición.*	N_In
Decidir	*Estudiante 1. Realizar unos problemas extra del mismo nivel y poco a poco añadir dificultad.* *Estudiante 2. Proponerle un problema de nivel superior.*	N_D

Como muestra la Tabla 1, el EPM_1 no identifica que el problema "a" es de cambio decreciente con incógnita la cantidad de cambio, afirmando que es un "*problema aritmético de segundo nivel, sustracción de cambio*". A su vez, no interpreta la comprensión de los estudiantes de manera apropiada. Respecto al estudiante 1, comenta que presenta "*dificultad en la situación del conteo*", cuando realmente el estudiante realiza el conteo correctamente. En relación con el estudiante 2, señala que éste realiza la "*estrategia de sumar por experiencias anteriores y adición*". Sin embargo, el

estudiante 2 utiliza la estrategia de "hechos numéricos", concretamente la idea de dobles, aunque se equivoca en el cálculo. Además, el EPM_1 tampoco hace referencia a la corrección de la respuesta, siendo la del estudiante 2 incorrecta. En cuanto a la toma de decisión, este estudiante para maestro no sustenta ni justifica sus decisiones, proponiendo sin sentido problemas del mismo nivel o superiores. En concreto, para el estudiante 1, que había realizado el problema correctamente, propone realizar un "*problema del mismo nivel*" y para el estudiante 2, que había realizado el problema incorrectamente, propone ponerle un "*problema de nivel superior*". Por estos motivos consideramos que su mirada profesional con respecto a los problemas aritméticos es limitada, ya que no podría ayudar a progresar a sus alumnos en su aprendizaje.

En cuanto a su nivel de ansiedad, este sujeto presenta un nivel alto de ansiedad con una puntuación contenida en el intervalo [40,50), en concreto 48 puntos. Después de leer e intentar esbozar una solución a la colección de problemas aritméticos que acompañaban el Cuestionario 1, respondió a los ítems de éste reflejando que no se siente nada calmado, seguro, cómodo, relajado o satisfecho ante este tipo de problemas. Asimismo, expresa sentirse muy contrariado, bastante preocupado por el fracaso y poseer nula confianza en sí mismo.

En la Tabla 2, se muestran las respuestas del EPM_2 con respecto a la identificación, interpretación y toma de decisiones referentes al problema "a" que aparece en el Cuestionario 1. Estas respuestas muestran que, este estudiante para maestro presenta una buena mirada profesional al tener adquiridas las destrezas de la competencia mirar profesionalmente (Tabla 2).

Tabla 2. Respuestas del EPM_2 al cuestionario 1, problema "a"

Destreza	Respuesta del EPM_1	Resultado del análisis
Identificar	*Problema de estructura aditiva, de cambio decreciente, con incógnita en la cantidad de cambio. Nivel de dificultad 2.*	Id
Interpretar	*Estudiante 1. Resuelve utilizando una estrategia de conteo, concretamente contar hasta, ya que empieza a contar desde el número más pequeño hasta llegar al mayor y haciendo registro con los dedos para ver cuántos cuenta, dando como respuesta los dedos que ha levantado.* *Estudiante 2. Intenta resolverlo utilizando hecho numéricos, con el uso de dobles. Pero presenta dificultades ya que ve que tiene dos más de las que tenía pero luego en lugar de restarlas, las suma.*	In
Decidir	*Estudiante 1. Como ha resuelto bien el problema anterior que era de nivel 2, propondría uno de nivel 3, de cambio decreciente con incógnita en la cantidad inicial, como el siguiente: Juan tenía algunos caramelos, se comió 3 y ahora le quedan 5. ¿Cuántos caramelos tenía Juan antes?* *Estudiante 2. Como presenta dificultades para resolver el problema de nivel 2, propondría uno más fácil, de nivel 1, de cambio decreciente con incógnita en la cantidad final, como el siguiente: Pedro tenía 7 cromos, le regaló 2 a su amigo Álex. ¿Cuántos cromos le quedan a Pedro?*	D

Como muestra la Tabla 2, el EPM_2 identifica que el problema "a" es un problema "*de cambio decreciente, con incógnita en la cantidad de cambio*", e interpreta de manera adecuada las respuestas dadas por los estudiantes 1 y 2, describiendo el tipo de estrategia que han utilizado (conteo - contar hasta; y hechos numéricos - uso de dobles, respectivamente) y reconociendo en el caso del estudiante 2, que éste no ha sido capaz de utilizar la estrategia correctamente: "*presenta dificultades ya que ve que tiene dos más […] pero en lugar de restarlas, las suma*". Cuando se le pide que proponga tareas que ayuden a los alumnos a progresar, para el estudiante 1 plantea un problema con mayor nivel de dificultad cambiando la incógnita: "*como ha resuelto bien el problema […] propondría uno […] de cambio decreciente con incógnita en la cantidad inicial*". Para el estudiante 2, propone un problema con menor grado de dificultad que el original: "*como presenta dificultades […], propondría uno […] de cambio decreciente con incógnita en la cantidad final*". Además en ambos casos, escribe un

problema con las características mencionadas. Es por ello por lo que consideramos que este estudiante para maestro tiene adquiridas las destrezas de la competencia "mirar profesionalmente" y, por tanto, podría ayudar a sus alumnos a progresar en su aprendizaje sobre la resolución de problemas aritméticos.

Respecto al nivel de ansiedad matemática, este participante ha obtenido una puntuación mucho más baja que su compañero. En particular, EPM_2 muestra un nivel de ansiedad bajo con una puntuación dentro del intervalo [10, 20), en concreto 17 puntos. Este estudiante para maestro indica, entre otras cosas, que no se siente nada tenso, alterado, oprimido, desasosegado ni aturdido al resolver problemas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo era comprobar si un estudiante con una pobre mirada profesional presenta ansiedad matemática alta y si, por el contrario, un estudiante que ha adquirido la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños cuando resuelven problemas posee baja ansiedad matemática.

Tras haber seleccionado un estudiante para maestro con una mirada profesional limitada y uno con un alto grado de adquisición de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes al resolver problemas aritméticos, y haber analizado su nivel de ansiedad ante la resolución de este tipo de problemas, podemos concluir que, efectivamente, nuestros participantes cumplen la premisa contenida en la pregunta de investigación. Es decir, el estudiante para maestro con una mirada profesional limitada presenta un alto nivel de ansiedad (EPM_1) y en contraposición, el estudiante para maestro con alto grado de adquisición de las destrezas de la competencia mirar profesionalmente reporta un nivel bajo de ansiedad (EPM_2). Concretamente, hemos podido comprobar cómo el EPM_2 que ha sido capaz de identificar los tipos de problema planteados, interpretar de manera adecuada las respuestas de los estudiantes y proponer tareas que ayuden a los estudiantes a progresar en su aprendizaje, declara no experimentar sentimientos negativos típicos de la ansiedad matemática (desasosiego, tensión,…). Por el contrario, el EPM_1 que no ha sido capaz de identificar los tipos de problemas, interpretar adecuadamente las respuestas de los estudiantes, ni ayudarles a progresar proponiendo nuevos problemas, manifiesta no sentirse cómodo, relajado, satisfecho o seguro de sí mismo cuando se enfrenta a la resolución de problemas aritméticos de primaria. Estos resultados están en línea con los obtenidos por Fisher et al. (2014), que comprobaron que a medida que los estudiantes para maestro iban incrementando la adquisición de las tres destrezas de la mirada profesional, su ansiedad matemática iba disminuyendo.

Así, hemos comprobado cómo la ansiedad matemática de los futuros maestros, además de poder transmitirse a sus alumnos (Sloan, Daane y Giesen, 2002; Wood, 1988), parece estar vinculada con su práctica profesional, pudiendo dificultar que el docente adquiera una adecuada mirada profesional, competencia importante para su labor docente (Fernández, et al., 2018; Mason, 2002). Por este motivo nuestra recomendación es integrar en los módulos de formación inicial de maestros el trabajo alrededor de la ansiedad matemática de los estudiantes y de su mirada profesional.

Referencias

Caballero, A. (2013). *Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención en Control Emocional y Resolución de Problemas Matemáticos para Maestros en Formación Inicial*. (Tesis doctoral) Universidad de Extremadura, Extremadura

Coles, A. (2012). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. Journal of Mathematics Teacher Education online first, DOI 10.1007/s10857-012-9225-0.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students'mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39 - 61.

Fisher, M. H., Jong, C., Thomas, J. y Schack, E. O. (2018). Noticing Pre-Service Teachers' Attitudes Toward Mathematics in Traditional and Online Classrooms. En D. Polly, M. Putman, T. Petty, y A. Good (Eds.), *Innovative Practices in Teacher Preparation and Graduate-Level Teacher Education Programs* (pp. 123-133). Hershey, PA: IGI Global. doi:10.4018/978-1-5225-3068-8.ch008.

Fisher, M. H., Schack, E. O., Thomas, J. N., Jong, C., Eisenhardt, S. y Tassell, J. (2014). Examining the relationship between preservice elementary teachers' attitudes toward mathematics and professional noticing capacities. En J. J. Lo, K. R. Leatham, y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 219–237). Switzerland: Springer International Publishing.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15-32.

Goldin, G. A., Hannula, M. S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in mathematics Education. An Overview of the field and Future Directions.- ICME-13 Topical Surveys.* London: Springer.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169‑ 202.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada: Granada.

OCDE (2004). *Informe PISA 2003: Aprender para el Mundo del Mañana.* España: Santillana.

Sánchez-Mendías, J. (2013). *Actitudes hacia las matemáticas de los futuros maestros de Educación Primaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Schlatter, J. (2003). *La ansiedad. Un enemigo sin rostro.* Navarra: EUNSA.

Sloan, T., Daane, C. J. y Giesen, J. (2002). Mathematics anxiety and learning styles: What is the relationship in elementary preservice teachers? *School Science and Mathematics*, *102* (2), 84-87.

Spielberger, C. D., Gorsuch, R. R. y Lushene, R. E. (1982). *STAI. Cuestionario de*

Ansiedad Estado/Rasgo. Madrid: TEA Ediciones.

White, A., Way, J., Perry, B. y Southwell (2005). Mathematical Attitudes, Beliefs and Achievement in Primary Pre-service Mathematics Teacher Education. *Mathematics Teacher Education Development, 7,* 33-52.

Wood, E. F. (1988). Math anxiety and elementary teachers: What does research tell us? *For the Learning of Mathematics*, *8* (1), 8-13.

CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE INCERTIDUMBRE

Uncertainty knowledge of preservice teachers

Castilla-Mora, L.[a], Rifo, L.[b] y Climent, N.[a]

[a]Universidad de Huelva (España), [b]Universidade Estadual de Campinas (Brasil)

Resumen

En este trabajo se presenta una investigación centrada en el conocimiento de futuros maestros de Primaria sobre incertidumbre. Se han analizado las respuestas a dos preguntas de un cuestionario de 90 estudiantes del Grado de Maestro de la Universidad de Huelva que no habían recibido formación en probabilidad en el Grado. Los resultados indican que los futuros maestros asocian aleatoriedad a mecanismos de sorteo, en contexto equiprobable, aunque no dominan reglas básicas del cálculo de probabilidades. Además, si bien no logran asignar medidas de incertidumbre a sucesos desconocidos, se muestran capaces de ponderar informaciones parciales sobre contextos cotidianos, lo que les permite hacer afirmaciones subjetivas de probabilidad. Los resultados sugieren la inclusión del enfoque subjetivista en su formación.

Palabras clave: *probabilidad, incertidumbre, futuros maestros, Primaria.*

Abstract

This paper presents a research focused on preservice Primary teachers' knowledge about uncertainty. The answers to two questions from a questionnaire of 90 students of Primary Teacher Degree at University of Huelva have been analyzed. They had not received training in probability in the Degree. The results show that future teachers associate randomness with drawing mechanisms, in an equiprobable context, although they do not master basic rules of probability calculation. Besides, while they are unable to assign uncertainty measures to unknown events, they are capable of weighing partial information about everyday contexts, allowing them to make subjective statements of probability. The results suggest to include the subjectivist approach in their training.

Keywords: *probability, uncertainty, preservice teachers, Primary School.*

INTRODUCCIÓN

Si bien el estudio de la probabilidad forma parte de los currículos de Educación Primaria desde hace más de dos décadas, maestros y futuros maestros parecen no haber recibido formación adecuada para abordar su enseñanza. En parte, puede explicarse por la complejidad de la noción de aleatoriedad. Diversos estudios se han centrado en discutir interpretaciones de la probabilidad (clásica, frecuentista y subjetivista) y sus implicaciones en la enseñanza, como se menciona en Batanero (2016), así como en la formación y conocimiento de profesores (ver, por ejemplo, Chernoff y Sriraman, 2014).

Esta investigación se centra en el conocimiento de futuros maestros de Primaria sobre incertidumbre sin formación al respecto en el Grado. Los estudiantes para maestro de la Facultad de Educación de Huelva no inician su formación con igual manejo de estos contenidos, esto puede deberse a la diversidad de sus estudios antes del acceso. Además, en los niveles no universitarios se suelen trabajar dichos contenidos desde un enfoque

Castilla-Mora, L., Rifo, L. y Climent, N. (2021). Conocimiento de futuros profesores sobre incertidumbre. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 189 – 196). Valencia: SEIEM.

clásico de probabilidad, si acaso incluyendo el significado frecuencial, enfatizando el modelo equiprobable y su aplicación a mecanismos de sorteo (Gómez, Ortiz y Gea, 2014).

Con estos antecedentes, la pregunta que guía el trabajo que presentamos en esta comunicación es cuál es el conocimiento de futuros maestros sobre probabilidad clásica (en concreto, probabilidad condicionada y cálculo de probabilidades), y sobre probabilidad subjetiva, antes de recibir formación al respecto en sus estudios para maestro. Nos preguntamos a su vez si hay asociación entre ambas comprensiones.

MARCO TEÓRICO

De los significados atribuibles a la aleatoriedad (e.g., Batanero, 2005), nos interesa especialmente la interpretación subjetiva y su utilización para la toma de decisiones. Dicho abordaje está basado en la teoría de la probabilidad como fue presentada inicialmente por De Finetti (2017) y desarrollada por diversos autores, como Kadane (1999) y Lindley (2006). Así, la probabilidad es vista, más que intrínseca a los fenómenos, como un modelo de la información parcial o incertidumbre del observador.

El enfoque subjetivista implica que nuestra asignación de probabilidades puede cambiar si cambia nuestra información. Ambos, asignación y actualización de la asignación, deben seguir reglas consecuentes de lo que llamamos coherencia, un concepto proveniente de la teoría de la decisión. Se ha demostrado que la axiomática relacionada con la coherencia es equivalente a la de Kolmogorov, lo que significa que se mantienen las reglas usuales del cálculo de probabilidades. Por otra parte, la interpretación clásica de la probabilidad es un caso particular de la asignación subjetiva, al considerar condiciones como simetría de los resultados de un experimento o falta de información.

Además de ser más amplio, el abordaje asociado a la teoría de la decisión utiliza un lenguaje próximo al cotidiano (e.g. coherencia o utilidad) que hace de la intuición del alumno una herramienta importante en la construcción heurística y formal de este contenido.

Desde la perspectiva subjetivista, el enfoque clásico de la probabilidad corresponde al caso particular en el que son aceptables condiciones de simetría de acuerdo con la información del observador. Si bien la equiprobabilidad es fundamental para desarrollar modelos matemáticos complejos con aplicación en diversas ciencias, tales aplicaciones son distantes de la realidad escolar de enseñanza básica. De esta forma, la exposición exclusiva al abordaje clásico, asociado típicamente a mecanismos de sorteo, muestra la probabilidad como algo sin mayores consecuencias en el cotidiano de los alumnos.

Por otro lado, la interpretación frecuencial, proveniente de teoremas como la Ley de los Grandes Números, no puede ser usada para definir probabilidad, ya que el resultado matemático es válido cuando se supone conocida la distribución de probabilidad de las variables en juego, bajo condiciones controladas de dependencia probabilística; o sea, pasa a ser una definición circular. Sin embargo, es útil para sensibilizar la intuición de los alumnos en los casos en que tiene sentido la repetición de experimentos permutables entre sí, para hacer afirmaciones cualitativas de sucesos (poco probable, ocurre casi siempre...) o para introducir el pensamiento inferencial (qué se puede deducir de una muestra).

Numerosos estudios han detectado carencias en el conocimiento probabilístico de maestros y futuros maestros de Educación Primaria. Fernández et al. (2016) muestran que los futuros maestros no siempre consideran la no reposición y tienen dificultades en relacionar probabilidades de experiencias simples y compuestas. Además, Batanero, Contreras y Díaz (2012) constatan que estudiantes para maestro tienen dificultad con

experimentos compuestos con situaciones sincrónicas, confundiendo independencia y exclusión o asignando valor mayor a la probabilidad simple que a la conjunta.

Otros trabajos previos han puesto de manifiesto que maestros y estudiantes para maestro asocian la aleatoriedad principalmente a situaciones cuyo resultado es incierto y en las que no se pueden controlar las causas que intervienen, y escasamente a falta de información (Azcárate, Cardeñoso y Porlán, 1998). Además, reconocen la aleatoriedad sobre todo en contextos de juegos de azar, en menor medida en situaciones de la vida cotidiana y aún menos en contextos físico-naturales (Cardeñoso y Azcárate, 2004).

METODOLOGÍA

Nuestros informantes han sido 90 alumnos de la materia *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria II*, de tercero del Grado de Maestro de la Universidad de Huelva (centrada en la enseñanza y aprendizaje de medida, estadística y probabilidad). Estos informantes, excepto cuatro, cuando completaron el cuestionario no habían recibido formación en probabilidad en el Grado. La mayor parte, 49, habían visto probabilidad en Bachillerato, 19 en secundaria y los 18 restantes en primaria o nunca.

La información se recogió por escrito de forma individual a través de un cuestionario con seis preguntas, de las cuales analizaremos las preguntas 5 y 6 en este trabajo [Tabla 1].

Tabla 1: Preguntas para la recogida de información

Pregunta 5

Consideremos el siguiente problema:

En una fuente, hay diez empanadillas, de las cuales solamente dos tienen aceitunas dentro. Ana decide comprar dos empanadillas. ¿Cuál es la probabilidad de que elija, sin saberlo, las dos empanadillas con aceitunas?

( ) 1/45 ( ) 1/20 ( ) 1/10 ( ) 1/5 ( ) 1/2

Supongamos que has resuelto el problema con tus alumnos realizando la operación

$$\frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

y que, para darle significado, propones la siguiente interpretación:

"Esto significa que si Ana va todos los días a comprar dos empanadillas, durante un mes y medio (45 días), se espera que solo una vez le toquen las dos empanadillas con aceituna".

Algunos alumnos creen que este valor es demasiado pequeño: la situación parece ser más probable que eso. ¿Qué harías para convencerlos de que el resultado es correcto?

Observación: tus estrategias pueden ser, por ejemplo, una nueva resolución, discusión o explicación, o una actividad para la clase siguiente, entre otras. Intenta proponer una actividad que dure máximo una clase.

Pregunta 6

Una profesora extranjera llega a Huelva y, mirando el mapa de la ciudad, concluye que la mitad de los estudiantes de la Universidad deben vivir a un lado de la Avenida Andalucía (o su continuación, como en la figura), y la otra mitad, al otro lado de la avenida.

¿Estás de acuerdo con esa conclusión?

En tu opinión, ¿cuál es la proporción de estudiantes que viven a cada lado de la avenida?

Justifica estos valores según la información de que dispones.

Con la Pregunta 5, queremos identificar la familiaridad de los futuros maestros con el cálculo clásico de probabilidades bajo condiciones de equiprobabilidad (Objetivo O1), en un contexto típico de variables de Bernoulli dependientes: extracciones sin reposición de una colección de objetos. En particular, queremos explorar su conocimiento sobre: probabilidad condicional (O1.1), la regla del producto (O1.2), métodos de conteo (O1.3)

e interpretación frecuencial (O1.4). En esta pregunta también pretendemos identificar si el tipo de argumentación utilizado está en el contexto del significado Laplaciano o no.

La Pregunta 6 implica componentes subjetivos, usualmente no abordados en su formación, permitiendo asociar la asignación de probabilidades a una medida de incertidumbre o información parcial del observador. En ella, exploramos si identifican modelos de incertidumbre para una cantidad desconocida (Objetivo O2) y si usan argumentos geográficos o conocimientos a priori (O2.1) o de simetría (O2.2).

Los cuestionarios fueron completados por los estudiantes en el aula formativa, como parte del desarrollo de la materia, de forma voluntaria y anónima. No se les hizo ninguna aclaración a los enunciados ni se respondieron cuestiones durante su desarrollo.

La clasificación de las respuestas ha sido dividida en dos aspectos: el tipo de respuesta y el tipo de argumentación usada [Tabla 2].

Tabla 2: Objetivos, indicadores y categorías de respuestas en cada pregunta.

Objetivo / indicador	**Respuesta**	**Argumentos**
Pregunta 5		
O1 Parece comprender el cálculo clásico de probabilidades bajo condiciones de equiprobabilidad	**O1** señala y justifica 1/45 **1/5** señala 1/5, con o sin argumentación **Otro** señala 1/20 o 1/2, con o sin argumentación	**L** Laplaciano **FC** Fuera de contexto
Pregunta 6		
O2 Identifica modelos de incertidumbre para una cantidad desconocida	**O2.a** asigna un valor específico para la proporción **O2.b** indica qué región tiene mayor probabilidad, sin asignar valores **otro** afirma la imposibilidad de asignar algún valor a la proporción	**O2.1** geográficos o conocimiento a priori **O2.2** de simetría (geométricos o de conteo) **otro** afirma la imposibilidad de asignar algún valor a la proporción

Para la Pregunta 5, sobre cálculo de probabilidades clásico, el tipo de respuesta se divide en las categorías: "O1"-respuesta correcta, alcanzándose el objetivo O1; "1/5"-corresponde a una respuesta incompleta, pues considera una sola extracción; "otro"-corresponde a las demás alternativas. El tipo de argumentación se divide en: "L"-Laplaciano y "FC"-fuera de contexto. Estas categorías emergieron del análisis exploratorio de los datos, siendo las más comunes. En la categoría L fueron incluidas también dos observaciones que usan argumento solamente frecuencial (con respuestas "1/5" y "otro"), por creer que ambos argumentos representan el abordaje usual en la comprensión de probabilidad. Hay otras respuestas que mezclan ambos tipos de argumentación (Laplaciana y frecuencial), pero separarlas en más de una categoría no parece que sea más informativo.

En la Pregunta 6, el tipo de respuesta se divide en: "O2.a"-asigna un valor específico para la proporción; "O2.b"-hace una afirmación sobre la proporción, sin asignar un valor específico; "no"-considera que no se puede hacer ninguna cuantificación ni afirmación al respecto de la proporción desconocida, por diversos motivos (ver categoría siguiente). El tipo de argumentación, también emergente de las respuestas, se divide en las categorías: "O2.1"-en el que se usan argumentos geográficos específicos o conocimiento por experiencia personal respecto de dónde viven los estudiantes; "O2.2"-en el que se usan argumentos geométricos al respecto de la proporción del área contenida a cada lado o de conteo de la cantidad de regiones; "otro" - en el que se argumenta sobre la imposibilidad de hacer algún tipo de afirmación por falta de datos o de conocimiento.

En todas las dimensiones anteriores, se considera la categoría NA ("No responde").

Con el análisis de estas dos preguntas, pretendemos además estudiar la correlación entre el conocimiento del cálculo básico de probabilidades y la pertinencia de asignar probabilidades, fuera del contexto equiprobable, a partir de la información personal.

RESULTADOS

Una vez consensuado el análisis, se hizo un recuento de las respuestas en cada categoría [Tablas 3,4,5]. En ambas cuestiones el indicador "No responde" contiene pocos casos (15 y 9 casos, respectivamente), pudiendo indicar carencia de conocimiento del tema.

Tabla 3: Distribución observada de categorías de respuesta y argumento (Pregunta 5).

	O1	**1/5**	**otro**	**NA**	**total**	
L	12	16	6	3	**37**	**41,1%**
FC		12	2	5	**19**	**21,1%**
NA		18	9	7	**34**	**37,8%**
Total	**12 (13,3%)**	**46 (51,1%)**	**17 (18,9%)**	**15 (16,7%)**	**90**	

Del análisis de la Pregunta 5 [Tabla 3], se observa que los futuros maestros lo que más usan es el significado Laplaciano de conteo suponiendo equiprobabilidad (37 de los 90 hacen uso de ello, y de estos 12 lo usan de forma correcta y saben explicarlo). Un conocimiento que parece estar bien asentado entre estos 12 informantes es el de la probabilidad condicionada. En estos casos, argumentan que en la segunda extracción la probabilidad de extraer una empanadilla con aceitunas pasa de 2/10 a 1/9 *porque tenemos una empanadilla menos y esa tenía aceitunas* (Informante I685). Un aspecto llamativo es que solo uno de los 12 futuros maestros mencionados hace explícita su comprensión de la regla del producto, explicándolo como la fracción de veces en que se saca la segunda empanadilla de aceitunas de la fracción de veces en que se saca la primera, 1/9 del 20%.

Del total, 46 podemos considerar que se quedan a mitad de camino, pues responden 1/5 o 2/10, de los cuales 14 hacen explícito que entienden la probabilidad de la primera extracción como conteo de casos favorables, aunque obvian la segunda extracción sin reemplazamiento, seguramente por no manejar bien la probabilidad condicionada [Figura 1]. Los 17 en la categoría "otro" se limitan únicamente a marcar uno de los demás resultados propuestos, 1/2 o 1/20, sin justificaciones o con razonamientos erróneos.

Hemos de destacar el alto número de informantes, 19 de los 90, cuya respuesta no se ajusta (parcial o totalmente) a lo solicitado y 34 que no presentan ningún argumento. Esto nos lleva a pensar en un conocimiento sobre cálculo de probabilidades poco sólido.

Mostrarles el problema de manera real y que recopilen los datos que van obteniendo. Finalmente se explica:
- casos favorables: 2 llevan aceitunas y relleno
- casos desfavorables: 10 llevan solo el relleno
P(A,B)= 2/10 , simplificado 1/5

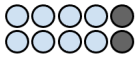
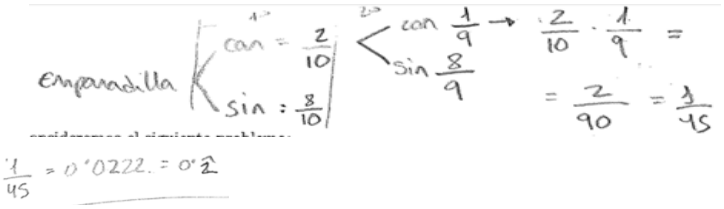


Figura 1: Resolución de la Pregunta 5, informante I650, sin considerar el condicionamiento.

Como comentamos, algunos estudiantes (concretamente 10) aportaron evidencias de la interpretación frecuencial. Por ejemplo, I574 propone mezclar bolas de color rojo para simbolizar las empanadillas sin aceitunas y dos de color verde que simbolicen las con aceitunas y hacer extracciones. Algo similar propone I610 [Figura 2].



Les diría que esta es la probabilidad de que le toquen las dos empanadillas con aceitunas 1 día, para que se imaginen la poca posibilidad que esto conlleva. La actividad que haría es meter 10 bolas en una urna opaca, de las cuales 8 sean de un color y 2 de otro. Les pediremos que hagan 2 extracciones, como Ana, para que se den cuenta lo que este 1/45 significa, es decir, la poca probabilidad que existe de que saquen las 2 del mismo color.

Figura 2: Explicación para la Pregunta 5, informante I610.

En lo que se refiere a la Pregunta 6 [Tabla 4], 9 futuros maestros no respondieron a la pregunta. De los 81 restantes, 44 (casi un 49% del total) no identifican la situación como susceptible de modelizarse con probabilidad, argumentando distintas razones. Este es el caso del informante I563, quien dice no estar de acuerdo *puesto que un lado de la avenida es más grande que el otro. Además, podemos encontrarnos que la mayor parte de los alumnos viva a un lado o a otro [...]o que todo el mundo viva en un solo lado de la avenida*. Esto podría significar que no asocian lo aleatorio a falta de información.

Tabla 4: Distribución observada de categorías de respuesta y argumento (Pregunta 6).

	O2.a	**O2.b**	**no**	**NA**	**total**	
O2.1	14	10	14		**38**	**42,2%**
O2.2	5	5	1		**11**	**12,2%**
otro			27		**27**	**30,0%**
NA	3		2	9	**14**	**15,6%**
total	**22 (24,4%)**	**15 (16,7%)**	**44 (48,9%)**	**9 (10,0%)**	**90**	

Frente a estos, 37 de los 90 alumnos hacen afirmaciones sobre la proporción requerida basándose en información de la que disponen por su propia experiencia (como donde viven mayoritariamente los estudiantes de la UHU que conocen, como la justificación de I567: *debido a que conozco a más gente que vive en el lado de Fuentepiña*), argumentos geográficos (por ejemplo, I569 considera que *el 80% vivirá en un lado porque es el más cercano a la universidad y es donde buscarán piso los estudiantes de fuera de Huelva, mientras que en el otro lado vivirán los estudiantes de Huelva*) o aspectos de simetría de la figura, asignando la misma proporción a cada lado. De estos, 22 estiman con un valor numérico preciso la población de cada parte (es el caso presentado en los ejemplos anteriores) y 15 indican la región más poblada sin precisar la proporción.

Algo más del 10% del total de los EPM, 11 de 90, relaciona la proporción con el área de cada región, 5 de ellos dando un valor numérico preciso (I627: *En mi opinión y bajo la observación de la imagen, veo que no corta justo por la mitad sino un poco más. Es decir, sería entre 1/2 y 1/3*) y 5 indicando qué región tiene más probabilidad sin dar un valor numérico (I573: *vive más a la izquierda ya que hay más territorio*). Comparando estos datos con los antes expuestos, observamos que los estudiantes priman argumentos de su experiencia a priori o geográficos sobre los de simetría, 38 frente a 11, y dan un valor numérico preciso más que valorar qué región tendrá mayor proporción, 22 frente a 15.

Finalmente, formamos la tabla de contingencia [Tabla 5] entre el argumento usado en la Pregunta 5 (Laplaciano, fuera de contexto, ninguno) y la respuesta de la Pregunta 6 (asignación numérica, afirmación cualitativa, inadecuación de la asignación, ninguna). Observamos una fuerte asociación positiva entre el uso de la argumentación Laplaciana (correcto o no) y no lograr, o creer no posible, algún tipo de afirmación sobre la proporción desconocida de la Pregunta 6. Esta asociación se debilita acentuadamente entre los estudiantes que no lograron argumentar correctamente o no responden a la Pregunta 5 pero logran hacer algún tipo de afirmación basada en su conocimiento previo.

Tabla 5: Distribución conjunta de categorías de respuesta, P6, y de argumento, P5.

	O2.a	**O2.b**	**no**	**NA**	**total**	
L	4	4	26	3	**37**	**41,1%**
FC	4	5	7	3	**19**	**21,1%**
NA	14	6	11	3	**34**	**37,8%**
total	**22 (24,4%)**	**15 (16,7%)**	**44 (48,9%)**	**9 (10,0%)**	**90**	

CONCLUSIONES

Los resultados presentados en la sección anterior nos permiten hacer algunas conjeturas.

Aunque más de un 40% haya justificado la probabilidad en la Pregunta 5 con un argumento Laplaciano, aproximadamente 2/3 de éstos mostraron dificultades en el cálculo de la probabilidad conjunta u obviaron el no reemplazamiento, coincidiendo con las dificultades advertidas en Fernández et al. (2016) y Contreras et al. (2010). A la vista de esto, hemos de tener en cuenta que se debe trabajar la probabilidad condicionada con los futuros profesores considerando que, aunque manejan los métodos de conteo y equiprobabilidad, no todos lo hacen al mismo nivel. Además, la comprensión fundamentada de la regla del producto se ha mostrado un escollo, lo que cabe considerar de cara a su formación. Estos contenidos han debido formar parte de su formación preuniversitaria, lo que da cuenta de sus lagunas en probabilidad cuando acceden a su formación como maestros.

Observamos, en la Pregunta 6, que casi la mitad de los informantes logra hacer afirmaciones sobre una proporción desconocida, frente a más del 80% que parecen asociar la situación de la Pregunta 5 con probabilidad. Esto corrobora los resultados de asociación de aleatoriedad en mayor medida a la incertidumbre que a la falta de información y a contextos de juego (Azcárate et al., 1998; Cardeñoso y Azcárate, 2004).

Los resultados, sin embargo, no son los mismos si comparamos las respuestas O2.a y O2.b a la Pregunta 6 con las respuestas correctas a la Pregunta 5. Así, observamos que un 41% de los estudiantes responden a la Pregunta 6 usando su conocimiento previo de una situación real (información geográfica o experiencial), en contraste con un 13% que

responden la Pregunta 5 usando correctamente las reglas del cálculo de probabilidades (probabilidad condicional y regla del producto), contenido que supuestamente forma parte de su formación preuniversitaria. Esto nos predispone a sugerir la inclusión en su formación del abordaje subjetivista para la asignación de probabilidades de sucesos, independientemente de si estos forman parte de un mecanismo de sorteo, aprovechando la tendencia natural de hacer afirmaciones al respecto de cantidades desconocidas o inciertas. Una posible continuación de este estudio sería el diseño y evaluación de una propuesta formativa para futuros maestros de primaria que permita asociar conocimiento previo a la atribución coherente de una medida natural de incertidumbre y a una construcción heurística del pensamiento inferencial usado en la toma de decisiones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por la Convocatoria de Proyectos de Innovación Docente e Investigación Educativa 2020/2021 (UHU).

REFERENCIAS

Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., y Porlán, R. (1998) Concepciones de futuros profesores de Primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias*, *16*(1), 85-97.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-263

Batanero, C. (2016). Understanding randomness: challenges for research and teaching. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of European Research in Mathematics Education*, CERME 9 (pp. 34-49). Praga: ERME.

Batanero, C., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2012). Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 12(2). (http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).

Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (2004). Las concepciones de los profesores de Primaria ante el conocimiento probabilístico: implicaciones para su formación. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 17, 11-35.

Chernoff, E., Sriraman, B., (Eds.) (2014). *Probabilistic thinking, presenting plural perspectives*. Dordrecht, Netherlands:Springer.

Contreras, J.M., Estrada, A., Díaz, C., Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: SEIEM.

De Finetti, B. (2017) *Theory of probability, a critical introductory treatment*. New Jersey, USA: Wiley.

Gómez, E. Ortiz, J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *AIEM*, 5, 49-71.

Fernández, J. A., Gea, M. M., y Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. En J. A. Macías et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp.217-225). Málaga: SEIEM.

Kadane, J.B., Schervish, M.J., Seidenfeld, T. (1999) *Rethinking the Foundations of Statistics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lindley, D. (2006) *Understanding uncertainty*. New Jersey, USA: Wiley.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *AIEM - Avances de Investigación En Educación Matemática*, *7*, 27–48.

EVALUACIÓN DE UNA INTERVENCIÓN FORMATIVA CON FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA SOBRE ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO[1]

Evaluating a formative intervention with prospective secondary mathematics teachers on textbook analysis

Castillo, M. J.[a], Burgos, M.[b] y Godino, J. D.[b]

[a] Universidad de Costa Rica, [b] Universidad de Granada

Resumen

Se describe y analiza una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria, dirigida a desarrollar la competencia de análisis de libros de texto aplicando las facetas y componentes de la teoría de la idoneidad didáctica. La experiencia se centra en el análisis de una lección sobre proporcionalidad. De manera específica en la faceta epistémica del proceso instruccional propuesto por los autores del libro, se comparan las valoraciones dadas por los futuros profesores sobre la unidad de razón y proporción con el análisis a priori realizado por los investigadores. El análisis de los resultados revela que los futuros profesores progresan en el reconocimiento de algunos indicadores de idoneidad didáctica y valoran positivamente la actividad realizada. También se revelan algunas limitaciones del diseño y de los aprendizajes logrados que deberán ser tenidos en cuenta en nuevos ciclos de experimentación.

Palabras clave: *formación de profesores, análisis de libros de texto, idoneidad epistémica, proporcionalidad*

Abstract

We describe and analyse a formative intervention with prospective secondary mathematics teachers, which is aimed at developing the textbook analysis competence by applying the facets and components of the didactic suitability theory. The experience focuses on the analysis of a lesson on proportionality. Specifically on the epistemic facet of the instructional process proposed by the textbook authors, the scoring given by the prospective teachers on the ratio and proportion unit are compared with the researchers' a priori analysis. The results analysis reveals that the prospective teachers progress in recognising some indicators of didactic suitability and positively value the activity carried out. The results also reveals some limitations of the design and of the learning achieved that should be taken into account in new cycles of experimentation.

Keywords: *teacher training, textbook analysis, epistemic suitability*

INTRODUCCIÓN

El análisis de libros de texto se ha convertido en un importante objeto de estudio en Educación Matemática en los últimos años (Fan, Zhu y Miao, 2013; Schubring y Fan, 2018). No obstante, la atención que ha recibido este tema en los trabajos de investigación en las actas de los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) desde 1997 a 2015 ha sido escasa sobre aspectos relacionados a cómo usan los libros de texto los docentes, o "cómo los libros

[1] Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, Spain).

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Evaluación de una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre análisis de libros de texto. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 197 – 204). Valencia: SEIEM.

de texto afectan a otros aspectos del sistema escolar, de la práctica docente y de los procesos de enseñanza y aprendizaje" (Marco-Buzunáriz, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2016, p.333).

Autores como Braga y Belver (2016) o Monterrubio y Ortega (2009, 2012) concuerdan en que el libro de texto constituye el reflejo de la experiencia práctica de los docentes y su uso en el aula se liga a una labor profesional docente que implica que éste adquiera un posicionamiento crítico. Dado que "el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real" (Monterrubio y Ortega, 2009, p.38), "el análisis del libro de texto ofrece enormes posibilidades en la formación inicial de profesionales de la educación" (Braga y Belver, 2016, p. 202).

Comprender la información existente en los libros de texto se considera un factor clave para valorar las oportunidades de aprendizaje de los alumnos y para realizar cambios fundamentados en la forma de emplearlos como un recurso potencial en el aula (Thompson, 2014). Desde la formación de profesores se debe asumir la responsabilidad de promover en los docentes la capacidad de análisis de los problemas incluidos en los libros, la identificación de objetos matemáticos que intervienen, así como las posibles dificultades de comprensión, con el fin de garantizar que los profesores dispongan de criterios para hacer un uso adecuado del libro de texto (Gómez, Contreras y Batanero, 2015).

La necesidad de considerar el análisis de libros de texto como una competencia clave en la formación de profesores, ha impulsado el interés por investigar estrategias formativas que capaciten a los profesores para analizar, valorar y hacer un uso idóneo de dicho recurso. Así, se han diseñado e implementado intervenciones formativas con futuros profesores de matemáticas de secundaria (Burgos, Castillo y Godino, 2019), empleando herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007).

El objetivo de esta comunicación es describir y analizar una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria, dirigida a desarrollar la competencia de análisis de lecciones de libros de texto aplicando las facetas y componentes del constructo idoneidad didáctica, particularizado al caso de la enseñanza de la proporcionalidad. También nos planteamos evaluar las valoraciones de la idoneidad epistémica dadas por futuros profesores sobre la unidad de análisis de razón y proporción, comparándolas con el análisis a priori realizado por los investigadores. A continuación, hacemos referencia al marco teórico, problema y método empleado. Posteriormente describimos el proceso formativo implementado, los resultados obtenidos y discusión de los mismos. En la última sección incluimos algunas reflexiones finales.

MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA

Una investigación sobre formación de profesores de matemáticas necesita explicitar el modelo de conocimientos y de desarrollo profesional que se adopta. En nuestro caso, adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), basado en las herramientas teórico-metodológicas del EOS. En este modelo se contemplan las competencias del profesor que le permitan abordar los problemas didácticos básicos implicados en la enseñanza; se considera una competencia general de diseño e intervención didáctica, la cual se compone de 5 sub-competencias. Una de estas subcompetencias se refiere al análisis y valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción, la cual pretendemos promover en la intervención formativa realizada en esta investigación.

La consideración de la lección de un libro de texto como un "proceso instruccional" (previsto, o planificado) permite aplicar las distintas herramientas teóricas elaborados en el EOS para realizar un análisis sistemático de lecciones de los libros de texto. En particular, la Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID) (Godino, 2013), sus diferentes facetas, componentes e indicadores de idoneidad nos sirvieron de base para la elaboración de una Guía de Análisis de Lecciones de Libros de Texto de Matemáticas (GALT-Matemáticas) (Castillo, 2019). En la experiencia que se describe en este trabajo,

se aplica una adaptación de dicha guía al tema de proporcionalidad (GALT-Proporcionalidad) (Castillo, 2019).

La idoneidad didáctica se entiende como el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo, la misma supone la articulación de seis facetas que intervienen en un proceso de instrucción: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, 2013).

Un proceso de instrucción matemática tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales pretendidos representan bien a un significado de referencia. El significado de referencia será relativo al nivel educativo correspondiente y deberá ser elaborado teniendo en cuenta los diversos tipos de problemas y contextos de uso del contenido objeto de enseñanza, así como las prácticas operativas y discursivas requeridas (Godino, 2013). Precisa tener en cuenta el grado de adecuación de las situaciones-problemas, la atención a la diversidad y adecuación de las representaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones, así como los argumentos que las sustentan. Una alta idoneidad desde el punto de vista epistémico requiere que las situaciones-problema propuestas involucren diversas representaciones, permitan a los estudiantes diversas maneras de abordarlas y requieran que éstos interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones.

El diseño de nuestra investigación tiene como objetivo capacitar a los futuros profesores para responder a estas dos cuestiones: ¿cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de estudio planificado en la lección?, ¿cómo se podría gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio?.

MÉTODO

El enfoque metodológico respecto a la intervención formativa sigue las fases propias de las investigaciones de diseño: estudio preliminar, diseño de la trayectoria didáctica, implementación y análisis retrospectivo (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014).

La experiencia se ha realizado en el marco de un Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad de Matemáticas), en diciembre del 2019, con 30 estudiantes del curso de posgrado Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria, en el que se contempla el análisis del libro de texto como recurso en el aula de matemáticas y su relación con los organizadores curriculares. La intervención formativa tuvo una duración de 2 horas y media de duración. Se dispone de los informes producidos por 14 equipos de estudiantes (formados por 2 o 3 estudiantes) que realizaron como trabajo voluntario para incrementar la calificación del curso.

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO FORMATIVO

Se persigue dar a conocer a los futuros profesores de matemáticas una metodología para analizar lecciones de libros de texto de matemáticas, aplicarla al análisis crítico y constructivo de una lección particular y reflexionar sobre su uso para la valorar la idoneidad didáctica de la lección. Tras la presentación y discusión de la noción de idoneidad didáctica y la Guía de Análisis de Libros de Texto (GALT-Matemáticas), se propuso a los estudiantes del Máster que, trabajando en equipos de 2 o 3 estudiantes, respondieran a las siguientes consignas:

1. En cada una de las unidades de análisis (razón y proporción, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, porcentajes) en que se ha descompuesto el texto sobre proporcionalidad (Arias y Maza, 2015) y para cada una de las facetas:

a) Identificar los componentes y subcomponentes según corresponda, tomando como base el orden en que se presentan en la GALT-Proporcionalidad.

b) Teniendo en cuenta los criterios de idoneidad en cada faceta para el estudio de la proporcionalidad (GALT-Proporcionalidad) identificar si existe algún tipo de disparidad o discordancia con los conocimientos pretendidos (conflictos epistémicos, cognitivos…). Hacer uso de la columna valoración, para indicar si se presenta o no cada indicador (0 nunca, 1 a veces-parcialmente, 2 siempre-totalmente).

c) Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas. Se tendrá en cuenta la información obtenida en la sección anterior y los criterios de idoneidad didáctica (GALT-Proporcionalidad).

2. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? Describir los cambios que habría que introducir en el proceso de estudio para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que previamente se han identificado.

3. En base a la experiencia del taller, formular una opinión crítica sobre la GALT-Proporcionalidad y los indicadores, incluyendo la perspectiva sobre si los indicadores son suficientes y claros. Si se considera oportuno agregar algún otro indicador; en dicho caso incluir una justificación.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Este apartado se compone de tres secciones, la primera refiere a la evaluación de las valoraciones de idoneidad epistémica dadas por los futuros profesores sobre la unidad de análisis de razón y proporción, comparándolas con el análisis a priori realizado por los investigadores. La segunda describe el análisis de las respuestas otorgadas por los equipos respecto a los juicios razonados sobre la idoneidad didáctica de la lección del libro de texto y finalmente en la tercera se contempla una descripción de las respuestas de los participantes respecto a la gestión de uso de la lección del libro de texto analizada.

Análisis de la unidad "razón y proporción" en la faceta epistémica

La comparación de las valoraciones sobre idoneidad epistémica realizadas por los futuros profesores en la unidad de análisis de razón y proporción con el juicio de los investigadores ha permitido detectar discrepancias y concordancias. Por razones de espacio hacemos referencia a aquellos aspectos donde detectamos diferencias en las valoraciones; por la misma razón sólo analizamos las respuestas dadas a una sola de las unidades.

En la Tabla 1 resumimos, en la primera columna, los indicadores que han sido valorados por la mayoría de los equipos de un modo diferente al del grupo investigador. También contempla en la segunda columna la valoración del equipo investigador junto con observaciones que justifican dicha asignación numérica. La última columna muestra las valoraciones (Val.) dadas por todos los equipos; entre paréntesis se indica la frecuencia de cada una (Frec.). Subrayamos en negrita el número de participantes que concuerdan con la valoración de los investigadores.

En general las valoraciones realizadas en esta unidad de análisis concuerdan con las valoraciones del equipo investigador. En la faceta correspondiente se han valorado en total 31 indicadores, en los cuales se encuentran diferencias al valorarlos en los 10 indicadores mostrados en columna 1 de la Tabla 1. Una limitación que podemos mencionar es que en general los equipos al valorar cada indicador no aportan argumentaciones u observaciones para cada indicador, aunque les fue solicitada dicha argumentación.

El contar con dichas argumentaciones hubiese permitido detectar a qué se deben las discordancias antes descritas. Aun así planteamos que algunas discrepancias pueden deberse a no considerar lo que describe cada indicador como un todo. Por ejemplo, al valorar el primer indicador, si no se contempla la segunda parte del indicador referente a la pertinencia, traducciones y otros, podría asignarse un 1

y no un 0. También puede deberse a dificultades para comprender el indicador, estos constituyen aspectos que es necesario clarificar y discutir con los estudiantes en nuevos ciclos de experimentación.

Tabla 1. Comparación de valoraciones de indicadores para la unidad de análisis de razón y proporción

Indicadores	Valoración del equipo investigador	Val. (Frec.)
Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas en el tema de proporcionalidad	0, sólo se usan representaciones simbólicas numéricas y algebraicas, sin analizar su pertinencia, potencialidad o procesos de traducción entre las mismas.	**0 (5)** 1 (8) 2 (1)
Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige	1, uso de símbolos literales para representar valores numéricos sin especificar dominio. Los estudiantes no están suficientemente familiarizados con el lenguaje algebraico.	0 (2) **1 (4)** 2 (8)
Se fomenta que los alumnos manejen, construyan e interpreten las diferentes expresiones y representaciones de la proporcionalidad a través de las tareas.	0, únicamente se trabajan expresiones simbólicas.	**0 (5)** 1 (7) 2 (2)
Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional.	0, no se establecen dichas condiciones ni la reflexión sobre el tipo de problemas a resolver.	**0 (3)** 1 (5) 2 (5)
Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente.	1, se evidencian divisiones, multiplicaciones y el despeje de una incógnita sin mostrar el proceso para llevarlas a cabo. Formular una proposición a partir de una representación supone procedimientos que no se han explicitado.	0 (1) **1 (5)** 2 (8)
Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.	1, los alumnos deben aplicar y generar procedimientos aritméticos y algebraicos. Hay procedimientos que no se promueven como las: equivalencias de fracciones.	0 (10) **1 (3)** 2 (1)
Las proposiciones y procedimientos en relación a la proporcionalidad se explican y argumentan de forma adecuada al nivel educativo correspondiente.	0, las proposiciones y procedimientos se presentan sin explicaciones o uso de discurso argumentativo por parte del autor.	**0 (3)** 1 (9) 2 (2)
Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales en general.	1, únicamente se aclara una diferencia entre razón y fracción.	0 (2) **1 (4)** 2 (7)
Se hace explicita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes.	0, no se hace explícita dicha relación, aunque en los ejercicios sí se hace referencia a magnitudes.	**0 (1)** 1 (7) 2 (6)
Se promueven diversas situaciones de razón, proporciones donde el alumno tenga que argumentar y formular conjeturas sobre relaciones de proporcionalidad, investigarlas y justificarlas.	1, en las tareas propuestas se pide que el alumno interprete el resultado, eso implica formulación de afirmaciones.	0 (11) **1** (3) 2 (0)

Nota. La abreviatura Val refiere a la valoración ordinal que indica la presencia o no de cada indicador en la lección a analizar (0 nunca, 1 a veces-parcialmente, 2 siempre-totalmente) dada por los equipos. La abreviatura Frec indica frecuencia de las valoraciones hechas por los equipos. Si en algún caso la suma de las frecuencias no es 14 (número total de equipos), se debe a que algún equipo ha considerado que no aplica valorar dicho indicador.

Juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección del libro de texto

A continuación describimos las respuestas dadas por los equipos respecto a los juicios razonados sobre la idoneidad didáctica haciendo referencia a cada una de las facetas.

En relación a la faceta epistémica, algunos de los equipos coinciden en que es una de las facetas mejor calificadas, contemplando las valoraciones otorgadas a cada indicador. Dentro de las carencias de la lección señalan aspectos relacionados con los conceptos, indicando la poca claridad de algunos de ellos. El equipo 4 indica que algunas definiciones llevan a una idea simplificada del concepto: "en la definición de magnitudes inversamente proporcionales hace referencia a la dualidad doble-mitad, triple-tercio, etc., sin hacer alusión a que el aumento y disminución sea por valores no naturales". También señalan que en la definición de tanto por ciento se da la sensación de que es un número entero "una o varias de las 100 partes iguales".

En cuanto al lenguaje destaca la falta de uso de representaciones gráficas, visualizaciones, material manipulativo. Particularmente, el equipo 13 plantea que existen ideas poco adecuadas como la igualdad "15%=0.15" que induce a errores. Respecto a las situaciones, indican que no promueven la justificación, la argumentación, la interpretación de resultados, la comunicación de razonamientos, o el planteamiento de conjeturas o problemas por parte del alumno. También mencionan la escasez en su variedad y la falta de situaciones para distinguir comparaciones multiplicativas de las aditivas. Además, señalan que no se tratan en la lección las relaciones entre contenidos, ni se desarrollan de forma organizada los cuatro tipos de enfoques de la proporcionalidad. El equipo 13 precisa que únicamente se trata el enfoque aritmético.

Respecto a la faceta cognitiva, en general señalan que no se alude a los conocimientos previos, no se usan diversas estrategias en la resolución de situaciones, no se trata el error y no existen situaciones con diferentes niveles de dificultad y son poco variadas. Tampoco existen diferentes métodos de evaluación.

Las faceta interaccional y mediacional son consideradas como las peores calificadas por algunos equipos, destacando en la primera como aspecto positivo que la presentación y estructuración de la lección es buena únicamente. La idoneidad mediacional se considera baja por los equipos debido a la falta de uso de recursos materiales y a que el espacio temporal destinado a todos contenidos es el mismo sin contemplar sus diferentes niveles de complejidad.

En la faceta afectiva se indican la inexistencia de ejercicios que impliquen la participación activa, la creatividad del alumno, así como de ejemplos y contenido que apelen al humor, la motivación haciendo referencia a un ambiente cercano al contexto del alumno. En el componente de valores, se plantea la existencia de problemas aplicables a la vida cotidiana contemplando la utilidad del tema.

En la faceta ecológica la mayoría de los equipos coinciden en que los contenidos se adaptan bien al currículo y se trata la formación socio-profesional, pero existen carencias en los demás indicadores.

Gestión de uso de la lección del libro de texto

Respecto a la gestión del uso de la lección del libro de texto para incrementar la idoneidad del proceso, varios de los equipos consideran que el libro constituye una guía sobre los contenidos a abordar, calificándolo como una fuente secundaria a consultar que debe complementarse con una buena labor docente y la consulta de otro material adicional.

Dentro de las acciones específicas del docente indican el repasar conocimientos previos mediante el resumen de definiciones y técnicas antes abordadas. El equipo 3 precisa que debe enfatizarse en aquellos conocimientos que serán utilizados como: el concepto de fracción, número racional y el sistema métrico decimal. Los equipos proponen introducir el tema con experiencias intuitivas, contextualizadas y estrategias informales de resolución de problemas hasta alcanzar razonamientos funcionales-algebraicos.

Señalan la necesidad de utilizar diversos materiales: audiovisuales, manipulativos, tecnológicos, juegos, así como de incluir notas o recordatorios sobre: errores comunes, notas históricas, información oportuna en la web. También el recurrir a definiciones más claras para el alumnado, fomentando la relación de conceptos y señalando diferencias y semejanzas. En cuanto al lenguaje, recomiendan utilizar diversas formas de representación: modelos concretos, visualizaciones, gráficos, tablas.

Por otro lado, contemplan que debe variarse la tipología de las tareas, introduciendo problemas graduados según el nivel de dificultad, que impliquen justificación de las respuestas y procedimientos, así como el planteamiento de problemas y ejemplos y el uso de diferentes métodos de solución. También mencionan que existan situaciones de comparación, ampliación y refuerzo, enfoque cualitativo y cuantitativo, y que permitan distinguir comparaciones aditivas y multiplicativas.

Los futuros profesores consideran que deben existir actividades contextualizadas y atractivas que fomenten el aprendizaje cooperativo, la formación socio-profesional y la investigación. Asimismo echan en falta espacios participativos, de debate y justificación de los resultados obtenidos, para conocer estrategias diferentes o errores, fomentar la reflexión, la comunicación, la argumentación y el pensamiento crítico entre alumnos. Proponen, por ejemplo, fijar un tiempo límite para realizar los ejercicios y sobrepasado éste preguntar las dificultades que han tenido (equipo 4), que los alumnos resuelvan en la pizarra las tareas (equipo 8 y 10), realizar un trabajo de exposición de un tema al resto de compañeros resolviendo cuestiones (equipo 1). También recomiendan incluir imágenes y actividades basadas en hobbies populares entre los adolescentes (equipo 3 y 10), un resumen, un mapa conceptual que sintetice los temas, o que los alumnos creen el propio mapa para esquematizar los conceptos (equipo 14).

Mencionan la necesidad de relacionar el contenido con otras áreas, destacando la utilidad del tema. El equipo 3 plantea que con la estadística se pueden usar gráficos de líneas y barras donde se usa la proporcionalidad e incluir el tratamiento de la función lineal. También plantean incluir diferentes métodos de evaluación de la comprensión y competencias y proporcionar un solucionario de ejercicios para ofrecer retroalimentación al alumno.

De manera particular un equipo plantea que se deben tratar conflictos respecto a la proporcionalidad directa donde: "todos los enunciados excepto uno son del tipo "+ a +" siguiendo la nomenclatura del autor" (equipo 14) pudiendo llevar al lector a creer que la proporcionalidad directa solo se aplica en relaciones crecientes. En proporcionalidad inversa se pregunta únicamente por cantidades menores que las dadas, lo cual "podría deducir incorrectamente que en la proporcionalidad inversa las magnitudes decrecen" (equipo 14). Una forma es incorporar más problemas en este sentido para evitar deducciones erróneas.

REFLEXIONES FINALES

Hemos detectado algunas dificultades de los participantes en relación a mencionar aspectos de otras facetas que no corresponden a la faceta particular a la cual se refieren. Algunos ejemplos de estas dificultades son: al referirse a la faceta epistémica, el equipo 2 señala cuestiones de la faceta ecológica "se adecúa al currículo". El equipo 11 por su parte indica que "es la mejor faceta debido a una adecuada presentación de contenido, con una reflexión inicial y promoción progresiva de conceptos de mayor complejidad", donde incluye componentes de la faceta interaccional. En la faceta mediacional el equipo 13 refiere a que en la lección no se resaltan errores comunes, lo cual refiere a un aspecto de la faceta cognitiva.

Por otro lado, en general, los participantes no usan argumentos a la hora de realizar las valoraciones en cada una de las unidades de análisis sobre por qué creen que un indicador está o no presente.

Respecto a la valoración del taller, algunos equipos consideran que los indicadores considerados son claros y apropiados pero excesivos, por lo que "recomiendan adaptar los indicadores a cada unidad a

analizar, agrupar algunos indicadores, o reducir el número de unidades de análisis". Otros equipos consideran que los indicadores son confusos o ambiguos, especialmente señalan dificultades debidas a la falta de familiaridad con este tipo de tareas o el uso de terminología específica. Finalmente expresan dificultades al valorar con rigor indicadores de la faceta cognitiva, afectiva especialmente las creencias, e interaccional y mediacional.

REFERENCIAS

Arias, J. y Maza, S. (2015). *Matemáticas, 1º ESO*. Comunidad autónoma, España, Código Bruño.

Braga, G. y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199-218.

Burgos, M., Castillo, M. J. y Godino, J. D. (2020). Formación de profesores de matemáticas en el análisis de libros de texto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33, CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, www.clame.org.mx)*.

Castillo, M. J. (2019). *Elaboración de una guía para el análisis de lecciones de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica* (Tesis de Maestría). Universidad de Granada, Granada, España.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 45*(5), 633-646.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Gómez, E., Contreras. J. M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para educación primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). Alicante: SEIEM.

Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L., González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325-334). Málaga: SEIEM.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en educación secundaria. *Revista de Educación,* (358), 471-496.

Monterrubio, M. C., Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 50*(5), 765–771.

Thompson, D. (2014). Reasoning-and-proving in the written curriculum: Lessons and implications for teachers, curriculum designers, and researchers. *International Journal of Educational Research, 64*, 141–148.

PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS POR ESTUDIANTES QUE RESUELVEN DE MANERA EXITOSA TAREAS QUE INVOLUCRAN EL ÁREA DE FIGURAS PLANAS[1]

Procedures used by students who successfully solve tasks involving the area of flat figures

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio pretende caracterizar los procedimientos utilizados por un grupo de estudiantes de secundaria que resuelve de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. Se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos utilizados en la resolución de dos tareas de área. Los resultados indican que los estudiantes que tienen éxito en la resolución de las tareas utilizan procedimientos que admiten aproximaciones geométricas y numéricas del área. Así, los procedimientos de naturaleza geométrica pueden ayudar a los estudiantes a justificar mejor lo que hacen y porqué lo hacen, además de determinar, en parte, el éxito en la resolución de tareas más complejas.

Palabras clave: *medida del área, procedimientos geométricos, procedimientos numéricos*

Abstract

This study aims to characterize the procedures used by a group of students when successfully solving area measurement tasks. Written justifications and procedures used in the resolution of two area measurement tasks are analyzed. The results indicate that students who are successful in solving the tasks use procedures that admit both geometric and numerical approximations of area. Thus, procedures of a geometric nature may help students to better justify what they do and why they do it, in addition to determining, in part, success in solving more complex tasks.

Keywords: *area measurement, geometric procedures, numeric procedures*

INTRODUCCIÓN

En las matemáticas escolares existen conceptos que incorporan procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos. Algunos de estos conceptos son los vinculados a los procesos de medición (Hirstein, 1981). En el caso particular del área, ésta puede servir como un modelo de base para introducir, por ejemplo, la multiplicación de números naturales (Hirstein, Lamb y Osborn, 1978); o las fracciones (Freudenthal, 1983). El área, además, se relaciona con el análisis de las formas geométricas que se pretenden medir y, admite un tratamiento numérico y/o algebraico mediante el uso de fórmulas de cálculo.

Diversos estudios (Duoady y Perrin-Glorian, 1989; Kamii y Kysh, 2006; Tan-Sisman y Aksu, 2009) han reportado que una gran cantidad de estudiantes de los primeros cursos de Educación secundaria, presentan dificultades y errores al momento de resolver problemas de cálculo de áreas, los que pueden estar relacionados con una comprensión limitada de los conceptos que subyacen al uso de fórmulas. En este contexto, el objetivo de este estudio es caracterizar los procedimientos utilizados

[1] Estudio financiado por EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER, GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR y ANID PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032. Este trabajo se ha realizado en el marco del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 205 – 212). Valencia: SEIEM.

por un grupo de estudiantes de 13-14 años que resuelven de manera exitosa tareas de área de figuras planas.

MARCO TEÓRICO

Medida del área

Algunos autores enfatizan que la enseñanza y construcción del concepto de área, y sus procesos de medición, implican el aprendizaje y construcción de diversos elementos. Sarama y Clements (2009) advierten que, la medida del área implica el aprendizaje y la coordinación de diferentes conceptos, por ejemplo, el área como atributo; la unidad de medida; la estructuración espacial; la partición equitativa; la conservación; la acumulación y aditividad; y, la transitividad. Duoady y Perrin-Glorian (1989) se interesan por la diversidad de procedimientos que son necesarios en la enseñanza del área. Al respecto, estos autores señalan que, un aprendizaje comprensivo de los procesos de medición de áreas requiere, primero, de un tratamiento cualitativo con privilegio de procedimientos geométricos, y luego, de un tratamiento cuantitativo con privilegio de procedimientos numéricos. De manera similar, Olmo, Moreno y Gil (1989) insisten en que la fórmula debe ser presentada a los estudiantes como un último paso, a fin de lograr resultados similares a los que se pueden obtener por medios más espontáneos y laboriosos relacionados con acciones de corte, movimiento y pegado de superficies.

Dificultades y estrategias utilizadas por estudiantes en la medida del área

Tan-Sisman y Aksu (2009), en un estudio con 134 estudiantes de edades entre 13-15 años, evidencian que las dificultades más persistentes en los estudiantes se relacionan con el uso inadecuado de fórmulas y con comprender que el área permanece inmutable cuando una figura es dividida en partes y posteriormente reorganizada en una figura diferente. Mamona-Downs y Papadopoulos (2006), en un estudio sobre la resolución de problemas de área que involucran el corte, movimiento y pegado de figuras, evidencian que estudiantes de 12 años no toman en consideración las propiedades geométricas de las figuras para justificar sus procedimientos, sino que recurren a sus percepciones visuales y al uso de la medición.

Los estudios anteriores remarcan que un enfoque procedimental basado en el uso de fórmulas no garantiza la comprensión del concepto de área en los estudiantes, porque, entre otros aspectos, no permite explicar cómo una superficie bidimensional queda determinada por las longitudes de la misma superficie (Zacharos, 2006). Dicha dificultad puede persistir incluso en maestros en formación (Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019b; Simon y Blume, 1996). Sin embargo, si este enfoque se complementa con el estudio del análisis de las propiedades involucradas en la medición del área, se podría potenciar una comprensión más robusta (Barret, Clements y Sarama, 2017).

MÉTODO

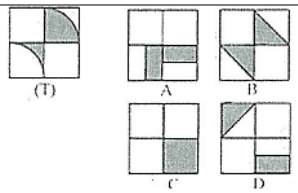
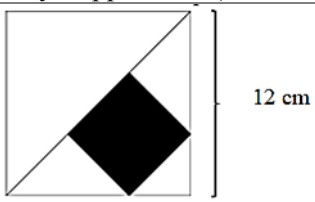
El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo. El objetivo es caracterizar los procedimientos utilizados por los estudiantes que tienen éxito en la resolución de las tareas que involucran el área de figuras planas e identificar posibles tendencias en sus resoluciones. El periodo de recogida de datos se realizó en el tercer trimestre del curso escolar 2018-2019. Los participantes fueron 83 estudiantes con edades comprendidas entre los 13-14 años, de un centro concertado de Educación Primaria y Secundaria de la provincia de Barcelona (España). Los estudiantes, como parte de su programa de estudios, habían tenido instrucción previa sobre la medición de áreas.

Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario no estructurado con siete tareas de medida y comparación de áreas de figuras planas para ser resuelto de forma anónima, individual y por escrito. Se pidió a los estudiantes justificar por escrito cada procedimiento. Para resolver las tareas, los estudiantes podían

utilizar material manipulativo que contenía recortables e instrumentos de medida (regla, escuadra, transportador). El cuestionario se estructuró de la siguiente manera: tres tareas únicamente de comparación de áreas (tareas 1, 2 y 6); y, cuatro tareas de medición de áreas (tareas 3, 4, 5 y 7). Las tareas del cuestionario se ordenan desde aquellas que admiten un tratamiento únicamente cualitativo, con uso de procedimientos geométricos, hacia aquellas que admiten un tratamiento cuantitativo, con procedimientos numéricos y geométricos de forma complementaria. De esta manera, el uso de fórmulas se incorpora de forma gradual y como último paso (Duoady y Perrin-Glorian, 1989; Olmo *et al.,* 1989). En esta comunicación, se presentan evidencias de las resoluciones a las tareas 2 y 7 del cuestionario (Tabla 1). Se selecciona una tarea que admite un tratamiento únicamente cualitativo del área (Tarea 2), y una tarea compleja que admite un tratamiento cualitativo y cuantitativo de manera complementaria (Tarea 7). En este sentido, es posible buscar evidencias de ambas aproximaciones del área y ver si existe alguna relación entre los procedimientos de resolución de las Tarea 2 y 7. Además, los procedimientos utilizados en las tareas 2 y 7, están presentes, también, en la resolución de las tareas 1, 3, 4, 5 y 6, por lo que las tareas 2 y 7 se consideran representativas del conjunto total de datos.

Tabla 1. Tareas propuestas al grupo de estudiantes

Enunciado de cada Tarea	**Gráfica de las Tareas**
TAREA 2: Tomando como referencia el área sombreada de la Figura (T) **¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras tienen la misma cantidad de área sombreada? ¿Por qué?**	 (Adaptada de Kospentaris, Spyrou y Lappas, 2011)
TAREA 7: ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm de lado? **¿por qué?** **¿De cuántas maneras posibles puedes calcular el área del cuadrado negro? Explícalo.**	 (Adaptada de Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019a)

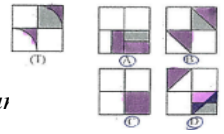
Análisis

Se realiza un análisis de contenido estructurado en dos fases. En la primera fase se identifican los procedimientos utilizados por los estudiantes, clasificando sus respuestas en correctas, incorrectas y parcialmente correctas. Las respuestas parcialmente correctas presentan errores sólo en la ejecución de algún cálculo, ya sea al multiplicar o sumar valores numéricos, pero usan bien las fórmulas y muestran un uso justificado de todos los procedimientos utilizados. En la Tarea 2, se consideran parcialmente correctas las respuestas de los estudiantes que no consideran que una de las figuras (A, B, C o D) tiene un área sombreada equivalente a la de la Figura T (modelo). Las resoluciones incompletas que muestran un uso justificado de todos los procedimientos también se consideran parcialmente correctas. Se consideran exitosas las respuestas correctas y parcialmente correctas, pues en ambas se justifica lo que se hace y por qué se hace. Las resoluciones incompletas y con errores de cálculo, por un uso inadecuado de fórmulas, se consideran incorrectas. En la segunda fase se clasifican los procedimientos de las resoluciones correctas y parcialmente correctas. Para esto, se consideran las aportaciones de Duoady y Perrin-Glorian (1989) y, se definen tres tipos de procedimientos: (1) procedimientos con aproximaciones geométricas del área; (2) procedimientos con aproximaciones numéricas del área; y, (3) procedimientos con aproximaciones numéricas y

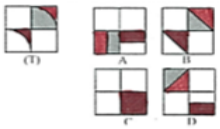
geométricas del área. A continuación, se muestran evidencias de la segunda fase de análisis y se detallan las tres tipologías de procedimientos identificadas.

1- Procedimientos que admiten aproximaciones geométricas del área: corresponden a aquellos procedimientos de naturaleza geométrica que permiten establecer relaciones de equivalencia y/o inclusión entre las áreas de las superficies que se quieren comparar. Se encuentran aquí los procedimientos de *comparación directa*, que implican superponer una superficie sobre otra para encontrar relaciones de equivalencia o inclusión (una superficie es la mitad, el doble o igual que otra). Procedimientos de *comparación indirecta*, que implican recortar o descomponer una superficie, y recomponer sus partes en una nueva forma sin superponerlas (obtener un triángulo a partir de un rectángulo y viceversa). Procedimientos de *descomposición de superficies*, que consisten en descomponer una superficie, en unidades congruentes o no, para facilitar el proceso de comparación de áreas (descomposición gráfica o mental); y, finalmente procedimientos de *estimación visual,* basada en las formas que componen la superficie (se justifica "al ojo" la equivalencia de figuras).

R1 *"Todas, porque si pones las dos partes sombreadas de cada figura en un cuadrado, saldrá que está completamente pintado".*



R2 *"La a, b c y d. Si sumas el área sombreada de la figura (T) saldrá que es ¼ del cuadrado. En las figuras a, b, c y d, pasa lo mismo. Todas son ¼ del cuadrado, ya que todo el rato se están sumando mitades de ¼ de cuadrado"*



TAREA 2

Figura 1. Ejemplos de resoluciones que utilizan procedimientos con aproximaciones geométricas.

En la Tarea 2 (Figura 1), los estudiantes utilizan procedimientos de descomposición de superficies; comparación indirecta; y, estimación visual. En ambas respuestas, los estudiantes advierten que en cada figura se representan mitades de ¼ del cuadrado Así, juntan las partes de manera mental, por medio de movimientos de rotación y/o traslación, identificando, en cada caso, que la suma de las partes equivale a ¼ de cada cuadrado (R1 y R2, Tarea 2, Figura 1). En la primera respuesta (R1, Tarea 2, Figura 1), los estudiantes descomponen ¼ inferior de Figura D, para justificar que el área sombreada corresponde a una mitad de ¼ del cuadrado.

2- Procedimientos que admiten aproximaciones numéricas del área: corresponden a aquellos procedimientos de naturaleza numérica que permiten asociar el área a un número que se calcula, por medio de fórmulas específicas para cuadrados, rectángulos y triángulos. Al mismo tiempo, estos procedimientos permiten establecer relaciones entre éstas figuras, con base en sus respectivas fórmulas. Se encuentran aquí los procedimientos que involucran el uso de la fórmula de *base por altura*, para cuadrados y rectángulos; y, los procedimientos que involucran el uso de la fórmula de *(base x altura) / 2*, para triángulos.

R1 a- ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm? **¿por qué?**
"Podemos usar la fórmula para calcular el área del cuadrado, que es elevar el costado al cuadrado, por lo tanto, el resultado es $12^2 = 144\ cm^2$*".*
b- ¿De **cuántas maneras** posibles puedes **calcular el área del cuadrado negro**? **Explícalo.**

"Medir el costado y elevar al cuadrado"
$A = C^2 \rightarrow A = 5{,}6^2 \rightarrow A = 31,36\ cm^2$

TAREA 7

R2
b- "Con el Teorema de Pitágoras para adivinar la hipotenusa y luego dividirla en tres partes iguales, por último, calcular el área del cuadrado, lado x lado y ya estaría"
$h = \sqrt{c^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{144 + 144} = \sqrt{288} = 16{,}97 \rightarrow 16{,}97 \div 3 = 5{,}6$ cm
Área cuadrado = $5{,}6^2 = 31,36\ cm^2$

Figura 2. Ejemplos de resoluciones que utilizan procedimientos con aproximaciones numéricas del área.

En la Tarea 7 (R1a, Figura 2), los estudiantes calculan el área del cuadrado de 12 cm de lado elevando un lado al cuadrado (144 cm^2). En la respuesta R1b (Tarea 7, Figura 2), los estudiantes miden con regla uno de los lados del cuadrado negro, luego lo elevan al cuadrado obteniendo 32 cm^2. Otros estudiantes identifican que el lado del cuadrado negro es 1/3 de la diagonal. Así, obtienen la longitud de la diagonal del cuadrado de 12 cm de lado aplicando el teorema de Pitágoras (16, 97 cm), luego la dividen entre 3 para obtener la longitud de un lado del cuadrado negro y, posteriormente, obtienen su área usando la fórmula (R2, Tarea 7, Figura 2).

3- Procedimientos que admiten aproximaciones geométricas y numéricas del área: corresponden a procedimientos de naturaleza geométrica y numérica utilizados de forma conjunta. Se incluyen aquí todos los procedimientos mencionados anteriormente. Además, se encuentran procedimientos que permiten obtener el área por medio de un proceso aditivo. Por ejemplo, fraccionar la superficie en unidades congruentes alineadas en filas y columnas y, posterior recuento de unidades cuadradas (o subunidades).

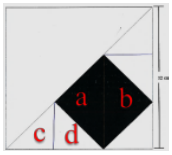
TAREA 7

R1 a- ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm? **¿por qué?**

"A= C^2 = 12^2 = 144 cm^2 y si formamos cuadrados pequeños de 1 cm^2, nos saldrían 12 filas y 12 columnas y si multiplicamos el nº de filas por el nº de columnas nos saldrían 144 cm^2"



b- ¿De **cuántas maneras** posibles puedes **calcular el área del cuadrado negro**? **Explícalo.**



"Si dibujas una de las diagonales del cuadrado puedes ver que esta representa el doble de los triángulos de su lado, y si dibujas la otra, ves que representa cuatro veces el más pequeño de todos. Si trazas la altura de los otros triángulos puedes ver que la mitad del cuadrado representa 9 triángulos... el cuadrado negro 4/9 de la mitad. Por lo tanto, del total… 4/18 o 2/9 porque la otra mitad también la dividí en 9 partes"

"Puedes hacer $\frac{2}{9}$ *de* $12^2 = \frac{2}{9}$ x144 $= \frac{288}{9}$ $=32$ cm^2*"*

"Con la medida de los lados del cuadrado y haciendo Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado y dividirla en tres para encontrar el lado del cuadrado negro"

"Midiendo el lado del cuadrado. A = $5{,}6^2$ → A = 31, 36 cm^2*"*

"El lado del cuadrado está compuesto por tres triángulos pequeños, por lo tanto, cada lado mide 4cm → $\frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2}$ = 8 cm^2. *Como el cuadrado es cuatro veces este* → 8 cm^2 x 4 = 32 cm^2".

Figura 3. Ejemplos de resoluciones que utilizan procedimientos con aproximaciones geométricas y numéricas del área.

En la Tarea 7 (R1a, Figura 3), los estudiantes obtienen el área del cuadrado de 12 cm de lado elevando los 12 cm al cuadrado. Además, utilizan el procedimiento de fraccionado de la superficie en unidades congruentes, ya que, dividen el cuadrado en 12 filas y 12 columnas compuestas por cuadrados de 1cm de lado. Así, obtienen el área por medio de un proceso aditivo y multiplicativo. En R1b (Tarea 7, Figura 3), los estudiantes recurren al uso de fórmulas. Miden el lado del cuadrado negro con regla y elevan ese valor al cuadrado. Además, utilizan el teorema de Pitágoras para obtener la longitud de la diagonal del cuadrado de 12 cm de lado. Luego dividen la diagonal entre tres y usan la fórmula del área. Por otro lado, los estudiantes descomponen el cuadrado negro en dos triángulos congruentes (ej. triángulos a y b) y, obtienen el área de dicho cuadrado al sumar las áreas de los dos triángulos. También, descomponen el cuadrado de 12 cm de lado en 18 triángulos iguales (ej. triángulos c y d) y obtienen el área del cuadrado negro estableciendo la proporción que éste ocupa respecto del total, 4 triángulos de 18. Este procedimiento les permite obtener el área del cuadrado negro calculando 2/9 de 144.

RESULTADOS

El procedimiento más utilizado en la Tarea 2 es la *comparación indirecta por recorte o descomposición*. En la Tarea 7, es la *medición de longitudes y el uso de fórmulas*. En la Tabla 2 se presentan los procedimientos geométricos y numéricos utilizados por los estudiantes. En la Tabla 3 se detalla la frecuencia de estudiantes que usa cada procedimiento. Se toman en consideración resoluciones correctas y parcialmente correctas, ya que, como se indicó anteriormente corresponden a las resoluciones consideradas exitosas. De esta manera, se consideran 35 resoluciones, es decir, 35 estudiantes. Los números en **negrita** indican los estudiantes que utilizan, de forma complementaria, procedimientos con aproximaciones geométricas y numéricas del área. Los números subrayados, aquellos estudiantes que utilizan más de un tipo de procedimiento con aproximaciones geométricas del área. El resto de números, aquellos estudiantes que utilizan sólo un tipo de procedimiento.

Tabla 2. Procedimientos vinculados a cada aproximación del área.

Aproximación del área	**Tipo de procedimientos (P)**
(1) Geométrica	(P1.1) Comparación indirecta por recorte y/o descomposición
	(P1.2) Comparación directa por superposición
	(P1.3) Descomposición de superficies
	(P1.4) Estimación visual basada en las formas en que componen la superficie (triángulos pequeños y medianos)
(2) Numérica	(2.1) Fraccionado de la superficie en unidades congruentes (cuadrados y/o triángulos) y posterior recuento de unidades que cubren la superficie.
	(2.2) Medición de longitudes y uso de cálculos para medir áreas (fórmulas, teorema de Pitágoras)

En la Tarea 2, los estudiantes 29, 35 y 62 usan dos procedimientos con aproximaciones geométricas del área, para identificar que todas las figuras presentadas tienen un área sombreada equivalente a la del modelo dado. En la Tarea 7, los estudiantes 3, 13, 14, 24, 28, 29, 45 y 62 utilizan de forma complementaria procedimientos con aproximaciones geométricas y numéricas del área. Los estudiantes 29 y 62 hacen un uso complementario de procedimientos más diversos. Por ejemplo, el estudiante 29 utiliza, además de cálculos y fórmulas, el procedimiento de fraccionado de la superficie en unidades congruentes y posterior recuento de unidades estructuradas en filas y columnas (R1b, Tarea 7, Figura 3). Precisamente los estudiantes 29 y 62 justifican la equivalencia de áreas en la Tarea 2 (Figura 1) por medio de procedimientos geométricos diversos. En este sentido, el uso justificado de procedimientos con aproximaciones geométricas del área podría ser un indicador de éxito para la resolución de tareas más complejas, como es el caso de la Tarea 7, ya que, permite justificar de mejor manera el uso de cálculos y fórmulas (Tarea 7, Figura 3).

Tabla 3. Estudiantes que utilizan cada tipo de procedimiento

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de procedimientos y justificaciones proporcionadas por los estudiantes sugiere una tendencia generalizada a asociar el área con el uso de cálculos y fórmulas. Sin embargo, cuando el uso de fórmulas se complementa con el uso de procedimientos con aproximaciones geométricas, las resoluciones de los estudiantes son más robustas, ya que justifican mejor lo que hacen (Barret, Clements y Sarama, 2017). En este sentido, es preciso que los estudiantes, antes de comenzar a utilizar fórmulas, se relacionen con un tratamiento cualitativo del área y con procedimientos diversos y laboriosos, como el corte, movimiento y pegado de superficies (Duoady y Perrin-

		Tareas			
		TAREA 2		**TAREA 7**	
		C	**PC**	**C**	**PC**
Con aproximaciones geométricas	**P1.1**	2, 3, 8, 10, 11, 15, 16, 14, 29, 21, 23, 24, 25, 30, 35, 28, 32, 34, 38, 50, 57, 39, 46, 47, 49, 62 51, 52, 53, 61		**62**	
	P1.2			**62**	
	P1.3	29, 35, 28, 62		**3**, **13**, **14**, **24**, **28, 29**, **45**, **62**	**51, 52**
	P1.4	17	13, 36, 45, 54		**38**
Con aproximaciones numéricas	**P2.1**			**29**	
	P2.2			2, **3**, 8, 10, 11, **13**, **14**, 15, 16, 17, 21, 23, **24,** 25, **28**, **29**, 30, 32, 34, 35, 36, 39, **45**, 50, 57, 61, **62**	38, 46, 47, 49, **51, 52**, 53, 54
Total		*35*		*35*	

Glorian, 1989; Olmo *et al.,* 1989).

En general, los estudiantes que resuelven de manera exitosa la Tarea 2, también tienen éxito en la Tarea 7, por lo que es posible que las destrezas en el uso de procedimientos con aproximaciones geométricas puedan ser un indicador de éxito en la resolución de tareas más complejas. Es probable que los diferentes procedimientos con aproximaciones geométricas actúen como un puente para utilizar de mejor manera los procedimientos de naturaleza numérica, pues permiten justificar el uso de fórmulas con base en la coordinación de conceptos que proponen Sarama y Clements (2009). Esto podría tener implicaciones en el tratamiento que dan los maestros de primaria al uso justificado, y a la relación, de los procedimientos con aproximaciones geométricas y numéricas del área. Así, resulta relevante la incorporación de tareas que incentiven el uso justificado de procedimientos con ambas aproximaciones del área, a fin de que los futuros maestros puedan diseñar y secuenciar tareas de forma estratégica.

Referencias

Barrett, J. E., Clements, D. H. y Sarama, J. (Eds.). (2017). *Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume*. National Council of Teachers of Mathematics, Incorporated.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019a). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, *15*(1).

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019b). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Douady, R. y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(4), 387–424.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

Hirstein, J. (1981). The second national assessment in mathematics: Area and volume. *The Mathematics Teacher*, *74*(9), 704-708.

Hirstein, J., Lamb, C. y Osborn, A. (1978). Student misconceptions about area measure, Arithmetic Teacher 25(6), 10–16.

Kamii, C. y Kysh, J. (2006). The difficulty of „length×with": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105-115.

Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 105-127.

Mamona-Downs, J. y Papadopoulos, I. (2006, Julio). The problem-solving element in young students'work related to the concept of area. In *Proceedings of the 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128).

Olmo, M., Moreno, M. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Simon, M. y Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 3-31.

Tan-Sisman, G. y Aksu, M. (2009). Seventh grade students success on the topics of area and premeter. *Elementary Education Online*, *8*(1), 243-253.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 224-239.

UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE ÁREA EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO[1]

An approach to specialised knowledge about area measurement in student teachers

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio pretende caracterizar elementos del conocimiento especializado de un grupo de estudiantes para maestro cuando resuelven tareas que involucran el área de figuras planas. Se pone énfasis en dos subdominios del conocimiento especializado, el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM). Se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos utilizados, por los estudiantes para maestro, en la resolución de una tarea de área. Los resultados indican que la introducción de procedimientos diversos, para resolución de una tarea permite movilizar categorías de conocimiento especializado, y con ello, establecer conexiones con otros contenidos matemáticos.

Palabras clave: *área de figuras planas, conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de las matemáticas*

Abstract

This study aims to characterise elements of the specialised knowledge of a group of student teachers when solving tasks involving the area of flat figures. The focus is placed on two subdomains of specialised knowledge, knowledge of topics (KoT) and knowledge of the structure of mathematics (KSM). The written justifications and procedures used by student teachers in solving an area task are analysed. The results indicate that the introduction of different procedures for solving a task allows the mobilisation of specialised categories of knowledge, and with it, the establishment of connections with other mathematical contents.

Keywords: *area of flat figures, knowledge of the topics, knowledge of the structure of mathematics*

INTRODUCCIÓN

El campo de investigación relativo al conocimiento del profesor, ha venido siendo tema de estudio desde que Shulman (1986) focalizara el interés por lo que deben conocer los profesores para el ejercicio eficaz de su profesión desde dos perspectivas. Por un lado, comprender cuáles son las fuentes de las analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones y reformulaciones que los profesores utilizan en el aula. Por otro, comprender cómo los profesores toman una parte su conocimiento y lo transforman, a fin de hacerlo comprensible a sus estudiantes. Tomando como referencia las aportaciones de Shulman, numerosos estudios han puesto el foco en el conocimiento de profesores en ejercicio y en formación (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Montes, Contreras, Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Vasco, Rojas, Flores, Aguilar-González, Ribeiro y Muñoz-Catalán, 2018; Godino, Giacomone, Batanero, Font, 2017; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005), con la finalidad de distinguir los componentes específicos del conocimiento de los profesores de matemáticas.

[1] Estudio financiado por ANID PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032, PID2019-104964GB-I00 (MINECO-España) y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR. Estudio realizado en el Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Una aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213 – 220). Valencia: SEIEM.

En este estudio se asume el carácter especializado del conocimiento de los profesores de matemáticas, en el sentido de Carrillo *et al*. (2018). Este marco permite una primera aproximación a la caracterización de aspectos de conocimiento sobre conceptos matemáticos específicos. En este contexto, la presente comunicación tiene por objetivo caracterizar elementos del conocimiento de los temas y del conocimiento de la estructura de las matemáticas, sobre el área de figuras planas, en un grupo de estudiante para maestro- EPM.

MARCO TEÓRICO

Las particularidades del conocimiento de los profesores se relacionan con la especificidad de la tarea de enseñar, entendiendo que, en dicha tarea, se busca que los alumnos comprendan lo que hacen, por qué lo hacen y para qué lo hacen. Sin embargo, para que esto pueda ocurrir, es necesario que los profesores dispongan de un conocimiento amplio del contenido y su didáctica (pedagogía). En este sentido, asumimos el modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas – MTSK (p.e. Carrillo *et al*., 2018) – como un referente de los componentes deseables en el conocimiento especializado de un maestro, y como consecuencia, como una primera aproximación a lo que un EPM debería conocer para su futura práctica (Policastro, Mellone, Ribeiro y Fiorentini, 2019). Específicamente, nos interesan dos subdominios de conocimiento – Conocimiento de los Temas (KoT) y Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM). El KoT incluye el conocimiento de profesores sobre definiciones (p.e. ¿qué es el área matemáticamente hablando?); propiedades y sus principios (p.e., el rol de cada elemento involucrado en la resolución de una tarea de área); la fenomenología o contextos de uso (p.e., la comparación y reproducción de formas o el reparto equitativo); procedimientos (p.e., saber cómo, cuándo y por qué utilizar un procedimiento); sistemas de representación (p.e., las representaciones geométrica, numérica y algebraica que intervienen en la resolución de tareas de área). El KSM se refiere al conocimiento de profesores sobre conexiones, considerando cuatro categorías: conexiones de simplificación y conexiones de complejidad, conexiones auxiliares y conexiones transversales. Por ejemplo, conocer que el área de un octógono puede calcularse por medio de una descomposición de la superficie en figuras conocidas, como triángulos y trapecios (simplificación, porque la descomposición de figuras puede ser un precursor de las fórmulas); conocer que el área de un triángulo rectángulo escaleno puede calcularse mediante la fórmula de Herón (complejización, porque implica un conocimiento matemático más avanzado, considerando también el perímetro); conocer que el procedimiento de iteración de unidades de medida, alineadas en filas y columnas, puede evocar el procedimiento de medición que implica multiplicar número de filas por número de columnas (auxiliar, porque se utiliza un procedimiento para introducir otro diferente); o conocer que un modelo de área puede servir como base para trabajar fracciones y operaciones algebraicas (transversal, el concepto de área puede relacionar distintos contenidos matemáticos). En esta comunicación, mostramos ejemplos de conocimiento de las conexiones auxiliares.

Aunque el subdomino del Conocimiento de la Práctica matemática (KPM) no es objeto de estudio en esta comunicación, consideramos importante recalcar su relación con el KoT. El conocimiento sobre definir, hacer conjeturas, demostrar o resolver problemas forman parte del KPM. Así, este subdominio adquiere una función organizadora de los conocimientos matemáticos que componen el KoT y de las formas de operarlos. Por ejemplo, los distintos registros de representación que admite el cálculo del área (geométrico, simbólico, algebraico u otro), pueden ser utilizados para validar o demostrar que un resultado es correcto. A su vez, el conocimiento y uso de registros de representación lleva asociado un conocimiento sobre distintos procedimientos, propiedades y justificaciones, impactando directamente las relaciones entre KPM-KoT.

La diversidad de situaciones en las que puede aparecer el concepto de área y las diferentes representaciones utilizadas (geométricas, numéricas y algebraicas) permiten inferir una complejidad subyacente a dicho concepto (Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2020). Por ejemplo, a la fórmula del área del rectángulo (*base x altura*) subyace la complejidad de la estructuración espacial y el

razonamiento multiplicativo, aspectos que deben ser coordinados con los procesos de medición, en conjunto con diferentes propiedades, conceptos y procedimientos (Sarama y Clements, 2009). Esta complejidad lleva asociada ciertas dificultades. Por un lado, la escasa variedad de procedimientos para la resolución de tareas, y por otro, la tendencia hacia el uso fórmulas y cálculos por parte de los estudiantes de primaria y secundaria. Esto, también se ha observado en maestros en formación (Baturo y Nason, 1996; Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019a; Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019b; Chamberlin y Candelaria, 2018). Al respecto, Baturo y Nason (1996) señalan que la falta de conocimiento en los EPM resulta en una capacidad limitada para ayudar a sus alumnos a desarrollar una comprensión integrada, y significativa, de los conceptos y procesos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas.

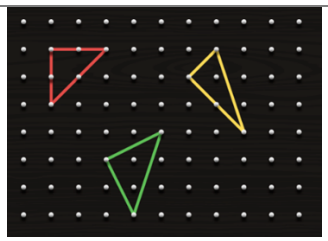
MÉTODO

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo (Bassey, 1990) y forma parte de una investigación más amplia que busca caracterizar el conocimiento sobre el concepto de área en un grupo de EPM, mediante el modelo MTSK. Se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2004), siendo las categorías de análisis los propios subdominios del modelo MTSK, es decir, el KoT y el KSM. Cada una de estas categorías tiene subcategorías específicas que nos interesan y que vienen dadas por el modelo. Por ejemplo, en el caso de KoT se encuentra la fenomenología, representaciones, procedimientos, propiedades y principios, y conexiones intraconceptuales; y en el caso del KSM, las conexiones auxiliares. En cada subcategoría hay indicadores (o códigos) y, para facilitar el proceso de asignación de códigos a las respuestas de EPM se utiliza el programa informático MAXQDA. La recogida de datos se realizó en el primer trimestre del curso escolar 2020-2021. Los participantes fueron 70 EPM que cursaban el tercer curso del Grado de Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Barcelona. Los estudiantes, como parte de su programa de estudios, habían tenido instrucción previa sobre diferentes procedimientos para medir áreas.

Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario semiestructurado de respuesta abierta (Bailey, 2007) para ser resuelto de forma individual y por escrito. Se pidió a los EPM justificar por escrito cada procedimiento. Para resolver las tareas los EPM podían utilizar material manipulativo (recortables como anexo al cuestionario), además de instrumentos de medida (regla, escuadra, transportador). El cuestionario constó de 8 tareas y se estructuró de la siguiente manera: tres tareas que responden a contextos de reparto equitativo y comparación y reproducción de formas (Tareas 1, 2 y 3); 2 tareas de medición (Tareas 5 y 7); una tarea de clasificación de enunciados y otra de definición del concepto de área (tareas 6 y 7); y, una tarea de análisis de respuestas de alumnos (Tarea 8). El cuestionario fue aplicado por la profesora a cargo de la asignatura, en formato online debido a la contingencia sanitaria COVID-19 (Breda, Farsani, y Miarka, 2020), y los EPM tuvieron una semana para responderlo. Debido al objetivo de la comunicación, se presentan evidencias de las resoluciones a la Tarea 4 del cuestionario (Tabla 1).

Tabla 1. Tarea propuesta al grupo de estudiantes

Enunciado de cada Tarea	Gráfica de las Tareas
TAREA 4: Observa los triángulos construidos en el geoplano. **¿Cuál es el área de cada triángulo? ¿Cuál tiene mayor área?** ***Justifica tus respuestas utilizando dos o tres procedimientos diferentes.***	

(Elaborada por los investigadores)

Análisis

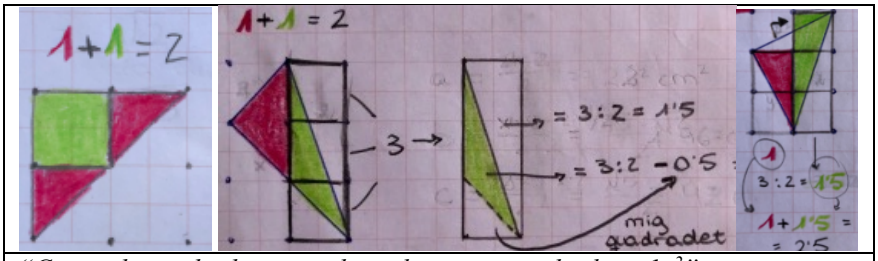
Los indicadores que constituyen la categoría del KoT se identifican a priori (Weber,1990), y surgen de una configuración epistémica (Godino, Batanero y Font, 2019) basada en Caviedes, De Gamboa y Badillo (2020). Esto permite realizar una codificación inductiva, donde cada código se adapta a los indicadores que el modelo MTSK propone para KoT (fenomenología, representaciones, procedimientos, propiedades y principios, conexiones intra conceptuales). Por su parte, los indicadores correspondientes al KSM (conexiones auxiliares) emergen del propio análisis a las respuestas de los EPM. Para sintetizar los aspectos que nos interesan en esta comunicación, en la Tabla 2 se muestran las categorías de conocimiento y sus respectivos indicadores (códigos), en concordancia con la conceptualización del modelo MTSK. Las figuras 1, 2 y 3 muestran ejemplos de resoluciones de una EPM, identificada como "Ana", que moviliza categorías de conocimiento especializado de los subdominios del KoT y KSM. Dicha resolución se considera representativa del conjunto de EPM que evidencia movilización de las categorías de conocimiento especializado.

Tabla 2. Categorías de conocimiento especializado

Categorías del KoT y KSM	**Indicadores**
Representaciones (R)	(R1) Geométrica: utilizando particiones en figuras conocidas para calcular el área de otras figuras. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de diferentes superficies, el trazado de líneas y elementos auxiliares, y las posibles reconfiguraciones (R2) Simbólica: conjunto de los R+ para el cálculo directo o indirecto del área. Utilizando otras expresiones de tipo algebraico, por ejemplo, la relación entre el área de un cuadrado y su diagonal $d^2 = l^2 + l^2$; o bien, utilizando teorema de Pitágoras para obtener las medidas de longitud de un triángulo rectángulo $h^2 = c^2 + c^2$
Procedimientos (P)	(P1) Descomponer superficies en unidades y/o subunidades congruentes para facilitar el proceso de medir áreas. (P2) Medir áreas como proceso aditivo contando unidades y/o subunidades que recubren la superficie. (P3) Medir dimensiones lineales y utilizar fórmulas (P4) Calcular áreas de figuras conocidas para obtener áreas de figuras desconocidas mediante descomposición
Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1) Transitividad (Pp2) Acumulación y aditividad (Pr1) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo (Pr2) Dos figuras equivalentes en cantidad de espacio ocupado, tienen áreas iguales
Conexiones auxiliares (Cau)	(Cau1) Teorema de Pitágoras, multiplicación para el cálculo de la cantidad de elementos dispuestos en filas y columnas

La Figura 1 muestra indicadores de conocimiento pertenecientes al KoT. Ana utiliza representaciones de tipo geométrico (R1), ya que recurre a las particiones en figuras conocidas para calcular el área de los triángulos. Así mismo, utiliza un procedimiento de naturaleza geométrica (P1) y otro de naturaleza simbólica (P2). En su respuesta, ella traza el cuadrado y/o rectángulo en el que se encuentra contenido cada triángulo, a fin de obtener el área de cada triángulo mediante un proceso aditivo. De igual manera, evidencia un uso implícito de la propiedad de acumulación y aditividad (Pp2), ya que reconoce que las figuras pueden ser descompuestas en otras figuras, conservando las mismas "partes". Por último, es posible inferir que Ana reconoce, en el primer ejemplo de la Figura 1, que los triángulos pueden ser equidescomponibles a un paralelogramo (Pr1),

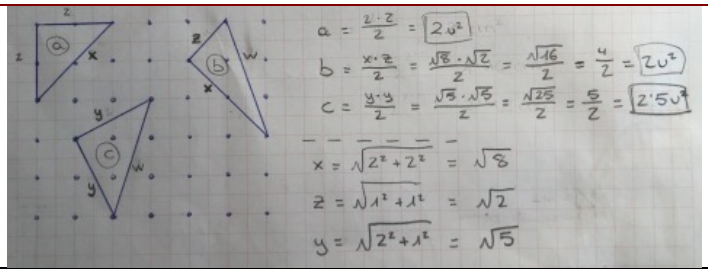
es decir, que un triángulo puede descomponerse en un número finito de polígonos y formar un paralelogramo (y viceversa), conservando el área. Ella descompone el primer triángulo de la Figura 1 y lo reorganiza mentalmente, teniendo como referencia el área de un rectángulo.



"Contando cuadrados, considerando que un cuadrado es 1u²"

Figura 1. Primer procedimiento utilizado por Ana

La Figura 2 muestra indicadores de conocimiento pertenecientes al KoT y KSM. Ana utiliza representaciones de tipo simbólico (R2) y establece una conexión auxiliar (Cau1), utilizando el teorema de Pitágoras para obtener las longitudes de los triángulos. Ana identifica que cada triángulo corresponde a un triángulo rectángulo, lo que le permite poner en práctica su conocimiento sobre teorema de Pitágoras.

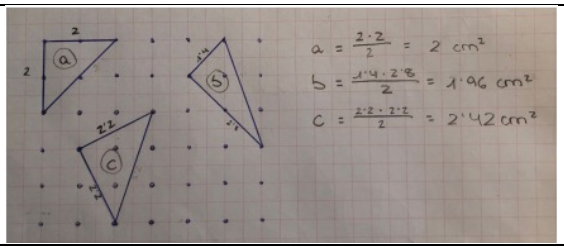


"Como los triángulos son rectángulos, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para saber cuánto miden todos los lados y así calcular el área, considerando que la distancia entre punto y punto del geoplano es 1, el triángulo rojo (a) tiene 2 cm²; el amarillo (b) tiene 2 cm²; y el verde (c) 2,5 cm², por lo tanto, es el que tiene más área".

Figura 2. Segundo procedimiento utilizado por Ana

En este sentido, el cálculo de áreas de triángulos rectángulos permite evocar un contenido que sirve como apoyo para la resolución de la tarea y, así mismo, de la comprensión del concepto de área. Además, se infiere el uso de la propiedad de transitividad (Pp1), ya que realiza una comparación entre los tres triángulos, determinando que el de mayor área es el triángulo rectángulo isósceles que se ubica más abajo en el geoplano. Así, también identifica que el triángulo rectángulo isósceles ubicado en la esquina superior izquierda y el triángulo rectángulo escaleno (en la esquina superior derecha) son equivalentes y, por lo tanto, tienen igual área (Pr2).

La Figura 3 muestra indicadores de conocimiento pertenecientes al KoT. Se observa que Ana utiliza representaciones de tipo simbólica (R2), ya que recurre a la fórmula del área de triángulos para obtener el área de cada uno de los tres triángulos. Del mismo modo, utiliza un procedimiento de naturaleza numérica (P3), pues mide las longitudes de cada triángulo para poder aplicar la fórmula y obtener el área de cada uno de los triángulos.



"Si tenemos una hoja impresa podemos calcular el área ((bxh)/2) con la regla y sus medidas reales. (no será 100% exactas porque la regla tiene una precisión de 1mm. Como no tengo impresora, lo he dibujado (cada cuadrado es de 1cm x 1cm)".

Figura 3. Tercer procedimiento utilizado por Ana

RESULTADOS

La resolución de Ana, que es representativa del grupo de EPM que movilizan los mismos indicadores de conocimiento, permite inferir que los EPM movilizan elementos de conocimiento especializado referentes al KoT, lo que se evidencia en el uso de diferentes representaciones procedimientos, y propiedades y principios. Sin embargo, el número de EPM que muestra evidencias de estos indicadores es bajo en relación al total de estudiantes. Por ejemplo, sólo 33 EPM hacen uso de representaciones geométricas en sus resoluciones, de éstos, 17 usan el procedimiento de descomponer superficies en unidades y/o subunidades congruentes para facilitar el proceso de medir áreas, y 30 el de medir áreas como proceso aditivo. Por el contrario, 63 EPM recurren a la medición directa de longitudes y al uso de cálculos. En la Tabla 3 se detalla la frecuencia de EPM que moviliza cada categoría de conocimiento. Se incluyen aquí las resoluciones erróneas, ya que, aunque los EPM no logran responder lo que se demanda en la tarea, sí logran movilizar algún indicador de conocimiento.

Tabla 3. Categorías de conocimiento especializado que movilizan los EPM (N=70)

	Categorías de conocimiento		Número de EPM
KoT	Representaciones (R)	(R1)	33
		(R2)	70
	Procedimientos (P)	(P1)	17
		(P2)	30
		(P3)	63
		(P4)	25
	Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1)	64
		(Pp2)	27
		(Pr1)	2
		(Pr2)	10
KSM	Conexiones auxiliares (Cau)	(Cau1)	11

Aunque los EPM habían tenido instrucción previa sobre los procesos de medición de áreas, sólo 33 de ellos hacen uso de representaciones geométricas para dar solución a la Tarea 4, lo que indica que menos de la mitad de los EPM responde según la demanda, es decir, con uso de dos o tres procedimientos diferentes. Por el contrario, los 70 EPM muestran uso de representaciones simbólicas, quedando en evidencia la tendencia a asociar el área con su registro de representación basado en la fórmula. El uso de principios geométricos relacionados con los procedimientos, por ejemplo, que todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo, se evidencia sólo en 2 EPM. Por su parte, la propiedad de transitividad, debido a la exigencia de la tarea, comparar áreas de diferentes triángulos, se evidencia en 64 EPM.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de procedimientos y justificaciones proporcionadas por los EPM sugiere una tendencia generalizada a asociar el área con el uso de cálculos y fórmulas, confirmando resultados de investigaciones anteriores (Baturo y Nason, 1996; Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019; Chamberlin y Candelaria, 2018). Esto limita la movilización de representaciones, procedimientos, y propiedades y proposiciones, categorías de conocimiento perteneciente al KoT. Del mismo modo, limita el establecimiento de conexiones con otros contenidos matemáticos (por ejemplo, el teorema de Pitágoras) y con ello, la comprensión que se tiene del concepto de área. De esta manera, las dificultades de los EPM se evidencian en su falta de conocimiento sobre varias formas de resolución para la Tarea 3.

La resolución de Ana muestra que, cuando el uso de fórmulas se complementa con el uso de representaciones y procedimientos de naturaleza geométrica, las categorías de conocimiento que pueden ser movilizadas aumentan. Así, resulta importante demandar el uso de procedimientos diversos a los EPM, a fin de que éstos puedan movilizar distintas categorías de conocimiento especializado. En este contexto, las categorías de conocimiento propuestas para el subdominio del KoT sirven como un referente de lo que los EPM deberían conocer para su futura práctica (Policastre, Mellone, Ribeiro y Fiorentini, 2019), pues permite detallar diferentes representaciones, procedimientos, propiedades y principios, en función del concepto de área. Esto podría tener implicaciones en el diseño y secuenciación estratégica de tareas para los formadores de EPM, aumentando de forma gradual las categorías de conocimiento que se quieren desarrollar.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bassey, M. (1990). On the nature of research in education. Research Intelligence.

Bailey, K. (2007). *Methods of Social Research.* Simon and Schuster.

Baturo, A., y Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics*, *31*(3), 235-268.

Breda, A., Farsani, D. y Miarka, R. (2020). Political, technical and pedagogical effects of the COVID-19 Pandemic in Mathematics Education: an overview of Brazil, Chile and Spain. *INTERMATHS, 1*(1), 3-19.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Ribeiro, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019a). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, *15*(1).

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019b, septiembre). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Valladolid: SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en tareas que involucran el área de figuras planas. *Bolema, 34*(68), 1015-1035.

Chamberlin, M. y Candelaria, M. (2018). Learning from Teaching Teachers: A Lesson Experiment in Area and Volume with Prospective Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, *20*(1), 86-111.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: Implications for the Prescriptive Character of Didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Krippendorff, K. (2004) *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of mathematics teacher education*, *8*(3), 255-281.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Policastro, M., Mellone, M., Ribeiro, M. y Fiorentini, D. (2019, Febrero). Conceptualising tasks for teacher education: from a research methodology to teachers' knowledge development. En *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht: ERME.

Weber, R. (1990). *Basic Content Analysis*. Sage.

NEOTRIE VR COMO ESPACIO DE TRABAJO PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA FRACTAL

NeoTrie VR as a mathematical working space to introduce fractal geometry

Chavil-Montenegro, D. Y.[a], Rodríguez-Blancas, J. L.[b] y Romero-Albaladejo, I.[b]

[a] Universidad Nacional Tecnológica de Lima Sur, [b] Universidad de Almería

Resumen

Se presenta una investigación sobre el aprendizaje de la geometría fractal usando el software de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR. El objetivo es enseñar este contenido a través de la construcción de distintos fractales, enfatizando el reconocimiento de dos de sus principales características: autosimilitud y carácter iterativo. Se sigue un esquema de investigación de orientación cualitativa y de tipo descriptivo, con una muestra de tres grupos integrados por 4 estudiantes de 1º de ESO. A partir de los resultados se evidencia la activación de las tres génesis: visual, instrumental y discursiva, así como de los tres planos verticales del modelo del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que lleva a la comprensión del objeto matemático en cuestión por parte de los estudiantes.

Palabras clave: *realidad virtual, geometría fractal, Espacio de Trabajo Matemático*, *Educación Secundaria*

Abstract

A research on the learning of fractal geometry using the immersive virtual reality software NeoTrie VR is presented. The objective is to teach this content through the construction of different fractals, emphasizing the recognition of two of its main characteristics: self-similarity and iterative nature. A qualitative and descriptive research scheme is followed, with a sample of three groups made up of four students 12-13 years old. The results show the activation of the three genesis: visual, instrumental and discursive, as well as the three vertical planes of the Mathematical Work Space (ETM) model, which leads to the students´ understanding of the mathematical object at stake.

Keywords: *virtual reality, fractal geometry, Mathematical Working Space, Secondary Education*

INTRODUCCIÓN

La geometría fractal, cuyo auge empezó en el año 1975 de la mano de Benoît Mandelbrot (1924-2010), ha sido y es una geometría muy fructífera para tratar multitud de conocimientos tanto en el campo de las matemáticas como en los de otras ciencias; por ejemplo, en la economía, en la medicina y en las telecomunicaciones (Mandelbrot, 2013). Dicha geometría no es ajena a la euclidiana, pues utiliza algunos conceptos de ella, a la vez que fomenta el pensamiento estructural, a través de la identificación y el empleo de patrones de forma recursiva.

A pesar de la importancia y del impacto de la geometría fractal, sorprende la escasez de literatura acerca del tema (Sinclair et al, 2016). La mayoría de los artículos publicados se refieren a experiencias de innovación y hay algunos sobre investigación en niveles de educación superior (Chen et al., 2015; Karakus, 2015). Este último autor utiliza cuestionarios para explorar las definiciones y las imágenes conceptuales del concepto de fractal en estudiantes de diferentes regiones de Turquía, país en el que

Chavil-Montenegro, D. Y., Rodríguez-Blancas, J. L. y Romero-Albaladejo, I. (2021). NeoTrie VR como espacio de trabajo para la introducción de la geometría fractal. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 221 – 228). Valencia: SEIEM.

la geometría fractal está siendo introducida a nivel curricular. Entre sus conclusiones, destaca que los estudiantes tienen dificultades para comprender el concepto de fractal y la mitad de los estudiantes fallaron en dibujar fractales en forma correcta y precisa, al no tener en cuenta la autosimilitud. También afirma que, debido a que los fractales tienen una estructura infinita, es difícil generarlos solo con actividades de papel y lápiz. Por esta razón, avanza como línea futura la investigación sobre el efecto del uso de la tecnología en la comprensión de los fractales por parte de los estudiantes.

En la actualidad, existen numerosas investigaciones que analizan la utilidad de los entornos de geometría dinámica plana (EGD2d) para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. La aparición de programas de geometría dinámica tridimensional como GeoGebra 3D o Cabri 3D amplía el campo de aplicación de los EGD al estudio de la geometría espacial (Gutiérrez, Jaime y Alba, 2014). NeoTrie VR es un nuevo software de geometría dinámica de realidad virtual inmersiva, desarrollado en la Universidad de Almería, que permite al usuario crear, manipular e interactuar con objetos geométricos y modelos 3D en general. Por otro lado, las últimas versiones del software incluyen funciones que permiten al profesorado diseñar y generar actividades fácilmente. La introducción de NeoTrie VR en el aula posibilita educar la percepción espacial, a través del descubrimiento y la inducción, al poder acceder amigablemente a conceptos y procedimientos relevantes en geometría, de forma más ágil que con instrumentos tradicionales. Véase por ejemplo (Cangas, Morgan y Rodríguez, 2019) y la página web http://www2.ual.es/neotrie para ampliar información.

El objetivo de la presente investigación es describir el trabajo matemático que realizan los estudiantes en el proceso de construcción de fractales planos y espaciales con NeoTrie VR, haciendo hincapié en el carácter iterativo y la propiedad de autosimilitud. Para ello, utilizamos el modelo de los Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), que describimos brevemente a continuación.

MARCO TEÓRICO

El modelo del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), constituye un entorno organizado mediante dos planos interconectados: el epistemológico y el cognitivo (Kuzniak y Richard, 2014). El plano epistemológico se compone de tres polos; a saber, el referencial (que comprende las propiedades, teoremas y definiciones), representamen (signos semióticos) y artefactos (materiales o simbólicos). El plano cognitivo consta de los procesos de visualización, construcción y prueba. Ambos planos deben ser articulados para asegurar un trabajo matemático coherente y completo. Los planos se articulan mediante tres tipos de génesis: Génesis Semiótica (basada en los registros de representación semiótica, que otorga el estatus de objeto operativo matemático a los objetos tangibles); Génesis Instrumental (que hace operativos los artefactos en el proceso de construcción); y Génesis Discursiva (que da sentido a las propiedades del razonamiento matemático).

En este modelo, las génesis no operan separadamente, sino que necesitan interactuar para dar sentido al trabajo matemático. Ello da lugar a los planos verticales que conectan dichas génesis: Plano de Comunicación [sem-dis] (está orientado hacia la comunicación matemática y se apoya esencialmente en las génesis semiótica y discursiva); Plano de Descubrimiento [sem-ins] (privilegia la identificación y la exploración de los objetos apoyándose en la génesis semiótica e instrumental para desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos; y Plano de Razonamiento [ins-dis] (desarrolla el razonamiento matemático fundado en la justificación de descubrimientos, que articula la génesis instrumental y la discursiva).

CONTEXTO Y METODOLOGÍA

La actividad se desarrolló en el centro público IES El Parador de la provincia de Almería, en el curso de 1º de E.S.O. Se elaboraron 4 sesiones de aprendizaje sobre los fractales. En las 2 primeras, el primer autor introdujo la noción de fractal a la clase; en la 3ª y 4ª sesiones, 3 grupos de 4 estudiantes, seleccionados por su interés en el tema, hicieron uso de NeoTrie en pequeños grupos para construir fractales (triángulo de Sierpinski y alfombra de Sierpinski en la 3ª sesión, y tetraedro de Sierpinski y esponja de Menger en la 4ª). Estos estudiantes no tenían experiencia previa en el uso del software. Los investigadores les presentaron las principales herramientas y les mostraron representaciones planas de los fractales que tenían que construir. A partir de ese momento, dejaron autonomía a los estudiantes para colaborar entre ellos e intercambiar los controles de forma natural, mientras se limitaban a tomar datos y solventar dudas y contingencias técnicas.

En esta comunicación, se presenta el trabajo realizado por 3 grupos de 4 estudiantes cada uno. La metodología empleada es de tipo descriptivo, con una orientación cualitativa pues se utiliza la observación directa y la grabación en vídeo para la recogida de información. Los vídeos fueron analizados siguiendo el modelo analítico propuesto por Powell, Francisco y Maher (2003). A continuación, se resumen los resultados procedentes del análisis.

RESULTADOS

En primer lugar, presentamos una descripción general del trabajo observado en los tres planos verticales. A continuación, detallamos este trabajo para cada uno de los fractales considerados en el estudio: triángulo, alfombra y tetraedro de Sierpinski, y esponja de Menger (Figuras 1, 2, 3 y 4), respectivamente.

Plano Comunicación [sem-dis]. En este plano se persigue que pasen de la imagen icónica de un fractal a su visualización como objeto matemático, reconociendo la existencia de un patrón de construcción, así como de la autosimilitud. Para la construcción de los fractales planos (triángulo y alfombra de Sierpinski), a los grupos se les presentaron imágenes de las tres primeras iteraciones. Para la construcción del tetraedro de Sierpinski y de la esponja de Menger, adicionalmente a las imágenes planas de las 3 primeras iteraciones, se les entregaron modelos físicos de los fractales (hasta la iteración 2). El objetivo era que los integrantes de los grupos debatieran la estrategia que debían seguir en la construcción de dichas iteraciones a través de NeoTrie. Al tiempo que debatían, solían hacer dibujos en la pizarra donde esbozaban dichas estrategias. Una vez que un integrante del grupo tomaba los mandos y trabajaba con la representación en la realidad virtual inmersiva, los demás hacían uso del resto de las representaciones disponibles para colaborar en la construcción.

Plano Descubrimiento [Sem-Ins]. A través de este plano, se busca que los estudiantes exploren y descubran en NeoTrie la existencia del patrón de construcción de cada fractal y la autosimilitud entre las partes con el todo, ayudándose de las representaciones planas y/o modelos físicos proporcionados. Cuando los estudiantes se sumergieron en el entorno de la realidad virtual, empezaron a explorar las distintas herramientas que les ofrecía NeoTrie. Para obtener la iteración 0 de cada fractal, usaron el comando de voz del software para invocar las correspondientes figuras básicas en la escena (triángulo, cuadrado, tetraedro y cubo). Para obtener la iteración *n*, realizaron el número correspondiente de copias de la iteración *n*-1, y usaron las manos virtuales para mover y unir las copias. Además de las herramientas de copiar y pegar, conforme los estudiantes exploraban NeoTrie, descubrieron otras, como la de rotación, que usaron para colocar las piezas verticalmente, y llevaron a cabo operaciones como la de homotecia para cambiar el tamaño de una figura. Por otro lado, el modo "vuelo'' les permitió tomar perspectiva para ver las construcciones completas. En todo este proceso, tuvieron en cuenta el carácter iterativo y la autosimilitud de los fractales. Llama la atención el hecho de que, de forma espontánea, los estudiantes se informaban unos a otros de los fallos y los

problemas que habían tenido al utilizar el software para que los demás lo hicieran correctamente cuando llegaba su turno.

Plano Razonamiento [ins-dis]. Su fin es desarrollar el razonamiento sobre la estructura de los fractales, fundado en los descubrimientos que llevaban a cabo al intentar construirlos mediante el uso de NeoTrie. Todos los integrantes de los grupos trabajaron con NeoTrie en las distintas construcciones de las iteraciones de los fractales programados para esta actividad. Durante el proceso, se observó una sinergia entre los integrantes de los grupos con respecto al que estaba haciendo uso de NeoTrie. Los estudiantes que observaban las acciones del compañero que lo estaba usando, intentaban guiarlo mediante palabras, movimientos corporales e incluso contactos físicos, con la finalidad de que rectificara o encaminara la construcción, conforme al carácter iterativo y a la propiedad de autosimilitud de los fractales.

A continuación, indicamos en las tablas 1, 2, 3 y 4 algunas especificidades encontradas en el trabajo en los 3 planos para cada uno de los fractales considerados.

Tabla 1. Planos verticales del ETM del Triángulo de Sierpinski

Triángulo de Sierpinski Tiempo de construcción promedio: 11 minutos
Plano Comunicación [sem-dis]
A partir de la representación gráfica, los estudiantes detectan el patrón iterativo. Se ponen de acuerdo para que uno de ellos comience a construirlo con NeoTrie, y se intercambian el rol de constructor de modo natural, a lo largo del proceso. Se observa una comunicación fluida entre el compañero que usa NeoTrie y los que observan su actuación, a través del monitor del ordenador portátil. Logran comunicarse en un lenguaje verbal y gestual afín a ellos sobre la manera de construir la iteración 0 y de la iteración *n* a partir de la iteración *n*-1 (Figura 1a). También se ayudan a la hora de solucionar problemas, como los que se exponen en los otros dos planos.
Plano Descubrimiento [sem-ins]
Usando NeoTrie construyen de la iteración 0 hasta la iteración 4. La representación gráfica les permite detectar fácilmente la existencia de un patrón y la herramienta de copiado les posibilita construir las sucesivas iteraciones. En general, tienen más dificultades con el uso del software, puesto que acaban de comenzar, que con la comprensión de la estructura del fractal, aunque también aparecen problemas como el que se expone en el plano de Razonamiento. La mayoría de estudiantes usan reiteradamente la homotecia en distintas fases de las iteraciones, lo que implica que las figuras no encajan al momento de unirlas (esto ocurre también en la alfombra de Sierpinski (Figura 2b). Corrigen la construcción, ya sea borrando partes de las figuras o volviendo a construirlas. Aún no son diestros en el manejo de las herramientas de NeoTrie, pero ganan experiencia fácilmente, conforme avanzan en la construcción.
Plano Razonamiento [ins-dis]
A pesar de tener las copias necesarias de la iteración *n*-1, algunos estudiantes tienen problemas en juntar las copias para construir la iteración siguiente. Por ejemplo, para la construcción de la iteración 2, un integrante del grupo 3 empieza a unir copias de la iteración 0 en la iteración 1, con la finalidad de construir la iteración 2, cuando lo ideal es hacer copias de la iteración 1 para proceder a unirlas. Incluso las une mal, sin respetar la propiedad de autosimilitud del fractal. Los otros integrantes del grupo se dan cuenta del error y se lo advierten. La alumna que estaba en los mandos reconoce que no se acordaba como era la iteración 2, evidenciando que había tratado de memorizar la forma de las figuras vistas de forma icónica (Figura 1b). Sus compañeros la guían para que rectifique su construcción, explicándole cómo proceder para que cumpla la autosimilitud. La estudiante genera entonces las copias de la iteración 2 y las une de forma correcta, logrando construir adecuadamente las iteraciones 3 y 4 (Figuras 1c, 1d).

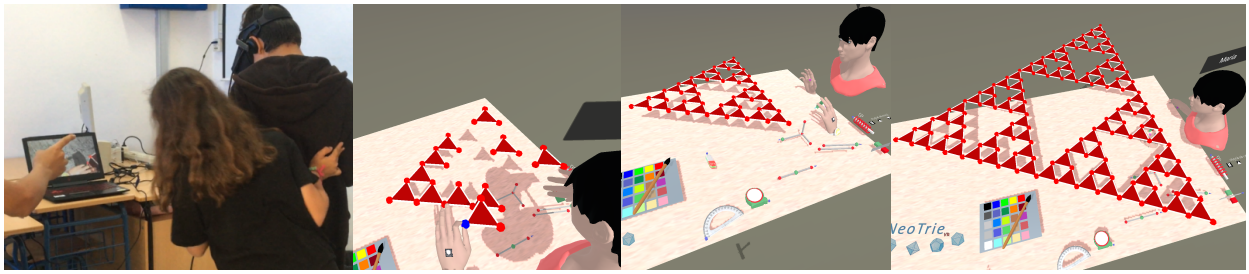


Figura 1: a) Ayudándose en la construcción. b) Construcción sin tener en cuenta el carácter iterativo. c) Vista de la iteración 3. d)Vista de la iteración 4.

Tabla 2. Planos verticales del ETM de la Alfombra de Sierpinski

Alfombra de Sierpinski Tiempo de construcción promedio: 12 minutos
Plano Comunicación [sem-dis]
La comunicación es activa entre los integrantes de los grupos. A partir de las representaciones gráficas iniciales, los estudiantes averiguan la cantidad de copias que necesitan en cada iteración y cómo tienen que agruparlas (Figura 2a). Durante la construcción del fractal, se apoyan cuando observan errores y comunican, mediante un lenguaje verbal y gestual afín a ellos, la manera de corregirlos. Por ejemplo, un estudiante dice al que lleva los mandos: "Ponlo en paralelo", "¿Qué es paralelo?" El primer estudiante dice: "Así", poniéndose a su lado.
Plano Descubrimiento [sem-ins]
Por la experiencia obtenida en la construcción del fractal anterior, se hacen más diestros en el uso de las herramientas que ofrece NeoTrie. Algunos estudiantes tienen dificultades con la visualización de figuras planas dentro del espacio, en la realidad inmersiva. Para intentar solucionarlo, en el grupo 3 utilizan la herramienta de rotación. Teniendo las copias necesarias de la iteración 0 para la construcción de la iteración 1, la estudiante que lleva los mandos intenta girarlas para colocarlas en vertical, pero sus compañeros le advierten de que no encajarán bien (Figura 2b). Ante ello, borra las copias sin rotar para luego generar las copias necesarias de la iteración 0 rotada, y sobre ella, procede a unirlas y construye así la iteración 1, con lo que muestra una buena instrumentalización de NeoTrie.
Plano Razonamiento [ins-dis]
Los estudiantes no tienen problemas en la construcción de las iteraciones 0 y 1. Para la construcción de la iteración 3, todos los grupos saben la cantidad de copias que tienen que hacer de la iteración 2 y las generan. Cuando unen esas copias, empiezan a tener problemas de orientación, pues la iteración 3 se hace muy grande y empiezan a desorientarse (Figura 2c). Para superar el problema de la desorientación, y para una mejor perspectiva de lo que están construyendo, activan el modo vuelo, y es partir de allí, que ven los espacios que les falta completar y los completan fácilmente. De esta forma, muestran el dominio del carácter iterativo y la autosimilitud del fractal (Figura 2c).

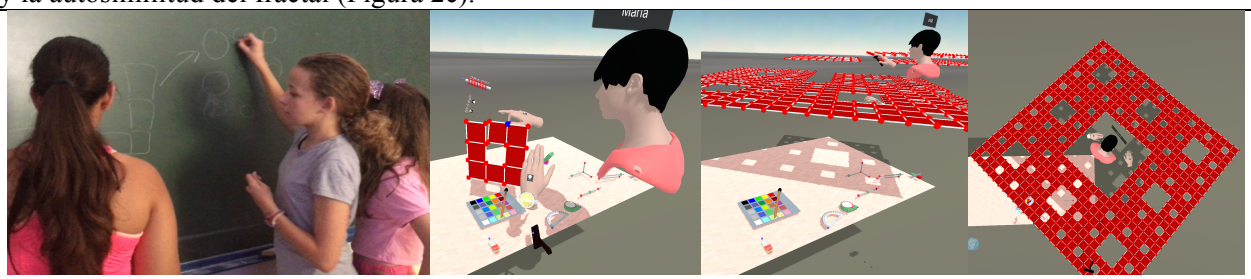


Figura 2: a) Comunicación previa a la construcción en NeoTrie. b) Las piezas no encajan bien si no se aplica la misma rotación a todas ellas. c) Dificultad al construir la iteración 4. d) Vuelo para obtener una mejor visión de la figura.

Tabla 3. Planos verticales del ETM del Tetraedro de Sierpinski

Tetraedro de Sierpinski Tiempo de construcción promedio: 10 minutos
Plano Comunicación [sem-dis]
Además de las representaciones planas, los estudiantes disponen de un modelo tridimensional de la iteración 2 del tetraedro de Sierpinski (Figura 2a). A partir de estas representaciones, los estudiantes empiezan a

reconocer la iteración 0 y la cantidad de copias que tienen que generar para la construcción de la iteración siguiente. Parecen reconocer el patrón de construcción. El reto es entonces hacer las sucesivas iteraciones con NeoTrie. La comunicación sigue siendo activa entre los integrantes de los grupos en todo momento. Se apoyan cuando observan algún error y comunican, mediante un lenguaje natural afín a ellos (por ejemplo: "ese ponlo atrás"), la manera de corregirlos.

Plano Descubrimiento [sem-ins]

Con la experiencia ganada anteriormente en la génesis instrumental, generan la iteración 0 (un tetraedro), hacen las copias necesarias para la iteración 1 y las juntan correctamente. No obstante, en el grupo 1, el estudiante que realiza la construcción tiene dudas sobre dónde colocar la cuarta copia de la iteración 0, ya que hasta ahora se había trabajado con fractales planos y piensa que es suficiente con construir un triángulo de Sierpinski a base de tetraedros. Nuevamente, hubo estudiantes que aplicaron homotecias (reducción del tamaño), pero esta vez no a una copia de la iteración 0, sino a la unión de tres copias de la iteración 0 (faltaba una cuarta copia) (Figura 3b); ello les obligó a reconstruir la iteración 1, pero esta vez sin aplicar homotecias.

Plano Razonamiento [ins-dis]

Una vez ganado el manejo de las homotecias (necesarias para visualizar las iteraciones superiores del fractal), la construcción de la iteración 2 se hace rápidamente, pues los estudiantes generan la cantidad necesaria de copias de la iteración 1 y saben cómo conectarlas. Evidencian, de nuevo, el dominio del carácter iterativo y la autosimilitud, esta vez en un fractal de tres dimensiones.

La construcción de la iteración 3 es casi igual de rápida que la iteración 2 para grupos 2 y 3. En esta etapa, una integrante del grupo 1 aún tiene dificultades en usar NeoTrie, pero con la ayuda de sus compañeros que le indican lo que tenía que borrar o agregar o cómo usar una determinada herramienta, logra construir la iteración 3 (Figura 3c). Finalmente, la construcción de la iteración 4 transcurre sin problemas en todos los grupos (Figura 3d).

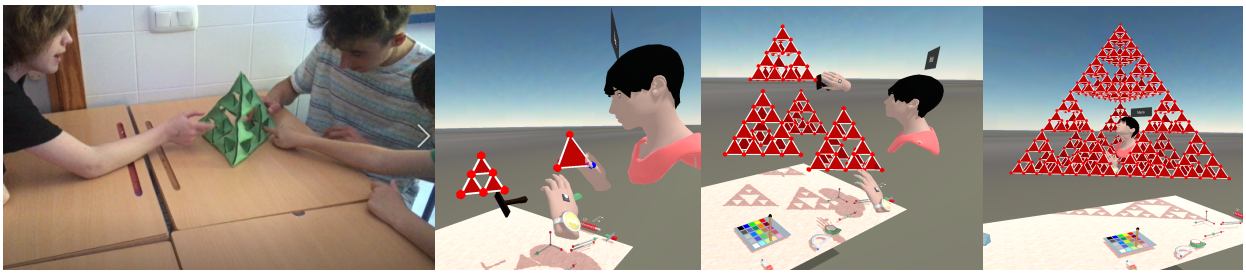


Figura 3: a) Reconocimiento del patrón con el modelo físico. b) 3 tetraedros unidos pero de diferente tamaño que el cuarto. c) Copias de la iteración 2 antes de unirlas. d) Imagen de la iteración 4.

Tabla 4. Planos verticales del ETM de la Esponja de Menger

Esponja de Menger Tiempo de construcción promedio: 20 minutos
Plano Comunicación [sem-dis]
Al igual que en el tetraedro de Sierpinski, a la actividad con representaciones planas, se le suma un modelo físico de la iteración 2 de la esponja de Menger (Figura 4a). En un principio, los grupos parecen tener claro la cantidad de copias necesarias en cada iteración y cómo agrupar dichas copias. No obstante, al construir la iteración 1, incurren en el error de hacerlo como si fuera la iteración 1 de la alfombra de Sierpinski, pero con cubos. Es decir, construyen la parte frontal de la esponja de Menger y creen que ya tienen la primera iteración del fractal. Es necesaria la intervención del instructor para poner en duda a los escolares sobre la bondad de su construcción. Entonces, ayudándose del modelo físico, los estudiantes advierten que les faltan aún muchos elementos. A partir de ahí, intentan construir lo faltante haciendo copias de la parte frontal para posteriormente rotarlas con el fin de obtener las paredes laterales, el piso y el techo, pero se dan cuenta de que la estrategia no es adecuada (Figura 4b).
Plano Descubrimiento [sem-ins]
Una vez que los grupos se dan cuenta de que no están haciendo apropiadamente la iteración 1, intentan otras estrategias de construcción. Por ejemplo, el grupo 2 procede a construir la iteración 1 aprovechando las dos copias de la parte frontal y colocando copias de la iteración 0 en los lugares apropiados, completando esta iteración correctamente (Figura 4c).

Plano Razonamiento [ins-dis]
Aprendida la lección de la iteración 1, los grupos proceden a construir la iteración 2, de la cual generan el número adecuado de copias. Solo el grupo 3 logra conseguir el objetivo (Figura 4d), pues el software empezó a fallar en el trabajo de los demás grupos por problemas en el algoritmo de pegado de figuras, que posteriormente solventaron los desarrolladores. Aún así, los grupos muestran un buen progreso del pensamiento estructural, con la correcta aplicación de la recursividad y la autosimilitud en un fractal tridimensional bastante más complejo que el anterior (dos grupos completan la primera iteración y otro la segunda).

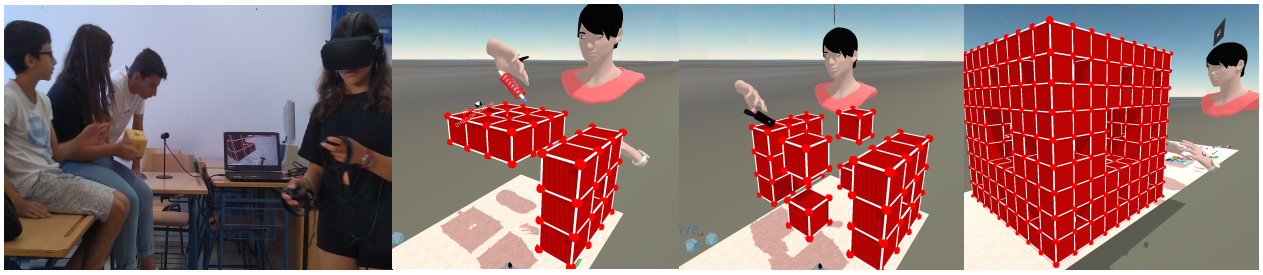


Figura 4: a) Colaboración manejando distintas representaciones. b) Intento fallido copiando y rotando la parte frontal. c) Descubrimiento de una estrategia acertada. d) 2ª iteración completada.

Discusión y conclusiones

A partir de la descripción del trabajo matemático realizado por 3 grupos de estudiantes de Secundaria al construir en realidad virtual 4 fractales, 2 de ellos tridimensionales, hemos detectado que, en términos generales:

- Mediante el uso de NeoTrie, los estudiantes trascienden las representaciones planas de objetos geométricos, tanto planos como tridimensionales, y se adentran en la representación de objetos planos y tridimensionales en el espacio. Ello da lugar a procesos de visualización diferentes a los habituales, que implican rotaciones, cambios de puntos de vista, homotecias, etc. Mediante el uso de distintos tipos de representaciones y mediante la comunicación entre los estudiantes, los grupos captan el carácter iterativo y la autosimilitud de los fractales, y logran articular estas propiedades correctamente para construir los 4 fractales propuestos.

- En los fractales más sencillos, los estudiantes captan la estructura del fractal a partir de las representaciones gráficas de las primeras iteraciones y son capaces de construir más iteraciones en la realidad virtual. En los primeros fractales, se centran en la génesis instrumental, en la que avanzan por ensayo y error, comunicándose entre los integrantes para optimizar el proceso. Salvo casos excepcionales, NeoTrie resulta manejable para los estudiantes y el avance en dicha génesis se produce rápidamente.

- Los progresos en la instrumentalización permiten un trabajo de instrumentación con el software al tratar de construir fractales más complejos, como la esponja de Menger. En este caso, no es suficiente la representación gráfica del fractal. El modelo físico ayuda a entender y plasmar en realidad virtual la estructura del fractal, que se dispone en el espacio tridimensional. A partir de aquí, algunos estudiantes logran construir una iteración más en el espacio virtual. Ello pone de manifiesto un razonamiento de tipo inductivo y un progreso en el pensamiento estructural, que no se suele trabajar en el currículo habitual y que actualmente cobra cada vez más relevancia.

El modelo de los ETM permite describir el trabajo matemático que realizan los estudiantes, el cual denota una activación de los planos epistemológico y cognitivo del concepto de fractal, así como la articulación entre ellos mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva, y los planos de Comunicación, Descubrimiento y Razonamiento (Kuzniak y Richard, 2014). El software de realidad

virtual NeoTrie VR ha propiciado una génesis instrumental activa, alrededor de la cual se ha vertebrado el trabajo matemático de los estudiantes, mostrando así el potencial de este software para promover nuevos modos de aprendizaje de la geometría tanto espacial como plana, desde el punto de vista espacial.

Puesto que los resultados obtenidos son a nivel grupal, sería interesante indagar sobre el grado de aprovechamiento de la actividad en los estudiantes individuales. También adaptar este trabajo para clases completas, ampliando las actividades con otros aspectos accesibles a este nivel, como cálculos de longitud, área o volumen de las primeras iteraciones, así como promover la creación de nuevos fractales.

Por último, cabe mencionar que nuestro estudio ha servido para corregir errores en el código, en lo referente al pegado de figuras, y mejorar el rendimiento del programa, dado el número elevado de datos necesarios para visualizar en realidad virtual iteraciones de algunos fractales.

Referencias

Cangas D., Morga G. y Rodríguez J.L. (2019). Geometric teaching experience with NeoTrie VR. *Psychology, Society, & Education*, 11 (3), pp. 355-366.

Chen, S., Herron, S., Lyle, J., Mohn, R., Mudzimiri, R. y Tian, H. (2015). *Assessing awareness, interest, and knowledge of fractal geometry among secondary mathematics teachers in the United States and China* (ProQuest Dissertations Publishing).

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Alba, F. J (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. Gonzales, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM. Disponible en https://core.ac.uk/download/pdf/33252522.pdf

Karakus, F. (2015). Investigation into How 8th Grade Students Define Fractals. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15*(3), pp. 825-836.

Kuzniak, A. (2011). "L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses". *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4), 5-15. Disponible en http://relime.org/articulos/1704I/201400d1/

Mandelbrot, B. (2013). *Fractals and chaos: the Mandelbrot set and beyond*. Springer Science & Business Media.

Powell, A. B., Francisco, J. M. y Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, 22(4), 405-435.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME13 survey team report. *ZDM: Mathematics Education, 48*(5), 691-719.

PROCESO DE EVALUACIÓN ENTRE PARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FUTUROS DOCENTES. ESTUDIO DE UN CASO

Peer assessment process in solving problem with prospective teachers. Case study

de Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J. y Sosa-Martín, D. N.

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta parte de una investigación cuyo objetivo es analizar el proceso que siguen docentes en formación al evaluar una actividad matemática realizada por un par. Los participantes son estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria. Se les pidió resolver un problema matemático y, por parejas, evaluar la resolución de otro compañero. En este documento mostramos el estudio de un caso, correspondiente al proceso de evaluación realizado por una de las parejas. Se analizan las resoluciones de los dos evaluadores y del evaluado y la transcripción de la discusión mantenida por la pareja mientras evaluaba, identificando aquellos aspectos en los que se fijaban y el carácter de sus comentarios. Esta pareja se centra en el proceso general de resolución y sus reflexiones son tanto interpretativas como valorativas. Además, muestran dificultades para evaluar a su compañero y un fuerte apego a su propia resolución.

Palabras clave: *evaluación entre pares, resolución de problemas, formación docente*

Abstract

Part of an investigation is presented whose objective is to analyse the process that teachers in training follow when evaluating a mathematical activity carried out by a peer. Participants are students of the Secondary Education Teacher Training Master. They were asked to solve a mathematical problem and, in pairs, to evaluate the resolution of another classmate. In this document we show the case study, corresponding to the evaluation process carried out by one of the couples. It is analysed the resolutions of the two evaluators and of the evaluated and the transcript of the discussion held by the couple while evaluating, identifying those aspects in which they focused and the nature of their comments. This couple focuses on the general resolution process and their reflections are both interpretive and evaluative. Furthermore, they show difficulties in evaluating their partner and a strong attachment to their own resolution.

Keywords: *peer assessment, problem solving, teacher training*

INTRODUCCIÓN

La evaluación es una herramienta poderosa que se usa para una gran variedad de propósitos como llevar un control del aprendizaje de los alumnos, evaluar sus logros, tomar decisiones para la enseñanza, evaluar el currículo, entre otros (Silver y Mills, 2018). Durante la última década se ha intentado motivar a los profesores para que incorporen en sus clases prácticas de evaluación que vayan más allá del tradicional examen escrito, a la par que se investiga sobre el efecto de incorporar estos métodos alternativos de evaluación en la práctica docente. La evaluación entre pares es una de las estrategias que mayor presencia está cobrando en este escenario, junto con la autoevaluación. Distintas investigaciones muestran que la evaluación entre pares aporta beneficios al aprendizaje (Topping, 2009), contribuyendo a aumentar tanto el conocimiento de conceptos como de

de Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J. y Sosa-Martín, D. N. (2021). Proceso de evaluación entre pares en la resolución de problemas en futuros docentes. Estudio de un caso. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 229 – 236). Valencia: SEIEM.

herramientas o estrategias para enfrentarse a diversas situaciones, y a reconocer argumentos válidos (Beaver y Beaver, 2011; Lavy y Shriki, 2014). Custodia, Márquez y Sanmartí (2015) muestran que este enriquecimiento se da tanto en el sujeto evaluador como en su par evaluado.

A pesar de los beneficios que ha mostrado el uso de estrategias de evaluación que involucren a los propios estudiantes, son muy pocos los docentes que implementan estos métodos en el aula (Chanudet, 2016). Más aún si nos fijamos en la evaluación por pares, como muestra el trabajo de Suurtam, Koch y Arden (2010), en el que 1096 profesores de 7º y 10º grado de escuelas de Ontario, Canadá, respondieron a un cuestionario. El 91% de los profesores admitió sentirse cómodo usando distintos tipos de evaluación, siendo los más usados los exámenes escritos (95%) y los cuestionarios (84%). La evaluación por pares solo la utilizaba un 15%, el 10% como herramienta para hacerse una idea del aprendizaje los alumnos y solo un 5% como estrategia para evaluar.

En las investigaciones de Beaver y Beaver (2011) y Lavy y Shriki (2014) son futuros profesores de matemáticas y profesores en ejercicio los que llevan a cabo una actividad de evaluación entre pares. Los resultados mostraron que este tipo de evaluación contribuye al desarrollo de los docentes en diversos aspectos: (i) mejora su habilidad para evaluar, ya que eligen mejor los criterios y el peso numérico que se asignan a cada criterio, (ii) aumenta su propio conocimiento sobre los contenidos matemáticos y las herramientas con las que resuelven problemas, (iii) les ayuda a darse cuenta de que hay muchas formas diferentes de resolver un mismo problema, haciéndoles reflexionar sobre su propia solución y sobre cómo mejorarla, y (iv) les proporciona experiencia en el reconocimiento de argumentos válidos, lo que les conduce a ganar confianza para ser críticos con el razonamiento de los demás y, en este sentido, a ser responsables con los comentarios que brindan como evaluadores.

Los dos trabajos anteriores tienen en común que los participantes realizaron la evaluación entre pares a partir de una serie de criterios predefinidos. En el caso de Beaver y Beaver (2011), se les entregó una rúbrica con la que tenían que evaluar las producciones de sus compañeros; mientras que Lavy y Shriki (2014) pidieron a los participantes que construyeran, de forma conjunta, la lista de criterios que pretendían evaluar. En ambos estudios, las evaluaciones entre pares se hicieron a partir de unas referencias comunes para todos los evaluadores. Esas referencias, en forma de criterios de evaluación o rúbricas, son complejas de definir, conllevan un proceso de construcción que implica reflexión, puesta en común y toma de acuerdos. En numerosas ocasiones, cuando los docentes tienen que evaluar una actividad, carecen de este tipo de herramientas. ¿Qué hacen en esos casos? ¿Cómo definen sus criterios de evaluación? ¿Qué toman en cuenta? Estas cuestiones cobran mayor relevancia en el ámbito de la formación inicial docente, que es donde se sitúa esta investigación.

La pregunta general que guía esta investigación es: ¿Qué caracteriza al proceso que siguen los docentes de matemáticas de secundaria en formación cuando se les pide evaluar una actividad matemática realizada por un par? Nos planteamos entonces los siguientes objetivos:

- Identificar qué aspectos de la resolución de la actividad matemática tienen en cuenta los futuros docentes cuando actúan como evaluadores.
- Analizar el carácter de sus reflexiones.

Para tratar de abordar estos objetivos se pidió a los estudiantes de la especialidad de Matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad de La Laguna, que resolvieran individualmente un problema matemático. Posteriormente, en parejas, debían evaluar la forma en que uno de sus compañeros había resuelto la misma actividad.

En total participaron 16 estudiantes. En este trabajo se presenta el análisis de un caso, formado por una pareja de estudiantes de dicho Máster. Se analiza, por un lado, la forma en que el estudiante evaluado y los evaluadores resolvieron el problema, y por otro lado, la discusión que la pareja de evaluadores mantuvo durante la evaluación de la respuesta de su compañero.

Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2018) y Cárdenas, Blanco, Guerrero y Caballero (2016) identifican algunos aspectos que los profesores tienen en cuenta cuando califican producciones de estudiantes, entre los que se incluyen el proceso general de resolución, los cálculos realizados y el resultado obtenido. Estos estudios fueron realizados con profesores en ejercicio, en un contexto de heteroevaluación. La investigación que aquí se presenta mostrará si esos mismos aspectos son los que tienen en cuenta los docentes en formación, en un contexto de evaluación entre pares, o si aparecen nuevos elementos.

MARCO CONCEPTUAL

En numerosas ocasiones la evaluación se asocia al hecho de asignar una calificación. Sin embargo, el papel de la evaluación en el aula va más allá (Beaver y Beaver, 2011). Actualmente, la visión de la evaluación como una serie de métodos que miden objetivamente la adquisición de conocimientos ha cambiado hacia una visión de la evaluación como una práctica que proporciona conocimientos e información de forma continua, que apoya el aprendizaje del alumno e influye en la práctica docente (Suurtamm, Koch y Arden, 2010).

Shahbari y Abu-Alhija (2018) definen la evaluación como el proceso de recopilar información sobre el aprendizaje de los alumnos, interpretar esa información y llevar a cabo una acción. Nortvedt, Santos y Pinto (2016) añaden que la información recogida puede ser usada tanto por profesores como por estudiantes, y que el fin de la evaluación es identificar dónde se encuentran los alumnos en su aprendizaje, a dónde deben dirigirse y cuál es la mejor forma de hacerlo.

La evaluación se puede llevar a cabo de varias maneras y puede ser usada con diferentes propósitos. Uno de los métodos que se puede emplear es la evaluación entre pares, definida por Topping (2009) como un método en el que los estudiantes determinan el nivel o la calidad de una tarea o del rendimiento de otros estudiantes de su mismo nivel. Las actividades de evaluación por pares pueden ser variadas, funcionando en diferentes áreas del currículo y en diferentes asignaturas. El producto a evaluar también puede variar: redacciones, portafolios, presentaciones orales, pruebas escritas, etc. Algunos autores sostienen la necesidad de proporcionar criterios de evaluación a la hora de llevar a cabo una actividad de evaluación por pares (Beaver y Beaver, 2011; Custodia, Márquez y Sanmartí, 2015; Lavy y Shriki, 2014). Sin embargo, otros estudios muestran que cuando se evalúa en grupo, entregar materiales para que evalúen no necesariamente ayuda a llegar a un consenso sobre cómo evaluar o, ni siquiera, sobre cómo utilizar esos materiales (Wyatt-Smith, Klenowski y Gunn, 2010).

En este estudio, la evaluación por pares se entenderá como el proceso que siguen los estudiantes, en este caso futuros profesores, para analizar la respuesta de un compañero a una tarea determinada, en este caso la resolución a un problema matemático. En este proceso pueden intervenir diversos elementos, entre ellos el hecho de que la persona que evalúa podría tener que analizar una respuesta completamente diferente a la suya, lo que pondría en juego sus propios conocimientos acerca de las diferentes formas de resolver la actividad (Cáceres y Chamoso, 2015; Cárdenas et al., 2016).

Por otra parte, cada evaluador puede centrarse en el análisis de diferentes aspectos de la resolución presentada por su par. En el caso particular de la evaluación de actividades matemáticas, Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2018) identifican cinco aspectos: (i) procedimiento, que incluye referencias al proceso general de resolución, (ii) cálculos, que incluye cualquier tarea concreta dentro del proceso general de resolución, (iii) errores, (iv) exposición, haciendo referencia a la claridad en la exposición de la respuesta y (v) resultado. Las reflexiones en torno a esos aspectos pueden tener, además, carácter interpretativo o valorativo.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de tipo cualitativo, con un enfoque descriptivo exploratorio. Se realiza el estudio de un caso, con el objeto de analizar en detalle las variables deseadas (Creswell, 2012).

Participantes

La población objeto de estudio eran 16 estudiantes de la especialidad de Matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de La Laguna que estaban cursando la asignatura "Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas". En este trabajo se presenta el estudio de un caso en el que están involucrados 3 de esos estudiantes. Nos referiremos a ellos con los pseudónimos Carlos (evaluado) y Ana y Pedro (evaluadores). Los dos primeros son graduados en Matemáticas y el tercero es Licenciado en Ciencias Estadísticas. Se eligió analizar este caso, de forma intencional, al observarse que la pareja de evaluadores era una de la parejas que más debatía y que, por tanto, podrían aportar mayor riqueza al análisis.

Recogida de datos

Los datos se recogieron a partir de una actividad, realizada durante una sesión de 2 horas de clase, que incluía cuatro fases: resolución de un problema, evaluación entre pares, autoevaluación y discusión final. Nos centraremos, en este trabajo, en el análisis de las dos primeras fases.

La primera fase consistió en una actividad que tenían que resolver de forma individual, con lápiz y papel (Figura 1) y que se recogió una vez finalizaron su resolución. El criterio que se utilizó para seleccionar la actividad fue que resultara ser un problema para los participantes, en el sentido de Schoenfeld (1985). En la segunda fase se formaron aleatoriamente ocho parejas y a cada pareja se le entregó la resolución de un compañero, junto con un documento con las indicaciones para la evaluación (Figura 2). Esta fase se grabó en audio con el objetivo de obtener la mayor información posible del proceso que seguían al evaluar.

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y = x^2 + 4x + 5$.

Figura 1. Problema propuesto a los estudiantes.

Evalúa la resolución del problema que se te entrega en documento aparte. Argumenta de forma detallada dicha evaluación.

(No escribir sobre el documento de resolución del problema)

Figura 2. Indicaciones para la evaluación por pares.

Proceso de análisis de datos

Los instrumentos utilizados para el análisis fueron: la resolución del problema entregada por los tres estudiantes y el archivo de audio con la discusión mantenida por la pareja evaluadora.

El proceso de análisis se realizó en dos fases. En primer lugar, se analizaron las resoluciones individuales de Ana, Pedro y Carlos al problema planteado, identificando los heurísticos utilizados, los casos que estudiaron, el proceso seguido, las representaciones que emplearon y las soluciones dadas. Posteriormente se analizó el proceso que siguieron Ana y Pedro para evaluar la resolución de Carlos, a partir de la transcripción del audio, teniendo en cuenta tres variables: resolución a la que se refieren (Carlos, Ana y/o Pedro), aspecto en el que se fijan y carácter del comentario (expositivo, interpretativo o valorativo). Para establecer los valores de la segunda variable, se tomaron como referencia las categorías definidas por Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2018) que aparecen en el marco y que fueron adaptadas a las características de la actividad que aquí se evaluaba. Se consideraron por tanto las siguientes categorías, atendiendo al aspecto de la resolución del problema en que se podían fijar los evaluadores:

- Proceso general: Comentarios acerca del proceso general seguido en la resolución.
- Operatoria: Comentarios de una tarea concreta dentro del proceso general de resolución.

- Argumentación: Comentarios acerca de las explicaciones dadas por el evaluado.
- Resultado: Comentarios acerca del resultado final presentado por el alumno.

Para sistematizar el análisis se transcribió el audio con la discusión de Ana y Pedro. La transcripción se dividió en fragmentos que denominamos episodios, esta división se realizó atendiendo a la categoría en la que podían enmarcarse los comentarios que los evaluadores hacían en dicho fragmento (proceso general, operatoria, argumentación o resultado). A su vez, dentro de cada episodio, se realizó una nueva división a cuyos fragmentos denominamos sub-episodios. Estos sub-episodios se obtuvieron atendiendo al carácter de dichos comentarios, es decir, si los comentarios eran de carácter interpretativo, valorativo o expositivo.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

La Tabla 1 muestra los heurísticos empleados por Ana, Pedro y Carlos para resolver el problema.

Tabla 1. Heurísticos empleados durante la resolución del problema.

Evaluadores		**Evaluado**
Ana	**Pedro**	**Carlos**
Representa gráficamente la parábola. Se basa en dicha representación para resolver el problema.	Divide en casos. Primero busca rectas horizontales, haciendo un estudio algebraico, y continúa con otros casos.	Estudia las expresiones algebraicas de la parábola y las rectas.

Más detalladamente, en la resolución de Ana observamos los siguientes pasos: (1) Calcula los puntos de corte de la parábola con los ejes; (2) Representa gráficamente la parábola (comete un error al representar el vértice); (3) Indica dos soluciones particulares de rectas horizontales y, para verificarlo, calcula los puntos de corte de las dos rectas con la parábola; (4) Generaliza (sin justificar) para rectas horizontales por encima de "su vértice".

Pedro divide su resolución en casos en los que realiza los pasos indicados a continuación:

- Caso 1. Busca rectas horizontales que corten a la parábola en dos puntos: (1) Calcula la recta tangente a la parábola que tiene pendiente 0, mediante la derivada. (2) Generaliza (sin justificar) para rectas horizontales por encima de la anterior.
- Caso 2. Busca rectas que pasen por el vértice y por cualquier otro punto de la parábola. Sin dar la expresión algebraica, indica que es todo el haz de rectas que pasan por el vértice a excepción de la horizontal y la vertical.
- Caso 3. Indica, sin realizar ningún cálculo, que intentaría generalizar a rectas que pasen por dos puntos arbitrarios de la parábola.

Por último, Carlos sigue los siguientes pasos: (1) Iguala la ecuación de la parábola a la ecuación general explícita de una recta (y=ax+b) y pasa todos los términos a un miembro (comete errores de cálculo); (2) Resuelve la ecuación de 2º grado, e indica que el discriminante de la raíz debe ser estrictamente positivo; (3) Plantea la inecuación resultante y comienza a estudiarla (comete errores de cálculo); (4) Resuelve la ecuación considerando la igualdad y calcula el valor de a respecto de b; (5) Resuelve la inecuación y calcula los intervalos de los posibles valores de a si b=0.

Análisis de la evaluación entre pares

Del análisis de la transcripción se obtuvieron un total de 24 episodios y 43 sub-episodios. La Tabla 2 muestra el número de episodios asociado a cada categoría y el carácter interpretativo (I), valorativo (V) o expositivo (E) de los sub-episodios.

Los evaluadores se centraron mayoritariamente en aspectos relacionados con el proceso general de la resolución del problema. De ahí que, aun siendo 7 episodios los que aparecen en esta categoría,

se dividan en un total de 24 sub-episodios. En 3 de esos 7 episodios, la discusión gira en torno a las tres soluciones individuales, la del evaluado y las de los evaluadores. Son episodios donde los evaluadores comparan sus propias resoluciones con la del evaluado, como el siguiente:

1. P: O sea, tú y yo, la casualidad que hicimos más o menos el mismo razonamiento.
2. P: Yo lo que digo es, lo que está haciendo al estar con y=ax+b y de repente decir b es igual cero, es que está cogiendo todas las rectas que pasan por el (0,0). Porque se queda con y=ax.
3. P: La parábola tiene, tú la calculaste más o menos igual que yo, tiene una forma más o menos así.

Tabla 2. Número de episodios en cada categoría y carácter de los mismos.

	Nº total de episodios (sub episodios)	**Resolución a la que se refieren**			**Carácter**		
		Evaluado (Carlos)	**Evaluador 1 (Ana)**	**Evaluador 2 (Pedro)**	**I**	**V**	**E**
Proceso general	**7 (24)**	6	4	3	8	11	5
Operatoria	**4 (5)**	4	0	1	3	2	0
Argumentación	**1 (1)**	1	0	0	1	0	0
Resultado	**5 (6)**	5	0	1	2	4	0
Otros	**7 (7)**	-	-	-	-	-	-
Total		**16**	**4**	**5**	**14**	**17**	**5**

Algunos de esos episodios ponen de manifiesto las dificultades con las que se encuentra la pareja de evaluadores para poder comprender la resolución de su compañero. Por otro lado, esos episodios también muestran cierto apego de los evaluadores hacia sus propias resoluciones, tomándolas en varios momentos como referente para analizar la resolución de su compañero.

Estas dificultades que tienen los evaluadores para entender la resolución de Carlos también pueden verse en los episodios clasificados en las categorías de Operatoria y Resultado. Durante esos 4 y 5 episodios, respectivamente, Ana y Pedro continúan en la línea de intentar comprender los pasos seguidos por su compañero.

Además, el único comentario clasificado en la categoría de Argumentación también está relacionado con dichas dificultades, un episodio en el que Pedro explica que echa en falta algún tipo de argumentación con palabras en la resolución de Carlos.

En el análisis se identificaron siete episodios que no pudieron clasificarse en ninguna de las cuatro categorías definidas en el marco (Tabla 2). En estos episodios, los evaluadores hacen referencia al tipo de problema que se les planteó [4], sus posibles soluciones [5-6], su autopercepción como resolutores de problemas [7] y sobre el proceso de evaluación entre pares [8-9].

4. P: Yo estoy bastante oxidado con esto. Yo pensé que iba a ser resolver problemas como los de secundaria. Pero esto ya se me queda largo.
5. A: Y, en verdad, no te dice que encuentres todas. Te dice que encuentres ecuaciones de la recta.
6. P: Ecuaciones de rectas. Con dos ya sería suficiente. Fue lo primero que pensé
7. P: Yo es que no me sentía capaz tampoco de resolverlo de otra forma, pero claro.
8. A: Pero ¿hay que ponerle una nota o algo?
9. P: No, no, no. No es corregir, ¿no? Bueno, en principio yo no lo evaluaría porque tampoco sé sobre qué lo tengo que evaluar, si hay que ponerle una nota, si hay que poner más o menos iba bien.

DISCUSIÓN FINAL

En este trabajo se muestra el primer paso de un estudio que pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿qué caracteriza al proceso que siguen los docentes de matemáticas de secundaria en formación cuando se les pide evaluar una actividad matemática realizada por un par?

Del estudio de este caso se desprende que una de las características de ese proceso tiene que ver con el grado de apego que los evaluadores tengan a su propia resolución. Esto se pudo observar gracias al análisis previo que se hizo de las resoluciones de los tres estudiantes. En más de la tercera parte de los episodios, los evaluadores hacen referencia a sus propias estrategias de resolución (Tabla 2), tratando de comprobar si sus soluciones están contempladas en la resolución que están evaluando. Este apego, en algunos casos, puede influir en el proceso de evaluación (Cárdenas et al., 2016).

Otro de los resultados relevantes de este análisis, y que podría explicar esta dependencia de su solución, es la evidente dificultad que manifiestan para poder comprender la resolución a evaluar. Aunque, a excepción de la argumentación, la pareja analiza todos los aspectos de la resolución considerados en las categorías, este análisis no sigue un orden lógico. No analizan todos los pasos de la resolución y, los que analizan, lo hacen sin ser capaces de conectar los argumentos utilizados por su compañero. Durante el proceso de evaluación, la pareja realiza comentarios tanto de carácter interpretativo como valorativo (Tabla 2). Existen episodios en los que al realizar comentarios de carácter valorativo, atribuyen al compañero evaluado errores que no comete y que son fruto de la falta de comprensión a la hora de interpretar ciertos pasos de la resolución. Y, sin embargo, pasan por alto errores en la operatoria que sí comete su compañero. Con esto se observa como uno de los factores que influyen en la calidad de las actividades de evaluación, la ausencia de conocimiento matemático, interviene directamente en este caso (Cáceres y Chamoso, 2015).

Estos resultados son producto del estudio del proceso de evaluación seguido por una sola de las ocho parejas de futuros docentes involucradas en el estudio. El método de análisis, especialmente las categorías utilizadas, resultó útil para tratar de establecer tipos de comportamiento frente al proceso de evaluación entre pares. ¿Todos los estudiantes mostrarán ese apego a su propia resolución? ¿O dependerá esto de las diferencias que existan entre la propia solución y la solución evaluada? Estas preguntas guían los próximos pasos a seguir en esta investigación.

Cuanto más involucrados están los alumnos es su evaluación, más competentes son (Chanudet, 2016). Dado que la evaluación por pares involucra de forma directa a los estudiantes en su propio aprendizaje, puede contribuir a aumentar su motivación y su sentido de la responsabilidad (Lavy y Shriki, 2014). Además, en este caso concreto, se ha podido observar que la pareja evaluadora se encuentra con serias dificultades a la hora de comprender la resolución de su compañero. Por ello, las actividades de evaluación por pares pueden ayudarles no solo a desarrollar su pensamiento crítico y sus habilidades de análisis sino, en este sentido, sus conocimientos sobre el contenido trabajado y sus habilidades reflexivas (Beaver y Beaver, 2011), pues el hecho de que Carlos sea un par contribuye a que los futuros docentes reflexionen sobre los conocimientos y habilidades que debería tener en comparación con un igual. La evaluación por pares exige habilidades sociales y de comunicación, por lo que también puede contribuir a desarrollar sus capacidades sociales y de trabajo en equipo: aprender a dar y aceptar críticas, justificar sus opiniones y rechazar sugerencias (Lavy y Shriki, 2014). Por lo que, la evaluación entre pares, en particular con futuros docentes de Matemáticas, es una herramienta que tiene un gran potencial como herramienta de aprendizaje. Una de las preocupaciones expresadas por los docentes en formación es su falta de experiencia práctica con la evaluación, tanto en los cursos de nivel universitario como en las prácticas en colegios. La actividad que aquí se plantea puede ser un ejemplo a explotar en la formación docente.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional del MICINN con Referencia EDU2017-84276-R.

Referencias

Arnal-Bailera, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2018). Análisis de las anotaciones realizadas por profesores al calificar pruebas escritas de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P., Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 131-140). Gijón: SEIEM.

Beaver C. y Beaver. S. (2011). The Effect of Peer-Assessment on the Attitudes of Pre-Service Elementary and Middle School Teachers about Writing and Assessing Mathematics. *IUMPST: The Journal, 5*.

Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2015). La evaluación sobre la resolución de problemas de matemáticas. En L. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 225-241). Cáceres: Universidad de Extremadura.

Cárdenas, J. A., Blanco, L. J., Guerrero, E. y Caballero, A. (2016). Manifestaciones de los profesores de matemáticas sobre sus prácticas de evaluación de la resolución de problemas. *Bolema*, 30(55), 649-669.

Chanudet, M. (2016). Assessing inquiry-based mathematics education with both a summative and formative purpose. En Peter Liljedahl y Manuel Santos-Trigo (Eds.) *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research* (pp. 177-207). Suiza: Springer.

Creswell, J. W. (2012). *Educational Research. Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research.* Boston: Pearson.

Custodia, E., Márquez, C. y Sanmartí, N. (2015). Aprender a justificar científicamente a partir del estudio del origen de los seres vivos. *Enseñanza de las ciencias, 33*(2), 133-155.

Lavy, I. y Shriki, A. (2014). Engaging prospective teachers in peer assessment as both assessors and assessees: The case of geometrical proofs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Nortvedt, G., Santos, L., y Pinto, J. (2016). Assessment for learning in primary school mathematics teaching: The case of Norway and Portugal. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 23*(3), 377-395.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Shahbari, J.A. y Abu-Alhija, F.N. (2018). Does Training in Alternative Assessment Matter? The Case of Prospective and Practicing Mathematics Teachers' Attitudes Toward Alternative Assessment and Their Beliefs About Nature of Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education 16*(7), 1315-1335.

Silver, E. A., y Mills, V. L. (Eds.) (2018). *A Fresh Look at Formative Assessment in Mathematics Teaching*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Suurtam, C., Koch, M. y Arden, A. (2010). Teachers' assessment practices in mathematics: classrooms in the context of reform. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practices, 17*(4), 399-417.

Topping, K.J. (2009). Peer assessment. *Theory into Practice, 48*(1), 20-27.

Wyatt-Smith, C., Klenowski, V. y Gunn, S. (2010). The centrality of teachers' judgement practice in assessment: a study of standards in moderation. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 17*(1), 59–75.

CARACTERIZANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE EDUCACIÓN INFANTIL ENSEÑANDO PRISMAS

Characterizing the Specialised Knowledge of a Childhood Education Teacher when Teaching Prisms

Escudero-Domínguez, A.[a], Muñoz-Catalán, M. C.[a] y Carrillo, J.[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Huelva

Resumen

En este estudio intentamos comprender lo que sucede en un aula de Educación Infantil a partir de la identificación del conocimiento del profesor en la enseñanza de prismas. Utilizaremos el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge para mostrar ejemplos de evidencias e indicios de conocimiento de un profesor de Educación Infantil enseñando prismas en un aula con alumnos de 4 años. Se trata de un estudio de caso instrumental enfocado desde un paradigma interpretativo. Tomamos la primera parte de una sesión en la que el objetivo de aprendizaje era identificar características de diversos cuerpos geométricos y descubrir sus proyecciones planas. Entre los resultados se destaca que el profesor de Educación Infantil necesita un profundo conocimiento matemático, ya que lo que el profesor sabe respalda las decisiones tomadas en clase y el tipo de tareas que plantea.

Palabras clave: *conocimiento del profesor, prismas, Educación Infantil, estudio de caso*

Abstract

In this study we try to understand what happens in an Early Childhood classroom from the identification of the teacher's knowledge in teaching prisms. We will use the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model to show examples of evidence and signs of knowledge of an Early Childhood teacher teaching prisms in a classroom with 4-year-old students. It is an instrumental case study focused from an interpretive paradigm. We took the first part of a session in which the learning objective was to identify characteristics of various geometric bodies and discover their flat projections. Among the results it is highlighted that the Early Childhood teacher needs a deep mathematical knowledge, since what the teacher knows supports the decisions made in class and the type of tasks that it poses.

Keywords: *teacher knowledge, prisms, Early Childhood Education, case study*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas en Educación Infantil está en auge debido al reconocimiento de esta etapa como cimiento para el aprendizaje matemático futuro (McCray and Chen, 2012). Suele pensarse que las matemáticas que se enseñan en esta etapa puede impartirlas cualquiera (Castro y Castro, 2016), lo que ha influido en que exista poca producción respecto al profesor de Educación Infantil (Parks and Wager, 2015). Sin embargo, distintos investigadores (como, por ejemplo, Perry and Dockett, 2002; Muñoz-Catalán et al., 2019) afirman que estos profesores deben poseer un conocimiento matemático sólido.

Este trabajo se centra en geometría ya que es un bloque de contenidos centrales en Educación Infantil (Clements, 2004). A esta edad los alumnos deben ser capaces, además de proporcionar el nombre de distintos cuerpos y figuras geométricas, identificar distintas propiedades de estos. El

Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2021). Caracterizando el conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil enseñando prismas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 237 – 244). Valencia: SEIEM.

aprendizaje de la geometría es imprescindible a esta edad debido a la ayuda que proporciona para la construcción del pensamiento espacial (Espina y Novo, 2019). Además, el razonamiento espacial se considera un componente esencial del pensamiento matemático y de la resolución de problemas (Sack, Vazquez and Moral, 2010). Sin embargo, muchos docentes priorizan la enseñanza de otros bloques matemáticos y desplazan o excluyen los contenidos geométricos. Algunos investigadores como Chiang and Stacey (2015) opinan que puede ser debido a que algunos profesores carecen de determinados conocimientos geométricos básicos y, por tanto, no se sienten seguros a la hora de impartir ese contenido geométrico.

Esta comunicación forma parte de un trabajo más amplio que pretende describir e interpretar el conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil para la enseñanza de la geometría, a la vez que nos planteamos profundizar en el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge [en adelante MTSK] (Carrillo et al., 2018) para su aplicación en esta etapa educativa. En este reporte intentamos comprender lo que sucede en un aula de Educación Infantil dando respuesta a la pregunta ¿Qué conocimiento especializado (MTSK) moviliza un profesor de Educación Infantil en su práctica respecto de la enseñanza de los prismas?

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Los primeros años de escolarización constituyen los cimientos de los aprendizajes futuros, como se ha indicado anteriormente. Hay que tener en cuenta que el profesional de esta etapa no es especialista en ninguna materia, pero sí necesita disponer de un conocimiento sólido y cohesionado para identificar las matemáticas fundamentales y poder promover un aprendizaje profundo, con la dificultad añadida de revestirlas de forma divertida (Muñoz-Catalán et al., 2019). Aunque los aspectos pedagógicos generales desempeñan un papel importante en el conocimiento de estos profesores, consideramos que la naturaleza abstracta de las matemáticas confiere una especificidad particular a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de esta etapa (Muñoz-Catalán, Ramírez-García, Joglar-Prieto y Carrillo, en prensa). Por ese motivo, en la última década ha ido creciendo la investigación acerca de este profesional utilizando distintos modelos como el Mathematical Knowledge for Teaching [MKT] (Ball, Thames and Phelps, 2008) y el Knowledge Quartet [en adelante KQ] (Rowland, Huckstep and Thwaite, 2005). Concretamente con el KQ encontramos un estudio sobre el conocimiento de una profesora de Educación Infantil enseñando geometría (Hundeland, Erfjord and Carlsen, 2017). Los estudios con ambos modelos de conocimiento revelan que son útiles para caracterizar el conocimiento de este profesor, pero estos deben ser ajustados a las características de la etapa.

Desde hace unos años encontramos también publicaciones sobre la etapa con el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge [MTSK] (Carrillo et al., 2018). Estos trabajos versan sobre distintos bloques de contenidos como la enseñanza de la aritmética y la geometría (por ejemplo, Muñoz-Catalán et al., 2019) entre otros. En estas investigaciones queda patente cómo el modelo MTSK puede usarse para esta etapa educativa, siendo una herramienta útil para reflexionar sobre el conocimiento especializado del profesor de Educación Infantil, aunque el conocimiento de este profesional sea diferente al del profesor de Primaria, Secundaria o Bachillerato. Estos trabajos muestran cómo los elementos de conocimiento matemático son importantes para el docente de esta etapa y cómo estos están relacionados con elementos del conocimiento didáctico del contenido (Policastro, Almeida and Ribeiro, 2017). El MTSK relaciona el carácter especializado con una cierta forma de conocer las matemáticas para enseñarlas a unos alumnos específicos, y se conceptualiza como el conocimiento que los profesores necesitan y usan, lo que tienen disponible y, por lo tanto, en el que apoya sus acciones (Muñoz-Catalán et al., en prensa).

El modelo MTSK se presenta, por un lado, como modelo teórico sobre el conocimiento del profesor que enseña matemáticas y, por otro lado, como herramienta metodológica para analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en su práctica educativa (Carrillo, Montes,

Contreras y Climent, 2017). Está compuesto por tres dominios: Conocimiento Matemático (MK), Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y Creencias del profesor sobre las Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje. Estas últimas no son objeto de estudio en esta comunicación.

Los dos primeros dominios se subdividen en tres subdominios de conocimiento (Figura 1) y dentro de cada uno de ellos existe una serie de categorías que ayudan a la identificación y caracterización de conocimientos que pertenecen a cada subdominio (Carrillo et al., 2018).

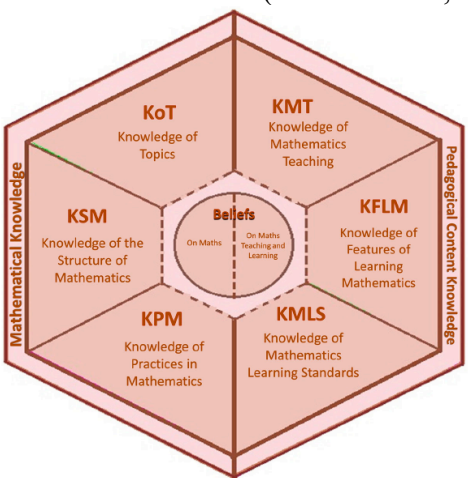


Figura 1. Dominios y subdominios del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge [MTSK] (Carrillo et al., 2018)

En el dominio del Conocimiento Matemático (MK) se encuentran los siguientes tres subdominios: *Conocimiento de los Temas* (KoT), que contiene el conocimiento disciplinar propio de los profesores de matemáticas (procedimientos, caracterización de conceptos, propiedades de objetos matemáticos, registros de representación y conocimiento de usos y aplicaciones de un tema); *Conocimiento de la Estructura de la Matemática* (KSM), formado por las conexiones entre contenidos matemáticos (conexiones de complejización, simplificación, transversales y auxiliares); y *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas* (KPM), que abarca las formas de proceder en matemáticas (por ejemplo, cómo demostrar, definir, ejemplificar, usar propuestas heurísticas). Y en el dominio del Conocimiento didáctico del Contenido (PCK): *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), que comprende el conocimiento del profesor sobre cómo enseñar un determinado contenido matemático (teorías de enseñanza, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, además de conocer las características útiles de distintas herramientas manipulativas o virtuales); *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM), que hace referencia a cómo se aprende un contenido matemático (teorías de aprendizaje, dificultades, errores y obstáculos, así como el conocimiento de las formas de interacción con un contenido matemático y los intereses y expectativas de los estudiantes sobre un contenido matemático); y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS), que contiene el conocimiento del profesor sobre el currículo, estándares definidos por grupos de investigación o asociaciones profesionales de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas acerca de los niveles de conocimiento esperados por los estudiantes en un determinado nivel educativo (nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, expectativas de aprendizaje y secuenciación con temas anteriores y posteriores).

METODOLOGÍA

En esta investigación nos planteamos obtener indicadores de conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil en relación con la enseñanza de los prismas. Afrontamos el objetivo desde un paradigma interpretativo (Bassey, 1999) y mediante un estudio de caso instrumental (Stake, 2005) con el fin de lograr una mejor comprensión acerca de la enseñanza de los prismas. Se

trata de un caso único donde nuestro informante es José (seudónimo), un profesor de Educación Infantil en activo con más de 10 años de experiencia en la etapa.

La recogida de información se ha llevado a cabo a través de observación de aula y entrevista semiestructurada. En este trabajo se presenta el análisis de algunos fragmentos significativos de la primera parte de una sesión de clase con alumnos de 4 años cuyo objetivo de aprendizaje era identificar características de diversos cuerpos geométricos y descubrir sus proyecciones planas e incorporamos algún fragmento de entrevista para la aclaración de su conocimiento.

El análisis de la información comienza con la transcripción de la sesión y la entrevista, aplicando un enfoque interpretativo (Kvale, 1996) en el que los datos son recontextualizados a la luz del modelo MTSK. Además de utilizar la división en subdominios y categorías (Carrillo et al., 2018), diferenciamos la evidencia del indicio de conocimiento (Carrillo et al., 2017), el cual se procura convertir en evidencia a través de la entrevista.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este trabajo presentamos algunos fragmentos de una sesión de clase y el análisis del conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil en relación con los prismas, como se ha indicado.

En la sesión el profesor comienza presentando algunas proyecciones de prismas de base cuadrada dibujadas en un folio (Figura 2) y les pide que nombren las figuras geométricas dibujadas.

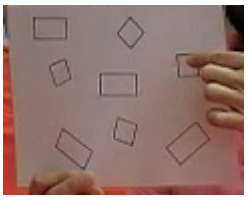


Figura 2. Lámina con rectángulos y cuadrados en distintas posiciones

Cuando José señala un cuadrado, uno de los alumnos responde *"cubo"* y el profesor le responde: "*No, esto no es un cubo, es un cuadrado. Se parecen porque el cuadrado viene del cubo"*. Tras esto, coloca todas las piezas de madera en el suelo (prismas de base triangular, cuadrada y rectangular, cilindros y esferas) y comenta: *"¡Chicos! Mi amigo E11 nos va a demostrar de dónde vienen los cuadrados y rectángulos*". José señala sobre un cuadrado de la tarjeta y le pregunta al alumno *¿Qué es?* Este le responde correctamente y José le comenta: "*Pues ahora E11 vas a coger la figura de la que creas que sale ese cuadrado. Por ejemplo, esta [cogiendo un cilindro de las piezas de madera], ¿De aquí sale un cuadrado?*" El alumno responde que no y el profesor se lo confirma, insistiendo en que coja "*la figura geométrica que creas que nos va a dar el cuadrado"*. Y el alumno coge un cubo y lo coloca encima de un cuadrado.

A continuación, José describe los cuadrados y rectángulos así: *"Te recuerdo que los rectángulos [señalando sobre el papel uno de ellos] no son iguales por todos los lados y que los cuadrados [señalando sobre uno de ellos] son iguales por todos los lados, pero los rectángulos tienen dos lados que son más largos"* y pide a otro alumno que señale un rectángulo en la lámina. Acto seguido, le pide que busque de qué cuerpo se puede sacar un rectángulo. Por último, el docente toma un prisma y un cubo de las piezas de madera y les pregunta: "*Mira este cubo está lleno de… ¿Qué son sus caras, chicos?"*. Los chicos responden correctamente y él les insiste: *"Cuadrados, sus caras son cuadrados. Muy bien. Y del prisma, sus caras ¿Qué son? Tiene caras que son cuadrados, como ésta y ésta [tomando el prisma], pero sus otras caras ¿Qué son?* El alumno le responde correctamente *"rectángulos"* y José le indica que coloque "*la cara del rectángulo en el rectángulo"*. El alumno coloca el prisma correctamente sobre la tarjeta, apoyado sobre un rectángulo (Figura 3).



Figura 3. El alumno colocando correctamente el prisma sobre el rectángulo

Seguidamente el docente le pide: "*Ahora E17, vamos a coger otro prisma y vas a ponerlo sobre otra figura. ¿En qué otra figura podemos colocar el prisma?"* El alumno responde "*por el cuadrado"* y él perfila: *"el prisma por la cara del cuadrado. Muy bien"*.

Elementos de conocimiento especializado sobre prismas movilizado por el informante

El profesor conoce la importancia de trabajar geometría desde distintos enfoques (KMLS, expectativas de aprendizaje). En esta sesión trabaja el enfoque proyectivo promovido por su conocimiento acerca de la dificultad que tienen los alumnos para distinguir y reconocer las caras de los prismas (KFLM, fortalezas y dificultades) como nos expresa en una entrevista: *"Las caras son una cosa que los niños no son capaces de distinguir"*. De ese conocimiento deriva el esbozo de la tarea planteada para que conozcan las propiedades de determinados cuerpos geométricos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). José ha diseñado una tarea en la que ha representado proyecciones de distintas caras de algunas piezas de madera, en concreto, de algunos prismas. Este diseño está sustentado en su conocimiento acerca de las características de la geometría proyectiva (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Lo anterior refleja una relación de dependencia entre distintos subdominios de conocimiento (Escudero-Ávila, Vasco y Aguilar-González, 2017). También se muestran indicios de que el profesor reconoce la importancia de trabajar las distintas posiciones de las figuras geométricas (no solo la posición prototípica ya que eso impone ciertas limitaciones (Bernabeu, Llinares y Moreno, 2017)) (KMLS, expectativas de aprendizaje). Asimismo, con el diseño de esta actividad el docente pretende que los alumnos, además de proporcionar el nombre de los cuerpos geométricos, sean capaces de proporcionar propiedades de estos (KMLS, expectativas de aprendizaje) como se muestra en este fragmento: *"Mi amigo E11 nos va a demostrar de dónde vienen los cuadrados y rectángulos*".

El docente trata las figuras geométricas como parte de los cuerpos geométricos sabedor de que es una característica clave en el proceso de construcción de la definición de cuerpo geométrico (KPM, definición). La tarea también refleja su conocimiento acerca de una estrategia didáctica (estampación) para trabajar el paso de las figuras de 3d a 2d (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Observamos además cómo José sabe la tendencia natural de los alumnos de esta edad a actuar y manipular los objetos para poder realizar las actividades (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Relacionado con lo anterior, encontramos indicios de que reconoce que el utilizar material manipulativo y generar la estampación de las caras es más potente que realizarlo de forma abstracta (KMT, recursos materiales y virtuales). José utiliza ejemplos para mostrar las figuras planas (cuadrado y rectángulo) partiendo del material tridimensional del que dispone (cubo y prisma de base cuadrada), lo que indica que este profesor piensa que los cuerpos utilizados son ejemplos potentes (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) y cómo su conocimiento matemático respalda las decisiones tomadas en clase (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). El tipo de tarea refleja su conocimiento acerca de distintos sistemas de representación (manipulativo, verbal y gráfico) (Lesh, Post and Behr, 1987), y la complementariedad entre ellos (KoT, registros de representación). En el desarrollo de la sesión, va promoviendo el paso desde lo manipulativo hasta otros sistemas de representaciones más abstractos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

En el transcurso de la sesión, José toma un cilindro y lo coloca encima de un cuadrado a modo de contraejemplo para indicar que todos los cuerpos geométricos no son válidos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). También tenemos evidencias de que el profesor otorga importancia a la precisión y corrección del lenguaje matemático para promover el conocimiento geométrico cuando les comenta: "*No, esto no es un cubo, es un cuadrado*" (KPM, papel del lenguaje formal). El docente utiliza vocabulario geométrico lo que nos hace pensar que considera que en este nivel educativo deben adquirir vocabulario geométrico específico (KMLS, expectativas de aprendizaje). José conoce que a los estudiantes les cuesta dar nombre a las figuras geométricas (KFLM, fortalezas y dificultades). En la sesión el profesor describe los cuadrados y rectángulos, haciendo hincapié en que "*los rectángulos tienen dos lados que son más largos*" (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), lo que refleja además su conocimiento acerca de la dificultad que los alumnos poseen con el rectángulo en particular, por la diferencia de cantidad de longitud de sus lados (KFLM, fortalezas y dificultades). Además, esto es refrendado a través de la entrevista: *"le suele costar más trabajo el rectángulo… porque ellos no ven que este lado es más largo que éste… no discriminan aún el tamaño de los lados"*.

José insiste en la descripción y comparación del cuadrado y el rectángulo, por lo que conoce propiedades de distintas figuras planas (cuadrado y rectángulo) (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). En su explicación observamos como éste señala continuamente los cuadrados y rectángulos sobre la lámina (KMT, recursos materiales y virtuales), consciente de que al alumnado le resulta más fácil dar propiedades de las figuras y cuerpos geométricos si tienen delante un objeto con dicha forma (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Además, tenemos evidencias de que conoce que la distinción entre cuadrado y rectángulo es contenido de esta etapa educativa (KMLS, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado). Esta comparación de figuras geométricas que realiza el profesor muestra su conocimiento acerca de que el comparar distintas figuras geométricas resalta las propiedades de cada una de ellas. José fomenta la comparación de figuras como modo de identificar las características del cuadrado y del rectángulo (KPM, comparación como proceso para la génesis epistémica). Ligado a lo anterior tenemos evidencia de que el profesor conoce que el establecer relaciones entre distintas figuras geométricas es una estrategia de enseñanza (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Este conocimiento matemático (KPM) respalda la estrategia de enseñanza utilizada (KMT) con lo que estamos ante una relación de dependencia de distintos subdominios de conocimiento (Escudero-Ávila, Vasco y Aguilar-González, 2017).

Acto seguido comienza a comparar los prismas y cubos, por lo que también podemos decir que José usa la comparación como estrategia de enseñanza (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), respaldado en su conocimiento matemático de la comparación como modo de identificar las características de los prismas (KPM, comparación como proceso para la génesis epistémica). El profesor siempre toma el prisma de base cuadrada en sus explicaciones (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) ya que conoce que si les muestras varios tipos de prisma se pueden liar (KFLM, fortalezas y dificultades), como nos muestra en este fragmento de entrevista: *"Son niños más chiquitillos y es que los liamos… son muchos conceptos los que se les mete a los pobres… creo que un prisma, con que conozcan el prisma característico es suficiente"*. Asimismo, conoce que es mejor usar el prisma prototípico que otro a esta edad (KMLS, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado). Así el conocimiento de este ejemplo de prisma (prisma de base cuadrada) (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) nos sirve para entender mejor las razones que hay detrás de la manera de enseñar de este profesor.

CONCLUSIONES

A pesar de las diferencias entre etapas educativas, el modelo MTSK puede usarse para el estudio del conocimiento del profesor de Matemáticas en los diferentes niveles educativos. De especial interés resulta investigar sobre su uso en Educación Infantil (Escudero-Domínguez, Muñoz-Catalán

y Carrillo, 2017). En Muñoz-Catalán et al. (en prensa) se puso de relieve su pertinencia en el caso del álgebra. Ahora, pretendemos seguir avanzado a este respecto centrándonos en un contenido geométrico.

En este trabajo hemos identificado elementos de conocimiento especializado que el profesor del estudio ha movilizado para enseñar los prismas. Hemos obtenido evidencias e indicios de casi todos los subdominios, excepto del subdominio de *Conocimiento de la Estructura de la Matemática*, debido a que éste no es fácilmente observable a través de las observaciones, que ha sido el instrumento de recogida de información principal en este trabajo (Escudero-Ávila, Vasco y Aguilar-González, 2017). A este respecto, debemos aplicar otra entrevista donde incluiremos preguntas apropiadas para ello.

De los distintos subdominios encontrados, conviene resaltar el subdominio de *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas*, que es el aún se sigue trabajando para concretar categorías de análisis (Carrillo et al., 2018). El análisis de la práctica de este profesor ha puesto de relieve el papel tan importante que en esta etapa posee el conocimiento del proceso de comparación entre figuras como práctica que fomenta la construcción de conocimiento geométrico y del pensamiento lógico-matemático, por tanto. Para este profesor también era importante diferenciar la comparación sobre la base de la visualización o sobre la percepción visual y lo usaba como base para decisiones docentes (bien fuera para el enfoque con el que se diseñan las actividades –KMT- o para plantear su secuenciación-KMLS-). La comparación se está revelando potente para construir conocimiento geométrico a esta edad y puede considerarse origen de otros procesos matemáticos futuros como la definición o clasificación (Muñoz-Catalán et al., en prensa). Por otro lado, resaltar el subdominio del *Conocimiento de los Temas* ya que el profesor conoce distintos enfoques geométricos, poniendo de relieve en esta sesión su conocimiento acerca de las características de la geometría proyectiva. En este sentido, en su práctica observamos como su conocimiento de los subdominios del PCK son subsidiarios del MK (Muñoz-Catalán et al., 2019). Esta comunicación, además de reforzar la idea de que el profesor de esta etapa educativa necesita un sólido y cohesionado conocimiento matemático (Muñoz-Catalán et al., 2019), ha puesto de relieve que lo que este profesional sabe respalda las decisiones que toma y el tipo de tareas que plantea.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H. and Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bassey, M. (1999). Case study research in educational settings. Buckingham: Open university press.

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. and Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L.C. and Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 185-205.

Castro, E. y Castro, E. (Coords.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil.* Madrid: Pirámide.

Chiang, P.C. and Stacey, K. (2015). Geometric concepts of two-dimensional shapes by primary school teachers in Taiwan. *Proceedings of PME 39,2*, 161-168Clements, D.H. (2004). Part 1: Major themes and recommendations. En, D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in*

Mathematics: Standards for early childhood mathematics education (pp. 7–76). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Escudero-Ávila, D., Vasco, D. y Aguilar-González, A. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (vol 1, pp. 109-116). Madrid, España: CIBEM. Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2017). MTSK: Conocimiento especializado para la enseñanza de la geometría en la etapa infantil. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 119-124). Huelva: CGSE

Espina, E. y Novo. M.L. (2019). Análisis de la presencia de la geometría en los proyectos editoriales de Educación Infantil. *Educación Matemática*, vol. 31, número 3

Hundeland, P.S., Erfjord, I. and Carlsen, M. (2017). A kindergarten teacher's revealed knowledge in orchestration of mathematical activities. In T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 10, February 1 – 5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education y ERME.

Kvale, S. (1996). Interviews: An introduction to qualitative research interviewing. Londres: SAGE

Lesh, R., Post, T. and Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

McCray, J.S. and Chen, J-Q. (2012). Pedagogical Content knowledge for preschool mathematics: construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, 26, 291-307.

Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63-84). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Muñoz-Catalán, M.C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto N. and Carrillo J. (en prensa). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge to promote Algebraic Reasoning in Early Childhood Education as from a task of additive decomposition. *Infancia y Aprendizaje Journal for the Study of Education and Development*.

Parks, A.N. and Wager, A.A. (2015). What Knowledge is Shaping Teacher Preparation in Early Childhood Mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education*, *36*(2), 124-141.

Perry, B. and Dockett, S. (2002). Young children´s access to powerful mathematical ideas. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 81-112). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Policastro, M., Almeida, A. and Ribeiro, M. (2017). Conhecimento especializado revelado por professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no tema de Medida e Comprimento e sua Estimativa. *Revista Plural,* 17(36).

Rowland, T., Huckstep, P. and Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255-281. Sack, J., Vazquez, I. and Moral, R. (2010). Elementary children´s 3-D visualization development: Representing top-views. *Proceedings of PME 34*(4), 113-120.

Stake, R.E. (2005). *Multiple Case Study Analysis*. New York: Guilford Press.

RECURSOS TECNOLÓGICOS PARA LA INTERVENCIÓN TEMPRANA EN CASOS DE DISCALCULIA[1]

Technological resources for early intervention in cases of dyscalculia

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A.

Universidad de Valladolid

Resumen

La discalculia es un trastorno del aprendizaje de las matemáticas fuertemente limitante. Un diagnóstico precoz y el diseño de programas de (re)educación adaptados a cada caso concreto son cuestiones tan complejas como necesaria es darles respuesta. En este sentido, son múltiples los recursos tecnológicos creados para atender ambos problemas, pero no resulta sencillo identificar qué características comparten y cuáles son más relevantes en términos de idoneidad didáctica. Este estudio propone una categorización de estos recursos en función del tipo de destinatario, objetivo, formato y evidencia científica de soporte. El proceso de categorización llevado a cabo es el resultado de la combinación de una primera fase deductiva, en la que se ha realizado una revisión sistemática de la literatura en las principales bases de datos de publicaciones científicas, y una segunda fase inductiva, a partir de la cual se han creado los criterios finales de categorización.

Palabras clave: *trastorno de aprendizaje, discalculia, intervención, recursos tecnológicos*

Abstract

Dyscalculia is a strongly limiting math learning disorder. An early diagnosis and the design of (re) education programs adapted to each specific case are questions as complex as it is necessary to answer them. In this sense, there are multiple technological resources that have been created to address both problems, but it is not easy to identify which characteristics they share and which ones are more relevant in terms of didactic suitability. This study proposes a categorization of this type of technological resources, depending on the type of target population, aim, format and supporting scientific evidence. The categorization process carried out is the result of the combination of a first deductive phase, in which a systematic review of the literature has been carried out in the main databases of scientific publications, and a second inductive phase, based on which the final categorization criteria have been created.

Keywords: *learning disorder, dyscalculia, intervention, technological resources*

INTRODUCCIÓN

Una correcta educación matemática es clave para el pleno desarrollo de una ciudadanía comprometida y crítica al tiempo que los avances en investigación apuntan a la educación matemática en edades tempranas como uno de los mejores predictores del éxito académico en este ámbito y del propio desarrollo de la competencia matemática en años posteriores. Sin embargo, algunas de las barreras para el correcto aprendizaje de las matemáticas y, en particular, para el desarrollo de habilidades numéricas y de cálculo, no son identificadas o diagnosticadas y, si lo son, se hace de forma tardía, lo que limita la eficacia de cualquier intervención para ayudar al alumnado a superar las mismas o a aprender a convivir con ellas sin que supongan una limitación. Este es el caso de la discalculia, "inesperada", ya que se presenta en alumnado con un nivel de inteligencia normal y una escolaridad

[1] Esta investigación ha sido financiada por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León a través de las ayudas destinadas a la contratación predoctoral de personal investigador, cofinanciadas por el Fondo Social Europeo.

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. (2021). Recursos tecnológicos para la intervención temprana en casos de discalculia. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 245 – 252). Valencia: SEIEM.

apropiada (Sans et al., 2012) y aún profundamente desconocida, por lo que a menudo no es identificada ni diagnosticada ni siquiera después de haberse cubierto al completo la etapa de escolarización (May y Ahmad, 2020). Esto es especialmente grave si se tiene en cuenta que el diagnóstico precoz de la discalculia es un elemento clave, ya que cuanto antes se detecten sus síntomas, antes se pueden poner en marcha programas de intervención para su tratamiento y así minimizar las dificultades que conlleva. Al mismo tiempo, ha de tenerse en cuenta la importancia que adquiere el conocimiento del nivel de desarrollo de la competencia matemática que presenta el alumnado con discalculia para que la intervención se adapte lo máximo posible a las necesidades que presentan (Moral Sánchez y Gutiérrez-Soto, 2017).

En lo concerniente a la intervención, esta viene enfocándose en los últimos años desde dos planteamientos diferentes, pero, a menudo, complementarios. Por un lado, nos encontramos con propuestas de intervención a través de las cuales, mediante la puesta en marcha de actividades y juegos específicos apoyados en el uso de materiales manipulativos, se (re)educa matemáticamente al alumnado con discalculia proporcionándole diferentes formas de acceder al conocimiento matemático, así como estrategias alternativas para fijar conceptos, resolver problemas, realizar cálculos, … Por otro lado, encontramos intervenciones basadas en rutinas y prácticas, generalmente de corta duración, en interacción con algún sistema de tutela inteligente o programa adaptativo, esto es, intervenciones en entornos tecnológicos, coincidiendo así con planteamientos como los de Troya y Sánchez (2017), quienes apuestan por las TIC como herramientas de inclusión y mejora de los aprendizajes matemáticos para el alumnado con discalculia. Ahora bien, siendo cada vez más numeroso el abanico de recursos tecnológicos que pueden ser utilizados por profesorado y familias, así como por otros profesionales del ámbito educativo, para apoyar el desarrollo matemático en situaciones de discalculia, conviene conocer bien las características que pueden facilitar discriminar su idoneidad didáctica y pedagógica para cada caso concreto. Con este propósito en mente, el presente estudio tiene como objetivo elaborar una primera categorización de estos recursos tecnológicos a partir de una revisión sistemática de la literatura científica existente. Así, esta comunicación muestra los resultados de una primera aproximación a la oferta de recursos de este tipo como parte de un proyecto más ambicioso cuyo propósito principal es el diseño de protocolos e itinerarios de (re)educación matemática personalizados para el apoyo a alumnado con discalculia (Figura 1) a partir de evidencias procedentes de la investigación, quedando este estudio ligado a las fases primera, de forma directa, y última, de forma más propositiva.

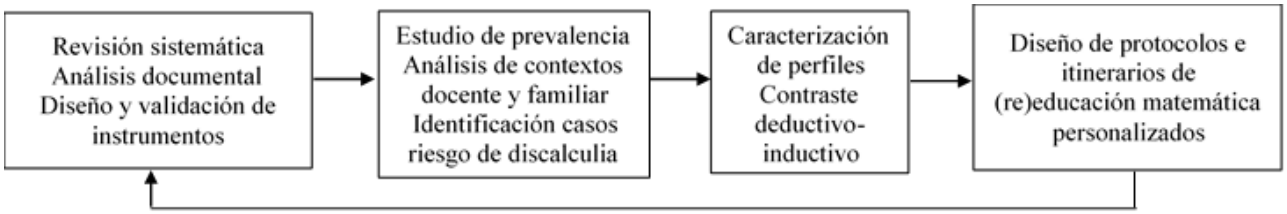


Figura 1. Fases del proyecto global. Elaboración propia

MARCO TEÓRICO

Desde principios del siglo XX se han publicado diferentes estudios en los que se identifican y analizan diferentes manifestaciones de pérdida de la capacidad para realizar tareas de cálculo. Esta patología se atribuye inicialmente a un daño cerebral y se etiqueta como *acalculia*. Pero no es hasta 1974, cuando Ladislav Kosc define con precisión por primera vez el término *discalculia* para referirse a "un trastorno estructural de las habilidades matemáticas que tiene su origen en un trastorno genético o congénito de aquellas partes del cerebro que son el sustrato anatómico-fisiológico directo de la maduración de las habilidades matemáticas adecuadas a la edad, sin un trastorno simultáneo del estado mental general" (Kosc, 1974, p. 165). Ahora bien, a pesar de haber transcurrido casi medio siglo desde entonces, a día de hoy no existe aún una definición única y ampliamente aceptada de

discalculia, sino que esta ha ido evolucionando con el paso del tiempo, respondiendo en ocasiones al enfoque o corriente desde la cual se aproximaba la problemática. Así, una de las definiciones más recientes para la discalculia, y sobre la que se apoya la presente investigación, es la presentada en la quinta versión del Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales (DSM-5), donde la discalculia se encuentra ubicada dentro de los trastornos del neurodesarrollo y se le asigna a un patrón de dificultades caracterizado por problemas de procesamiento de la información numérica, aprendizaje de operaciones aritméticas y cálculo correcto o fluido.

La prevalencia de este trastorno varía en función de los criterios que se han empleado en las diferentes investigaciones que se han llevado a cabo, pero, en general, se puede decir que la discalculia presenta una prevalencia de entre el 2,27% y el 6,4% de la población escolar (Estévez et al., 2008). No es, por otra parte, un trastorno que se presente siempre de forma aislada, ya que una cuarta parte de las personas afectadas por discalculia muestran comorbilidad con otras alteraciones como TDAH, dislexia, trastorno del lenguaje, ansiedad, …

En otro orden de cosas, diferentes estudios basados en técnicas de neuroimagen han hallado alteraciones en el sustrato neural del procesamiento numérico en niños con discalculia. En particular, se ha observado una reducida activación de las áreas involucradas en el procesamiento numérico básico mientras realizaban tareas de naturaleza matemática, así como una reducción de la materia gris y diferencias en la conectividad entre las regiones parietales y occipitotemporales (Butterworth et al., 2011). La variación entre los criterios utilizados para identificar a los niños con discalculia en las investigaciones realizadas y la heterogeneidad de las habilidades matemáticas ha impedido también alcanzar un deseado claro consenso sobre los síntomas asociados a este trastorno (Price y Ansari, 2013), recogiendo en la Tabla 1 los más comúnmente citados.

Tabla 1. Síntomas de la discalculia por nivel escolar. Elaboración propia

Nivel escolar	Síntomas discalculia
Educación Infantil	Dificultad en la adquisición de los principios básicos de la numeración y el conteo.
	Dificultad para clasificar objetos por sus características.
	Dificultad para realizar la correspondencia número-cantidad.
	No adquiere la subitización de cantidades hasta 5 y no hace estimaciones pequeñas.
	Dificultad para entender términos relacionados con las matemáticas.
	No automatiza el número de dedos de las manos.
Educación Primaria	Dificultad en tareas de subitización y en la estimación de cantidades.
	Dificultad para aprender, procesar, memorizar o resolver secuencias numéricas.
	Dificultad para entender la estructura de la recta numérica.
	Problemas para identificar los números, escribirlos o clasificarlos.
	Dificultad para entender el valor posicional de los números (unidades, decenas, centenas).
	Dificultad en la ejecución de operaciones aritméticas (confusión de símbolos, mala ubicación de los dígitos, olvidan el número que se han llevado, …).
	Incapacidad para comprender y recordar conceptos matemáticos, reglas, fórmulas, secuencias (orden de operaciones) y operaciones matemáticas básicas (+, -, x, /).
	Persiste en necesitar estrategias manipulativas para operar (objetos, dedos, …).
	Dificultad para resolver problemas matemáticos.
	Presenta un sentido espacial y temporal deficitario.
Educación Secundaria	Malas notas en la asignatura de matemáticas.
	Errores en cálculos y lentitud para realizarlos.
	No comprende conceptos abstractos y los problemas.
	Falta de automatización de los hechos aritméticos.
	Procesa de forma mecánica pero no conceptual ni con estrategias.
	Mal uso del número en la vida cotidiana.

Finalmente, como se ha señalado en la Introducción, es cada vez más habitual encontrar propuestas de intervención de la discalculia basadas en recursos tecnológicos. El uso de este tipo de recursos facilita la labor del docente, puede llegar a promover un progreso en el alumnado más rápido y mejor que los métodos ordinarios de enseñanza, incentiva la participación del alumnado y permite un aprendizaje autónomo e independiente, entre otros beneficios (Butterworth y Laurillard, 2010). En estudios como los de Benavides-Varela et al. (2020) y Prabavathy y Sivaranjani (2020), se muestran hallazgos que muestran un impacto positivo del uso de este tipo de recursos en la intervención en alumnado con discalculia, en términos de adquisición, sobre todo, de aprendizajes aritméticos básicos. En este sentido, de ahora en adelante al referirnos a recursos tecnológicos lo haremos para referirnos al conjunto de herramientas digitales (software, aplicaciones, páginas web, …) que pueden servir tanto de apoyo al profesional que realiza la intervención, como al alumnado que la recibe.

PROCEDIMIENTO METODOLÓGICO

El proceso que se ha seguido para la elaboración de la categorización ha sido el propuesto por Rojas (2014), quien considera una aproximación basada en dos fases: una deductiva y otra inductiva (Figura 2). En la primera fase, se procedió a ejecutar una revisión sistemática de la literatura relacionada con el tema objeto de estudio. Así, se procedió inicialmente con una búsqueda en las principales bases de datos (Web of Science, Scopus y Scielo, entre otras), insertando múltiples veces en el campo de búsqueda el término *d*scalculia* en combinación con *technology, software, application, app, intervention, ICT, computer, computer-based training, supportive tool, mobile applications, digital games*, y *virtual learning system*. Este proceso de búsqueda de información terminó adoptando un carácter más específico, desembocando en las referencias bibliográficas de las publicaciones que se iban encontrando. Se obtuvieron de esta forma un total de 155 documentos que, tras un primer cribado, quedaron reducidos a 48, seleccionado solo aquellos que presentaban recursos tecnológicos para la intervención específica en discalculia. En la segunda fase se procedió a la lectura analítica de la literatura escogida en la primera fase. Esta lectura permitió identificar los aspectos que eran comunes a los recursos tecnológicos encontrados, en concordancia con los objetivos de investigación planteados.

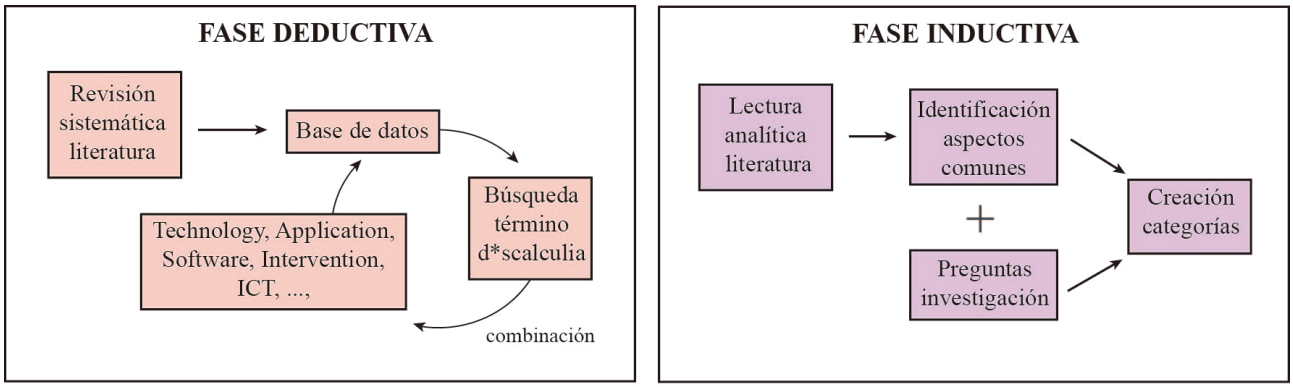


Figura 2. Proceso de categorización. Elaboración propia

Como resultado, se definieron los siguientes criterios de categorización:

- El tipo de destinatario al que está dirigido el recurso tecnológico. Se distinguen aquellos que han sido diseñados específicamente para intervenir en casos de alumnado con discalculia y aquellos que han sido diseñados para todo el alumnado, pero que, a su vez, son recomendados para alumnado con discalculia.
- El principal objetivo para el que los recursos tecnológicos han sido creados. Se pueden distinguir los siguientes: a) Entrenar habilidades matemáticas a través de actividades digitales con el fin de mejorar las mismas, b) Entrenar algunas de las habilidades cognitivas que se ven afectadas por la discalculia mediante juegos, c) Enseñar diferentes conceptos matemáticos

básicos con la ayuda de lecciones online en forma de video tutoriales y d) Ayudar al aprendizaje de contenidos matemáticos sirviendo como herramienta facilitadora y de soporte.

- El tipo de formato en el que se presenta la intervención. Se muestran en forma de agrupamientos de actividades o juegos, un solo juego, lecciones mediante vídeos y herramientas.
- Los hallazgos que se han encontrado relacionados con la evidencia que presenta el recurso tecnológico sobre su validez y su eficacia.

Los tres primeros criterios surgieron de la respuesta a las preguntas de investigación inherentes a los objetivos de la misma, mientras que el último criterio emergió de la lectura analítica de las publicaciones.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El resultado obtenido tras la revisión sistemática y el proceso de categorización se presenta en forma de tabla para su mejor comprensión y visualización (Tabla 2).

Tabla 2. Recursos tecnológicos para la intervención en discalculia

Destinatarios	Objetivo	Formato	Nombre	Evidencia*
Alumnado con discalculia	Entrenar habilidades matemáticas a través de actividades digitales	Un solo juego con varios niveles	Number race	SV y SE
			Number cátcher	NV y NE
			Graphogame-Math	NV y SE, EC
			Dots2Digit y Dots2Track	NV y NE
			NumberBeads	NV y NE
		Conjunto de actividades o juegos	Calcularis	NV y SE, EC
			Talasia	NV y SE, EC
			NeurekaNUM	SV y SE, NA
			Discalapp	NV y NE
			DisMAT	NV y SE, EC
			Dinamo Números	SV y SE, NA
			Calculic Kids	NV y SE, EC
	Entrenar habilidades cognitivas a través de juegos	Conjunto de juegos	Elevate	NV y SE, EC
			NeuroNation	NV y NE
			MathRx program	NV y NE
			Lumosity	NV y SE, EC
	Enseñar conceptos matemáticos a través de video tutoriales	Lecciones con vídeos	Karismath	NV y NE
			Maths explained	NV y NE
	Facilitar el aprendizaje de contenidos matemáticos	Herramienta digital de ayuda	Shape Math	NV y NE
			Calculating Aid Tools: KidKanit	NV y SE, EC
			Conozca el ábaco	NV y NE
			Long Division	NV y NE
Todo el alumnado (con y sin discalculia)	Entrenar habilidades matemáticas a través de actividades digitales	Conjunto de actividades o juegos	Smartick	NV y NE
			Slate math	NV y NE
			MathemAntics	NV y SE, EC

* Nota. El significado de esta columna se desarrolla en mayor detalle más adelante en esta sección. SV, NV: sí o no tiene evidencia de validez; SE, NE: sí o no tiene evidencia de eficacia; NA: no ofrece acceso a la evidencia; EC: un solo estudio de caso.

Los recursos tecnológicos encontrados que han sido diseñados de forma específica para llevar a cabo una intervención con alumnado que presenta discalculia, y que tienen como fin el entrenamiento de habilidades matemáticas a través de la propuesta de actividades digitales, son mayoritariamente nombrados en las publicaciones científicas como *programas de aprendizaje basados en ordenador* (computer-based learning program). Entre ellos se distinguen los programas constituidos por un solo juego y los formados por varios. Los programas *Number Race, Number catcher, Graphogame-Math, Number Beads* y *Dots2Digit* y *Dots2Track* ofrecen un único juego desglosado en diferentes niveles, cuyas características se van modificando para aumentar la dificultad, y en algunos casos para incorporar otras habilidades o contenidos. Por otro lado, los programas *Calcularis, Talasia, NeurekaNUM*, versión actualizada del programa *Nummerus, Discalapp, DisMAT, Dinamo Números* y *Calculic Kids* presentan un agrupamiento de juegos o actividades digitales asociados a las diferentes habilidades matemáticas que se pretenden entrenar.

Se hallaron también recursos tecnológicos en formato de aplicación móvil como *Elevate, NeuroNation* y *Lumosity* o programas de entrenamiento cerebral, como *MathRx*, que ofrecen juegos, tareas o ejercicios para entrenar diferentes habilidades cognitivas (memoria de trabajo, atención, velocidad de procesamiento, …). Estos programas focalizan su atención en las habilidades cognitivas subyacentes que se requieren para aprender conceptos matemáticos de manera eficiente y efectiva, resolver problemas y realizar cálculos matemáticos.

En lo concerniente a la comprensión de los conceptos matemáticos básicos por parte de personas que sufren discalculia, se localizaron dos plataformas, *Karismath* y *Maths-explained*, que proponen lecciones mediante video tutoriales. Los vídeos están orientados a mejorar la comprensión de las matemáticas mediante imágenes visuales cuidadosamente diseñadas, combinadas con el vocabulario y los conceptos matemáticos relevantes.

Por último, dentro de la categoría de recursos tecnológicos diseñados para alumnado con discalculia, se identificaron herramientas digitales de tecnología de asistencia encaminadas a facilitar el aprendizaje de contenidos matemáticos en el alumnado con discalculia como, por ejemplo, *Shape Math*, que ofrece una técnica para resolver problemas matemáticos mentales y escritos basada en la representación geométrica del sistema numérico de base 10, *Calculating Aid Tools: KidKanit*, que aporta diversas herramientas para ayudar con la instrucción de habilidades básicas en las áreas de suma, resta, multiplicación y división, *Conozca el ábaco*, que proporciona un ábaco digital para entrenar el cálculo y *Long Division*, que ayuda con la ejercitación de las divisiones largas paso a paso.

En relación con los recursos tecnológicos diseñados para todo el alumnado, pero que, a su vez, son recomendados para alumnado con dificultades de aprendizaje en matemáticas o con discalculia, se incluyeron en el resultado de la búsqueda y análisis la plataforma *Smartick* y las aplicaciones *Slate Math* y *MathemAntics*. Todas ellas tienen como principal objetivo el trabajo y entrenamiento de múltiples procesos matemáticos y habilidades matemáticas a través de un conjunto de actividades digitales lúdicas y mediante procesos adaptativos.

La revisión encaminada a averiguar si existían investigaciones que avalaran la eficacia y validez de los recursos tecnológicos encontrados arrojó resultados que merece la pena poner de relieve. Así, en los recursos *Number catcher*, *Discalapp*, *Dots2Digit* y *Dots2Track*, *NumberBeads*, *NeuroNation*, *MathRx program*, *Karismath*, *Maths explained*, *Shape Math*, *Conozca el ábaco*, *Long Division*, *Smartick* y *Slate Math* no se han encontrado publicaciones en los que se muestren procedimientos científicos de validación o estudios de impacto de carácter (cuasi)experimental en los que se analice su eficacia. En el caso de los programas *Dinamo Números* y *NeurekaNUM* se especifica en las publicaciones encontradas que se ha llevado a cabo un procedimiento de validación y que se han realizado diferentes estudios para confirmar la eficacia del programa de intervención asociado, pero no se muestra ni se ofrece el acceso a tal documentación. En *Calcularis* (Käser et al., 2013), *Talasia* (Meister Cody, 2020), *Graphogame-Math* (Räsänen et al., 2009), *Calculic Kids* (Ariffin, et al., 2017),

Elevate (Elevate Labs, 2021), *Lumosity* (Lumos Labs, Inc, 2021), *Calculating Aid Tools: KidKanit* (Poobrasert y Gestubtim, 2013), *DisMAT* (Ferraz et al., 2017) y *MathemAntics* (Ginsburg et al., 2019) no se muestra ni se hace referencia a ningún procedimiento de validación, mientras que la evaluación de la eficacia del entrenamiento propuesto por el programa se ha llevado a cabo a través de un único estudio de caso. Y, por último, se ha localizado el programa *Number Race* (Wilson et al., 2006), en el que sí se muestran y detallan tanto el procedimiento de validación como estudios de su eficacia.

Cabe comentar que en los recursos *Talasia* y *Smartick* también se incluye un instrumento de diagnóstico de la discalculia: *CODY-M 2-4* y *Test de Detección de Riesgo de Discalculia*, respectivamente. En esta misma línea, se considera de interés mencionar algunos de los instrumentos que se han encontrado durante la revisión y que utilizan como medio las TIC para la detección temprana de discalculia en el alumnado. Entre ellos nos encontramos con los instrumentos online de detección *Diamante*, para el rango de edad 6-9 años, *Dyscalcuia Screener* y *Di-calc* (perteneciente a la batería *Di-test*), para edades comprendidas entre los 6 y los 14 años, el *Test BADyG*, desde los 3 a los 18 años, *Dyscalc* y *DyscalculiUM*, para mayores de 14 años y, finalmente, la *Evaluación Cognitiva para pacientes con Discalculia* (CAB-DC), para todas las edades a partir de los 7 años. La aplicación de estas pruebas en formato digital simplifica al profesional el proceso de recopilación de datos y resulta un elemento muy atractivo para el alumnado a la hora de participar en estos procesos.

CONCLUSIONES

La era de la tecnología en la que nos encontramos ha propiciado el rápido crecimiento en los últimos 20-30 años del desarrollo de un conjunto de herramientas y recursos tecnológicos con una intención didáctica destinada a corregir o compensar los problemas que producen las dificultades específicas de aprendizaje o de ciertos trastornos del aprendizaje. En el caso de la discalculia, son diversos los recursos que pueden utilizarse en las aulas o en casa para el tratamiento y la intervención de este trastorno, desde aplicaciones móviles hasta juegos de ordenador. Sin embargo, muchos de ellos no han sido elaborados para atender las necesidades específicas individuales que puede tener el alumnado con discalculia, a pesar de que pueden ser herramientas muy útiles para el proceso de reeducación matemática. De acuerdo con estas consideraciones, este estudio proporciona una significativa aportación, ofreciendo una recopilación y categorización de los recursos tecnológicos que existen actualmente para la atención específica del alumnado con discalculia. La mayoría de los recursos tecnológicos encontrados están encaminados a la etapa escolar de Educación Primaria y los contenidos matemáticos en los que centran su atención a través de sus actividades son los relacionados con el sentido numérico (estimación, conteo, comparación, subitización, recta numérica mental, valor posicional, relaciones numéricas …) y, de forma muy significativa, con el cálculo.

Los recursos encontrados en la revisión abarcan una gran variedad de funciones para el proceso de intervención en discalculia y los autores o empresas que los han creado señalan que son eficaces, pero uno de los aspectos que destaca de la investigación realizada es el hecho de una ausencia notable y frecuente de evidencias científicas que avalen su eficacia y su validez. Sigue habiendo, por tanto, un campo atractivo y abierto aún para el avance científico en este terreno.

Referencias

Ariffin, M.M., Abd Halim, F.A., y Abd Aziz, N. (2017). Mobile application for dyscalculia children in Malaysia. En J. Zulikha, y N.H. Zakaria (Eds.), *6th International Conference on Computing & Informatics* (pp. 467-472). School of Computing. https://bit.ly/389bDym

Benavides-Varela, S., Callegher, C.Z., Fagiolini, B., Leo, I., Altoè, G., y Lucangeli, D. (2020). Effectiveness of digital-based interventions for children with mathematical learning difficulties: a meta-analysis. *Computers & Education, 157*(103953). https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103953

Butterworth, B., Varma, S., y Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From brain to education. *Science*, *332*(6033) 1049-1053. https://doi.org/10.1126/science.1201536

Butterworth, B., y Laurillard, D. (2010). Low numeracy and dyscalculia: identification and intervention. *ZDM Mathematics Education,* (42), 527-539. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0267-4

Elevate Labs (2021). *Elevate* [aplicación móvil]. Google Play. https://bit.ly/3sS6uTm

Estévez, N., Castro, D., y Reigosa, V. (2008). Bases biológicas de la discalculia del desarrollo. *Revista cubana genética comunitaria, 2*(3), 14-19.

Ferraz, F., Costa, A., Alves, V., Vicente, H., Neves, J., y Neves, J. (2017). Gaming in dyscalculia: a review on disMAT. En Á. Rocha, A.M. Correia, H. Adeli, L.P. Reis, y S. Costanzo (Eds.), *Recent Advances in Information Systems and Technologies* (pp. 232-241). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56538-5_25

Ginsburg, H.P., Wu, R.E., y Diamond, J. (2019). MathemAntics: a model for computer-based mathematics education for young children / MathemAntics: un modelo de enseñanza de matemáticas asistida por ordenador para niños. *Infancia y Aprendizaje, 42*(2), 247–302. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1589966

Käser, T., Baschera, G.M., Kohn, J., Kucian, K., Richtmann, V., Grond, U., Gross, M., y von Aster, M. (2013). Design and evaluation of the computer-based training program Calcularis for enhancing numerical cognition. *Frontiers in psychology, 4*(489), 1-13. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00489

Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of learning disabilities, 7*(3), 164-177. https://doi.org/10.1177/002221947400700309

Lumos Labs, Inc. (2021). *Lumosity* [aplicación móvil]. Google Play. https://bit.ly/3kK9UVA

May, Y.S., y Ahmad, N.A. (2020). A view on theories and models in the study of dyscalculia. *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences, 9*(3), 128-137.

Meister Cody (2020). *Meister Cody Talasia*. Recuperado de https://bit.ly/2N21IUd

Moral Sánchez, M.J., y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Niveles de secuencia numérica de un alumno con discalculia. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 555). SEIEM.

Poobrasert, O., y Gestubtim, W. (2013, September 23-25). *Development of assistive technology for students with dyscalculia* [Paper presentation]. 2nd International Conference on E-Learning and E-Technologies in Education (ICEEE), Lodz, Poland, 60-63. https://doi.org/10.1109/ICeLeTE.2013.6644348

Prabavathy, M., y Sivaranjani, R. (2020). Effects of virtual manipulative in enhancing basic arithmetic for students with Developmental Dyscalculia. *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research, 7*(6), 19-26.

Price, G. R., y Ansari, D. (2013). Dyscalculia: Characteristics, causes, and treatments. *Numeracy, 6*(1), 1-16.

Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A.J., Aunio, P., y Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive development, 24*(4), 450-472. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.09.003

Rojas, B. (2014). *Investigación cualitativa. Fundamentos y praxis.* Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (FEDUPEL).

Sans, A., Boix, C., Colomé, R., López-Sala, A., y Sanguinetti, A. (2012). Trastornos del aprendizaje. *Pediatría integral, 16*(9), 691-699.

Troya, D., y Sánchez, V. (2017, 20-22 de abril). Las TIC como herramienta de inclusión para niños con discalculia. En M.R. Tolozano Benítez, y R. Arteaga Serrano (Coords.), *3ª Conferencia International de Ciencias Pedagógicas: Por una educación inclusiva: con todos y para el bien de todos* (pp. 1257-1265). Instituto Superior Tecnológico Bolivariano.

Wilson, A.J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S.K., Cohen, L., y Cohen, D. (2006). Principles underlying the design of "The Number Race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral and brain functions, 2*(19), 1-14. https://doi.org/10.1186/1744-9081-2-19

DIFICULTADES Y PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA MULTIGRADO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO DESDE LA VISIÓN DE LOS MAESTROS

Difficulties and problems for teaching mathematics in multigrade schools: an exploratory study from teacher's point of view

Esteve, S.[a], Barquero, B.[b], Domingo-Peñafiel, L.[a]

[a] Universidad de Vic – Universidad Central de Catalunya, [b] Universidad de Barcelona

Resumen

En esta comunicación se presenta un estudio exploratorio con el fin de conocer qué tipo de dificultades y problemas tienen los maestros de infantil y primaria de escuelas multigrado para enseñar matemáticas. Con este propósito se pidió a los maestros que explicitaran 4-5 problemas o dificultades con relación a la enseñanza de las matemáticas. Presentamos aquí el análisis de sus respuestas siguiendo una doble metodología. Por un lado, se usan los niveles de codeterminación didáctica para situar el origen de los problemas manifestados. Por otro lado, se realiza un análisis temático para categorizar a qué condiciones y restricciones hacen referencia. Los resultados muestran que alrededor del 85% de dichas dificultades se sitúan en los niveles más genéricos de la sociedad, escuela y pedagogía, mientras que pocos aparecen en los niveles más específicos de los conocimientos matemáticos a enseñar.

Palabras clave: *escuela multigrado, didáctica de la matemática, profesión docente, formación permanente, teoría antropológica de lo didáctico, niveles de codeterminación didáctica*

Abstract

In this communication, an exploratory study is presented in order to know what kind of difficulties and problems early childhood and primary teachers face in multigrade schools to teach mathematics. For this purpose, teachers were asked to explain 4-5 problems or difficulties in relation to the teaching of mathematics. We present here the analysis of their answers following a double methodology. On one hand, the levels of didactic codetermination are used to locate the origin of the problems expressed. On the other hand, a thematic analysis is carried out to categorize the conditions and restrictions to which they refer. The results show that about 85% of these problems can be located in the most generic levels of society, school and pedagogy, while few appear in the more specific levels of mathematical knowledge to be taught.

Keywords: *multigrade school, didactics of mathematics, teaching, lifelong learning, anthropological theory of the didactic, levels of didactic codeterminacy*

INTRODUCCIÓN

El objetivo de cualquier formación debería ser dotar a los maestros de herramientas para diseñar, implementar y analizar procesos de enseñanza y aprendizaje para mejorar su práctica docente. Pero, aunque existe una amplia oferta formativa para los maestros en activo, ¿hasta qué punto estas

Esteve, S., Barquero, B. y Domingo-Peñafiel, L. (2021). Dificultades y problemas para la enseñanza de las matemáticas en la escuela multigrado: Un estudio exploratorio desde la visión de los maestros. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 253 – 260). Valencia: SEIEM.

formaciones toman en consideración los problemas y dificultades de la profesión docente? y ¿hasta qué punto tienen en cuenta el contexto institucional en el que se desarrolla la actividad docente?

En el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), marco teórico en el que se desarrolla esta investigación, existen varias investigaciones que se proponen indagar sobre cuáles son algunas de las posibles cuestiones de la profesión del profesorado de matemáticas, cómo se pueden formular y qué papel deben tener en la formación del profesorado (Cirade, 2006; Ruiz-Olarría, 2015; Florensa, Bosch, Cuadros, y Gascón, 2018). Tomando estas investigaciones como punto de partida, compartimos la necesidad que cualquier propuesta de formación debe tomar como punto de partida cuestiones planteadas desde la propia profesión y debe tomar en consideración cómo el profesorado formula estas cuestiones a partir de las dificultades emergidas de su práctica profesional.

Esta investigación se sitúa en el contexto de las escuelas multigrado, entendidas como aquellas escuelas que tienen alumnos de como mínimo dos edades biológicas en cada aula (Rathbone, 1993). En este contexto, aunque todas las habilidades y conocimientos que son relevantes y necesarios para cualquier escuela también lo son para este contexto (Mulryan-Kyne, 2007), sus especificidades hacen que se creen contextos institucionales distintos (Résendiz, Block y Carrillo, 2017). Estas diferencias y la falta de formadores expertos en la enseñanza multigrado (Suzuki, citado en Little, 2006) provocan que a menudo los maestros no se sientan adecuadamente preparados para enseñar en aulas multigrado (Hyry-Beihammer y Hascher, 2015a y 2015b) y las cuestiones sobre su profesión puedan plantear retos nuevos, incluso distintos, para diseñar su formación.

A priori podemos suponer que, en el contexto escolar de las escuelas multigrado, muchas de las restricciones que limitan la enseñanza de las matemáticas en las escuelas unigrado (organizadas por grupos de alumnos de edades homogéneas) desaparecen (menor segmentación por edades, formas de evaluación más integrativas entre cursos y niveles educativos, mayor contacto entre disciplinas, contratos pedagógicos y didácticos más flexibles, entre otras), aunque investigaciones previas han resaltado la aparición de otras. Por ejemplo, como resaltan Wood y Frid (2005), en las aulas multigrado es más fácil trabajar en grupos heterogéneos puesto que la diversidad de edades amplía la heterogeneidad de niveles, sin embargo, la mayor parte del tiempo los alumnos trabajan de forma individual, dadas las dificultades de los maestros en guiar los distintos niveles en el aula, a pesar de valorar positivamente las interacciones entre iguales (Block, Ramírez y Résendiz, 2015; Résendiz et al., 2017; Domingo y Boix, 2015). En el caso de la enseñanza de las matemáticas, se tiende a tratar esta heterogeneidad enseñando el mismo tema a toda la clase diferenciando los contenidos específicos por curso (Hyry-Beihammer y Hascher, 2015b; Block et al., 2015; Résendiz et al., 2017). Trabajar de esta forma permite a los maestros cumplir con el currículo oficial de cada curso (siendo el mismo para escuela uni- y multigrado), aunque el maestro tiene menos tiempo para cada grupo, lo cual le supone un desgaste mental y físico (Block et al., 2015; Mason y Burns, 1995; Reséndiz et al., 2017) y, tiene que estar haciendo constantemente adaptaciones curriculares puesto que a veces un contenido no aparece en el currículo de un ciclo. Cuando esto ocurre, está haciendo cambios que no están respaldados por el currículo oficial, en este sentido sería necesario que las instituciones educativas se responsabilizaran de estas adaptaciones curriculares (Résendiz et al., 2017). Además, esta no es la única adaptación que afrontan gran parte de los maestros. Como el material más usado es el libro de texto (Boix y Bustos, 2014; Mason y Burns, 1995), si toda la clase trabaja un mismo tema, es necesario adaptarlo, puesto que los libros de texto no están pensados para aulas multigrado. El hecho de tener que hacer todas estas adaptaciones provoca que sea necesario dedicar mucho tiempo a preparar los planes de estudio (Hyry-Beihammer y Hascher, 2015a) pues hay una falta de materiales y recursos específicos pensados y diseñados para aulas multigrado (Boix y Bustos, 2014; Mulray-Kyne, 2007).

El objetivo de nuestra investigación es doble. En primer lugar, nos centramos en indagar sobre qué tipo de dificultades y problemas ponen de manifiesto maestros de educación infantil y primaria de escuelas multigrado. En segundo lugar, nos interesa analizar cómo se formulan estas dificultades y

situar en qué niveles aparecen, desde aquellos más genéricos del proceso de enseñanza y aprendizaje a aquellos más específicos de la matemática. La finalidad es entender cómo y en qué niveles estos maestros formulan espontáneamente las dificultades de su práctica profesional, puesto que se trata de un primer estudio exploratorio que, en etapas posteriores de nuestro proyecto, nos ayude a diseñar una formación didáctica y matemática específica que parta de estas cuestiones "vivas" de la profesión (Chevallard, 2001) que hayamos detectado y hacer un seguimiento de cómo van variando a lo largo de un proceso de formación conjunto.

MARCO TEÓRICO

En la TAD, se considera la matemática, como una actividad humana, que se desarrolla en instituciones sociales, lo cual hace que no sea posible separar el proceso de construcción de los "saberes" de las instituciones partícipes (Chevallard, 2001). Lo que se enseña en la escuela es el resultado de un complejo proceso de transposición didáctica de ciertos conocimientos, cuyo origen está lejos de las aulas. Como resultado, se determinan un conjunto de *condiciones* que pueden favorecer y de *restricciones* que dificultan la enseñanza y aprendizaje de ciertos saberes (el álgebra, los triángulos, etc.), delimitando lo que puede (y no puede) suceder en las escuelas y aulas y, eventualmente, lo que puede ser efectivamente aprendido por los estudiantes. Para analizar este conjunto de condiciones y restricciones, Chevallard (2002) introduce la *escala de niveles de determinación didáctica* (ver Figura 1) que usaremos como instrumento metodológico para ilustrar en qué nivel se sitúan los problemas de la enseñanza de las matemáticas en un contexto multigrado.

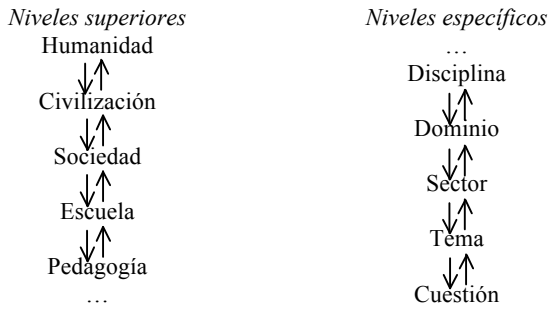


Figura 1. Escala de los niveles de codeterminación didáctica

Los niveles superiores de *civilización* y *sociedad* se refieren a las condiciones que se establecen en nuestra sociedad o en varias sociedades por la civilización a la que pertenecen. El nivel *escuela* incluye las condiciones y restricciones que dependen de la institución docente donde tiene lugar el proceso de enseñanza y aprendizaje. El nivel de *pedagogía* incluye recursos y estrategias comunes a las diferentes disciplinas (matemáticas, lengua, etc.) que los maestros y alumnos usan en dicho proceso. El nivel de *disciplina* toma en consideración las condiciones y restricciones directamente relacionadas con el contenido general que se enseña, en este caso, las matemáticas ya que cada disciplina tiene su especificidad. Y dentro de las matemáticas puede que las condiciones y restricciones se establezcan a nivel de *dominio*, es decir, de geometría, cálculo, etc., o bien a nivel de *sector*, por ejemplo, el cálculo escrito, o bien a nivel de *tema*, por ejemplo, divisiones donde el divisor tiene dos cifras. Por último, hay las *cuestiones* o *tareas concretas* planteadas por el maestro.

MÉTODO

Para indagar en las dificultades y problemas que afrontan los maestros, se diseñó un cuestionario abierto que se administró online sin límite de tiempo ni de longitud de respuesta. Este cuestionario constaba de cuatro partes, en la primera se pedía información sobre su formación y experiencia docente, en la segunda, que es la que se analiza en esta investigación, se les pedía textualmente: "plantea 4-5 problemas o dificultades que hayas tenido o que podrías haber tenido en tu práctica docente en el área de matemáticas". En la tercera parte se preguntaba sobre la formación matemática recibida y en la cuarta parte se ahondaba en aspectos clave a tener en cuenta para el

diseño de una formación para maestros de escuela multigrado. El cuestionario se mandó por correo electrónico al secretariado de escuela rural de Cataluña y a algunas escuelas multigrado de Cataluña con las que tenemos contacto. Respondieron al cuestionario 82 maestros de infantil y primaria. Se desestimó una de las respuestas ya que el maestro no respondió a la mayoría de las preguntas.

Tomando como datos empíricos las respuestas aportadas por estos 81 maestros, primero nos centramos en analizar a qué tipo de problemas se refieren. Para ello y ante la dificultad de la muy variada terminología que usan los maestros en sus respuestas, hemos realizado un análisis temático (Braun y Clarke, 2012), identificando y organizando las respuestas por las temáticas a las que los maestros hacen referencia, revisándolas para garantizar que sean coherentes y permitan unificar y categorizar las respuestas recogidas.

Después, en una segunda etapa del análisis, situamos cada respuesta en el correspondiente nivel de codeterminación de Chevallard (2002) para conocer dónde aparecen estos problemas, si en los niveles más superiores de codeterminación (civilización, sociedad, escuela y pedagogía) o en los niveles más específicos, referidos a los conocimientos matemáticos a enseñar y a cómo estos son organizados para su enseñanza (en dominios, sectores, temas, etc.). Cada respuesta se ha categorizado en el nivel al que alude la respuesta, aunque pueda tener afectaciones en niveles inferiores. Damos a continuación algunos ejemplos que podrían situarse en los distintos niveles:

(1) *Civilización-Sociedad:* "dificultades para encontrar libros de texto adaptados a aulas multigrado". Los libros de texto se producen en el contexto de la sociedad, aunque tienen afectaciones en la escuela y a nivel pedagógico;

(2) *Escuela*: "El trabajo a través de cuadernos de editoriales condiciona la programación". La programación es una problemática a nivel de escuela que tiene implicaciones a nivel pedagógico;

(3) *Pedagogía*: "A partir de libros de texto y con dos o tres niveles es difícil llegar a todo", los libros de texto tienen afectación a nivel pedagógico en las distintas disciplinas;

(4) *Disciplina*: "En los ciclos medio y superior, las matemáticas dejan de ser manipulativas y se trabaja mucho con libros". El libro condiciona la metodología en matemáticas. "Resolución de problemas en matemáticas para grupos multinivel". La resolución de problemas en matemáticas es un proceso que no es exclusivo de ningún dominio de la matemática (geometría, aritmética, etc.).

(5) *Niveles específicos de la disciplina matemática* (Dominio-Sector-Tema-Cuestión): cómo y cuándo se introducen los temas relacionados con las técnicas o algoritmos de la división.

Este doble análisis, nos permitirá conocer no solamente las categorías temáticas en las que se pueden categorizar las dificultades y problemas expuestos por los maestros, sino también en qué nivel o niveles aparecen, para entender cómo y en qué niveles debería actuarse (si es posible) para hacerles frente mediante una formación específica para los maestros de escuela multigrado.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS MAESTROS DE ESCUELA MULTIGRADO

El análisis aquí presentado, se basa en las respuestas de 81 maestros y engloba un total de 218 problemas o dificultades que se refieren a tres grandes categorías: el currículo, las características de los alumnos y temas relacionados con el ejercicio de la profesión. Una vez realizado el doble análisis comentado en el apartado anterior, presentamos en la Tabla 1 la síntesis de los resultados obtenidos. Esta tabla presenta, en las columnas, las agrupaciones realizadas con los niveles de codeterminación didáctica y, en las filas, las temáticas o categorías creadas a partir de análisis temático. Esta tabla permite ver qué categorías acumulan más respuestas y si estas están presentes en distintos niveles de codeterminación. Hecho bastante esperable, ya que los niveles de codeterminación no son independientes. De este modo, se puede detectar dónde aparece una determinada restricción y cuál es su origen, y así poder tomar conciencia del ámbito de actuación de la comunidad de maestros, investigadores y formadores.

			Niveles superiores			Niveles específicos				
			47	68	71	24	1	5	2	218
			186			32				
			Civilización -Sociedad	Escuela	Pedagogía	Disciplina	Dominio	Sector	Tema	
Currículo	Currículo		2	2	1					
	Contenidos	En general	2	5	16					23
		De cálculo	1				1	4	2	8
	Resolución de problemas				1	7		1		9
	Conexiones			2	4	3				9
	Competencias		2	3	4	4				13
Alumnos	Diversidad		2	6	**38**	4		1		**51**
	Motivación		3		2					5
	Emociones y sentimientos		1		1					2
	Autonomía		1	1	1	1				4
	Creencias		2							2
	Grado de comprensión		3			1			1	5
	Estrategias que usan		2		1					3
Ejercicio de la profesión	Formación		8	11	2	2		1		24
	Recursos humanos		3							
	Coordinación con otros maestros o instituciones		2	10				1		13
	Gestión del tiempo			7	4	1		1	1	14
	Relación con las familias		4							4
	Uso de recursos materiales	Material manipulativo	3	**31**	8	5		1		**48**
		Libro de texto	8	3	4	1				16
		Materiales digitales	4							4
	Metodología de enseñanza y aprendizaje		6	7	14	6				33
	Evaluar los alumnos			4	8	2				14
			59	92	109	37	1	10	4	

Figura 2. Tabla de co-concurrencias temas y niveles de codeterminación.

Cabe destacar, dos cuestiones antes de pasar a comentar los resultados desglosados por niveles. La primera es que, si bien los niveles de codeterminación se presentan disjuntos las temáticas no, ya que algunos de los comentarios de los maestros hacen referencia a más de una temática a la vez. La segunda es que, de las 218 cuestiones mencionadas, 186 (un 85,3%) aparecen en los niveles superiores de codeterminación, y sólo 32 (un 14,7%) se sitúan en los niveles específicos de la matemática a enseñar. En términos generales, las temáticas que más preocupan a los maestros son la diversidad de los alumnos y el uso del material manipulativo seguido de la metodología de enseñanza y aprendizaje, la formación y la estructura de los contenidos. A continuación, se especifican los detalles para las dos o tres temáticas más mencionadas por los maestros que van a ser interpretadas como condiciones y restricciones que aparecen en los distintos niveles de codeterminación.

Resultados en los niveles de Civilización y Sociedad

Sobre la *formación de los maestros,* destacan la poca oferta formativa, en concreto, sobre la manipulación de materiales o para aplicar metodologías innovadoras. La mayoría destaca que falta

formación específica para la escuela multigrado, estando muy alejada de las necesidades reales. Sobre los *libros de texto*, se percibe como un problema o restricción el hecho de tener que usarlos y, especialmente, que estos no estén adaptados a la escuela multigrado. También se plantea la duda de si los libros de texto que hay en el mercado son adecuados para la escuela multigrado.

Resultados en el nivel de Escuela

Sobre el *material manipulativo*, comentan mayoritariamente que en las escuelas hay poco, especialmente para ciclo superior. En ocasiones se dispone de material, pero o bien es insuficiente, o bien es inadecuado. El material se podría fabricar, pero falta tiempo. En algunas escuelas hay falta de actividades con material manipulativo. Refiriéndose a la *formación de los maestros*, subrayan la necesidad de conocer los contenidos curriculares y recibir formación apropiada para ofrecer material adecuado en cada caso, y la falta de conocimientos sobre nuevas metodologías y metodologías activas que promuevan la manipulación y experimentación. También destacan la falta de formación conjunta para todos los maestros de la escuela y tiempo para realizarla.

Sobre la *coordinación* de la escuela y entre áreas, recalcan la necesidad de más coordinación entre los maestros, lo cual requiere tiempo y maestros de soporte en el aula. También destacan el hecho de tener que seguir una programación en la que no se cree ya que viene impuesta por el centro escolar. Exponen que falta evaluar de forma más equitativa consensuando unos criterios comunes: "se debería compartir con el equipo de maestros de la escuela una mirada más profunda de todas las disciplinas, y de la matemática, a la vez que se conecta esta mirada con el currículo".

Resultados en el nivel de Pedagogía

Casi todos los comentarios hacen referencia a la *diversidad* y los *contenidos* a la vez, el único comentario referente sólo a contenidos es la dificultad de estructurarlos. Para los maestros tener que planificar para diferentes niveles y edades es una restricción clave, especialmente si se quiere que las actividades sean motivadoras, representen un reto, o bien si se trabaja por proyectos. También es un problema tener alumnos de infantil y primaria en una misma aula, especialmente para profundizar en los contenidos y porque los alumnos de ciclo superior terminan antes las tareas.

Las principales preocupaciones sobre diversidad giran en torno a los contenidos y a poder atender a todo el mundo. En cuanto a los contenidos, se constata una dicotomía entre trabajar un mismo contenido o contenidos distintos. Si se trabaja un mismo contenido, hacerlo con la misma actividad o con actividades distintas. Si se opta por la misma actividad, "Cómo atender todo el grupo teniendo diferentes niveles?, y si se opta por distintas actividades, ¿cómo atender a todo el mundo si el tiempo es limitado y no es posible una única explicación?, ¿cómo conseguir que se concentren sin distraerse?, ¿cómo gestionar un grupo dónde algunos alumnos alcanzan a trabajar un contenido que no les toca por curso mientras otros no lo logran cuando les tocaría?, ¿cómo gestionar que haya alumnos trabajando contenidos o metodologías para las que no están madurativamente preparados y alumnos mayores que podrían ir más allá pero no hay forma de hacerlos avanzar sin descuidar los pequeños?, ¿cómo trabajar un contenido durante 3 cursos sin repetir actividades con los mismos alumnos?". Respeto la *metodología de aula*, se preguntan cómo plantear metodologías útiles en su contexto. Por ejemplo, el trabajo por rincones o por proyectos o el trabajo competencial y el trabajo con materiales manipulativos y cómo evitar metodologías más convencionales.

Resultados en los niveles específicos de la Disciplina matemática

En los niveles específicos de la matemática, lo que más preocupa es la resolución de problemas, en particular, proponer buenos problemas y problemas competenciales. Y la metodología para que los alumnos vean la funcionalidad de las matemáticas y su relación con la realidad, sean más entendibles y trabajar con alumnos con niveles muy dispares. En los niveles más específicos (dominios, sectores y termas), todas las respuestas hacen referencia al cálculo. Suponemos que es consecuencia de que, en la escuela, el cálculo es uno de los sectores al que se le dedican más horas.

En este sentido, un maestro se pregunta si realmente es necesario emplear tanto tiempo a "la división de dos cifras y las tablas de multiplicar". Otra restricción que destacan es lidiar con los problemas que los alumnos tienen con el cálculo y, en particular, con la comprensión conceptual de las operaciones. También expresan que sería interesante tener herramientas para poder diseñar actividades multinivel sobre operaciones, saber cómo practicar el cálculo mental, proponer más problemas de operaciones combinadas, y saber cómo manipular el material de fracciones.

CONCLUSIONES: RETOS PARA LA FORMACIÓN EN LA ESCUELA MULTIGRADO

Para concluir debemos observar que en el análisis realizado hemos destacado distintas restricciones para la enseñanza de las matemáticas. Debemos subrayar la doble interpretación de la noción de restricción ya que, por un lado, lo que se reconoce como una restricción es, a su vez, una condición deseable de ser creada y, por tanto, nos aporta mucha información sobre las cuestiones "vivas" de la profesión que tiene sentido situar en el punto de partida de la formación para estos maestros. Complementando lo anterior debemos destacar que hemos encontrado, en distintas ocasiones, que los maestros describían ciertas restricciones que para otros eran una buena oportunidad, o condición a ser creadas. Por ejemplo, algunos maestros consideran como restricción importante, el hecho de tener que trabajar con libros de texto mientras que un maestro manifiesta que no tener libro de texto les supone una gran dificultad.

Como resumen de nuestro análisis, la principal restricción que han manifestado estos maestros es cómo atender la diversidad del aula y como adaptar metodologías ya existentes al contexto multigrado, ambas a nivel pedagógico y cómo paliar la falta de materiales a nivel de escuela. Tales restricciones se plantean en los niveles más genéricos, es decir, no son restricciones exclusivas de las matemáticas, están relacionadas con varias disciplinas. La principal dificultad, es si minimizar la heterogeneidad del aula intentando que se parezca al máximo a una escuela ordinaria proponiendo contenidos o actividades diferentes, o si, por el contrario, intentar aprovechar y potenciar esta heterogeneidad. En las aulas multigrado donde se desarrollan prácticas educativas exitosas la heterogeneidad no sólo se tiene en cuenta, sino que se fomenta (Hyry-Beihammer y Haecher, 2015a). Opción, que como ya se ha mencionado anteriormente, no es la mayoritaria en matemáticas (Hyry-Beihammer y Hascher 2015a y 2015b; Mason y Burns, 1995). De todas formas, aunque se trabaje individualmente realizando tareas distintas, las interacciones entre iguales no desparecen, pero la mayoría de ellas consisten en dar la solución a lo que se ha de resolver (Résendiz et al., 2017). Además, derivada de esta forma de trabajar, aparece otra restricción muy comentada, el tiempo, "¿cómo atender a todos los alumnos si cada uno realiza una tarea diferente?". A nivel de disciplina, es decir, de la matemática lo que más preocupa a los maestros es la resolución de problemas y la metodología para trabajar con alumnos con niveles muy dispares y el cálculo.

Otra cuestión importante para subrayar es que, aunque se pedía plantear problemas del área de matemáticas, igual que en la investigación de Cirade (2006), son las pocas cuestiones y dificultades planteadas en los niveles más específicos de la matemática a enseñar. Y, se puede añadir que son prácticamente inexistentes las relacionadas con un contenido matemático concreto (sólo 8 de 218) y todas son de cálculo. Aunque estas problemáticas existen, por ejemplo, un maestro se pregunta si realmente hace falta dedicar tanto tiempo a las tablas de multiplicar y a la división entre dos cifras. Cabe señalar que el desarrollo de los conocimientos matemáticos de los maestros es un elemento clave para que lideren una mejora en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Ball, 2003). Planear una formación del profesorado de escuela multigrado que, por un lado, tome en cuenta estas cuestiones "vivas" de la profesión y, por otro lado, introduzca herramientas didáctico-matemáticas para ir adentrándose a la problemática más específica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Cirade, 2006), son retos importantes para nuestra futura investigación.

Agradecimientos

Esta investigación se ha financiado en el marco de los proyectos I+D+i: RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Ball, D. H. (2003). *Mathematical proficiency for all students*. Santa Monica, USA: RAND Education.Block, D., Ramírez, M. y Reséndiz, L. G. (2015). Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado. Un estudio de caso. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 20*(66), 711-734.

Boix, R. y Bustos, A. (2014). La enseñanza en las aulas multigrado: Una aproximación a las actividades escolares y los recursos didácticos desde la perspectiva del dado. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 7*(3), 29-43.

Braun, V. y Clarke, V. (2012). "Thematic Analysis." In H. Cooper (Ed.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology* (Vol. 2, pp.57-71). Washington, DC: APA books.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las matemáticas*, 12.

Chevallard, Y. (2002) Organiser l'étude. 3. Écologie & regulation. En J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée sauvage.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Tesis doctoral). Université d'Aix- Marseille.

Domingo, L. y Boix, R. (2015). What can be learned from Spanish rural schools? Conclusions from an Inernational project. *Internationa Journal of Educationa Research, 74*, 114-126.

Florensa, I, Bosch, M., Cuadros, J. y Gascón, J. (2018). Helping lecturers address and formulate teaching challenges: an exploratory study. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, y N.M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the 2nd INDRUM 2018* (pp. 373-382). University of Agder, Kristiansand, Norway.

Hyry-Beihammer, E.K. y Hascher, T. (2015a). Multigrade Teaching in Primary Education as a Promising Pedagogy for Teacher Education in Austria and Finland. In C. J. Craig y L Orland-Barak (Eds.), International *Teacher Education: Promising Pedagogies (Part C). Advances in Research on Teaching*, Vol *22* (pp. 89-113). Bingley: Emerald Group Publishing. Hyry-Beihammer, E. K., y Hascher, T. (2015b). Multi-grade teaching practices in Austrian and Finish primary schools. *International Journal of Educational Research*, *74*, 104-113.

Little, A.W. (2006). Multigrade lessons for EFA. En A. W. Little (Ed.), Education for all and multigrade teaching. Challenges and opportunities. Netherlands: Springer.

Mason, D.A., y Burns, R. B. (1995). Teacher's views of Combination Classses. *Journal of Educational Research, 89*(1), 36-45.

Mulray-Kyne, C. (2007). The preparation of teachers for multigrade teaching. *Teaching and Teacher Education, 23*, 501-504.

Rathbone, C. (1993). (Ed.). *Multiage portraits: Teaching and learning in mixed-age classrooms*. USA: Peterborough: Crystal Springs Books.

Résendiz, L., Block, D. y Carrillo, J. (2017). Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso. *Educación Matemática, 29*(2), 99-123.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Disponible en: https://repositorio.uam.es/handle/10486/665889?show=full

Wood, K. y Frid, S. (2005). Early Childhood Numeracy in a Multiage Setting. *Mathematics Education Research Journal, 16*(3), 80-90.

RESPUESTAS NUMÉRICAS RAZONABLES EN ALUMNADO DE SECUNDARIA

Reasonable numerical answers in secondary students

Fariña, M., Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta un estudio sobre cómo alumnado de secundaria evalúa las soluciones a tareas numéricas observando si son o no razonables. Para ello, se ha realizado un análisis cualitativo con ocho estudiantes en dos entrevistas, antes y después de una instrucción de aula, en la que se implementó una secuencia de actividades que fomentaba el uso de estrategias para valorar la razonabilidad de las respuestas numéricas. Las estrategias trabajadas en la instrucción de aula fueron: estimación numérica, estimación gráfica y adecuación al contexto. En las entrevistas se concluye que los estudiantes mostraron argumentos para evaluar las respuestas antes de la instrucción de aula, si bien algunos mejoraron y ampliaron sus estrategias después de la instrucción hacia otras más efectivas.

Palabras clave: *Razonabilidad, sentido numérico, estimación numérica, representación gráfica.*

Abstract

A study is presented on how secondary students evaluate solutions to numerical tasks observing if they are or not reasonable. To do this, a qualitative analysis with eight students was carried out in two interviews, before and after a classroom instruction, in which a sequence of activities was implemented that encouraged the use of strategies to assess the reasonableness of numerical responses. The strategies worked in the classroom instruction were: numerical estimation, graphic estimation and adaptation to the context. In the interviews it is concluded that the students showed arguments to evaluate the answers before the classroom instruction, although some students improved and expanded their strategies after the instruction towards other more effective ones.

Keywords: *Reasonableness, number sense, number estimation, graphic representation.*

INTRODUCCIÓN

El sentido numérico se define como una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible (Swoder, 1992). Diferentes autores han establecido componentes del sentido numérico con el fin de hacerlo operativo, tanto a nivel curricular como de investigación (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 1989; McIntosh, Reys y Reys, 1992). Aunque dichas componentes suelen aparecer desglosadas con diferente nivel de detalle, se establecen las siguientes: a) comprender el significado de los números; b) reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números; c) usar puntos de referencia; d) usar representaciones de los números y las operaciones; e) identificar el efecto relativo de las operaciones; f) establecer relaciones entre las operaciones; g) hacer uso de las propiedades de las operaciones para facilitar un cálculo numérico; h) estimar el resultado de operaciones; comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; i) ser consciente de que existen múltiples estrategias; j) reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable. Estas componentes no son independientes y aparecen combinadas en respuestas a una misma actividad numérica.

Fariña, M. y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261 – 268). Valencia: SEIEM.

Este trabajo está dedicado a la última de las componentes enumeradas, es decir, a la *razonabilidad numérica de la solución*, lo que denominamos de manera abreviada, *razonabilidad numérica*.

La razonabilidad numérica de la solución se sitúa en la última de las fases sobre la resolución de problemas señaladas por Pólya (1945): a) comprensión del problema, b) elaboración de un plan, c) ejecución del plan y d) verificar el resultado. Sin embargo, esta componente del sentido numérico no tiene que estar necesariamente asociada a la resolución de un problema, ya que puede aplicarse a cualquier ejercicio o cálculo. Por ejemplo, un estudiante que obtenga como resultado de la operación 600x0,4 el número 2400 (error habitual en este cálculo) puede valorar que su respuesta no es razonable, argumentando que no debe ser un número mayor que 300, puesto que 0,4 está próximo a 0,5, entonces 600x0,5=600x½=300. Y de esta forma podría autocorregirse. Para que esto se produzca, el estudiante tiene que estar habituado a reflexionar sobre el resultado que obtiene en sus tareas numéricas, por sencillas que estas puedan ser.

Además de tener esta inclinación hacia la evaluación del resultado, los estudiantes necesitan aprender estrategias y argumentos matemáticos que le ayuden a ello, más allá de volver a efectuar el cálculo, que en ocasiones puede ser muy costoso. De hecho, McIntosh, Reys, y Reys (1992) indican que cuando se pide a los estudiantes valorar la razonabilidad de un resultado numérico su reacción, con frecuencia, es volver a realizar el cálculo o el algoritmo inicial, antes que reflexionar utilizando otros argumentos, basados en el contexto o en propiedades numéricas. . En el mismo sentido, Alajmi y Reys (2010) estudiaron cómo alumnado de secundaria de Taiwán reconocían si sus respuestas eran razonables. Concluyeron que la mayoría lo hacía utilizando reglas algorítmicas, repitiendo el proceso ya realizado, sin manifestar otro tipo de habilidades que les permitiera emitir un juicio. Yang y Sianturi (2019) realizaron un estudio con alumnado de 6º grado de primaria, en el que 942 estudiantes de Hong Kong efectuaron cálculos con números decimales y se les pedía valorar lo razonable de sus respuestas. Obtuvieron que la mitad de los estudiantes ejecutaron los cálculos de forma correcta, pero de ellos, solo el 60% podía juzgar su respuesta como razonable. Y al hacerlo, mostraron errores en sus argumentos o simplemente parecían haber adivinado sus resultados, puesto que se trataba de un cuestionario de respuestas múltiples. Yang (2019) evaluó la razonabilidad numérica del alumnado en operaciones con números naturales en un estudio a 790 estudiantes de 4º grado. Encontró que solo un 25% utilizó métodos alejados de los algoritmos y un 38% cometía errores que le impedían realizar una valoración correcta del resultado.

Fomentar la razonabilidad numérica de la solución en el alumnado no suele quedar explícito en los materiales curriculares o en las secuencias de aprendizaje y queda en manos del profesorado que esta reflexión se haga. De hecho, aunque el profesorado de matemáticas lo considere útil, muchas veces se pasa por alto en el aula (Alajmi y Reys, 2007). Profesores de Taiwán de este último estudio expresaron que una respuesta es razonable "si se realizan las operaciones adecuadas, aunque un error de cálculo produzca una respuesta bastante alejada de la correcta", y manifestaron escaso desarrollo de estrategias de razonabilidad en sus aulas. También en el estudio de Clarke, Clarke y Sullivan (2012) indicaron que muchos profesores enfatizan las explicaciones relacionadas con el conocimiento matemático, pero olvidan juzgar lo razonable de las respuestas en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Indican Yang y Siantui (2019) que la habilidad para juzgar lo razonable de las respuestas numéricas no ha sido priorizado en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y tampoco en la investigación. Los estudios realizados hasta el momento se han centrado en su evaluación a través de pruebas escritas (Alajmi y Reys, 2010), pero se conoce poco de cómo promover estrategias de aula para su desarrollo. El trabajo que se presenta forma parte de un estudio más amplio que tiene como objetivo analizar cómo influye una intervención de aula que fomenta la razonabilidad numérica de la solución en la mejora de esta habilidad en los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

A pesar de la importancia que tiene la razonabilidad numérica en la actividad matemática general, las investigaciones muestran que el alumnado de Educación Primaria y Secundaria tiene poca inclinación a realizar esta evaluación final (McIntosh, Reys, y Reys, 1992). De hecho, se ha mostrado que es una de las componentes de sentido numérico más complejas para los estudiantes (Reys y Yang 1998; Yang 2005).

Alajmi y Reys (2010) señalan que la razonabilidad numérica implica integrar las habilidades de las cinco "hebras" de la competencia matemática, desarrolladas por Kilpatrick, Swafford, y Findell (2001):

> *Comprensión conceptual*: Tener organizado el conocimiento matemático en un todo coherente; ser capaz de representar situaciones matemáticas de diferente forma y conectarlas entre sí.
> *Fluidez procedimental*: Saber cuándo y cómo usar los procedimientos apropiadamente; habilidad para utilizar procedimientos de forma flexible y eficiente.
> *Competencia estratégica*: Tener una imagen mental de los componentes del problema, comprender las características claves de la situación, generar una representación matemática e ignorar las características irrelevantes.
> *Razonamiento adaptable*: Capacidad para pensar lógicamente sobre las relaciones entre conceptos y situaciones; decidir entre diferentes alternativas.
> *Disposición productiva*: Percibir que las matemáticas son útiles, creer que el esfuerzo constante por aprender matemáticas vale la pena y sentirse un aprendiz eficiente.

A través de la razonabilidad numérica, los estudiantes pueden usar y navegar entre hechos, conceptos, procedimientos, estrategias y métodos de resolución que se sitúan en las habilidades anteriores.
Según Alajmi y Reys (2007, 2010), promover la razonabilidad numérica implica reflexionar sobre la idoneidad de la respuesta desde dos criterios: (1) observar relaciones entre los números y el efecto de las operaciones (comprender la magnitud de los números, cómo se relacionan unos con otros y el efecto que producen sobre ellos las diferentes operaciones). (2) relacionar si tiene sentido en el contexto del problema (en caso de que haya un contexto de referencia). A estos dos criterios, se añade en este trabajo un tercer criterio: (3) utilizar estrategias diferentes para resolver las actividades numéricas, en concreto, representaciones gráficas, estimación numérica, magnitud de los números, relaciones entre los números y efecto de las operaciones (Alajmi, 2009).
En esta línea, se ha desarrollado un estudio con alumnado de secundaria que siguió una secuencia de aula en la que se les instruyó en estrategias útiles para evaluar lo razonable de una solución en tareas numéricas. Los objetivos de este trabajo son:

- Analizar los cambios en la valoración de la razonabilidad de las soluciones en actividades de estimación numérica y gráfica, antes y después de la instrucción de aula.
- Analizar los tipos de estrategias utilizadas para evaluar la razonabilidad de las soluciones, antes y después de la instrucción de aula.

METODOLOGÍA

El presente trabajo muestra resultados de un estudio diseñado para analizar los objetivos anteriores, realizado con estudiantes de dos aulas de segundo curso de secundaria en un centro concertado urbano de Tenerife (España). En dicho estudio se implementó una prueba escrita inicial a los cincuenta estudiantes de los dos grupos del nivel educativo. La prueba contenía 12 ítems que permitieron seleccionar a ocho estudiantes en función de sus respuestas: dos de ellos con respuestas razonables en la mayoría de las cuestiones (basadas generalmente en cálculos); cuatro con la mitad

de respuestas razonables; y dos con muy pocas respuestas razonables. A continuación, se realizó una entrevista semiestructurada a estos ocho estudiantes. En ella, realizaron actividades numéricas, partir de las cuales la entrevistadora les pidió que justificaran sus respuestas. Posteriormente, se llevó a cabo una intervención de aula que constó de siete sesiones de 50 minutos donde se trabajaron diferentes estrategias para evaluar lo razonable de una respuesta: adecuación al contexto, estimación numérica y estimación gráfica. Los contenidos numéricos abarcaron el estudio de decimales, fracciones y sus operaciones, propias del nivel educativo. Finalmente se realizó una prueba escrita a los cincuenta estudiantes y una entrevista final a los ocho estudiantes seleccionados. La entrevista se diseñó con ítems de la misma estructura que la entrevista inicial. En el presente trabajo se recogen los resultados de las respuestas a las entrevistas, inicial y final, y se destaca, a modo de ejemplo, las respuestas a dos de los ítems.

Durante toda la investigación se usó una metodología cualitativa en la que no bastaba con dar una respuesta correcta sino que nos interesábamos por sus argumentos para analizar lo razonable de dicha respuesta. En las entrevistas se estudiaron casos concretos dónde se valoró cómo argumentaba el alumnado la razonabilidad de las respuestas y qué tipo de estrategias disponían para respaldar sus argumentos.

Las entrevistas estaban formadas por cinco ítems que buscaban valorar las estrategias que usaba el alumnado para valorar respuestas razonables. Para ello se daba la solución al ítem, o se pedía elegir entre varias soluciones, preguntándoles por los argumentos para valorar la respuesta. Los ítems abarcaban el contenido numérico de decimales, fracciones y porcentajes. En cuanto a representaciones gráficas se proponían gráficos de sectores circulares, recta numérica, barra y rectángulos para la multiplicación de decimales. Las estructuras de los ítems de las dos entrevistas se corresponden con las siguientes:

Ítem 1: Elegir entre varios gráficos de sectores circulares cuál representaba una situación real dada.

Ítem 2: Elegir entre varias, una estimación razonable como respuesta a una operación de fracciones, sin utilizar cálculos exactos.

Ítem 3: Usar la recta numérica para comprobar lo razonable de una respuesta a un problema de fracciones contextualizado.

Ítem 4: Usar la gráfica de barra de rectángulo para expresar porcentajes y estimar respuestas razonables.

Ítem 5: Elegir entre cuatro opciones, la representación gráfica que representa el área de un rectángulo cuyos lados miden un número decimal, en un problema contextualizado.

En el análisis de las entrevistas se tuvo en cuenta la última respuesta razonable del estudiante no basada en cálculos, puesto que hubo estudiantes que en la última entrevista priorizaron el uso de estrategias de estimación al cálculo, señalando éste como último recurso. Tras el análisis de la entrevista por la investigadora principal, se consensuaron los resultados con la otra investigadora, definiendo dos categorías principales de análisis, en función de los objetivos planteados:

1) Tipo de respuesta: Razonable; No razonable.

2) Tipo de estrategia utilizada: Estimación gráfica; Estimación numérica; Cálculos basados en reglas y algoritmos; Otras respuesta de difícil clasificación.

RESULTADOS

En la Tabla 1 se recogen las estrategias del alumnado y las respuestas razonables en cada ítem, en la entrevista inicial y final. Observando los resultados de la última columna podemos ver que los estudiantes, de manera general, respondieron de forma dispar en la entrevista inicial y final respecto a la elección de una respuesta razonable o su justificación.

Tabla 1. Número de respuestas razonables y tipos de estrategias en la entrevista inicial y final

		Estrategias								Respuestas Razonables
		Estimación Numérica		Estimación Gráfica		Algoritmos		Otras		
		R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	
Ítem 1	Entrevista Inicial	1	0	5	0	0	1	0	1	6
	Entrevista Final	0	0	7	0	0	0	0	1	7
Ítem 2	Entrevista Inicial	1	0	1	1	0	3	0	2	2
	Entrevista Final	1	0	3	1	0	2	0	1	4
Ítem 3	Entrevista Inicial	0	0	3	2	0	3	0	0	3
	Entrevista Final	0	0	5	0	0	3	0	0	5
Ítem 4	Entrevista Inicial	0	0	0	0	6	1	1*	0	7
	Entrevista Final	0	0	2	3	1	1	1*	0	4
Ítem 5	Entrevista Inicial	0	0	6	0	1	1	0	0	7
	Entrevista Final	0	0	7	0	0	0	0	1	7

R:Razonable, NR: No razonable
* El estudiante utiliza una combinación de las tres estrategias

Como se aprecia en la tabla, los ítems 1 y 5 obtuvieron muy buenos resultados en cuanto a la evaluación de respuestas razonables en ambas entrevistas. El ítem 1, en que se mostraban diagramas de sectores circulares en contexto, nos permite ver que el alumnado está acostumbrado a trabajar con este tipo de actividades. Cabe destacar que en la entrevista final se recurre más a la estimación gráfica como estrategia para evaluar la razonabilidad de la respuesta. En el ítem 5, pese a que la estrategia usada mayoritariamente fue la estimación gráfica en ambas entrevistas, es importante señalar que en la entrevista inicial el alumnado no disponía de suficientes argumentos para defender la elección de su respuesta razonable, mientras que en la entrevista final comprendía mejor la representación gráfica trabajada y pudo dar argumentos que sustentaran su elección.

Llama la atención el ítem 4 por ser en el que se obtiene un menor número de respuestas razonables en la entrevista final que en la inicial. Este resultado se debe a que el alumnado intentó alejarse del uso de algoritmos para estimar gráficamente. No obstante, la estimación gráfica que ofreció fue poco precisa y fuera del rango que se había establecido como correcto. Aún así, se debe valorar positivamente este cambio en la predisposición a usar estimaciones gráficas en detrimento del uso de algoritmos.

Se debe remarcar que solo un estudiante fue incapaz de mejorar durante este trabajo en la evaluación de la razonabilidad numérica, no asimilando estrategias diferentes al uso de algoritmos que no dominaba. La principal dificultad para este estudiante residió en su bajo nivel matemático, que le dificultaba aplicar nuevas estrategias puesto que no dominaba los aspectos conceptuales necesarios.

Los ítems 2 y 3 se analizan con más detalle en lo que sigue.

Ejemplos del ítem 2

En la Figura 1 se muestran lo enunciados de este ítem en cada entrevista. El alumnado debe elegir la respuesta más razonable entre las diferentes opciones, intentando no realizar un cálculo exacto. En las respuestas al ítem 2 (Tabla 1) se puede apreciar que en la entrevista inicial hay más estudiantes

que optan por justificar realizando cálculos exactos (Figura 2), mientras que en la entrevista final aparecen argumentos basados en gráficos (Figura 3). Las respuestas categorizadas como "Otros" se refieren a aquellas en las que el alumnado estable relaciones erróneas como, por ejemplo, *"porque al tener denominadores bastante grandes, pues creo que el resultado sería mayor que ½ o 1"*.

Entrevista Previa	**Entrevista Posterior**
En clase, algunos estudiantes están corrigiendo su tarea. Redondea el nombre de la persona que parece tener la respuesta correcta. Luego, explica por qué piensas que esa respuesta es correcta. $\frac{10}{11}+\frac{11}{12}=?$ a) María dice que su respuesta es aproximadamente $\frac{1}{2}$. b) Jesús dice que su respuesta es mayor que $\frac{5}{2}$. c) Lucía dice que su respuesta es cercana a 2	En clase, algunos estudiantes están corrigiendo su tarea. Redondea el nombre de la persona que parece tener la respuesta correcta. Luego, explica por qué piensas que esa respuesta es correcta. $\frac{7}{15}+\frac{5}{12}=?$ a) María dice que su respuesta es aproximadamente $\frac{1}{2}$. b) Pablo dice que su respuesta es cercana a 1. c) Juan dice que su respuesta es aproximadamente $\frac{3}{2}$.

Figura 1. Enunciados del ítem 2

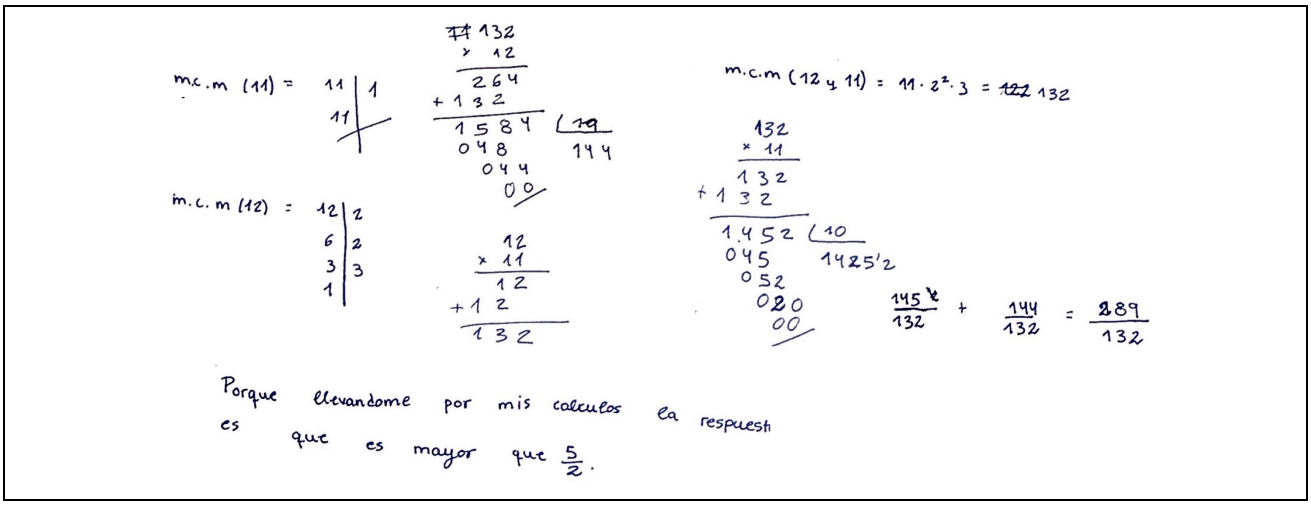


Figura 2. Ejemplo de Respuesta No Razonable con estrategia de Cálculo (entrevista inicial, ítem 2)

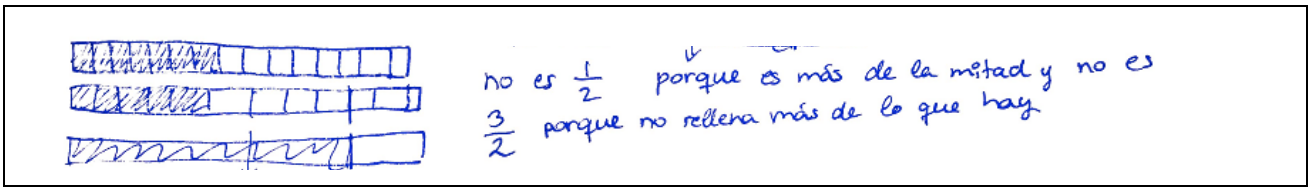


Figura 3. Ejemplo de Respuesta Razonable con Estimación Gráfica (entrevista final, ítem 2)

Ejemplos del ítem 3

En la Figura 4 se muestran lo enunciados del ítem 3 en cada entrevista. El alumnado debe valorar si la respuesta dada es razonable o no. Para ello, se le sugiere que utilice la recta numérica para hacer una estimación gráfica.

Como se puede apreciar en la tabla 1, el hecho de aparecer la recta numérica dibujada propicia su uso entre el alumnado.

Entrevista Previa	Entrevista Posterior
Mario se está preparando para correr una carrera de 5km. Un día de entrenamiento, corre $\frac{1}{3}$ del total antes de parar a descansar. Luego, corre $\frac{2}{5}$ de la distancia que le queda para acabar el recorrido y termina el entrenamiento del día. Mario dice que ha corrido 4km, aproximadamente. ¿Crees que está en lo cierto? Ayúdate de la recta numérica para justificar tu respuesta. 	Ana se está preparando para correr una maratón de 3 km. Un día de entrenamiento, corre $\frac{1}{5}$ del total antes de parar a descansar. Luego, corre $\frac{2}{3}$ de la distancia que le queda para acabar el recorrido y termina el entrenamiento del día. ¿Cuántos metros ha corrido aproximadamente ese día en total? Puedes ayudarte de la recta numérica para estimar el resultado. 

Figura 4. Enunciados del ítem 3

Las respuestas no razonables usando estimación gráfica de la entrevista inicial se deben a una incomprensión del enunciado cuando dice "de lo que le queda" y la consiguiente estimación incorrecta en la recta (Figura 5).

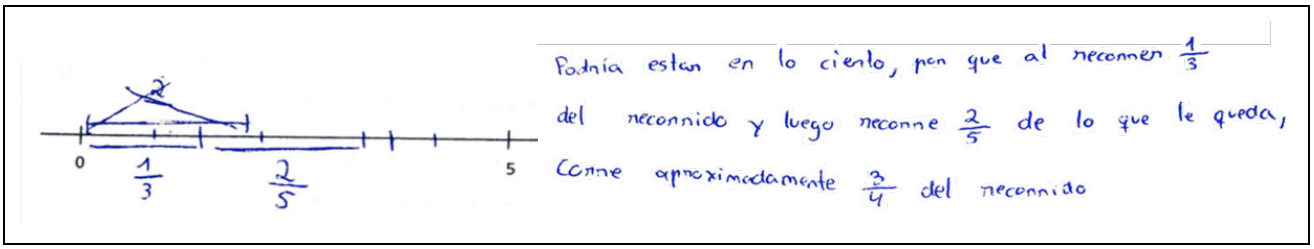


Figura 5. Ejemplo de respuesta No Razonable con Estimación Gráfica (entrevista inicial, ítem 3)

En la entrevista final se observan mejoras respecto a las justificaciones razonables. En la Figura 6 se muestra la respuesta de un estudiante que razonó con dos representaciones gráficas diferentes.

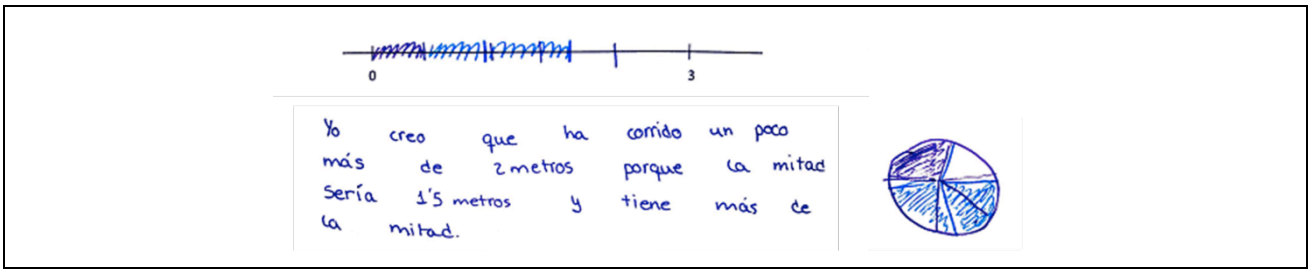


Figura 6. Ejemplo de respuesta Razonable con Estimación Gráfica (entrevista final, ítem 3)

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio no mostraron un cambio importante en todo el alumnado participante en cuanto a la valoración de las respuestas numéricas, antes y después de la instrucción de aula. Sin embargo, se observó una mayor disposición a utilizar diferentes estrategias. Incluso aunque la estrategia no variara respecto a la inicial, debido a las características de los enunciados de los ítems, los estudiantes manifestaron más seguridad en sus explicaciones.

Otro aspecto importante que se observa en las entrevistas, tanto inicial como final, es que cuando se da la oportunidad a los estudiantes de dar razonamientos para evaluar las respuestas numéricas, muchas veces afloran sus conceptos erróneos, que de otra manera quedan ocultos, hecho ya indicado por Van Dooren, et al. (2003) y Yang (2019). Se ha observado que valorar la razonabilidad de una solución implica tener una adecuada comprensión conceptual de los números. Este resultado coincide con Almeida y Bruno (2017), quienes indican que existe un perfil de estudiantes que manifiestan estrategias inadecuadas de sentido numérico debido a sus debilidades matemáticas de

tipo conceptual, lo cual no les permite desarrollar otras "hebras" de la competencia matemática (Kilpatrick, et al., 2011). Indica Yang (2919) que los libros de texto y los profesores en el aula deberían promover ejercicios relacionados con la valoración de los resultados de cálculo. En lo experimentado en este estudio, aunque el desarrollo de estrategias gráficas y de estimación se ha mostrado útil para evaluar la razonabilidad numérica de la solución, esto requiere un trabajo de aula prolongado en el tiempo.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado con el Proyecto de investigación del Ministerio de Economía y Competitividad. Madrid. España. EDU2017-84276-R.

Referencias

Alajmi, A. H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 263-283.

Alajmi, A., Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 77-94

Alajmi, A., Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*, 117-139.

Almeida, R. y Bruno, A. (2017). Establishing profiles on the use of number sense. *Redimat*, *6*(1), 56-84.

Clarke, D. M., Clarke D. J., y Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *17*(3), 28-32

Grayer, M. (2009). Reasonable or not? A Study of the Use of Teacher Questioning to Promote Reasonable Mathematical Answers from Sixth Grade Students. *Action Research Projects,* paper 70, University of Nebraska.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC. National Academy Press

McIntosh, A., Reys, B.J., y Reys, R. E. (1992). *A proposed framework for examining basic number sense. For the learning of mathematics, 12(3), 2-8.*

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton (NJ), USA: Princeton University Press.

Reys, B. J. (1991). *Developing number sense in the middle grades: Addenda series, grades 5-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B. J., y Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237.

Siegler, R. S., y Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. En J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp 197-212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En Grouws, D. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 245-275. MacMillan Publishing Company. New York.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 113138.

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th grade students in Taiwan. *Educational Studies*, *31*(3), pp. 317-333.

Yang, D. C. (2019). Performance of fourth graders when judging the reasonableness of a computational result. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 197-215.

Yang, D. C., y Huang, F. Y. (2004). Relations among computational performance, pictorial representation, symbolic representation and number sense of sixth-grade student in Taiwan. *Educational Studies*, *30*(4), 373-389.

Yang, D. C., y Sianturi, I. A. J. (2019). Six grade students´performance, misconceptions, and confidence when judging the reasonableness of computer results. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(8), 1519-1540.

FUNCIONES F(X)=3X Y F(X)=5X EN PRIMERO DE PRIMARIA: ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES UTILIZADAS POR ALUMNOS

Functions f(x)=3x y f(x)=5x in first grade of primary school: strategies and representations used by students

Fuentes, S. y Cañadas, M. C.

Universidad de Granada, España

Resumen

En este trabajo describimos las estrategias y representaciones utilizadas por alumnos de primero de primaria, cuando resuelven dos tareas que involucran funciones lineales (f(x)=3x y f(x)=5x). Diseñamos e implementamos estas tareas de generalización contextualizadas a 32 alumnos del mencionado curso. Las estrategias más empleadas por los estudiantes fueron respuesta directa y conteo de dibujos, cambiando la mayoría de los alumnos del conteo a la respuesta directa conforme aumenta el tamaño de los casos particulares. Algunos alumnos usan espontáneamente la agrupación. Los alumnos emplearon las representaciones pictórica, simbólica y verbal. Las representaciones predominantes fueron la pictórica, en la tarea de f(x)=3x, y la simbólica en la de f(x)=5x. La representación verbal destacó en el apartado de x=100. También comparamos algunos resultados relativos al trabajo de los alumnos en ambas tareas.

Palabras clave: *pensamiento funcional, funciones lineales, estrategias de resolución y representaciones*

Abstract

In this paper we describe the strategies and the representations used by first graders, when solving two tasks involving lineal functions (f(x)=3x y f(x)=5x). We designed and implemented these generalization contextualized tasks to 32 students of the aforementioned grade. The most frequent strategies were the direct response and the drawing counting, changing most of the student from counting to direct response when the size of particular cases increased. Some students used the grouping strategy spontaneously. The students used the pictorial, symbolic and verbal representations. The predominant representations were the pictorial in the tasks about f(x)=3x, and the symbolic in the task about f(x)=5x. The verbal representation stood out among the others in the item about x=100. We also compare some results concerning the students' work in both tasks.

Keywords: *functional thinking, resolving strategies, lineal functions and representations*

INTRODUCCION

El pensamiento funcional, que es parte de la propuesta curricular del *early algebra*, utiliza la función lineal como protagonista. Las funciones que contienen estructuras multiplicativas (f(x)=mx), pueden ser abordadas por niños desde temprana edad, incluso desde infantil, con la utilización de series numéricas o de estructuras aditivas, de esta manera, las estructuras multiplicativas aparecen de forma intuitiva, por la necesidad de resolver una tarea desafiante para el alumno. Al incorporar este tipo de actividades en el aula regularmente, las dificultades que genera la enseñanza de la multiplicación o la introducción al álgebra, resultan menores, cuando corresponden curricularmente.

A nivel internacional, el *early algebra* se está incorporando cada vez más en las propuestas curriculares y de actividades de diferentes países. En España, donde se desarrolla esta investigación,

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones $f(x) = 3x$ y $f(x) = 5x$ en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269 – 277). Valencia: SEIEM.

podemos encontrar en el currículo de primaria, algunos indicios de pensamiento algebraico y funcional, los cuales deben ser abordados por los maestros en este ciclo. Aunque, es en 3° de primaria (8 años) donde se trabaja con las estructuras multiplicativas, estas no son abordadas desde el enfoque funcional, es en 1° de educación secundaria (12 años) donde se establece el eje de álgebra formalmente (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014).

El objetivo de investigación de este trabajo es describir las estrategias y representaciones que utilizan alumnos de 1° de primaria (6-7 años) en tareas de generalización que involucran dos funciones de estructura multiplicativa: f(x)=3x y f(x)=5x.

ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

Desde hace dos décadas, se investiga en torno a la introducción del álgebra antes de los estudios formales. Los investigadores se enfocan en dos ejes primordiales, la edad de los alumnos y las actividades que se deben proponer para que estas nociones emerjan de forma intuitiva.

Son variadas las investigaciones que tienen por objetivo el pensamiento funcional en educación primaria, en ellas podemos encontrar trabajos que se centran en las estrategias, en las representaciones y en la generalización que logran al resolver ciertas tareas propuestas (e.g. Cañadas y Fuentes, 2015; Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018; Moss y London McNab, 2011).

El pensamiento funcional está definido por Cañadas y Molina (2016) como un proceso cognitivo que forma parte del pensamiento algebraico, basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (p. 211).

Encontramos variados autores que proponen la introducción de las operaciones a través de las funciones (Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2005; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2007). Por ejemplo, en Carraher, Martinez y Schliemann (2008), plantean situaciones donde se utiliza el álgebra como una matemática generalizada y como un estudio de las relaciones funcionales que hay entre ellas, creando un enfoque que unifica ambos criterios, mirando las operaciones matemáticas de manera funcional.

Ivars y Fernández (2016) dan cuenta de la trayectoria de aprendizaje de las funciones de estructura multiplicativa en el transcurso de la educación primaria. En los primeros niveles, los alumnos utilizan la estructura aditiva y solucionan de forma correcta las problemáticas planteadas. En cursos superiores, cambian a una estructura multiplicativa y aparecen errores al utilizar el algoritmo de la multiplicación.

Las estrategias en la resolución de problemas son las diferentes formas y caminos para alcanzar la solución. Rico (1997) las define como las formas de actuación de los alumnos frente a una tarea matemática. En Castro, Cañadas y Molina (2017) trabajaron con alumnos de último curso de infantil (5 y 6 años) usando las funciones y=x, y=2x e y=x+1. Las estrategias utilizadas por los alumnos fueron, específicamente en el caso de y=2x, sumar de 2 en 2 y sumar dos veces la misma cantidad, lo que coincide con una investigación anterior de los mismos autores, solo que con alumnos un curso más pequeños. Aquí la estructura multiplicativa de la función f(x)=2x fue abordada por los alumnos como una estructura aditiva.

Merino, Cañadas y Molina (2013), trabajan con alumnos de 5° de primaria en una tarea de generalización a través de un ejemplo genérico donde debían ubicar a personas en una hilera de mesas (3 mesas, 8 personas). Las estrategias utilizadas por los alumnos para generalizar el proceso, fue Mx2+2, M+M+2, M+M+1+1, M+8, Mx4 (con M número de mesas), se concluye que se presentan diversos tipos de representaciones, que logran generalizar y que a través de las producciones escritas se evidencia la utilización de pensamiento funcional en los alumnos.

Torres, Cañadas y Moreno (2019) trabajaron con alumnos de 2° de primaria. Se evidenciaron una gran cantidad de estructuras relacionadas con las funciones f(x)=2x y f(x)=x+3. Los diferentes contextos utilizados influyeron en la cantidad de estructuras que los alumnos establecieron. Pinto y Cañadas (2017) compararon las estructuras que alumnos de 3° y 5° de primaria evidenciaron en la misma tarea. Los alumnos de 3º utilizaron una mayor variedad de estructuras aditivas y multiplicativas, aunque tendieron a trabajar con elementos concretos y no generalizaron. Los alumnos de 5º sí generalizaron y las estructuras fueron multiplicativas.

Las representaciones en la literatura presentan diferentes definiciones (e.g. Rico, 2009; Cañadas y Figueiras, 2011), pero todos coinciden en que una representación nos ayuda a establecer relaciones matemáticas y que diferentes representaciones destacan características específicas del contenido. El pensamiento funcional, tiene asociado una serie de representaciones, (a) pictórico, (b) simbólico, (c) verbal, (d) tabular. En los primeros años de escolarización, los alumnos tienden a utilizar la representación pictórica, aunque con instrucción, pueden hacer el transito a las otras representaciones.

METODOLOGIA

Esta investigación es de carácter descriptivo, por la naturaleza misma del objetivo de investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

En esta investigación trabajamos con 32 alumnos de primero de primaria, con edades comprendidas entre los 6 y 7 años, de un centro concertado de la ciudad de Granada. La mitad del grupo se estaba iniciando en la lecto escritura.

Varios investigadores del proyecto en el que se enmarca este trabajo, diseñamos e implementamos un cuestionario escrito con tres tareas de generalización que involucraban funciones lineales, las cuales se enmarcaban en un contexto sobre una fiesta de cumpleaños (Fuentes, 2014). Desde el punto de vista matemático, los alumnos no habían trabajado tareas de este tipo antes, ni con patrones numéricos o algebraicos, ya que no corresponde a los contenidos del curso. Destacamos que en educación infantil habían trabajado con patrones figurales y conteo de 1 en 1, de 2 en 2. La aplicación de la prueba tuvo una duración de 1,5 hrs. Comenzamos cada tarea con la introducción del contexto y del problema, incluyendo el trabajo con uno o más pares de valores de las variables (x,y).

Las tareas surgen de nuestra revisión de antecedentes y tras una adaptación a nuestro contexto investigador, los conocimientos previos de los alumnos y nuestro objetivo de investigación. Cada tarea involucraba una función con dos variables, la variable independiente (número de niños) es la misma para todas las tareas. Los valores utilizados en la variable independiente fueron 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100, los primeros 5 números son consecutivos para que el alumno encuentre una relación entre las variables y los 3 siguientes son no consecutivos, para que abstraiga la relación y el último es un caso particular lejano, según su ámbito numérico, para lograr la generalización. En cada tarea se les entrega a los alumnos el valor de la unidad. La variable dependiente fue número de gorros, número de piruletas y número de globos para cada tarea, respectivamente.

Tarea 1: Relación entre el número de niños y número de gorros necesarios para la fiesta de cumpleaños. Se les da explícita la relación 1 niño - 1 gorro (f(x)=x) y se les pregunta por otros valores: x = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100.

Tarea 2: Relación entre el número de niños y el número de piruletas necesarios para la fiesta de cumpleaños. Se les da escrita la relación 1 niño - 3 piruletas (f(x)=3x) y se construye con todo el curso la relación 2 niños - 6 piruletas, quedando como apartados de esta tarea preguntas para los valores x = 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100 niños.

Tarea 3: Relación entre el número de niños y el número de globos necesarios para la fiesta de cumpleaños. Se les da escrita la relación 1 niño - 5 globos (f(x)=5x) y se construye con todo el curso la relación 2 niños - 10 globos, quedando como apartados de esta tarea los valores para 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100 niños.

La recogida de datos se llevó a cabo en el aula habitual de los alumnos y asistimos las dos autoras de este trabajo, con los principales objetivos de introducir las tareas y solventar dudas que pudieran surgir durante la resolución del cuestionario.

La tarea 1 sirvió como primera toma de contacto, tanto con el equipo de investigación como con el tipo de tareas que trabajaríamos con ellos. Esta tarea no presentó mayores dificultades a los alumnos y llegaron a generalizar. La mayoría de los estudiantes usaron el conteo de dibujos y por ende la representación más utilizada fue la pictórica.

En este documento, describimos el trabajo realizado por los estudiantes en las tareas 2 y 3. Utilizamos las categorías de análisis de Fuentes (2014). En cuanto a los valores de la categoría estrategias, utilizamos las que emergieron del análisis de las pruebas escritas: (a) respuesta directa, (b) conteo de dibujos, (c) asociación de elementos en grupos, (d) cambia el número de niños de la relación, (e) otra estrategia, en la tabla 1 se detalla cada una de estas categorías y se ejemplifica con la producción escrita de un alumno. La categoría representación no es excluyente, ya que los alumnos podían dar una respuesta directa (simbólico) y también hacer dibujos (pictórico), en cambio la categoría de estrategias es excluyente, ya que la respuesta del alumno podía corresponder a una única estrategia.

ANALISIS DE DATOS, RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Describiremos, independientemente, las estrategias y las representaciones que siguen los alumnos al resolver las tareas propuestas. Para hacer referencia a un alumno utilizaremos la letra A acompañada de la respectiva posición de su prueba escrita en el archivo. Cada tarea se compone de siete apartados etiquetados de la A a la G, para los respectivos valores de x (3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100), que representan los niños asistentes a la fiesta de cumpleaños.

Estrategias

Presentamos las estrategias empleadas por los alumnos en la resolución de las tareas 2 y 3, junto con su descripción, en la tabla 1. Observamos conteo de dibujos, respuesta directa, asociación de elementos en grupos, cambiar el número de niños en la relación dada y otras estrategias diferentes de las anteriores. Acompañamos cada estrategia con un ejemplo de la respuesta dada por un estudiante a una de esas dos tareas.

Tabla 1. Estrategias y ejemplos en respuestas de los alumnos

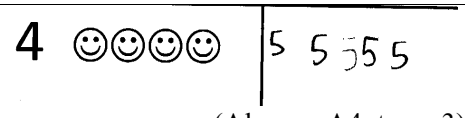
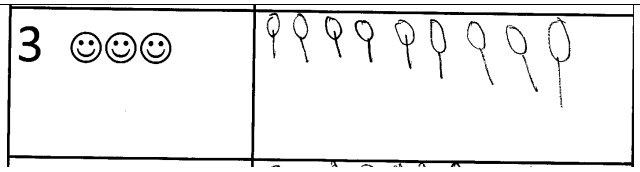
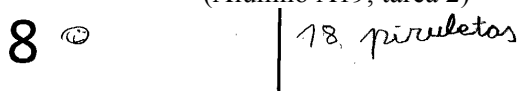
Descripción de la categoría estrategias	Producciones escritas de los alumnos
(a) Respuesta directa. Un número, una expresión aritmética o una secuencia numérica por respuesta.	 (Alumno A4, tarea 3)
(b) Conteo de dibujos. Dibujo de los elementos que corresponden al apartado solicitado.	 (Alumno A2, tarea 2)

Tabla 1. Estrategias y ejemplos en respuestas de los alumnos

Descripción de la categoría estrategias	Producciones escritas de los alumnos
(c) Asociación de elementos en grupos. Ordenamiento de los elementos que necesita, filas, columna o grupos.	 (Alumno A19, tarea 2)
(d) Cambia el número de niños de la relación. Continuación de la secuencia encontrada en los valores consecutivos, sin notar que los valores entregados ahora son no consecutivos	 (Alumno A7, tarea 2)
(e) Otra estrategia. Respuestas que no tenían concordancia con los datos entregados en los enunciados	 (Alumno A17, tarea 2)

Con base en las categorías antes descritas, presentamos un resumen del trabajo de los alumnos en la tabla 2. En cada celda recogemos el número de alumnos que utilizan cada estrategia en cada una de las tareas, diferenciadas por la función que involucra cada una. La cifra que aparece entre paréntesis es el número de alumnos que resolvieron con éxito la tarea.

Tabla 2. Estrategias utilizadas en y=3x e y=5x

Respuesta directa		Conteo de dibujos		Asociación en grupos		Cambia el número de niños de la relación		Otra estrategia	
y=3x	y=5x	y=3x	y=5x	y=3x	y=5x	y=3x	y=5x	y=3x	y=5x
				Apartado A (x=3)					
3 (1)	16 (4)	24 (10)	12 (5)	2 (2)	3 (3)	1	0	2	1
				Apartado B (x=4)					
4 (2)	15 (4)	22 (8)	10 (4)	2 (2)	4 (3)	2	2	2	1
				Apartado C (x=5)					
3 (1)	13 (3)	22 (4)	12 (0)	2 (2)	3 (3)	2	1	2	1
				Apartado D (x=8)					
4 (0)	13 (0)	18 (1)	12 (1)	1 (1)	3 (3)	5	2	2	1
				Apartado E (x=10)					
4 (0)	12 (0)	20 (2)	12 (1)	2 (1)	2 (2)	2	3	2	1
				Apartado F (x=20)					
6 (0)	11 (0)	18 (1)	11 (0)	0 (0)	2 (1)	3	3	1	1
				Apartado G (x=100)					
19 (0)	19 (0)	1 (0)	2 (0)	0 (0)	1 (1)	0	0	2	0

Observamos que, en los primeros casos particulares para la tarea 2 (y=3x), la estrategia empleada más frecuentemente fue el conteo de dibujos. En cambio, esta frecuencia va disminuyendo conforme el tamaño de los valores de la variable aumenta, en favor de un aumento de la respuesta directa. En la tarea 3 (y=5x) este cambio fue menos radical. Conjeturamos que esto puede deberse al aumento en la cantidad de dibujos que hay que realizar para obtener una respuesta. En la tarea 2 se hace tedioso para los alumnos de una forma más gradual, mientras que en la tarea 3 es mayor desde los primeros casos particulares que se les plantean. Además, ha podido haber aprendizaje durante su propio trabajo y esto hace que los alumnos se percataran de la posibilidad de hacerlo sin dibujar. En la función f(x)=5x se observa que aparecen expresiones aritméticas para dar solución a los apartados planteados, lo cual clasificamos en respuesta directa, por ejemplo: símbolos de suma o series de números 5. Para la respuesta directa y conteo de dibujos, se observa una disminución importante en el número de respuestas correctas conforme aumenta el tamaño de los casos

particulares. Por tanto, se evidencia que no son estrategias adecuadas para trabajar con casos particulares grandes o generalizar.

El resto de estrategias las emplean una minoría de alumnos. Llama la atención la aparición de forma espontánea de la agrupación teniendo en cuenta que no habían tenido instrucción previa respecto al trabajo con la estructura multiplicativa. La mayoría de los alumnos que emplean esta estrategia les lleva a una respuesta adecuada en los apartados en los que la usan.

Observamos también, que hay algunos alumnos que establecen una estrategia y perseveran en ella, en el transcurso de todas las tareas y apartados. Por ejemplo, si organizaron la información en grupos, lo siguen haciendo durante todos los apartados. Encontramos a dos alumnos que, aunque entregaron un número por respuesta, los clasificamos en "otra estrategia" porque no había evidencia de dónde habían obtenido ese número.

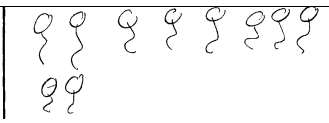
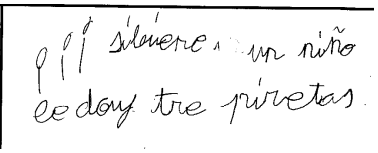
En general, en cuanto a la eficacia de las estrategias, vemos que va disminuyendo a medida que los valores son mayores o no consecutivos, y que el cambiar la función involucrada, no se observa mucha diferencia.

Representaciones

Presentamos las representaciones empleadas en la resolución de las tareas 2 y 3, junto con su descripción, en la tabla 3. Acompañamos cada representación con un ejemplo.

En la siguiente tabla (3), encontraremos la descripción de la categoría representaciones, junto a una respuesta entregada por un alumno. En primer lugar, destacamos el uso de las representaciones pictórica, simbólica y verbal.

Tabla 3. Representaciones y ejemplos en respuestas de los alumnos

Descripción de la categoría representaciones	Producciones escritas de los alumnos
(a) Pictórica. Presencia de dibujos	10  (Alumnos A23, tarea 3)
(b) Simbólica. Números, operaciones o símbolos matemáticos	3 ☺☺☺ | 20 (Alumno A32, tarea 3)
(c) Verbal. Expresiones escritas.	5  (Alumno A30, tarea 2)

En la tabla 4 resumimos las representaciones empleadas por los estudiantes en las dos tareas y en los distintos apartados. En general, se aprecia que las representaciones pictórica y simbólica son las empleadas con mayor frecuencia. En la tarea que involucra la función f(x)=3x predominó la representación pictórica, mientras que en la otra tarea predominó la simbólica, salvo cuando los valores aumentaron, donde vuelve a predominar el simbolismo.

La frecuencia de la representación verbal en el apartado G es notable. Esto se puede explicar porque los motivamos a que con sus palabras expresaran el número de piruletas y globos necesarios para 100 niños. Los alumnos recurrieron más a esta representación porque además desconocían cómo escribir simbólicamente algunos números y no tenían herramientas para representarlos de otro modo.

Tabla 4. Representaciones utilizadas en f(x)=3x y f(x)=5x

Pictórica		Simbólica		Verbal	
f(x)=3x	f(x)=5x	f(x)=3x	f(x)=5x	f(x)=3x	f(x)=5x
Apartado A (x=3)					
29	14	8	23	0	3
Apartado B (x=4)					
29	14	8	23	0	3
Apartado C (x=5)					
28	16	7	17	2	3
Apartado D (x=8)					
25	16	8	17	1	3
Apartado E (x=10)					
26	16	8	16	0	3
Apartado F (x=20)					
24	14	6	15	1	4
Apartado G (x=100)					
1	2	11	12	20	19

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo describimos las estrategias y representaciones que usan alumnos de primero de educación primaria (6-7 años) cuando se encuentran por primera vez con problemas de generalización que involucran las funciones lineales, f(x)=3x y f(x)=5x. Esta investigación contribuye a la investigación sobre pensamiento funcional en primeras edades, desde la perspectiva de las estructuras multiplicativas que usan los alumnos.

Las estrategias que utilizan en la resolución de la tarea 1, en su mayoría, los alumnos trabajan con conteo de dibujos, mientras que, al cambiar de función, y por ende de tarea, la estrategia predominante ahora es la respuesta directa, con la utilización de símbolos aritméticos o series de números. En cuanto a las representaciones que usaron en la función f(x)=3x, el más utilizado es el pictórico, que coincide con la estrategia de conteo de dibujos. En cambio, en la función f(x)=5x utilizaron más la representación simbólica, lo cual concuerda con el aumento en la utilización de la estrategia respuesta directa. El último apartado de ambas tareas apuntaba a la generalización, la estrategia de respuesta directa es la predominante en este apartado, al igual que la representación verbal. Destacamos que los alumnos que trabajaron con la conformación de grupos lo siguen haciendo en todos los apartados y en ambas tareas. Los alumnos que no escribían fluidamente, utilizaron otro tipo de representaciones distintas a la verbal.

Nuestros resultados son similares a los encontrados en la literatura consultada para alumnos con edades entre 6 y 8 años (Castro et al, 2017; Ivars y Fernández, 2016), en cuanto a las estrategias utilizadas y a las representaciones elegidas.

Coincidimos con Torres, Cañadas y Moreno (2019), en la variedad de expresiones que los alumnos usaron al enfrentarse a una tarea de estas características y la riqueza de sus representaciones.

Un aporte de esta investigación es el vincular un cambio en las estrategias y las representaciones, a funciones lineales más complejas, cuando se evidencia en los alumnos la necesidad de trabajar con números más grandes. Somos conscientes que los resultados no son generalizables, por el tamaño e intencionalidad de nuestros sujetos.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje, 34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por alumnos de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13.

Carraher, D.W, Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*. 40. 3-22. 10.1007/s11858-007-0067-7.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. (2005). Treating operations as functions. En D. Carraher y R. Nemirovsky (Eds.), *Monographs of the journal for research in mathematics education*, XIII.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6263/

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*, 5° edición. McGraw Hill.

Ivars, P y Fernández, C (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática, vol. 28, núm. 1*, 9-38.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014), Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78.

Moss, J. y London, McNab. (2011). En approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebrization, advances in mathematics education*. Berlín, Alemania: Heidelberg.

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria, en L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (15-38). Barcelona, España: Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., y Brizuela, B. M. (2007). Bringing out the algebraic character of arithmetic: from children's ideas to classroom practice. *Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates*.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid: SEIEM.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA DE MATEMÁTICAS Y CIENCIAS. ANÁLISIS EXPLORATORIO

Statistical Graphs in Secondary Scientific Textbooks. Exploratory Analysis

García-Alonso, I.[a]

[a]Universidad de La Laguna

Resumen

Los libros de texto son un recurso didáctico con mucha tradición en la enseñanza y aprendizaje de diferentes disciplinas. En este trabajo analizamos los gráficos estadísticos que se utilizan en los libros de texto de las materias de ciencias a lo largo de la ESO. Mostraremos que matemáticas no destaca por ofrecer gráficos estadísticos de mayor nivel de lectura. Además, en los cursos más elevados, los gráficos estadísticos presentan un nivel de lectura más básico.

Palabras clave: *gráficos estadísticos, libros de texto de ciencias, nivel de lectura*

Abstract

Textbooks are a didactic resource with a wide tradition in learning and teaching in different subjects. In this work we analyze the statistical graphs that appear in scientific textbooks at Secondary School. We show that mathematics does not offer the highest statistical graph reading level. Furthermore, along courses, contextualized statistical graphs have more basic reading level.

Keywords: *statistical graphs, scientific textbooks, reading level*

INTRODUCCIÓN

Es muy frecuente que los ciudadanos se enfrenten a informaciones que aparezcan en clave estadística, para lo que es necesario el desarrollo de este conocimiento que no sólo busque la identificación de datos en tablas y gráficos, sino que seamos capaces de interpretar y tomar decisiones en base a los datos que manejamos. Es necesario, por tanto, desarrollar el razonamiento estadístico (Jones Langrall, Mooney y Thornton, 2004), que permite realizar una correcta interpretación de la información y con ello avanzar en nuestra vida profesional y personal (Wild, Utts, y Horton, 2018). Pero también nos ayudará a estar alerta ante un mundo en el que la desinformación y las noticias falsas amenazan, por otro lado, nuestra forma de vida (Engel, 2019).

La Educación Estadística aparece en las aulas en los años 90 del siglo pasado, pero aún así, son muchos los estudiantes que finalizan los cursos de estadística sin interpretar y utilizar en sus argumentaciones de forma correcta los conceptos y procedimientos estadísticos, "siendo, probablemente, la parte de las matemáticas peor aplicada y comprendida" (Batanero, 2019, p. 29). Se hace prioritario desarrollar en los estudiantes contextos familiares y los conocimientos necesarios que les permitan comprender cómo estos conceptos estadísticos se utilizan para resolver las tareas propuestas (Batanero y Borovcnik, 2016), allanando la carga formal a favor de ayudar a desarrollar el sentido estadístico en los estudiantes (Shaughnessy, Chance y Kranendonk, 2009). Así pues, se interpreta que integrar la estadística con el contexto será una de las componentes principales del razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Pero, por otro lado, debemos reconocer que el contexto "está lejos de ser una noción simple, esto es porque el contexto no está presente automáticamente en las aulas -necesitamos introducirlo" (Gal, 2019, p. 3).

García-Alonso, I. (2021). Gráficos estadísticos en libros de texto de Secundaria de Ciencias. Análisis exploratorio. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 279 – 286). Valencia: SEIEM.

Un medio utilizado para introducir los contextos en el aula son los libros de texto, que "constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores, y en cierta medida, los resultados de investigación" (Font y Godino, 2006, p. 68), de forma que es un recurso didáctico con gran tradición en la enseñanza y aprendizaje de diferentes disciplinas y se encuentra en un estadio intermedio entre el currículo oficial y la enseñanza implementada en las aulas (Herbel, 2007). Consideramos, por tanto, relevante que se profundice en cómo se desarrolla el proceso de enseñanza contenido en ellos.

Los gráficos estadísticos que aparecen en los libros de texto de matemáticas y las ciencias experimentales de primaria y secundaria han sido analizados por diferentes investigadores (e.g. Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero, 2015; García y Perales, 2007, entre otros). Pero consideramos que es necesario realizar un estudio comparado y longitudinal acerca de los gráficos estadísticos que utilizan las materias de ciencias experimentales y matemáticas, así como analizar los niveles de dificultad en la interpretación, según el contexto en el que se muestran.

MARCO CONCEPTUAL

Un gráfico estadístico es un objeto semiótico complejo que requiere, para su comprensión, de una interpretación externa (del tema al que se refiere), una interpretación interna (variables, título, escala, …), y, finalmente, de una percepción global que relacione lo anterior con la realidad representada (Bertin, 1967).

Los trabajos de Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) identifican cuatro niveles de lectura de los gráficos: *Leer los datos* (lectura literal de la información mostrada en el gráfico)*, Leer dentro de los datos* (lectura de información que aporta el gráfico estadístico y que no está explícitamente mostrada en él)*, Leer más allá de los datos* (información no explícita en el gráfico y que no se deduce con operaciones o comparaciones directas) *y Leer detrás de los datos* (valoración crítica de la recogida de los datos y la forma de recolección).

Por su parte, Sharma (2013), desarrolla un marco conceptual que ofrece indicadores relacionados con los niveles de lectura anteriores, entendiendo que, desarrollar la interpretación de representaciones gráficas requiere que "los aspectos cognitivo, afectivo y contextual se interrelacionen" (ibid, p. 64). En su marco diferencia cinco estadios diferentes directamente relacionados con los niveles de Curcio (1989) y Friel et al. (2001): *Informal, Consistente no crítico (leer los datos), Consistente no crítico (leer dentro de los datos), Crítico Inicial (leer más allá de los datos), Crítico Avanzado (leer detrás de los datos), Articulación de aspectos cognitivos, afectivos y contextuales acerca de los datos (leer detrás de los datos)*. En todos ellos el contexto cobra especial relevancia y su relación con la información que debe interpretar, sobre todo en los niveles más complejos.

Investigaciones recientes, siguen mostrando que la lectura e interpretación de gráficos estadísticos es una actividad compleja para los estudiantes y profesores (García-Alonso y Bruno, 2019), en la que se debe prestar atención al rol del contexto en el análisis de la interpretación gráfica, pues este será el encargado de facilitar el acceso a nueva información a partir de la información cualitativa y cuantitativa que aporta el gráfico estadístico (Aoyama y Stephens, 2003).

OBJETIVOS

En vista de lo anterior, proponemos el análisis de los gráficos estadísticos que aparecen en los libros de texto de tres materias de ciencias de Educación Secundaria Obligatoria de España, correspondientes a una misma editorial (Santillana) de amplia difusión en España, lo que justifica su elección. En el análisis se pretende observar dos aspectos principales:

1. Conocer los tipos de gráficos estadísticos más utilizados en cada uno de los libros de texto, materia y nivel educativo.

2. Analizar los niveles de lectura en los que se sitúan cada uno de los gráficos estadísticos para cada materia y nivel educativo.

Con ello se pretende estudiar si hay diferencias significativas entre los gráficos utilizados por cada una de las materias, si los niveles de dificultad muestran cierto equilibro en cada curso y además, si la dificultad de lectura e interpretación se relaciona con la edad de los estudiantes.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo el objetivo descrito seleccionamos los libros de texto de todos los niveles de la ESO de las materias de Biologías y Geología (ByG), Física y Química (FyQ) y Matemáticas (MAT). Por tanto, se realiza una muestra intencional formada por diez libros de texto de 1º a 4º de Educación Secundaria Obligatoria: 4 libros de MAT, 3 libros de ByG, 3 libros de FyQ. Además, los libros de texto seleccionados están acordes al currículo en vigor en el territorio español (RD 1105/2014).

Nuestra investigación sigue una metodología cualitativa y exploratoria, utilizando el análisis de contenido, que busca investigar sobre la naturaleza del discurso. Se selecciona, en cada libro, aquellas gráficas estadísticas que se encuentran en un contexto que da sentido a la representación, lo que permitirá realizar categorías en niveles de lectura. Se descartan gráficas estadísticas descontextualizadas o aquellos ejemplos utilizados para estudiar propiedades de la representación. En total, de todas las materias, se seleccionan y analizan 220 gráficos estadísticos.

Para llevar a cabo el estudio se desarrolló el instrumento que se presenta en la tabla 1, en el que se describen los indicadores que se han tenido en cuenta para la categorización y que es una adaptación del marco conceptual anteriormente descrito. En este sentido, los tipos de gráficos seleccionados son aquellos que se estudian en la unidad de estadística de MAT a lo largo de la ESO.

Tabla1. Instrumento de análisis

Tipo de gráfico	**A. Gráfico estadístico de una distribución** Diagrama lineal unidimensional Diagrama de barras o histograma Diagrama de sectores Pictograma. En esta categoría se recogen las representaciones icónicas **B. Gráfico estadístico con varias distribuciones** Representación gráfica de varias distribuciones en la misma representación gráfica.
Niveles de lectura	**N1. Leer los datos** - Lectura literal de la información que se presenta en el gráfico - El contexto no es relevante **N2. Leer dentro de los datos** - Lectura literal de los datos, pero realiza operaciones sencillas. - Indica los valores mayores, menores, el total de la distribución. Se realizan cálculos de parámetros, pero no se interpretan en el contexto. - El contexto no es relevante **N3. Leer más allá de los datos** - Se realizan comparaciones sencillas. Realiza interpolaciones, extrapolaciones. - Realizan cálculos de parámetros y se interpretan en el contexto - El contexto es relevante para la información solicitada **N4. Leer detrás de los datos** - Valoración crítica y argumentada en el contexto del gráfico. - La comprensión completa del gráfico requiere conocer el contexto

Es importante destacar que, en los indicadores de los niveles de lectura, el contexto será el catalizador para los niveles de lectura más avanzados.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Tipos de gráficos

En una primera aproximación se clasificaron los gráficos que aparecían en cada uno de los textos estudiados (tabla 2) y que cumplen con los criterios establecidos. De dicha tabla observamos que la materia que acumula el 50% de los gráficos estadísticos es FyQ. Esto no es sorprendente, dado que las materias de ciencias experimentales ofrecen, a lo largo de todo el libro de texto, su materia en contexto. Por su parte MAT, es la segunda materia con mayor número de gráficas estadística, aunque estas se concentran en dos unidades temáticas: estadística y funciones.

El diagrama lineal es la representación que aparece con más frecuencia (50.4%), aunque llama la atención que en la materia de ByG esta representación sea equiparable a la representación de varias distribuciones. Es más, MAT es la materia que menos recurre a representaciones de varias distribuciones.

Tabla 2. Frecuencia (y porcentaje) de los tipos de gráficos por materia

	BYG	FYQ	MAT	Total
D. Lineal	12 (5.5)	70 (31.8)	29 (13.1)	111 (50.4)
D. Barras / Histograma	0 (0)	1 (0.5)	19 (8.6)	20 (9.1)
D. Sectores	6 (2.7)	15 (6.8)	10 (4.5)	31 (14.1)
Pictograma	6 (2.7)	3 (1.4)	2 (0.9)	11 (5)
Rep. Varias Distribuciones	15 (6.8)	22 (10)	10 (4.6)	47 (21.4)
Total	39 (17.7)	111 (50.5)	70 (31.7)	222 (100)

En la figura 1, mostramos cómo se distribuyen los diferentes tipos de gráficos en cada una de las materias y niveles educativos. En dicho gráfico, destaca FyQ frente al resto de materias, en algunos cursos de manera notable (2ESO). Por otro lado, observamos que según se avanza en los diferentes niveles educativos, el porcentaje de gráficos estadísticos utilizados va disminuyendo, lo que, parece contradictorio con una enseñanza competencial y en la que el contexto es fuente de aprendizaje.

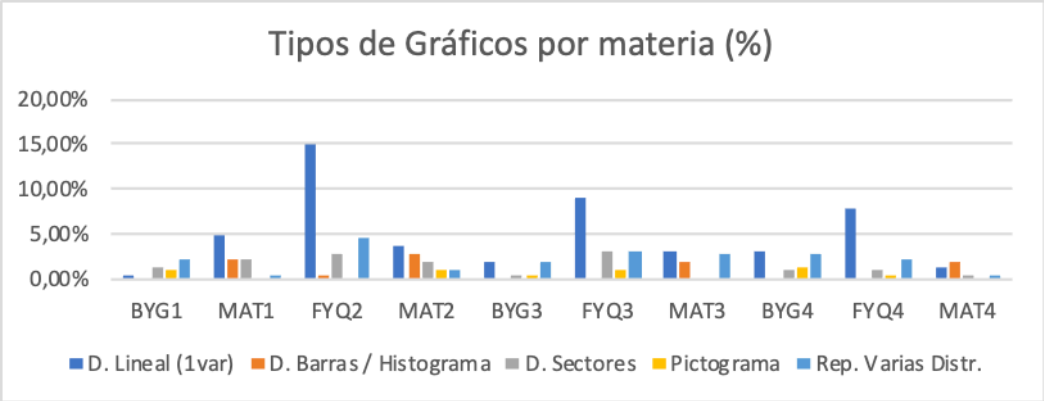


Figura 1. Porcentaje de cada tipo de gráficos por materia y nivel educativo

Atendiendo a la evolución de MAT, observamos que queda lejos de contar con una amplia variedad de gráficos estadísticos y, además, la oferta de gráficos disminuye a lo largo de la secundaria.

Por su parte, ByG, es la materia que ofrece mayor equilibrio entre los diferentes tipos de gráficos estadísticos ofrecidos a lo largo de toda la enseñanza. Incluso, en determinados cursos, son más frecuentes los gráficos que representan varias distribuciones.

En el análisis, también se ponen de manifiesto ciertas regularidades en el uso de distintos tipos de gráficos pues, por ejemplo, el diagrama de sectores habitualmente se utiliza para representar

situaciones relacionadas con la energía, o bien, los diagramas lineales se utilizan para las situaciones relacionadas con el movimiento y los gases.

También se detectaron algunos gráficos estadísticos que, o bien eran erróneos o bien, se mostraban confusos y de difícil interpretación. Pero sólo fueron muy pocos casos. Destacamos los mostrados en las figuras 2 y 3. En la figura 2 se combinan dos gráficos con significados muy diferentes, lo que es confuso en su interpretación. Y, en la figura 3 no se respetan las proporciones en la representación, lo que hace que sea una representación errónea.

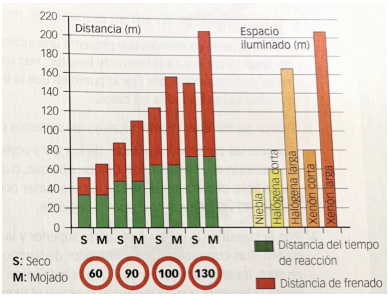


Figura 2. Gráfico frenado (FyQ4, p. 157)

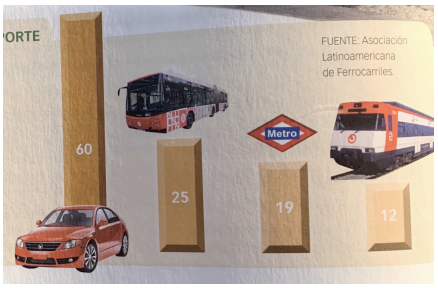


Figura 3. Uso de transporte (FyQ4, p226)

Niveles de lectura

A continuación, analizamos los niveles de lectura siguiendo los indicadores descritos en el instrumento de la tabla 1. Para realizar este análisis debemos tener en cuenta algunos de los siguientes aspectos: el contexto en el que se sitúa el gráfico estadístico (explicativo o ilustrativo) o la pregunta que se plantea sobre él. La relación entre la información y el contexto nos permitirá situar fácilmente en qué nivel de lectura se sitúa. Además, debemos analizar cuál es el objetivo del gráfico estadístico, si es obtener dato, cálculo, parámetro, comparar, inferir, argumentar, …

Una vez analizados mostramos en la tabla 3 los resultados acerca de los distintos niveles de lectura para cada una de las materias. En ella observamos que el nivel 2 es el más frecuente tanto globalmente como dentro de cada materia analizada. Por otro lado, los gráficos en los niveles más elevados de lectura (3 y 4) se localizan en las materias de ByG y FyQ, ambas con 14 y 15 gráficas, respectivamente. Mientras que en MAT sólo cuenta con 6 gráficas contextualizadas en el N3 y ninguna en el N4.

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) de niveles de lectura de gráficos por materia

	BYG	FYQ	MAT	Total
NIVEL 1	10 (4.5)	46 (21)	22 (10)	78 (35.5)
NIVEL 2	15 (6.8)	50 (22.7)	42 (19.1)	107 (48.6)
NIVEL 3	10 (4.5)	12 (5.4)	6 (2.7)	28 (12.7)
NIVEL 4	4 (1.8)	3 (1.4)	0 (0)	7 (3.2)
Total	39 (17.8)	111 (50.5)	70 (31.7)	220 (100)

En la figura 4, se muestra la distribución de los distintos niveles de lectura de las gráficas estadísticas para cada nivel educativo y materias. En el gráfico se comprueba, como es deseable, que los primeros cursos la mayor parte de las gráficas estadísticas se sitúen en los niveles 1 y 2, en todas las materias. Pero sí es llamativo que, a medida que se avanza de nivel educativo, las gráficas estadísticas no se sitúan en los niveles más complejos de lectura. E incluso, MAT4 cuenta con más gráficas estadísticas de N1 que de N2. En MAT4, muchas de las preguntas que se realizan se dirigen a obtener el valor extremo, o a reconocer la duración de un evento con el que identificar el dominio.

En este análisis observamos que la mayor cantidad de gráficos se utilizan en las materias de FyQ y MAT, aunque MAT ofrece menor cantidad de gráficos de N3 y N4.

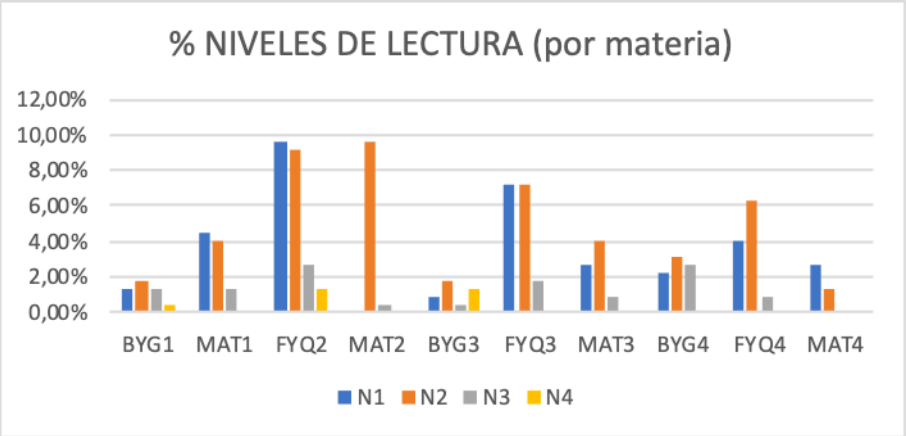


Figura 4. Porcentaje de nivel de lectura por materia y nivel educativo

En la figura 5 mostramos un ejemplo de actividad utilizando una gráfica que se sitúan en el nivel 4. En ella destacamos la actividad 14, que tiene que extraer conclusiones que van más allá de la información que ofrece la gráfica. El N4 aparece en los primeros cursos, casi exclusivamente.

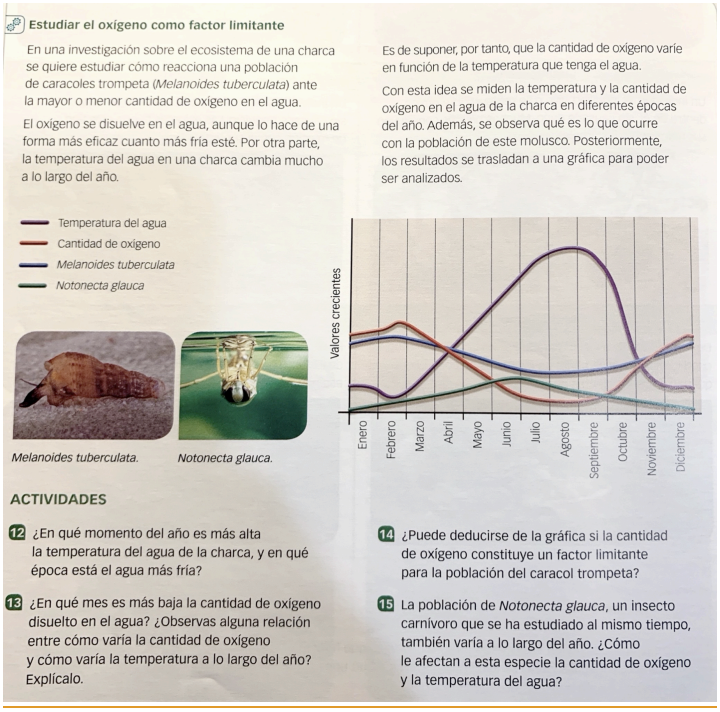


Figura 5. Factor limitante N4. (ByG1, p. 216)

Tabla 4. Frecuencia (y porcentaje) de Niveles de lectura frente a Tipos de gráfico

	D. Lineal	D. Barras Histogr.	D. Sectores	Pictograma	Varias Distrib.
NIVEL 1	51 (23.1)	7 (3.2)	15 (6.8)	2 (0.9)	3 (1.3)
NIVEL 2	57 (12.3)	12 (5.4)	14 (6.4)	9 (4.1)	15 (6.8)
NIVEL 3	2 (0.9)	1 (0.4)	2 (0.9)	21 (9.5)	28 (12.7)
NIVEL 4	1 (0.4)	0 (0)	0 (0)	6 (2.7)	7 (3.2)

Para finalizar el estudio hemos realizado una comparación en la que enfrentamos los niveles de lectura y el tipo de gráfico que se ha utilizado en cada uno de los contextos ofrecidos en los libros

de texto (tabla 4). En ella se puede observar que, los diagramas de una distribución se sitúan en los niveles de lectura más básicos, mientras que las tareas en las que se utilizan diagramas que incluyan varias distribuciones en una misma gráfica, así como algunos pictogramas, su lectura es más compleja. Esto, que no deja de ser evidente, nos puede ayudar a secuenciar los gráficos estadísticos que utilizamos con el objetivo de graduar la complejidad en su lectura.

CONCLUSIONES

La enseñanza obligatoria debe preparar a los estudiantes a que "adquieran los elementos básicos de la cultura, especialmente en sus aspectos humanísticos, artístico, científico y tecnológico" (RD. 1105/2014, p. 176). Además, "el proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe abordarse desde todas las áreas de conocimiento" (ibid, p. 170), por lo que es necesario que conozcamos cómo se abordan determinados conocimientos desde diferentes materias.

En este trabajo hemos analizado los gráficos estadísticos que se utilizan en los libros de texto de tres materias de la ESO, incluida matemáticas, y observamos que el nivel de lectura más frecuente en todos ellos es "leer dentro de los datos" (N2), que coincide con resultados publicados para otros niveles (Díaz-Levicoy et al., 2015).

La principal conclusión de esta investigación es que, aunque sabemos que todas las materias de ciencias utilizan gráficos estadísticos, matemáticas no es la que ofrece estos gráficos de forma secuenciada y en la que se gradúe el nivel de dificultad a lo largo de la ESO. Al contrario, al final de la ESO, matemáticas es la que utiliza gráficos estadísticos con niveles muy elementales de lectura. Hecho que sucede con las otras materias analizadas. También es destacable que ByG y FyQ utilizan gráficos estadísticos con los niveles de lectura más complejos (N3 y N4). Por otro lado, esta editorial utiliza una tipología de gráficos poco variada a lo largo de la Secundaria.

Finalmente, a partir de este estudio se puede diseñar una estrategia de enseñanza de los gráficos estadísticos encaminada a mejorar el nivel de lectura de forma gradual. También, es importante conocer cómo utilizan otras materias estas representaciones y qué aportaciones hace la matemática para contribuir en cada nivel educativo a la mejora en la lectura e interpretación de gráficos estadísticos. En futuras investigaciones se recomienda ampliar el estudio a otras editoriales y comparar estos resultados con los gráficos que con frecuencia aparecen en nuestra vida cotidiana.

La estadística son más que números. Son números en contexto. Y el contexto es una herramienta fundamental en las materias de ByG y FyQ. Contextos ricos que contribuyen en el desarrollo de niveles avanzados de lectura e interpretación de gráficos estadísticos. Es necesario seguir investigando cómo desde cada materia y entre todas a la vez, se desarrolla el razonamiento estadístico y formamos estadísticamente a todos los ciudadanos.

Referencias

Aoyama, K. y Sthephens, M. (2003). Graph interpretations aspects of statistical literacy: A Japanese perspective. *Mathematics Education Research Journal,* 15(3), 207-225.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Rotterdam: Sense Publishers.

Batanero, C. (2019). Statistical Sense in the Information Society. *Congreso Internacional sobre Educación y Tecnologías en Ciencias (CISETC 2019)*. (28-37). Recuperado de: http://ceur-ws.org/Vol-2555/paper2.pdf

Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). Alicante: SEIEM.

Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. What is civic statistics? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa,* 8(1), 67-98.

García García, J.J. y Perales Palacios, F.J. (2007). ¿Comprenden los estudiantes las gráficas cartesianas usadas en los textos de ciencias? *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 107-132.

García-Alonso, I. y Bruno, A. (2019). Lectura de gráficos estadísticos y tareas numéricas en alumnado de secundaria y futuros profesores. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 313-322). Valladolid: SEIEM.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Mooney, E.S. y Thornton, C.A. (2004). Models of development in Statistical Reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 91-117). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado (BOE)*, 3, 169-546.

Sharma, S. (2013). Assessing students' understanding of tables and graphs: Implications for teaching an research. *International Journal of Educational Research and Technology, 4, 51-70.*

Shaughnessy, J. M., Chance, B., y Kranendonk, H. (2009). Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making in statistics and probability. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wild, C.J., Utts, J.M. y Horton, N.J. (2018). What is statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5-36). Cham, Suiza: Springer.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Anexo: libros de texto analizados

A. Matemáticas

[MAT1] Grence, T., Almodóvar, J.A., de la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Machín, P., Pérez, C. y Sánchez, D. (2015). *Matemáticas ESO 1. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

[MAT2] Grence, T., Almodóvar, J.A., Cuadrado, A., Díaz, L., Dorce, C., Gámez, J.C., Marín, S., Pérez, C., Redón, M.. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas ESO 2. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

[MAT3] Grence, T., de la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Machín, P., Pérez, C. y Sánchez, D. (2015). *Matemáticas. Enseñanzas académicas ESO 3. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

[MAT4] Grence, T., Gámez, J.C, Gaztelu, A.M., Loysele, F., Marín, S., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas. Enseñanzas académicas ESO 4. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

B. Biología y Geología

[ByG1] Grence, T., Vives, F., Meléndez, I., Garrido, J.L. y Madrid, M.A. (2015). *Biología y Geología ESO 1. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

[ByG3] Grence, T., Vives, F., Meléndez, I., Garrido, J.L. y Madrid, M.A. (2015). *Biología y Geología ESO 3. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

[ByG4] Grence, T., Brito, C., Garrido, J.L. y Madrid, M.A. (2016). *Biología y Geología ESO 4. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

C. Física y Química

[FyQ2] Grence, T., Vidal, M.C. y Sánchez, D. (2016). *Física y Química ESO 2. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

[FyQ3] Grence, T., Vidal, M.C., Sánchez, D. y de Luis, J.L. (2015). *Física y Química ESO 3. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

[FyQ4] Grence, T., Vidal, M.C., Sánchez, D. y de Luis, J.L. (2016). *Física y Química ESO 4. Proyecto Saber Hacer*. Madrid: Santillana

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA. ANÁLISIS EXPLORATORIO

Attitudes towards mathematics in Secondary. Exploratory analysis

García-Alonso, I., Sosa-Martín, D. N., García-Díaz, A.

Universidad de La Laguna

Resumen

El dominio afectivo en Educación Matemática es uno de los aspectos a tener en cuenta en el aprendizaje de los estudiantes. En este trabajo analizamos las respuestas a un cuestionario realizado por estudiantes de Educación Secundaria con objeto de estudiar las actitudes hacia las matemáticas. Los estudiantes consideran que poseen un buen autoconcepto y se sienten competentes ante las matemáticas, aunque creen que sus profesores no los consideran así. Por su parte, las niñas, comparado con los niños, puntúan su competencia matemática por debajo.

Palabras clave: *actitudes, autoconcepto, género, matemáticas, ProyectaMates*

Abstract

Affective domain in Mathematics Education is one of the aspects to take into account in students' learning. In this work we analyze the answers of a questionnaire made to Secondary Education students in order to study attitudes towards mathematics. Students consider they have a good self-concept and feel competent in mathematics, although they believe that their teachers do not consider them that way. But, girls, compared to boys, score their mathematical competence lower.

Keywords: *attitudes, self-competence, genre, mathematics, ProyectaMates*

INTRODUCCIÓN

El éxito o fracaso en las matemáticas por parte de los estudiantes no depende exclusivamente del conocimiento del contenido matemático que posean. Las investigaciones ponen de manifiesto que, entre otros, los aspectos afectivos tienen un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Gómez-Chacón, 2010). Tal es así que, en las evaluaciones internacionales recientes, como PISA y TIMSS, se llevan a cabo análisis tanto del conocimiento matemático como de aspectos del dominio afectivo de los estudiantes observando cómo afecta a su rendimiento. Pero el dominio afectivo es un constructo complejo que ha llevado a desarrollar una extensa literatura de investigación con diversidad de enfoques y metodologías.

En la evaluación TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias, en inglés) (MECD, 2019), por ejemplo, se analizan dos aspectos concretos de las actitudes, como son el gusto por aprender matemáticas y la confianza que muestran en su aprendizaje. En este estudio internacional, se interpreta el gusto por aprender matemáticas como un rasgo relacionado con la motivación intrínseca del estudiante, el cual les hará dedicar más tiempo a tareas matemáticas y así consiga que se enfrenten a tareas más complejas (Middleton y Spanias, 1999), de forma que si es capaz de resolver tareas más complejas, aumentará su confianza en matemáticas (McLeod, 1992). Los resultados obtenidos con respecto al gusto por las matemáticas muestran que los alumnos españoles en este aspecto se sitúan justo en la media europea y de los países de la OCDE, en cambio, muestran menor confianza en su aprendizaje, por debajo de las medias anteriores. Aparte, también se estudian las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas y, en este sentido, en TIMSS (MECD, 2019) ha quedado de manifiesto que la confianza tiene un mayor efecto en el rendimiento de los estudiantes que el gusto por aprender (p. 264).

García-Alonso, I., Sosa-Martín, D. N. y García-Díaz, A. (2021). Actitudes hacia las Matemáticas en Secundaria: Análisis exploratorio. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 287 – 294). Valencia: SEIEM.

Por otro lado, también se ha analizado el rendimiento desde la perspectiva de género, observándose diferencias entre los niños y las niñas. Tal es así, que el interés por el estudio de estas diferencias ha aumentado en las últimas décadas (Rodríguez-Martínez y Blanco, 2015), y esta brecha de género se relaciona también, entre otros factores, con el autoconcepto (Carmona et al., 2011). En este sentido, TIMSS (MECD, 2019) reporta un rendimiento en matemáticas por parte de los chicos significativamente superior al de las chicas.

Nuestro trabajo analiza las respuestas de estudiantes de secundaria (11-16 años) de Tenerife a un cuestionario validado (Palacios et al., 2014) acerca de su actitud hacia las matemáticas que incluye el autoconcepto. Este análisis se enmarca en el proyecto de innovación educativa ProyectaMates (García-Alonso, 2020), en el que sus profesores y profesoras reciben formación en resolución de problemas a lo largo de un curso académico. Nuestra investigación indaga sobre las actitudes de los estudiantes de secundaria hacia las matemáticas y analizamos, además, las actitudes matemáticas en función del género. Esta información será de utilidad para reflexionar y centrar la atención en estos aspectos desde la formación docente en general y desde ProyectaMates, en particular.

MARCO CONCEPTUAL

El dominio afectivo se ha caracterizado de diferentes maneras, pero en nuestro trabajo adoptamos la definición dada por Gómez-Chacón (2010): "un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición" (p. 22). Desde esta perspectiva Mcleod (1992) distingue tres constructos dentro del dominio afectivo: creencias, actitudes y emociones; aunque cada uno de ellos, no interviene de forma aislada (Hannula, 2012; McLeod, 1992). Serán las actitudes hacia la matemática, el constructo del dominio afectivo objetivo de este trabajo, entendidas como predisposiciones que "se refieren a la valoración y al aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, subrayando la componente afectiva frente a la cognitiva" (Gómez-Chacón, 2009, p. 11).

Con respecto a las actitudes, la literatura describe las actitudes hacia las matemáticas, que se relacionan con la valoración, el aprecio y el gusto por esta disciplina; y se diferencian de las actitudes matemáticas, que se encuentran relacionadas con el modo en que se utilizan capacidades generales ante tareas matemáticas, con carácter cognitivo (Gómez-Chacón, 2009). En cuanto al análisis de las actitudes hacia las matemáticas, diversas investigaciones indican que existe relación con el rendimiento matemático de los estudiantes (Sakiz et al., 2012), con su ansiedad (Akin y Kurbanoglu, 2011), y con la mejora de su motivación intrínseca hacia el estudio de las matemáticas (Palacios et al., 2014), que desemboca en una mayor confianza en el aprendizaje de esta disciplina (McLeod, 1992). Las diferencias de género han sido objeto de análisis y se ha observado que muestran diferente actitud en sus respuestas los niños y las niñas, siendo las de ellas más negativas (Frost et al., 1994) o bien, ofreciendo mayor falta de confianza cuando desarrollan tareas matemáticas (Asante, 2012). Este análisis tiene relevancia pues esta diferencia de actitudes puede influir en la elección de sus estudios posteriores y alejarlas de los campos relacionados con las matemáticas (Asante, 2012, p. 123). Si bien es cierto que las diferencias de género han sido objeto de estudio desde muy diversas perspectivas, pues no en vano se han encontrado que presentan un carácter multifacético por la variedad de causas que las originan.

La medición de las actitudes son un campo de gran valor y un reto para la investigación. La literatura recoge diversos instrumentos utilizados para medir estos aspectos del dominio afectivo, como la de Auzmendi (1992), que es la escala de las actitudes matemáticas más citada. En este trabajo hemos seleccionado para el estudio de las actitudes hacia las matemáticas el instrumento de Palacios et al. (2014) que presenta como "la escala multidimensional con ítems recogidos de la bibliografía al respecto adaptados a nuestro actual contexto histórico cultural" (p. 73), y para la que se utilizó una muestra de diferentes niveles, desde Primaria hasta Bachillerato y que, según los autores, ha mostrado evidencias de validez y fiabilidad estadísticos que dan solidez y robustez para

su uso en niveles educativos no universitarios (p. 86). Consideramos que se ajusta al contexto y niveles analizados.

METODOLOGÍA

Participantes

Los datos utilizados en este estudio se recogieron de estudiantes de seis centros públicos de Educación Secundaria, repartidos por la geografía de la isla de Tenerife, antes de que sus profesores desarrollaran la formación en ProyectaMates (García-Alonso, 2020). Se recogieron datos de 135 estudiantes de tres niveles educativos ESO (11 – 16 años), siendo 75 niños y 60 niñas. Este análisis forma parte de un estudio más amplio que abarca también estudiantes de Educación Primaria.

Tabla 1. Número de estudiantes que han realizado la encuesta, por centro y zona.

	Centro	*Nivel*	*Estudiantes*
METROPOLITANO	IES – 1	1ºESO	24 (8 niñas / 16 niños)
	IES – 2	2ºESO	13 (3 niñas / 10 niños)
	IES – 3	3ºESO	28 (10 niñas / 18 niños)
NORTE	IES – 4	2ºESO	24 (12 niñas / 12 niños)
	IES – 5	2ºESO	18 (12 niñas / 6 niños)
SUR	IES – 6	2ºESO	28 (15 niñas / 13 niños)
Total			**135**

Instrumento

Se ha utilizado un cuestionario validado para analizar las actitudes hacia las matemáticas (Palacios et al., 2014). El cuestionario consiste en 32 afirmaciones con las que los estudiantes deben mostrar su grado de acuerdo en una escala tipo Likert, con cuatro posibles respuestas en cada una que van desde el valor 1 que indica que "No estoy nada de acuerdo con lo que dicen y para nada es así" hasta el valor 4 "Estoy completamente de acuerdo y convencido de que esto es así".

Las preguntas se agrupan en cuatro categorías: Autoconcepto (4 preguntas), Gusto por las matemáticas (12 preguntas), Percepción de su competencia matemática (12 preguntas), Percepción de utilidad (4 preguntas), aunque en el cuestionario presentado a los estudiantes las preguntas aparecen mezcladas. En Palacios, Arias y Arias (2014), la segunda categoría se denomina "percepción de la incompetencia matemática", debido a que las afirmaciones están dadas todas en negativo. Este cambio no afecta al análisis que realizamos en este trabajo.

Proceso de análisis de datos

Para el análisis de los datos se ha calculado la media y desviación típica de cada uno de los ítems y se han diferenciado por género. Para estudiar la diferencia de medias se ha hecho un contraste de hipótesis de diferencia de medias, test paramétrico con nivel de confianza del 95% y desviación típica desconocida, mostrando el estadístico calculado. Debido a que algunas de las afirmaciones están escritas en negativo, para hacer un análisis coherente se ha tenido que modificar los datos de las respuestas, intercambiado las cantidades originalmente dadas como respuesta 1 ó 2 por las respuestas 4 y 3, respectivamente, de forma que el 4 indicara el sentido positivo hacia las matemáticas. Las respuestas modificadas aparecen con asterisco (*) en las Tablas 3 y 5.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Autoconcepto

En las afirmaciones relativas al autoconcepto (Tabla 2) observamos que los estudiantes ofrecen una respuesta que en media está por encima de la mitad de la puntuación (2.5 puntos), lo que nos hace pensar que los estudiantes, en general, muestran un buen autoconcepto hacia las matemáticas. Aunque, cabe destacar que las respuestas con medias más bajas son, por un lado, la que hacen

referencia a las dificultades con el cálculo mental y, por otro lado, los que piensan que sus profesores no los consideran buenos alumnos en matemáticas. Cuando observamos las diferencias en estas dos preguntas por género, observamos que las niñas creen que poseen peor cálculo mental comparado con los niños, y no existen diferencias relevantes por género acerca de la creencia de sus profesores.

Tabla 2. Autoconcepto.

			Niñas		*Niños*	
Afirmación	*Media*	*DT*	*Media*	*DT*	*Media*	*DT*
Para mis profesores de matemáticas soy un buen alumno/a	2.94	0.91	2.98	0.9	2.91	0.9
Puedo llegar a ser un buen alumno/a de matemáticas	3.44	0.83	3.51	0.76	3.39	0.98
Se me da bien calcular mentalmente	2.59	1.05	2.16	0.99	2.93	0.96
Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas	3.44	0.85	3.43	0.86	3.44	0.84
Total	3.10	1.05				

El resto de las afirmaciones no presenta diferencia entre las medias de cada género que pueda considerarse relevante. En general, los estudiantes muestran un buen autoconcepto de ellos mismos frente a las matemáticas.

Gusto por las matemáticas

En esta categoría se integran aquellas preguntas relacionadas con las actitudes cuando tienen que realizar tareas o actividades matemáticas. Se trata de observar si este tipo de actividades despierta interés y ganas o más bien hay un desinterés por la materia ya que no le resulta atractiva. En la Tabla 4 se observan los resultados de cada una de las afirmaciones.

Tabla 3. Gusto por las matemáticas.

			Niñas		*Niños*	
Afirmación	*Media*	*DT*	*Media*	*DT*	*Media*	*DT*
Cuando tengo que estudiar matemáticas voy a la tarea con cierta alegría	2.31	1.04	2.28	1.06	2.35	1.03
Las matemáticas son fáciles	2.43	1.03	2.30	1.01	2.53	1.04
Las matemáticas son un "rollo"*	2.96	1.10	2.77	1.18	3.13	1.01
Las matemáticas son una de las asignaturas más aburridas*	3.14	0.91	2.97	0.99	3.31	0.82
Lo que estudiamos en la clase de matemáticas me parece muy interesante	3.02	0.85	2.97	0.85	3.07	0.84
Me gustan las matemáticas	2.96	0.93	2.84	1.03	3.07	0.82
Me resulta divertido estudiar matemáticas	2.61	1.10	2.41	1.16	2.76	1.02
Me siento cómodo/a resolviendo problemas de matemáticas	2.76	0.93	2.84	0.96	2.71	0.89
No soporto estudiar matemáticas, incluso las partes más fáciles*	3.26	0.89	3.16	0.94	3.36	0.84
Puedo pasarme horas estudiando matemáticas y haciendo problemas	2.14	1.03	2.16	1.04	2.12	1.01
Si tuviera oportunidad no estudiaría matemáticas*	3.04	1.10	2.50	1.19	2.82	0.99
Toca clase de matemáticas… ¡Nooooo!*	3.18	0.98	3.11	0.98	3.23	0.97
Total	2.82	1.08				

Observamos que, globalmente, hay tres ítems con afirmaciones que, en media, se sitúan por debajo de 2.5 puntos. Dos tienen relación con mostrar alegría al realizar la tarea matemática y con que se le pasen las horas realizando actividades matemáticas. Y la tercera afirmación tiene que ver con la percepción de facilidad de la materia. Analizando las diferencias por género de estas afirmaciones, las niñas tienen una puntuación más baja que los niños, salvo en la sensación de que se les pasa el

tiempo realizando problemas. En esta última los niños están ligeramente con una media menor. Por tanto, se puede afirmar que los estudiantes poseen la iniciativa de realizar actividades matemáticas y no les desagradan las clases y el trabajo de clase.

Percepción de su competencia matemática

El siguiente bloque de afirmaciones se relaciona con la valoración que los estudiantes poseen acerca de su competencia matemática, tanto cuando se compara con el resto de compañeros y compañeras, como con su propio rendimiento frente al esfuerzo realizado (Tabla 4).

Tabla 4. Percepción de su competencia matemática.

			Niñas		*Niños*	
Afirmación	*Media*	*DT*	*Media*	*DT*	*Media*	*DT*
En matemáticas me cuesta trabajo decidir qué tengo que hacer	2.33	1.05	2.54	1.1	2.15	0.98
En matemáticas me quedo con la mente en blanco con frecuencia	2.22	1.02	2.39	1.06	2.08	0.96
Haga lo que haga, siempre saco notas bajas en matemáticas	2.21	1.05	2.33	1.05	2.11	1.05
Las matemáticas no las entiendo	2.28	1.06	2.54	1.03	2.07	1.02
Me siento más torpe en matemáticas que la mayoría de mis compañeros/as	2.09	1.10	2.23	1.21	1.96	1
Me suelo sentir incapaz de resolver problemas de matemáticas	2.19	1.06	2.30	1.18	2.12	0.95
No sé estudiar las matemáticas	1.81	0.97	1.85	0.94	1.79	0.98
Por mucho que me esfuerce no consigo entender las matemáticas	1.99	0.99	2.10	0.97	1.91	1
Siempre he tenido problemas con las matemáticas	2.30	1.16	2.56	1.25	2.09	1.04
Siempre me parecen difíciles las matemáticas	2.19	1.07	2.39	1.12	2.01	0.99
Soy de esas personas que no nació para aprender matemáticas	2.21	1.18	2.49	1.25	1.97	1.06
Suelo tener dificultades con las matemáticas	2.53	1.07	2.77	1.11	2.32	1
Total	2.20	1.03				

Recordemos que todas las afirmaciones del cuestionario vienen redactadas en negativo, con lo que cabe esperar, cuando poseen buena percepción de su competencia, que los resultados se sitúen por debajo del 2.5, como así ha sido en todas. La afirmación con media más baja es la que hace referencia a que saben estudiar matemáticas, y en este sentido son conocedores que el esfuerzo que realicen les ayudará a entender las matemáticas.

En el análisis por género, observamos que las niñas superan el 2.5 en cuatro afirmaciones. Estas se relacionan con mostrar dificultad con la materia, y decidir lo que tiene que hacer en matemáticas. En cambio, los niños en todas las afirmaciones muestran una media menor que la obtenida globalmente. Por tanto, muestran mayor seguridad sobre su competencia matemática.

Percepción de utilidad

En esta categoría se encuentran las afirmaciones en las que se les pregunta sobre el uso que consideran que tendrán las matemáticas y el papel de las matemáticas en el ámbito escolar (Tabla 5).

Observamos que valoran con un punto por encima de la media tanto la utilidad de la materia como la necesidad de saber matemáticas en todos los ámbitos y, por ello, los estudiantes consideran que se deben estudiar en la escuela. Por otro lado, también es elevada la media de estudiantes que considera que las matemáticas no son para los mejores.

Tabla 5. Percepción de utilidad.

			Niñas		*Niños*	
Afirmación	*Media*	*DT*	*Media*	*DT*	*Media*	*DT*
Aprender matemáticas es para los mejores	1.68	0.84	1.72	0.87	1.64	0.84
Las matemáticas no se deberían estudiar en la escuela*	2.93	0.99	2.91	0.96	2.94	1.04
Las matemáticas no sirven para nada*	3.49	0.87	3.49	0.88	3.49	0.85
Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida	3.51	0.59	3.44	0.76	3.56	0.57
Total	3.31	1.20				

Si analizamos las diferencias por género, observamos que comparten las opiniones dadas, sin apenas diferencias entre las medias de unos y otras.

Diferencias de género significativas

A continuación, pasamos a analizar las respuestas que han dado los estudiantes, que ofrecen diferencias significativas entre las medias separadas por género. Para ello realizamos el estudio del contraste de diferencia de medias con una confianza del 95%, supuesta la independencia de las muestras. Aportamos el valor del estadístico de diferencias de medias del contraste realizado.

Globalmente sólo la percepción de su competencia matemática muestra medias diferentes.

Tabla 6. Categorías por género, globalmente. Estadístico de diferencia de medias significativo.

Categoría	*Niñas*	*Niños*	*Estadístico*
Autoconcepto	3.02	3.17	-1.79
Gusto por las matemáticas	2.33	2.28	0.92
Percep. su poca competencia	2.35	2.07	5.67
Utilidad de las matemáticas	2.19	2.19	0
Total	2.40	2.29	3.33

Esto pone el acento en que en las actitudes hacia las matemáticas, en los estudiantes analizados, en relación con su percepción sobre la competencia ante tareas matemáticas, los niños se muestran más seguros y se sienten capaces de enfrentarse a las tareas matemáticas.

En un análisis de las diferencias de género a cada respuesta dada encontramos 10 respuestas cuyas diferencias son significativas (Tabla 7). La mayoría de ellas en la categoría anteriormente indicada.

Tabla 7. Preguntas con diferencias significativas entre las respuestas de los niños y las niñas.

	Niñas	*Niños*	*Diferencia*	*Estadístico*
Autoconcepto				
Se me da bien calcular mentalmente	2.16	2.93	-0.77	-4.56
Gusto por las matemáticas				
Las matemáticas son un "rollo"	2.23	1.87	+0.36	+1.92
Las matemáticas son una de las asignaturas más aburridas	2.03	1.69	+0.34	+2.18
Si tuviera la oportunidad no estudiaría matemáticas	2.18	1.77	+0.41	+2.17
Percepción de su competencia matemática				
En matemáticas me cuesta trabajo decidir qué tengo que hacer	2.54	2.15	+0.39	+2.21
En matemáticas me quedo con la mente en blanco con frecuencia	2.39	2.08	+0.31	+2.67
Las matemáticas no las entiendo	2.54	2.07	+0.54	+2.67
Siempre he tenido problemas con las matemáticas	2.56	2.09	+0.46	+2.36
Soy de esas personas que no nació para aprender matemáticas	2.39	2.01	+0.38	+2.09
Suelo tener dificultades con las matemáticas	2.49	1.97	+0.52	+2.61

En la categoría de autoconcepto, sólo hay diferencia en una de las afirmaciones, concretamente en la relacionada con el cálculo mental, en el que las niñas no se consideran con esta habilidad.

Acerca del gusto por las matemáticas, las niñas están más de acuerdo con que las matemáticas no son divertidas, llegando incluso a considerar que si pudieran no la estudiarían. Estas afirmaciones son relevantes, pues describen un perfil en el que las niñas empieza a mostrar desinterés por la materia, e incluso consideran la posibilidad de no continuar su formación en este ámbito.

Finalmente, sobre la percepción de su competencia matemática es llamativo que las niñas están más de acuerdo que los niños en estas afirmaciones, que recordemos son todas negativas. Las respuestas que muestran diferencias significativas en las medias obtenidas tienen que ver con la toma de decisiones, con las dificultades de comprensión de la materia o bien, con que han tenido dificultades y que consideran que no han nacido para este aprendizaje. En todas ellas se observa que las niñas tienen una percepción que les puede obstaculizar su aprendizaje y basar en ellos la decisión de elegir estudios posteriores que no incluyan matemáticas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos realizado el análisis de una encuesta realizada a 135 estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria acerca de sus actitudes hacia las matemáticas. Nuestra pregunta de investigación trata de indagar si en estos estudiantes destacan actitudes positivas o negativas que podamos recoger para reflexionar sobre el proceso de enseñanza, y si muestran diferencias entre las respuestas dadas por los niños o las niñas de Educación Secundaria.

Como hemos observado en los resultados de la encuesta realizada, los estudiantes tienen un buen autoconcepto hacia las matemáticas y hacen una buena valoración de su competencia matemática lo que respalda resultados de otras investigaciones anteriores (Perdomo-Díaz, 2018; Roesken, et al., 2011; Tuohilampi et al., 2016), aunque tienen la percepción de que sus profesores creen que no son buenos alumnos y reconocen que suelen tener dificultades con la materia. Dentro de estos aspectos destaca que las niñas afirman tener más dificultades en el entendimiento de la materia, en la toma de decisiones y en su habilidad de cálculo mental presentando diferencias significativas con respecto a los niños. Así, las niñas se responsabilizan de sus éxitos o fracasos, y los niños usan factores externos (Cerezo y Casanova, 2011)

Por otra parte, los encuestados no muestran rechazo a estudiar la materia, pero tampoco muestran un alto entusiasmo por realizar tareas matemáticas, pues no les resultan fáciles de resolver. En concreto, son las niñas las que creen, en mayor medida, que las matemáticas son aburridas y que dejarían de estudiarlas si pudieran elegir, a pesar de que no ponen en duda que las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.

ProyectaMates (García-Alonso, 2020) es un proyecto de formación continua dirigido a los docentes de los estudiantes aquí estudiados. Este estudio nos permite conocer aspectos de las actitudes matemáticas de sus estudiantes a tener en cuenta durante el desarrollo de la formación. Es importante que, como docentes en formación, cuidemos el proceso de enseñanza y aprendizaje de manera que atienda a la diversidad de alumnado que nos encontramos en las aulas buscando la consecución de los objetivos de aprendizaje y ayudando a salvar las dificultades que este proceso pueda ofrecer. Pero no solo debemos tener en cuenta para ello, el dominio cognitivo del alumnado sino también el dominio afectivo matemático, del que hemos analizado ciertos aspectos. Este estudio ha puesto de relieve la necesidad de llevar a cabo actividades y metodologías que, desde una formación de docentes como ProyectaMates, atiendan a la motivación y el interés del alumnado y que sean accesibles a todos. Hemos podido observar que existen diferencias de género en algunos aspectos relacionados con su percepción de la materia, que deben ser atendidos desde temprano. En concreto, se debe fomentar, en mayor medida, la confianza y el interés de las niñas con respecto a las matemáticas. Se hace necesario atender estas diferencias con la finalidad de no acentuarlas ni perpetuarlas y lograr así, la equidad en la educación matemática.

Agradecimiento

ProyectaMates: Proyecto financiado por el Excelentísimo Cabildo Insular de Tenerife.

Referencias

Akin, A., y Kurbanoglu, I. N. (2011). The relationships between math anxiety, math attitudes, and self.efficacy: a structural equation model, *Studia Psyshologica, 53*(3)*,* 263-273.

Asante, K. O. (2012). Secondary students' attitudes towards mathematics. *IFE PsychologIA, 20*(1), 121-133.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias. Características y medición.* Mensajero.

Carmona, C., Sánchez, P., y Bakieva, M. (2011). Actividades extraescolares y rendimiento académico: diferencias en autoconcepto y género. *Revista De Investigación Educativa*, *29*(2), 447-465.

Cerezo, T. y Casanova, P. (2011). Diferencias de género en la motivación académica de los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. *Revista electrónica de investigación psicoeducativa, 2*(1), 97-112.

Frost, L. A., Hyde, J. S. y Fennema, E. (1994). Gender, mathematics performance, and mathematics-related attitudes and affect: A meta-analytic synthesis. *International Journal of Educational Research,* 21, 373-385. Doi: 10.1016/s0883-0355(06)80026-1.

García-Alonso, I. (2020). ProyectaMates: Reflexiones sobre la práctica docente como medio de formación de profesores de matemáticas, *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(60), 177-195.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad, *Educación Matemática, 21*(3), 5-32.

Gómez-Chacón, I. M. (2010). *Matemática Emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories, *Research in Mathematics Education, 14*(2), 137-161.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,* 23, pp. 575-598. Macmillan.

Middleton, J., y Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education* , *30*(1), 65-88. https://doi.org/10.2307/749630.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MECD) (2019). *TIMSS 2019. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*. Secretaría General Técnica.

Palacios, A., Arias, V., y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida, *Revista de Psicodidáctica, 19*(1), 67-91.

Perdomo-Díaz, J. (2018). Autoestima y motivación hacia las matemáticas: Un estudio exploratorio con estudiantes de educación primaria y secundaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F., J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 447-456).

Roesken, B., Hannula, M. S. y Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' views of themselves as learners of mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 43, 497-506.

Rodríguez-Martínez, C. y Blanco, N. (2015). Diferencias de género, abandono escolar y continuidad en los estudios. *Revista Iberoamericana de Educación*, *68*, 59-78.

Sakiz, G., Pape, S. J. y Hoy, A. W. (2012). Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics class rooms?. *Journal of school Psychology*, *50*(2), 235-255.

Tuohilampi, L., Laine, A., Hannula, M. S. y Varas, L. (2016). A comparative study of Finland and Chile: the cultura-depeendent significance of the individual and interindividual levels of the mathematics-related affect. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 14, 1093-1111.

INFLUENCIA DEL TIPO DE TAREA EN EL INTERÉS: RÉPLICA DE UN ESTUDIO EN EL CONTEXTO EDUCATIVO ESPAÑOL[1]

Influence of the type of task on the interest: a replication study in the Spanish educational context

García-Cerdá, C., Ferrando, I.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

Resumen

El interés juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas. Por ello, en este trabajo se ha realizado una réplica de parte del estudio desarrollado en Alemania por Rellensmann y Schukajlow (2017) con el fin de determinar si el tipo de problema incide en el interés de los alumnos, así como si hay diferencias en el rendimiento matemático en función del tipo de problema. Para la realización de esta investigación, se ha adaptado el cuestionario utilizado en el estudio alemán y como se mostrará, los resultados del presente estudio difieren de los obtenidos en Alemania, lo cual confirma el interés de las réplicas de investigaciones. Según los resultados del estudio desarrollado en España, el alumnado muestra un mayor interés por los problemas verbales que por los intramatemáticos, mientras que no se han encontrado diferencias significativas entre los problemas de modelización y los demás.

Palabras clave: *interés, modelización, problemas verbales, problemas intramatemáticos, educación secundaria.*

Abstract

Interest plays an important role in mathematics learning. Therefore, in this paper we replicated part of the study developed in Germany by Rellensmann and Schukajlow (2017) in order to determine whether the type of problem affects students' interest, as well as whether there are differences in mathematical performance depending on the type of problem. The questionnaire used in the German study was adapted. The results of the present study differ from those obtained in Germany, which confirms the interest of replicating research. According to the results of the Spanish study, students are more interested in verbal problems than in intramathematical problems, while no significant differences were found between modelling problems and other problems.

Keywords: *interest, modelling, word problems, intramathematical problems, secondary school*

INTRODUCCIÓN

Estudios recientes relacionados con el impacto de la afectividad sobre el rendimiento matemático muestran que es pertinente preguntarse si la actitud de los estudiantes hacia una determinada actividad matemática depende de las características de la misma y, además, si el rendimiento al abordarla depende o no de la actitud. En esta línea, en el trabajo de Rellensmann y Schukajlow (2017), uno de los objetivos es estudiar cómo influye el grado de relación con la realidad del tipo de problema en el nivel de interés de los alumnos por resolverlos. En este trabajo se toma como punto de partida dicho estudio con el objeto de replicar la parte relativa al interés en el contexto del sistema educativo español. Como se explica en Star (2018), la réplica de estudios en la investigación en educación y, más en particular, en la investigación en educación matemática, no es

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación de Investigación del Plan Nacional de I+D+I, EDU2017-84377-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad / Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). La primera autora agradece la Beca de Colaboración en Departamentos Universitarios para el curso académico 2019/2020 del Ministerio de Educación y Formación Profesional.

García-Cerdá, C. y Ferrando, I. (2021). Influencia del tipo de tarea en el interés: réplica de un estudio en el contexto educativo español. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 295 – 302). Valencia: SEIEM.

habitual. No obstante, diversos autores defienden el interés y la necesidad de replicar estudios: Melhuish (2018) señala que la réplica de trabajos "es una parte vital del método científico a través del cual se crean y se examinan las teorías" (Melhuish, 2018, p. 9). Sin embargo, no se trata de replicar cualquier trabajo sin más, la réplica debe tener interés en sí misma (Star, 2018). En el caso de esta investigación, el interés radica en el cambio de contexto. El estudio original fue llevado a cabo con alumnado de un instituto alemán por lo que cabe preguntarse si los resultados obtenidos son extrapolables al contexto educativo del sistema español. Además, si bien la afectividad es importante, los trabajos centrados en la afectividad en el contexto educativo español son todavía escasos, sobre todo en Educación Secundaria. Por último, la réplica del estudio de Rellensmann y Schukajlow (2017) permitirá evaluarlo de nuevo y proponer, si cabe, mejoras.

El presente trabajo, que se basa en un estudio piloto, tiene como objetivo dar respuesta a las siguientes cuestiones: (1) ¿Existen diferencias en el grado de interés generado por distintos tipos de problemas matemáticos? (2) ¿Hay diferencias en el rendimiento matemático según el tipo de problema propuesto? (3) ¿Cuál es el grado de relación entre el interés mostrado hacia cada tipo de problema y el rendimiento matemático?

MARCO TEÓRICO

Tipos de problemas matemáticos

Niss, Blum y Galbraith (2007) distinguen, en función del grado de relación de la actividad con el mundo real, tres tipos de problemas: problemas verbales, los problemas de modelización y los problemas intramatemáticos. En esta clasificación, se distinguen dos categorías: la que incluye a los problemas relacionados con la realidad y la que no. Los problemas verbales y los problemas de modelización pertenecen a la primera, si bien difieren en el grado en que el contexto real repercute en la resolución. Conviene tener en cuenta que esta relación tiene que ver únicamente con los procedimientos ligados a la resolución, no con la proximidad del contexto real a los estudiantes, no se considerará en este estudio la influencia de la proximidad del contexto del problema a la realidad de los estudiantes en el grado de interés.

Los problemas de modelización presentan una cuestión en relación con una situación real que requiere formular, interpretar y resolver un modelo matemático. Además, hay que validar la respuesta tanto desde el punto de vista matemático como en su propio contexto. Tal y como apunta Barquero (2019), la modelización es de gran importancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, si bien, aunque se han realizado importantes avances en la investigación en el uso de la modelización matemática en España, todavía es necesario trabajar en la introducción de la modelización como práctica efectiva en las aulas (Ferrando, 2019). Los problemas verbales son problemas matemáticos que se formulan en un contexto, pero cuya resolución no requiere considerar las características del contexto del enunciado. Blum y Niss (1991) se refieren a ellos como problemas 'disfrazados', ya que presentan un modelo real y, por lo tanto, se trata de un proceso reducido de desarrollo de un modelo. Por tanto, estos dos tipos de problemas difieren en cuanto al grado de inclusión de elementos de realidad en su proceso de resolución. La resolución de los problemas de modelización requiere considerar un mayor número de elementos del contexto real.

Los problemas intramatemáticos son aquellos en cuyo enunciado no se incorpora ningún elemento extramatemático, se resuelven de manera directa eligiendo el proceso matemático adecuado. Cabe destacar que no se trata de priorizar un tipo de problema sobre otro, se complementan entre ellos. Como bien se indica en Groβe (2014), para resolver problemas relacionados con la realidad, previamente es necesario dominar contenidos puramente matemáticos. No se trata, por tanto, de favorecer un tipo de problema sobre otro, ni de defender que hay problemas más importantes que otros; en función de aquello que se quiera trabajar convendrá trabajar un tipo u otro de problema.

El interés en la actividad matemática como condicionante en el proceso de aprendizaje

En sus estudios sobre afectividad, McLeod (1989) identifica tres dominios claves: creencias, actitudes y emociones, ordenadas en un grado de intensidad creciente y de estabilidad decreciente. En el presente trabajo nos centraremos en un componente de las actitudes: el interés (Gómez-Chacón, 2000). El interés es un estado psicológico que permite describir una relación entre una persona y un objeto (Hidi y Renninger, 2006), Dicha relación se establece cuando una persona demuestra afecto positivo hacia un determinado objeto y reconoce el valor del mismo objeto, surgiendo una motivación intrínseca hacia este por parte de la persona (Renninger y Hidi, 2016).

Según Schoenfeld (2010) hay cuatro categorías necesarias y suficientes para comprender la capacidad de resolución de problemas matemáticos: los conocimientos matemáticos de los que se dispone, las estrategias de resolución de problemas o heurísticos que se tienen para abordar problemas que, a priori, no saben resolver, los aspectos metacognitivos relacionados con la gestión de los recursos para la resolución de problemas -incluido el tiempo del que se dispone-, los aspectos afectivos hacia las matemáticas. Dado que el interés se manifiesta, entre otros, al demostrar afecto positivo, está relacionado con la afectividad y, por ende, con la capacidad de resolución de problemas. En efecto, investigaciones como la desarrollada por Schiefele, Krapp y Winteler (1992) muestran que, especialmente en matemáticas, considerada una asignatura difícil, determinados aspectos actitudinales, como el interés, son importantes en los procesos educativos.

Según Rellensmann y Schukajlow (2017), se diferencian dos tipos de interés: el interés individual y el interés situacional. El interés individual es relativamente duradero en el tiempo, mientras que el interés situacional es característico de una situación particular, puede aparecer si un determinado problema capta la atención del alumno y, por tanto, es temporal. Es posible pasar del interés situacional al interés individual: un alumno puede comenzar desarrollando un interés situacional por un determinado problema, y éste puede mantenerse hasta llegar a convertirse en un interés individual estable por las matemáticas. Por tanto, resulta pertinente estudiar el interés generado por diferentes actividades matemáticas y, en particular, el grado de interés que muestra el alumnado frente a los tres tipos de problemas matemáticos introducidos previamente. Así, el presente estudio se centra en analizar si existen diferencias en relación con el interés mostrado por los y las estudiantes en los problemas intramatemáticos, verbales y de modelización.

METODOLOGÍA

Muestra

La muestra está formada por dos grupos naturales de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria de un instituto público de la ciudad de Valencia. En total, 51 alumnos se enfrentaron al cuestionario, pero al realizarse en dos sesiones, algunos alumnos faltaron a una de las dos sesiones y, por ello, al final se contabilizaron los resultados de 44 estudiantes. Se trata de una muestra que, por su tamaño y su carácter no puede dar lugar a obtener resultados generalizables a la población de estudiantes de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria, pues, efecto, se trata de un estudio exploratorio cuyos resultados tendrán que ser revisados una vez completados con una muestra más amplia.

Cuestionario

El punto de partida es el cuestionario utilizado en Rellensmann y Schukajlow (2017) que constaba de 35 preguntas previas sobre aspectos afectivos ligados a las matemáticas y 12 problemas relativos al teorema de Pitágoras que los alumnos debían resolver seguidos, en cada caso, de cinco preguntas para analizar, entre otros aspectos, el interés generado por un determinado problema. Para cuantificar el interés generado por cada problema, el alumnado, tras haber trabajado cada problema, debía cuantificar del 1 a 5 la veracidad de la afirmación ‘‘Me ha parecido interesante trabajar en este problema’’ siendo 1 nada cierto y 5 muy cierto. Cabe señalar, que de los 12 problemas de los

que constaba el cuestionario[2], había 4 de cada tipo (modelización, verbales e intramatemáticos). Para implementar el cuestionario, fue necesario realizar una adaptación del mismo. La adaptación del cuestionario se llevó a cabo, en un primer momento, en tres fases:

- Adaptación de los enunciados de los problemas para ajustarlos a un contexto cercano. En efecto, el cuestionario original fue diseñado para estudiantes de un grado 9 (equivalente a 3º de ESO) de un centro alemán y, en algunos casos, los contextos no eran adecuados para desarrollar la experiencia en un centro de la ciudad de Valencia. Los cambios fueron muy variados, en algunos ejercicios tan sólo hubo que modificar el nombre de alguna marca a la que se hacía referencia o nombres propios que aparecían en los enunciados, pero en otros hubo que buscar contextos análogos propios o directamente proponer problemas alternativos por no ser posible la adaptación.
- Traducción, adaptación lingüística al castellano y retrotraducción para confirmar la equivalencia de las formulaciones de los enunciados y los ítems de afectividad.
- Organización del cuestionario para llevarlo a cabo en dos sesiones de 45 minutos.

A continuación, se comenta un ejemplo de cada uno de los tres tipos de problemas planteados en el cuestionario.



Figura 1. Problema original de modelización y su adaptación traducida al castellano

En la Figura 1 se muestra el enunciado de uno de los problemas de modelización que requirieron una adaptación. En efecto, el enunciado original se refiere a una estación eléctrica situada cerca del instituto y, dado que no era posible adaptar directamente ese problema al contexto del centro valenciano en que se desarrolló la experiencia, se optó por plantear un problema alternativo en el cual los procedimientos matemáticos involucrados son equivalentes al original.



Figura 2. Problema categorizado como problema verbal (original y su adaptación traducida al castellano)

[2] El cuestionario completo puede consultarse en este enlace: https://ir.uv.es/2onaf4P

En la Figura 2 se muestra uno de los problemas categorizados como verbales. En este caso la adpatación solo requirió cambiar los nombres de las marcas de los televisores. Como se puede observar, se trata de un problema en el que el contexto no influye en el proceso de resolución.

Finalmente, en la Figura 3 se incluye uno de los cuatro problemas intramatemáticos, en este caso no hubo que hacer ninguna modificación respecto al enunciado original.

En el presente estudio nos limitaremos analizar las respuestas al ítem de interés y las respuestas a los 12 problemas planteados. En la siguiente sección se presentan los detalles del análisis.

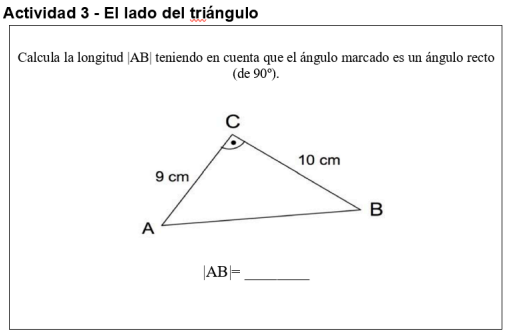


Figura 3. Problema categorizado como intramatemático

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Una vez recopilados los datos se ha realizado un análisis mixto cuantitativo (en los ítems de escala Likert relativo al interés) y cualitativo (de las respuestas a cada uno de los problemas propuestos). En esta sección se presenta tanto la metodología de análisis como los resultados obtenidos para dar respuesta a los tres objetivos de este estudio: interés generado en cada tipo de problema, el rendimiento matemático según el tipo de problema y la relación entre interés y rendimiento.

Interés generado por la resolución de cada tipo de problema

Para obtener información sobre el grado de interés generado por cada uno de los tres tipos de problema se ha obtenido, para cada alumno, la media de las 4 puntuaciones asignadas a la afirmación "Me ha parecido interesante trabajar en este problema'' para cada tipo de problema. En la Figura 4 se presentan los resultados en un diagrama de cajas que permite identificar ciertas diferencias en el nivel de interés generado por los distintos tipos de problemas.

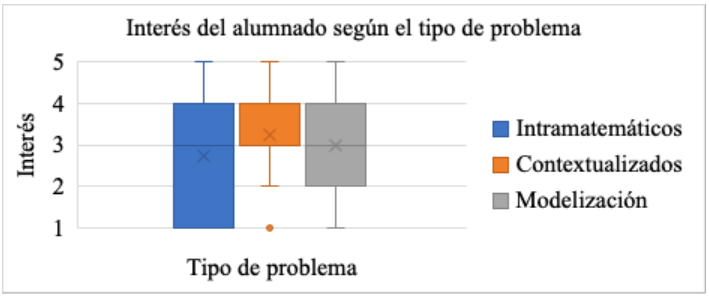


Figura 4. Diagrama de cajas del interés en función del tipo de problemas

Con el objeto de determinar si las diferencias son significativas, se ha realizado un contraste de hipótesis. En base a la prueba Shapiro-Wilk, no se puede asumir la normalidad de los datos relativos a los problemas intramatemáticos (p-valor = 0.02618). Como consecuencia, se realiza una prueba no paramétrica para datos apareados (test de Friedman) que permite estudiar si hay diferencias entre los tipos de problemas en relación con el interés, concluyendo con un 95% de

fiabilidad, que hay diferencias en el interés generado por la resolución de al menos dos tipos de problemas (p-valor = 0.0004983). Finalmente, el test de Nemenyi permite inferir que los problemas intramatemáticos son considerablemente menos interesantes que los verbales para los alumnos (p-valor = 0.0015). No obstante, no se puede afirmar que haya diferencias significativas en relación con el interés entre los problemas de modelización y los otros tipos.

Rendimiento en función del tipo de problema

Para medir el rendimiento se ha realizado un análisis cualitativo de las respuestas. Se puntuó con un 0 o un 1 siguiendo los criterios de Rellensmann y Schukajlow (2017): si el planteamiento, entendido como la descripción de los procedimientos que conducen a resolver el problema, era correcto -aunque no se incluyesen determinados elementos de realidad o hubiese errores posteriores de cálculo-, se puntuó con un 1, en caso contrario, con un 0. La gráfica de la Figura 5 ofrece una visión general del rendimiento y muestra diferencias aparentes entre tipos de problemas.

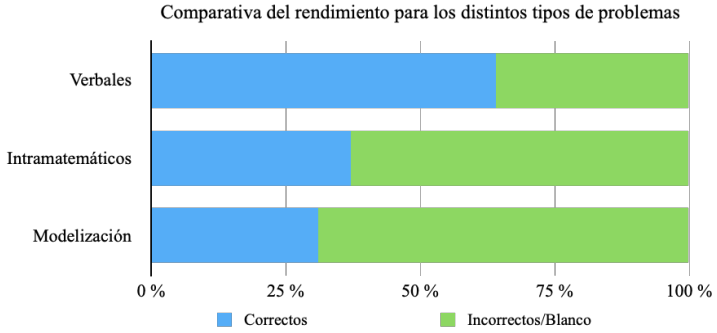


Figura 5. Gráfica comparativa del rendimiento

Con el objeto de determinar si las diferencias son significativas, se ha realizado un contraste de hipótesis. El test de Shapiro-Wilk pone de relieve la conveniencia de realizar una prueba no paramétrica. A través del test de Friedman se detectan diferencias de rendimiento entre, al menos, dos tipos de problemas (p-valor = $9{,}004 \times 10^{-8}$). El test de Nemenyi muestra diferencias significativas de rendimiento entre problemas de modelización y verbales (p-valor = $3{,}7 \times 10^{-6}$) y entre problemas intramatemáticos y verbales (p-valor = 0.00012). No obstante, no hay diferencias estadísticas significativas de rendimiento entre problemas de modelización e intramatemáticos (p-valor = 0.73592). Se deduce que el rendimiento matemático en los problemas verbales es significativamente mejor que en el resto, mientras que en los otros dos tipos es similar.

Relación entre el rendimiento matemático y el interés

Para terminar con el análisis de los resultados se estudia la relación entre el rendimiento y el interés. Se realiza un contraste de hipótesis para todos los tipos de problemas que muestra que sí hay relación entre las dos variables, en todos los casos por ser p-valor $< \alpha = 0.05$. Para medir el sentido y la magnitud de la relación se obtiene el coeficiente de correlación de Spearman: en todos los casos, el coeficiente es positivo, por lo que la relación es directa, si bien los valores obtenidos muestran una relación media-baja. No obstante, en los problemas de modelización el coeficiente es más alto por lo que son aquellos en los que la relación entre el rendimiento y el interés es mayor.

CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo se ha constatado que hay evidencia de que los alumnos tienen mayor interés por los problemas verbales que por los intramatemáticos. Contrariamente, no se han encontrado diferencias significativas entre los problemas de modelización y los demás. El rendimiento en problemas verbales es significativamente mejor que el de los problemas intramatemáticos y de modelización. No se han encontrado diferencias significativas entre el rendimiento de los problemas intramatemáticos y de modelización. Al igual que Köller, Baumert y

Schnabel (2001), el presente trabajo muestra que existe una relación moderada entre el rendimiento matemático y el interés. Convendrá profundizar en este análisis en la segunda fase de esta investigación, de forma que podamos confirmar o refutar los resultados derivados del primer pilotaje del cuestionario.

La comprensión lectora juega un papel importante en la interpretación de enunciados auténticos de problemas matemáticos (Vicente y Manchado, 2016). El bajo rendimiento matemático en los problemas de modelización podría estar ligado a un bajo nivel de comprensión lectora. Sin embargo, también puede explicarse por la falta de actividades de modelización en las aulas (Ferrando, García-Raffi y Sierra, 2015). A lo largo de la educación primaria el razonamiento matemático está prácticamente ausente y se tiende a enseñar a resolver problemas rutinarios. Los estudiantes están acostumbrados, en los problemas verbales, a discriminar la información útil para abordar el problema, esto explicaría el mejor rendimiento en problemas verbales (rutinarios) que en intramatemáticos (Vicente, Rosales, Chamoso y Múñez, 2013).

Estos resultados difieren de los de Rellensmann y Schukajlow (2017). Puede que esto se deba a la manera de trabajar las matemáticas en los sistemas educativos español y alemán. En efecto, en Alemania hay una larga tradición en el uso educativo de actividades de modelización. De hecho, como se indica en Greefrath (2020), la modelización matemática ha sido incluida como competencia en los estándares educativos del sistema educativo alemán y es habitual su uso en el aula. En España los problemas verbales son habituales y, si bien la modelización matemática aparece en el currículo, los problemas de formulan, generalmente, en contextos de datos no realistas, tal y como se confirma en el análisis desarrollado por López y Contreras (2014).

El presente trabajo es un estudio piloto y, como tal, presenta limitaciones y plantea líneas de investigación futuras. En efecto, se ha contado con una muestra poco representativa tanto por número de alumnos como condición, todos los alumnos estudiaban en el mismo instituto de la misma ciudad. De hecho, se pretende reproducir el estudio realizado con una muestra mayor de estudiantes de otro instituto del mismo entorno, aunque con otras características. Esto permitirá contrastar los resultados y revisar las conclusiones del presente trabajo. Por otro lado, cabe señalar que no se ha tenido en cuenta determinados errores en las resoluciones de los estudiantes a la hora de valorar el rendimiento matemático en este trabajo. Por tanto, el análisis de los errores de los estudiantes -incluso cuando el planteamiento está bien- o, incluso, el análisis de la manera de abordar los problemas serán claves completar los resultados del presente estudio o dar lugar a futuras líneas de investigación. Además, el instrumento utilizado ha permitido recoger información sobre otros aspectos afectivos tales como la autoeficacia, disfrute, importancia y aburrimiento, que serán analizados más adelante.

Referencias

Barquero, B. (2019). Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 19-22). Valladolid: SEIEM.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII*I (pp. 43-64). Valladolid: SEIEM.

Ferrando, I., García-Raffi, L. M. y Sierra, L. (2015). A proposal of action to introduce modelling in secondary classroom. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *20*, 47-60.

Greefrath, G. (2020). Mathematical modelling competence. Selected current research developments. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (17), 38-51. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.303

Groβe, C. S. (2014). Learning to solve story problems—supporting transitions between reality and mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, *29*(4), 619–634. https://doi.org/10.1007/s10212-014-0217-6

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático* (Vol. 83). Madrid: Narcea Ediciones.

Hidi, S. y Renninger, K. A. (2006). The four phase model of interest development. *Educational Psychologist*, *41*(2), 111-127. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_4

Köller, O., Baumert, J. y Schnabel, K. (2001). Does Interest Matter? The Relationship between Academic Interest and Achievement in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(5), 448-470. https://doi.org/10.2307/749801

López, E. M. y Contreras, L. C. (2014). Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de geometría plana. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 425-434). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

McLeod, D. B. (1998). The role of affect in mathematical problem solving. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: a new* perspective (pp. 20-36). New York: Springer-Verlag.

Melhuish, K. (2018). Three conceptual replication studies in group theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(1), 9-38. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.1.0009

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. L. (2007). Introduction. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 1-32). New York: Springer.

Rellensmann, J. y Schukajlow, S. (2017). Does students' interest in a mathematical problem depend on the problem's connection to reality? An analysis of students' interest and pre-service teachers' judgments of students' interest in problems with and without a connection to reality. *ZDM Mathematics Education*, *49*(3), 367-378. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0819-3

Renninger, K. A. y Hidi, S. (2016). *The power of interest for motivation and engagement*. New York: Routledge.

Schiefele, U., Krapp, A. y Winteler, A. (1992). Interest as a predictor of academic achievement: A meta-analysis of research. En K. A. Renninger, S. Hidi y A. Krapp (Eds.), *The role of interest in learning and development* (pp. 183-212). Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York, NY: Routledge.

Star, J. R. (2018). When and why replication studies should be published: guidelines for mathematics education journals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(1), 98-103. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.1.0098

Vicente, S. y Manchado, E. (2016). Arithmetic word problem solving. Are authentic word problems easier to solve than standard ones? / Resolución de problemas aritméticos verbales. ¿Se resuelven mejor si se presentan como problemas auténticos? *Journal for the Study of Education and Development*, *39*(2), 349-379. https://doi.org/10.1080/02103702.2016.1138717

Vicente, S., Rosales, J., Chamoso, J. M. y Múñez, D. (2013). Analyzing educational practice in Spanish Primary Education mathematics classes: A tentative explanation for students' mathematical ability. *Culture and Education*, *25*(4), 535-548. https://doi.org/10.1174/113564013808906799

ENSEÑANZA ONLINE EN DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS IMPUESTA POR LA COVID-19: VISIÓN DEL ALUMNADO UNIVERSITARIO

Online teaching in Didactics of Mathematics imposed by COVID-19: the view of university students

Gómezescobar, A.

Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

La inclusión de las TIC en la docencia resulta una práctica habitual hoy en día, pero el grave impacto de la COVID-19 provocó que prácticamente la mitad del curso 2019/2020 tuviera lugar online. Para conocer la valoración acerca de la docencia y evaluación durante este periodo en el ámbito de Didáctica de las Matemáticas, se pide opinión a 93 estudiantes de Grado de Maestro en Educación Primaria. Este alumnado manifiesta una mayor asistencia a las clases online, sin embargo, prefiere tanto docencia como evaluación presencial. Destacan como positivo de la docencia presencial el uso de materiales manipulativos, así como la interacción con los compañeros y con el docente. De la docencia online valoran el tiempo ahorrado en desplazamientos y la autonomía en el aprendizaje. La evaluación presencial es valorada por su adecuación en tiempos, mientras que la evaluación online es considerada como más sencilla.

Palabras clave: *COVID-19, docencia online, educación a distancia, didáctica de las matemáticas, formación de maestros*

Abstract

The inclusion of ICT in teaching is nowadays a usual practice, but the severe impact of COVID-19 meant that almost half of the 2019/2020 course took place online. In order to find out their assessment of the teaching and evaluation during this period in the field of Mathematics Didactics, 93 students of the Degree in Primary Education were asked for their opinion. These students show greater attendance at online classes, however, they prefer both face-to-face teaching and assessment. They highlight the use of manipulative materials, as well as the interaction with classmates and the teacher, as positive aspects of face-to-face teaching. Online teaching is valued for the time saved in travelling and the autonomy in learning. The face-to-face assessment is valued for its time adequacy, while the online assessment is considered to be easier.

Keywords: *COVID-19, online teaching, e-learning , didactics of mathematics, teacher training*

INTRODUCCIÓN

La pandemia generada por la COVID-19 ha provocado una crisis no solo sanitaria y económica, sino también educativa, afectando a la mitad del curso académico 2019-20. Ante esta situación, los gobiernos, bajo el lema *no dejar ningún estudiante atrás* promovieron políticas para que la Educación Superior pudiera seguir adelante adoptando una educación a distancia (UNESCO, 2020). Prácticamente de la noche a la mañana hubo que abandonar el modelo de docencia presencial para convertirlo en un modelo íntegramente online, planteando un desafío no vivido hasta el momento.

Términos como *flipped classroom* o *m-learning* son conocidos y parcialmente utilizados en entornos educativos. Sin embargo, esta familiaridad, ¿implica la adaptación inmediata del

Gómezescobar, A. (2021). Enseñanza online en didáctica de matemáticas impuesta por la COVID-19: visión del alumnado universitario. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 303 – 310). Valencia: SEIEM.

paradigma de enseñanza presencial a enseñanza online al que obligó la pandemia? Se plantea como objetivo del presente trabajo recoger y analizar la opinión de los estudiantes acerca de la docencia y evaluación online en el contexto de la asignatura de Didáctica de Matemáticas, con el fin de mejorar la práctica docente en posibles escenarios futuros.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) se ha convertido en una práctica habitual en la docencia. La utilización de foros de discusión online (Rojas, Fernández y Llinares, 2018; Roig, Llinares y Penalva, 2010; Montes et al., 2015), videoconferencias vía Skype (Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez, 2016), herramientas de programación como Scratch (Jorge-Pozo, Jiménez-Gestal y Murillo, 2017), materiales generalmente manipulativos, como el ábaco, pero en su versión online (De Castro y Palop, 2019) o la metodología *flipped learning* (Martín y Campión, 2016; Martín y Tourón, 2017; Sacristán San Cristóbal, Martín, Navarro Asensio y Tourón Figueroa, 2017; Sánchez-Cruzado, Sánchez-Compaña y García-Pardo, 2017) componen una serie de herramientas utilizadas en docencia presencial combinada con actividades de naturaleza virtual. Los resultados de estos estudios señalan el enriquecimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje a través el uso de las TIC.

Concretamente, los trabajos de Sacristán et al. (2017) y Martín y Campión (2016), mediante una adaptación del cuestionario de Driscoll, entre otras herramientas, concluyen que la enseñanza a través de un entorno online obtiene un mejor rendimiento del alumnado y un aumento de su motivación. Además, Martín y Tourón (2017) añaden que este tipo de enseñanza propicia un favorecimiento de las denominadas competencias del siglo XXI o las 6C's: Carácter, Comunicación, Colaboración, Ciudadanía, Pensamiento Crítico y Creatividad. Sin embargo, estos autores acusan ciertas carencias en la alfabetización funcional del alumnado en cuanto al uso de la tecnología digital para la mejora del aprendizaje. Es cierto que las TIC suelen permitir cierta adaptación al ritmo individual, pero esto requiere disciplina por parte del alumnado que la usa, sin embargo, en este sentido, Martín y Campión (2016) señalan la escasez de experiencias de autonomía en el aprendizaje que ha tenido el alumnado cuando llega a la universidad.

Pero el punto de mira acerca del aprendizaje no debe centrarse solo en el alumnado, sino también en el profesorado. En lo referente a la crisis educativa provocada por la pandemia, Esteve y Alsina (2020) señalan que el camino fácil para la Educación Superior es sustituir la docencia presencial por la docencia a través de una pantalla en la que la instrucción directa sustituya al aprendizaje por indagación, sin tener en cuenta el aprendizaje autónomo del alumnado. Ante esto, Esteve y Alsina (2020) proponen que el apoyo del profesorado universitario, tanto e modalidad online, como presencial, se fundamente en tres cuestiones interrelacionadas: el fomento de la agencia docente; las actividades de tipo proléptico o actividades que representen un reto cognitivo para los estudiantes y les empujen a tomar decisiones fundamentadas; y la mediación conceptual y social en el desarrollo de la agencia docente.

En la práctica educativa durante el estado de alarma, para no tener que arriesgar la integridad física de la comunidad educativa, la modalidad online es prácticamente la única oportunidad para dar continuidad al proceso educativo (Zambrano-Orellana y García-Vera, 2021). Sin embargo, volviendo a las actuaciones del profesorado, el alumnado acusa una mayor carga de trabajo en forma de tareas y trabajos, los cuales incluso sustituyen las clases online. Y cuando estas clases online tienen lugar, no suelen captar la atención del alumnado, resultan monótonas y no les motivan (Cifuentes-Faura, 2020).

MÉTODO

Participantes

Intervienen voluntariamente en el estudio 93 estudiantes de 2º de Grado de Maestro en Educación Primaria de la Facultad de Educación de Toledo (UCLM), matriculados en la asignatura Didáctica de la Geometría y la Medida. Por tanto, se trata de un muestreo no probabilístico por conveniencia.

Instrumento

El instrumento utilizado es un cuestionario online donde, a final de curso, cada estudiante debe valorar primero a través de 8 ítems su grado de asistencia, participación y preferencia por la docencia y evaluación presencial (antes de la declaración de estado de alarma) y online (durante el estado de alarma). Para ello se emplea una escala Likert de 1 a 5. Después se plantean cuatro preguntas abiertas en las que se pide indicar aspectos positivos de la docencia y evaluación tanto presencial como online (Ejemplo: *¿Qué aspectos positivos le encuentras a la docencia presencial con respecto a la docencia online?*). Estas preguntas complementan los ítems anteriores y son validadas a través de una lista de cotejo. Por último, se pide puntuar de 1 a 5, los 21 ítems del cuestionario de Driscoll seleccionados y traducidos por Martín y Campión (2016), los enunciados de los ítems pueden consultarse en la sección *Resultados y discusión*. La consistencia interna del cuestionario se mide mediante el alfa de Cronbach, obteniendo un valor de ,872.

Procedimiento

Durante la declaración del estado de alarma que tuvo lugar en marzo de 2020, la docencia presencial se reemplazó por docencia online mediante la plataforma TEAMS. Cada día de clase en el horario habitual, el docente creaba una sesión a la que se unía el alumnado. El cambio de modalidad docente hizo necesaria la adaptación de la evaluación fijada inicialmente por la guía didáctica de la asignatura Didáctica de la Geometría y la Medida, se optó por no incluir más actividades evaluables de las que estaban previstas, sino que se mantuvieron las mismas que se fijaron al inicio de curso, pero restando peso a la evaluación individual (antiguo examen presencial) y aumentando el peso del trabajo grupal. Esta configuración intenta evitar la sobrecarga de trabajo que se acusa a menudo en la enseñanza online (Cifuentes-Faura, 2020), la cual recomienda medir Sangrá (2020) en el decálogo para la mejora de la enseñanza online.

El trabajo grupal consistía en la elaboración y presentación de una propuesta de secuencia didáctica para un contenido de Geometría y/o Medida para un curso determinado. Cada grupo debía investigar las dificultades que tenía el alumnado de Educación Primaria en la adquisición del contenido que se le había asignado y elaborar y presentar la propuesta al resto de compañeros. Cada grupo, por tanto, se convertía en *experto* en la materia, por lo que, en este sentido, se presentaba un modelo parcialmente basado en la metodología *flipped learning*.

La prueba individual se realizó a través de la plataforma Moodle y constó de un test de 25 preguntas, 2 problemas asignados aleatoriamente de una batería de 30 problemas y otras 2 preguntas de didáctica asignadas también aleatoriamente de una batería de 30 preguntas. Para cada una de las partes, test, problemas y didáctica, el alumnado disponía de 30 minutos para su resolución. Se dejaba un tiempo extra de 10 minutos para fotografiar la tarea, pasarla a PDF y enviarla. Los tiempos se estimaron suficientes, ya que en la primera prueba de progreso que el alumnado realizó en diciembre presencialmente, se plantearon 8 preguntas que tenían que resolver en una hora. Durante la ejecución de la parte didáctica, hubo una caída masiva de la plataforma Moodle, por lo que se amplió el tiempo de entrega de la tarea.

Tras la experiencia en la docencia y evaluación online, el alumnado completa el cuestionario referido en el apartado *Instrumento*.

Análisis estadístico

Para el análisis de datos se utiliza un modelo mixto que ayuda a complementar la compresión de la problemática. Para el análisis cualitativo se utiliza la herramienta MAXQDA y para el cuantitativo SPSS v.26. Se comprueba mediante el test de Kolmogorov-Smirnov que las variables siguen una distribución no normal, por lo que se utilizan pruebas de contraste no paramétricas, el test de Wilcoxon, puesto que las muestras están relacionadas al tratarse de respuestas comparadas de cada sujeto.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Asistencia, participación y preferencias

La tabla 1 muestra la media, desviación estándar y el resultado del test de Wilcoxon sobre asistencia, participación y preferencia por la docencia y evaluación presencial y online de la muestra. Se observan diferencias de medias para la asistencia, la preferencia por la docencia y por la evaluación, no encontrándose tales diferencias en la participación durante el desarrollo de las clases. Se deduce, por tanto, que el alumnado de la muestra considera que asiste más cuando la docencia es online; sin embargo, prefiere las clases y evaluaciones presenciales. La preferencia del alumnado por la docencia presencial también se manifiesta en el trabajo de Santos et al. (2020), estos estudiantes consideran que la docencia online no es igual de eficaz que la docencia presencial, pero que esto también depende del profesorado y de la metodología empleada. Estos estudiantes no piensan que vaya a haber un cambio de paradigma en la docencia a corto-medio plazo y, de hecho, así lo prefieren.

Tabla 1. Media, desviación típica, M (DT), y test de Wilcoxon, Z, para la asistencia, participación y preferencia por docencia y evaluación presencial y online

	M (DT) Presencial	M (DT) Online	Z
Asistencia	4,14 (1,15)	4,61 (0,78)	Z = -3,82, p < ,00
Participación	3,17 (1,13)	3,09 (1,17)	Z = -,88, p < ,38
Preferencia por la docencia	4,01 (1,11)	2,98 (1,22)	Z = -4,40, p < ,00
Preferencia por la evaluación	3,85 (1,20)	3,15 (1,13)	Z = -2,96, p < ,00

Valoración de la docencia presencial

En la pregunta abierta *¿Qué aspectos positivos le encuentras a la docencia presencial con respecto a la docencia online?* varios estudiantes utilizan la palabra *mejor* comparando este tipo de docencia con la docencia online. La palabra *profesor/a* aparece también en algunas de las respuestas, haciendo alusión a la comunicación más directa y fluida con el docente y a la resolución inmediata y mejor comprensión de las dudas planteadas en persona. El alumnado considera que comprende mejor los problemas matemáticos a través de *pizarra y tiza*. Paralelamente, en el trabajo de Cifuentes-Faura (2020) el alumnado del grado de Economía también hacía alusión a que le costaba seguir el ritmo de las clases online durante la pandemia, haciéndose estas clases bastante largas y desconectando por momentos. Así mismo, el autor recoge el agobio y la frustración de los estudiantes cuando éstos no reciben cierta atención o cuando no tienen la seguridad de poder contactar con el docente. Parece que el alumnado universitario depende en mayor medida de las explicaciones del docente que del material que se proporciona en la plataforma de la asignatura, lo que reduce su nivel de independencia de su aprendizaje.

Además de valorar la interacción con el docente, el alumnado de la muestra también hace alusión a la interacción presencial con los compañeros. Esta valoración positiva respecto a la interacción tanto con el docente, como con los compañeros, aparece destacada también en el trabajo de Santos et al. (2020). En el estudio de Martín y Tourón (2017), los ítems relacionados con la interacción entre compañeros son los que menores diferencias estadísticas obtienen entre el grupo que experimenta *flipped learning* y el grupo en el contexto de clases convencionales. Los autores

sugieren que puede que el perfil de alumnado esté poco acostumbrado a trabajar en equipo con sus iguales. Sin embargo, parece que, en el presente estudio, el alumnado valora positivamente las aportaciones de sus iguales en el contexto de su aprendizaje presencial, tal vez el contexto de confinamiento y el deseo de contacto cara a cara influyera en esta valoración.

Otra de las palabras que aparece referida son los *materiales*. Los y las estudiantes destacan los beneficios que les reporta la experimentación con el material manipulativo durante las clases presenciales, algo que ya manifestaban informalmente durante estas sesiones. Se refuerza, por tanto, la importancia del uso del material no solo con alumnado de escolarización básica, sino también universitario (Garrido-Martos, Franco-Guijar, González-Calvín, Morand y Ruiz-Rodríguez 2019).

La *atención* y la *visualización* son otros de los aspectos que destaca el alumnado como positivos de la docencia presencial. Estos términos podrían estar relacionados con el hecho de adquirir y mantener unos horarios, lo cual valora favorablemente en el segundo lugar para la docencia presencial el estudiantado del estudio de Santos et al. (2020).

Valoración de la docencia online

En cuanto a la pregunta abierta *¿Qué aspectos positivos le encuentras a la docencia online con respecto a la docencia presencial?*, a pesar de que la pregunta se formula en términos positivos, son 9 los estudiantes que contestan *ninguno*. Por otro lado, varias respuestas hacen referencia al *tiempo*, la mayoría refiriéndose al de traslado a la facultad. El *ritmo* es otro de los factores que el alumnado valora en este tipo de enseñanza. *Autonomía*, *comodidad* o *libertad* son literalmente otros aspectos que el alumnado valora positivamente. La autonomía en el aprendizaje aparece como el tercer término más frecuente en el análisis cualitativo para el grupo que experimenta la docencia en *flipped learning* en el estudio de Martín y Tourón (2017). Parece que el alumnado valora positivamente el hecho de marcarse su propio ritmo en el proceso de aprendizaje.

Por último, cabe destacar que el alumnado no hace alusión a un incremento de carga de trabajo referido en estudios previos cuando el modelo es online (Cifuentes-Faura, 2020), pues, como se indica en el apartado *Procedimiento*, se tuvo especial cuidado en no aumentar el número de tareas, sino en aumentar el peso a las tareas ya planteadas.

Valoración de la evaluación presencial y online

De la evaluación presencial, a la cual hacía referencia la pregunta *¿Qué aspectos positivos le encuentras a la evaluación presencial con respecto a la evaluación online?*, el alumnado destaca la adecuación del *tiempo* para la realización de estas pruebas y la presencia del *profesor/a* para la resolución inmediata de *dudas* durante la ejecución de la prueba. En varias respuestas se hace alusión a problemas de conexión, pues hubo una caída del sistema durante el desarrollo de una de las pruebas. Por último, la ausencia de *presión* es otro de los aspectos positivos que valora el alumnado en la evaluación presencial.

Respecto a la evaluación online (*¿Qué aspectos positivos le encuentras a la evaluación online con respecto a la evaluación presencial?*), el alumnado nuevamente alude al *tiempo*, pero esta vez en su sentido peyorativo, consideran que el tiempo fue insuficiente para la realización de la prueba. Admiten que su nivel de *nervios* es menor, puesto que generalmente se contagian del nerviosismo del resto de compañeros/as y que en este tipo de pruebas no es tan necesario estudiar o memorizar. Hacen alusión literalmente a la *facilidad*, la *sencillez*, la *comodidad* y la *flexibilidad* de este tipo de pruebas. Tal vez el hecho de disponer del material de estudio aporta cierta tranquilidad al alumnado, a pesar de que en las pruebas no se pregunta por aspectos teóricos, sino por su aplicación. Cierto es que el tipo de preguntas utilizadas en las pruebas online es de carácter mucho más concreto.

Por último, cabe destacar que, generalmente el contenido de las respuestas alude únicamente a los exámenes tanto presenciales como online, parece que el alumnado está considerando que solo se les evalúa con este tipo de pruebas, ya que ninguna de las respuestas hace alusión al trabajo grupal de la asignatura.

Cuestionario de Driscoll

Tras las preguntas abiertas, se planteaban algunos ítems extraídos del cuestionario de Driscoll, traducido por Martín y Campión (2016), la tabla 2 recoge las medias y desviaciones típicas de las respuestas de la muestra. Destacan como mejor valorados el hecho de utilizar la tecnología digital para aprender, la disposición de una mayor autonomía de su aprendizaje y posibilidad de trabajar a su propio ritmo y el acceso a materiales y contenidos de aprendizaje. Recordemos que la valoración positiva de la autonomía y el ritmo de aprendizaje eran ítems que aparecían en las preguntas abiertas sobre la docencia online. Así mismo, el alumnado, al igual que en los trabajos de Sacristán et al. (2017) y Martín y Campión (2016) reconoce que la inversión de tiempo es mayor con la metodología online que con la metodología tradicional. Esto contrarrestaría el tiempo que admiten ahorrar en los desplazamientos a la facultad cuando las clases son online en lugar de presenciales.

Tabla 2. Media y desviación típica M (DT) de los ítems del cuestionario de Driscoll

Ítem	M (DT)
Mis resultados de aprendizaje se han incrementado	3,01 (1,08)
Dispongo de mayor autonomía de mi aprendizaje	3,82 (,93)
He mejorado mi proceso de aprendizaje	3,17 (1,13)
He trabajado más mi expresión oral o escrita	3,24 (1,20)
He incrementado mi creatividad	3,12 (1,23)
He aumentado mi motivación	2,57 (1,17)
He podido autoevaluar mi proceso de aprendizaje	3,34 (1,00)
Se dispone de un clima facilitador del aprendizaje	2,96 (1,21)
He utilizado tecnología digital para aprender	4,22 (0,94)
Esta metodología me ha gustado más que la "tradicional"	2,73 (1,30)
La inversión en tiempo ha sido mayor que con una metodología tradicional	4,10 (1,14)
El profesor tiene más en cuenta mis puntos fuertes, debilidades e intereses	2,58 (1,16)
Creo que el aprendizaje es más activo y experiencial	2,51 (1,15)
He tenido más posibilidades de participar en la resolución de problemas y desarrollar mi pensamiento crítico	2,69 (1,09)
He participado más en la toma de decisiones al colaborar con otros compañeros	3,17 (1,13)
Veo más posibilidades para mostrar, al profesor o a mis compañeros, lo que he aprendido	2,70 (1,28)
Tengo más posibilidades de trabajar a mi propio ritmo	3,65 (1,23)
He tenido facilidad para acceder a los materiales y contenidos de aprendizaje	3,81 (1,04)
Mis interacciones con los compañeros durante la clase han sido más positivas	3,20 (1,13)
Mis interacciones con el profesor durante la clase han sido más positivas	3,00 (1,20)
Mis interacciones con el profesor durante la clase han sido más frecuentes	2,56 (1,20)

En línea con los datos obtenidos en las respuestas abiertas, en la tabla 2 aparecen como peor valorados los ítems referidos a que el aprendizaje online ha sido más activo y experiencial, a que las interacciones con el docente eran frecuentes y al aumento de su motivación. Recordemos que, en las preguntas abiertas, el alumnado destacaba como positiva esa interacción con el docente en el aula presencial y el uso de materiales manipulativos en la adquisición de conceptos matemáticos. La concepción acerca del aprendizaje activo y experiencial de la muestra contrasta con los resultados obtenidos por Sacristán et al. (2017) y por Martín y Campión (2016) donde este ítem aparece entre los mejores valorados. Tal vez el alumnado de la muestra conciba como aprendizaje activo tan solo cuando trabaja con material manipulativo; sin embargo, en el trabajo grupal está orientado a la búsqueda de información acerca de algún problema de aprendizaje y la elaboración de una

propuesta didáctica que presentan al resto de compañeros, lo cual se consideraría también aprendizaje activo.

Por último, los trabajos de Sacristán et al. (2017) y Martín y Campión (2016) destacan el gusto del alumnado por el modelo virtual frente al modelo tradicional, sin embargo, en la muestra este ítem obtiene 2,73 puntos y figura como el séptimo peor valorado de los 21 ítems que componen la Tabla 2. Esta puntuación estaría en línea con la preferencia que muestra el alumnado por la docencia y evaluación presencial frente a la evaluación online referida en la Tabla 1. Recordemos que los dos estudios citados el planteamiento de la docencia se decide previamente online, sin embargo, en este estudio el cambio de modalidad no está en ningún caso previsto ni consensuado, sino que es impuesto debido a la situación de pandemia, lo que hace sobrevenir el modelo de enseñanza.

CONCLUSIONES

Pese a la cada vez más frecuente incursión de las TIC en el aula y la inclusión de herramientas online dentro del modelo presencial, tal vez el sistema no estaba preparado para pasar de la noche a la mañana a un modelo íntegramente online. Coincidimos con Cifuentes-Faura (2020) en que un cambio de estas características requiere tanto formación específica del profesorado, como un cambio de mentalidad del alumnado para cambiar la forma de aprender y organización de su tiempo de estudio.

En este estudio se pide al alumnado universitario valoración sobre su experiencia en docencia y evaluación en el modelo presencial al que estaban acostumbrados y el modelo online sobrevenido. A pesar de considerar que su asistencia era mayor en el modelo online, prefieren que tanto la docencia como la evaluación sea presencial. Consideran que en la docencia presencial se produce una mayor interacción con los compañeros y con el docente, lo cual les permite solucionar dudas de manera inmediata. Esto último también se destaca en la parte de evaluación presencial, donde además el alumnado considera más adecuado el tiempo otorgado para la realización de las pruebas. En cuanto a la evaluación online, el alumnado admite no contagiarse del nerviosismo colectivo y estar más tranquilo, tal vez, porque consideran que este tipo de pruebas con más fáciles. El alumnado valora como positivo de la docencia online el ahorro del tiempo de desplazamientos a la facultad, sin embargo, admiten que el modelo online les genera mayor inversión de tiempo que el modelo presencial. Por último, cabe destacar la valoración positiva del alumnado del uso de materiales manipulativos en las clases presenciales para la asimilación de conceptos matemáticos y para ampliar la variedad de recursos en la enseñanza.

Referencias

Cifuentes-Faura, J. (2020). Docencia online y Covid-19: la necesidad de reinventarse. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, 13(Especial), 115-127.

De Castro, C. y Palop, B. (2019). ¿Ayudan los materiales manipulativos a resolver tareas matemáticas? Sí, pero... En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 243-252). Valladolid: SEIEM.

Esteve, O. y Alsina, À. (2020). Más allá del PowerPoint: promoviendo el aprendizaje activo en la formación de maestros no presencial. *Papeles de Trabajo sobre Cultura, Educación y Desarrollo Humano 2020, vol. 16*(3), 1-14.

Garrido-Martos, R., Franco-Guijar, M., González-Calvín, C., Morand, Z. C. y Ruiz-Rodríguez, L. (2019). Plan de acción para la reducción de la ansiedad matemática de los futuros docentes de Primaria para la mejora de su formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 343-352). Valladolid: SEIEM.

Jorge-Pozo, D., Jiménez-Gestal, C. y Murillo, J. (2017). influencia de un entorno virtual de Enseñanza aprendizaje en la afectividad hacia las matemáticas de estudiantes de secundaria: estudio de casos. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 325-334). Zaragoza: SEIEM.

Martín, D. y Campión, R. (2016). "Flipped Learning" en la formación del profesorado de secundaria y bachillerato. Formación para el cambio. *Contextos educativos: Revista de educación,* (1), 117-134.

Martín, D. y Tourón, J. (2017). El enfoque flipped learning en estudios de magisterio: percepción de los alumnos. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 20*(2), 187-211.

Montes, M., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2015). El foro como contexto de exploración del conocimiento profesional de maestros en activo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 381-389). Alicante: SEIEM.

Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 447-457). Málaga: SEIEM.

Roig, A.I., Llinares, S. y Penalva M.C. (2010). Aprendiendo sobre la comunicación matemática. Características de las estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno on-line. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 533-543). Lleida: SEIEM.

Rojas, Y., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). Desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de la matemática en un sistema de educación a distancia. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. AguilarGonzález, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 495- 504). Gijón: SEIEM.

Sacristán San Cristóbal, M., Martín R., D., Navarro Asensio, E. y Tourón Figueroa, J. (2017). Flipped Classroom y Didáctica de las Matemáticas en la Formación online de Maestros de Educación Infantil. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 20* (3), 1-14. DOI: http://dx.doi.org/10.6018/reifop.20.1.292551

Sánchez-Cruzado, C., Sánchez-Compaña, T. y García-Pardo, F. (2017). Metodología clase invertida como alternativa para la educación matemática en la enseñanza universitaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 591). Zaragoza: SEIEM

Sangrà, A. (2020). Enseñar y aprender en línea: superando la distancia social. En SAngrà, A., Badia, A., Cabrera Lanzo, N., Espasa Roca, A., Fernández Ferrer, M., Guàrdia, L., Guasch, T., Guitert, M., Maina, M. Raffaghelli, J., Romero, M. y Romeu Fontanillas, T. (2020). Decálogo para la mejora de la docencia online (p. 27-44). Barcelona, España: Editorial UOC

Santos, M. S., González-Aurioles, V. M. S. P., & Guzmán, M. G. (2020). Opinión de los alumnos universitarios: docencia presencial u online durante la pandemia. En REDINE (Red de Investigación e Innovación Educativa) (Ed.), *Conference Proceedings CIVINEDU 2020*, (pp.327-328). Madrid.

Tourón, J., y Santiago, R. (2015). El modelo Flipped Learning y el desarrollo del talento en la escuela. *Revista de Educación*, 368. 196-231. DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-368-288

UNESCO (2020). COVID-19 y educación superior: De los efectos inmediatos al día después. Recuperado de http://www.iesalc.unesco.org/wp-content/uploads/2020/05/COVID-19-ES-130520.pdf

Zambrano-Orellana, G. A., & García-Vera, C. E. (2021). Modalidad online y su incidencia en el proceso Educativo en tiempos de COVID-19. *Polo del Conocimiento, 6*(2), 1100-1122.

ESTRATEGIAS POR ALUMNOS CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA AL RESOLVER UNA TAREA QUE INVOLUCRA UNA RELACIÓN FUNCIONAL

Strategies by students with autism spectrum disorder when solving a task that involves a functional relationship

Goñi-Cervera, J.[a], Cañadas, M. C.[a], Polo-Blanco, I.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Cantabria

Resumen

En este estudio describimos las estrategias de cinco estudiantes de educación primaria con trastorno del espectro autista al resolver tareas de generalización en un contexto funcional del pensamiento algebraico. Diseñamos y aplicamos un cuestionario con diferentes preguntas sobre casos particulares y el caso general. Encontramos una variedad de estrategias, predominando estrategias de modelización con dibujo para la obtención de casos particulares. Uno de los cinco estudiantes encontró la regla general. Presentamos algunas implicaciones de los resultados para la investigación con este alumnado.

Palabras clave: *educación primaria, estrategias, generalización, pensamiento funcional, trastorno del espectro autista*

Abstract

In this study we describe the strategies that five primary school students with autism spectrum disorder show when solving generalization tasks in a functional context of algebraic thinking. We designed and applied a questionnaire with different questions involving particular cases and the general case. We observed a variety of strategies, predominating drawing modeling strategies to obtain particular cases. One of the five students obtained the general rule. We present some implications of the results for future studies.

Keywords: *autism spectrum disorder, functional thinking, generalization, primary education, strategies*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo combina dos líneas de investigación que se están desarrollando como parte de dos proyectos: uno centrado en el pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria y otro centrado en estudiantes con trastorno del espectro autista (TEA).

Numerosas investigaciones recientes ponen de manifiesto que los niños desde edades tempranas son capaces de manifestar pensamiento algebraico, y destacan la importancia de proporcionar contextos que les ayuden a desarrollarlo (Cañadas y Molina, 2016). En concreto, se recomienda fomentar el pensamiento funcional, un componente del pensamiento algebraico centrado en la relación entre cantidades (e.g., Blanton y Kaput, 2004). Dentro del pensamiento funcional, en el contexto español se destaca el interés de trabajar la generalización, sistemas de representación, estrategias o estructuras, entre otras nociones (e.g., Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018; Pinto y Cañadas, 2019).

En nuestro caso, desarrollamos una investigación con niños diagnosticados con TEA, teniendo en cuenta que en España se incorporan cada vez con más frecuencia a un programa educativo regular. El alumnado con este trastorno presenta a menudo más dificultades con las matemáticas que sus

Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I. (2021). Estrategias por alumnos con trastorno del espectro autista al resolver una tarea que involucra una relación funcional. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 311 – 318). Valencia: SEIEM.

compañeros de desarrollo típico (Bae, Chiang y Hickson, 2015). Aunque en los últimos años ha crecido el número de investigaciones sobre aprendizaje matemático en este colectivo, la mayoría se centran en la resolución de problemas o en el aprendizaje de operaciones aritméticas. En el ámbito del pensamiento algebraico no hemos encontrado investigaciones previas con niños con dificultades de aprendizaje. Sí tenemos constancia de la existencia de un proyecto de investigación que avanza en este sentido en Estados Unidos, liderado por Maria Blanton, pero aún no hay resultados. Por tanto, es evidente una necesidad por profundizar si los niños con TEA abordan tareas de generalización en un contexto funcional del pensamiento algebraico.

Con el fin de contribuir a suplir esta carencia, nos planteamos este trabajo exploratorio. Es una primera aproximación al estudio del pensamiento funcional en estudiantes con TEA. En concreto, el objetivo de investigación de este trabajo es identificar y describir las estrategias que emplean estudiantes de educación primaria diagnosticados con TEA al resolver una tarea que involucra una función en un contexto de pensamiento algebraico.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional "es un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 212). Se relaciona con la identificación de patrones, representaciones y establecimiento de relaciones entre variables y generalización (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). Entre las razones que algunos autores aportan para defender la introducción del pensamiento funcional en edades tempranas, destacamos que fomenta la capacidad para representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (e.g., Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens, 2015) y ayuda a la comprensión del concepto de función en educación secundaria (Doorman y Drijvers, 2011). Diversos autores (e.g., Blanton et al., 2015) manifiestan que los niños tienen capacidades relacionadas con el pensamiento funcional desde edades muy tempranas. Varios autores abordan la descripción de estrategias en un contexto funcional del pensamiento algebraico. Merino, Cañadas y Molina (2013) describen las estrategias de alumnos de 5º de primaria al resolver tareas de generalización que involucran una relación funcional. Los estudiantes identificaron varios patrones y representaciones, así como relaciones funcionales, predominando la representación pictórica y el conteo. Goni-Cervera y Polo-Blanco (2019) estudiaron las estrategias manifestadas por alumnos de 6 y 7 años al resolver una tarea que involucraba pensamiento funcional, observando una preferencia por las estrategias de conteo y recursiva y la manifestación de alguna estrategia más avanzada para generalización lejana. Morales et al. (2018) indagaron sobre el pensamiento funcional de alumnos de 6-7 años, centrándose en las relaciones funcionales y estrategias que emplearon al resolver problemas que involucraban funciones. Estos autores identificaron más frecuentemente la relación funcional de correspondencia y se evidenció un vínculo entre esta relación funcional, la relación de correspondencia y las estrategias de operatoria y conteo. Cañadas y Fuentes (2015) describieron las estrategias que utilizaron estudiantes de 6-7 años al realizar una tarea que involucraba una relación funcional. Los estudiantes evidenciaron una variedad de estrategias en la identificación de diferentes relaciones funcionales y la utilización de distintos sistemas de representación, con predominio del pictórico.

Las investigaciones citadas anteriormente se centran en estudiantes de educación primaria de centros educativos españoles de desarrollo típico. Apreciamos una carencia de trabajos que pongan el foco en el pensamiento algebraico en alumnado con TEA en la literatura de investigación. Este alumnado tiene algunas habilidades cognitivas afectadas, lo que interfiere directamente con el aprendizaje matemático (King, Lemons y Davidson, 2016). Por ejemplo, debido a los déficits que presentan en el lenguaje comprensivo, pueden tener dificultades para atribuir significado a los enunciados de los problemas y, en consecuencia, para identificar las operaciones aritméticas requeridas para resolverlos. Del mismo modo, debido a sus alteraciones en las funciones ejecutivas, pueden tener dificultades para implementar las acciones necesarias para resolver los problemas

(Bae et al., 2015). En el caso particular del álgebra, y dado que cada vez más niños con TEA acceden a niveles de educación secundaria, se hace necesario que construyan una base sólida de aprendizaje desde la educación primaria para un trabajo posterior con esta materia. A pesar de que se han llevado a cabo diversas investigaciones con este alumnado relacionadas con el aprendizaje de operaciones aritméticas o la resolución de problemas (Bae et al., 2015; Root y Browder, 2019), no hemos encontrado antecedentes en los que se indague en el pensamiento algebraico (King et al., 2016), solo un estudio de caso (Barnett y Cleary, 2019) con un niño de educación secundaria con TEA en el que se investiga sobre la resolución de ecuaciones lineales.

Hemos identificado estudios que se centran en las estrategias y representaciones que utilizan estudiantes con TEA al resolver problemas matemáticos (e.g., Polo-Blanco, Bruno, González y Olivera, 2018 y Polo-Blanco, González y Bruno, 2019). Por ejemplo, Polo-Blanco et al. (2019) caracterizaron las estrategias que un estudiante con TEA empleaba al resolver problemas aritméticos verbales de división. Estas autoras concluyeron que las estrategias empleadas por este estudiante eran similares a las que usan estudiantes de desarrollo típico, aunque observaron una preferencia por estrategias de nivel menos sofisticado. Además, el estudiante manifestó una predilección por el uso de representaciones pictóricas muy detalladas en la resolución de los problemas.

MÉTODO

Esta investigación es de tipo exploratorio y descriptivo. Llevamos a cabo un estudio de casos con cinco estudiantes.

Participantes

En este estudio participan parte de los sujetos del proyecto con estudiantes con TEA en el que se enmarca este trabajo. Los participantes fueron cinco estudiantes de entre 8 y 11 años diagnosticados con TEA, con CI igual o mayor a 70, que cursaban entre 3º y 6º de educación primaria en cinco centros educativos ordinarios en una provincia española. Todos recibían apoyo de especialistas en sus respectivos centros. Los cinco estudiantes manifestaron al comienzo del estudio una edad matemática mayor de 6 años, medida por el Test de Competencia Matemática TEMA-3 (Ginsburg y Baroody, 2007). En la Tabla 1 recogemos las características de estos participantes: el curso en el que están escolarizados en un aula regular, la edad cronológica, su puntuación directa (según el test TEMA 3, sobre 72) y la edad matemática equivalente (medida a partir de la puntuación directa obtenida). El instrumento utilizado solo recoge la equivalencia para edades hasta 9 años y las edades se expresan en años:meses. Por ejemplo, E1 tiene una edad cronológica de 8 años y 4 meses.

Tabla 1. Datos de los participantes en el estudio

Estudiante	Curso	Edad cronológica	Puntuación directa	Edad matemática equivalente
E1	3º EP	8:4	50	7:1
E2	4º EP	9:3	39	6:4
E3	5º EP	10:9	54	6:4
E4	6º EP	11:1	71	>9:0
E5	6º EP	11:4	62	8:5

Instrumento de recogida de información

Diseñamos e implementamos un cuestionario escrito con una tarea adaptada de los trabajos de Carraher, Martinez y Schliemann (2008) y de Merino et al. (2013) que involucraba la función $f(x)=2x+2$. La adaptación consistió en pedirles el trabajo de una forma más pautada y con un lenguaje sencillo para ellos. Consideramos las siguientes variables en el diseño de la tarea: (1) tipo de casos particulares: términos consecutivos y no consecutivos y (2) tipo de representación: pictórica o con material (cubos encajables). Introdujimos la tarea como presentamos en la Figura 1.

En el restaurante hay mesas cuadradas. Se pueden sentar 4 personas alrededor de una mesa como se muestra en la figura. Si se juntan 2 mesas, se pueden sentar 6 personas alrededor.

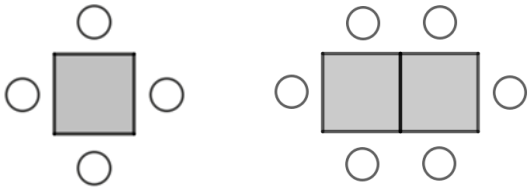


Figura 1. Introducción de la tarea con disposición de los comensales en una y dos mesas

A continuación, les preguntamos: "¿cuántas personas se pueden sentar si se juntan 3 mesas?" y de forma análoga para 4, 5, 8, 18 y 100 mesas. Finalmente, para preguntarles por el caso general, planteamos "¿cómo sabes el número de personas que se pueden sentar si sabes el número de mesas?".

Los estudiantes resolvieron el cuestionario de manera individual, empleando para ello entre 10 y 40 minutos. El investigador les proporcionó el cuestionario en papel, un bolígrafo y cubos encajables y los animaba a resolver la tarea empleando los recursos que necesitaran. Además, les pidió que explicaran su razonamiento para responder a las preguntas. Las respuestas fueron grabadas en vídeo y transcritas para su posterior análisis.

Categorías de análisis

Con base en las estrategias definidas por Morales et al. (2018) y Cañadas y Molina (2016), diseñamos un primer sistema de categorías que, tras una primera revisión de los datos, reformulamos hasta definir el sistema de categorías definitivo, que presentamos en la Tabla 2.

Tabla 2. Categorías de análisis

Estrategia	Descripción de la acción del estudiante
Sin respuesta	No proporciona ninguna respuesta
Respuesta directa	Proporciona la respuesta sin dar una justificación
Explicación procedimiento sin solución	Expresa mediante lenguaje verbal (escrito u oral) el procedimiento sin proporcionar una solución
Explicación procedimiento con solución	Expresa mediante lenguaje verbal o modelando el procedimiento y proporciona una solución
Modelado con material	Modeliza con material
Modelado con dibujo	Modeliza con dibujos
Operaciones (aditivas o multiplicativas)	Realiza cálculos aditivos o multiplicativos

RESULTADOS

Resumimos en la Tabla 3 los resultados relativos a las estrategias de los estudiantes según las preguntas que se les plantean en el cuestionario. Recogemos una sola estrategia para cada cuestión, ya que en general no se dieron combinaciones entre ellas y cuando se dieron, una predominó claramente sobre las demás.

Tabla 3. Estrategias utilizadas por los estudiantes

	Función involucrada y=2x+2									
	Términos consecutivos				Términos no consecutivos					
Estrategia	x=3	x=4	x=5	T_c	x=8	x=18	x=100	T_n	General	T_g
Sin respuesta				0			E5	1		0
Respuesta directa	E3*		E5	2			E3*	1	E3*	1

Tabla 3. Estrategias utilizadas por los estudiantes

	Función involucrada y=2x+2									
	Términos consecutivos				Términos no consecutivos					
Estrategia	x=3	x=4	x=5	T_c	x=8	x=18	x=100	T_n	General	T_g
Explicación procedimiento sin solución				0				0	E5*	1
Explicación procedimiento con solución										
Modelado con material				0	E5	E5		2		0
Modelado con dibujo	E1*; E2*; E4	E1; E2; E3; E4;	E1; E2; E3; E4;	1 1	E1*; E3*; E4	E1*; E3*		5	E1*	1
Operaciones	E5	E5		2	E2*	E2*; E4	E1*; E2*; E4	6	E2*; E4	2

Nota = *Respuesta incorrecta; T_c= Total para términos consecutivos; T_n= Total para términos no consecutivos; T_g = Total para regla general.

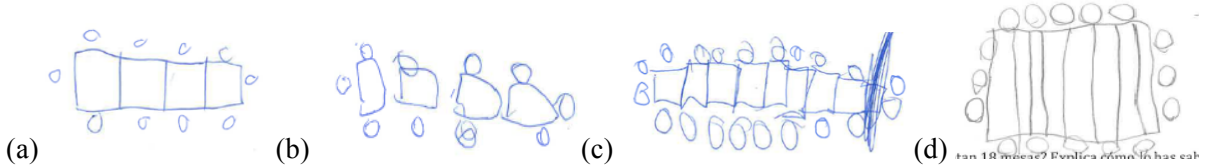
Todos los estudiantes responden a todas las preguntas planteadas, a excepción de un estudiante (E5) cuando le preguntamos por el caso 100. Dos estudiantes (E3 y E5) responden de forma directa.

Como se aprecia en la Tabla 3, cada estudiante siguió una única estrategia al resolver cada pregunta. Hay una mayoría de estudiantes que emplean la estrategia modelado con dibujo para la resolución de los términos consecutivos. Así, en 11 ocasiones los estudiantes emplearon esta estrategia dibujando, frente a las 2 ocasiones en que se registra una estrategia de operaciones y 2 ocasiones que se registran una respuesta directa. De las 11 ocasiones en las que se empleó la estrategia de modelado, solo 2 condujeron a respuestas incorrectas.

La estrategia de modelado es también la empleada más frecuentemente para resolver la relación para los primeros términos no consecutivos. Se empleó en 7 ocasiones, y solo un estudiante (E5) recurrió al material en dos ocasiones, mientras que el resto recurrieron al dibujo. Sin embargo, el modelado con dibujo no llevó a una respuesta correcta a dos de los estudiantes (E1 y E3) que sí habían utilizado con éxito en los términos consecutivos esta estrategia. Aparecen en 6 ocasiones las estrategias mediante operaciones en los términos no consecutivos, aunque solo en 2 casos llevó a los estudiantes a obtener la respuesta correcta. Además, un estudiante deja por primera vez una pregunta sin responder.

La mayoría de las respuestas para averiguar la regla general son incorrectas y justifican la respuesta mediante operaciones o explicando el procedimiento. Solo un estudiante (E4) encuentra la regla general correcta y la explica haciendo uso de operaciones.

Las estrategias de modelado fueron en su mayoría mediante dibujos. Hubo diversidad de dibujos del patrón de la tarea: correctos o incorrectos con las mesas juntas, correctos o incorrectos con las mesas separadas, mesas alargadas, entre otras. La Figura 2 muestra algunos ejemplos de patrones:



(a) (b) (c) (d)

Figura 2. Ejemplos de la estrategia modelado con dibujo: modelado y unión. Resolución de E4 (a), E2 (b), E3 (c) y E1 (d)

En la Figura 2(a) y 2(b) se aprecian dos resoluciones correctas para x=4 y en la Figura 2(c) y 2(d), dos resoluciones incorrectas para x=8. Al aumentar el número de mesas es más común observar el

mismo error: las mesas son más grandes y sientan a más comensales, como se aprecia en la Figura 2(c) y 2(d). De hecho, estos estudiantes (E3 y E1) no incurrieron en este error para los términos consecutivos, en los que utilizaron la misma estrategia.

Podemos establecer diferentes niveles dentro del modelado con dibujo ya que, aunque todos modelaran y contaran, algunos estudiantes profundizaron más en su explicación. Por ejemplo, E2 (Figura 2(b)) dibujó cuatro mesas rodeadas de comensales y los contó de uno en uno. Después, para la pregunta relativa a cinco mesas empezó a hacer lo mismo, pero se detuvo a media construcción para añadir: "van a ser doce". Finalizó el dibujo, contó de uno en uno los elementos y continuó con la explicación: "esto [refiriéndose a la situación x=4] eran 10 y esto es 8 [señalando el dibujo para x=3], es que hay que sumarle dos cada vez". Este mismo estudiante continuó con este argumento para x=8, pero al no ser términos consecutivos, dio una respuesta incorrecta. También E3 dibujó cuatro mesas con sus correspondientes círculos y contó todo, pero a pesar de contar a la vez que dibujaba, al terminar lo justificó así: "Porque aquí hay una mesa con tres personas, en otra hay dos y en la otra hay dos y en la otra hay tres, pues si se quieren juntar, se juntan las mesas y se sientan diez". Solo E5 empleó una estrategia modelado con material. Por ejemplo, para x=8, dispuso 5 cubos sobre la mesa, los miró pensativo y escribió en el papel: "18".

Cuando los términos dejan de ser consecutivos y aumentan, se dan las primeras respuestas incorrectas al emplear una estrategia de modelización. No es hasta x=100 cuando se va abandonando esta estrategia para dar lugar a otras como operaciones, utilizada por tres estudiantes, que resultan también en respuestas incorrectas. Por ejemplo, E2 respondió: "Mil, porque es 10 veces más que… dieci… que 100 mesas". E1 respondió: "Cincuenta mil" y argumentó: "sumando… 50 [señalando uno de sus dedos] más 10000". Destaca E4 que respondió correctamente: "202. Porque hay 100 aquí, 100 aquí y dos a los lados". Los estudiantes que dieron respuestas incorrectas en x=8 continuaron con ellas hasta el final de la tarea. Algunos estudiantes aludieron a situaciones conocidas por ellos al responder. Por ejemplo, E3 respondió para la regla general: "4" justificándolo de la siguiente manera: "Porque un día fui al acuario y me senté con 4 personas".

Destacamos al estudiante E4, que fue el único en proporcionar una respuesta correcta para todas las preguntas del cuestionario, incluida la regla general. Resolvió las preguntas relativas a los términos consecutivos dibujando (ver Figura 2(a)) y continuó con la estrategia de operaciones a partir del término no consecutivo x=18 ("Treinta y ocho. 18 y 18 son 36 y 2, 38"). Para el término general argumentó: "se calcula mirando que en cada lado va a haber el mismo número de personas que mesas hay, más luego dos en los extremos. Entonces los de los lados, cuentas un lado que es el mismo número que mesas hay, lo multiplicas por dos y le sumas los dos de los laterales".

Destacamos también al estudiante E5, quien desde un primer momento mostró estrategias menos frecuentes para resolver correctamente la tarea. Por ejemplo, respondió para x=3 mediante una estrategia de operaciones argumentando: "dos más". Continuó con este razonamiento en la siguiente pregunta y ya en el último término consecutivo respondió directamente y de manera correcta "doce". Para términos no consecutivos, recurrió como la mayoría de los estudiantes a una estrategia de modelización, pero empleando el material disponible y no el dibujo. Además, combinó el uso de este material con respuestas directas, respondiendo de manera correcta. Dejó sin responder el ítem x=100, y al preguntarle por el término general respondió: "por los sitios que hay alrededor". Esta es la única respuesta codificada como estrategia de explicación del procedimiento sin solución. El estudiante E5 tiene un desfase entre edad cronológica y matemática de 2 años y 11 meses, por lo que es destacable que responda de manera correcta a la práctica totalidad de las cuestiones.

CONCLUSIONES

En general, los estudiantes identificaron la regularidad para términos consecutivos, donde predominan las respuestas correctas. En cambio, la mayoría respondieron incorrectamente a las

tareas que involucraban términos no consecutivos. Solo un estudiante obtuvo la regla general. Algunas de las respuestas sugieren que los estudiantes no comprendieron la pregunta del término general y, en ocasiones, parecieron interpretar "si sabes el número de mesas" como que debían elegir casos particulares. Es el caso de E3, que comenzó respondiendo: "podrían ser 70 mesas", para luego dar otra respuesta relacionada con una situación vivida: "Pueden caber 4 personas. Un día fui al acuario y me senté con 4 personas". Este tipo de respuesta puede ser debido al predominio de interpretaciones y respuestas literales, características de los niños con TEA (King et al., 2016). Si bien la mayoría de las alusiones a contextos conocidos se han dado al responder la regla general, también se dio en una ocasión para un caso particular: Fue E1 quien, tras responder correctamente, dibujó algún círculo más diciendo: "es para que todos los invitados vengan".

La mayoría de los estudiantes recurrió al modelado para términos consecutivos, lo que coincide con estudios análogos con estudiantes de desarrollo típico (Merino et al., 2013). Sin embargo, los estudiantes también se apoyaron en dibujos para la obtención de los términos no consecutivos, lo que los llevó en varios casos a modificar la estructura del patrón. Los resultados coinciden con otros estudios con alumnado que presenta TEA en los que se muestran preferencias por el uso de estrategias básicas basadas en el conteo con modelización (Polo-Blanco et al., 2018; 2019). Contrastan con artículos similares en alumnado de desarrollo típico (Cañadas y Fuentes, 2015) de la misma edad matemática (6-7 años) que emplean representaciones en los primeros términos de la secuencia para generalizar, pero avanzan hacia una estrategia verbal para dar respuesta a la generalización. Sin embargo, los participantes en esta investigación con edad matemática equivalente a 6 y 7 años continúan con la estrategia de dibujo.

Con este trabajo contribuimos a un vacío que encontramos en la intersección del conjunto de las investigaciones que abordan el pensamiento algebraico y, en particular, el pensamiento funcional en educación primaria; y el conjunto de investigaciones sobre la resolución de tareas por parte de estudiantes con TEA que se encuentran matriculados en centros educativos regulares.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de los proyectos con referencias EDU2016-75771-P, EDU2017-84276-R, PID2019-105677RB-I00 y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). Además, se enmarca en el proyecto titulado "Resolución de problemas matemáticos en población TEA: un estudio de casos y controles" financiado por la Sociedad para el Desarrollo de Cantabria y FEDER.

Referencias

Bae, Y. S., Chiang, H. M. y Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing pers. *Journal of Autism Developmental Disorders, 45*, 2200-2208.

Barnett, J. H. y Cleary, S. (2019). Visual supports to teach algebraic equations to a middle school student with autism spectrum disorder. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth*, *63*(4), 356-351.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-years-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education. 46*(5), 511-558.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior,* 41, 87-103.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, E. (2016). Pensamiento numérico. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 173-194). Madrid, España: Pirámide.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40,* 3-22.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (119-135). Rotterdam, Sense Publishers.

Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (2007). *TEMA-3. Test de competencia matemática básica.* Madrid: TEA Ediciones. Adaptación española: Núñez, M. C.; Lozano, I.

Goni-Cervera, J. y Polo-Blanco, I. (2019). Estrategias de generalización por niños de 6 y 7 años al resolver una tarea que involucra un patrón geométrico. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia 8*(2), 61-76.

King, S. A., Lemons, C. J. y Davidson, K. A. (2016). Math interventions for students with autism spectrum disorder: a best-evidence synthesis. *Exceptional Children, 82*(4), 443-462. DOI: 10.1177/ 0014402915625066

Merino, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Journal Mathematics Education Research Journal*. DOI 10.1007/s13394-019-00300-2

Polo-Blanco, I., Bruno, A., González, M. J. y Olivera, B. (2018). Estrategias y representaciones en la resolución de problemas aritméticos de división en estudiantes con trastorno del espectro autista: un estudio de caso. *Revista de Educación Inclusiva, 11*(2), 79-90.

Polo-Blanco, I., González, M. J. y Bruno, A. (2019). An exploratory study on strategies and errors of a student with autism spectrum disorder when solving partitive division problems. *Brazilian Journal of Special Education 25*(2), 247-264.

Root, J. R. y Browder, D. M. (2019). Algebraic problem solving for middle school students with autism and intellectual disability. Exceptionality, *27*(2), 118-132.

FORMAS DE RESPONDER SOBRE LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA

Primary and secondary school students' ways of answering about rational number density

González-Forte, J. M.[a], Fernández, C. [a], Van Hoof, J. [b] y Van Dooren, W.[b]

[a]Universidad de Alicante, [b]KU Leuven

Resumen

La densidad de los números racionales es considerada un dominio en el que persiste el sesgo del número natural en mayor medida. El objetivo de este estudio es identificar diferentes formas de responder sobre la densidad de los números racionales en estudiantes de educación primaria y secundaria. Extendemos estudios previos al llevar a cabo un estudio transversal desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO realizando un análisis inductivo de las respuestas de los estudiantes. Los participantes fueron 953 estudiantes desde 5º de primaria hasta 4º de ESO que resolvieron dos tipos de ítems: (i) determinar la cantidad de números que hay entre dos números racionales dados, y (ii) escribir un número entre dos números racionales dados. Los resultados evidencian al sesgo del número natural como principal origen de las dificultades. Además, se han identificado formas de responder intermedias en la comprensión del concepto de densidad.

Palabras clave: *números racionales, sesgo del número natural, densidad, educación primaria y secundaria*

Abstract

The density of rational numbers is considered the most difficult domain in which the natural number bias persists. The objective of this study is to identify primary and secondary school students' ways of answering about density. We extent previous research by conducting a cross-sectional study from 5th grade of primary school to 4th grade of secondary school and by analysing inductively students' responses. Participants were 953 students from 5th grade of primary school to 4th grade of secondary school and they solved two types of items: (i) determining the number of numbers between two given rational numbers, and (ii) writing a number between two given rational numbers. Results show that the natural number bias is the main reason of students' difficulties Moreover, students' intermediate ways of answering in density understanding have been identified.

Keywords: *rational numbers, natural number bias, density, primary and secondary school*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Los estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso los universitarios, tienen dificultades con la comprensión del número racional (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984; Cramer, Post y delMas, 2002; Siegler y Lortie-Forgues, 2015). Una de las principales razones que explican estas dificultades es el uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando se trabaja con los números racionales –sesgo del número natural (*natural number bias*) (Ni y Zhou, 2005; Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015). Es decir, algunos estudiantes suponen, implícita o explícitamente, que las propiedades de los números naturales pueden aplicarse a los números racionales. La literatura acerca de este fenómeno ha considerado tres dominios donde las

González-Forte, J. M., Fernández C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2021). Formas de responder sobre la densidad de los números racionales de estudiantes de primaria y secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 319 – 326). Valencia: SEIEM.

propiedades de los números racionales difieren de las propiedades de los números naturales: las operaciones aritméticas, la densidad y la magnitud (Gómez y Dartnell, 2019; González-Forte, Fernández y Llinares, 2018; McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen y Lehtinen, 2015). En la presente investigación nos centraremos en el dominio de la densidad, considerado como el dominio en el que en mayor medida persiste el sesgo del número natural (McMullen et al., 2015; Smith, Solomon y Carey, 2005).

El conjunto de los números naturales es discreto, ya que entre dos números naturales hay un número finito (posiblemente cero) de números. Por el contrario, el conjunto de los números racionales es denso, ya que hay un número infinito de números entre dos números racionales (Smith et al., 2005). Sin embargo, comprender este aspecto de los números racionales es una tarea compleja para los estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso para los estudiantes universitarios (Tirosh, Fischbein, Graeber y Wilson, 1999; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004; Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren, 2015). Los estudiantes creen que entre dos números racionales "pseudo-consecutivos" no hay números, o hay un número finito de números. Por ejemplo, los estudiantes pueden pensar que entre las fracciones "pseudo-consecutivas" 5/7 y 6/7 no hay números, o que entre 1/2 y 1/4 solo se encuentra el número 1/3 (Merenluoto y Lehtinen, 2004; Tirosh et al., 1999). En números decimales, los estudiantes creen que entre los números decimales "pseudo-consecutivos" 0.59 y 0.60 no es posible encontrar otros números, o que entre 1.22 y 1.24 solo se encuentra el número 1.23 (Broitman, Itzcovich y Quaranta, 2003; Moss y Case, 1999).

Vamvakoussi y Vosniadou (2004, 2010) trataron de identificar diferencias en la comprensión de la densidad de los números racionales en estudiantes de educación secundaria. Para ello, propusieron como hipótesis varios patrones de respuesta de estudiantes (perfiles hipotéticos) e identificaron respuestas de los estudiantes para estos perfiles hipotéticos mediante entrevistas (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004) o mediante tests (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010). Estos perfiles fueron: (i) estudiantes que consideraron que no hay ningún número entre dos números racionales pseudo-consecutivos; (ii) estudiantes que consideraron que hay un número finito de números entre dos números racionales pseudo-consecutivos; (iii) estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números entre dos números decimales, pero un número finito de números entre dos fracciones, y viceversa; (iv) estudiantes que no consideraron que puede haber números decimales entre dos fracciones, y viceversa; (v) estudiantes que consideraron correctamente que hay un número infinito de números entre dos números racionales, independientemente de su representación simbólica (fracción o número decimal). Sin embargo, estos estudios presentan algunas limitaciones. En primer lugar, al no realizar un análisis inductivo de las respuestas de los estudiantes, no se identificó a ningún estudiante o solo a unos pocos para algunos de estos perfiles hipotéticos; y, por el contrario, obtuvieron algunos patrones de respuesta de estudiantes que diferían de los perfiles hipotéticos. En segundo lugar, en estos estudios se ha preguntado a los estudiantes que determinen cuántos números hay entre dos números racionales dados, mediante ítems de elección múltiple (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010), o ítems de elección múltiple y de respuesta abierta (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). Sin embargo, no se han utilizado ítems en los que los estudiantes tengan que escribir un número entre dos números racionales dados.

El objetivo de este estudio es identificar diferentes formas de responder sobre la densidad de los números racionales en estudiantes de educación primaria y secundaria. En este sentido, extendemos la investigación existente al realizar un estudio transversal desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO, realizando un análisis inductivo de sus respuestas. Además, incluimos dos tipos diferentes de ítems: (i) determinar la cantidad de números que hay entre dos números racionales dados, y (ii) escribir un número entre dos números racionales dados.

MÉTODO

Los participantes fueron 953 estudiantes de 5º de primaria (n = 115), 6º de primaria (n = 139), 1º de ESO (n = 162), 2º de ESO (n = 173), 3º de ESO (n = 174) y 4º de ESO (n = 190), pertenecientes a cinco centros de educación primaria y cinco centros de educación secundaria.

Los participantes respondieron a un cuestionario con nueve ítems adaptado del RNST (*Rational Number Sense Test*), diseñado y validado por Van Hoof et al. (2015).

Los nueve ítems eran de dos tipos. Seis ítems eran de determinar la cantidad de números que hay entre dos números racionales dados (ítems de determinar la cantidad de números) y tres ítems eran de escribir un número entre dos números racionales (ítems de escribir un número). De los seis ítems de determinar la cantidad de números, tres ítems eran con fracciones y tres con números decimales (Tabla 1). La pregunta que se les hacía a los estudiantes en estos ítems era: *¿Cuántos números hay entre…?*

Tabla 1. Ítems de determinar la cantidad de números

Ítems con fracciones	**Características**	**Ítems con decimales**	**Características**
2/5 y 3/5	Fracciones pseudo-consecutivas	1.42 y 1.43	Números decimales pseudo-consecutivos
2/5 y 4/5	Fracciones no pseudo-consecutivas con mismo denominador	1.9 y 1.40	Números decimales no pseudo-consecutivos
5/9 y 5/6	Fracciones no pseudo-consecutivas con mismo numerador	2.3 y 2.6	Números decimales no pseudo-consecutivos

De los ítems de escribir un número, dos ítems eran con fracciones pseudo-consecutivas (1/3 y 2/3, y 1/8 y 1/9) y un ítem era con números decimales pseudo-consecutivos (3.49 y 3.50). La diferencia entre los dos ítems con fracciones es que en 1/3 y 2/3 ambas fracciones tienen el mismo denominador, y en 1/8 y 1/9 ambas fracciones tienen el mismo numerador. La pregunta en estos ítems era: *A continuación, puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe "imposible".*

Se realizaron ocho versiones distintas del cuestionario, en las que se variaba de forma aleatoria el orden de los ítems. No se limitó el tiempo de resolución, ya que esto podría incentivar una respuesta basada en el conocimiento del número natural. No estaba permitido el empleo de calculadoras ni dispositivos móviles que facilitaran la resolución de los ítems.

Las respuestas de los estudiantes a los dos tipos de ítems fueron analizadas de manera inductiva por cuatro investigadores, con el objetivo de identificar categorías según su naturaleza. En primer lugar, cuatro investigadores analizaron una muestra de las respuestas generando categorías. Estas categorías fueron discutidas hasta llegar a un consenso. Posteriormente, se analizaron el resto de respuestas. Las categorías obtenidas muestran diferentes formas de responder sobre el concepto de densidad. Se identificaron siete categorías para los ítems de determinar la cantidad de números y seis categorías para los ítems de escribir un número. En la sección de resultados se muestran estas categorías.

RESULTADOS

En primer lugar, se muestran las categorías identificadas (formas de responder) para cada uno de los dos tipos de ítems. En segundo lugar, se muestra la evolución de las diferentes formas de responder identificadas desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.

Formas de responder identificadas

Para los ítems de determinar la cantidad de números, se identificaron siete categorías (formas de responder):

- Respuestas en las que se escribía que hay un número infinito de números entre los dos dados (categoría *correcto,* Figura 1).

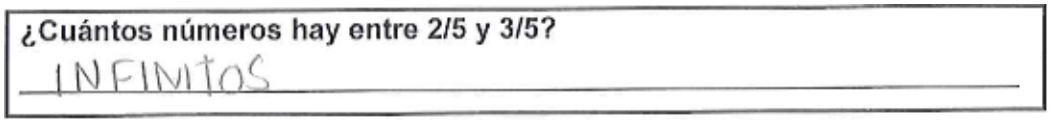


Figura 1. Respuesta de un estudiante de 6º de primaria

- Respuestas en las que se calculaba la diferencia entre los dos números dados (categoría *diferencia*). El estudiante de la Figura 2 da como resultado la diferencia entre 2.3 y 2.6.

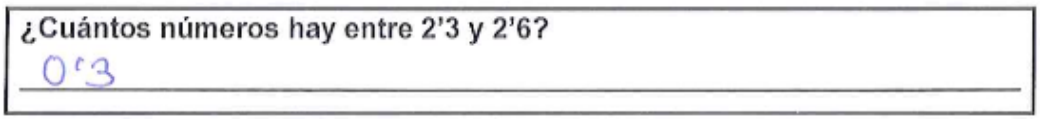


Figura 2. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

- Respuestas en las que se respondía que no hay números entre dos números pseudo-consecutivos y entre dos números no pseudo-consecutivos se daba una lista finita de números pseudo-consecutivos (categoría *sesgo*). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 3 escribe "ninguno" para los números 1.42 y 1.43 (pseudo-consecutivos) y 2.4 y 2.5 para los números 2.3 y 2.6 (no pseudo-consecutivos).

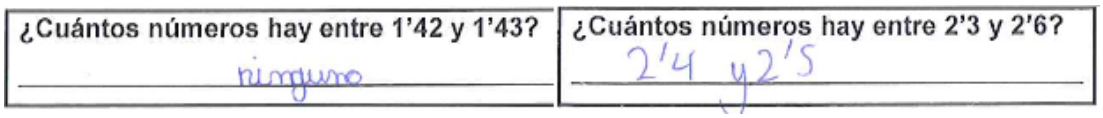


Figura 3. Respuestas de un estudiante de 2º de ESO

- Respuestas en las que se daba una lista finita de números pseudo-consecutivos entre los números dados, después de añadir un decimal a los números decimales o después de añadir un decimal en el numerador de las fracciones, o se decía la cantidad de números de estas listas (categoría *finita consecutiva*). El estudiante de la Figura 4 añade un decimal en el numerador de la fracción 2/5 y forma "una lista finita de números pseudo-consecutivos".

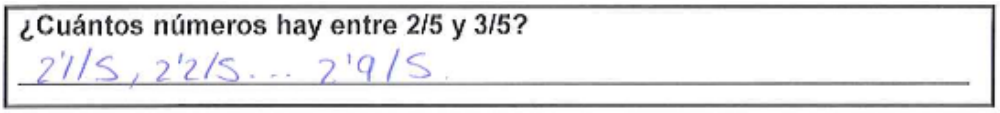


Figura 4. Respuesta de un estudiante de 4º de ESO

- Respuestas en las que se especificaban otros números incluidos entre los números dados (categoría *finita*). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 5 responde 1/2 entre 2/5 y 3/5.

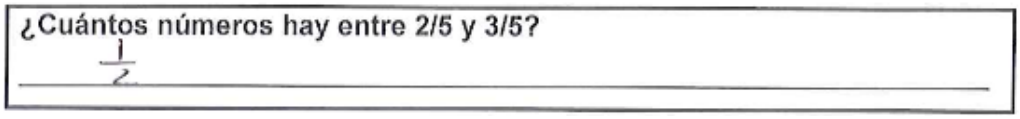


Figura 5. Respuesta de un estudiante de 4º de ESO

Finalmente, se identificaron respuestas en las que se especificaban otros números no incluidos entre los números dados (categoría *resto*) y respuestas en blanco (categoría *blanco*).

Para los ítems de escribir un número identificamos seis categorías:

- Respuestas en las que se escribía correctamente un número entre los dos números dados (categoría *correcto*). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 6 escribe 2/17 entre 1/8 y 1/9.



Figura 6. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

- Respuestas en las que se escribía que era imposible encontrar un número (categoría *sesgo*). El estudiante de la Figura 7 escribe "imposible" entre 3.49 y 3.50.



Figura 7. Respuesta de un estudiante de 4º de ESO

- Respuestas en las que se consideró que hay otros números, pero usaron una idea errónea de fracción "siguiente" (categoría *consecutiva*). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 8 considera que la siguiente fracción de 1/3 es 1/4.



Figura 8. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

- Respuestas en las que se calculó la diferencia entre los dos números dados (categoría *diferencia*). El estudiante de la Figura 9 da como resultado la diferencia entre 3.49 y 3.50.



Figura 9. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

Finalmente, se identificaron respuestas de estudiantes en las que se escribió un número no incluido entre los números dados (categoría *resto*) y respuestas en blanco (categoría *blanco*).

Evolución de las formas de responder

La Figura 10 muestra el porcentaje de uso de las formas de responder identificadas en los ítems de determinar la cantidad de números, desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.

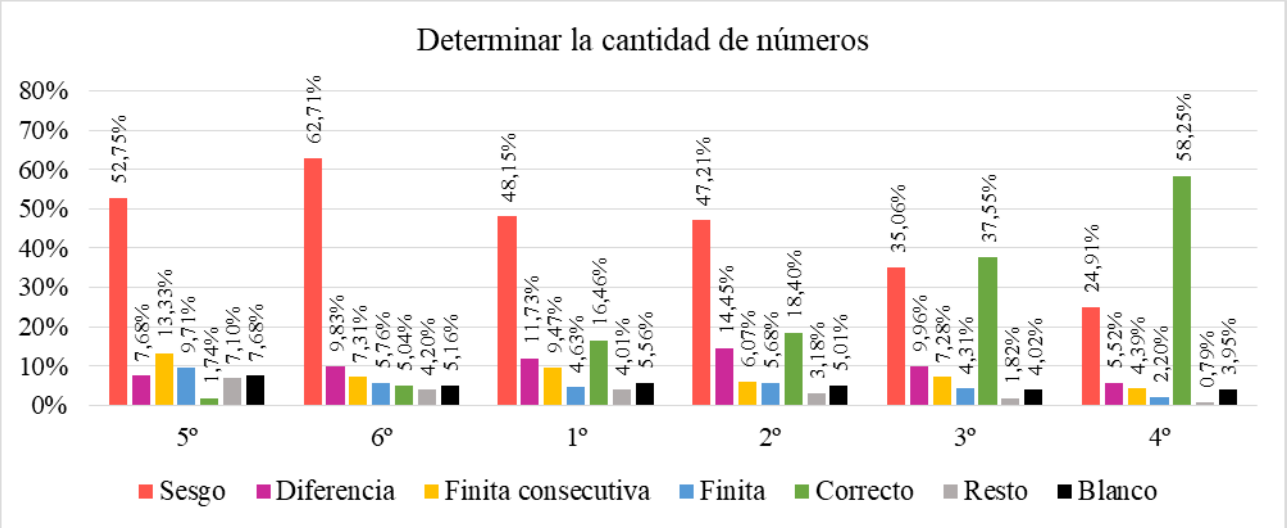


Figura 10. Porcentaje de empleo de cada categoría en los ítems de determinar la cantidad de números

Aunque la categoría *sesgo* aumentó desde 5º hasta 6º curso, decreció a lo largo de los cursos de secundaria. Este resultado muestra que alrededor de un 25% de las respuestas de los estudiantes de

4º de ESO todavía se centraban en el conocimiento del número natural. El descenso de la categoría *sesgo* corresponde con un aumento de la categoría *correcto*, que alcanza casi un 60% en 4º de ESO. Además, las categorías *finita consecutiva* y *finita* disminuyeron con los cursos y la categoría *diferencia* aumentó ligeramente hasta 2º de la ESO, disminuyendo después hasta 4º curso.

La Figura 11 muestra el porcentaje de uso de las formas de responder identificadas en los ítems de escribir un número, desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO. Al igual que en los ítems de determinar la cantidad de números, el porcentaje de la categoría *sesgo* aumentó desde 5º de primaria hasta 6º de primaria, y luego decreció a lo largo de los cursos, pero sin desaparecer en 4º de ESO; por lo que la influencia del conocimiento del número natural no desapareció en los últimos cursos de la educación secundaria. El decrecimiento de esta categoría se corresponde con un aumento de la categoría *correcto*, la cual aparece en un 10% en 5º de primaria, y alcanza un 50% en 4º de ESO. La categoría *consecutiva* decrece desde 5º de primaria hasta 4º de ESO y el uso de la categoría *diferencia* es menor que en los ítems de determinar la cantidad de números.

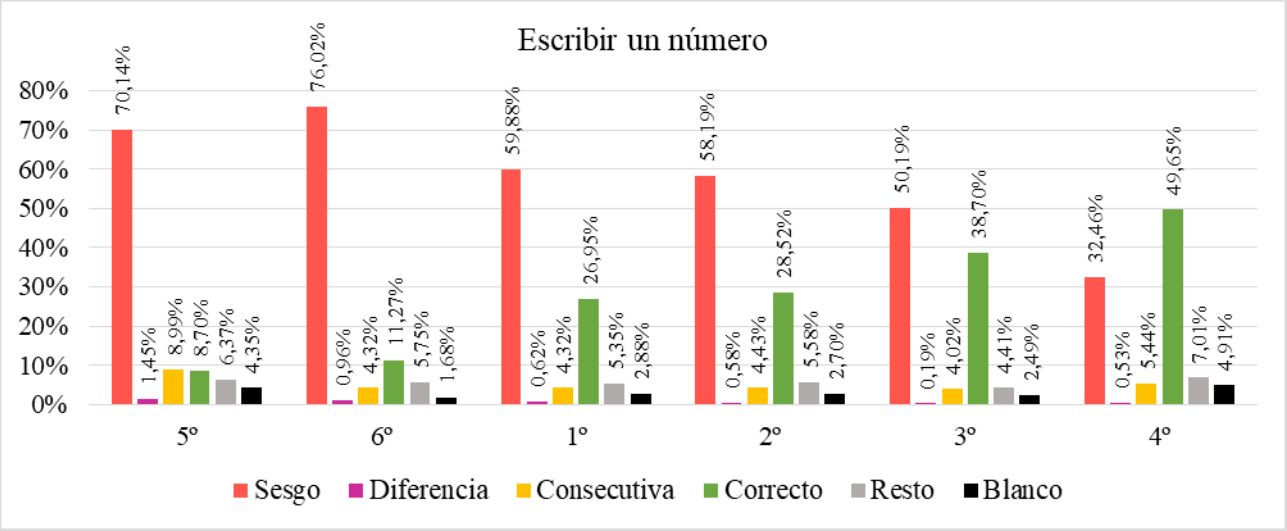


Figura 11. Porcentaje de empleo de cada categoría en los ítems de escribir un número

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta investigación tiene como objetivo identificar diferentes formas de responder sobre la densidad de los números racionales de estudiantes de primaria y secundaria. Los resultados obtenidos muestran que el sesgo del número natural, basado en la creencia de que el conjunto de los números racionales es discreto como los números naturales (categoría *sesgo*), está presente en ambos tipos de ítems a lo largo de todos los cursos. Es decir, los estudiantes creen que entre dos números racionales "pseudo-consecutivos" no hay números, y que entre dos números racionales no "pseudo-conscutivos" hay un número finito de números (Broitman et al., 2003; Merenluoto y Lehtinen, 2004; Moss y Case, 1999; Tirosh et al., 1999). Aunque el porcentaje de esta respuesta disminuye a lo largo de los cursos, todavía se observa en estudiantes de 4º de ESO (un 25% en ítems de determinar la cantidad de números y un 30% en ítems de escribir un número).

La disminución del sesgo del número natural se corresponde con un aumento de las respuestas correctas (categoría *correcto*). Es decir, estudiantes que consideraron que hay infinitos números entre dos números racionales dados, y que escribieron correctamente un número entre dos números racionales pseudo-consecutivos. El porcentaje de este tipo de respuestas fue muy bajo en 5º y 6º de primaria, y aunque su uso fue mayor a lo largo de los cursos, en 4º de ESO únicamente se observó en un 60% de las respuestas en ítems de determinar la cantidad de números y en un 50% en ítems de escribir un número. Por lo tanto, comprender la densidad de los números racionales es una tarea

compleja para estudiantes de educación primaria y secundaria (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004; Van Hoof et al., 2015). Comparando el porcentaje de respuestas correctas en ambos tipos de ítems, se observa mayor porcentaje de respuestas correctas en ítems de escribir un número que en ítems de determinar la cantidad de números (excepto en 4º de ESO). Esto puede deberse a que ser capaz de escribir un número entre dos números racionales pseudo-consecutivos no implica saber que hay infinitos números entre ambos, sino que un paso previo puede ser considerar que hay una cantidad finita de números (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 2010).

Por otra parte, desde el análisis inductivo se han identificado respuestas de estudiantes que pueden determinar formas de responder intermedias en la comprensión de la densidad de los números racionales. En los ítems de determinar la cantidad de números se han identificado las categorías *finita consecutiva* y *finita.* Las categorías *finita consecutiva* y *finita* muestran respuestas de estudiantes en las que no se consideró que entre dos números decimales pseudo-consecutivos o dos fracciones pseudo-consecutivas no hay números, pero sí un número finito de números. Es decir, este tipo de respuesta muestra que los alumnos identifican que hay otros números, pero todavía no consideran que hay infinitos (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 2010). En los ítems de escribir un número se ha obtenido la categoría *consecutiva*. Esta categoría muestra a estudiantes que identificaron números entre dos fracciones pseudo-consecutivas, pero se centraron en una idea incorrecta de "siguiente número".

Los resultados obtenidos en este estudio tienen implicaciones para la enseñanza. En primer lugar, se ha observado que el sesgo del número natural está presente en estudiantes de los últimos cursos de educación secundaria. Por lo tanto, los docentes de educación primaria y secundaria deben ser conscientes de este sesgo e intentar dar sentido al concepto de densidad desde los primeros pasos en la instrucción del número racional. En segundo lugar, las diferentes respuestas de estudiantes identificadas en este estudio han mostrado diferentes formas incorrectas de responder sobre la estructura densa de los números racionales antes de llegar a su comprensión. Esta información podría ser útil no solo para los docentes de primaria y secundaria que están enseñando los números racionales sino también para los programas de formación de maestros y profesores.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135) y con el apoyo de la Universidad de Alicante (UAFPU2018-035).

Referencias

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. y Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

Broitman, C., Itzcovich, H. y Quaranta, M. E. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 5-26.

Cramer, K., Post, T. y delMas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144.

Gómez, D. M. y Dartnell, P. (2019). Middle schoolers' biases and strategies in a fraction comparison task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(6), 1233-1250.

González-Forte, J. M., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). Gijón: SEIEM.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. y Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, *37*, 14-20.

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, *14*(5), 519-534.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.

Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Siegler, R. S. y Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909-918.

Smith, C. L., Solomon, G. E. y Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51*(2), 101-140.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O. y Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Retrieved May 05, 2005 from http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 39-56.

NIVELES DE RESPUESTA DE ESTUDIANTES DE TEORÍA DE GRAFOS USANDO DEFINICIONES DESDE EL MODELO DE VAN HIELE[1]

Levels of response of graph theory students using definitions through the lens of the van Hiele model

González, A.[a], Gallego-Sánchez, I.[a], Puertas, M. L.[b], Gavilán-Izquierdo, J. M.[a]

[a] Universidad de Sevilla, [b] Universidad de Almería

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas de estudiantes de ingeniería informática a dos tareas que implican el uso de definiciones propias de la teoría de grafos, concretamente, las de número cromático y árbol. Estas respuestas son categorizadas desde la óptica del modelo de van Hiele con el fin de dar soporte a una propuesta teórica de extensión de este modelo al ámbito de la teoría de grafos. Obtenemos como resultado de nuestra investigación que las respuestas analizadas cubren todos los descriptores de las categorías propuestas a nivel teórico para el proceso de uso de definiciones, y que estas se adecúan a las características propias de los niveles de van Hiele.

Palabras clave: *teoría de grafos, modelo de van Hiele, procesos de razonamiento, uso de definiciones*

Abstract

In this work, we analyze the answers provided by a sample of computer engineering students to two tasks involving the use of definitions in the context of graph theory, specifically, chromatic number and tree. These answers have been categorized through the lens of the van Hiele model in order to give support to a theoretical approach of an extension of this model to the field of graph theory. Our results show that the answers provided cover all the descriptors of the theoretical categories for the process of use of definitions, and also that they fit the characteristics of the van Hiele levels.

Keywords: *graph theory, van Hiele model, processes of reasoning, use of definitions*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario es un área de investigación emergente y relevante en educación matemática (González-Regaña, Martín-Molina, Toscano, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2021). Algunos autores señalan la importancia de la matemática discreta como una rama de la matemática relativamente nueva que tiene numerosas aplicaciones tanto en matemáticas (Heinze, Anderson y Reiss, 2004) como en otras disciplinas, por ejemplo, ciencias de la computación (Kasyanov, 2001). Esta importancia de la matemática discreta hace que los investigadores hayan puesto el foco en la necesidad de desarrollar marcos teóricos que permitan realizar investigaciones didácticas sobre sus conceptos en el nivel universitario (Ouvrier-Buffet, Meyer y Modeste, 2018). Dentro del amplio campo de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta, nuestra investigación se centra en el aprendizaje de la teoría de grafos, temática sobre la cual existen pocos estudios (Hazzan y Hadar, 2005; Medová, Páleníková, Rybanský y Naštická, 2019).

[1] Los autores primero, segundo y cuarto son miembros del Grupo de Investigación en Educación Matemática FQM-226 de la Junta de Andalucía y la tercera autora es miembro del grupo Supercomputación-Algoritmos TIC-146 de la Junta de Andalucía.

González, A., Gallego-Sánchez, I., Puertas, M. L., Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). Niveles de respuesta de estudiantes de teoría de grafos usando definiciones desde el modelo de van Hiele. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 327 – 334). Valencia: SEIEM.

La investigación que estamos desarrollando (Gavilán y González, 2016; González, Gallego-Sánchez, Gavilán-Izquierdo y Puertas, en prensa; González y Gavilán, 2017) tiene como objetivo caracterizar niveles de aprendizaje de la teoría de grafos desde la perspectiva del modelo de van Hiele. Este modelo ha sido tradicionalmente considerado en el ámbito de la geometría (Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Sarasua, 2013), aunque también se ha extendido a otras áreas de la matemática tales como el análisis (Navarro y Pérez-Carreras, 2006; Nisawa, 2018). En grafos surge de forma natural al considerar la analogía existente entre figuras geométricas planas y grafos, pues los vértices y las aristas de los grafos pueden recordarnos a los vértices y los lados de las figuras geométricas. Además, las transformaciones que dejan invariantes a las figuras geométricas, los movimientos rígidos, son un caso particular de las que dejan invariantes a los grafos, que son aquellas transformaciones continuas que conservan las conexiones entre vértices (González et al., en prensa). Este último trabajo propone una caracterización de niveles de van Hiele en el contexto de la teoría de grafos desarrollada a través de un análisis teórico estructurado a través de cinco procesos de razonamiento: reconocimiento, uso y formulación de definiciones, clasificación y demostración. Estos procesos, originalmente propuestos por Gutiérrez y Jaime (1998) en el contexto de la geometría, han sido traducidos a la teoría de grafos para poder vertebrar dicha propuesta teórica de niveles de razonamiento.

El objetivo de esta comunicación es dar soporte empírico a la validez de los descriptores propuestos por González et al. (en prensa) para el proceso concreto de uso de definiciones, para lo cual categorizamos las respuestas de los estudiantes que han participado en el estudio según los cuatro niveles propuestos por los autores. Se trata, por lo tanto, de comprobar que estas respuestas se adaptan a las categorías esperadas y que sus características responden a las particularidades de los niveles de van Hiele.

MARCO TEÓRICO

Presentamos primeramente algunas nociones básicas de la teoría de grafos (Biggs, 2003) que vamos a utilizar en el desarrollo del presente trabajo. Un grafo es un conjunto de elementos relacionados entre sí mediante una relación binaria. Formalmente, se define un *grafo* G como un par (V, E) donde V es un conjunto cualquiera (llamado conjunto de *vértices*) y E (conjunto de *aristas*) es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V. Dos vértices que forman una arista se dice que están conectados por dicha arista o bien que son *adyacentes* y se define el *grado* de un vértice como el número de vértices adyacentes a él. Por otra parte, se dice que un grafo G' es *subgrafo* de otro grafo G si los vértices y aristas de G' están contenidos en los vértices y aristas de G, respectivamente.

Un grafo se dice *conexo* si cualquier par de vértices puede unirse mediante una secuencia de vértices adyacentes. Esta propiedad permite definir las siguientes familias de grafos: un *camino* es un grafo conexo que tiene dos vértices de grado uno y el resto de grado dos; un *ciclo* es un grafo conexo con todos sus vértices de grado dos; un *árbol* es un grafo conexo que no contiene ningún ciclo como subgrafo. Finalmente, una *coloración con k colores* de los vértices de un grafo G es una asignación de un elemento de $\{1, 2, \ldots, k\}$ (que llamamos conjunto de *colores*) a cada vértice de G, de modo que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color; el mínimo k tal que esto es posible se denomina *número cromático* de G.

El referente teórico de este trabajo es el modelo de van Hiele, cuyas características generales han sido estudiadas en numerosos trabajos (Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez y Jaime, 1988; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Mayberry, 1983). Específicamente, consideramos la particularización de este modelo al ámbito de la teoría de grafos propuesta por González et al. (en prensa) en la que se plantean cuatro niveles de razonamiento. Si bien en dicho trabajo se analizan en términos de la evolución de cada uno de los cinco procesos de razonamiento mencionados anteriormente, podemos describirlos en términos generales empezando por un primer nivel de

carácter puramente visual, en el cual se percibe el grafo como un todo, pudiendo los estudiantes realizar clasificaciones exclusivas de familias de grafos, de manera que identifican, por ejemplo, los árboles y los caminos como familias disjuntas. En este nivel se manejan algunas propiedades globales (es decir, asociadas al grafo en su totalidad, como por ejemplo la conectividad) y se usa un lenguaje no matemático. En el segundo nivel, de carácter analítico, se manejan propiedades globales y locales (es decir, asociadas a subgrafos del grafo, como por ejemplo el grado) de forma aislada, pues las reglas lógicas que se pueden usar a este nivel son muy básicas (e.g., conjunción, disyunción o negación), y no permiten relacionarlas entre sí mediante deducciones lógicas. Las clasificaciones que pueden realizarse en este nivel, aunque en base a propiedades de los grafos, aún son de tipo exclusivo. El tercer nivel, de carácter preformal, supone una mejora en las habilidades lógicas suficiente para comprender y reconocer relaciones entre propiedades y para hacer razonamientos informales y clasificaciones inclusivas de familias de grafos, admitiendo ahora que los caminos están incluidos en la familia de los árboles. Finalmente, en el cuarto nivel, de carácter formal, los grafos pueden ser tratados como objetos matemáticos abstractos, pudiéndose construir razonamientos formales sobre los mismos. Estos cuatro niveles verifican las características generales del modelo de van Hiele, entre las que destacan la jerarquización y la secuencialidad.

Específicamente, con respecto al proceso de uso de definiciones, en dicha propuesta se plantea el nivel 1 como un nivel inicial en el que los estudiantes pueden utilizar definiciones que no requieren conocimientos ni habilidades en teoría de grafos, salvo la mera distinción visual de las partes más elementales del grafo: vértices y aristas. En el nivel 2, pueden usar definiciones con estructura lógica simple (e.g., que incluyan los conectores lógicos "y" u "o") siempre y cuando estén basadas en propiedades de los grafos que ya conocen. En el nivel 3 pueden utilizar cualquier definición, incluyendo a aquellas que implican un uso de relaciones lógicas más complejas (e.g., cuantificador existencial, cuantificador universal, mínimo, máximo, etc.), ya que poseen un mayor dominio de los razonamientos deductivos. Finalmente, en el nivel 4, los estudiantes adquieren una comprensión de la estructura lógica de las matemáticas que les permite aceptar que distintos términos en teoría de grafos puedan tener definiciones equivalentes.

METODOLOGÍA

Participaron en el estudio 39 estudiantes (que numeramos del 1 al 39) de un grupo de la asignatura de primer curso "Lógica y Matemática Discreta", impartida en el primer semestre. En este grupo había alumnos de distintos grados en ingeniería informática de la Universidad Politécnica de Madrid. Durante la última clase del semestre, los estudiantes respondieron a un cuestionario (instrumento de recogida de datos de nuestro estudio) cuyos resultados serían considerados para la evaluación de la asignatura y como datos para esta investigación, dando expresamente su consentimiento para este último fin. Este cuestionario, cuyas tareas podían realizarse con los conocimientos adquiridos en la asignatura, fue respondido de forma escrita e individual por cada uno de los participantes.

El cuestionario impartido contenía cinco ítems de respuesta abierta diseñados con el objeto de evaluar los procesos de uso y formulación de definiciones en teoría de grafos desde la perspectiva del modelo de van Hiele. Para ello, hemos seguido el planteamiento de Gutiérrez y Jaime (1998) a la hora de diseñar ítems para tal fin. En efecto, hemos considerado por una parte que los estudiantes tengan la oportunidad de explicitar sus razonamientos en las respuestas, y por otra que todos los niveles sean evaluados al menos por un ítem.

La metodología empleada en esta investigación es de corte cualitativo-interpretativo, de manera que analizamos las respuestas de los estudiantes asignando un nivel en función de las categorías que hemos mencionado en el marco teórico. Para ello, cada investigador analizó las respuestas en primer lugar de manera individual, para posteriormente realizar una puesta en común en la que se discutieron los casos discrepantes y llegar así a un consenso.

En esta comunicación presentamos los resultados correspondientes a dos de los ítems del cuestionario correspondientes al proceso de uso de definiciones:

Ítem 1. *Colorear los vértices de un grafo consiste en asignar un color a cada uno de ellos de manera que dos vértices unidos por una arista no tengan el mismo color. Colorea el siguiente grafo (Figura 1) usando solo 3 colores. [Nota: si no tienes lápices de colores puedes usar números para asignar a cada vértice: rojo = 1, azul = 2, verde = 3.]*

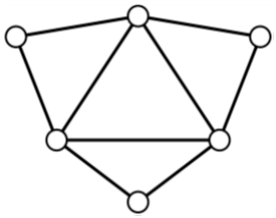


Figura 1. Grafo correspondiente al ítem 1.

El número cromático de un grafo es el mínimo número de colores necesarios para colorearlo. ¿Cuál es el número cromático del grafo dibujado justo arriba? ¿Por qué?

Ítem 2. *Dadas las siguientes definiciones: árbol (grafo conexo y sin ciclos), arbusto (grafo tal que dos vértices cualesquiera están conectados por un único camino), seto (grafo conexo con n vértices y n-1 aristas). Dibuja un ejemplo para cada una de ellas. ¿Qué relación(es) existen entre las tres definiciones?*

Las definiciones que incluyen estos ítems son de distinta complejidad. Concretamente, la definición de coloración del primer ítem no requiere de conocimientos sobre grafos para usarla correctamente (más allá de distinguir visualmente vértices y aristas), con lo cual esta parte de este ítem puede ser respondida correctamente por estudiantes de nivel 1. Sin embargo, la definición de número cromático es una definición más compleja, pues aparece la palabra "mínimo". Entonces, para responder de forma correcta a esta segunda parte hay que justificar, por un lado, que se puede colorear el grafo con 3 colores, pues así ha podido hacerse en el apartado anterior, y por otro, que no se puede colorear con menos. Para esto último, es necesario razonar que, como el grafo contiene ciclos de orden 3, cuyo número cromático es 3, el grafo dado debe tener un número cromático igual o superior. Así, las respuestas de nivel 2 se remiten a un uso aislado de propiedades, sin muestra alguna de relaciones entre las mismas, mientras que las de nivel 3 contienen al menos parte de los argumentos que hemos mencionado, mostrando un manejo de la lógica propio de este nivel. Por tanto, las respuestas al primer ítem permiten evaluar los niveles 1, 2 y 3 en el uso de definiciones. (Notar que este ítem no evalúa el nivel 4, pues en él no aparecen definiciones equivalentes, cuya aceptación permite reconocer razonamientos de este nivel).

En el segundo ítem aparecen tres definiciones equivalentes de árbol, dos de ellas etiquetadas con nombres arbitrarios escogidos por los investigadores (arbusto y seto), de manera que los estudiantes no sepan de entrada que estas caracterizan a la misma familia. Las definiciones de árbol y seto tienen estructura lógica simple, pues contienen propiedades de grafos unidas por la conjunción lógica "y", por lo que se espera que los estudiantes de nivel 2 sean capaces de hallar ejemplos de estos. En contraste, la definición de arbusto es más compleja, pues contiene un cuantificador universal y un cuantificador de existencia única, por lo que se espera que suponga una dificultad para los estudiantes de nivel 2 pero no para los de nivel 3, que tienen habilidades lógicas para comprender esta definición. Sin embargo, estas destrezas no son suficientes para responder correctamente a la última pregunta, sobre la relación entre las definiciones, lo que nos permitirá saber si los estudiantes detectan la equivalencia entre las mismas, característica de nivel 4. Así, el segundo ítem permite discriminar entre los niveles 2, 3 y 4 en las respuestas. (Notar que este ítem no evalúa el nivel 1, pues las definiciones empleadas requieren del conocimiento de ciertas propiedades de los grafos).

RESULTADOS

En el primer ítem hemos obtenido respuestas de todos los niveles esperados. Por ejemplo, el estudiante 30 realiza una coloración correcta del grafo, pero afirma que "su número cromático es 1 porque puede colorearse con un color". Así, el alumno muestra nivel 1 en este ítem porque es capaz de realizar una tarea que no requiere de conocimientos sobre teoría de grafos, pero después da una justificación que no demuestra ningún tipo de habilidad lógica ni uso de propiedades de grafos. Solo muestra comprensión de la tarea concreta de colorear con 3 colores, pero no ha sabido usar esa definición para comprender la de número cromático.

El estudiante 27 da una respuesta de nivel 2 a este ítem, pues realiza correctamente la primera parte y en la segunda justifica que el número cromático es 3 porque "no puede colorearse con un número menor de colores puesto que tiene algunos vértices de grado 4". Muestra nivel 2 porque es capaz de usar propiedades matemáticas para justificar su respuesta, pues es cierto que el grafo posee vértices de grado 4, pero no muestra capacidad para relacionarlas entre sí. De hecho, el grado máximo de los vértices de un grafo no sirve para acotar inferiormente el número cromático, sino superiormente.

El estudiante 15, que también colorea correctamente el grafo, en la segunda parte hace alusión solamente a la necesidad de usar 3 colores: "El número cromático es 3. El grafo lo puedes dividir en subgrafos (ciclos) de forma que quedan triángulos; en un triángulo el número cromático mínimo es 3". Ubicamos esta respuesta en el nivel 3 porque, aunque el estudiante no alude a la condición suficiente (o sea, que puede colorearse con 3 colores como acaba de comprobar) y tiene alguna imprecisión ("número cromático mínimo"), muestra que la colorabilidad es una característica hereditaria de los grafos (i.e., el número cromático de un grafo es mayor o igual que el de cualquiera de sus subgrafos), lo cual supone una destreza lógica característica de este nivel.

En la segunda pregunta, sobre la noción de árbol, también hemos obtenido respuestas de todos los niveles que esperábamos. Un ejemplo de respuesta de nivel 2 fue dada por el estudiante 23, que solo da ejemplos correctos de árbol y seto pero no de arbusto. Además, proporciona una justificación muy elemental para relacionar las definiciones, pues dice que "árboles y setos no tienen ciclos. Los tres son conexos". Así, alude a propiedades que aparecen textualmente en las definiciones, salvo en el caso de la conectividad de los arbustos, que es inmediata de ver aunque en ella no aparezca explícitamente el término "conexo".

Una respuesta de nivel 3 es dada por el estudiante 13 (ver Figura 2), que realiza correctamente los tres ejemplos, mostrando así comprensión de las tres definiciones. Además, para relacionar estos tres conceptos, realiza correctamente una inclusión de clases, lo cual supone un uso considerable de la lógica que caracteriza a este nivel.

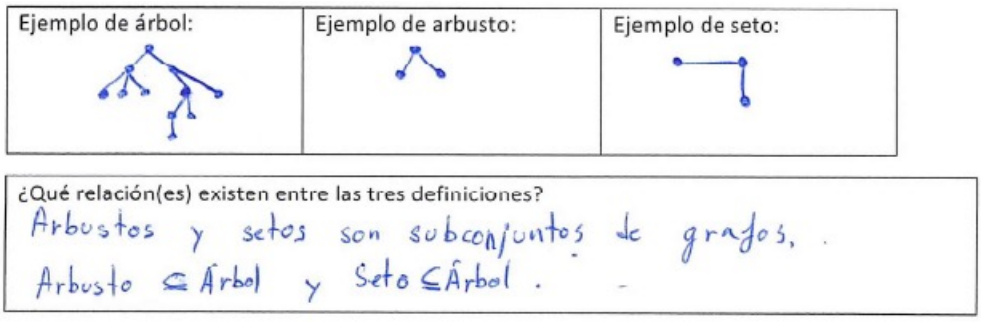


Figura 2. Respuesta de nivel 3 para el ítem 2.

Finalmente, el estudiante 38 (ver Figura 3), proporciona la respuesta que demuestra el mayor grado de comprensión posible para este ítem, pues además de dar tres ejemplos correctos, afirma que "las

tres definiciones son equivalentes". Así, ubicamos este tipo de respuestas en el nivel 4 por mostrar que acepta que un concepto puede definirse de distintas formas.

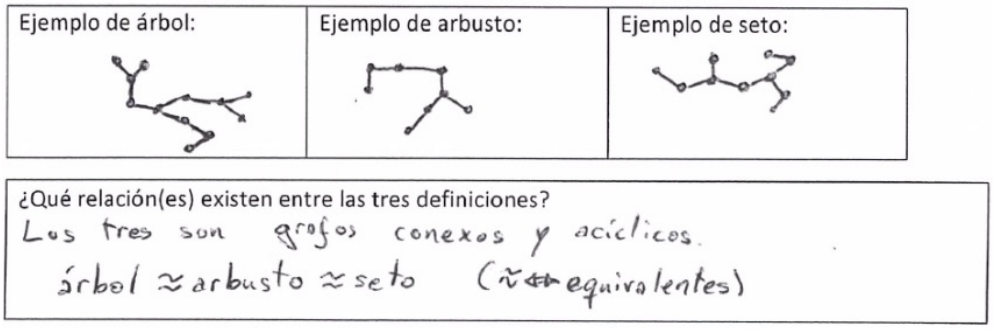


Figura 3. Respuesta de nivel 4 para el ítem 2.

Los resultados obtenidos en cada ítem aparecen reflejados en la Tabla 1. Notamos además que el 77% de los alumnos obtuvieron en ambos ítems o bien el mismo nivel (46%) o bien una diferencia de un solo nivel (31%).

Tabla 1. Resultados obtenidos en cada ítem.

	Número de estudiantes (Porcentaje)	
	Ítem 1	Ítem 2
Sin clasificar	1 (3%)	4 (10%)
Nivel 1	4 (10%)	__
Nivel 2	22 (56%)	19 (49%)
Nivel 3	12 (31%)	12 (31%)
Nivel 4	__	4 (10%)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las categorías de respuestas obtenidas en este trabajo atienden a la jerarquización y secuencialidad que caracteriza a los niveles, pues reflejan que el nivel n supone una sofisticación en el razonamiento matemático del nivel n-1, además de que un estudiante no puede tener nivel n sin la capacidad de razonamiento del nivel n-1 (Jaime y Gutiérrez, 1990). En efecto, en ambos ítems, las categorías de respuestas de cada nivel han sido construidas añadiendo nuevos descriptores de habilidades a los de la categoría correspondiente al nivel anterior. Además, las categorías han sido definidas no solo a partir de las habilidades que muestran los alumnos, sino también a la vista de sus dificultades, tal y como se caracterizan los niveles van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998). Por tanto, estos hechos suponen un factor de validación del instrumento que hemos diseñado.

Por otra parte, hemos podido comprobar que todas las categorías de respuestas esperadas para ambos ítems han tenido soporte empírico, pues hemos hallado distintos ejemplos por cada categoría entre las respuestas de los estudiantes. Efectivamente, el análisis del ítem 1 ha revelado respuestas de nivel 1, en los casos donde solo se manejan definiciones que no demandan más que la mera distinción visual entre vértices y aristas, pero sin manifestar comprensión de propiedades matemáticas de los grafos. Igualmente, hemos registrado respuestas de nivel 2 mediante ambos ítems, en los casos en los que los estudiantes muestran comprensión de definiciones formuladas a

partir de conectores lógicos elementales, como la conjunción y la disyunción, pero sin ser capaces de establecer relaciones entre las mismas. También, ambos ítems han dado lugar a respuestas de nivel 3, en las que hemos encontrado estudiantes capaces de manejar definiciones más complejas, que requieren de la comprensión de expresiones lógicas menos elementales, como por ejemplo el cuantificador existencial único. Finalmente, el ítem 2 ha mostrado a una minoría de estudiantes capaces de aceptar que una misma noción puede tener definiciones equivalentes. Estos hechos permiten dar una primera validación a los descriptores propuestos por González et al. (en prensa) para el proceso de uso de definiciones en teoría de grafos, cumpliendo con el objetivo que planteamos en esta comunicación. Más aun, hemos obtenido descriptores de los niveles para los contenidos específicos de cada ítem (i.e., número cromático y árbol), lo cual nos permite refinar la propuesta general, como ya se ha realizado con contenidos específicos de geometría (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990).

Respecto a la proximidad observada en los niveles de las respuestas de un mismo estudiante a ambos ítems, notamos que nuestros resultados muestran discrepancias similares a las que han sido observadas en otros trabajos. Por ejemplo, estudios clásicos sobre este modelo en el ámbito de la geometría (Gutiérrez y Jaime, 1988; Mayberry, 1983) revelan discrepancias entre los niveles de respuesta según el concepto por el que se le pregunte al estudiante. Aunque esto podría parecer una contradicción con los planteamientos del modelo de van Hiele, Gutiérrez y Jaime (1988) señalan que ello podría deberse a que los estudiantes, especialmente de niveles 1, 2 y 3, tienen una visión local fragmentada de las matemáticas que inhibe su transferencia de conocimientos y habilidades de razonamiento de un área de la matemática a otra.

Por tanto, al haber cubierto todos los descriptores esperados y no haber encontrado ninguna disonancia con el modelo teórico (González et al., en prensa), no sería necesario por el momento la modificación de los descriptores propuestos inicialmente. Para ello, es preciso destacar limitaciones de este trabajo, como por ejemplo la graduación de las categorías empleadas para analizar las respuestas de los estudiantes. Aunque nos han permitido alcanzar nuestro objetivo, hemos detectado distintas respuestas a una tarea que muestran un mismo nivel pero distinta calidad en los razonamientos. Esta limitación podría superarse considerando una metodología que incluyera otros parámetros además de los niveles de van Hiele, como por ejemplo el método de cálculo de los grados de adquisición (Gutiérrez et al., 1991), que considera aspectos como la corrección y la completitud de las respuestas. Dicho método, que ha sido empleado en distintas investigaciones, como por ejemplo la de Sarasua (2013), proporciona una ponderación del porcentaje de adquisición de cada uno de los niveles que posee el estudiante. Así, el uso de esta metodología serviría también para analizar el resto de los ítems del cuestionario, superando así otra de las limitaciones de este trabajo, como son el número de tareas analizadas y la restricción a un único proceso. Ello nos permitiría obtener perfiles de razonamiento de los estudiantes en el uso y formulación de definiciones y, además, profundizar en las discrepancias de los niveles obtenidos en cada respuesta mediante alguna medida de consenso, como la que propone Mayberry (1983) para analizar la dispersión de la asignación de niveles de razonamiento según el contenido matemático involucrado.

Referencias

Biggs, N. L. (2003). *Discrete mathematics* (2ª ed.). Oxford University Press.

Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (1), 31–48.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3). Reston, VA: N.C.T.M.

Gavilán-Izquierdo, J. M. y González, A. (2016). Investigación sobre el concepto de grafo a través del modelo de Van Hiele. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 597). Málaga, España: SEIEM.

González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M y Puertas, M. L. (en prensa). Characterizing the Cognitive Development of Graph Theory Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education.* Aceptado para su publicación.

González, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2017). Analizando el reconocimiento de grafos a través del modelo de Van Hiele. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 286–293). Madrid, España: FESPM.

González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81–97.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1988). Globality versus locality of the van Hiele levels of geometric reasoning. *Unpublished manuscript*. Valencia, España: Universitat de Valencia.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning problems in Mathematics, 20*(2/3), 27–46.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics* Education*, 22*(3), 237–251.

Hazzan, O. y Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 24*(3), 255–272.

Heinze, A., Anderson, I. y Reiss, K. (2004). Discrete mathematics and proof in the high school. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36***,** 44–45.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295–384). Sevilla, España: Alfar.

Kasyanov, V. N. (2001). Graph applications in programming. *Programming and Computer Software, 27*, 146–164.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for research in mathematics education, 14*(1), 58–69.

Medová, J., Páleníková, K., Rybanský, Ľ. y Naštická, Z. (2019). Undergraduate students' solutions of modeling problems in algorithmic graph theory. *Mathematics*, *7*(7), 572.

Navarro, M. A. y Pérez-Carreras, P. (2006). Constructing a concept image of convergence of sequences in the van Hiele framework. *CBMS Issues in Mathematics Education, 13*, 61–98.

Nisawa, Y. (2018). Applying Van Hiele's Levels to basic research on the difficulty factors behind understanding functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(2), 61-65.

Ouvrier-Buffet, C., Meyer, A. y Modeste, S. (2018). Discrete mathematics at university level. Interfacing mathematics, computer science and arithmetic. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N.M Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 255–264). Kristiansand, Noruega: University of Agder e INDRUM.

Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 43–65). Bilbao, España: SEIEM.

PRÁCTICAS DE AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PROMOVIDAS POR FUTUROS PROFESORES

SELF-REGULATION PRACTICES IN MATH LEARNING PROMOTED BY FUTURE TEACHERS

Hidalgo-Moncada, D.[a], Vanegas, Y.[b] y Díez-Palomar, J.[a]

[a] Universidad de Barcelona, [b] Universidad de Lleida

Resumen

En tiempos recientes los procesos de enseñanza y aprendizaje se han visto enfrentados a diversos cambios, y más aún durante el último año, en el cual la enseñanza ha tenido que impartirse de forma virtual debido a la crisis sanitaria. Dado este contexto, la autorregulación del aprendizaje ha tomado protagonismo en la educación como una de las herramientas indispensables para el desarrollo autónomo de los estudiantes. Este estudio analiza cómo dos futuros docentes de matemáticas incorporan prácticas que promueven la autorregulación en sus clases. Se identifican las prácticas promovidas en la planificación inicial y en la propuesta de mejora que se realiza después de reflexionar sobre tal planificación. Los resultados muestran que la reflexión en ambos docentes ha permitido plantearse la incorporación de nuevas prácticas de autorregulación, sobre todo las del área emocional y área interaccional.

Palabras clave: *autorregulación del aprendizaje, matemáticas, enseñanza, formación de profesores*

Abstract

In recent times the teaching and learning processes have faced diverse changes, and even more so during the last year, in which teaching activities have had to be performed virtually due to the health crisis. Given this context, learning self-regulation has acquired greater prominence in education as one of the essential tools for the autonomous development of students. This study analyses how two future math teachers incorporate practices that promote self-regulation in their classes. The practices promoted in the initial planning and in the improvement proposal that is carried out after reflecting on such planning are identified. The results show that the reflection in both teachers has allowed to consider the incorporation of new self-regulation practices, especially those of the emotional area and interactional area.

Keywords: *learning self-regulation, mathematics, teaching, teacher training*

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas el sistema educativo ha presentado grandes cambios, entre ellos, el foco de atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje, donde inicialmente este estaba centrado en el profesor y los contenidos, para luego centrarse en el alumno y en sus habilidades para construir su propio conocimiento (Cerezo, Núñez, Fernández, Suárez-Fernández y Tuero, 2011). Esto provocó un cambio de roles tanto del docente como del estudiante. El docente deja de ser solo el promotor de aprendizajes a través de la enseñanza de conocimientos, pasando a ser alguien que impulsa la autonomía, el pensamiento crítico y ayuda en la construcción de una actitud reflexiva (Perrenoud, 2005). Debido a esto la investigación en formación docente ha considerado relevante estudiar el desarrollo de competencias transversales, lo que hoy en día ha tomado

Hidalgo-Moncada, D., Vanegas, Y. y Díez-Palomar, J. (2021). Prácticas de autorregulación del aprendizaje de las matemáticas promovidas por futuros profesores. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 335 – 342). Valencia: SEIEM.

protagonismo debido a los cambios ocasionados en los procesos de enseñanza y aprendizaje por la crisis sanitaria. Se debe brindar oportunidades a los estudiantes para aprender de forma autónoma, por lo que se vuelve indispensable indagar sobre el desarrollo de competencias como la autorregulación (Sanmartí, 2019). Diversas investigaciones han confirmado que aquellos estudiantes con un alto grado de autorregulación poseen un mayor éxito académico, ya que les permite organizar y estructurar mejor sus aprendizajes (Cueli, García, y González-Castro, 2013; Sertel y Münire, 2013). Estas investigaciones también muestran que la autorregulación aumenta la motivación de los estudiantes y potencia la autoeficacia en el aprendizaje (Lavasani, Mirhosseini, Hejazi, y Davoodi, 2011). Por otra parte, el desarrollo de esta competencia aporta herramientas al docente a la hora de planificar y gestionar sus prácticas.

El objetivo del presente estudio es analizar y describir cómo dos futuros docentes de matemáticas, pertenecientes a un máster en formación de profesores de secundaria en España, promueven la autorregulación del aprendizaje en las clases de matemáticas antes y después de reflexionar sobre su práctica y en las actividades que han propuestos a sus estudiantes. Esperamos que este trabajo en conjunto con otros permita en un futuro aportar elementos para mejorar la propuesta de formación de tal manera que se incorpore de manera consciente la formación sobre la autorregulación del aprendizaje de las matemáticas.

MARCO TEÓRICO

En los últimos años ha aumentado la necesidad por investigar y determinar qué conocimientos profesionales debe tener el profesor de matemática, dirigiendo la atención al tipo de competencias que este debería desarrollar, entre otras, las transversales, como la de "aprender a aprender" (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018; Vanegas, Giménez y Font, 2015). Esta competencia se puede enseñar a través del aprendizaje autorregulado, el cual promueve el estudio autónomo, constructivo, cooperativo y diversificado (De la fuente y Justicia, 2003). Según Pintrich (2000) el aprendizaje autorregulado es un proceso activo en el cual los estudiantes establecen metas para su aprendizaje, donde monitorizan, regulan y controlan su cognición, motivación y conducta, guiados por sus metas de aprendizaje y por aspectos contextuales. Estas prácticas de autorregulación, las entendemos como acciones que realiza el docente para guiar a los estudiantes hacia un aprendizaje autorregulado. La autorregulación puede ser promovida a través de diversas prácticas docentes (Hidalgo-Moncada, Díez-Palomar y Vanegas, 2020), las cuales son indispensables en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que permiten tanto al docente como al estudiante desarrollarse de forma autónoma, lo que es clave para tomar decisiones adecuadas en diferentes contextos.

Existen diversos enfoques centrados en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Uno de ellos es el enfoque Onto-semiótico (EOS). Este enfoque propone un modelo de análisis didáctico para la práctica profesional llamado Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM). El CCDM propone diferentes herramientas para estudiar la práctica del profesor de matemáticas (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016) Abordando tanto las competencias matemáticas del docente como las relacionadas con el análisis e intervención didáctica que este realiza en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Una de estas herramientas son los *criterios de idoneidad didáctica*, los cuales se estructuran en seis facetas: Epistémica (Ep); Cognitiva (C); Interaccional (I); Mediacional (M); Emocional (Em) y Ecológica (Ec). Herramientas como estas permiten guiar al docente, para llevar a cabo una práctica reflexiva.

Diversos trabajos han indagado sobre cómo y cuándo la acción reflexiva del docente puede determinar la eficiencia y profundidad del proceso de enseñanza y aprendizaje. Algunos de ellos resaltan los beneficios de una reflexión social, donde se analiza el currículo o aspectos globales de la educación matemática, mientras que otros resaltan la reflexión introspectiva, aquella que radica en prácticas individuales del profesorado (Perrenaud, 2007). Font, Breda, Seckel y Pino-Fan (2018) dan a conocer cómo la reflexión de la práctica permitió mejorar la competencia de Análisis e

Intervención Didáctica de los futuros docentes. Por su parte Vanegas, Giménez y Font (2017) consideran que un análisis reflexivo en la labor docente es importante para el desarrollo profesional, ya que permite analizar lo que serán unas buenas matemáticas.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

En esta investigación usamos una metodología de estudio de caso (Rodríguez, Gil y García, 1999). Abordamos el caso particular de dos futuros profesores de matemáticas (FP1 y FP2). Analizamos en profundidad sus Trabajos de Fin de Máster (TFMs), para identificar las prácticas de autorregulación promovidas en su planificación de secuencia didáctica y en la reflexión que realizan sobre su propia práctica. Estos futuros profesores cursaron el Máster de Formación de Profesores de Secundaria en una Universidad española, en el año académico 2019-2020. Los FP y sus TFMs han sido seleccionados considerando que presentaban una reflexión más detallada, permitiendo un análisis más rico en el cual se podían observar claramente las prácticas que promovían en sus estudiantes. En el caso de FP1 ha abordado el contenido matemático "Geometría plana: rectas y ángulos en el plano", mientras que FP2 trató el contenido matemático: "Proporcionalidad, medida y error".

En los TFMs, los FP en primer lugar planifican una secuencia didáctica, luego la aplican en su prácticum, posteriormente realizan una reflexión acerca de su práctica guiados por los criterios de idoneidad y, por último, presentan una propuesta de mejora, en la cual plasman explícitamente nuevas actividades o implícitamente, mencionando lo que harían en un futuro para mejorar su práctica. Dicho esto, el análisis de datos se realizó en dos fases. En la primera de ellas se estudiaron las actividades escolares de la secuencia didáctica inicial propuesta por los FP, lo que permitió identificar las prácticas de autorregulación que en ellas se promovían. En la segunda fase se analizaron tanto la reflexión realizada por los FP a lo largo de los TFMs como las nuevas actividades incorporadas en sus propuestas de mejora. Cabe señalar que FP1 ha planteado de forma explícita nuevas actividades en su propuesta de mejora, mientras que FP2 no explicita nuevas actividades, sino que señala posibles cambios en sus planificaciones futuras.

En ambas fases se utilizó un instrumento el cual consta de 23 prácticas (P_x) que caracterizan la promoción de la autorregulación en el aprendizaje de las matemáticas (Hidalgo-Moncada et al., 2020). Este instrumento considera, por una parte, aspectos teóricos de diversos autores respecto a prácticas de autorregulación en la enseñanza de las matemáticas y por otra, agrupa tales prácticas según los seis criterios de idoneidad didáctica que plantea el Enfoque Onto-semiótico (Breda, Font, do Rosario y Villela, 2018). A continuación, en la Tabla 1, se muestra a manera de ejemplo parte del instrumento utilizado para el análisis e identificación de las prácticas de autorregulación, que promueven los profesores en sus estudiantes.

Tabla 1. Extracto del instrumento Prácticas de autorregulación en el aprendizaje de las matemáticas

Criterios de idoneidad	Prácticas de autorregulación
Idoneidad Epistémica (Ep)	Promover la argumentación y explicación de procedimientos utilizados.
Idoneidad Cognitiva (C)	Promover procesos de alta demanda cognitiva, como la generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.
Idoneidad Interaccional (I)	Organizar formas de trabajo cooperativo durante la clase o fuera de ella.
Idoneidad Mediacional (M)	Implementar diferentes medios de enseñanza que potencien la búsqueda, procesamiento y obtención de información que debe asimilar el alumno, los cuales ayudarán a la comprensión de los conceptos, tareas o actividades matemáticas.
Idoneidad Emocional (Em)	Considerar los intereses de los estudiantes, su contexto familiar y social, para generar actividades a fines con sus intereses, permitiendo un mejor estado emocional, motivacional y actitudinal.
Idoneidad Ecológica (Ec)	Implementar diferentes formas de evaluación para un mismo contenido. Esto proporciona más oportunidades al estudiante para mostrar el grado de comprensión de un tema.

Las 23 prácticas son codificadas con P_X, donde x corresponde al número de la práctica. Por ejemplo, P_3 se refiere a la práctica de autorregulación número tres. Por otra parte, las 23 prácticas están clasificadas según los seis criterios de idoneidad (C, Ep, I, M, Ec y Em), así una codificación como $Ep.P_3$, corresponde a *la práctica número tres* relacionada con la *idoneidad epistémica.*

RESULTADOS

Los resultados se organizan, describiendo las prácticas de autorregulación identificadas en los TFM de FP1 y FP2 antes y después de realizar la reflexión sobre su práctica. Cabe señalar que la cuantificación de las prácticas observadas después de la reflexión, consideran tanto las prácticas identificadas antes de la reflexión como las identificadas después de esta.

Prácticas de autorregulación promovidas por FP1

En la Figura 1, se muestran las prácticas identificadas en el TFM de FP1, para cada una de las idoneidades. El número de prácticas que se observa en el diagrama ha sido identificadas y contabilizadas a lo largo del TFM, por ejemplo, *la práctica tres correspondiente al criterio de idoneidad epistémica se identificó tres veces a lo largo del TFM antes de la reflexión*.

Al observar la Figura 1, notamos que FP1 promueve la autorregulación en el aprendizaje de las matemáticas, resaltando las prácticas relacionadas con los criterios de idoneidad Epistémico y Cognitivo. De manera específica, se constata que en la planificación inicial (antes de la reflexión), se observan prácticas afines con cuatro de los seis criterios de idoneidad, el Epistémico, Cognitivo, Interaccional y Mediacional ($Ep.P_3$, $C.P_6$ y $C.P_9$, $I.P_{11}$, $I.P_{12}$ y $I.P_{13}$ y $M.P_{18}$). Concretamente, se observan prácticas que promueven la argumentación de procedimientos desarrollados o que fomentan procesos de alta demanda cognitiva como los cambios de representación, conjeturar y conexiones intra-matemáticas.

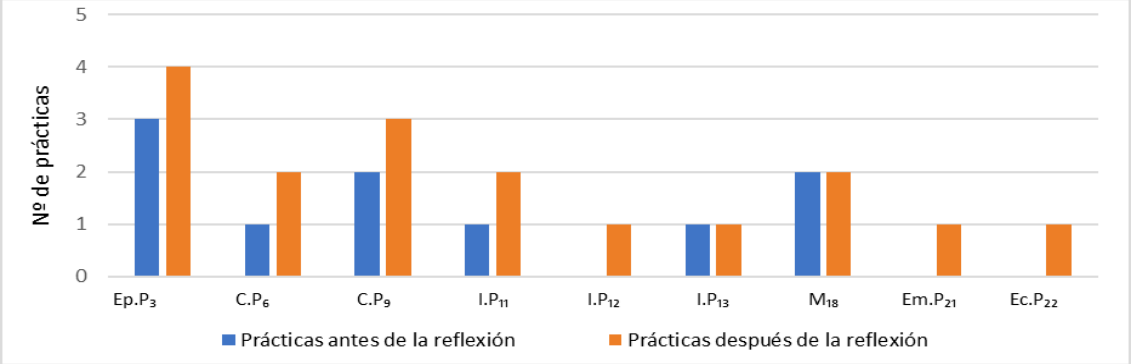
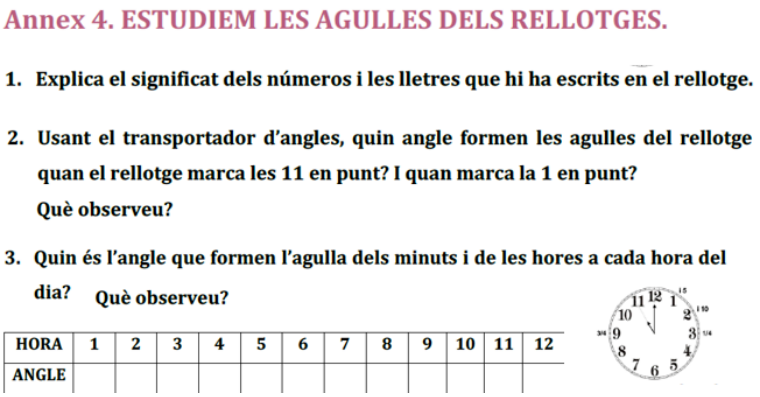


Figura 1. Número de prácticas de autorregulación promovidas antes y después de la reflexión por FP1

En la propuesta de mejora (posterior a la reflexión sobre su práctica) FP1 incorpora actividades que fomentan la autorregulación, con prácticas relacionadas con los criterios de idoneidad Emocional ($Em.P_{21}$) y Ecológico ($Ec.P_{22}$), criterios anteriormente no observados. Tales prácticas están relacionadas con los intereses de los estudiantes, su contexto social y familiar ($Em.P_{21}$), así como también, el establecer relaciones entre los contenidos matemáticos, el entorno y vida cotidiana de los estudiantes ($Ec.P_{22}$). Además, se observa un aumento de prácticas relacionadas con los criterios Epistémico, Cognitivo e Interaccional, tales como, organizar formas de trabajo cooperativo ($I.P_{12}$) y actividades que fomenten la discusión entre pares ($I.P_{11}$).

A continuación, se muestran dos ejemplos de actividades planteadas por FP1. La primera (Figura 2) hace parte de las actividades de la planificación inicial, mientras que la segunda (Figura 3) corresponde a una de las actividades propuestas después de la reflexión sobre la práctica. Consideramos importante mostrar cómo la reflexión sobre la propia práctica no sólo promueve un

enriquecimiento en el diseño y estructuración de actividades, sino que favorece la promoción de nuevas prácticas de autorregulación.



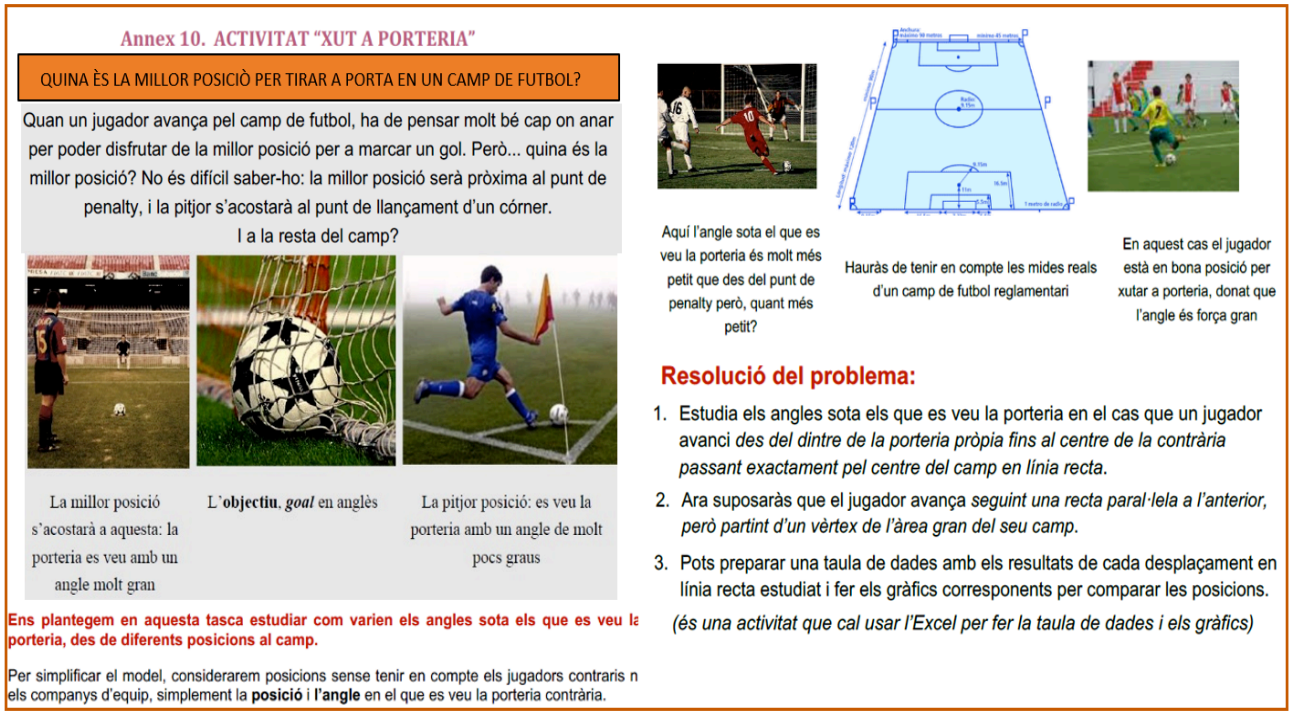
Annex 4. ESTUDIEM LES AGULLES DELS RELLOTGES.

1. **Explica el significat dels números i les lletres que hi ha escrits en el rellotge.**
2. **Usant el transportador d'angles, quin angle formen les agulles del rellotge quan el rellotge marca les 11 en punt? I quan marca la 1 en punt? Què observeu?**
3. **Quin és l'angle que formen l'agulla dels minuts i de les hores a cada hora del dia? Què observeu?**

HORA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ANGLE												

Figura 2. Actividad presentada antes de la reflexión de FP1

En la actividad de la Figura 2, FP1 plantea preguntas que invitan al estudiante no solo a encontrar un resultado, si no a explicar y justificar, por ejemplo, en preguntas como: *"Explica el significado de los números y las letras que hay escritos en el reloj"*, lo cual está asociado con las prácticas Ep.P_3 (Promover la argumentación y explicación de procedimientos utilizados) y/o C.P_9 (Promover procesos de alta demanda cognitiva, como la generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.). También cuando formula preguntas del tipo: *"¿Cuál es el ángulo que forman las agujas de los minutos y de las horas a cada hora del día?"*, en donde se busca que los alumnos asocien determinados tipos de ángulos con ciertas horas del día.



Annex 10. ACTIVITAT "XUT A PORTERIA"

QUINA ÈS LA MILLOR POSICIÒ PER TIRAR A PORTA EN UN CAMP DE FUTBOL?

Quan un jugador avança pel camp de futbol, ha de pensar molt bé cap on anar per poder disfrutar de la millor posició per a marcar un gol. Però... quina és la millor posició? No és difícil saber-ho: la millor posició serà pròxima al punt de penalty, i la pitjor s'acostarà al punt de llançament d'un còrner. I a la resta del camp?

La millor posició s'acostarà a aquesta: la porteria es veu amb un angle molt gran

L'**objectiu**, *goal* en anglès

La pitjor posició: es veu la porteria amb un angle de molt pocs graus

Aquí l'angle sota el que es veu la porteria és molt més petit que des del punt de penalty però, quant més petit?

Hauràs de tenir en compte les mides reals d'un camp de futbol reglamentari

En aquest cas el jugador està en bona posició per xutar a porteria, donat que l'angle és força gran

Ens plantegem en aquesta tasca estudiar com varien els angles sota els que es veu la porteria, des de diferents posicions al camp.

Per simplificar el model, considerarem posicions sense tenir en compte els jugadors contraris n els companys d'equip, simplement la **posició** i **l'angle** en el que es veu la porteria contrària.

Resolució del problema:

1. Estudia els angles sota els que es veu la porteria en el cas que un jugador avanci *des del dintre de la porteria pròpia fins al centre de la contrària passant exactament pel centre del camp en línia recta.*
2. Ara suposaràs que el jugador avança *seguint una recta paral·lela a l'anterior, però partint d'un vèrtex de l'àrea gran del seu camp.*
3. Pots preparar una taula de dades amb els resultats de cada desplaçament en línia recta estudiat i fer els gràfics corresponents per comparar les posicions.

(és una activitat que cal usar l'Excel per fer la taula de dades i els gràfics)

Figura 3. Actividad propuesta después de la reflexión de FP1

En la actividad que hace parte de la propuesta de mejora (Figura 3), observamos que se incorporan nuevas prácticas de autorregulación, algunas relacionadas con los criterios de idoneidad Emocional y Ecológico, las cuales no habían sido consideradas antes de la reflexión. Así, un aspecto importante en esta actividad es el contexto seleccionado (el fútbol) y la intención por parte del FP buscando que los estudiantes establezcan relaciones entre las nociones matemáticas abordadas, situaciones de la vida real y la motivación que ello puede generar. Estos aspectos están asociados a

las prácticas Em.P_{21} (Considerar los intereses de los estudiantes, su contexto familiar y social, para generar actividades a fines con sus intereses, permitiendo un mejor estado emocional, motivacional y actitudinal) o Ec.P_{22} (Vincular el estudio de los contenidos matemáticos al entorno y vida cotidiana mostrando conexiones intra e interdisciplinarias), en planteamientos como: *"Cuando un jugador avanza por el campo de fútbol, debe pensar muy bien hacia dónde ir para poder disfrutar de la mejor posición para marcar un gol. Pero ¿Cuál es la mejor posición?"* Así también, se incorpora la práctica I.P_{12} (Organizar formas de trabajo cooperativo durante la clase o fuera de ella). Estas prácticas se suman a aquellas que promueven la argumentación (Ep.P_3), reflexión (C.P_6), procesos de alta demanda cognitiva como cambios de representación y conjeturas (C.P_9) esta práctica se observa cuando se les da la siguiente indicación a los estudiantes *"Puedes preparar una tabla de datos con los resultados de cada desplazamiento en línea recta estudiados y hacer los gráficos correspondientes para comparar las posiciones"*, y por último, esta actividad fomenta la discusión entre pares ya que es una actividad que se realiza en grupos cooperativos (I.P_{11}).

Prácticas de autorregulación promovidas por FP2

En la Figura 4, se muestran las prácticas identificadas en el TFM de FP2 para cada una de las idoneidades. Un primer resultado que se desprende al observar el gráfico es que FP2 promueve la autorregulación en el aprendizaje de las matemáticas, resaltando las prácticas relacionadas con los criterios de idoneidad Cognitivo, Epistémico y Mediacional.

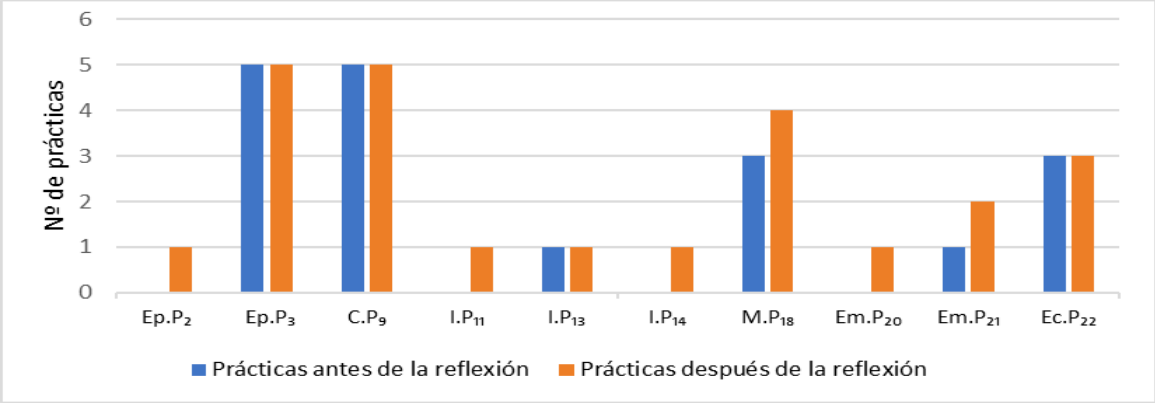


Figura 4. Número de prácticas de autorregulación promovidas antes y después de la reflexión por FP2

Se observa que antes de la reflexión, FP2 considera prácticas afines con los seis criterios de idoneidad, Epistémico, Cognitivo, Interaccional, Mediacional, Emocional y Ecológico (Ep.P_3, C.P_9, I.P_{13}, M.P_{18}, Em.P_{21} y Ec.P_{22}). Se resaltan aquellas prácticas relacionadas con los criterios Epistémico, Cognitivo y en menor medida aquellas relacionadas con lo Interaccional y Emocional.

Luego de reflexionar, FP2 considera que en sus futuras planificaciones debería incorporar otras prácticas relacionadas con lo interaccional, lo que se evidencia en la frase: "*Hubiera sido positivo incluir alguna parte donde los alumnos tengan que exponer o compartir ideas",* es decir, actividades que fomenten la discusión entre pares como la realización de debates (I.P_{11}). También menciona que faltaron momentos de reflexión individual y colectiva de los estudiantes respecto a la forma en que aprenden. Esto se observa cuando FP2 señala que: "*Hicieron falta momentos de reflexión de los estudiantes respecto a su aprendizaje, como la autoevaluación de aprendizaje, como complemento a las evaluaciones de contenido*" (I.P_{14}). Por otra parte, el futuro profesor alude a que debería incorporar en sus planificaciones prácticas que fomenten la autoevaluación emocional, motivacional o actitudinal de los estudiantes, mencionando que *"Incorporaría una rubrica para evaluar el trabajo en grupo, como una autoevaluación actitudinal, ya que tales actividades pretenden trabajar la competencia personal y social"* (EM.P_{20}); y por último, FP2 considera que se debería promover en los estudiantes la identificación de errores cometidos, indicando que: "*Incorporaría una herramienta con la cual los estudiantes puedan evaluar y*

corregir al docente, por ejemplo, a través de una evaluación desarrollada por el docente en la cual los estudiantes deban reconocer y corregir los errores cometidos por el docente (errores ocasionados conscientemente), como método de aprendizaje (EP.P_2). Si bien el docente en su planificación inicial incorpora actividades que podrían ser de interés de los estudiantes, luego de reflexionar, menciona que: *"En un futuro consideraré preguntar directamente a los estudiantes cuáles son sus intereses, para elaborar actividades que fomenten su motivación hacia las matemáticas"* (Em.P_{21}), esta práctica permitiría que el estudiante tuviera un mejor estado emocional, motivacional y actitudinal.

En general se observa que FP2 luego de reflexionar sobre su unidad didáctica y su implementación considera la incorporación de prácticas de autorregulación dirigidas a la parte Emocional e Interaccional, más que aquellas prácticas que trabajan directamente con el contenido matemático.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Debido a los nuevos desafíos que se proponen en el currículo y las necesidades del contexto en que se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje, las competencias transversales como la autorregulación, han tomado relevancia tanto en la formación docente como en el aprendizaje de los estudiantes (Pranke y Bragagnolo, 2015). Este estudio centrado en la autorregulación del aprendizaje de las matemáticas da a conocer cómo dos futuros profesores promueven esta competencia a través de una serie de prácticas, las cuales están vinculadas a los criterios de idoneidad didáctica del Enfoque Onto-semiótico. Sus resultados mostraron que las unidades didácticas planteadas inicialmente por los futuros profesores promueven la autorregulación en el aprendizaje de las matemáticas, evidenciando mayoritariamente prácticas relacionadas con los criterios de idoneidad Epistémico y Cognitivo, y mínimamente prácticas relacionadas con la promoción de aspectos relacionados con el criterio Emocional. Esto último, indica la necesidad de reforzar este aspecto en los programas de formación inicial de profesores de matemáticas.

Se observa que las herramientas de análisis del EOS son apropiadas para caracterizar las prácticas de autorregulación y se muestra cómo estas prácticas son parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Los resultados también han permitido reconocer la importancia de abordar los criterios de idoneidad en la promoción del aprendizaje autorregulado ya que de esta manera se observará de manera más completa la práctica docente. Font, Breda, Seckel y Pino-Fan (2018) muestran que la reflexión docente permite mejorar la competencia de análisis e intervención didáctica de los futuros docentes. En nuestro caso, se ha constatado que después de la reflexión docente, los futuros profesores consideraron incorporar nuevas prácticas de autorregulación, relacionadas principalmente con los criterios de idoneidad Interaccional, Ecológico y Emocional. Este hecho implica una mejora en las competencias transversales.

Esperamos que los resultados encontrados puedan contribuir al progreso de los programas de formación de profesores, particularmente al desarrollo de competencias transversales como la autorregulación. Tal y como lo plantean Hernández y Camargo (2017), consideramos que, estudiar los procesos de aprendizaje de estudiantes de educación superior es fundamental en el marco de un contexto global, lo que impulsa a los programas de formación a promover el desarrollo de competencias personales y profesionales. En futuros estudios pretendemos realizar este tipo de análisis a una mayor escala, así como también abordar aspectos como la intencionalidad de los futuros profesores en la promoción del aprendizaje autorregulado y la retroalimentación en los programas de formación acerca de esta competencia transversal.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos: PID2019-104964GB-100 y PGC2018-098603-B-I00 (MICINN) y de las actividades del grupo: SGR-2017-101. Además, agradecemos el financiamiento de ANID/PFCHA nro. 72200072 (Chile).

REFERENCIAS

Breda, A., Font, V., do Rosário, V., y Villela, M. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque onto-semiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Cueli, M., García, T., y González-Castro, P. (2013). Autorregulación y rendimiento académico en Matemáticas. *Aula abierta*. *41*(1), 39-48.

Cerezo, R., Núñez, J., Fernández, E., Suárez-Fernández, N., y Tuero, E. (2011). Programas de intervención para la mejora de las competencias de aprendizaje autorregulado en educación superior. *Perspectiva Educacional*, *50*(1), 1-30.

De la Fuente, J., y Justicia, F. J. (2003). Regulación de la enseñanza para la autorregulación del aprendizaje en la Universidad. *Aula abierta*, (82), 161-172.

Font, V., Breda, A., Seckel, M., y Pino-Fan, L. (2018). Análisis de las reflexiones y valoraciones de una futura profesora de matemáticas sobre la práctica docente. *Revista de Ciencia y Tecnología*, *34*(2).

Godino, J D., Batanero, C., Font, V., y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (13), 63 - 83. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224

Hernández, A., y Camargo, Á. (2017). Autorregulación del aprendizaje en la educación superior en Iberoamérica: una revisión sistemática. *Revista Latinoamericana de Psicología*, *49*(2), 146-160. https://doi.org/10.1016/j.rlp.2017.01.001

Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J., y Vanegas, Y. (2020). Formación de maestros de educación primaria en el contexto de confinamiento: la importancia del aprendizaje autorregulado en las matemáticas. *Magister: Revista de Formación del Profesorado e Investigación Educativa*, *32*(1), 40-48.

Lavasani, M. G., Mirhosseini, F. S., Hejazi, E., y Davoodi, M. (2011). The Effect of Self-regulation learning strategies training on the academic motivation and self-efficacy. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *29*, 627-632.

Perrenoud, P. (2005). *Escola e cidadania: O papel da escola na formação para a democracia*. Porto Alegre: Artmed.

Perrenoud, P. (2007). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Barcelona, España: Graó.

Pranke, A., y Bragagnolo, L. (2015). Potencialização da aprendizagem autorregulada de bolsistas do PIBID/UFPel do curso de licenciatura em matemática a través de oficinas pedagógicas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 223-240. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a12

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.

Sanmartí, N. (2019). Avaluar la competència, avaluar per ser més competent. *Anuari de l'Educació de les Illes Balears*, 16-27.

Sertel, A., y Münire, E. (2013). Self-regulation-based learning strategies and self-efficacy perceptions as predictors of male and female students' mathematics achievement. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *106*, 2354-2364. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.12.270

Vanegas, Y., Giménez, J., y Font, V. (2015). Aprender a formar en ciudadanía en la formación de profesores de matemáticas. *ALME, 28*, 1360-1368.

Vanegas, Y., Giménez, J., y Font, V. (2017). Conexiones matemáticas en la reflexión sobre prácticas escolares. En Serna, L. Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1114-1124). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ARGUMENTACIÓN PRÁCTICA SOBRE LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS REALIZADA POR PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN UN CURSO DE FORMACIÓN

Practical argumentation about the teaching of the Pythagorean theorem carried out by math teachers in a training course

Hummes, V., Sol, T. y Breda, A.

Universitat de Barcelona

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo analizar cómo se da la argumentación orientada a la acción sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras (TP) en un curso de formación de profesores que combina el Lesson Study y la Idoneidad Didáctica. Por medio de la Teoría de la Acción Comunicativa y de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) se analizaron los diálogos de 8 profesores. Se observa, por una parte, que la introducción de los CID, como herramienta para pautar la reflexión, conlleva que se dé una argumentación sobre la enseñanza del TP que, antes de la introducción de esta herramienta, no se produjo. Por otra parte, se observa que los argumentos basados en los criterios epistémico y, sobre todo, cognitivo, tienen más peso que los demás, pues los profesores consensúan que el hecho de que los alumnos no comprenderán la demostración es determinante para decidir no enseñarla y limitarse a comprobar el teorema en varios triángulos rectángulos.

Palabras clave: *argumentación, teorema de Pitágoras, lesson study, idoneidad didáctica*

Abstract

The objective of this work is to analyze how the oriented argumentation to the action on the teaching of the Pythagorean Theorem (PT) occurs in a teacher-training course that combines Lesson Study and Didactical Suitability. By using the Theory of Communicative Action and the Didactical Suitability Criteria (DSC), the dialogues of 8 teachers were analyzed. It is observed, on the one hand, that the introduction of DSC, as a tool to guide reflection, leads to an argument being given about the teaching of PT that, before the introduction of this tool, did not occur. On the other hand, it is observed that the arguments based on the epistemic and, above all, cognitive criteria have more importance than the others, since the teachers agree that the fact that students will not understand the demonstration is key for deciding not to do it and just check the theorem on several right triangles.

Keywords: *argumentation, Pythagorean theorem, lesson study, didactical suitability*

INTRODUCCIÓN

Diversas tendencias sobre la formación de profesores proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre la práctica docente como una estrategia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Entre otros, se destacan el *Lesson Study* (LS) (Huang, Takahashi y Da Ponte, 2019) y los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (Breda, Font y Pino-Fan, 2018), estos últimos propuestos en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019) como una herramienta para organizar la reflexión del profesor, cuando ésta se orienta a la mejora de los procesos de instrucción de las matemáticas.

Con relación a la Idoneidad Didáctica (Breda, 2020) se ha observado un fenómeno que se manifiesta con cierta regularidad: los componentes de los CID funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando estos valoran un episodio o justifican que una propuesta didáctica representa una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Es decir, sus comentarios se pueden considerar evidencias de un uso implícito de algún componente de los CID

Hummes, V., Sol, T. y Breda, A. (2021). Argumentación práctica sobre el Teorema de Pitágoras por profesores de matemáticas en un curso de formación. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 343 – 350). Valencia: SEIEM.

como norma que debe orientar la práctica del profesor para que esta sea de calidad. Dado que el LS es un dispositivo de formación continua en el que un grupo de profesores diseñan, implementan y rediseñan una secuencia didáctica, este fenómeno también se observa en experiencias de dicho enfoque (Hummes, Breda y Seckel, 2019).

En un ciclo de LS surgen consensos implícitos o explícitos entre los participantes sobre aspectos que se valoran, los cuales se pueden reinterpretar en términos de indicadores y componentes de los CID. Es decir, el LS se puede convertir en un tipo de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CID surjan como consensos de la reflexión del grupo de profesores, lo cual da pie a la ampliación del LS con un ciclo formativo que introduzca los CID. Por tanto, el hecho de que suceda el fenómeno que se acaba de comentar, es el origen de propuestas de formación de profesores para el desarrollo de su reflexión sobre la práctica que combina el LS con los CID (Hummes, Font y Breda, 2019).

En esta línea, el trabajo que se presenta es parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo general es promover e investigar el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas, mediante el diseño y la implementación de un dispositivo formativo que combina el LS y los CID. En dicha investigación, aplicando una metodología de análisis de contenido, se observa: i) regularidades en la reflexión del profesor que se pueden interpretar como uso implícito de algunos de los CID, antes de que dicho constructo haya sido enseñado; ii) en algunos casos estas regularidades se hallan formando parte de argumentaciones orientadas a la acción −lo que algunos autores llaman argumentación práctica, como, por ejemplo, Gómez (2017) − de dos tipos: a) argumentaciones cuya conclusión es una acción que se realiza y b) argumentaciones sobre la idoneidad, adecuación, etc. (o no) de acciones que se consideran en el discurso pero que no se llegan a realizar; iii) estos comentarios y argumentaciones se dan en un clima de búsqueda de consensos donde los profesores participantes explican sus razones a los compañeros en un plano de una cierta igualdad. En particular, en este trabajo el objetivo es ir más allá de encontrar regularidades en el discurso de los profesores que se puedan considerar usos implícitos de los CID, ya que se busca analizar cómo se da la argumentación orientada a la acción sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras (TP) y el papel que juegan los CID en ella, en varias fases del dispositivo formativo mencionado.

MARCO TEÓRICO

En este apartado se presenta el marco teórico utilizado: Idoneidad Didáctica y algunos constructos de la Teoría de la Acción Comunicativa (TAC), la cual ha sido la más útil para analizar y caracterizar las argumentaciones orientadas a la acción y al consenso de los profesores participantes.

Idoneidad Didáctica

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que este reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Se trata de un constructo multidimensional que se descompone en seis criterios parciales: 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”; 2) Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los

alumnos durante el proceso de instrucción; y, 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, entre otros. (Godino *et al*., 2019).

Previamente los CID orientan cómo se deberían hacer las cosas y posteriormente sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado. Los CID están siendo utilizados ampliamente como herramienta para pautar la reflexión del profesor sobre su práctica en varios programas de formación (Esqué y Breda, 2021; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya y Bustamante, 2019).

Teoría de la Acción Comunicativa

La argumentación matemática del profesor se estudia desde diferentes perspectivas, algunas de ellas buscan caracterizar las estructuras de la argumentación usando como referente el modelo de Toulmin (Cervantes-Barraza, 2020; Molina, Font y Pino-Fan, 2019), en otras, se busca determinar las condiciones para promover la argumentación (Solar y Deulofeu, 2016; Toro-Uribe, 2020) o, más específicamente, promover la argumentación en el aula (De la Riva, 2017; Valbuena, Muñiz y Berrio, 2020). La mayoría de estos estudios están enfocados en el estudio de la argumentación que se realiza en el aula de clase.

Nos interesa la argumentación orientada a la acción, basada en el consenso, de un grupo de profesores, que en la TAC se puede reinterpretar como racionalidad instrumental y comunicativa (que no se deben entender excluyentes sino complementarias en su uso a fin de desenvolverse adecuadamente en la realidad existente). En la TAC, se define la argumentación como: "tipo de habla en que los participantes tematizan las pretensiones de validez que se han vuelto dudosas y tratan de desempeñarlas o de recusarlas por medio de argumentos" (Habermas, 1987, p. 37).

Una argumentación contiene razones conectadas con la pretensión de validez de la manifestación o emisión problematizadas. La fuerza de una argumentación se mide en un contexto dado por la pertinencia de las razones. Esta se pone de manifiesto si es capaz de motivar a los participantes a la aceptación de la pretensión de validez en litigio.

El habla argumentativa puede contemplarse como proceso, como procedimiento y como producto. Considerada como proceso, se trata de excluir de la comunicación toda coacción y centrarse en la búsqueda de la verdad como acción orientada al entendimiento. Por ejemplo, en el caso investigado, en las distintas etapas de elaboración e implementación de un proceso de instrucción, es decir, en la planificación, en la implementación y en la reflexión/análisis se pretenden condiciones ideales de comunicación, en el sentido de que los participantes tienen la oportunidad de hablar sin restricciones ni presiones en busca de la "verdad" basada en el consenso. Considerada la argumentación como procedimiento, se tiene que el proceso discursivo de entendimiento está regulado en forma de una división cooperativa de trabajo entre proponentes (P) y oponentes (O) donde se tematiza una pretensión de validez (PV) que se ha vuelto problemática examinando con razones si se reconoce o no dicha pretensión. En el caso investigado, en las diferentes sesiones sobre la enseñanza del TP se debaten pretensiones de validez, donde los profesores se pueden diferenciar, en base a sus razones – a favor, por ejemplo, apoyando y dando fuerza argumentativa (FA) a la PV, o bien en contra intentándola invalidar (InvPV) – para reconocer o no la validez. Por último, la argumentación considerada como objeto, es producir argumentos pertinentes, que convenzan en virtud de sus propiedades intrínsecas, con que desempeñar o rechazar las pretensiones de validez. Los argumentos son los medios con cuya ayuda puede obtenerse un reconocimiento intersubjetivo para la PV que el proponente plantea de forma hipotética, y con los que, por tanto, una opinión puede transformarse en saber o en acción. En la reflexión de los participantes sobre un proceso de instrucción se distinguen argumentos que validan o invalidan las PV propuestas por algunos profesores de manera hipotética respecto a la forma de abordar determinado concepto.

Son acciones comunicativas aquellas interacciones mediadas lingüísticamente en que todos los participantes persiguen con sus actos de habla fines ilocucionarios y sólo fines ilocucionarios (que el oyente entienda y acepte la emisión). Se da por hecho que en las sesiones de reflexión conjunta entre los profesores no hay coacción y se tiene un espacio de participación libre. Con lo anterior es viable considerar que existen acciones comunicativas entre los participantes en la reflexión sobre una clase. Lo anterior permite describir la argumentación generada en la reflexión de los profesores para decidir sobre la forma de abordar determinado concepto o tema en clase, en el caso de este trabajo, la argumentación sobre la enseñanza (o no) de la demostración del TP.

METODOLOGÍA

Se trata de una investigación de carácter interpretativo/cualitativo, cuyos análisis forman parte de un estudio más amplio, que tiene como objetivo general analizar en qué medida un curso de formación basado en el LS y en los CID promueve el desarrollo de la reflexión de docentes de matemáticas.

Participaron ocho profesores de matemáticas que trabajan en escuelas en el sur de Brasil con alumnos entre 11 y 18 años. Todos los participantes tenían grado de licenciatura en matemáticas y experiencia docente entre tres y quince años, además tres de ellos tenían un master en educación matemática. Después de la primera sesión presencial, se declaró la pandemia por Covid-19 en Brasil, por lo que se suspendieron las actividades presenciales (Breda, Farsani y Miarka, 2020). Por este motivo, el curso fue reestructurado para implementarse de manera virtual, desde ese momento, todas las sesiones fueron realizadas y grabadas mediante la plataforma digital Skype.

El curso siguió las siguientes fases: 1) implementación de dos ciclos completos de LS (se formaron dos grupos de cuatro profesores y cada grupo siguió un ciclo de LS), considerando todas sus etapas, es decir, estudio del tema en el currículo y establecimiento de metas; planificación; implementación; y reflexión sobre la implementación de la clase; 2) enseñanza de los CID, como herramienta para pautar la reflexión de los profesores; 3) nueva reflexión y análisis con los CID y rediseño con los CID de la clase implementada. La primera autora de este trabajo actuó como observadora participante, pues era la profesora del curso y dirigía las sesiones de reflexión.

Para este estudio se ha analizado el LS realizado por uno de los dos grupos participantes. De acuerdo con los principios de esta metodología, son los profesores los que deciden libremente el tema de la clase y, en este caso, los participantes decidieron que la clase fuese sobre el TP. En este trabajo se analizan, usando los constructos de la TAC y los CID del EOS, las argumentaciones de las dos primeras fases y de la primera parte de la tercera fase del curso implementado. Dicho análisis sigue los mismos pasos que se siguieron en Ramos (2006): i) revisión de las sesiones para identificar momentos donde se presentan ideas específicas para tratar la demostración del TP. ii) Se tienen en cuenta los tres aspectos en la argumentación: "proceso", con la pretensión de que se consigan condiciones ideales de comunicación en las sesiones del curso entre los profesores participantes. "Procedimiento", se consideran las argumentaciones, específicamente enfocadas a la enseñanza de la demostración del TP, en forma de división cooperativa de trabajo entre proponentes y oponentes. "Producto", se obtienen argumentos pertinentes que aceptan o no las pretensiones de validez respecto a la demostración del TP. iii) Una vez identificados los momentos de los videos donde se presentan ideas específicas para el tratamiento de la demostración del TP se revisa la argumentación para ubicar: los roles de los profesores, consensos conseguidos, invalidados y razones para invalidarlos, con los constructos: P (proponente), O (oponente), OA (omisión argumentativa), PV (pretensiones de validez), InvPV (invalidación de la pretensión de validez), FA (fuerza argumentativa), CRM (consenso racionalmente motivado), CO (consenso por omisión). iv) Se hace un análisis de la trayectoria argumentativa usando los CID para ver qué papel juegan en la argumentación realizada por los participantes. v) Después del análisis se hace una triangulación con expertos con el objetivo de validar los resultados obtenidos.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En un primer momento, se analizaron los videos de la fase uno del curso, es decir, las sesiones del ciclo completo del LS desarrollado. En la primera etapa del LS, cada uno de los profesores participantes habló de su experiencia en enseñar el TP para estudiantes que lo ven por primera vez. Además, comentaron cómo se planteaba el TP en el currículo (institucional y nacional):

P1: Generalmente yo empiezo con aquella construcción en el triángulo rectángulo. Yo tomo la hipotenusa y los catetos y construyo cuadrados con sus longitudes. Por ejemplo: un cuadrado de lado tres, otro cuadrado de lado cuatro, y otro cuadrado de lado cinco.

P2: ¿Eso? [Muestra una figura de un triángulo rectángulo, de lados tres, cuatro y cinco, con cuadrados dibujados a partir de sus lados]. Incluso los libros que yo miré todos empiezan de esta manera.

Luego, optan por iniciar la clase del TP de esta manera (con este ejemplo). Más aún, consideran implícitamente que comprobando el TP en este triángulo particular (una relación entre áreas de cuadrados de lados 3, 4 y 5) es suficiente para institucionalizar el TP en la clase como un resultado general y, por tanto, no consideran hacer alguna demostración del TP. Dicho de otra manera, optaron por hacer lo que normalmente hacían y no lo vieron como algo problemático, motivo por el cual no hay discusión en el grupo sobre si hay que enseñar o no una demostración del TP.

En la siguiente etapa del LS, durante la planificación de la clase, tampoco se identificó ningún episodio de argumentación donde los profesores considerasen la posibilidad de abordar o no alguna demostración del TP. Los profesores consensúan trabajar el TP como una relación de áreas de figuras cuadradas, haciendo apenas una verificación del teorema para la terna pitagórica 3, 4 y 5, que al final es lo que sucede en la etapa de implementación de la clase del LS.

Después, en la cuarta etapa del LS, los profesores reflexionaron y analizaron la clase. Además de los cuatro profesores de este equipo, en este momento, participaron también los demás profesores del curso (pues en esta etapa del LS puede haber profesores invitados o expertos, aunque no hayan participado en las primeras etapas del ciclo del LS). En esta etapa, a pesar de haber cuatro profesores más en la discusión, no se identifican diálogos de argumentación sobre la posibilidad de hacer o no alguna demostración del TP. Por tanto, se mantiene el mismo tratamiento del TP para un caso particular de un triángulo rectángulo.

En la fase dos del curso, se enseñó a los profesores participantes los CID. En particular, cuando se explicaron los componentes "representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar" y la "riqueza de procesos" de la idoneidad epistémica, se procuró utilizar ejemplos diferentes al TP dado que, después, ellos tenían que usar dichos componentes en su reflexión con los CID sobre el proceso de instrucción de este teorema. A continuación (primera parte de la fase 3), los profesores hicieron una nueva reflexión individual de la clase desde el punto de vista de cada uno de los criterios de los CID (cada profesor trabajó con un criterio, dado que eran ocho profesores y hay seis criterios, la reflexión desde el criterio epistémico y el cognitivo fue realizada, de manera individual, por dos profesores). En esta reflexión, los dos profesores que expusieron desde la perspectiva del criterio epistémico no problematizaron la enseñanza del TP a partir de la comprobación de un caso particular. En la discusión grupal posterior, con la participación de todos los profesores, la investigadora que impartió el curso explicó la complejidad del TP y también que es uno de los pocos teoremas que se pueden demostrar en la educación básica, lo cual llevó al grupo a problematizar la enseñanza del TP a partir de la comprobación de un caso particular y considerar la posibilidad de incorporar una demostración del TP en el rediseño de la clase. En este momento, se identifica el siguiente episodio de argumentación sobre cómo enseñar la demostración del TP:

P1: Me preguntaba si sería interesante tomar un video con la demostración. Que pudiéramos trabajar el video y luego un poco el teorema. Por ejemplo, tomar la demostración algebraica. (**PV1**).

P4: Pero también tenemos que pensar que estamos dando una clase virtual. Entonces, ¿cómo van a entender esta demostración? Quizás la verificación experimental sería mejor. (**PV2**). Pensando que la clase es virtual, que no están acostumbrados a las demostraciones. (**InvPV1**).

P2: También por el hecho de lo que comentó P6: no poder ver a los alumnos, no saber cómo reaccionan cuando vean esa demostración. Tengo una pequeña duda de si los estudiantes realmente entenderían la demostración, ¿sabes? (**InvPV1**).

P5: Este video de la demostración debe ser seleccionado a dedo. Hay cosas que ellos [los estudiantes] no están acostumbrados a ... ese mundo de letras viajando de un lado a otro y operaciones [habla de resolución de ecuaciones, demostración algebraica]… Podríamos hacer la demostración geométrica usando el mismo material que estamos usando. Los niños entienden mucho más cuando tocan cosas [respecto al material manipulativo] que simplemente mirando a los otros haciendo. (**PV3**).

P6: Más casos son esenciales. Porque empieza a dar esa idea de generalizar. (**FA2**) Ahora, especialmente de mis alumnos, tengo una pequeña duda de si realmente podemos demostrar, para que realmente puedan entender. Cinco lo entenderían y los demás más o menos. (**InvPV1**).

P3, P7 y P8 entran en consenso por omisión (CO) argumentativa (argumento por omisión).

Participantes discursivos: proponentes (P1, P4 y P5); oponentes (P4, P2 y P6).

Tesis: i) no se puede hacer la demostración del TP por la dificultad para los alumnos en entenderla; ii) es fundamental hacer la verificación del TP para más casos para la generalización del TP.

Trayectoria argumentativa: i) P1 propone hacer una demostración (la algebraica) del TP iniciando la clase haciendo uso de un video con la demostración para después trabajarlo. ii) P4 invalida la pretensión de validez esgrimida por P1. Afirma que hay limitaciones en clases virtuales para entender la demostración del TP, argumenta que los alumnos no están acostumbrados con las demostraciones y propone la verificación. iii) P2 apoya a P4 para descartar la demostración y hacer la verificación para más casos. Su argumento está en que la interacción en una clase virtual es limitada y cuestiona si los alumnos tendrían las condiciones para entender la demostración. iv) P5 intenta invalidar la PV1 argumentando que hay limitaciones en la resolución de ecuaciones. Hace una nueva pretensión de validez que es hacer la demostración geométrica, porque es de las más famosas, utilizando material manipulativo. Refuerza esta propuesta de validez argumentando que el uso de materiales manipulativos es mejor. v) P6 refuerza la idea de hacer la verificación para más casos, considerando la riqueza de procesos al tener en cuenta la generalización. Invalida la PV1 argumentando que la mayoría de sus alumnos no pueden entender la demostración del TP. vi) Se llega a un consenso racionalmente motivado (CRM), en el cual los profesores P3, P7 y P8 lo hacen por omisión (CO).

Análisis de la trayectoria argumentativa desde la perspectiva de la Idoneidad Didáctica: i) Con la PV1, P1 propone usar un video como recurso (idoneidad de medios) para entender la demostración y la demostración algebraica (idoneidad epistémica). ii) Con la PV2, P4 sugiere hacer una verificación del TP con más casos, con la idea que los alumnos no están acostumbrados a demostraciones y menos algebraicas, esto tiene relación con la idoneidad cognitiva, en particular, los conocimientos previos de los alumnos. Con este argumento intenta invalidar la PV1. iii) P2 intenta invalidar la PV1 en base a las limitaciones del aula virtual para la interacción (idoneidad interaccional), ya que estas afectan el aprendizaje de los alumnos (idoneidad cognitiva). iv) Con la PV3, P5 propone una demostración geométrica del TP utilizando materiales manipulativos, valora positivamente el uso de materiales (idoneidad de medios) como un recurso de apoyo para facilitar el aprendizaje (idoneidad cognitiva). Considera la demostración geométrica en comparación a la algebraica una mejor opción para los estudiantes (zona de desarrollo próximo, idoneidad cognitiva). v) P6 con FA2 refuerza la idea de que hacer una verificación del TP para más casos promueve el proceso de generalización (idoneidad epistémica). Intenta invalidar la PV1 argumentando desde la perspectiva de la capacidad de sus alumnos (idoneidad cognitiva).

Se observa que los argumentos de los profesores están, de alguna manera, enfocados en los diferentes CID, como se muestra en el análisis de la trayectoria argumentativa desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. De hecho, el peso dado a la idoneidad cognitiva (la comprensión de la demostración por parte de los alumnos) y a la idoneidad epistémica (hacer más casos para conjeturar y llegar a una generalización) es mayor en comparación a los otros y esto fue elemento generador de las tesis identificadas.

CONCLUSIONES

El objetivo específico de este trabajo fue investigar cómo se da la argumentación sobre la enseñanza de la demostración del TP en las distintas fases de un curso de formación docente que combina el LS y los CID y, en particular, el papel que juegan los CID en esta argumentación. Para ello, se identificaron los diálogos con argumentación respecto a la enseñanza, o no, de la demostración del TP. Se concluye que no se encontraron argumentaciones en las fases uno, dos y parte de la tres del curso, dado que no se había visto como algo problemático limitarse a hacer la comprobación del TP para un caso particular. Sin embargo, después de enseñarles los CID, como herramienta metodológica para desarrollar y organizar la reflexión docente, en particular, el criterio epistémico, donde se consideró la complejidad del TP (distintas representaciones, ¿qué significa?, conexiones entre significados, etc.) y la riqueza de procesos, en la primera parte de la fase tres del curso, en la reflexión con los CID, los profesores argumentan, por primera vez, sobre si se hace o no la demostración del TP. En esta fase se observa que los argumentos son elaborados con base en los CID y, más allá, en la trayectoria argumentativa, se percibe que los argumentos, basados en los criterios epistémico y, sobre todo, cognitivo, tienen más peso. Es decir, para la decisión argumentativa de enseñar, o no, la demostración del TP, los profesores han consensuado que el hecho de que los alumnos no comprenderán la demostración por no estar acostumbrados a hacer demostraciones es un factor determinante para decidir no hacerla y limitarse a hacer una conjetura y generalización a partir de más casos de ternas pitagóricas.

Hay que señalar que este trabajo es parte de una investigación más amplia y que, si bien hasta este momento de la reflexión, los profesores decidieron no incorporar la enseñanza de la demostración del TP; en la segunda mitad de la fase tres del curso (no analizada en este trabajo), los profesores sí que hicieron un rediseño hipotético en el cual incorporaron la enseñanza de esta demostración.

Además, se puede afirmar que los CID juegan un rol importante en la argumentación realizada al reflexionar sobre el tratamiento de la demostración del TP. La idoneidad epistémica da pie a considerar la demostración, la cognitiva promueve la argumentación sobre ¿enseñar, o no, la demostración?, ¿cuál de las diferentes demostraciones presentar (algebraica o geométrica)? o ¿hacer la verificación para más casos?, mientras la idoneidad mediacional fomenta los argumentos para la selección de materiales para la clase (material manipulativo, videos). De manera metafórica, se puede decir que, en la batalla para impedir la incorporación de la demostración del TP, los profesores que no son partidarios de su implementación se sitúan fundamentalmente en posiciones cognitivas. En cambio, los partidarios de su implementación se sitúan, básicamente, en posiciones epistémicas. Se trata de un resultado coherente con los obtenidos en Ramos (2006).

Como cuestiones abiertas para estudiar en un futuro nos planteamos ¿por qué los profesores no consideraron enseñar alguna demostración del TP en la primera parte de la fase tres analizada en este trabajo? y, también, ¿por qué, después de reflexionar sobre la complejidad del TP y las ventajas de enseñar su demostración en la enseñanza básica, algunos profesores, en la parte final de la fase tres, aún argumentan que no hay que enseñarla? Estas cuestiones dan pie a desarrollar investigaciones sobre cuál es la relación entre el tipo de formación de los docentes y la argumentación que realizan sobre la enseñanza, o no, de la demostración del TP en la educación básica del Brasil.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos: PGC2018-098603-B-100 (MINECO/FEDER, UE), referencia de la ayuda: PRE2019-090177 y con el apoyo del programa de Doctorado Pleno en el Exterior proceso número 88881.173616/2018-01 (Capes).

Referencias

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88.

Breda, A., Farsani, D., y Miarka, R. (2020). Political, technical and pedagogical effects of the COVID-19 Pandemic in Mathematics Education: an overview of Brazil, Chile and Spain. *Intermaths*, *1*(1), 3-19.

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Cervantes-Barraza, J. A. (2020). Concepciones de futuros profesores de matemáticas en el contexto de la argumentación. *Academia y virtualidad*, *13*(1), 10-22.

De la Riva, M. D. J. (2017). De la explicación a la argumentación, y los obstáculos del diálogo docente. *Enseñanza de las ciencias,* (Extra), 613-618.

Esqué, D., y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, *35*(1), 38-54.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37- 42.

Gómez, J. (2017). ¿Qué es la argumentación práctica? *Revista Co-herencia*, *14*(27), 215-243.

Habermas, J. (1987). *Teoría de la acción comunicativa I: Racionalidad de la acción y racionalización social.* Madrid: Taurus.

Huang, R., Takahashi, A., y da Ponte, J. P. (2019). *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics*. New York, EE.UU.: Springer.

Hummes, V. B., Breda, A., y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 381-390). Valladolid: SEIEM.

Hummes, V. B., Font, V., y Breda, A., (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Criteria of Didactical Suitability for the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers, *Acta Scientiae*, *21*(1), 64-82.

Molina, Ó., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: Un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(1), 93-116.

Morales-Maure, L., Durán-González, R. E., Pérez-Maya, C., y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Revista Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales* [Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona]. Repositorio institucional – Universitat de Barcelona.

Solar, H. S., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, *30*(56), 1092-1112.

Toro-Uribe, J. A. (2020). *Argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase* [Tesis de doctorado, Universidad de Medellín]. Repositorio institucional – Universidad de Medellín.

Valbuena, S., Muñiz, L., y Berrío, J. (2020). El rol del docente en la argumentación matemática de estudiantes para la resolución de problemas. Revista *Espacios*, *41*(9), 1-15.

CARACTERIZACIÓN DEL PERFIL DE INGRESO A LOS GRADOS EN MAESTRO: RELACIÓN ENTRE BACHILLERATO CIENTÍFICO Y GÉNERO[1]

First Year Teacher Degree Students Characterization: Relation between Science and Gender

Lasa, A. [a], Belletich, O. [a], Elorza, J. [b], Iribas, H. [c], Wilhelmi, M. R. [a]

[a]Universidad Pública de Navarra, [b]Universidad de Navarra, [c]Mondragon Unibertsitatea

Resumen

En los Grados en Maestro existe un sesgo claro hacia un perfil de estudiante feminizado y "de letras". En este estudio se quiere caracterizar el perfil de ingreso a estos Grados para entender mejor este fenómeno, y el aporte que en términos de género hacen las diversas modalidades de bachillerato. Se analizan los datos de ingreso de los últimos cinco años, en tres universidades que ofertan Grados en Maestro, junto con varias modalidades de Doble Grado y programas de inmersión lingüística. Se emplean para el estudio herramientas de estadística descriptiva y análisis implicativo*. En los resultados se observa un constante incremento en la nota de admisión a estos Grados; el bachillerato científico aporta mujeres y hombres por igual; y, por último, se observan indicios de que los Grados dobles pueden ejercer un efecto llamada a hombres con altas calificaciones.*

Palabras clave: *STEM, género, perfil de estudiantes en Grados en Maestro*

Abstract

Teacher Degrees clearly have a bias towards a feminized and "literary" student profile. Our aim in this study is to characterize the admission profile to Teacher Training Degrees, in order to better understand this phenomenon, and the contribution that the various high school modalities make in terms of gender. Income data from the last five years is analyzed at three universities offering Teacher Training Degrees, along with various Dual Degree modalities and language immersion programs. Descriptive statistical tools and implicative analysis *are used for the study. The results show a constant increase in the average qualifications for entering Teacher Training Degrees. The scientific baccalaureate contributes both women and men to Teacher Degrees, and we suspect that Dual Grades exert a calling effect on men with high scores.*

Keywords: *STEM, gender, teacher's profile*

INTRODUCCIÓN

La característica de género no se reparte por igual en todos los estudios universitarios. Las titulaciones en maestro, junto con los estudios del espectro sanitario, se encuentran entre los Grados *feminizados*. En el otro extremo estarían los estudios de tipo científico y tecnológico, como las ingenierías, consideraras *masculinizadas* (INE, 2019). En este sentido, se quiere caracterizar el

[1] Este trabajo forma parte del Proyecto de Investigación y Transferencia de Conocimiento a Realizar en Centros Educativos Financiados con Fondos Públicos del Gobierno de Navarra, "Integración del currículo de matemáticas para propuestas STEM: diseño, implementación y evaluación". Convocatoria 2019, Resolución 496/2019 de 8 de agosto. Publicado en BON 170, 29 de agosto de 2019. Código Base de Datos Nacional de Subvenciones: 448415.

Lasa, A., Belletich, O., Elorza, J., Iribas, H. y Wilhelmi, M. R. (2021). Caracterización del perfil de ingreso a los grados en maestro: relación entre bachillerato científico y género. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 351 – 358). Valencia: SEIEM.

perfil de ingreso a las titulaciones en maestro, para conocer mejor la aportación que hace cada modalidad de bachillerato a la distribución del género en estas titulaciones y poder así responder a cuestiones del tipo: los estudiantes que acceden a los Grados en Maestro, ¿huyen de las ciencias y de las matemáticas?, ¿cuál es la relación entre el perfil STEM y los Grados en Maestro?

Estudios previos (Pérez-Tyteca, Monje & Castro, 2013; Franco-Buriticá, León-Mantero, Maz-Machado & Casa-Rosal, 2019) indican que factores como el género, la autopercepción, la confianza o el nivel de ansiedad hacia las matemáticas influyen sobre la elección de los estudios en maestro, junto con otros factores de percepción social y económica. Por ello, en paralelo, se están analizando las creencias de estos mismos estudiantes en torno a los Grados en Maestro y su relación con las ciencias y las matemáticas, además de intervenciones de proyectos STEM en centros educativos (Lasa, 2017; Lasa, 2019), dentro de un estudio general (APM-FESPM, 2019; Lasa et al., 2019; Lasa et al., 2020).

ESTUDIO

Se realiza un diagnóstico del perfil de ingreso de los estudiantes a los Grados en Maestro, durante los últimos cinco años, en tres universidades que ofertan Grados en Maestro en Educación Infantil (EI), Educación Primaria (EP) y Pedagogía (P), junto con modalidades dobles: Doble Grado en Educación Infantil y Primaria (DG-EIP), Doble Grado en Pedagogía y Educación Infantil (DG-PEI), Doble Grado en Pedagogía y Educación Primaria (DG-PEP), y programas de inmersión lingüística en lengua extranjera o Programas Internacionales (PI), con el objetivo de determinar la influencia del género, de la modalidad de los estudios preuniversitarios y del entorno socio-familiar (variables independientes o hechos) en la elección de estudios de maestro (variable dependiente o efecto). El diagnóstico se lleva a cabo mediante un diseño *ex post facto* y, por lo tanto, sin intervención experimental ni manipulación de las variables independientes. Este tipo de diseño tiene gran *validez ecológica*, dado que permite un análisis descriptivo y relacional que oriente posibles intervenciones con cohortes similares.

A continuación, se presentan la muestra y las variables de estudio, junto con los resultados del estudio estadístico. En este estudio de tipo diagnóstico, se emplean herramientas de estadística descriptiva y herramientas de *análisis implicativo*, para el análisis y la discusión de los resultados.

Muestra

Se toman datos de tres universidades que comparten cercanía geográfica, y cuya oferta varía y se complementa en función de la demanda. Se trata de centros públicos (Pu) o privados (Pr), que ofertan estudios en euskera (E) o castellano (C). En el periodo 2015/2019 hay en total 2463 nuevas incorporaciones a los Grados en Maestro, pero 143 individuos se eliminan del estudio por diversas razones. En algunos casos, no se tiene información completa del estudiante en relación con las variables de estudio; esto se debe a que cada universidad tiene sus propios mecanismos para almacenar y tratar la privacidad de los datos históricos de ingreso a sus títulos. En otros, el estudiante cursa Magisterio como segunda titulación universitaria, etc. Por ello, se analizan datos *vivos* relativos a 2320 estudiantes (tabla 1).

Tabla 1. Muestra

	Uni1 (Pu; E, C)	*Uni2 (Pr; E)*	*Uni3 (Pr; C)*	*Total*
Total estudiantes	1099	992	372	2463
Sujetos suprimidos	14	111	18	143
Estudiantes analizados	1085	881	354	2320

En algunos casos se analiza la información de cada centro por separado y de manera parcial: en Uni2, se tiene la información completa de la modalidad de bachillerato, a pesar de que no han preservado las notas de acceso en los años 2015 y 2016; en Uni3, no se guardan datos de la modalidad de bachillerato, aunque sí se dispone de los datos de la nota de acceso.

Variables de estudio

Las variables de estudio (tabla 2) contemplan el año de acceso a la universidad, el sexo, la titulación que se cursa, el idioma vehicular de los estudios, la modalidad de bachillerato y la nota de acceso / admisión a la titulación. Todas las variables son dicotómicas y toman valor 1 (el estudiante cumple la descripción de la variable) o 0 (no cumple), con excepción de la variable V11, que es numérica.

Tabla 2. Variables de estudio

Variable	Descripción
U1, U2, U3, U4, U5	Año de acceso a la titulación: periodo 2015-2019
V02	Sexo: mujer (1), hombre (0)
V03, V04, V05, W05, W06, W07	Titulación: EI, EP, DG-EIP, P, DG-PEI, DG-PEP
V06	Programa Internacional: cursa asignaturas en inglés o francés
V07	Idioma vehicular: euskera (1), castellano (0)
V08, V09, V10, W11	Modalidad de bachillerato: humanas, artes, ciencias; grado superior
V11, Q1, Q2, Q3, Q4	Nota de acceso (0/10) o admisión (0/14); cuartiles

Las universidades de titularidad pública guardan la nota de admisión (V11) a la universidad, que incluye la ponderación de la fase específica (valores finales 0-14), sin desagregar la puntuación de la fase general (valores 0-10) de la específica (valores adicionales 0-4). Las universidades de titularidad privada registran únicamente la nota de la fase general (valores 0-10). De esta forma, la comparación de tendencias entre universidades se realiza por agrupamiento en cuartiles (Q1-Q4) en el estudio *implicativo*.

RESULTADOS

En los últimos cinco años, la nota de admisión a las titulaciones de maestro se ha incrementado en torno a un punto en Uni1, y la nota de acceso se mantiene estable en Uni2 y Uni3 (tabla 3). La nota de acceso de las mujeres es superior al de los hombres, en torno a 0,2-0,5 puntos. No se guardan datos de Uni2 en los cursos 2015 y 2016; en Uni3, las titulaciones en maestro se implementan a partir del curso 2016.

Tabla 3. Progresión nota media de acceso / admisión

	2015	2016	2017	2018	2019	Promedio
Uni1	8,513	8,842	9,161	9,309	9,455	9,068
Uni2	--	--	6,406	6,484	6,389	6,427
Uni3	--	7,383	7,175	7,350	7,278	7,294

El sesgo de género se concreta en una representación de hombres en torno al 20%-30% del total de ingresos, con mayor presencia en Uni1 y Uni2 (tabla 4).

Tabla 4. Género global

	Uni1	*Uni2*	*Uni3*	*Total*
Mujeres	783 (72,2%)	599 (68,0%)	285 (80,5%)	1667 (71,9%)
Hombres	302 (27,8%)	282 (32,0%)	69 (19,5%)	653 (28,1%)
Total	1085 (100%)	881 (100%)	354 (100%)	2320 (100%)

Esta distribución por género no es equiparable según sea el Grado en Maestro en Educación Infantil o en Educación Primaria, ni tampoco si la formación supone un Doble Grado o un Programa Internacional. El Grado más feminizado es el de Maestro en Educación Infantil (EI) en una lengua propia, observándose distribuciones paulatinamente más masculinizadas en el Grado en Maestro en Educación Primaria (EP) en lengua propia y en los Programas Internacionales o Dobles Grados.

Las tablas 5 y 6 ejemplifican el aporte que hace a cada titulación la modalidad de bachillerato, en términos de género, en Uni1 y en Uni2. En ambos casos, las mujeres son hegemónicas en la titulación de EI, su presencia supera el 90%. Si se toma como referencia la modalidad de humanas

(aporta el 68,5% y el 59,4% de los estudiantes, respectivamente), se observa que, en comparación, la modalidad artística aporta un porcentaje algo mayor de estudiantes a EI, pero no resulta estadísticamente significativo.

Sin embargo, sí resulta relevante el mayor porcentaje de estudiantes de la modalidad de ciencias que accede al Grado en EP. Además, el porcentaje de hombres que provienen de modalidades científico-tecnológicas supera en un 10% al de otras modalidades, y en el caso de la titulación de MEP, los hombres que cursaron una modalidad de ciencias superan el 40%, llegando a ser la mitad en Uni2.

Las tablas 5 y 6 confirman que, con independencia de la modalidad o la titulación, la nota de acceso del colectivo de mujeres es superior, pero se observa una excepción. En la implementación del DG-EIP, un reducido colectivo de hombres accede a estos estudios con una calificación excepcional, de entre 11 y 12 puntos, lo que para este colectivo supone un salto cualitativo mayor que el observado en el caso de las mujeres. La implementación del Programa Internacional (PI), también novedoso, no atrajo en su día a este segmento de estudiantes (tabla 7)

Tabla 5. Género, titulación y modalidad en Uni1

	Mujeres			*Hombres*			*Total*		
	Fr	*%*	*Cal*	*Fr*	*%*	*Cal*	*Fr*	*%*	*Cal*
Humanas	547	73,6%	9,157	196	26,4%	8,886	**743**	**68,5%**	**9,085**
EI	209	93,3%	8,771	15	6,7%	8,966	224	30,2%	8,788
EP	323	64,5%	9,301	178	35,5%	8,826	501	67,4%	9,132
DG-EIP	15	83,3%	11,371	3	16,7%	12,064	18	2,4%	11,486
Artes	79	77,5%	9,063	23	22,5%	8,771	**102**	**9,4%**	**8,997**
EI	31	93,9%	8,630	2	6,1%	7,514	33	32,4%	8,562
EP	45	68,2%	9,243	21	31,8%	8,891	66	64,7%	9,131
DG-EIP	3	100,0%	10,852	0	0%	0	3	2,9%	10,852
Ciencias	157	65,4%	9,249	83	34,6%	8,652	**240**	**22,1%**	**9,042**
EI	42	91,3%	8,932	4	8,7%	7,784	46	19,2%	8,832
EP	110	58,5%	9,278	78	41,5%	8,662	188	78,3%	9,010
DG-EIP	5	83,3%	11,716	1	16,7%	11,466	6	2,5%	11,674
Total							**1085**	**100%**	**9,068**

Tabla 6. Género, titulación y modalidad en Uni2

	Mujeres			*Hombres*			*Total*		
	Fr	*%*	*Cal**	*Fr*	*%*	*Cal**	*Fr*	*%*	*Cal**
Humanas	374	71,5%	6,384 (235)	149	28,5%	6,067 (93)	**523**	**59,4%**	**6,295 (328)**
EI	177	93,2%	6,350 (102)	13	6,8%	5,849 (6)	190	36,3%	6,214 (108)
EP	197	59,2%	6,499 (133)	136	40,8%	6,082 (87)	333	63,7%	6,334 (220)
Artes	38	66,7%	6,113 (14)	19	33,3%	6,183 (5)	**57**	**6,5%**	**6,131 (19)**
EI	20	95,2%	6,266 (8)	1	4,8%	---	21	36,8%	6,266 (8)
EP	18	50,0%	5,908 (6)	18	50,0%	6,183 (5)	36	63,2%	6,333 (11)
Ciencias	129	62,9%	6,405 (79)	76	37,1%	6,000 (39)	**205**	**23,3%**	**6,271 (118)**
EI	58	92,1%	6,405 (34)	5	7,9%	6,413 (2)	63	30,7%	6,405 (36)
EP	71	50,0%	6,405 (45)	71	50,0%	5,977 (37)	142	69,3%	6,212 (82)
FP-GS	58	60,4%	7,34 (37)	38	39,6%	7,531 (30)	**96**	**10,9%**	**7,426 (67)**
EI	39	75,0%	7,336 (24)	13	25,0%	7,39 (11)	52	54,2%	7,353 (35)
EP	19	43,2%	7,350 (13)	25	56,8%	7,613 (19)	44	45,8%	7,506 (32)
Total							**881**	**100%**	**6,426 (533)**

* La nota de acceso corresponde al periodo 2017/2019. Entre paréntesis, el número de estudiantes en este periodo.

Tabla 7. Comparación PI y DG-EIP en Uni1

	Mujeres			*Hombres*			*Total*	
	Fr	*%*	*Cal*	*Fr*	*%*	*Cal*	*Fr*	*Cal*

PI (promedio)	85	82,5%	9,995	18	17,5%	9,581	103	9,923
PI (primer curso)	28	84,8%	10,127	5	15,2%	9,674	33	10,058
DG-EIP	23	85,2%	11,378	4	14,8%	11,915	27	11,458

Similares tendencias se observan en Uni3 (tabla 8), donde la proporción de mujeres es todavía mayor, con presencia hegemónica en EI (100%) y en DG-PEI (95,3%). La proporción entre mujeres y hombres en EP y P es también similar, con una ratio de entorno 60 mujeres por 40 hombres. DG-PEP sigue la misma tendencia que DG-EIP en cuanto a porcentaje de mujeres y hombres.

En las tablas 9 y 10 se muestran las características de los cuartiles en Uni1 y Uni2, con 271 y 133 estudiantes por cuartil, respectivamente, donde se confirma una mayor presencia de mujeres (M) en los cuartiles superiores. La presencia de estudiantes de DG-EIP altera levemente la tendencia en Q1 (se marca con asterisco en la tabla 9). La modalidad de humanas (BH) tiene una distribución normal de calificaciones por cuartiles, con mayor presencia en los cuartiles centrales Q2 y Q3. En las modalidades de artes (BA) y ciencias (BC), la distribución es bimodal, y está agrupada en torno a los cuartiles superiores (Q1 o Q2) y el cuartil inferior (Q4).

Tabla 8. Comparación Dobles Grados en Uni3

	Mujeres			*Hombres*			*Total*	
	Fr	*%*	*Cal*	*Fr*	*%*	*Cal*	*Fr*	*Cal*
EI	67	100%	7,207	0	0	0	67	7,207
EP	49	58,3%	6,968	35	41,7%	6,248	84	6,668
P	20	62,5%	6,964	12	37,5%	6,373	32	6,743
DG-PEI	61	95,3%	7,788	3	4,7%	7,440	64	7,722
DG-PEP	88	82,2%	7,809	19	17,8%	7,308	107	7,720
							354	7,294

Tabla 9. Distribución de cuartiles, Uni1

	M	*EI*	*EP*	*BH*	*BA*	*BC*	*Cal*
Q1	81,9%	22,1%*	67,5%*	67,9%	8,9%	23,3%	10,806
Q2	72,7%	24,0%	76,0%	70,5%	9,2%	20,3%	9,348
Q3	64,9%	28,0%	72,0%	69,4%	12,2%	18,5%	8,506
Q4	69,4%	37,6%	62,7%	66,2%	7,4%	26,5%	7,620

* Estudiantes que cursan una única titulación.
Incluyendo datos de DG-EIP: 32,1% y 81,5%, respectivamente,

Tabla 10. Distribución de cuartiles, Uni2

	M	*EI*	*EP*	*BH*	*BA*	*BC*	*FP-GS*	*Cal*
Q1	76,7%	39,9%	60,2%	49,6%	1,5%	14,3%	34,6%	7,726
Q2	69,9%	31,6%	68,4%	58,6%	5,3%	27,8%	8,3%	6,475
Q3	66,2%	39,1%	60,9%	70,7%	2,3%	22,6%	4,5%	6,000
Q4	61,7%	30,1%	69,9%	67,7%	5,3%	24,1%	3,0%	5,505

En la tabla 11 se visualiza la distribución por cuartiles en Uni3 en cada titulación (no se tienen datos de las modalidades). Se puede cotejar que, en los cuartiles superiores, el porcentaje de mujeres es mayor (96,6% en Q1) y está copado por estudiantes que cursan dobles titulaciones.

Tabla 11. Distribución de cuartiles, Uni3

	M	*EI*	*EP*	*P*	*DG-PEI*	*DG-PEP*	*Cal*
Q1	96,6%	19,3%	11,4%	3,4%	27,3%	38,6%	7,726
Q2	77,5%	15,7%	14,6%	6,7%	21,4%	41,6%	6,475
Q3	82,9%	21,6%	24,8%	8,0%	14,8%	30,8%	6,000
Q4	65,2%	19,1%	43,8%	18,0%	9,0%	10,1%	5,505

Discusión de los resultados

La muestra evidencia un progresivo incremento en la nota de admisión (Uni1) a las titulaciones en maestro. El PI y los DG contribuyen a este fenómeno que ya se apreciaba previamente, y las mujeres copan significativamente los cuartiles superiores. La distribución de hombres y mujeres en la muestra es similar en los tres centros. Más de dos tercios de las estudiantes son mujeres, con una presencia hegemónica en la titulación de EI. En compensación, esta proporción se tiende a igualar en EP. En Uni2 y Uni3, la separación de género por titulaciones es más pronunciada. Por modalidades, el perfil artístico aporta más mujeres, y con ello, más estudiantes a la titulación de EI. En compensación, el perfil científico-tecnológico aporta más hombres a la EP. No se tienen datos de las modalidades en Uni3, pero el mayor número de estudiantes varones en la titulación EP responde a éste mismo patrón, y se podría plantear como hipótesis razonable, un mismo origen en la modalidad de ciencias en este segmento de la muestra. La modalidad de humanas es mayoritaria, y su presencia homogénea en todas las titulaciones. El árbol de similitud del *análisis implicativo* (figura 1) nos da una imagen clara de la situación.

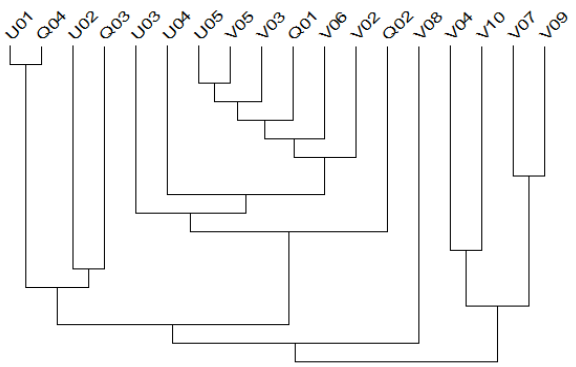


Figura 1a: Uni1

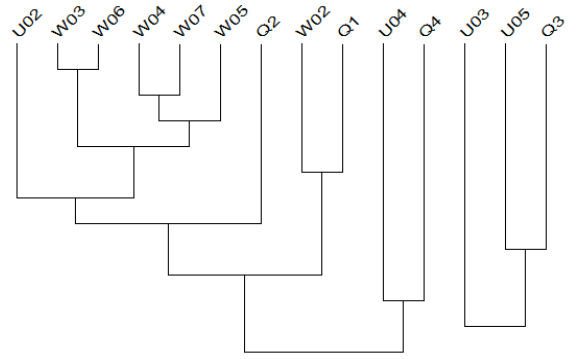


Figura 1b: Uni3

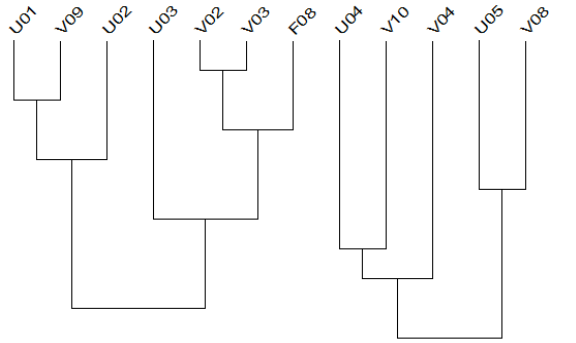


Figura 1c: Uni2
Quinquenio 2015/2019 sin cuartiles

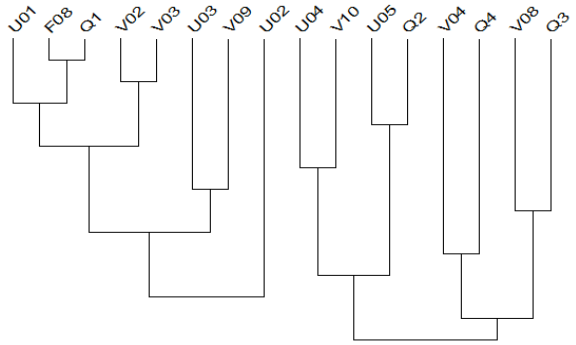


Figura 1d: Uni2
Trienio 2017/2019 con cuartiles

Figura 1. Árbol de similitud entre variables

En la figura 1a, la rama principal ejemplifica el impacto del DG-EIP y del PI en relación al cuartil Q1 y la presencia de mujeres en los mismos, además del aporte que indirectamente hace a la titulación EI. La segunda rama ilustra la situación hace 5 y 4 años, vinculados en retrospectiva a los cuartiles último y penúltimo, respectivamente. El euskera aparece como elemento cultural de relevancia en las disciplinas artísticas, la modalidad de ciencias aporta estudiantes a la titulación de EP, y la modalidad de humanas es homogénea y omnipresente. En la figura 1b, se reproduce la vinculación entre mujeres y Q1. Las demás ramas se refieren a las naturales conexiones entre titulaciones regulares y DG: EP, DG-PEP y P; EI y DG-PEI. En las figuras 1c y 1d, la rama principal ejemplifica el aporte de los estudiantes que provienen de Grado Superior a la variable de

género, la titulación EI y al cuartil Q1. En comparación con esta tipología de estudiante, el árbol de similitud agrupa la titulación EP con el cuartil Q4. Las modalidades fluctúan de un año a otro: 2015 y 2016 fueron propicios para la modalidad artística, en 2017 tuvieron mayor presencia las incorporaciones de Grado Superior, 2018 atrajo más estudiantes de ciencias y 2019 aportó estudiantes de modalidades humanísticas en el cuartil Q3.

Finalmente, el diagrama *implicativo* confirma el análisis anterior y añade alguna información que no es fácil de percibir en las tablas estadísticas descriptivas ni en el árbol de similitud. En la figura 2, las líneas de color rojo indican una probabilidad de implicación entre variables del 99%, y las azules del 95%; las verdes (90%) y grises (85%) indican una relación de menor intensidad.

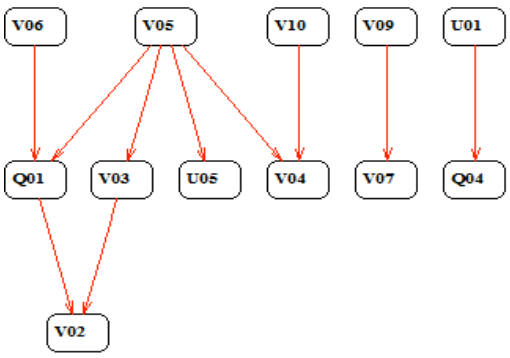


Figura 2a: Uni1

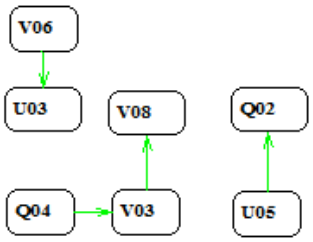


Figura 2b: Uni1

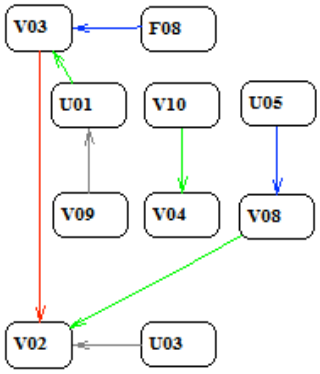


Figura 2c: Uni2
Trienio 2017/2019 con cuartiles

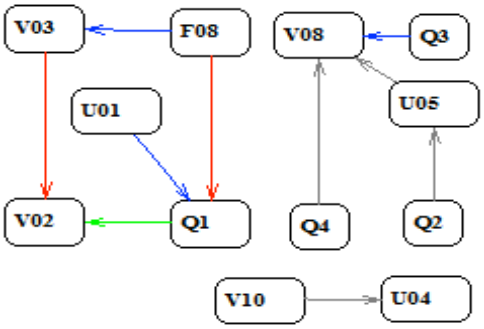


Figura 2d: Uni2
Quinquenio 2015/2019 sin cuartiles

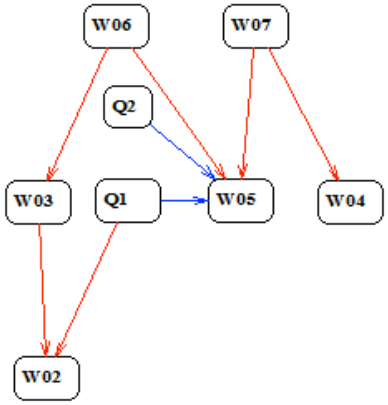


Figura 2e: Uni3

Figura 2. Diagrama *implicativo* entre variables

Se verifica la implicación que tienen los DG y el PI, con la pertenencia a Q1 y ser mujer. Haber cursado una modalidad artística o un Grado Superior, implican una mayor presencia en EI, en ser mujer, y en realizar estudios universitarios en euskera. La modalidad de ciencias contribuye a la titulación de EP, en distinta intensidad según centros. Si bien se ha indicado previamente que la modalidad de humanas abarca las distintas titulaciones de manera homogénea, las figuras 2b, 2c y 2d muestran que la presencia en cuartiles inferiores, Q3 y Q4, implican probabilidad de pertenencia a la modalidad de humanas. Esta última implicación permite identificar un colectivo de estudiantes de ciencias humanas que no se había percibido en el análisis anterior, y que copa los últimos puestos de entrada a las titulaciones en maestro, con cierto peso en EI.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

El progresivo incremento en la nota de admisión (ponderada en la fase específica) a los magisterios supone una revalorización de los estudios en maestro. La tendencia viene de atrás y puede estar marcada por fenómenos externos, como el aumento del número de convocatorias de Oposición a maestro, o el cambio de percepción social hacia la titulación. Sin embargo, la implementación de Programas Internacionales y Dobles Grados contribuye internamente a esta tendencia.

En la modalidad de ciencia, existe un colectivo de estudiantes formado por hombres y mujeres que se decide por el magisterio en Educación Primaria, y aporta un perfil de ciencia y tecnología a una disciplina fundamentalmente social. Esto se debe entender como una fortaleza de los Grados en Maestro, y se le debe dar salida con propuestas educativas de tipo STEM. Si bien los estudiantes de la modalidad de humanas forman un cuerpo homogéneo en las distintas titulaciones de maestro, se identifica un segmento de esta población con nota de acceso baja, que pondría en cuestión el mito según el cual los estudiantes de maestro huyen de las ciencias.

La implementación de Programas Internacionales y Dobles Grados, si bien lleva consigo un aumento en la nota de acceso, no ha supuesto un cambio en el perfil de entrada a los Grados en maestro. Este perfil-tipo sigue siendo el de una mujer con altas calificaciones que proviene mayoritariamente de una modalidad de humanas.

Un reducido colectivo de estudiantes varones supera por primera vez la nota de acceso de las mujeres con calificaciones excelentes en el DG-EIP. Se trata de una anomalía dentro de las tendencias de la muestra, que abre varias cuestiones de interés para futuras indagaciones: ¿Se trata de un fenómeno anecdótico, debido al efecto *novedad*? O, por el contrario, ¿tendrá reflejo a futuro en la tipología de ingreso a las titulaciones en maestro? Siendo esto así, ¿cuáles son las razones por las que un colectivo de varones, con calificaciones excelentes, opta por los estudios en maestro?

Referencias

APM, FESPM. (2019). Las matemáticas frente a los desafíos STEM-STEAM. II Seminario Internacional Associação de Professores de Matemática (APM) Portugal – Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Escuela Superior de Educación de Santarém (Portugal), 31 de mayo – 2 de junio.

Franco-Buriticá, E., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. Casas-Rosal, J.C. (2019). Un análisis de las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes para maestro de educación media en Colombia. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXIII (p. 617). Valladolid: SEIEM.

INE. (2019). Estadísticas de estudiantes. Estadísticas e Informes Universitarios. Periodo 2015-2019. Última actualización: junio de 2019. [Recuperable en https://www.ine.es/jaxiT3/Datos.htm?t=12722#!tabs-tabla]

Lasa, A., Wilhelmi, M.R., Belletich, O., Abaurrea, J., Iribas, H. (2020). STEM projects as Didactical Situations in Mathematics. 14th International Congress on Mathematics Education. Shanghai, 12-19 July. ACEPTADO y POSPUESTO por COVID-19 a 2021.

Lasa, A., Wilhelmi, M.R., Abaurrea, J., Belletich, O., Iribas, H. (2019). Proyectos STEM como Situaciones Didácticas en Matemáticas: marco teórico para construir el significado algebraico institucional. XXIII Simposio de la SEIEM. Universidad de Valladolid, 4-6 de septiembre.

Lasa, A. (2019). STEM y matemáticas; estrategias para apuntalar la M final. VI Jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra. Universidad Pública de Navarra, Pamplona, 8-9 noviembre.

Lasa, A. (2017). Aportes al STEM desde la didáctica de las matemáticas. Conferencia invitada, XXXVI Cursos de Verano UPV/EHU: Aprender hoy para resolver mañana; Las competencias STEM. San Sebastián, 3-5 de julio.

Pérez-Tyteca, P., Monje, J., Castro, E. (2013). Afecto y matemáticas. Diseño de una entrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, 4, 65-82.

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN LA INTERPRETACIÓN DE NOTICIAS

High School Students' Probabilistic Reasoning in Interpreting the News

Lavela, J. F.[a], Batanero, C. [b] y Álvarez-Arroyo, R.[b]

[a] IES Marqués de Comares (Lucena), [b] Universidad de Granada

Resumen

Se analiza el razonamiento probabilístico de 76 estudiantes de Bachillerato al interpretar una noticia tomada de los medios de comunicación, a partir de la cual se plantean seis preguntas que implican el cálculo o estimación de probabilidades condicionadas y la lectura crítica de la información presentada. Los resultados reflejan que los estudiantes calculan correctamente la probabilidad simple y la del suceso complementario, y muchos usan su conocimiento del contexto para dar respuesta a las preguntas, pero parte confunde una probabilidad condicionada con su transpuesta. Otros muestran dificultad para discriminar el condicionamiento y la causalidad, y para llegar a un nivel de lectura crítica de la información; finalmente, pocos son capaces de identificar la información faltante en la tarea.

Palabras clave: *probabilidad, estudiantes de Bachillerato, medios de comunicación, razonamiento probabilístico, probabilidad condicionada*

Abstract

The probabilistic reasoning of 76 high school students is analyzed when interpreting news taken from the media, from which six questions are posed that involve the calculation or estimation of conditional probabilities and the critical reading of the information presented. The results show that the students correctly calculate the simple probability and the probability of the complementary event, and many use their knowledge of the context to answer the questions, but a part of them confuse a conditional probability with its transposed. Others show difficulty in discriminating conditioning and causality, and reaching a level of critical reading of the information, finally few are able to identify the missing information in the task.

Keywords: *probability, High school students, media, probabilistic reasoning, conditional probability*

INTRODUCCION

La enseñanza de la probabilidad se justifica por su papel en la inferencia y porque es la única rama de las matemáticas que trata las situaciones de incertidumbre, propiciando un nuevo tipo de razonamiento (Franklin et al., 2007). Una segunda razón es que la probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes para su vida, debido a la existencia de la aleatoriedad en muchas situaciones cotidianas y laborales (Gal, 2005). No solo los profesionales, sino cualquier persona ha de reaccionar a mensajes en los medios de comunicación en los que aparecen elementos de probabilidad y donde han de tomar decisiones que les pueden afectar, emitir juicios sobre relación entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002). De ello se deduce la necesidad de promover la cultura y razonamiento probabilístico (Borovnick, 2016; Gal, 2005).

Para responder a estas demandas, en la Educación Secundaria Obligatoria se incluye el estudio de la probabilidad, que continúa en Bachillerato llegando hasta el teorema de Bayes y las distribuciones de probabilidad, así como la inferencia en la rama de Ciencias Sociales (MECD, 2015). Sin

Lavela, J. F., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2021). Razonamiento probabilístico de estudiantes de Bachillerato en la interpretación de noticias. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 359 – 366). Valencia: SEIEM.

embargo, la enseñanza en estos niveles educativos se basa casi en exclusiva en el aprendizaje de definiciones, propiedades y la resolución de problemas tomados de libros de texto (Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2021), siendo poco habitual enfrentar a los estudiantes con problemas extraescolares reales en los que deban aplicar sus conocimientos y razonamiento sobre la probabilidad.

El objetivo de este trabajo ha sido evaluar el razonamiento probabilístico de un grupo de estudiantes de Bachillerato al interpretar una noticia tomada de los medios de comunicación. De este modo se asegura que se cumple el principal fin de la enseñanza de la probabilidad, que es preparar al estudiante para enfrentar la probabilidad en su vida fuera del contexto escolar. En lo que sigue, se describen los fundamentos y metodología empleada, se exponen sus resultados y se finaliza con algunas sugerencias para la enseñanza de la probabilidad en Bachillerato.

MARCO TEÓRICO

Nos basamos en publicaciones que describen los componentes de la cultura y el razonamiento probabilístico. Se considera que una persona con cultura probabilística es capaz de comprender los enunciados de probabilidad y tomar una decisión fundamentada en el contexto de situaciones extraescolares, tales como la interpretación de noticias tomadas de los medios de comunicación o de un diagnóstico médico. Según Gal (2005), la cultura probabilística implica el conocimiento de las siguientes ideas probabilísticas fundamentales: aleatoriedad, variabilidad, independencia y predicción/incertidumbre, así como conocimiento del lenguaje de probabilidad y competencia para estimar o calcular probabilidades en situaciones variadas. Se debe conocer el papel de la probabilidad en diferentes contextos y conocer las preguntas críticas que hay que plantearse al encontrar información referida a una situación aleatoria. Además, su modelo tiene en cuenta una serie de disposiciones, como la postura crítica ante la información probabilística, la superación de creencias erróneas y las actitudes positivas hacia el aprendizaje y uso de la probabilidad.

Según Sánchez y Valdez (2017), el razonamiento probabilístico aparece en la solución de problemas de probabilidad y al utilizar argumentos para probar la verdad de una afirmación probabilística o la validez de la solución al problema. Schum (2001) analiza la especificidad del razonamiento probabilístico, que requiere juicios para establecer la credibilidad de la evidencia en función de su relevancia para el problema analizado, su credibilidad (si la información es suficiente y válida) y su fuerza inferencial (si dicha información se puede generalizar a otra población o contexto). Borovcnik (2016), por su parte, incluye en el razonamiento probabilístico la competencia para elegir el modelo probabilístico que se debe aplicar en cada situación, la capacidad de discriminar entre el condicionamiento y la causalidad y para comprender la asimetría de las probabilidades condicionadas, así como la interpretación correcta de enunciados probabilísticos.

ANTECEDENTES

Aunque no encontramos antecedentes que evalúen el razonamiento probabilístico de los estudiantes en contextos extraescolares o la interpretación de enunciados de probabilidad en noticias tomadas de la prensa, Sánchez y Valdez (2017) analizan este razonamiento en 30 estudiantes de Bachillerato en tareas de comparación de urnas y muestreo, indicando que apoyan su razonamiento en ideas de variabilidad, independencia y aleatoriedad. Sánchez y Carrasco (2018), por su parte, analizan el razonamiento probabilístico de 34 estudiantes de Bachillerato en la construcción de la distribución binomial y su uso en la predicción de la probabilidad de un suceso, indicando que el éxito en el primer punto no asegura la competencia en el segundo.

Puesto que en la tarea planteada a los estudiantes se presentan probabilidades condicionadas, nos basamos también en investigaciones relacionadas con este tema. Estos problemas han sido investigados por distintos autores, que los han clasificado identificando en ellos algunas variables

que afectan a su resolución (ej., Huerta y Bresó, 2017; Lonjedo y Huerta, 2005). La abundante investigación relacionada con la probabilidad condicionada también ha descrito numerosos sesgos de razonamiento (Borovcnick, 2012; Estrada, Díaz y de la Fuente, 2006). Uno de ellos consiste en confundir una probabilidad condicionada P(A|B) con su transpuesta P(B|A), denominado por Falk (1986) como *falacia de la condicional transpuesta*, sin comprender la asimetría de las probabilidades condicionadas (Borovcnik, 2016). Otro punto por considerar es la confusión entre condicionamiento y causación, que fue analizada en estudiantes de psicología por Díaz y de la Fuente (2007) y en futuros profesores por Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012).

MÉTODO

La muestra estuvo formada por 77 estudiantes de segundo curso de Bachillerato (40 de la especialidad de Ciencias y 37 de Ciencias Sociales del mismo instituto en la localidad de Lucena, Córdoba). La evaluación se llevó a cabo como actividad inicial al estudio de la probabilidad condicionada en el citado curso, aunque los estudiantes ya la habían estudiado en el cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria, según información recogida del centro.

En la Figura 1 se presenta el cuestionario propuesto, que parte de una noticia publicada en los medios de comunicación sobre accidentes de tráfico. Se eligió esta temática para propiciar el interés de los estudiantes y para concienciarlos de los posibles efectos del consumo de substancias tóxicas. Sobre esta noticia se les plantearon seis preguntas. Considerando los sucesos F= fallecido, AUD= positivo en alcohol o drogas, S= llevar puesto el cinturón de seguridad, los datos del problema son los siguientes: P(AUD|F)=43/100=0,43; P ($\overline{S}$|F)=23/100=0,23, siendo $\overline{S}$ el suceso complementario a S. En todas las preguntas, el estudiante primeramente debe comprender el enunciado, identificando los datos, y después, dependiendo de la pregunta concreta, calcular la probabilidad o porcentaje pedido o bien dar un razonamiento que muestre la lectura crítica de la noticia.

En la página de la DGT[i] se habla de siniestralidad en carreteras españolas y aparecen los siguientes datos:



- *Los análisis toxicológicos realizados a 751 personas fallecidas en 2018 en accidente de tráfico (535 conductores, 143 peatones y 73 acompañantes) muestran que el consumo de alcohol y otras drogas sigue influyendo negativamente en la seguridad vial.*
- *Más del 43% (232) de los conductores fallecidos dieron positivo en consumo de alcohol o drogas y este dato no ha variado significativamente con respecto a años anteriores.*

Otra noticia publicada en un periódico[ii] indica que *"el 23% de los fallecidos en coche en 2018 no llevaba puesto el cinturón de seguridad"*.

Analiza la situación:

1. Según las indicaciones de la DGT, ¿qué porcentaje de los conductores que fallecieron no había consumido alcohol o drogas?
2. ¿Qué probabilidad hay de que un fallecido llevase puesto el cinturón de seguridad?
3. Según las indicaciones de la DGT, ¿podemos conocer el porcentaje de conductores que fallecieron debido a causas de consumo de alcohol o drogas?

A la vista de las respuestas que has dado, responde:

4. ¿Es más probable fallecer por haber consumido alcohol o drogas o sin haber consumido ningún tipo de estas sustancias?
5. ¿Qué es más probable: fallecer si se tiene puesto el cinturón de seguridad o si se conduce sin él?
6. ¿Crees que la forma de proporcionar la información es la correcta? ¿Por qué? Si no lo es, ¿qué información faltaría para dar una visión correcta de la situación?

Figura 1. Cuestionario propuesto a los estudiantes

A continuación, se describen las categorías de respuestas, con ejemplos, donde los estudiantes del Bachillerato de ciencias se han codificado como Cx y los de ciencias sociales como Sx. Las respuestas a las preguntas 1 y 2 se han codificado con el siguiente criterio:

- *Respuesta correcta (probabilidad)*. La pregunta 1 y 2 pide calcular la probabilidad condicionada $P(\overline{AUD}|F)$, que sería complementaria de la probabilidad P(AUD|F), es decir, $P(\overline{AUD}|F)=1-P(AUD|F)=1-0,43=0,57$. La segunda pregunta pide la probabilidad P(S|F) que sería el complementario de $P(\overline{S}|F)$, es decir, 0,77. En los dos casos es necesario identificar los datos del problema, reconocer y aplica correctamente la probabilidad del suceso complementario.
- *Respuesta correcta (porcentaje)*. El estudiante da la respuesta correcta, expresando la solución en porcentaje (53% en la pregunta 1 y 77% en la pregunta 2).
- *Da la probabilidad del suceso complementario* al que se pide. El estudiante se limita a dar el dato del enunciado, sin notar que se pide la probabilidad del suceso complementario, lo que indica que no muestra una lectura comprensiva del enunciado.
- *Otros errores* de cálculo o de interpretación incorrecta del enunciado. Así, S31, en la pregunta 1 divide 232 entre 751 y multiplica por 100, obteniendo 30,9%, que representa el porcentaje correspondiente al suceso complementario con respecto a todos los accidentados y no sólo de los conductores. S14, en la segunda pregunta calcula correctamente el valor (77%), pero luego obtiene el número de accidentados que supone dicho porcentaje entre los 535 conductores; es decir, confunde porcentaje y frecuencia y, además, da un valor decimal para dicho número, lo cual implica que no contextualiza adecuadamente.

S31: 69,1% (pregunta 1).

S14: Cada 411,95 personas de 535 es probable que fallezcan teniendo el cinturón (pregunta 2).

En los apartados 3 a 5 se evalúa saber distinguir una probabilidad condicionada y su transpuesta, así como diferenciar condicionamiento y causación. No se puede obtener la probabilidad pedida, pues se necesitaría aplicar la fórmula de Bayes, para la cual nos faltan datos: la probabilidad de consumir alcohol o drogas y la probabilidad de fallecer cuando no se ha consumido. Por otro lado, esperamos se comprenda que una probabilidad condicionada no implica una causa y efecto. Se han codificado en base al siguiente criterio:

- *Respuesta correcta diferenciando condicionamiento y causalidad*. El estudiante expone justificadamente que no puede responderse a la pregunta por falta de información, diferenciando condicionamiento y la causalidad. También admitimos como respuesta correcta indicar que faltan datos en el problema.

C69: No, nos informan de cuántos iban bajo los efectos de estas sustancias, pero no implica que fueran la causa del accidente (pregunta 3).

S19: Es más probable fallecer bajo los efectos de las drogas o el alcohol, aunque el porcentaje salga menor que las personas sobrias, porque hay más personas sobrias que drogadas en la carretera (pregunta 4).

- *Respuesta correcta, aplicando su conocimiento del contexto* sin tener en cuenta el enunciado del problema.

S5: Sí, es más probable, porque al consumir alcohol o drogas puede provocar el fallecimiento de conductor en carretera o puede dormirse, etc. (pregunta 4).

C42: Es más probable fallecer sin el cinturón ya que este proporciona a los pasajeros seguridad ante algún accidente (pregunta 5).

- *Confunde la probabilidad* condicionada *con su transpuesta,* y confunde condicionamiento y causalidad.

S3: Según pone el texto más del 43% han fallecido por el consumo de éstas (pregunta 3).

C38 Es más probable fallecer sin haber consumido ninguna de estas sustancias, ya que, según la DGT, un 43% falleció consumiendo, así que un 57% falleció sin consumir (pregunta 4).

C60: Es más probable fallecer llevando puesto el cinturón de seguridad ocupando el 77% de los casos (pregunta 5).

- Otras respuestas están basadas en cálculos incorrectos o no justifican la respuesta. Así, S34 en la pregunta 3 suma el porcentaje de los que consumen drogas y los que no tienen puesto el cinturón de seguridad, sin reparar en que no son sucesos asociados al mismo experimento.

S34: 43 % drogas + 23 % no llevaban puesto cinturón de seguridad = 66%. Entonces 100% - 66% = 56% (pregunta 3).

C42: Es más probable fallecer por otras causas (pregunta 4).

En la cuestión 6 se pregunta qué información falta en la noticia, lo que implica el planteamiento de preguntas críticas (Gal, 2005) y la interpretación correcta de enunciados probabilísticos (Borovcnik, 2016). Las respuestas se han codificado siguiendo estos criterios:

- *Correcta, aportando información necesaria para realizar el cálculo*. Por ejemplo, indican el número de personas que llevando el cinturón sobreviven. Así, el estudiante C2 utiliza su conocimiento del contexto para estar seguro de que se necesita más información y rebatir la afirmación.

C2: No es la correcta, debido a que carecemos de muchos datos importantes. Porcentaje de conductores salvados por el cinturón de seguridad, porcentaje de personas fallecidas por otras causas. Resulta obvio que sin efectos del alcohol y con cinturón de seguridad es menos probable morir en accidente de tráfico.

- *Correcta, aunque no aporta la información necesaria.* Indica que deben dar más información, pero no cuál. Ejemplo de ello es la respuesta de C53, en la que se observa que el estudiante es consciente de que la información es incompleta, pero no sabe indicar qué información falta:

C53: No lo es, ya que esta información da a creer que más gente muere con el cinturón puesto o sin haber consumido sustancias como alcohol o drogas.

- *Principio de autoridad.* El estudiante indica que la información es correcta basándose en la autoridad de la fuente de información (la considera fiable e incuestionable), mostrando una falta de postura crítica ante la misma, capacidad crítica recomendada por Gal (2005).

S1 Sí, porque un estudio estadístico es la forma más eficaz de marcar realmente cuál es el porcentaje de fallecidos y su causa. En mi opinión, la información es correcta totalmente.

C76: Sí, ya que la DGT es una fuente muy fiable, aunque las pruebas de alcoholemia algunas veces fallen.

- *Necesidad de concienciación.* Plantea argumentos relacionados con la necesidad de concienciación de los ciudadanos en estos temas, pero sin referencias a los datos del problema. Aunque aplica el conocimiento del contexto, no lo usa para dar una respuesta correcta.

S5: No, puesto que pienso que se debería hacer mucho más visible esta situación y estos datos para ver si así las personas cogen conciencia.

- *Sugiere información no relevante.* Argumenta la necesidad de añadir otros, aunque dicha información no ayudaría a resolver el problema planteado.

S14: No, porque da la información muy por encima. Faltaría por dar la muerte de acompañantes y presentar su causa.

C48: No, porque no da información sobre los peatones. Faltaría establecer cuántos peatones habían seguido las correctas normas de circulación (paso de peatones, caminar por la acera, …)

Recogidas las respuestas se llevó a cabo un análisis de contenido convencional de las mismas, clasificándolas en categorías que fueron revisadas por los autores del trabajo, hasta llegar a un consenso.

RESULTADOS

En la Tabla 1 se muestran los porcentajes de estudiantes que dieron estas respuestas en las dos primeras preguntas. La mayor parte de los estudiantes dio respuestas correctas en ambas tareas, aunque algo menos en la segunda por parte del grupo de Ciencias Sociales. Por tanto, en general, para las dos primeras preguntas hubo una buena lectura del enunciado e identificación de los datos; además, se recuerda bien la probabilidad del suceso complementario, y se reconoce que hay que aplicarlo. Un pequeño grupo no identificó correctamente que el enunciado solicitaba calcular la probabilidad del suceso complementario al dado o cometió otros errores, muchos de ellos relacionados con un cálculo incorrecto del porcentaje al considerar un total inadecuado.

Tabla 1. Porcentajes de respuestas en las preguntas 1 y 2

	Ciencias (n=39)		C. Sociales (n=37)		Total (n=76)	
	P1	P2	P1	P2	P1	P2
Correcta, probabilidad		7,7	5,4	16,2	2,6	11,8
Correcta, porcentaje	92,3	71,7	83,8	51,4	88,2	61,8
Probabilidad del suceso complementario	2,6	10,3	2,7	5,4	2,6	7,9
Otros errores	5,1	10,3	8,1	18,9	6,6	14,5
No responde				8,1		3,9

En la Tabla 2 se presentan los resultados de las preguntas 3 a 5. En la 3 son pocos los que explícitamente reconocen la diferencia entre condicionamiento y causalidad, aunque algunos más dan respuestas correctas utilizando su conocimiento del contexto. Esta aplicación correcta del conocimiento contextual y, por tanto, del razonamiento probabilístico aumenta considerablemente en las preguntas 4 y 5 en la mayoría de los estudiantes. En las tres preguntas un alto porcentaje de estudiantes muestra la confusión de la condicional transpuesta (Falk, 1986).

Tabla 2. Porcentajes de respuesta en las preguntas 3, 4 y 5

	Ciencias (n=39)			C. Sociales (n=37)			Total (n=76)		
Respuesta	P3	P4	P5	P3	P4	P5	P3	P4	P5
Diferencia condicionamiento y causalidad	2,6			2,7	2,7		2,6	1,3	
Aplica conocimiento contexto	7,7	30,8	46,2	16,2	32,4	45,9	11,8	31,6	46,1
P. condicional transpuesta	61,5	61,5	46,2	51,4	62,2	51,4	56,7	61,8	48,7
Otros errores	25,6	7,7	7,7	29,7	2,7	2,7	27,6	5,3	5,3
No responde	2,6						1,3		

La Tabla 3 presenta los resultados en la pregunta 6, donde alrededor de la cuarta parte de estudiantes (algo más en el grupo de Ciencias que en el de Ciencias Sociales) dio una respuesta correcta indicando datos faltantes, y otra parte importante responde adecuadamente aunque sin especificar los datos que se precisan. Entre estas dos categorías suponen casi la mitad de los alumnos de Ciencias y un 40% en Ciencias Sociales. Destacamos el alto porcentaje de estudiantes, sobre todo de Ciencias Sociales, que se guía por el principio de autoridad, sin mostrar una verdadera postura crítica ante los datos estadísticos proporcionados. Un pequeño porcentaje (entorno al 8%) alude a la necesidad de una mayor concienciación; aunque esta respuesta no es pertinente desde el punto de vista de la probabilidad, sí nos parece valiosa en relación con la formación de los estudiantes.

Tabla 3. Porcentajes de respuesta en la pregunta 6

Respuesta	Ciencias (n=39)	Ciencias Sociales (n=37)	Total (n=76)
Correcta, indica datos	28,2	18,9	23,7
Correcta, no indica datos	20,5	13,5	17,1
Sugieren otras variables	20,5	40,5	30,3
Autoridad de la fuente	7,7	8,1	7,9
Necesidad concienciación	10,3	8,1	9,2
No responde	12,8	10,8	11,8

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Aunque no se puede generalizar a otros estudiantes, al trabajar con una nuestra no aleatoria, ni tener información sobre su conocimiento de la probabilidad, más allá del cuestionario planteado, los resultados del estudio señalan que una parte de los estudiantes de la muestra presentan una cultura probabilística adecuada (Gal, 2005), mostrando su conocimiento del lenguaje probabilístico y competencia para identificar los datos del problema y calcular probabilidades en las dos primeras preguntas. También se puso en práctica su razonamiento probabilístico, interpretando correctamente enunciados probabilísticos y eligiendo el modelo probabilístico que se debe aplicar en la situación (Borovcnik, 2016). De hecho, y de acuerdo con Sánchez y Valdez (2017), este razonamiento probabilístico se evidencia al resolver un problema de probabilidad no rutinario y al utilizar argumentos para probar la verdad de una afirmación probabilística.

El estudio también indica carencias importantes en los estudiantes, siendo pocos los que explícitamente reconocen en las preguntas 3 a 5 la diferencia entre condicionamiento y causalidad, un componente básico del razonamiento probabilístico según Borovcnik (2016). Destaca igualmente en estas preguntas la confusión de una probabilidad condicionada con su transpuesta, confusión ya mostrada en otras investigaciones previas (e.g., Díaz y de la Fuente, 2007; Díaz et al. 2012; Falk, 1986). Es importante también el porcentaje de estudiantes que se guían por la autoridad de la fuente de la información, sin adoptar una postura crítica ante los datos (elemento de la cultura probabilística, según Gal, 2005) y fallando en establecer la credibilidad de la misma (Schum, 2001). Por otro lado, en algunas preguntas los estudiantes hacen un uso eficiente de su conocimiento del contexto, que utilizan para paliar la falta de datos y como apoyo para discriminar entre condicionamiento y causalidad.

Los estudiantes estuvieron muy motivados por la actividad y su contexto. Pensamos que se abre una línea de investigación para el desarrollo de este tipo de tareas que podrían complementar adecuadamente la resolución de problemas tradicionales en la clase de Matemáticas por dos motivos: por un lado, hacen ver a los estudiantes la utilidad de la probabilidad en la vida diaria, al tiempo que se refuerza su razonamiento probabilístico (Borovcnick, 2016); y por otro, los conciencia de algunos de sus sesgos de razonamiento.

Agradecimiento: Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didáctica de la Matemática, 2,* 5-27. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.32.

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(3), 1491-1516.

Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Bolema, 26*(44), 1207-1225. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400006.

Díaz, C. y De La Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3), 128-148.

Estrada, A., Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. *Investigación en Educación Matemática X*, 277-284.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 - 297). Victoria, NZ: International Statistical Institute.

Franklin, C., Kader. G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer.

Gigerenzer, G. (2002). *Reckoning with risk*. Londres: Penguin Books.

Huerta, M. P. y Bresó, J. A. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11,* 87-106.

Lonjedo, M. A. y Huerta, M. P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. *Investigación en Educación Matemática IX*, 203-212.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD). (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: *Boletín Oficial del Estado, 3*, 169-546.

Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Análisis de la Práctica Docente en el Ámbito de la Educación Estadística en Educación Secundaria. *Paradigma, 42*(e1), 191-220. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p191-220.id1023.

Sánchez, E. y Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de Bachillerato en actividades de distribución binomial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 535-543). Gijón: SEIEM.

Sánchez, E. y Valdez, J.C. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11,* 127-143. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.180.

Schum, D. A. (2001). *The evidential foundations of probabilistic reasoning*. Illinois: Northwestern University Press.

[i] Fuente: http://revista.dgt.es/es/noticias/nacional/2019/07JULIO/0718-Informe-alcohol-drogas.shtml#.YDVxonmCFhE (18/07/2019).

[ii] Disponible en https://www.abc.es/sociedad/abci-23-por-ciento-muertos-accidentes-trafico-2018-no-llevaba-cinturon-seguridad-201909301335_noticia.html (30/09/2019).

UN ANÁLISIS ONTO-SEMIÓTICO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN[1]

An onto-semiotic analysis of mathematical activity in the modelling process

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G.

Universitat de Barcelona

Resumen

El objetivo es analizar el proceso de modelización matemática para resolver un problema, utilizando el modelo de análisis de la actividad matemática propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico (EOS), y así complementar el realizado por un modelo específico de análisis del proceso de modelización. Para ello, primero se reproduce un problema y el proceso de modelización que permite darle una respuesta, según el ciclo propuesto desde la perspectiva cognitiva. Luego, se analiza el mismo problema utilizando el modelo propuesto por el EOS para analizar la complejidad de la actividad que subyace a las diferentes fases del ciclo desde la perspectiva cognitiva. Por último, se concluye que, el análisis apoyado en las herramientas que provee el EOS, precisa, desvela elementos implícitos, diferencia e ilustra con detalles la estructura y funcionamiento de las fases del ciclo de modelización matemática desde la perspectiva cognitiva.

Palabras clave: *análisis de la actividad matemática, enfoque Onto-Semiótico, modelización matemática*

Abstract

The aim of this work is to analyse the mathematical modelling process to solve a problem, using the mathematical activity analysis model proposed by the Onto-Semiotic Approach (OSA), and thus complement the one carried out by a specific analysis model of the modelling process. To do this, firstly a problem and the modelling process that allows to give an answer to it are reproduced, according to the cycle proposed from the cognitive perspective. Then, the same problem is analysed using the model proposed by the OSA to analyse the complexity of the activity that underlies the different phases of the cycle from the cognitive perspective. Finally, it is concluded that the analysis supported by the tools provided by the OSA specifies, reveals implicit elements, differentiates, and illustrates in detail the structure and operation of the phases of the mathematical modelling cycle from the cognitive perspective.

Keywords: *analysis of mathematical activity, mathematical modelling, Onto-Semiotic approach*

INTRODUCCIÓN

Una de las cuestiones que más ha interesado a la investigación en el área de la Educación Matemática es la de generar modelos de análisis de la actividad matemática. Los investigadores que se han interesado por esta cuestión se pueden dividir en dos grandes grupos: los que han propuesto modelos generales para el análisis de la actividad matemática, y los que han optado por considerar un tipo específico de actividad matemática, como la resolución de problemas (Liljedahl y Santos-Trigo, 2019), o la modelización. A su vez, cada uno de estos grupos también se pueden subdividir en otros, de acuerdo con los constructos teóricos que empleen: en el caso de la actividad matemática general, se tienen los modelos de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002), de la Antropológica

[1] Estudio realizado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 72200458 (Chile), y del proyecto de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367 – 375). Valencia: SEIEM.

de lo Didáctico (Chevallard, 1992), del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), entre otros; y para el caso de la actividad matemática específica de la modelización, se han reportado estudios sobre las diferentes maneras en que se han estructurado los ciclos (véase Borromeo Ferri, 2006) y las perspectivas sobre este proceso (véase Abassian, Safi, Bush y Bostic, 2020).

Dada esta variedad de miradas sobre el análisis de la actividad matemática, resulta relevante preguntarse ¿qué puede aportar una mirada desde un modelo general de análisis de la actividad matemática al análisis de una actividad matemática específica como la modelización? Para responderla, se ha seleccionado un modelo específico de análisis de la actividad matemática de la modelización, y un modelo general de análisis de la actividad matemática, los que se han utilizado para analizar el mismo proceso de modelización matemática. Más en concreto, se utilizan las herramientas del Enfoque Onto-Semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007, 2019) para analizar la complejidad de la actividad matemática que subyace a la generación de un modelo y, en términos generales, al proceso de modelización matemática, considerando para este último el ciclo propuesto por Borromeo Ferri (2007a) desde la perspectiva cognitiva. La elección de ambos referentes teóricos se justifica en la experticia de los autores en su uso, ya que dos investigadores tienen experiencia en el uso del ciclo de modelización mencionado (el primer y tercer autor), y dos la tienen de manera sustancial en la utilización del Enfoque Onto-Semiótico (el segundo y tercer autor).

Dado que hay un consenso sobre la necesaria inclusión de la modelización en los currículos educativos (Blum, 2011; Kaiser, 2014), se considera que la mirada desde un marco teórico general es relevante para una mejor comprensión de la actividad matemática movilizada durante este proceso.

La estructura de esta comunicación es la siguiente: después de esta introducción, se presentan brevemente los dos referentes teóricos mencionados anteriormente y, a continuación, se explica en la metodología que primero se reproduce un problema del mundo real y el proceso de modelización que permite darle una respuesta, según el ciclo propuesto desde la perspectiva cognitiva, para luego hacer el análisis de este mismo problema utilizando el modelo propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico para analizar la complejidad de la actividad que subyace a la generación de un modelo y del proceso de modelización en general. Por último, se comparan los dos análisis y se presentan las conclusiones.

REFERENTES TEÓRICOS

En este apartado se describen los referentes teóricos considerados para este estudio.

Ciclo de modelización matemática desde una perspectiva cognitiva

El ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva –propuesto por Borromeo Ferri (2007a) y que, a su vez, toma como referente el desarrollado por Blum y Leiß (2007a)– explica el proceso que permite una transición entre una situación del mundo real y su descripción en términos matemáticos, como lo muestra la Figura 1. Este ciclo se eligió, entre otras razones, por el alto impacto que tiene en estos momentos en la comunidad interesada en la investigación sobre modelización en el ámbito educativo.

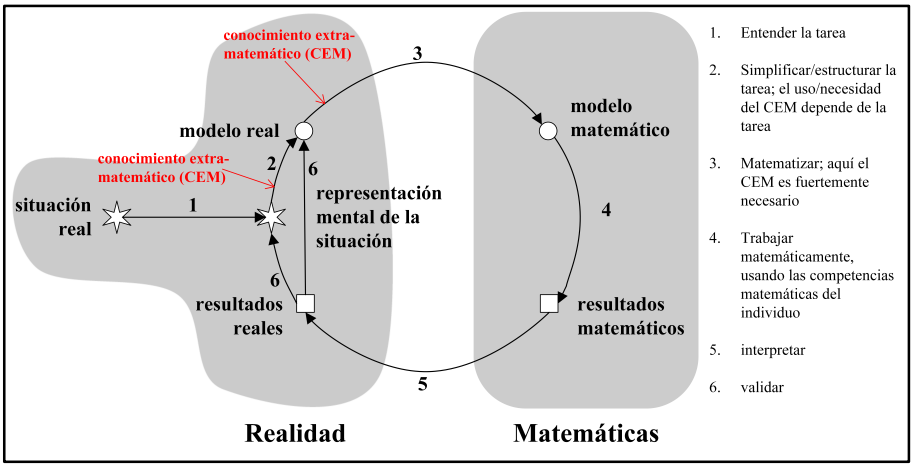


Figura 1. Ciclo de modelización matemática desde la perspectiva cognitiva.
Adaptado desde Borromeo Ferri (2018, p. 15)

En términos de lo descrito por Borromeo Ferri (2018), la *situación real* es entendida como un problema tomado desde la realidad, y que se puede representar en forma escrita (enunciado textual), audiovisual (imágenes, video), o una mezcla de ambos (enunciado con texto e imágenes). La *representación mental de la situación* se genera a partir de la comprensión de la tarea, de la reconstrucción mental del problema, y de las asociaciones que haga el individuo con respecto al problema propuesto. Para obtener un *modelo real*, se debe simplificar y estructurar la imagen mental que el individuo se ha formado sobre el problema, pudiendo incluir representaciones externas (esquemas, figuras, etc.). Como en un problema de modelización no siempre se entrega la totalidad de los datos necesarios para su resolución, el *conocimiento extra-matemático* del individuo juega un rol importante al momento de trabajar con la información que se tiene, añadiendo, de acuerdo a su experiencia personal, consideraciones adicionales al contexto de la situación. El *modelo matemático* toma en cuenta los objetos matemáticos que permiten explicar *la situación real* presentada (Abassian et al., 2020), y será el producto de la matematización (traducción al lenguaje matemático) del *modelo real* y de las aportaciones del *conocimiento extra-matemático* del individuo. A partir del trabajo matemático con el *modelo matemático*, es que se obtienen *resultados matemáticos* que, después de ser interpretados en el contexto de la situación, permitirán obtener *resultados reales*. Finalmente, la validación de los *resultados reales*, es decir, la comparación de la triada *resultados reales* ↔ *representación mental de la situación* ↔ *modelo real*, debe conducir a una respuesta adecuada al problema.

Enfoque Onto-Semiótico

En el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) se considera que la actividad matemática tiene como finalidad la resolución de problemas. Como resultado de un proceso de problematización, el sujeto, o la institución, asume la tarea de resolver un problema (propuesto por otro o creado por él mismo), realizando prácticas matemáticas para ello. Para la realización de estas prácticas matemáticas y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita, además del problema (por ejemplo, un problema cuya resolución implique plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), poner en funcionamiento otros objetos matemáticos. En efecto, en la resolución es necesario el uso de *lenguajes* (verbales, simbólicos, etc.), los cuales son la parte ostensiva de una serie de *definiciones*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de los *argumentos* que permiten resolver el problema. En consecuencia, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una *configuración de objetos primarios* (Font, Godino y Gallardo, 2013).

En el EOS, la noción de *juego de lenguaje* ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan las maneras de estar y de existir de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes maneras de 'estar participando', las cuales se agrupan en facetas o dimensiones duales: personal-institucional, extensivo-intensivo, unitario-sistémico, ostensivo-no ostensivo y expresión-contenido (véase en Font et al., 2013).

La resolución de problemas se realiza mediante la articulación de secuencias de prácticas. Tales secuencias de prácticas tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, …) y argumentación. Por otra parte, las dualidades (o maneras de estar participando los objetos primarios en la actividad matemática) dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización/concreción – idealización/abstracción; expresión/representación – significación.

Esta lista de procesos derivada de la tipología de objetos primarios y facetas duales usadas como herramientas de análisis de la actividad matemáticas en el EOS, si bien contempla algunos de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática, no pretende incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son *hiper* o *mega* procesos (Godino et al., 2019), puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

En el EOS (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009) se considera que, tanto las prácticas matemáticas como el proceso de instrucción, están regulados, entre otras, por normas epistémicas (regulan las prácticas y contenidos matemáticos en correspondencia con el discurso matemático que es posible desarrollar en una institución), normas mediacionales (regulan los recursos –temporales o artefactos– utilizados en las prácticas), normas interaccionales (regulan los modos de interacción entre las personas involucradas en la práctica o proceso instructivo matemático), normas ecológicas (aspectos externos –directrices curriculares, políticas educativas– que condicionan las prácticas en el aula). En este trabajo nos centramos en las normas epistémicas, en particular las meta-matemáticas, que regulan las prácticas realizadas en un proceso de modelización, las cuales implican un proceso que se inicia con una situación real y termina con la validación de la solución.

METODOLOGÍA

Este estudio, de corte teórico-reflexivo, pretende comparar el análisis de la actividad matemática desde el lente de los referentes teóricos mencionados. Para ello, se utilizó una metodología que tiene un aire de familia con la que se emplea para el *networking de teorías* (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone, 2016). En una primera fase, los autores se explicaron mutuamente los dos referentes teóricos para tener un buen conocimiento de ambos. Un segundo paso fue seleccionar una tarea de modelización para ser analizada, en este caso, el problema *Balas de paja* (*Bale of straw*), propuesto por Blum y Leiß (2007b), el cual solicita calcular la altura de una montaña de balas de paja a través de una imagen, y que ha sido utilizado por Borromeo Ferri (2018) para ejemplificar su ciclo de modelización. Precisamente, el hecho de que sea un ejemplo paradigmático para ilustrar este ciclo, fue el principal argumento para su selección y análisis en este estudio.

En la Figura 2 se presenta el problema *Balas de paja*, y en la Tabla 1 se describe la ejemplificación del ciclo de modelización desde la perspectiva cognitiva. En la segunda columna se describen los

procesos mentales y las acciones que realiza el sujeto en las diferentes fases del ciclo (primera columna) para resolver el problema.



Figura 2. Problema *Balas de paja*.
Adaptado desde Borromeo Ferri (2007b, p. 2084)

Tabla 1. Resolución del problema desde el ciclo de modelización.
Adaptado desde Borromeo Ferri (2018)

Fases del ciclo	Procesos mentales y acciones para la resolución del problema
Situación real	Representación del problema a través de la imagen.
Representación mental de la situación	– Pensar en momentos relacionados al verano y a experiencias propias con balas de paja (*conocimiento extra-matemático*). – Entender que se debe determinar la altura de la montaña de balas de paja.
Modelo real	– Pensar en círculos en vez de balas de paja. – Dibujar la situación. – Simplificar a la mujer como un segmento. – Suponer que la altura de la mujer es de 1,7 metros*.
Modelo matemático	– Modelo matemático 1: adición múltiple de la altura de la mujer. – Modelo matemático 2: utilizar el teorema de Pitágoras.
Resultados matemáticos	El resultado del *modelo matemático* sería aproximadamente 7 metros.
Resultados reales	La altura de la montaña de balas de paja es de 7 metros.

* Un elemento del *conocimiento extra-matemático* a tener en consideración es que este problema fue aplicado originalmente a estudiantes en el contexto alemán, lo que da sentido a la estimación de la altura de la mujer en 1,7 m.

En el tercer paso, los autores resolvieron el problema para tener un protocolo detallado de las dos resoluciones que se documentan en Borromeo Ferri (2018) descritos esquemáticamente en la Tabla 1: el procedimiento de estimación de medidas, y el teorema de Pitágoras. En el cuarto paso, se analizó el proceso de modelización basado en el procedimiento de estimación (*modelo matemático* 1 de la Tabla 1) utilizando las herramientas del EOS, para lo cual, se desarrolló una narrativa con base en la resolución de los autores, lo que permitió identificar las prácticas, los objetos, y las normas meta-matemáticas presentes en la actividad en cuestión. Finalmente, como un quinto paso, se detalló cuál era la aportación del análisis del paso cuatro al descrito en el paso dos.

ANÁLISIS DE LA RESOLUCIÓN DESDE LA PERSPECTIVA ONTO-SEMIÓTICA

Por cuestiones de espacio, en este apartado se presenta sólo el análisis de la resolución basada en la adición múltiple de alturas (*modelo matemático* 1 de la Tabla 1). De la narrativa matemática derivada de la resolución del problema (que no se muestra por temas de espacio), se pueden distinguir las siguientes prácticas matemáticas (P) y modelos asociados (ver Figura 3): leer la tarea (P1); hacer una estimación de la estatura de la mujer (P2); hacer una comparación visual entre la estatura de la mujer y la altura de la pila, para así estimar su diámetro (P3); hacer una representación icónica de la situación (P4); calcular la parte de la altura de las filas pares que no se superpone con la altura de las filas impares, mediante una comparación visual (P5); realizar los cálculos para obtener la altura total (P6); valorar si la solución tiene sentido en el contexto del problema (P7).

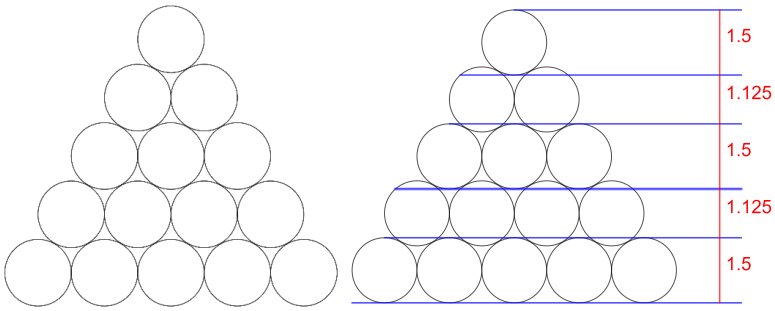


Figura 3. *Modelo real* (izquierda) y *modelo matemático* (derecha) de la situación.

En la Tabla 2 se sintetiza el análisis efectuado con las herramientas del EOS para la resolución de este problema, de acuerdo al *modelo matemático* 1, y cómo se relaciona con el ciclo de modelización matemática.

Tabla 2. Análisis onto-semiótico de la resolución del problema *Balas de paja* con el *modelo matemático* 1

Prácticas	Procesos	Objetos
		Situación real (estado)
	Situación real → *Representación mental de la situación* → *Modelo real* (P1, P2, P3)	
P1	– Significación / comprensión – Problematización	– Problema: *determinar la altura de la montaña de balas de paja*.
P2	– Subproceso de la resolución de problemas: *diseñar un plan*.	– Estimación (procedimiento) – Media aritmética (definición implícita) – Proposición matemática: *la estatura media de las mujeres alemanas es 1,7 m*.
P3	– Simplificación / idealización: *convertir a la mujer en un segmento y las balas en cilindros*.	– Comparación visual (procedimiento) – Cilindro y sus elementos (definiciones implícitas) – Propiedad monótona de la medida ($\mu(A) \leq \mu(B)$) – Proposición matemática: *el diámetro de la pila es de 1,5 m*.
		Modelo real (estado)
P4	– Representación	– Representación (Figura 3, izquierda)
	Modelo real → *Modelo matemático* → *Resultados matemáticos* (P5, P6)	
P5	– Representación	– Comparación visual de longitudes (procedimiento) – Proposición matemática: *la altura de las filas pares que se superpone con la altura de las impares es ¾ del diámetro estimado*. – Propiedad monótona de la medida. – Representación (Figura 3, derecha)
P6	– Argumentación	– Propiedad aditiva de la medida ($m[A \cup B]) = m[A] + m[B]$) – Medida indirecta (procedimiento) – Proposición: *la altura total es de 6,75 m, aprox. (tesis del argumento)*. – Argumento (razones): *dadas por el procedimiento de estimación, se tiene que:* *a) el diámetro de la pila es menor que la altura de la mujer; como la mujer mide 1,7 m, la pila mide 1,5 m, aproximadamente.* *b) la altura de las filas pares que se superponen con las impares, es aproximadamente ¾ del diámetro de la circunferencia.* *c) la altura total es la suma de las alturas de las filas impares más la altura de las filas pares*.
		Resultados matemáticos (estado)
		– Proposición matemática: *la altura de la montaña es de 6,75 m (solución)*.
	Resultados matemáticos → *Resultados reales* (P7)	

P7	– Subproceso de la resolución de problemas: *examinar la solución*. – Validación	– Estimación (procedimiento) – Proposición de validación: *la altura de la mujer cabe casi cuatro veces en la altura total de la montaña*. – Proposición: *el resultado obtenido (6,75 metros) es plausible en el mundo real*. – Argumento (razón): *teniendo en cuenta el resultado de la estimación (menor a 4 · 1,7 = 6,8), ya que el resultado obtenido es muy próximo al de la estimación*.
		Resultados reales (estado)
		– El resultado de la altura de la montaña es de 6,75 metros, aprox.

Del análisis anterior, también se desprenden una serie de normas epistémicas (meta-matemáticas) que rigen la actividad. Algunas de éstas son: en la P4 se considera necesario minimizar la cantidad de información, sustituyéndola por signos y figuras (principio de simplificación), y que la representación mantenga tanto la estructura de la *situación real* (representación icónica, diagrama) como la información necesaria para resolver la tarea; en la P5 se asume que el problema puede tener soluciones aproximadas y no-exactas; en la P7 se requiere que, dado un problema de contexto real, la solución obtenida debe tener sentido en el mundo real: por una parte, que los *resultados matemáticos* obtenidos puedan existir en la realidad (por ejemplo, una altura negativa se debería descartar en este contexto), y por otra, que los *resultados matemáticos* obtenidos no sean razonables, triangulando con otras informaciones del contexto (por ejemplo, una altura de 250 m o de 30 cm). Una consideración adicional con respecto a la resolución de este problema es que, dado más de un *modelo matemático* que dé *resultados matemáticos* en el mundo real –como es el caso de la resolución original de Borromeo Ferri (2018)– se debe valorar cuál de éstos es el más adecuado para dar respuesta al problema, teniendo en cuenta tanto el contexto como los aspectos matemáticos.

REFLEXIONES

Se concluye que un análisis minucioso, apoyado en las herramientas que provee el EOS, precisa e ilustra con detalles la estructura y funcionamiento del ciclo de modelización desde la perspectiva cognitiva, permitiendo desvelar y diferenciar las prácticas, los objetos (situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, y argumentos), las normas, y los procesos que están involucrados, tanto en el de construcción de un modelo –durante las fases *modelo real → modelo matemático → resultados matemáticos*– como en el conglomerado que conforma un ciclo de modelización completo.

La importancia de este análisis es que puede ayudar al diseño de propuestas didácticas para implementar la modelización en el aula. De acuerdo al análisis presentado en la Tabla 2, no se observan procesos como, por ejemplo, la generalización de patrones, lo cual se podría conseguir si se omite la especificación de que hay cinco filas, y sólo se presenta la imagen con las tres filas visibles, para que el estudiante pueda concluir el patrón de formación de las filas en la montaña. Otro proceso al que este análisis puede contribuir es al de validación, presente en la P7, donde el detalle demuestra que, independiente del resultado para la altura de la montaña (sea de 7, 8 o 9 metros), el proceso en cuestión sería el mismo, pues sólo está determinado por la verificación del método de resolución. Al identificar los objetos primarios que intervienen en la validación, en especial el procedimiento y el argumento, muestran que la razonabilidad del resultado no juega un papel determinante en dar respuesta al problema. Dado el hecho que la problematización tiene una estrecha relación con la validación de los resultados, se podría mejorar la riqueza de este último proceso a través de la modificación del contexto de la situación, por ejemplo, si se cuestionara la altura de la montaña de balas para guardarlas en un granero de ciertas dimensiones.

El análisis teórico-reflexivo presentado, sirve como antecedente para un estudio de carácter empírico, en el que se busca abarcar una mayor amplitud de problemas y resoluciones, para así analizar en

mayor profundidad la actividad matemática específica presente en el ciclo de modelización, desde el lente del EOS.

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories – An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 489-506). Berlín, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_46

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Blum, W. y Leiß, D. (2007a). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, Inglaterra: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Blum, W. y Leiß, D. (2007b). Investigating quality mathematics teaching – The DISUM project. En C. Bergsten y B. Grevholm (Eds.), *Developing and Researching Quality in Mathematics Teaching and Learning. Proceedings of MADIF 5* (pp. 3-16). Linköping, Suecia: SMDF.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/bf02655883

Borromeo Ferri, R. (2007a). Modelling problems from a cognitive perspective. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 260-270). Chichester, Inglaterra: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.260

Borromeo Ferri, R. (2007b). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantazi y C. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2080-2089). Larnaca, Chipre: University of Cyprus, ERME.

Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 4*(2), 18-24.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Trads.). Nueva York, EE.UU.: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73–112.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 91-110.

Kaiser, G. (2014). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-404). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_101

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Liljedahl, P. y Santos-Trigo, M. (Eds.). (2019). *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6

DESARROLLO DEL EQUIPAMIENTO PRAXEOLÓGICO DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DEL DISPOSITIVO DE ESTUDIO DE CLASES: UN ESTUDIO DE CASO[1]

Developing Prospective Early Childhood Education Teachers' Praxeological Equipment through Lesson Study: A Case Study

Lendínez, E. M. y García, F. J.

Universidad de Jaén

Resumen

En este trabajo analizamos el potencial del dispositivo de formación de Estudio de Clases como generador de oportunidades de desarrollo del equipamiento praxeológico de los futuros maestros. Reinterpretamos el Estudio de Clases como una praxeología de la profesión docente, que, en nuestro caso, vinculamos al modelo epistemológico y didáctico de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Analizamos la actividad profesional de un grupo de maestros de Educación Infantil en formación inicial a través de una metodología de estudio de caso, que nos permite identificar cómo el dispositivo de Estudio de Clases contribuye al desarrollo de su conocimiento profesional.

Palabras clave: *formación inicial del profesorado, Educación Infantil, estudio de clases, Teoría de las Situaciones Didácticas*

Abstract

In this paper we analyse the potential of lesson study as a generator of opportunities for the development of future teachers' praxeological equipment. Lesson Study is reinterpreted as a praxeology of the teaching profession, which, in our case, is linked to the epistemological and didactic model of the Theory of Didactical Situations. We analyse the professional activity of a group of Early Childhood Education prospective teachers using a case study methodology, which allows us to interpret how the Lesson Study device contributes to the development of their professional knowledge.

Keywords: *initial teacher education, Early Childhood Education, lesson study, Theory of Didactical Situations*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial y continua del profesorado y, en particular, qué tipo de conocimiento profesional necesita y cómo contribuir de forma efectiva a su desarrollo, es un dominio de investigación central en el área de Didáctica de las Matemáticas.

Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se han ido elaborando respuestas parciales a estos grandes problemas considerando que, más allá de idiosincrasias individuales, es posible identificar un conocimiento propio y necesario de la profesión docente, que se describe como un conjunto de praxeologías matemáticas y didácticas que el profesor puede activar en un momento dado, bajo ciertas condiciones y restricciones dadas, al que se denomina equipamiento praxeológico de la profesión (Bosch y Gascón, 2009). Para su desarrollo, se han propuesto dispositivos de

[1] Este trabajo ha sido realizado en el marco del contrato predoctoral para la Formación de Profesorado Universitario FPU014/06496 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte).

Lendínez, E. M. y García, F. J. (2021). Desarrollo del equipamiento praxeológico de los futuros maestros de Educación Infantil a través del Estudio de Clases. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 377 – 384). Valencia: SEIEM.

formación basados en el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2015) y articulados en torno a la exploración de cuestiones problemáticas profesionales (García, Sierra, Hidalgo y Rodríguez, 2020).

En particular, en este trabajo nos centraremos en uno de estos dispositivos, el Estudio de Clases (EC) (Shimizu, 2014). Reconocido como un dispositivo eficaz para la construcción de conocimiento profesional, múltiples investigaciones han abordado el desarrollo de conocimiento profesional usando las categorías de Ball, Thames y Phelps (2008) del conocimiento matemático para la enseñanza (Leavy y Hourigan, 2016; Ni Shuilleabhain, 2016). En la misma línea, es nuestro objetivo indagar sobre el conocimiento construido por el profesorado a través del EC, adoptando el modelo del equipamiento praxeológico de la profesión, ya que este permite incorporar de forma más explícita la práctica didáctica del profesor (*praxis*) y no solo el conocimiento (*logos*).

Además, García, Wake, Lendínez y Lerma (2019) argumentan que la investigación sobre el EC y el aprendizaje profesional que de este se deriva no suele problematizar explícitamente las concepciones que asume la comunidad de EC sobre las matemáticas y su enseñanza (modelo epistemológico y didáctico), frente a otro tipo de condiciones de naturaleza "cultural" (currículo, profesión, organización escolar, etc.), que han sido profusamente consideradas.

En esta comunicación nos centraremos en un proceso de EC organizado bajo el modelo de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2002), abordando la cuestión: ¿cómo evoluciona el equipamiento praxeológico de los docentes cuando participan en un proceso de EC bajo el modelo de la TSD?

EL ESTUDIO DE CLASES DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

El EC se puede describir como un dispositivo que permite al profesorado desarrollar su práctica y su conocimiento profesional a través del diseño colaborativo y cuidadoso de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior (Shimizu, 2014).

Desde la TAD, Miyakawa y Winsløw (2013) han propuesto una primera reinterpretación del EC como infraestructura para-didáctica. El prefijo "para" se elige con el fin de enfatizar que se trata de una práctica que se articula en torno a un sistema didáctico que se diseña, se observa y sobre el que se discute (pretendido-vivido-evocado). García et al. (2019) proponen enfatizar la estructura praxeológica, para poder explicitar la actividad profesional, de tipo matemático-didáctico, que el profesorado lleva a cabo y, en particular, para (1) visibilizar el tipo de tareas profesionales que se abordan durante un proceso de EC y (2) determinar cómo la forma de abordar estas tareas, e incluso las tareas mismas, dependen del modelo epistemológico y didáctico asumido (Figura 1).

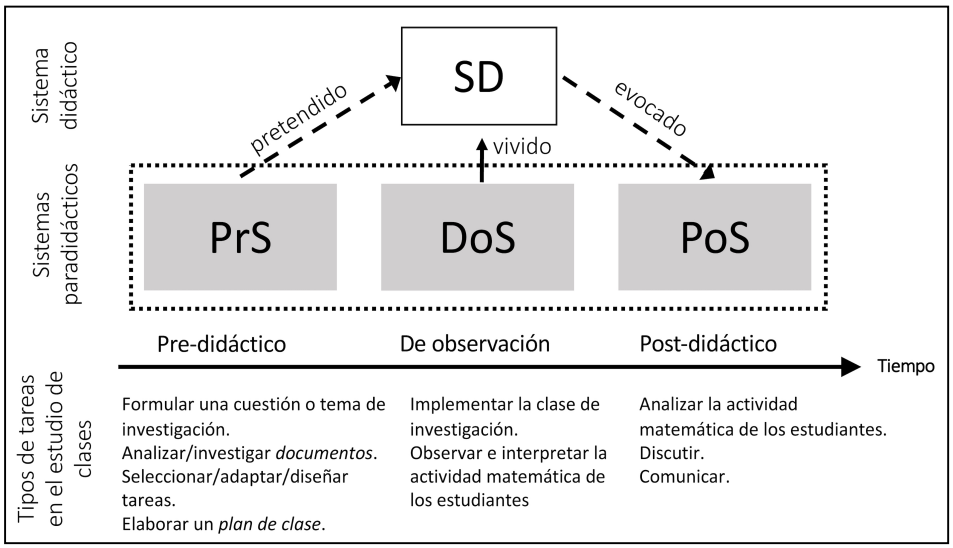


Figura 1. Sistemas didácticos y paradidácticos en el EC (García et al., 2019, adaptado de Winsløw, 2011)

LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS COMO MODELO EPISTEMOLÓGICO Y DIDÁCTICO EN EL ESTUDIO DE CLASES

Nuestro trabajo tiene como objetivo que los estudiantes del Grado en Educación Infantil desarrollen su conocimiento y su *praxis* profesional, incorporando elementos clave del modelo epistemológico y didáctico de la TSD. La TSD se elabora sobre el principio epistemológico de que, para todo conocimiento, en una determinada institución, existe una familia de situaciones problemáticas ante las que este se revela como la mejor respuesta posible (solución óptima), y que son las que dotan de "sentido" al mismo (Radford, 2008).

Respecto al modelo didáctico, el papel del profesor es el de concebir *situaciones adidácticas* (Brousseau, 2002) que ofrezcan una representación adecuada del conocimiento que desea enseñar, incluyendo un entorno de aprendizaje (*medio*) cuidadosamente diseñado. Estas situaciones deben proponer un problema a los alumnos, cuya resolución esté mediada por la construcción de un nuevo conocimiento (estrategia), hacerles *actuar contra un medio*, que aparece en el contexto de la situación, ligado al problema propuesto, y ofrece a los alumnos información para evaluar los efectos de sus estrategias; y, si es necesario, permitirles modificar sus estrategias por sí mismos, interactuando con el *medio* y sin la intervención del profesor. Las tres tareas didácticas fundamentales que caracterizan las acciones del profesor son: (1) la *devolución* de la situación, proponiendo a los alumnos un *medio* y un problema que estos puedan y deseen abordar, frente al que movilizarán su estrategia de base, la cual se mostrará rápidamente como inadecuada o ineficaz; (2) provocar que las estrategias iniciales fracasen y evolucionen, mediante la gestión de *variables didácticas* (elementos de la situación adidáctica que el profesor puede modificar, y que afectan a las estrategias de resolución, provocando un cambio de estrategia en el alumno hacia la construcción de un saber matemático concreto); (3) una vez que los estudiantes han llegado al conocimiento pretendido, que se manifiesta al movilizar la estrategia óptima ante la situación problemática, extraer el conocimiento matemático de la situación y presentarlo como un conocimiento matemático cultural (*institucionalización*).

Esta interpretación de qué es hacer matemáticas y cómo se puede organizar la actividad matemática escolar condiciona la forma de llevar a cabo las diferentes tareas propias de un proceso de EC: el tipo de técnicas que pondrán en funcionamiento los profesores del grupo de EC y los discursos que estos deben elaborar para describir, explicar y justificar dichas técnicas. Su análisis es crucial para determinar en qué medida el proceso de EC contribuye a construir y desarrollar el equipamiento praxeológico de los docentes implicados en el mismo.

METODOLOGÍA

Nuestra investigación se sitúa bajo un paradigma cualitativo, siguiendo una metodología basada en el estudio de casos, cuyo objetivo es la interpretación de hechos significativos en cuanto que oportunidades de aprendizaje profesional generadas por la infraestructura del dispositivo de EC. Durante el curso 2017-2018, se formaron 8 grupos de EC de entre 5 y 7 estudiantes del 4º curso del Grado en Educación Infantil en la Universidad de Jaén. Todos los estudiantes habían tenido acceso al *logos* de la TSD, a través de una asignatura de "Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil", estudiada en el curso anterior y organizada de forma clásica, próxima al paradigma monumentalista (Chevallard, 2015). En particular, los estudiantes para maestro tuvieron acceso a cómo se interpreta y organiza la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos en la escuela infantil (situaciones fundamentales, variables didácticas, estrategias de los niños…), incluyendo tanto conocimiento de tipo teórico como ejemplos concretos de situaciones adidácticas (del tipo de las propuestas por Ruiz-Higueras, 2005), pero sin la posibilidad de experimentar dicho modelo en un aula real.

En esta comunicación analizaremos un grupo de EC concreto, formado por 5 estudiantes para maestro (4 mujeres y 1 hombre). Durante 10 semanas (3 h/semana) abordaron conjuntamente las tareas profesionales propias del EC en los diferentes sistemas paradidácticos (ver Figura 1), centrados en la introducción del número natural en su aspecto cardinal en el nivel de 3 años, y asesorados por los autores en el papel de *expertos externos* (*koshi*). La implementación de la clase tuvo lugar en un colegio público de Educación Infantil en la ciudad de Jaén.

Durante el trabajo en el sistema pre-didáctico, los investigadores recopilaron datos a partir de plantillas pre-diseñadas facilitadas a cada grupo de EC, en las que los futuros maestros tenían que ir registrando sus discusiones y las decisiones adoptadas. En particular, la *formulación de la pregunta de investigación* (que debía conectarse con un conocimiento matemático concreto propio de la escuela infantil) y el *diseño del plan de clase* (que debía incluir una estructura en fases de la situación adidáctica, así como las variables didácticas y la anticipación de las estrategias de los alumnos). Posteriormente, la *clase de investigación* fue grabada en vídeo (observación no participante) y la *discusión posterior*, en la que también intervinieron los autores en su papel de *expertos externos*, en audio.

Para analizar posibles aprendizajes en el sistema pre-didáctico, se diseñó una rúbrica *ad hoc* (basada en un modelo praxeológico matemático-didáctico de referencia descrito en Lendínez, García y Sierra, 2017, y Sierra y García, 2015) que sintetiza los aspectos más relevantes del modelo didáctico de la TSD, que es el que guía el desarrollo pretendido del equipamiento praxeológico (como, por ejemplo, la organización de la *devolución* de la situación, el diseño *adidáctico* de la misma, o la gestión de las variables didácticas).

Para analizar posibles aprendizajes en los sistemas de observación y post-didáctico, se llevó a cabo una identificación, por parte de los investigadores, de ciertos hechos significativos acontecidos en el sistema didáctico (*implementación de la clase*) y que fueron juzgados como oportunidades potenciales de aprendizaje profesional para los futuros maestros. Una vez identificados, se analiza: (1) su potencial como fuente de aprendizaje profesional, (2) si se trataron expresamente en la discusión posterior y (3) si provocaron un desarrollo del equipamiento praxeológico del grupo.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Aunque no será objeto de análisis en esta comunicación, en términos de aprendizaje profesional, sí es necesario describir qué *pregunta de investigación* formularon los futuros maestros y esbozar el *plan de clase* que diseñaron. El grupo de EC se centró en el aprendizaje del número natural (cardinal) con niños de 3 años. Tras una visita exploratoria a la escuela, detectaron que los alumnos con los que iban a trabajar tenían dificultades para expresar, mediante un código, la medida de una colección pequeña (no más de 4-6 objetos). Por ello, tras revisar documentos, con el asesoramiento de los expertos, y tras varias formulaciones parciales, llegaron a la siguiente *pregunta de investigación*: *¿qué situaciones deberíamos generar en el aula a fin de que los niños comprendan la funcionalidad de la numeración escrita?*

Para abordar esta pregunta, ahondaron en los apuntes de clase sobre la TSD (basados en Brousseau, 2002) y sobre la construcción con sentido del número y la numeración (basados en Ruiz-Higueras, 2005), diseñando un *plan de clase* en el que se incluye una situación adidáctica en la que se articulan tres fases en torno a la misma situación problema: “los perritos tienen mucha hambre, vamos a darles de comer. Tienes que dar un solo hueso a cada uno de los perritos” (Figura 2).

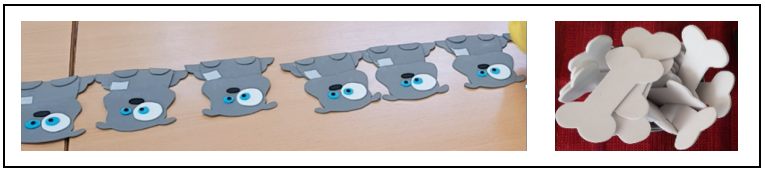


Figura 2. Situación recogida en el *plan de clase*: buscar huesos para que cada perrito tenga uno, y solo uno

En la Fase 0, identificada por el grupo de EC como de "devolución", había 6 perritos y la colección de huesos estaba próxima a la de perritos. En la Fase 1, identificada como de "acción", se mantenían los 6 perritos, junto a los niños, pero los huesos estaban en un lugar apartado (desde el que no podían ver la colección de perritos). En la Fase 2, identificada como de "formulación escrita", se mantenían las condiciones de la anterior, pero los niños tenían que anotar en un papel los huesos que necesitaban para que la futura maestra que iba a dirigir la clase se los diese. En cada fase, la colección de huesos tenía un tamaño muy superior al de la colección de perritos.

Además de diseñar las diferentes situaciones, el grupo de EC anticipó posibles estrategias de los niños para afrontar cada una de ellas, así como posibles reacciones de la futura maestra ante bloqueos y dificultades que pudiesen surgir, intentando en todo momento preservar el carácter adidáctico de la situación. Finalmente, durante la *clase de investigación*, la secuencia se implementó, *a priori* sin ningún tipo de modificación, con 3 niños y 3 niñas de 3 años (aproximadamente, unos 60 minutos), aunque, en la Fase 2, la futura maestra modificó la posición de la colección de huesos, poniendo estos junto a los perritos.

Como era de esperar, durante la *implementación de la clase* ocurrieron diferentes hechos, algunos ya anticipados por los futuros maestros, otros no. Aunque todo lo acontecido puede, potencialmente, provocar aprendizaje profesional en los integrantes del grupo de EC, sin lugar a dudas hay hechos que, por sus características, pueden ser considerados como especialmente relevantes, ya que ponen de manifiesto aspectos importantes relacionados con el aprendizaje matemático de los niños, en relación con la pregunta de investigación. Formulamos, como hipótesis, que identificar tales *hechos significativos* y abordarlos durante la discusión posterior es crucial para que el EC provoque un desarrollo en el equipamiento praxeológico del profesorado implicado.

En total, se identificaron 6 hechos significativos. En esta comunicación, nos centraremos en uno que consideramos de especial relevancia, ocurrido durante la fase de comunicación escrita (Fase 2) y que se vincula directamente con la *pregunta de investigación* formulada, ya que tiene que ver con el tipo de escrituras que usan los niños y la posible interpretación de la futura maestra.

Descripción del hecho (sistema paradidáctico de observación)

En la Fase 2, los niños deben pedir, por escrito, la cantidad de huesos que necesitan, para una colección de 6 perros. Se trata de niños de 3 años, que aún se están iniciando en la escritura de las cifras de los primeros números, por lo que el grupo de EC anticipó la aparición de numeraciones de tipo icónico (analógicas y/o primitivas) y, tal vez, el uso de alguna cifra indoarábiga. Sin embargo, ni fueron capaces de anticipar la variedad de mensajes que podrían aparecer, ni tampoco planificaron la reacción de la futura maestra ante estos.

Durante la *implementación de la clase experimental*, dos mensajes fueron especialmente problemáticos. Por un lado, una de las alumnas (Laura), formuló un mensaje reproduciendo una gran cantidad de trazos, posiblemente descontrolados, muy similares a la cifra "6" (Figura 3a). Ante este mensaje, la futura maestra movilizó una técnica didáctica no planificada: solicitó a la niña que señalara en la banda numérica la cifra a la que supuestamente se refería. La futura maestra tenía la intención de indagar acerca del sentido con el que la niña usaba ciertos trazos que se asemejaban a cifras, usando la banda como repertorio de cifras que permiten expresar la cantidad, con el fin de identificar si realmente estaba escribiendo el símbolo "6" porque quería esos huesos (aun cuando repetía el símbolo demasiadas veces). Sin embargo, la niña señaló la cifra "10", evidenciando así que tan solo estaba haciendo representaciones icónico-primitivas (trazos) que, casualmente, se asemejaban a la cifra "6". Finalmente, la futura maestra tomó la decisión de interpretar cada uno de estos trazos como iconos, comunicándole a la niña que "no tenía disponibles tantos huesos" como ella había pedido en su mensaje.

Por otro lado, otro alumno (Sergio), formuló su mensaje utilizando escrituras rudimentarias de cifras: 1, 2, 4, 7, 6 y 9 (Figura 3b). Sin embargo, estas cifras no eran utilizadas por el niño en el sentido de la numeración decimal, sino como iconos, lo que se puso de manifiesto cuando la futura maestra le preguntó y el niño respondió estableciendo una biyección, sin errores, entre el conjunto de símbolos y la colección de perritos:

Maestra: Entonces, dime los que quieres.

Sergio: Uno, dos, cuatro, siete, seis y nueve.

Maestra: ¿Quieres todos esos?

Sergio: Sí, este [señala la cifra 1] para este [señala un perrito], este [señala la cifra 2] para este [señala otro perrito]…

De esta forma, la futura maestra se enfrenta a una dicotomía que no había sido anticipada en el *plan de clase*: o aceptar el uso de cifras como iconos, dando por bueno el mensaje de Sergio, o la generación de un conflicto cognitivo, dando a Sergio tantos como indica en su mensaje (29 huesos). Finalmente, la futura maestra que dirigía la clase optó por la primera interpretación, indicando al niño que le daba un hueso por cada símbolo: "te doy este hueso por este [señala la cifra 1], te doy este hueso por este [señala la cifra 2]…".

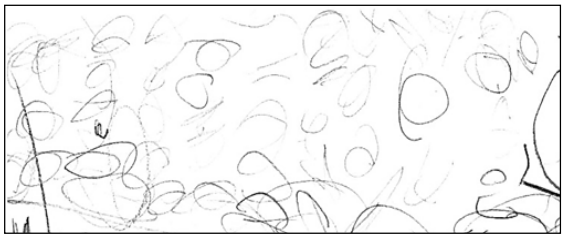


Figura 3a. Mensaje de Laura en la Fase 2

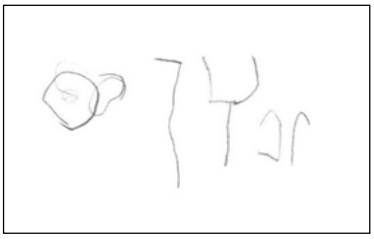


Figura 3b. Mensaje de Sergio en la Fase 2

Potencial para generar un desarrollo del equipamiento praxeológico

La interpretación de los mensajes de ambos niños, así como la posible reacción de la futura maestra ante los mismos, puede provocar el desarrollo de las componentes matemática y didáctica del equipamiento praxeológico de los futuros maestros, que separamos aquí para facilitar el análisis, aunque ambas componentes se relacionan y evolucionan conjuntamente.

Brevemente, respecto a la componente matemática (praxeologías matemáticas), contribuye a la relación, pero también a la diferencia, entre número y numeración, a identificar el uso de diferentes tipos de numeraciones (icónicas e indoarábiga) y a observar que, en ocasiones, los niños pueden usar cifras indoarábigas, en cuanto que trazos culturales que conocen, en el sentido de iconos y no en el sentido que la cultura matemática les da.

En relación con la componente didáctica (praxeologías didácticas), el hecho pone en evidencia que la futura maestra, para abordar la tarea didáctica de interpretar y revelar el sentido con el que los niños usan determinados símbolos, se enfrenta al reto de decidir qué acciones (técnicas didácticas) llevar a cabo, según los objetivos (tecnología didáctica) perseguidos, pudiendo introducir en el *medio* la estrategia de base (biyección y numeración icónica, en este caso), reforzar el sentido que el niño da a cierto tipo de numeraciones o, por el contrario, sancionarlo, generando posibles conflictos cognitivos, teniendo en cuenta los fundamentos de la TSD (teoría didáctica).

Contribución al desarrollo del equipamiento praxeológico (sistema paradidáctico de discusión posterior)

En la discusión posterior este hecho emergió y generó un debate entre los futuros maestros y los expertos. Normalmente, en EC la discusión comienza con un relato de la futura maestra que

implementó la clase, señalando los aspectos más relevantes de la experiencia vivida, lo que da pie a que el debate se inicie y a que puedan surgir otros temas.

En relación al caso de Laura (Figura 3a), la futura maestra que dirigió la clase indicó lo siguiente: "yo veía a la niña hacer esto [trazos que sugerían la grafía del número 6] constantemente y pensé que quizás quería 6 huesos; por eso, la acerqué hasta la banda numérica, aunque me di cuenta de que no identifica los 'números'". De esta manera, la futura maestra es capaz de reconocer y describir la técnica didáctica que usó, y argumentar en qué sentido la usó, haciendo así explícita la tecnología matemático-didáctica. El resto de integrantes del grupo asintió, sin aportar nada nuevo.

Respecto al caso de Sergio (Figura 3b), todos los miembros del grupo de EC coinciden en que fue el único alumno que pareció ser consciente de que se estaba enfrentando a una situación relativa a las matemáticas, para la que era necesaria la utilización de objetos matemáticos. Así, manifestaron que Sergio, en varias ocasiones, había hecho referencia expresa al número natural. En concreto, una de las futuras maestras, que actuaba como observadora, indicó: "Sergio ha dicho 'Juan no lo ha hecho bien, porque no ha escrito números, ha escrito letras'". Sin embargo, también detectaron que Sergio no utilizaba las cifras de acuerdo a su valor real, sino que las utilizaba como si se tratasen de signos propios de una numeración primitiva. No obstante, la futura maestra que implementó la clase comentó que, inicialmente, su objetivo fue dotar de significación cada una de las cifras que el niño había representado: "él decía 'ese 4 para ese perro' y yo quería darle 4 para provocar la numeración con sentido, pero él no quería pedirme eso… Él tiene 3 años, no me lo podía explicar, pero me miraba como diciéndome: '¿no te enteras?, no esto, este para este, este para este…'. Él sabía que cada perrito necesitaba su símbolo, aunque no sabe utilizar la numeración [decimal]". Así, pues, la futura maestra resolvió esta dicotomía interpretando el mensaje escrito bajo la perspectiva de la numeración primitiva, en la que cada signo representa a un objeto de la colección.

La discusión revela, tal y como anticipamos, un desarrollo del equipamiento praxeológico respecto a las dimensiones matemática y didáctica. Por un lado, en relación a la identificación de los tipos de numeraciones y del uso que los niños pueden hacer de las cifras indoarábigas. Por otro lado, respecto al papel crucial de la futura maestra a la hora de tomar decisiones *in situ*, en particular, para dar sentido a los mensajes de los niños y actuar al respecto. Asimismo, el grupo de futuros maestros destacó como el dispositivo de EC le había permitido mejorar la compresión de sus conocimientos teóricos, aspecto que pudimos detectar debido a la evolución que se observó en el grupo, especialmente, en cuanto a la identificación y análisis de las estrategias de los alumnos.

CONCLUSIONES

En esta comunicación hemos presentado resultados que evidencian que el dispositivo de EC favorece la génesis de oportunidades potenciales de aprendizaje que permitirían desarrollar el equipamiento praxeológico de los futuros maestros de Educación Infantil. Además, nuestra investigación ha demostrado, por un lado, el papel crucial que juega la infraestructura matemático-didáctica disponible en el grupo de EC y, por otro lado, la complejidad de las tareas profesionales a las que los futuros maestros deben enfrentarse, que deben ser interpretadas a la luz del modelo epistemológico y didáctico de referencia asumido por la comunidad de EC (García et al., 2019).

El origen de esta investigación está en las limitaciones observadas, como formadores de maestros, en nuestra forma de organizar la formación inicial a través del dispositivo tradicional "clase de teoría-clase de prácticas", que podemos interpretar como más cercana a los postulados del paradigma monumentalista. Como alternativa, el dispositivo de formación del EC enfatiza la formulación de cuestiones problemáticas y los procesos de indagación y experimentación en el aula.

Este trabajo forma parte de una investigación mucho más extensa, en la que se ha llevado a cabo también un análisis cuantitativo a través de una metodología pretest–postest para medir la autoeficacia percibida por los futuros maestros en cuanto al desempeño de tareas profesionales

asociadas al diseño e implementación de situaciones adidácticas en contextos escolares. El estudio cuantitativo respalda los resultados que estamos obteniendo a través de los estudios de caso.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89–114). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Springer Netherlands.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncomic counter paradigm. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 173–187). Seoul: Springer.

García, F. J., Sierra, T. Á., Hidalgo, M. y Rodríguez, E. (2020). The education of prospective early childhood education teachers within the paradigm of questioning the world. En M. Bosch, Y. Chevallard, F. García y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education* (pp. 169–188). Abingdon, UK: Routledge.

García, F. J., Wake, G., Lendínez, E. M. y Lerma, A. M. (2019). El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *37*(1), 137.

Leavy, A. M. y Hourigan, M. (2016). Using lesson study to support knowledge development in initial teacher education: Insights from early number classrooms. *Teaching and Teacher Education, 57,* 161-175.

Lendínez, E. M., García, F. J. y Sierra Delgado, T. Á. (2017). La enseñanza del número en la escuela infantil: un estudio exploratorio del logos de la profesión. *Journal of Research in Mathematics Education*, *6*(1), 33-55.

Miyakawa, T. y Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: The paradidactic infrastructure of 'open lesson' in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(3), 185–209.

Ni Shuilleabhain, A. (2016). Developing Mathematics Teachers ' Pedagogical Content Knowledge in Lesson Study: Case Study Findings. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *5*(3), 212–226.

Radford, L. (2008). On theories in mathematics education: a brief inquiry into their conceptual differences. En B. Sirakov, P. Ney de Souza y M. Viana (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (vol. 3, pp. 4037-4055). Singapur: World Scientific Publishing.

Ruiz-Higueras, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil* (pp.181–219). Madrid: Pearson.

Shimizu, Y. (2014). Lesson Study in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358–360). Dordrecht: Springer.

Winsløw, C. (2011). A Comparative Perspective on Teacher Collaboration: The Cases of Lesson Study in Japan and of Multidisciplinary Teaching in Denmark. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources* (pp. 291–304). Dordrecht: Springer.

LOS CONOCIMIENTOS LÓGICOS EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICO-DIDÁCTICA DE MAESTROS

Logical knowledge in the mathematical-didactic training of teachers

Lerma, A.M.[a], Barquero, B.[b], García, F.J.[a], Hidalgo-Herrero, M.[c], Ruiz-Olarría, A.[d] y Sierra, T.[c]

[a]Universidad de Jaén, [b]Universidad de Barcelona, [c]Universidad Complutense de Madrid, [d]Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

En este trabajo abordamos un problema matemático-didáctico de la formación de maestros de Educación Infantil en torno a la enseñanza de los conocimientos lógicos. Como respuesta a dicho problema hemos diseñado un dispositivo didáctico, elaborado en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico, basado en la propuesta de los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado, en este caso, maestros de Educación Infantil, donde se persigue que los maestros-estudiantes traten y aporten respuestas a algunas de las cuestiones a las que responden dichos conocimientos lógicos.

Palabras clave: *formación de maestros, educación infantil, conocimientos lógicos, teoría antropológica de lo didáctico, recorrido de estudio e investigación.*

Abstract

In this paper, we address a mathematical-didactic problem in early childhood teacher education, concerning the teaching of logical knowledge. As an answer to this problem, we have designed a didactic device, within the framework of the anthropological theory of the didactic, based on the proposal of the study and research paths for teacher education. Our aim is that prospective teachers address and provide answers to some of the questions to which this logical knowledge responds.

Keywords: *teacher education, early childhood education, logical knowledge, anthropological theory of the didactic, study and research paths*.

INTRODUCCIÓN

En la formación matemático-didáctica actual de los maestros de Educación de Infantil (EI), existe un tema que resulta muy específico de dicha formación: los conocimientos lógicos. Su origen se sitúa en la psicología evolutiva (Piaget y Szeminska, 1967) desde donde se postuló que, para la adquisición de los conocimientos numéricos, la clasificación y la ordenación eran requisitos previos. Así, estos fueron transpuestos en la Ley de Educación de 1970 en el currículo de matemáticas, ya desde la EI, en el marco de las "matemáticas modernas" e incorporados en la formación inicial de maestros de EI (Nortes, 1978; Roanes, 1983), no encontrándose en programas de formación previos (Xiberta, 1934; García Pradillo, 1957). Es a partir de finales de los años 80 cuando estos temas quedaron restringidos a la formación de maestros de EI, consolidándose, en gran medida, la postura piagetiana. Por ejemplo, Muñoz-Catalán y Carrillo (2018, p. 21) afirman que para que el niño pueda comprender el número debe hacerse "partiendo de la seriación y la clasificación". En la actualidad, algunos autores (Alsina, 2019; Carraher y Schliemann, 2019) proponen el uso del término "álgebra temprana", si bien es en un sentido algo más restrictivo del que aquí adoptamos. Sin embargo, varios autores (Hughes, 1986; Ermel, 1990; Brissiaud, 1993) consideran que no es necesario tratar las actividades lógicas, como la clasificación y la ordenación, como actividades que preparan para la construcción del número.

Lerma, A. M., Barquero, B., García, F. J., Hidalgo-Herrero, M., Ruiz-Olarría, A. y Sierra, T. (2021). Los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica de maestros. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 385 – 392). Valencia: SEIEM.

> ¿Significa esto que no hay que hacer seriaciones en la escuela infantil o en el curso preparatorio? Desde luego que no: los maestros no esperaron a que apareciera la palabra "seriación" en los programas, en 1977, para, por ejemplo, hacer que los niños jugaran con cubos que se encajan unos con otros. Lo que hay que reconsiderar es la creencia en las virtudes prenuméricas de estas actividades […]. La distinción entre actividades numéricas y prenuméricas ha perdido su fundamento teórico, y es legítimo actualmente dudar de su pertinencia pedagógica. (Brissiaud, 1983, pp. 20-21)

Lacasta, Lasa y Wilhelmi (2012, p. 372) afirman que "Las actividades de tipo lógico y relacional deben ser apreciadas por sus finalidades propias y no por su supuesto carácter prenumérico". Así, postulamos que dichas actividades son muy importantes en sí mismas, ya que difícilmente puede uno desenvolverse bien en el mundo sin tener que recurrir a designar, clasificar, ordenar y organizar los objetos con los que interactuamos. Por tanto, no tiene que asumirse necesariamente que sean actividades prenuméricas y, como tales, quedar restringidas a la EI.

El trabajo que presentamos se debe entender dentro de un proyecto más amplio que pretende, por un lado, clarificar qué entendemos por conocimientos lógicos y, por otro, estudiar su posible articulación con otros dominios de las matemáticas, estableciendo las bases de la actividad científica y lógica, que viene condicionada por el desarrollo de la capacidad de identificar semejanzas y diferencias, de comparar, de clasificar y jerarquizar, de designar y simbolizar, de identificar y utilizar ritmos y de realizar deducciones iniciales. Además, postulamos que el trabajo con dicho tipo de actividades debería continuar a lo largo de la Educación Primaria, tal como se propone en Orús (1992).

El objetivo principal de esta comunicación es realizar una primera propuesta que trate de dar respuesta al problema docente de la formación inicial del profesorado, que podemos formular en los siguientes términos: *¿Qué conocimientos necesita un futuro docente para enseñar los conocimientos lógicos en la Educación Infantil de un modo funcional y articulado, y cómo hacer para que los construya, asimismo, de manera funcional y articulada*? En ambos casos, entendiendo que enseñar/construir de un modo funcional significa que, en el proceso de estudio que propongamos, en EI o en la formación del profesorado, deben aparecer las cuestiones a las que responde el conocimiento que se desea enseñar, es decir, su *razón de ser*.

Abordar el problema anterior implica, en esencia, ahondar en dos problemas profundamente relacionados y, de hecho, inseparables: (a) Un problema de ingeniería matemática: la construcción de algunos de los componentes de la organización matemática de referencia en torno a los conocimientos lógicos en la institución de EI y en la formación de maestros; (b) Un problema de ingeniería didáctica: el diseño de procesos de estudio que permitan un desarrollo funcional y articulado de los conocimientos lógicos tanto en la EI como en la formación de maestros.

MARCO TEÓRICO Y PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORADO

Dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se postula la necesidad de un cambio de paradigma en la formación del profesorado, desde el de la "visita de las obras" al del "cuestionamiento del mundo" de la profesión docente (García, Sierra, Hidalgo y Rodríguez, 2020), con el fin de hacer explícitas las razones de ser de los conocimientos matemático-didácticos a través del estudio de cuestiones cruciales para la profesión.

En general, la TAD propone el dispositivo didáctico de los recorridos de estudio e investigación (REI) (Rojas y Sierra, 2018) para la transición hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo. En el caso de la formación del profesorado, hablaremos de los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado (REI-FP).

Según Ruiz-Olarría (2015) y Barquero, Bosch y Romo (2019), un REI-FP parte de una cuestión problemática y *umbilical* para la profesión docente ($Q_{0\text{-FP}}$). Para responder a esta cuestión, la

comunidad de profesores en formación se involucra en un proceso de estudio orientado a la producción de posibles respuestas a esta pregunta estructurado en 5 módulos (Figura 1):

Módulo 0: explicitación de la cuestión y búsqueda de respuestas existentes, en el que la cuestión problemática queda planteada y se inicia un proceso de indagación para identificar posibles elementos de respuesta accesibles en distintos *media*s, libros de texto, currículo, guías para el profesorado, entre otros). El rol del formador será el de guiar a los futuros profesores en la búsqueda de respuestas, iniciándose en los gestos básicos del cuestionamiento didáctico, ya que no se trata sólo de documentar respuestas, sino de cuestionarlas en términos de los posibles fenómenos didácticos que tales respuestas generan.

Módulo 1: vivir un REI, donde los futuros profesores, en posición de estudiantes, experimentan un proceso de estudio, normalmente en la forma de REI, que se diseña desde la investigación, como posible respuesta ante el problema de la profesión y los fenómenos generados por las respuestas existentes. El objetivo es hacer que los futuros profesores experimenten un tipo de actividad matemática, en cierta forma poco familiar para ellos, que podrían desarrollarse en la escuela, bajo ciertas adaptaciones, pero que ha sido especialmente diseñada para que suponga un reto para el profesorado en formación y le permita situarse en el rol de estudiante, y confrontarse desde dicha posición a la actividad.

Módulo 2: analizar el REI vivido, que supone su cuestionamiento matemático-didáctico, lo que hará emerger la necesidad de conocer y usar ciertas herramientas de análisis. Ello conducirá a explicitar tanto la organización matemática elaborada, como la organización didáctica que ha hecho posible su construcción.

Módulo 3: diseño colectivo de un REI, en el que los futuros profesores diseñan una adaptación del proceso de estudio que han vivido, adaptado a una clase real, lo que hará aparecer diferentes tipos de restricciones institucionales. El diseño toma la forma de un *plan de clase*, lo más cercano posible a la práctica real del profesor en el aula, incluyendo un diseño *a priori* de la actividad matemática y didáctica que tendrá lugar en el aula.

Módulo 4: experimentación, gestión y análisis del REI diseñado, que supone hacer vivir, en una clase real, el diseño elaborado previamente. Se trata tanto de un análisis *in vivo* como *a posteriori*, que se basará en las experimentaciones y análisis previos, y que permitirá identificar restricciones institucionales que hayan aparecido en el aula. Conducirá a un análisis crítico de las prácticas *tradicionales* y de la viabilidad de nuevas propuestas.



Figura 1. Estructura modular de un REI-FP

DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DEL REI-FP SOBRE CONOCIMIENTOS LÓGICOS

El REI-FP que detallamos a continuación se inicia con una *cuestión de la profesión* $Q_{0\text{-FP}}$ sobre *¿a qué llamamos conocimientos lógicos*?, *¿cómo se pueden caracterizar y organizar su estudio en EI*? Debemos notar, ya de partida, dos aspectos importantes sobre este REI-FP. Por un lado, que dicha cuestión generatriz es amplia y compleja y que el proceso, tal y como se ha diseñado, no va a poder abordar la extensa tipología de saberes que tradicionalmente se ha asignado a este dominio de la matemática. Las actividades diseñadas van a suponer, inevitablemente, un recorte del vasto territorio que conlleva dicho dominio. Las aquí presentadas se centran en tareas de

ordenar, nombrar, clasificar, categorizar, así como otras asociadas a estas. Por otro lado, queremos destacar la dificultad añadida que supone el diseñar actividades que supongan un reto para estos estudiantes-maestro en formación, permitiendo problematizar los saberes matemáticos que entran en juego, ya que las situaciones propias de tales saberes en la EI aparecen como triviales y poco problemáticas a sus ojos. Esto nos lleva a proponer el diseño de un REI (en el módulo 1) que no está pensado, de partida, para implementarse directamente en la EI, sino que ha sido especialmente diseñado para ser desarrollado en la formación de maestros.

Módulo 0: Exploración de la cuestión generatriz

En este módulo, y una vez presentada $Q_{0\text{-FP}}$, se pide a los estudiantes analizar una variedad de respuestas preexistentes y empezar a explorarlas conjuntamente. Es importante subrayar que en este módulo se propone una primera exploración de cuestiones complejas, que se van a seguir desarrollando en los módulos posteriores. Se busca aquí una primera aproximación a los modelos epistemológicos y didácticos dominantes sobre cómo se caracteriza, qué papel ocupa y cómo se organiza la enseñanza y aprendizaje de los conocimientos lógicos, con relación también a otros conocimientos matemáticos. Proponemos analizar un conjunto de documentos y recursos en los que se encuentran respuestas institucionalmente aceptadas sobre las cuestiones planteadas. Esta selección se organiza en tres líneas de exploración: (1) Analizar cómo se propone en los *currículos* (u otros documentos oficiales de descripción del contenido escolar) la enseñanza de los conocimientos lógicos. En concreto, los estudiantes tendrán que analizar qué dicen los currículos de las etapa de EI y Primaria; (2) Analizar cómo se han delimitado y difundido los conocimientos lógicos en *manuales y recursos* para la formación de maestros desde la didáctica de la matemática; (3) Analizar una selección de *actividades propuestas* en esta etapa educativa para empezar a detectar qué tipo de tareas se proponen a los alumnos de EI, con qué objetivos y para desarrollar qué tipo de conocimientos lógicos.

Los estudiantes, organizados en grupos de trabajo, van a encargarse solamente de una de las líneas de investigación, con la libertad de que, al margen de los documentos ofrecidos, puedan aportar otros nuevos. Somos conscientes de que no vamos a terminar este primer módulo con una caracterización explícita de estos saberes, sino que van a ser cuestiones tratadas durante todo el REI-FP. Se trata de iniciar dicho cuestionamiento con los estudiantes y hacer emerger algunas hipótesis sobre posibles fenómenos didácticos asociados a la enseñanza y aprendizaje de los conocimientos lógicos. Por ejemplo: la falta de explicitación de las posibles relaciones de actividades y conocimientos lógicos con otros dominios de la matemática escolar; la transparencia (e incluso la desaparición) de los mismos en etapas posteriores; la ausencia de "descriptores" claros para referirse a los tipos de tareas, técnicas, terminologías, etc.

Módulo 1: Vivencia de un REI sobre la "Sala de objetos perdidos"

En el módulo 1 se propone a los maestros en formación adoptar un rol de estudiante para vivir una propuesta didáctica, basada en el diseño de un REI que idealmente podría existir, con las adaptaciones oportunas, en la etapa de EI. Somos conscientes de que un estudio profundo de las cuestiones que se abren con esta propuesta podrían requerir muchas sesiones. Por ello, debemos aclarar que el objetivo principal de pedir a los maestros en formación su vivencia es el hecho de crear un medio didáctico compartido entre los estudiantes y los formadores para poder analizar, posteriormente, qué tipo de conocimientos han emergido e introducir herramientas de análisis, así como trabajar en las posibles adaptaciones a las aulas de EI.

El REI de la sala de objetos perdidos parte de presentar la situación de un colegio que se propone destinar una sala pequeña para organizar la gran cantidad de objetos perdidos que se van acumulando a lo largo del curso escolar. Este colegio siempre ha ido usando cajas grandes para almacenar los distintos objetos perdidos, sin criterio alguno sobre cómo organizarlos. La cuestión generatriz Q_0 planteada trata sobre *¿cómo organizar y gestionar la "nueva" sala de objetos*

perdidos de la escuela? Se pide a los estudiantes que elaboren, expongan y debatan propuestas para ser presentadas al colegio sobre cómo organizar y gestionar esta nueva sala de objetos perdidos.

Los estudiantes, organizados en grupos de trabajo, reciben 9 cajas[1] con muchos objetos que simulan los que han sido perdidos en el colegio, junto a la problemática anteriormente expuesta. Como respuesta final se pide elaborar una propuesta conjunta para la escuela. Para guiar el trabajo en la elaboración de esta propuesta, se prevé que el REI se desarrolle en las siguientes fases:

Fase 1. Localización de objetos en cajas. En esta fase se realiza la primera toma de contacto con la colección de los objetos perdidos. Se pide a los estudiantes analizar distintas situaciones que se pueden presentar cuando el alumnado del colegio o su familia pregunten por un objeto que se ha extraviado. En concreto, se plantean de cuatro a seis situaciones en las que se pregunta por objetos diferentes (los objetos están elegidos de forma que al menos haya un objeto que sea de fácil acceso, que se encuentre en la primera caja, un objeto que se encuentre en la segunda o tercera caja pero que se necesiten detalles para poder localizarlo, un objeto que no esté en ninguna de las cajas y un objeto que no se pueda determinar con la información proporcionada). Por ejemplo, una posible situación sería: "*El padre de una alumna pregunta si su hija ha perdido una gorra en el colegio. ¿Qué le responderías*?".

Tras el análisis de las situaciones de localización de objetos, cada grupo deberá responder cuestiones relativas a las posibles dificultades que han encontrado. Tras la puesta en común del proceso que han seguido, y de las dificultades que han encontrado, se espera que aparezcan nuevas necesidades en relación con la organización de la sala de objetos perdidos, que deberán formular como nuevas cuestiones, y que darán lugar a la siguiente fase. Al término de esta fase inicial se prevé que los estudiantes elaboren una respuesta a la cuestión Q_1: *Dada una colección de objetos, ¿cómo podemos localizar un objeto concreto*?". Asimismo, se espera que surja la necesidad de organizar los objetos perdidos de la escuela (fase 2).

Fase 2. Diseño de la propuesta. Tras comprobar, en la fase anterior, lo poco eficiente que es saber si un objeto se encuentra en alguna de las cajas de los objetos perdidos tal cual se han proporcionado y sentir la necesidad de organizar, de alguna forma, dicha colección, se pide a los estudiantes que elaboren una propuesta para mejorar la organización de los objetos de forma que sea más fácil y rápido poder localizarlos. La propuesta tendrá que recoger, como mínimo, las cajas u otros materiales que utilizarán (incluyendo el contenido), la distribución en la sala de objetos perdidos y una justificación de por qué esa propuesta debe ser la elegida por el colegio. Además de la propuesta en sí, cada grupo tendrá que redactar un informe que recoja lo tratado en cada sesión de trabajo (datos generales de la sesión, fecha y miembros, dificultades encontradas, decisiones tomadas y cuestiones planteadas durante la sesión, así como la propuesta de nuevas cuestiones para abordar en la siguiente sesión). En resumen, durante esta fase, los estudiantes elaborarán una respuesta a la cuestión, Q_2: *¿Cómo organizar y gestionar la sala de objetos perdidos para que nuestra propuesta sea la elegida*? que tendrán que exponer al resto de la clase y, al mismo tiempo, evaluar las propuestas de los otros grupos. Dicha puesta en común nos conducirá a la siguiente fase.

Fase 3. Evaluación de la propuesta. En esta fase, se tendrán que evaluar las propuestas de organización y gestión de la sala de objetos perdidos expuestas. En concreto, cada grupo evaluará la propuesta de otro grupo y tendrá que hacer un informe final para la dirección del centro, donde se recomendará, o no, dicha propuesta para la organización y gestión de la sala de objetos perdidos

[1] Las cajas se simulan con una presentación de 9 diapositivas, en las que aparecen las imágenes, a escala, de los objetos perdidos (alrededor de 300 objetos de distinto tipo como material escolar y objetos personales, tanto del alumnado como del profesorado, mezclados en las 9 cajas). Los grupos podrán cambiar de caja (diapositiva) los objetos y crear cajas nuevas, pero no podrán modificar el tamaño de los objetos, ni incluir otros nuevos.

del colegio. Para ello, los grupos abordarán la cuestión Q_3: *¿Cómo comparar y evaluar las diferentes propuestas*?, reflexionando sobre las características que debe tener la propuesta (influenciada por la puesta en común de la fase 2). En esta fase, como en la anterior, cada grupo tendrá que redactar un informe que recoja lo tratado en cada sesión de trabajo.

A continuación, en la Figura 2, se presenta un esbozo del análisis *a priori* de las organizaciones matemáticas que se espera que emerjan durante la vivencia de este REI.

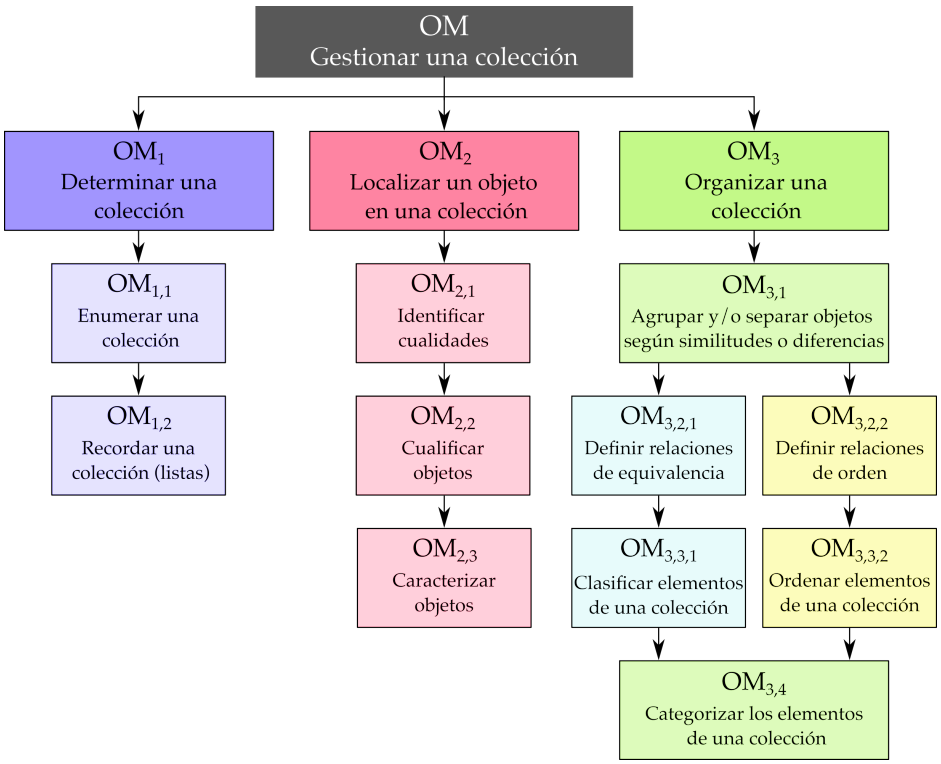


Figura 2. Organizaciones matemáticas esperadas durante la vivencia del REI

En concreto, en la Tabla 1, se recoge la relación entre fases, cuestiones derivadas y organizaciones matemáticas (usando la notación de la Figura 2) a partir del estudio e investigación de la cuestión generatriz Q_0 : *¿Cómo organizar y gestionar la "nueva" sala de objetos perdidos de la escuela*?

Tabla 1. Relación entre las fases del REI y las organizaciones matemáticas

Fases	Principales cuestiones derivadas	Organizaciones matemáticas
Fase 1	Dada una colección de objetos, ¿cómo podemos localizar un objeto concreto?	$OM_{1,1}$, $OM_{2,1}$, $OM_{2,2}$, $OM_{2,3}$, $OM_{3,1}$
Fase 2	¿Cómo organizar y gestionar la sala de objetos perdidos para que nuestra propuesta sea la elegida?	$OM_{1,1}$, $OM_{1,2}$, $OM_{2,1}$, $OM_{2,2}$, $OM_{2,3}$, $OM_{3,1}$, $OM_{3,2,1}$, $OM_{3,2,2}$, $OM_{3,3,1}$, $OM_{3,3,2}$, $OM_{3,4}$
Fase 3	¿Cómo comparar y evaluar las diferentes propuestas?	

Módulo 2 y posteriores

En el segundo módulo se propone trabajar en el análisis del proceso de estudio e investigación vivido por los maestros en formación. Se pide ahora que adopten el rol de *analistas*, ante la tarea profesional de analizar la actividad matemática desarrollada en el REI vivido en el módulo 1. Es aquí cuando se prevé introducir distintas herramientas de análisis, propuestas desde la

investigación en didáctica de la matemática y adaptadas a la formación del profesorado, para profundizar en el análisis matemático-didáctico de la actividad.

En primer lugar, se propondrá la construcción de un *glosario* para referirse a los conocimientos lógicos. Este glosario no será previamente construido por el formador, sino que será construido progresivamente por los estudiantes, bajo la guía del formador. Este se iniciará en el módulo 0 tan pronto se empiecen a detectar palabras y expresiones concretas para referirse a estos conocimientos lógicos. Al inicio del módulo 2, tomando como base los informes entregados por los grupos de trabajo durante el módulo 1, se pedirá a los estudiantes que detecten qué conocimientos lógicos han aparecido en su práctica, que les den nombre y describan. Realizada esta primera aproximación, el formador complementará sus análisis, dando nombre, definición y ejemplificación a los conocimientos lógicos detectados desde la propia práctica. Se pretende, de esta forma, empezar a realizar una primera delimitación de qué son los conocimientos lógicos, junto con la introducción de vocabulario especializado.

En segundo lugar, en base a los informes elaborados en el módulo 1, se prevé pedir a los estudiantes un análisis más exhaustivo sobre ciertas componentes praxeológicas como, por ejemplo, analizar qué tareas y cuestiones han tratado (e.g., ¿Qué clasificación podemos proponer? ¿Qué pasos debemos realizar para hacer una clasificación? ¿Cómo definimos las relaciones y clases de equivalencia? ¿Cómo comprobamos que hemos clasificado todos los objetos?, entre otras posibles cuestiones), las técnicas que han usado para tratar estas cuestiones y cómo pueden justificar las técnicas usadas y las respuestas dadas. Se puede proponer complementar este análisis con la construcción de los llamados "mapas de cuestiones y respuestas" como herramientas para el análisis matemático-didáctico del REI vivido (Barquero, Florensa y Ruiz-Olarría, 2020).

El objetivo de este módulo es doble. En primer lugar, nos proponemos aportar y poner en uso herramientas epistemológicas y didácticas concretas con los maestros en formación para analizar y hacer visible un marco epistemológico de referencia que permita analizar este dominio tan complejo de conocimientos y que permita ir más allá de una interpretación espontánea-natural (que pueda haber emergido en el módulo 0). En segundo lugar, dicha construcción será una base indudable cuando se avance en los siguientes módulos del REI-FP en los que ya intervienen tareas de diseño de propuestas didácticas y su análisis. Prevemos experimentar este REI-FP en asignaturas obligatorias en la formación de maestros de EI y en el doble grado Infantil y Primaria. Dado el carácter de estas asignaturas, que no permiten compatibilizar la formación en la universidad con las prácticas en el aula de infantil, no será posible, por el momento, llevar a cabo los módulos 3 y 4. Sin embargo, sí planificamos diseñar y analizar con los futuros maestros experiencias reales de aula en torno a los conocimientos lógicos.

CONCLUSIONES

En esta comunicación se ha esbozado una propuesta para acercar a los estudiantes-maestros de EI a los conocimientos lógicos a través de tareas problemáticas de las que pueda emanar su *razón de ser*. Dando respuesta a las cuestiones planteadas en la "sala de objetos perdidos", sin ayuda del formador, estos estudiantes serán los que den sentido a los conocimientos lógicos, pues serán los necesarios para poder responder a las preguntas planteadas.

Las primeras experimentaciones que hemos llevado a cabo, y que aún están por analizar con detalle, dejan entrever el potencial del dispositivo diseñado para reconstruir el cuestionamiento deseado con los estudiantes-maestros en torno a los conocimientos lógicos, si bien es necesario un análisis más detallado de su actividad matemático-didáctica así como la puesta en marcha de nuevas experimentaciones, posiblemente sobre versiones optimizadas del REI-FP descrito aquí.

Agradecimientos

Esta investigación se ha financiado en el marco del proyecto I+D+i: RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Alsina, A. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(1), 1-19.

Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2019). El uso del esquema herbartiano para analizar un REI online para la formación del profesorado de secundaria. *Educ. Matem. Pesq*., *21*(4), 493-509.

Barquero, B., Florensa, I. y Ruiz-Olarría, A. (2020). The education of school and university teachers within the paradigm of questioning the world. En M. Bosch, Y. Chevallard, F.J. García, y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A comprehensive casebook* (pp. 189-212). Routledge.

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de conjuntos*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 479-522.

Ermel (1990). *Apprentissages numériques*. (Grande section de maternelle). Paris: Hatier.

García, F.J., Sierra, T.A., Hidalgo, M. y Rodríguez, E. (2020). The education of prospective early childhood teachers within the paradigm of questioning the world. En M. Bosch, Y. Chevallard, F.J. García, y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A comprehensive casebook* (pp. 169-188). Routledge.

García Pradillo, J. (1957). *Aritmética y su metodología y Álgebra.* Madrid: Editorial Nuevas Gráficas.

Hughes, M (1986). *Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Planeta

Lacasta, E., Lasa, A. y Wilhelmi, M.R. (2012). Actividad lógica y relacional en Educación Infantil. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 363-373). Jaén: SEIEM

Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2018). *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Infantil*. Madrid: Ed. Paraninfo.

Nortes, A. (1978). *Matemáticas primer curso. Escuelas Universitarias del profesorado de E.G.B*. Burgos: Ed. Santiago Rodríguez, S.A.

Orús, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. (Tesis doctoral). U.E.R. Scièntifique. Université de Bordeaux I, Ed. IREM de Bordeaux.

Piaget, J. y Szeminska, A. (1967). *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires: Ed. Guadalupe.

Roanes, E. (1983). *Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: Ed. Anaya.

Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos conocimientos geométricos durante la solución de un problema espacial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F.J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 485-494). Gijón: SEIEM.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Xiberta, M. (1934). *Metodología de las Matemáticas*. Gerona: Talleres de Salomón Marqués.

¿ESTA ECUACIÓN DESCRIBE ESTA SITUACIÓN? EXPLORANDO EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA[1]

Does this equation describe this situation? Exploring the algebraic thinking of elementary students

López Centella, E.[a], Slezáková, J.[b] y Jirotková, D.[b]

[a] Universidad de Granada (España), [b] Charles University (República Checa)

Resumen

En este estudio cualitativo exploramos la comprensión conceptual y semántica de las ecuaciones lineales básicas de alumnado de educación primaria recién iniciado en su resolución. Analizamos las respuestas individuales de 38 estudiantes de quinto curso de un colegio público checo a una tarea escrita consistente en justificar si la ecuación 5+2x=13 describe algebraicamente cada una de 5 situaciones contextualizadas. Basándonos en la Teoría Fundamentada, proporcionamos un sistema de categorías de las estrategias empleadas por el alumnado para resolver la tarea. A partir del análisis de las mismas constatamos: (a) sus habilidades para interiorizar hechos matemáticos veraces sobre ecuaciones, (b) la variedad, no sistematización y adaptación de sus estrategias a cada situación, y (c) la dependencia de la estrategia de la forma en que la situación es presentada.

Palabras clave: *pensamiento algebraico, ecuaciones, estrategias, educación primaria*

Abstract

In this qualitative research we explore the conceptual and semantic understanding of basic linear equations of elementary school students recently introduced to solving equations. We analyse the individual answers of 38 grade five students in a Czech public primary school to a paper-based task consisting in justifying whether the equation 5+2x=13 describes each one of 5 contextualized situations. Under a Grounded Theory approach, we provide a system of categories of the students' strategies. In particular, our findings show: (a) students' abilities to internalize true mathematical facts on equations, (b) the variety, no systematization and adaptation of their strategies to each situation, (c) the dependency of the strategy on the way in which the situation is presented.

Keywords: *algebraic thinking, equations, strategies, primary education, early algebra*

INTRODUCCIÓN

Desde hace algunos años, los currículos de matemáticas de educación primaria de numerosos países han comenzado a enriquecerse con actividades algebraicas, de acuerdo con las recomendaciones de organizaciones internacionales de Educación Matemática (NCTM, 2000) y las evidencias y conclusiones de múltiples trabajos de investigación sobre *early algebra* (Kaput, 1999). Este enriquecimiento algebraico de los planes de estudios en matemáticas tiene entre sus principales objetivos favorecer al alumnado su transición de la aritmética —clásico núcleo de las matemáticas elementales— al álgebra —típicamente abordada en la educación secundaria—. La familiarización con las nociones de variable y cantidad indeterminada o desconocida, el establecimiento de

[1] Investigación parcialmente financiada por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada. Esperanza López Centella agradece sinceramente el apoyo del grupo de investigación FQM-193 "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico", así como la cálida hospitalidad de los miembros del Katedra Matematiky a Didaktiky Matematiky de la Univerzita Karlova en Praga durante su visita en 2019 en la que parte de este estudio fue realizado.

López Centella, E., Slezáková, J. y Jirotková, D. (2021). ¿Esta ecuación describe esta situación? Explorando el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 393 – 400). Valencia: SEIEM.

relaciones de dependencia entre variables, el desarrollo del pensamiento funcional, la representación de la información en diferentes sistemas y su transferencia de uno a otro, la simbolización y el uso de notaciones significativas son parte de estas actividades algebraicas. Por incitar la práctica integrada de estas actividades destaca, en particular, el trabajo con ecuaciones.

En el contexto de una tarea que involucra una ecuación lineal y cinco situaciones contextualizadas presentada a estudiantes de quinto curso de primaria, los objetivos de esta investigación son:

- Explorar las habilidades de los estudiantes para decidir y razonar si la ecuación dada resulta una transcripción algebraica de cada situación particular;
- Describir las estrategias empleadas por los estudiantes para abordar esta cuestión.

ANTECEDENTES

Existen diversos trabajos de investigación en pensamiento algebraico centrados en el análisis epistemológico del trabajo escolar con ecuaciones y la exploración de las actuaciones de los estudiantes al trabajar con distintos tipos de ecuaciones, tratando de discernir de esta manera una demarcación entre la aritmética y el álgebra. Herscovics y Linchevski (1994) señalan la existencia de una *brecha cognitiva* entre la aritmética y el álgebra que caracterizan *como la incapacidad de los estudiantes para operar espontáneamente con o sobre una incógnita*. Gallardo (2000) afirma que hay un *corte didáctico* entre la aritmética y el álgebra descrito como un cambio *de* trabajar con una incógnita a un solo lado del signo igual de una ecuación (de forma que deshacer la operación en cuestión es suficiente para conocer su valor) *a* lidiar con ecuaciones donde la incógnita aparece en ambos lados y por tanto se ha de operar con ella. Filloy y Rojano (1989) sugieren los términos *ecuaciones aritméticas* y *ecuaciones algebraicas* para referirse a estos dos tipos de ecuaciones. Balacheff (2001) entiende que el cambio de una interpretación aritmética a una interpretación algebraica de la igualdad corresponde a un cambio de énfasis en la validación de la solución del problema: desde un *control pragmático*, donde la solución se valida aritméticamente con referencia al contexto inicial del problema; a un *control teórico*, donde la solución se valida con referencia a principios matemáticos. Con respecto a la formulación de ecuaciones a partir de información verbal, Herscovics (1989) reconoce las traducciones *sintácticas* y *semánticas* como procedimientos diferentes, refiriéndose las primeras a la traducción directa de palabras clave a símbolos, y las segundas al intento de expresar el significado del problema. Diversas investigaciones (Rosnick y Clement, 1980; Ventura-Campos, Ferrando, Arnau y González-Calero, 2018) reportan que la traducción sintáctica a menudo da lugar al llamado *error de inversión* entre los estudiantes, aunque algunos autores (MacGregor y Stacey, 1993) difieren en este punto. Hoch y Dreyfus (2004) afirman que cualquier expresión algebraica (por ejemplo, una ecuación) representa una estructura algebraica. Su "apariencia o forma externa revela, o si es necesario, puede transformarse para revelar, un orden interno. El orden interno está determinado por las relaciones entre las cantidades y las operaciones que son las partes componentes de la estructura" (p. 50). En este trabajo nos referiremos a estas nociones como *estructura externa* y *estructura interna*. Asimismo, entendemos que una ecuación describe algebraicamente una situación si existe una relación de correspondencia entre los términos de la ecuación y un conjunto de elementos de la situación de forma que la igualdad establecida entre las relaciones de los términos de la ecuación también se cumple entre los correspondientes elementos de la situación.

Brizuela y Schliemann (2014) exploran cómo estudiantes de diez años pueden llegar a entender las reglas sintácticas del álgebra sobre la base de su comprensión de las relaciones entre cantidades en el trabajo con ecuaciones. Varios autores (Figueira-Sampaio, Ferreira dos Santos y Arantes Carrijo, 2009; Bonilla y Rojano, 2012; Otten, van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis, y Heinze; 2019) exploran el aprendizaje de la resolución de ecuaciones por escolares a través del uso de modelos concretos (balanza virtual, móvil colgante, etc.), reportando logros significativos en la transferencia de las acciones y estrategias (reestructuración, aislamiento y sustitución) del lenguaje de signos del

modelo a las acciones del sistema de signos del álgebra, así como una mejor comprensión de las propiedades de la igualdad. Nührenbörger y Schwarzkopf (2016) estudian los procesos de razonamiento matemático de las ecuaciones con escolares mediante estructuras de cálculo con términos faltantes, consiguiendo el desarrollo de un concepto flexible de la igualdad matemática.

MÉTODO

Realizamos una investigación cualitativa, descriptiva y exploratoria (Erickson, 1986), basada en un experimento en el aula.

Participantes

En el estudio participaron 38 estudiantes (2 grupos de clase a cargo de la misma maestra) de 5º curso de educación primaria (10-11 años) de habilidades mixtas en Matemáticas de un colegio público en Praga. Aunque las ecuaciones se incluyen en el 2º ciclo (del 6º al 9º curso) de la educación primaria checa (VÚP, 2017, p. 34), la maestra había iniciado al alumnado participante en la formulación y resolución de ecuaciones lineales simples. Su método de enseñanza estaba parcialmente inspirado en el Método Hejný (Hejný, 2012), adoptado por el 20% de las escuelas checas. El alumnado no tenía experiencia previa en actividades como la utilizada en este estudio.

Diseño de la tarea

De acuerdo con nuestros objetivos de investigación, diseñamos y presentamos a los estudiantes la tarea de la Figura 1. Las hojas de trabajo para ellos fueron redactadas en checo, su lengua materna, en la que también escribieron sus respuestas.

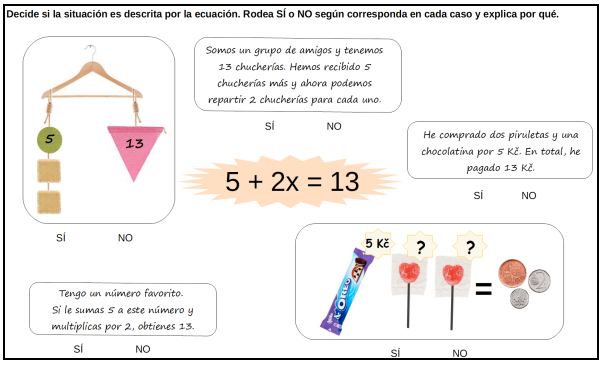


Figura 1. Versión en castellano de la hoja de trabajo presentada a los estudiantes

La Tabla 1 especifica las variables y características de la tarea consideradas en su diseño. En las cinco situaciones contextualizadas (etiquetadas según el sentido horario en la hoja de trabajo), se encuentran explícita o implícitamente en juego los mismos números (2, 5 y 13), pero ni las relaciones entre ellos ni el orden en que aparecen son iguales en todas las situaciones.

Tabla 1: Características de las situaciones de la tarea. *Ecuación racional

	Amigos	Piruletas	Monedas	Número	Peso
Representación	Verbal	Verbal	Pictórica	Verbal	Pictórica
Incógnita	Número de amigos	Precio de piruleta	Precio de piruleta	Número favorito	Peso del cuadrado
Orden aparición	13, 5, 2	2, 5, 13	5, 1,1, 13	5, 2, 13	5, 1,1, 13
Posible ecuación	(13+5)/x=2*	2x+5=13	5+x+x=13	(x+5)2=13	5+x+x=13
¿Descrita?	No	Sí	Sí	No	Sí

Recogida y análisis de datos

El experimento y la recogida de datos fueron llevados a cabo en una sesión durante el tiempo habitual de clase de Matemáticas de los grupos participantes. Las hojas de trabajo fueron

administradas y entregadas a los estudiantes por la maestra con la firme instrucción de realizar la tarea individualmente y de escribir sus explicaciones con bolígrafo en la propia hoja y su reverso si era necesario. Durante su trabajo, los estudiantes no recibieron ninguna información sobre la corrección de sus respuestas o la idoneidad de sus estrategias. Al finalizar, las hojas de trabajo fueron entregadas al equipo investigador y constituyen los datos de esta investigación.

En primer lugar, consideramos como unidades de análisis las respuestas escritas de los estudiantes a las diferentes cuestiones de la tarea: selección de sí/no y explicación para cada situación presentada. En segundo lugar, transcribimos todas las respuestas y las tradujimos del checo al inglés. Para garantizar el anonimato de los estudiantes asignamos a cada uno una etiqueta: S_i donde i = 1, ..., 38. En tercer lugar, revisamos a fondo estos datos y los categorizamos, nombramos y describimos siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Con arreglo a nuestros objetivos, establecemos un sistema de categorías (de elaboración propia) del foco de actuación de los estudiantes y de sus estrategias, como se muestra a continuación.

Foco de actuación

- Resolución. Ignorando la ecuación dada, el estudiante intenta encontrar una solución para cada situación. Si la encuentra, rodea "Sí". De lo contrario, rodea "No".

- Discriminación. Teniendo en cuenta la ecuación dada, el estudiante decide, por medio de una o más estrategias, si esta describe algebraicamente cada situación. Rodea la opción según el caso.

Estrategias

- Identificación. El estudiante establece una correspondencia uno a uno entre los elementos contextuales de la situación y los elementos algebraicos de la ecuación dada.

- Resolución de ecuaciones. ‣ Operacional. El estudiante sigue el proceso estándar de resolución de la ecuación. ‣ Prueba y error. El estudiante asigna un valor a la incógnita y comprueba si la igualdad se satisface, repitiendo el proceso hasta encontrar una solución o deteniéndose después de varios intentos. ‣ Memoria y cálculo mental. El estudiante no hace anotaciones sobre su proceso de resolución, utilizando su propio registro de hechos numéricos y el cálculo mental.

- Divisibilidad. Discute la existencia de soluciones basándose en argumentos de divisibilidad.

- Comprobación de la solución. El estudiante comprueba si la solución de la ecuación dada es también una solución para la situación en cuestión.

- Comparación de ecuaciones. El estudiante formula una ecuación para la situación en cuestión y la compara, sin resolverla, con la ecuación dada.

- Comparación de soluciones. El estudiante formula una ecuación para la situación en cuestión y la resuelve, comparando su solución con la solución de la ecuación dada.

- Analogía. El estudiante reconoce la situación en cuestión como análoga a otra, copiando la respuesta provista en esta.

- Comparación de números. El estudiante compara los datos numéricos que aparecen en el enunciado/imagen de la situación en cuestión con los de la ecuación dada.

RESULTADOS

Foco de actuación

La Tabla 2 refleja la elevada participación de los estudiantes en la tarea (186 respuestas provistas de 190 potenciales). Más de la mitad de los estudiantes (20 de 38) centró su foco de actuación en la discriminación, de acuerdo con lo solicitado por la tarea, mientras que el resto de estudiantes (18) lo centró en la resolución. Restringiéndonos a los primeros, son notables las altas tasas de respuestas

correctas registradas (19, 19, 18, 17 y 17). Cabe destacar que hubo quienes deliberadamente rodearon "Sí" y "No" para la misma situación. Este es el caso de S_{11} para la situación de Peso:

S_{11}: Sí, ya que 5+4 = 9+4 = 13. No, ya que 5+?+? = 15 [escribe un número 5 sobre cada signo de interrogación y una flecha desde cada 5 hasta cada signo].

En virtud de su respuesta, S_{11} obvia que el equilibrio de la percha equivale a la igualdad de las cantidades colgadas a sus lados y que, por tanto, el valor numérico de cada cuadrado *debe ser* 4 (frente a *podría ser* 4). Este mismo estudiante discute de manera similar la situación de Monedas:

S_{11}: Sí, 5+2x = 13 | -5, 2x = 8 |: 2, 1x = 4 [escribe 4 junto a cada signo de interrogación de la etiqueta del precio de cada piruleta]. No, porque el precio de la piruleta podría ser de 4,50.

El estudiante percibe la solución (4) de la ecuación lineal como una posibilidad (ya que también "podría ser 4.50") en lugar de como el único valor que satisface la igualdad. La respuesta de S_{37} (centrada en resolución) a la situación de Amigos también ilustra este hecho:

S_{37}: Sí: ¿cuántas personas había allí? 9 personas. No: de 1 a 8 personas.

Por otro lado, la ausencia de una pregunta explícita en los enunciados supuso un obstáculo para algunos estudiantes en la identificación de la incógnita. Este es el caso de S_{13} en Amigos:

S_{13}: No tenemos incógnitas. No es una tarea, porque no hay preguntas que responder (todo es información).

El orden de las operaciones potencialmente importa. Resulta interesante analizar la única respuesta "Sí" (restringiendo a la discriminación como foco de actuación) en la situación de Número:

S_{17}: 5+2x = 13, 5+2x = 13 | -5, 2x8 = 13 |: 2, x = 4 [resuelve la ecuación dada]. Si sumas 5 y multiplicas 2x sale 13. 13-5 = 8, 8:2 = 4.

La estudiante resuelve la ecuación dada (obteniendo x=4). Para encontrar el número favorito, intenta deshacer las operaciones que, aplicadas a este número, dan 13. Reemplaza la suma por la resta y la multiplicación por la división, pero no invierte el orden de aplicación de las operaciones.

Tabla 2. Número total de respuestas de cada tipo

		Amigos	Piruletas	Monedas	Número	Peso
Resolución (18)	Sí	12	13	14	4	10
	No	4	4	3	14	6
	Sí y No	2	1	1	0	1
	Sin respuesta	0	0	0	0	1
Discriminación (20)	Sí	0	19	18	1	17
	No	19	1	0	17	2
	Sí y No	0	0	1	1	1
	Sin respuesta	1	0	1	1	0

Estrategias

La Figura 2 muestra algunos ejemplos del uso de las principales estrategias identificadas en nuestro análisis de los datos. La Tabla 3 recoge las frecuencias de uso de cada estrategia de los estudiantes que centraron sus actuaciones en la discriminación (20), según lo solicitado por la tarea. Tal y como revela el número total de estrategias utilizadas en cada situación (superior a 20 en todos los casos), los estudiantes a menudo involucraron más de una estrategia en una misma respuesta. Además, existen diferencias notables en la frecuencia de uso de cada estrategia dependiendo del sistema de representación empleado para cada situación. En situaciones presentadas verbalmente, la comparación de ecuaciones junto con la comparación de soluciones y la resolución de ecuaciones fueron las estrategias más utilizadas, mientras que en situaciones presentadas pictóricamente las estrategias más frecuentes fueron la analogía y la comprobación de soluciones. En la situación de

Amigos (donde la incógnita es el número de amigos), algunos estudiantes malinterpretaron el papel del número de chucherías, comparándolo o relacionándolo con la solución (4) de la ecuación dada:

S_{18}: 5 + dos x = trece → x = 4, 13-5 = 8, 8:2 = 4 [resuelve la ecuación dada]. No. Todos tendrían que obtener 4 chucherías.

S_8: No. Esta ecuación muestra que un hombre conseguiría 4 chucherías [refiriéndose a la solución de la ecuación dada].

En la misma situación de Amigos, las respuestas de algunos estudiantes revelan cuán importante fue para ellos la estructura externa y los datos numéricos, obviando las relaciones internas:

S_5: No. No funcionará porque debería haber 13 de alguna cosa.

S_{33}: No. 13+5 = 18. Esta tarea no funciona porque salen 18 chucherías, pero necesitamos 13 chucherías en total.

S_{23}: Sí, porque 1,2 [refiriéndose a las situaciones de Amigos y Piruletas] son iguales porque los números son iguales.

En contraste, otros estudiantes refieren a propiedades matemáticas al comparar ecuaciones. En la situación de Piruletas, S_{13} alude a la propiedad conmutativa de la suma:

S_{13}: Sí. Esta ecuación sería 2x+5 = 13, pero podemos cambiar 5 y 2x [comparándola con la ecuación 5+2x = 13 dada en la tarea].

La interpretación y la necesidad de desambiguación de los enunciados también jugaron un papel en el desempeño de los estudiantes. Para la misma situación, S_{10} justifica así su respuesta negativa:

S_{10}: Yo digo que no, porque dice "dos piruletas y chocolate idénticos por 5 Kc", así que todo lo escrito es "por 5 Kc" y luego el total cuesta 13 Kc. Es una tarea ilógica. "Mi elección".

En la situación Peso, S_{30} no interpreta que los números asignados a los cuadrados deban ser iguales:

S_{30}: Sí, porque los dos números debajo de 5 pueden ser de cualquier manera, así que podría haber 2 veces 4, o 5 y 3, etc.

También destaca el uso de la misma letra para simbolizar diferentes cantidades. Es el caso de este mismo estudiante en su intento de traducción sintáctica del enunciado de Número:

S_{30}: No, porque sería: x+5 = x, x·2 = 13 pero no es: 5+2x = 13 y tampoco pasa que x·2 = 13 ya que 13 no es un divisor de dos. [En su explicación intercambia "múltiplo" por "divisor"].

Tabla 3. Frecuencias de las estrategias centradas en discriminación

	Amigos	Piruletas	Monedas	Número	Peso
Identificación	0	2	2	0	3
Resolución de la ecucación	6	6	6	4	4
Operacional	6	3	6	3	4
Ensayo y error	0	0	0	1	0
Cálculo mental	0	3	0	0	0
Divisibilidad	0	0	0	7	0
Comprobación de la solución	0	0	6	1	6
Comparación de ecuaciones	6	6	1	6	3
Comparación de soluciones	6	7	3	5	3
Analogía	2	2	9	0	4
Comparación de números	2	0	0	0	0
Total	22	23	27	23	23

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo exploramos las habilidades de los estudiantes de primaria para reconocer si una ecuación lineal describe algebraicamente diferentes situaciones contextualizadas. Nuestro estudio contribuye al conocimiento de las estrategias individuales que estudiantes de quinto curso de educación primaria emplean para razonar esta cuestión. Destacamos la gran variedad de estrategias empleadas por los estudiantes para hacer frente a esta tarea, así como las diferentes frecuencias del uso de las estrategias en función del sistema de representación de las situaciones. Ante situaciones presentadas verbalmente, estos tendieron a formular una ecuación basada en la traducción sintáctica y semántica del enunciado, para a continuación compararla con la ecuación dada. En cambio, ante situaciones presentadas pictóricamente, la tendencia fue recurrir a una analogía entre la situación en cuestión y otra situación de la tarea, proporcionando entonces la misma respuesta provista en la situación análoga. Alternativamente, en este caso, también prefirieron verificar si la solución de la ecuación dada era una solución para la situación en cuestión. Este resultado puede ser utilizado con fines didácticos. Cabe resaltar que varios estudiantes utilizaron más de una estrategia para justificar sus respuestas y que no sistematizaron sus estrategias, sino que las adaptaron a cada situación. Esto es ilustrado por el uso de argumentos de divisibilidad para discutir la situación de Número.

Las actuaciones de los estudiantes evidencian su capacidad para interiorizar verdades matemáticas sobre las ecuaciones sobre las que no habían sido explícitamente instruidos. En particular, tras el uso de las estrategias de comprobación y comparación de las soluciones están los siguientes hechos, conectados a la estructura interna de las ecuaciones: (a) Si la solución de una ecuación lineal es una solución para otra ecuación lineal, entonces estas dos ecuaciones son equivalentes; (b) si dos ecuaciones lineales tienen la misma solución, entonces son equivalentes. Esto implica el uso, consciente o no, de la unicidad de solución de las ecuaciones lineales. En contraste, la mayoría de los estudiantes que usaron la comparación de ecuaciones basaron su estrategia exclusivamente en la estructura externa de las ecuaciones. Aunque esto no les impidió obtener respuestas correctas en esta tarea, esta no es una práctica segura, ya que dos ecuaciones equivalentes pueden tener estructuras externas diferentes (e.g. $2x+5 =13$ y $4x+23=2x+31$). No obstante, hubo quienes refirieron a propiedades matemáticas (como la conmutatividad de la suma) en su justificación bajo el uso de esta misma estrategia. Otra práctica que sobresale en el desempeño de los estudiantes es la frecuente revisión matemática de sus respuestas (e.g. S_{18}: 1 piruleta cuesta 4 Kc, 13-5=8, 8:2=4, 4+4+5, 8+5=13). Esta validación fue pragmática (Balacheff, 2001) la mayoría de las veces, basada en la aritmética, aunque en ocasiones también incluyó apreciaciones teóricas, basada en reglas matemáticas (ver S_{13}). Con respecto al uso de letras simbólicas, a pesar de que buena parte de los estudiantes resolvió la ecuación dada en la tarea siguiendo un proceso de resolución estándar operando con la "x", a menudo estos mismos estudiantes obtuvieron el valor de la desconocida en algunas situaciones por métodos puramente aritméticos, sin introducir ningún símbolo para nombrarla ni operar con ella. Así, incluso cuando habían sido iniciados en el uso de estas notaciones algebraicas, todavía no estaban completamente integradas en la base de su lenguaje matemático o no sintieron la necesidad de usarlas en algunos contextos. También se observa el uso del mismo literal para representar distintas cantidades en una misma respuesta (Ayala-Altamirano y Molina, 2018). Con base en nuestros resultados y hallazgos concluimos, en consonancia con otras investigaciones (e.g., Brizuela y Schliemann, 2004), que los estudiantes de este nivel educativo están preparados para abordar actividades y tareas algebraicas que involucren implícita o explícitamente ecuaciones, sirviendo esto para estimular y enriquecer su pensamiento matemático.

Referencias

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2018). Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de tercero de primaria: El caso de la variable dependiente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 141-150). Gijón: SEIEM.

Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic versus Algebra, the core of a didactical dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell and R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 249-260).

Bonilla, M., Rojano, T. (2012). Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 145 - 152). Jaén: SEIEM.

Brizuela, B. M., y Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations, *For the Learning of Mathematics, 24*(2), 33-40.

Corbin, J., y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology, 13*(1), 3-21.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan.

Figueira-Sampaio, A. S., Ferreira dos Santos, E. E., y Arantes Carrijo, G. (2009). A constructivist computational tool to assist in learning primary school mathematical equations. *Computers and Education 53*, 484-492.

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 2*, 19-25.

Hoch, M., y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the PME, 3*, pp. 49-56.

Gallardo, A. (2000). Historical-epistemological analysis in mathematics education: Two works in didactics of algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 121-139). Dordrecht: KAP.

Hejný, M. (2012). Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis scholae, 6*(2), 41-55.

Hercovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.). *Research issues in the learning and teaching of algebra*, 60-86. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Herscovics, N., y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra*, Educational Studies in Mathematics 27*(1), 59-78.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fenema and T. A. Romberg (Eds.), *Mathematical classrooms that promote understanding*, (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

MacGregor, M., y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations, *Journal of Mathematical Education, 24*(3), 217-232.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nührenbörger, M., y Schwarzkopf, R. (2016). Processes of mathematical reasoning of equations in primary mathematics lessons. En N. Vondrová (Ed.), *Proceedings of the 9th CERME* (pp. 316-323). Prague.

Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., y Heinze, A. (2019). Developing algebraic reasoning in primary school using a hanging mobile as a learning supportive tool, *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 615-663.

Rosnick, P., y Clement, R. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behaviour, 3*(1), 3-27.

Ventura-Campos, N., Ferrando, L. Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2018). Cambios neuronales durante laresolución de problemas verbales con error de inversión. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 668). Gijón: SEIEM.

Výzkumný ústav pedagogický v Praze [Research Institute of Education in Prague] (2017). The Framework Educational Programme for Basic Education. Prague.

MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA PRENSA ESPAÑOLA DEL SIGLO XVIII: UN INSTRUMENTO PARA SU ANALISIS

Mathematics and mathematics education in the Spanish press of the 18th century: an instrument for analysis

Madrid, M. J.[a], León-Mantero, C.[b], Maz-Machado, A.[b], López-Esteban, C.[c]

[a] Universidad Pontificia de Salamanca, [b] Universidad de Córdoba, [c] Universidad de Salamanca

Resumen

Los libros de matemáticas han sido objeto de numerosas investigaciones dentro del campo de la historia de las matemáticas y la educación matemática. Sin embargo, las publicaciones de tipo periódico: diarios, semanarios, etc. no han sido tan habitualmente consideradas en este campo de investigación. Este trabajo presenta un instrumento para analizar desde la perspectiva de la historia de las matemáticas y la educación matemática las publicaciones sobre matemáticas y educación matemática recogidas en semanarios, diarios, etc. publicados en el siglo XVIII. Para ello, se presenta una investigación descriptiva centrada en el análisis de textos históricos utilizando el análisis de contenido. El uso de este instrumento se ejemplifica con la categorización de algunas de las publicaciones incluidas en dos Semanarios publicados en el siglo XVIII en España.

Palabras clave: *historia de las matemáticas y la educación matemática, prensa, siglo XVIII, semanario*

Abstract

Mathematics books have been the focus of several investigations within the field of history of mathematics and mathematics education. However, periodical-type publications (diaries, weeklies, newspapers, etc.) have not been so commonly considered in this field. This study presents an instrument to analyze from the perspective of the history of mathematics and mathematics education the publications about mathematics and mathematics education included in weeklies, journals, etc. In order to do so, a descriptive research focused on the analysis of historical texts is presented using the content analysis technique. The use of this instrument is exemplified by the categorization of some publications included in two weeklies published in the 18th century in Spain.

Keywords: *history of mathematics and mathematics education, press, 18th century, weekly journal*

INTRODUCCIÓN

Desde su aparición, el libro de texto ha sido y aún es una herramienta relevante en la enseñanza de los distintos conocimientos, entre ellos los matemáticos. Su papel en las aulas se ha visto a su vez reflejado en numerosas investigaciones que sobre él se han llevado a cabo. En particular, el interés que estos libros han suscitado ha llevado a los investigadores en educación matemática a diseñar metodologías y elaborar instrumentos que permitieran analizar diferentes aspectos sobre ellos, ejemplo de ello son los trabajos de López, Guerrero, Carrillo y Contreras (2015), Azcárate y Serradó (2006) o Monterrubio y Ortega (2009).

A su vez, dentro de las investigaciones sobre la historia de las matemáticas y la educación matemática los libros de texto y los libros antiguos de matemáticas han ocupado un relevante papel como fuentes primarias para conocer más sobre este campo. También, dentro de esta línea de la historia de las matemáticas y la educación matemática, distintos autores han presentado propuestas

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. (2021). Matemáticas y educación matemática en la prensa española del siglo XVIII: un instrumento para su análisis. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 401 – 408). Valencia: SEIEM.

metodológicas en las cuales elaboraban distintos instrumentos que han permitido comparar y analizar libros de matemáticas o diseñaban metodologías para el análisis de dichos textos.

Por ejemplo, González y Sierra (2004) elaboraron un instrumento a través del cual analizaron la evolución de los conceptos relativos a los puntos críticos en los libros de texto españoles publicados a lo largo del siglo XX. Este modelo de análisis que desarrollaron les permitió caracterizar las variaciones que presentaban los libros y establecer un perfil que los identificaba.

Así mismo, Maz (2009) planteaba las posibilidades del análisis de contenido como herramienta en la investigación histórica con libros de texto de matemáticas y de qué forma este junto con el análisis conceptual se complementan como técnicas metodológicas, ejemplificándolo en el concepto de número en manuales españoles de matemáticas de los siglos XVIII y XIX.

Sin embargo, existen otras fuentes históricas que, junto con los libros de matemáticas, pueden complementar el conocimiento sobre la historia de las matemáticas y la educación matemática. Ejemplo de ello, es el trabajo sobre los exámenes que se realizaron en la Real Maestranza de Granada en el siglo XVIII y que incluían contenidos matemáticos (Madrid et al., 2020).

En este sentido, la prensa puede ser considerada también una fuente de información para las investigaciones en este campo. Ejemplo de ello, es el matemático español Juan Cortázar cuya demostración original de las analogías de Neper fue publicada en 1847 en el periódico francés *Nouvelles annales de mathématiques* (León-Mantero et al., 2019).

Algunos investigadores han analizado publicaciones periódicas desde la perspectiva de la historia de las matemáticas y la educación matemática. Por ejemplo, Meavilla y Oller (2018) estudian los contenidos matemáticos incluidos en la publicación "Miscelánea Turolense" publicada entre 1891 y 1901, observando que se incluía información sobre matemáticos de la provincia de Teruel, sobre textos con contenido matemático escritos por turolenses o relacionado con Teruel, reseñas de libros con contenido matemático escritos por turolenses e incluso anuncios sobre estos libros.

Estos factores nos llevan a valorar las posibilidades de la prensa como fuente para conocer más sobre la historia de las matemáticas y la educación matemática centrándonos en este caso en la prensa publicada en España en el siglo XVIII.

El movimiento ilustrado del siglo XVIII encuentra en la prensa su más eficaz medio de difusión. En España, desde mediados del siglo XVIII el periodismo desempeña un papel relevante en la vida política y cultural del país, por el número de periódicos que se publican, por la periodicidad y la repercusión de los mismos y por los distintos formatos periodísticos que se desarrollan (Sánchez Hita, 2007). Además, en España a partir de mitad del siglo XVIII periódicos cuyo propósito inicial podía no ser la difusión de la ciencia, incluyeron en sus páginas reseñas de libros científicos o incluso artículos científicos o técnicos (Clément, 2017).

La relevancia de la prensa en este siglo y la inclusión en la prensa de ideas científicas, nos lleva a plantearnos, si en las distintas publicaciones periódicas publicadas en este siglo es posible encontrar ideas sobre las matemáticas y la educación matemática. Así, estudios como Madrid y López-Esteban (2018) muestran que el *Semanario Literario y Curioso de Cartagena*, una publicación periódica que desde 1786 y durante casi año y medio se publicó en dicha ciudad, incluía contenidos físicos y médicos, pero también por ejemplo cuestiones sobre aritmética.

Considerando esto, el objetivo de este trabajo es presentar un instrumento para el análisis de los contenidos matemáticos y sobre educación matemática en la prensa española del siglo XVIII. Este instrumento permitirá caracterizar dichos contenidos, valorando cuales eran más difundidos en la época, cuales interesaban más, etc.

METODOLOGÍA

Este trabajo presenta una investigación descriptiva y ex post facto, centrada en el análisis de textos antiguos desde la perspectiva de la historia de las matemáticas y la educación matemática. La técnica de análisis que se ha utilizado ha sido el análisis de contenido, técnica ampliamente utilizada en las investigaciones sobre historia de las matemáticas y la educación matemática (Madrid et al., 2019).

El instrumento de análisis utilizado se elaboró a partir de los trabajos citados previamente y consistió en el formulario incluido en la Tabla 1. Este fue validado mediante una triangulación de expertos en Métodos de investigación en Educación e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática.

Tabla 1. Formulario para el análisis del contenido matemático y sobre educación matemática en la prensa.

Datos generales		
Nombre de la publicación:		
Número:	Fecha de publicación:	
Número de páginas de la entrada dedicada a las matemáticas o la educación matemática/ número de páginas del numero:		
Autor/es (si se indican):		
Categorías de análisis		
Planteamiento y resolución de problemas	Planteamiento de problemas	Enunciado: verbal, incluye representaciones gráficas, …
		Contenido matemático: aritmético, algebraico, geométrico, cálculo, etc.
		Contexto: matemático, comercial, técnico, medida, etc.
		Interés suscitado: según si se han publicado posteriormente soluciones para el mismo o se ha generado debate sobre él.
		Actualización de los contenidos: se trata de contenidos clásicos o se incluyen los últimos descubrimientos sobre matemáticas.
		Conexiones: se han publicado en otros semanarios, su autor ha publicado libros de matemáticas, etc.
	Soluciones de problemas	Correctas/ Incorrectas.
		Método de resolución utilizado, esquema de resolución, representaciones gráficas (si se incluyen) y solución.
		Comprobaciones de la solución o variantes del problema.
		Correcciones: se han incluido correcciones para las soluciones.
Textos	Divulgación	Contenidos: aritméticos, algebraicos, geométricos, cálculo,

expositivos	de un contenido matemático o sobre educación matemática	educación matemática, etc.
		Contexto: matemático, comercial, técnico, medida, educativo,...
		Interés suscitado: según si se han publicado posteriormente observaciones o comentarios sobre el mismo o se ha generado debate.
		Actualización de los contenidos: se trata de contenidos clásicos o se incluyen los últimos descubrimientos sobre el tema.
		Conexiones: se han publicado en otros semanarios, su autor ha publicado libros de matemáticas, etc.
Textos de opinión	Reflejan opiniones, actitudes o creencias sobre las matemáticas y la educación matemática.	
Textos biográficos	Información o biografías sobre matemáticos, profesores de matemáticas o personas reconocidas por sus conocimientos matemáticos.	
Anuncios	Anuncios en lo que se ofrecen como profesor de matemáticas.	
	Convocatorias de profesorado de matemáticas de distintas instituciones.	
	Anuncios sobre venta de libros de matemáticas publicados.	
Reseñas de libros de matemáticas	Revisiones de libros de matemáticas publicados.	Contenidos del libro.
		Características del libro.
		Aspectos positivos del libro.
		Público al que va dirigida la obra.
Otros	Otras menciones a las matemáticas y la educación matemática, ofrecimientos sobre más contenidos, etc.	

Las unidades de análisis que se definieron han sido cada una de las entradas de los semanarios que incluyen contenidos matemáticos o sobre educación matemática. Estas se leyeron, analizaron y posteriormente se categorizaron. Así cada entrada de la publicación analizada se clasificó en una de las siete categorías presentes en la Tabla 1 y dentro de la categoría se analizó si incluía la información requerida y en caso afirmativo, cómo se detallaba dicha información.

La búsqueda y localización de los semanarios analizados se realizó a través de la Biblioteca Digital Hispánica de la Biblioteca Nacional de España y del catálogo digital Google Books.

RESULTADOS

A continuación, ejemplificamos a través de las entradas de dos Semanarios publicados en el siglo XVIII las distintas categorías de nuestro instrumento.

Planteamiento y resolución de problemas

En el *Semanario erudito y curioso de Salamanca* número 33 del martes 21/01/1794 se incluye el siguiente problema clásico:

> Un galgo corria tras una liebre: esta le llevaba de delantera al principio de su carrera quatro saltos, que consta cada uno de pie y medio: logró el perro su empresa. Pidese á quantos saltos la alcanzó desde que le llevaba la distancia dicha, constando los de éste de tres pies y medio, con la advertencia que durante daba el galgo uno, la liebre daba dos. (*Semanario erudito y curioso de Salamanca*, 1794a, p. 54)

Una semana después en el *Semanario erudito y curioso de Salamanca* del 28/01/1794 se incluyen tres soluciones a este problema (Tablas 2, 3 y 4):

Tabla 2. Primera solución del problema incluida en el *Semanario erudito y curioso de Salamanca* (1794b, pp. 73-74).

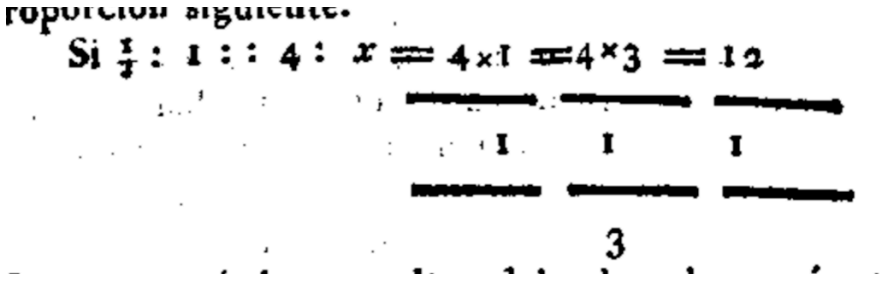
Autor	Licenciado Pez Putufes
Método	Algebraico
Esquema de resolución	Supone x = saltos de la liebre y considerando las condiciones del problema, plantea la siguiente ecuación: $\frac{3x}{2} + 6 = \frac{7x}{4}$ Multiplica por 4 para quitar los quebrados: $6x + 24 = 7x$ Pone en un miembro la incógnita indicando que se traslada con signo contrario al otro miembro y que si lo hiciera con 7x sería cantidad mayor negativa por eso traslada 6x. Resuelve para obtener x =24.
Solución aportada	La liebre llevaba 24 saltos cuando la alcanzó el galgo que di 12 saltos para ello.
Comprobación o variantes	Partiendo de la solución final comprueba que el resultado es correcto.

Tabla 3. Segunda respuesta con soluciones del problema incluida en el *Semanario erudito y curioso de Salamanca* (1794b, pp. 74-75).

Autor	San Francisco de Salamanca
Método	Algebraico
Esquema de resolución	Supone x = saltos del galgo y considerando las condiciones del problema plantea la ecuación. $3x + \frac{x}{2} = 3x + 6$ Pone todos los términos de la incógnita en un miembro, reduce y despeja la incógnita para obtener x=12.
Método	Tanteo

Esquema de resolución	El galgo en cada salto recorre medio pie más que la liebre. Con este medio pie, debe resarcir los 6 de la liebre. Medio pie del primero y medio del segundo es 1, medio del tercero, etc. y así sucesivamente hasta llegar a 6 y concluir que son 12 saltos.
Solución	El galgo da 12 saltos.
Comprobación o variantes	Modifica las condiciones iniciales del problema.

Tabla 4. Tercera respuesta con solución del problema incluida en el *Semanario erudito y curioso de Salamanca* (1794b, pp. 75-76).

Autor	El no-Matemático = Rojas
Método	Proporción
Esquema de resolución	Plantea la siguiente proporción considerando las condiciones iniciales: 
Solución	12 saltos da el galgo, 28 la liebre desde el principio de la carrera y 42 pies corren.
Comprobación o variantes	No se incluyen

A modo de corrección, se indica que los tres autores son merecedores de cualquier recompensa por compartir sus sabias producciones.

Textos expositivos

El *Semanario Literario de Cartagena* (1787) número 11 del viernes 12 de enero de 1787 comienza con una publicación de 4 páginas titulada *Antigüedad de los caracteres Arithmeticos* y en la que se exponen distintas cuestiones sobre los caracteres numéricos relacionando su origen con los jeroglíficos egipcios.

Esta publicación recibe respuesta en el *Suplemento Curioso al Semanario Literario* del viernes 23 de febrero de 1787 mediante una carta en las páginas 62-64 escrita por J. Alconchel, se responde a la anterior publicación ofreciendo más información sobre el tema.

Textos de opinión

En el *Semanario erudito y curioso de Salamanca* publicado el 11 de febrero de 1794 comparten la siguiente opinión: "Se han recibido varias soluciones de los Problemas propuestos, y no nos atrevemos á insertarlos en nuestro Periódico porque nos consta que el Publico, y especialmente nuestros Subscriptores reciben con desagrado semejante clase de escritos" (*Semanario erudito y curioso de Salamanca*, 1794c, p.120).

Matemáticos y profesores de matemáticas

El *Semanario de Salamanca* número 244 del 10 de octubre de 1795 incluye la historia de los siete sabios de la Grecia y entre ellos la de Thales Milesio: "Thales, de sobre nombre Milesio (ó porque nació en Mileta, ó porque se estableció allí) fue el que enseñó á los Griegos la Geometría y Astronomía" (*Semanario de Salamanca*, 1795, p.33).

Anuncios

Encontramos diferentes anuncios, por ejemplo, en el *Semanario de Salamanca* publicado el 12/4/1794 Miguel Vicente Márquez, vecino de Salamanca y de ejercicio aguador se ofrecía para ser útil a sus conciudadanos a instruir por precios equitativos en las principales ramas de las matemáticas: "Dará lecciones de Aritmética, de Geometria, tan necesaria para; los Arquitectos é Ingenieros; explicará la Trigonometria Plana para medir distancias, sin llegar á ellas; impondrá en los principios de Algebra, manifestando el modo de resolver toda clase de problemas" (*Semanario de Salamanca*, 1794d, p.40).

Reseñas

El *Semanario de Salamanca* del 06/02/1796 incluye una breve reseña del libro *Compendiosa explicación de Cuentas por enteros y quebrados*. En ella se alaba la obra indicando que posee: "Claridad, brevedad, generalidad, poco coste, comodidad para traerlo consigo, ó dirigirlo por el correo" (*Semanario de Salamanca*, 1796, p.126). Además, se añade que es: "libro digno de andar en las manos de todos, supuesto que á todos es util, ya sea para aprender, ó ya para no olvidar lo aprendido, y solo consumados profesores de aritmética; tendrán, razón para no comprarlo" (*Semanario de Salamanca*, 1796, p.127).

Otros

Además, se incluyen también ofrecimientos de autores sobre nuevas publicaciones, por ejemplo en el *Suplemento Curioso al Semanario Literario* del viernes 23 de febrero de 1787: "Si estas noticias fuesen capaces de llenar las intenciones de Vms. en utilidad del Semanario, contribuiría con otras relativas al origen, y progresos de la Aritmetica, Geometria, Astronomia, Hidraulica, Arquitectura Naval, y demas Ciencias exactas dependientes del entendimiento humano" (*Suplemento Curioso al Semanario de Cartagena,* 1787, pp. 63-64).

CONCLUSIONES

El instrumento diseñado permite categorizar y analizar las distintas publicaciones con contenido matemático o sobre educación matemática incluidas en la prensa histórica, mostrando sus posibilidades de uso dentro del campo de la historia de las matemáticas y la educación matemática. A través de él, podemos conocer más sobre autores de libros de matemáticas, instituciones dedicadas a la enseñanza de las matemáticas, profesorado, etc. A su vez, el análisis de los problemas y soluciones incluidos ayuda a profundizar en los distintos métodos de resolución utilizados para resolver problemas, la revisión de las soluciones realizada por distintos autores, las representaciones gráficas asociadas, etc.

En definitiva, este instrumento nos permite evidenciar la presencia de las matemáticas más allá de la educación formal o reglada, mostrando el aspecto social y cultural de estas y cómo diversos personajes se sirvieron de un elemento popular y social como los diarios, semanarios y otras publicaciones periódicas, a priori no especializadas en ciencia, para difundir ideas matemáticas a la sociedad española del siglo XVIII, junto con las posibilidades en el campo de las matemáticas y la educación matemática de la prensa periódica. Finalmente, la realización de futuros estudios sobre

otros semanarios o diarios, nos mostrará si este instrumento necesita completarse con nuevas categorías o desarrollar las ya existentes.

Referencias

Azcárate, P., y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340*, 341–378.

Clément, J.P. (2017). La Ciencia en la prensa periódica hispanoamericana del siglo XVIII. *El Argonauta Español*, *14*. https://doi.org/10.4000/argonauta.2617

González, M. T., y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *22*(3), 389–408.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., y Madrid-Martín, M. J. (2019). Juan Cortázar (1809-1873): profesor, autor y matemático. *La Gaceta de La Real Sociedad Matematica Española*, *22*(1), 159–169.

López González, E. M., Guerrero, A. C., Carrillo Yáñez, J., y Contreras González, L. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *8*. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.122

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A., y Gutiérrez-Rubio, D. (2020). La evaluación del conocimiento matemático en el siglo XVIII: estudio de caso en una institución española. En *Congreso Internacional Nodos del Conocimiento 2020.*

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A., y López-Esteban, C. (2019). El desarrollo del concepto de ecuación en libros españoles de matemáticas del siglo XVIII. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 403–412). Universidad de Valladolid.

Madrid, M. J., y López-Esteban, C. (2018). El Semanario Literario, y Curioso de Cartagena. Prensa y ciencia en el siglo XVIII. En J. M. Hernández (Ed.), *Prensa pedagógica, mujeres, niños, sectores populares y otros fines educativos* (pp. 543–554). Universidad de Salamanca.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5–20). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Meavilla, V., y Oller-Marcén, A. M. (2018). Las matemáticas en el periódico "Miscelánea turolense" (1891-1901). *Xiloca: Revista Del Centro de Estudios Del Jiloca*, *46*, 53–64.

Monterrubio, M. C., y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37–53). SEIEM.

Sánchez Hita, B. (2007). La prensa en Cádiz en el siglo XVIII. *El Argonauta Español*, *4*. https://doi.org/10.4000/argonauta.1232

Semanario de Salamanca. (1794d). *56*, 29-40.

Semanario de Salamanca. (1795). *244*, 33-40.

Semanario de Salamanca. (1796). *295*, 121-128.

Semanario erudito y curioso de Salamanca. (1794a). *33*, 49-56.

Semanario erudito y curioso de Salamanca. (1794b). *35*, 69-76.

Semanario erudito y curioso de Salamanca. (1794c). *39*, 113-120.

Semanario Literario de Cartagena. (1787). *11*, 9-12.

Suplemento Curioso al Semanario de Cartagena. (1787). *23 de febrero de 1787*, 61-64.

DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UNA ESCALA DE AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE EN CONTEXTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Design and validation of a tool for measuring students´ self-regulation in problem solving contexts

Marbán, J. M. [a] y Fernández-Gago, J.[b]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad de Málaga

Resumen

En las últimas décadas ha crecido notablemente el interés por el estudio del rendimiento académico de los estudiantes desde los enfoques propios de las teorías sociales cognitivas. En este contexto destaca la Teoría del Aprendizaje Autorregulado, alrededor de la cual surgen constructos como el de autocontrol junto con diferentes propuestas para su medición, siendo, sin embargo, escasas aún las que se dirigen al ámbito del aprendizaje matemático. Este trabajo presenta un instrumento para la medición de la percepción docente de la autorregulación del aprendizaje de sus estudiantes en contextos específicos de resolución de problemas matemáticos. El instrumento, en forma de escala Likert, ha sido sometido a juicio de expertos para analizar su validez tanto de apariencia como de contenido.

Palabras clave: *aprendizaje matemático, autorregulación, escala Likert, resolución de problemas*

Abstract

In the last decades the interest for the study of the academic performance of the students has grown notably from the approaches provided by the cognitive social theories. In this context, the Self-regulated Theory of Learning stands out, around which emerge constructs such as self-control along with different proposals for its measurement. However, still few are directed to the field of mathematics learning. This work presents a tool designed to measure the teaching perception of student´s self-regulation in specific contexts of mathematics problem solving. The instrument, adopting the form of a Likert scale, has been subjected to experts' judgement to analyse both its face and content validity.

Keywords: Likert scale, *mathematics learning, problem solving, self-regulation*

INTRODUCCIÓN

Existe un amplio consenso social a la hora de reconocer que el nivel de competencia matemática de la ciudadanía en ciertas sociedades, como la española, es preocupantemente bajo, percepción que si bien ya había sido señalada por diferentes pruebas de diagnóstico de carácter local a finales del pasado siglo, ha recuperado notoriedad en las últimas dos décadas con los resultados e informes ofrecidos por programas internacionales como TIMSS o, fundamentalmente, PISA, provocando a su vez que tanto la mirada social como la política se hayan fijado en la calidad de la educación matemática de carácter obligatorio.

Por su parte, la investigación en educación matemática dedica una notable atención a la búsqueda de factores latentes que influyan en el rendimiento académico, junto con el estudio de sus múltiples y posibles interrelaciones para comprender mejor cómo se manifiesta dicha influencia. Así, algunos autores han centrado su atención en analizar la relación entre actitudes -y otros elementos afectivos como la ansiedad- y aprendizaje matemático, en particular en contextos de resolución de problemas

Marbán, J. M. y Fernández-Gago, J. (2021). Diseño y validación de una escala de autorregulación del aprendizaje en contextos de resolución de problemas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 409 – 416). Valencia: SEIEM.

matemáticos (Araya y Moreira-Mora, 2016; Fernández-Gago, 2012; Berenguel, Gil, Montoro y Moreno, 2015; Caballero, Cárdenas y Gordillo, 2016; McLeod, 1988) sin que se hayan alcanzado datos concluyentes en términos causales, aunque sí grandes avances en el conocimiento de las interacciones entre los dominios afectivo y cognitivo. Otros estudios, como los de Mullis, Martin, Foy y Arora (2012), por un lado, y Perry y McConney (2010), por otro, han focalizado su atención en el análisis de factores tales como el nivel socioeconómico, las estrategias de enseñanza, la activación cognitiva, el clima de clase, la memorización, el control, las estrategias de elaboración y las propias actitudes hacia las matemáticas.

Fuera del contexto de la educación matemática, resultan especialmente relevantes las aportaciones de las teorías socio-cognitivas y su incorporación a la comprensión de las características de los sujetos que influyen en su aprendizaje de constructos tales como la autorregulación, el autocontrol y la autodisciplina (Gong, Rai, Beck y Heffernan, 2009; Zimmerman, 2002; Zimmerman y Kitsantas, 2014). Ahora bien, estos trabajos no contemplan la especificidad de la situación y la problemática propia del aprendizaje de las matemáticas, motivo por el cual este trabajo se propone diseñar un instrumento, en forma de escala, que pueda ayudar al docente a dar cuenta de y valorar los procesos de autorregulación de sus estudiantes en contextos propios de la resolución de problemas matemáticos, ayudándolo así no solo a elaborar una radiografía dinámica de estos procesos, sino también a enfocar su toma de decisiones en términos de intervenciones orientadas a su mejora tanto de forma individual como colectiva.

MARCO TEÓRICO

Son numerosos los investigadores que han dirigido sus esfuerzos a tratar de comprender las actuaciones de los estudiantes en contextos de resolución de problemas matemáticos, habiendo un consenso más o menos amplio a la hora de admitir la existencia de un gestor interno o monitor interior que regula sus procesos personales de resolución de problemas, procesos que guían su comportamiento. De entre estos, son también muchos los investigadores que tratan de analizar la relación entre resultados académicos en matemáticas, en particular aquellos que proporcionan pruebas estandarizadas, con la *autodisciplina*, constructo que ha sido definido habitualmente (Duckworth y Seligman, 2005) como la capacidad para suprimir la respuesta predominante para dar otra de más alto nivel y más lejana en el tiempo, especificando que esa elección no es automática y que requiere una respuesta consciente. Partiendo precisamente de este constructo, otros autores han introducido el constructo *autorregulación* para referirse al control que hacen los estudiantes sobre su propia cognición, su comportamiento, sus emociones y su motivación a través del uso de estrategias personales para alcanzar las metas que ellos mismos se han propuesto.

La escala cuyo diseño y validación se presenta en este trabajo ha sido diseñada tomando como base teórica los modelos de Zimmerman y de Boekaerts. Las teorías socio-cognitivas y, en particular, la Teoría del Aprendizaje Autorregulado (Zimmerman, 2002), nos muestran cómo los estudiantes que muestran altos niveles de autorregulación de su aprendizaje son capaces de comprender mejor los problemas académicos a los que se enfrentan, seleccionar y emplear de manera eficiente estrategias para su resolución, orientar su trabajo hacia unos objetivos bien definidos, gestionar los tiempos adecuadamente evitando procrastrinaciones, establecer estándares de calidad de procesos y resultados, actuar de manera flexible ante las posibles adversidades y mantener en todo momento el control de sus emociones. En este contexto, la autorregulación es entendida o conceptualizada como un proceso en el que los aprendices emplean varias estrategias para regular y controlar su propio aprendizaje (Zimmerman, 2002; Zimmerman y Kitsantas, 2014), proceso que atraviesa de forma cíclica tres fases (Figura 1): reflexión previa, ejecución y autorreflexión.

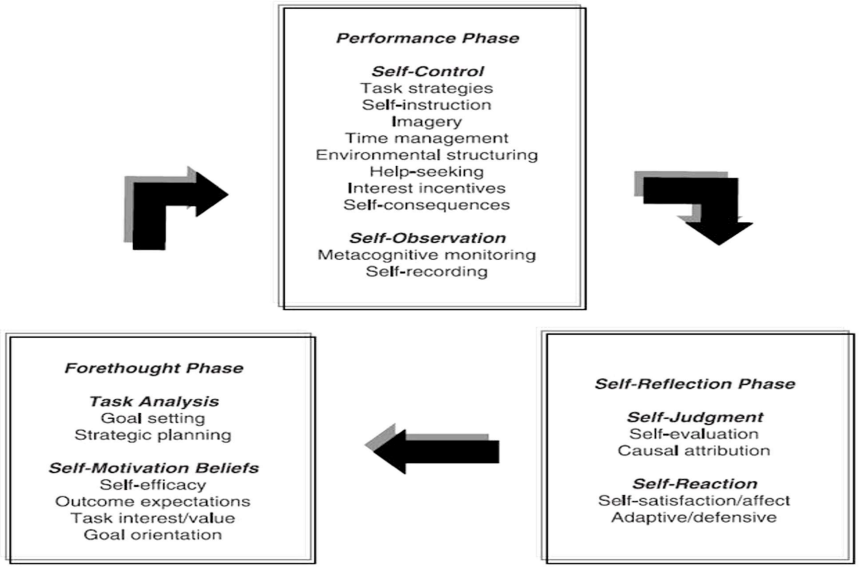


Figura 1. Modelo de autorregulación (adaptado de Zimmerman y Moylan, 2009)

La Teoría del Aprendizaje Autorregulado pivota no solo sobre fases, sino también sobre dimensiones y niveles. Las dimensiones son aquello que hay que regular o controlar en el aprendizaje, existiendo en cada una de ellas procesos clave de aprendizaje autorregulado: qué motivos tiene el estudiante para el aprendizaje, qué método emplea para aprender, cómo gestiona los tiempos, cómo gestiona su comportamiento, cómo gestiona el ambiente físico que lo rodea y cómo gestiona el ambiente social. Los niveles, por su parte, son los procesos que intervienen en la ejecución de las tareas y que se resumen en: observación, cuando un alumno observa algo que le sirve para realizar la tarea, emulación, cuando lo pone en práctica, y auto-regulación, cuando lo extrapola a otros contextos.

Por otra parte, Boekaerts (1993) afirma que una de las finalidades del aprendizaje autorregulado es redirigir el camino del bienestar, que puede estar amenazado por una tarea, hacia el camino del aprendizaje. En el diseño de la escala que se presenta en este trabajo se ha tomado esta idea para introducir una nueva dimensión a las propuestas por Zimmerman, la *ética*, entendida esta como la responsabilidad aceptada plenamente por el propio estudiante de resolver la tarea, buscando este fin con perseverancia, paciencia y a través de sus propios medios, sin "atajos" ni cesión de responsabilidad a otros.

MARCO METODOLÓGICO

El objetivo fundamental de esta investigación es el diseño y validación de una escala, por lo que, desde un enfoque metodológico puramente cuantitativo, se han puesto en marcha los diferentes procesos y etapas propios de este tipo de trabajos para garantizar tanto la validez como la fiabilidad del instrumento mencionado. En particular, en este trabajo se describe cómo se han cubierto, por un lado, las etapas consistentes en la revisión de la literatura y en la selección inicial de los ítems de acuerdo con el marco teórico expuesto, en lo que puede considerarse el primer paso necesario para asegurar la validez de constructo y, por otro lado, las etapas propias del análisis de validez de apariencia y de contenido a través de juicio de expertos sobre la escala resultante. Estas últimas se describen a continuación:

Selección de jueces expertos

Con base en las recomendaciones para la selección de expertos habituales en este tipo de validaciones se solicitó la colaboración de 11 expertos cuyo perfil se presenta de forma resumida en la siguiente tabla:

Tabla 1. Breve descripción del perfil de los expertos seleccionados para evaluar

Experto/Juez	Perfil
1	44 años de experiencia como docente universitario en Didáctica de la Matemática con investigación en el campo de la resolución de problemas.
2	18 años de experiencia como docente universitario de Didáctica de la Matemática con investigación en desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.
3	37 años de experiencia como docente universitario de Didáctica de la Matemática con investigación en desarrollo profesional del profesorado de matemáticas y en resolución de problemas.
4	25 años de experiencia como docente universitaria de Didáctica de la Matemática con investigación en el campo del dominio afectivo en matemáticas.
5	Más de 30 años de experiencia docente como profesor de matemáticas de Secundaria y experiencia como profesor universitario en Didáctica de la Matemática.
6	17 años de experiencia como docente universitaria en Didáctica de la Matemática con investigación en desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.
7	20 años de experiencia como docente universitario en Didáctica de la Matemática con investigación en análisis estadístico de pruebas para el acceso a la Universidad.
8	25 años de experiencia como docente universitaria de Didáctica de la Matemática con investigación en el campo del dominio afectivo en matemáticas y en áreas STEM.
9	24 años de experiencia como docente universitaria de Didáctica de la Matemática con investigación en el campo del dominio afectivo en matemáticas.
10	15 años de experiencia como docente universitaria en Psicología y experta en Psicología Positiva.
11	Más de 25 años de experiencia como profesor de matemáticas de Secundaria.

Una vez seleccionados se les hizo llegar una carta de invitación, la escala a evaluar, un documento aclaratorio del marco teórico subyacente al diseño de la escala, las instrucciones para la valoración de la escala y una plantilla para recoger sus respuestas.

Criterios de valoración de los expertos

Se solicitó la valoración, para los distintos ítems que componen la escala, de las siguientes características: **claridad, pertinencia, relevancia y suficiencia** (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008). En el caso de la claridad, útil para la validación de apariencia, se facilitó la siguiente tabla de evaluación:

Tabla 2. Niveles e indicadores de claridad

CARACTERÍSTICA	NIVELES	INDICADOR
CLARIDAD El ítem se entiende fácilmente, esto es, su semántica y sintaxis son adecuados.	1. No cumple el criterio	El ítem no es claro
	2. Nivel Bajo	El ítem requiere una modificación profunda.
	3. Nivel Moderado	Solo necesita una específica modificación de algún término del ítem.
	4. Nivel Alto	El ítem es claro, tiene semántica y sintaxis apropiada.

En cuanto al nivel o grado de pertinencia de cada ítem, la valoración debía efectuarse de acuerdo con los siguientes niveles e indicadores asociados (SR-RP = autorregulación-resolución de problemas):

Tabla 3. Niveles e indicadores de pertinencia

CARACTERÍSTICA	NIVEL	INDICADOR
PERTINENCIA El ítem está relacionado con el constructo SR-RP.	1. No cumple el criterio	El ítem no tiene relación lógica alguna con SR-RP
	2. Nivel Bajo	El ítem tiene una relación tangencial con SR-RP.
	3. Nivel Moderado	El ítem tiene una relación moderada con SR-RP.
	4. Nivel alto	El ítem está íntimamente relacionado con SR-RP.

En el caso de la relevancia, se mantienen los niveles, pero cambian los indicadores:

Tabla 4. Niveles e indicadores de relevancia

CARACTERÍSTICA	NIVEL	INDICADOR
RELEVANCIA El ítem es esencial o importante, esto es, debe ser considerado para medir SR-RP.	1. No cumple el criterio	El ítem puede ser eliminado sin afectar a la medida de SR-RP.
	2. Nivel Bajo	El ítem tiene relevancia, pero debería modificarse sustancialmente para medir SR-RP.
	3. Nivel Moderado	El ítem es relativamente importante para medir SR-RP.
	4. Nivel Alto	El ítem es muy relevante y debe mantenerse.

Finalmente, se solicitó a los jueces que valorasen hasta qué punto el listado de ítems propuestos eran suficientes para poder medir autorregulación en la resolución de problemas matemáticos de acuerdo con el marco teórico empleado. En este sentido, la valoración debía ser global, esto es, no se realizaba ítem a ítem sino sobre el cuestionario en su totalidad, atendiendo a la suficiencia de los ítems propuestos para cada una de las fases de resolución de problemas, así como para cada dimensión (incluyendo la dimensión ética), nivel o fase.

Análisis de concordancia interjueces mediante el estadístico Kappa de Fleiss

De cara a establecer el nivel de concordancia de las valoraciones ofrecidas por los 11 jueces seleccionados se optó por la bien conocida Kappa de Fleiss (Fleiss, 1971), una generalización al caso de más de dos jueces de la Kappa propuesta por Cohen en 1960, basada en comparar la concordancia observada en un conjunto de datos con la que podría observarse como resultado del puro azar. En particular, se optó por su alternativa *free-marginal* (Randolph, 2005).

RESULTADOS

El primero de los resultados de este trabajo es la escala que habría de ser sometida a validación por expertos, escala diseñada teniendo en cuenta tanto las dimensiones como las fases y niveles que tomamos como referencia en nuestro marco teórico y cuyos ítems de partida se inspiran en la escala SCRS de Kendall y Wilcox (1979) dirigida a docentes indagando su percepción sobre el autocontrol

de sus estudiantes, en el modelo de Schoenfeld (1992) y en el trabajo de Fernández-Gago (2012). Así, se establecieron 17 ítems iniciales adaptados al contexto de resolución de problemas matemáticos y orientados a indagar sobre impulsividad, atención, responsabilidad, vergüenza, perfeccionismo, gestión de dificultades, uso del habla interior y duda, todas ellas indisolublemente asociadas al proceso de Resolución de Problemas Matemáticos. La escala gradúa las respuestas de 1 a 5, en función del grado de acuerdo o desacuerdo del docente con el enunciado de cada ítem en el caso del estudiante al que se le esté aplicando la valoración. Se muestran a continuación los 17 ítems propuestos indicando entre paréntesis las dimensiones consideradas (AS=Ambiente Social, M=Motivo, MET=Método, C=Comportamiento y E=Ética), la fase en íntima conexión con el proceso de resolución del problema (A=Antes, D=Durante y DS=Después) y el nivel (A=Autorregulación, E=Emulación, AC=Autocontrol y O=Observación).

Tabla 5. Ítems de la escala con indicación de dimensión, fase y nivel

1. Pide ayuda (el alumno) cuando tiene una dificultad en el problema (AS-D-A)	2. Es capaz de hacer los problemas extras para mejorar su capacidad de resolver problemas (M-DS-A)	3. Es capaz de expresar sus conjeturas en clase (MET-D-E)
4. No es capaz de pensar en varias estrategias para su resolución (MET-A/D-AC)	5. No es capaz de decidirse por un plan de ataque (C-A/D-O)	6. Le sienta mal cuando alguien critica sus soluciones (M-D-A)
7. No es capaz de comprobar si son coherentes sus soluciones (M-DS-E)	8. Es capaz de redactar su solución (C-D-A)	9. Es capaz de razonar cada paso de su solución (M-D-E)
10. No le interesan las soluciones de los compañeros distintas a las suyas (AS-DS-A)	11. Cuando no le sale un problema es capaz de reflexionar sobre lo que ha hecho para mejorar en el siguiente (M-DS-A)	12. Está tan concentrado que no hay nada que le distraiga (E-A/D-A)
13. No se plantea extensiones de los problemas por sí mismo (M-DS-A)	14. Sabe afrontar las dificultades que surgen en un problema (E-D-A)	15. Para el alumno no es importante hacerlo por sí mismo (E-A-A)
16. Tiene recursos para entender el problema (M-A/D-AC)	17. Es capaz de intentar un problema durante una semana (M-A/D-AC)	

A continuación, se muestra el resultado de la evaluación llevada a cabo por los expertos (para cada ítem se indica el número de jueces que otorgaron cada una de las posibles valoraciones de acuerdo con las instrucciones presentadas en el apartado anterior), así como los comentarios aportados en forma de sugerencias de mejora de la claridad de la escala:

Tabla 6. Evaluaciones y comentarios de los jueces/expertos

Ítem	Claridad				Pertinencia				Relevancia				Comentarios
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
1	0	0	3	8	0	0	1	10	0	0	0	11	Se entiende que se refiere al alumno al ser el sujeto a evaluar por el docente a través de la escala.
2	1	0	3	7	0	0	3	8	0	1	3	7	La expresión “problemas extras” no es clara.
3	0	0	0	11	0	0	1	10	0	0	3	8	
4	0	0	2	9	0	0	0	11	0	1	0	10	
5	0	1	3	7	0	0	0	11	0	0	0	11	La expresión “plan de ataque” es mejorable.
6	0	0	2	9	0	1	1	9	1	0	2	8	
7	1	0	0	10	0	0	0	11	0	0	11	0	No se entiende si son soluciones distintas al mismo problema o soluciones a problemas diferentes.
8	0	0	2	9	0	0	2	9	0	1	1	9	
9	0	0	3	8	0	0	0	11	0	1	0	10	

10	0	1	2	8	0	0	2	9	0	1	1	9	Añadiría "…de sus compañeros si son distintas a las suyas"
11	1	0	2	8	0	0	1	10	0	0	1	10	Se mezcla "reflexionar sobre lo que hizo mal"… y "…para mejorar en el siguiente". Se puede reflexionar y no mejorar, lo cual hace que sea confuso el ítem.
12	0	0	2	9	0	0	1	10	1	0	1	9	
13	0	0	2	9	0	0	0	11	0	0	1	10	
14	0	1	2	8	0	0	3	8	0	0	1	10	Mejor usar la expresión "… al resolver un problema"
15	1	0	1	9	0	0	0	11	0	0	0	11	Aclarar que "es importante resolverlo por sí mismo" se refiere a la resolución de problemas. Sugiero enunciarlo como "Para el alumno no es importante resolver el problema por sí mismo".
16	1	0	5	5	1	0	0	10	1	0	0	10	Aclarar qué se quiere decir con recursos.
17	1	0	4	6	0	0	1	10	0	0	1	10	Mejor redactar "Es capaz de persistir en la búsqueda de la solución del problema, aunque eso se alargue una semana"

A partir de estas respuestas se tomaron las siguientes decisiones:

1. En relación con la validez de apariencia, y a partir de los resultados y comentarios sobre claridad de la escala, se volvieron a enunciar los ítems 2, 5, 7, 10, 11, 14, 15, 16 y 17 de acuerdo con las sugerencias de los evaluadores que los habían marcado con un 1 o un 2, y se eliminó "(el alumno) en el ítem 1 dado que se entiende que la escala se aplica al alumnado.
2. En relación con la suficiencia se ajustó la clasificación de los ítems según dimensiones y fases de acuerdo con sugerencias de los revisores, no siendo necesario incorporar nuevos ítems.

   Tras estas dos primeras acciones los ítems modificados quedaron de esta forma:

1. Pide ayuda cuando encuentra una dificultad en el problema (AS-A/D-A)	2. Es capaz de hacer problemas nuevos, extensiones de los ya hechos, para mejorar su capacidad de resolver problemas (M-DS-A)	4. No es capaz de pensar en varias estrategias para su resolución (MET-A/D-AC).
5. No es capaz de decidirse por unas acciones concretas que podrían llevarle a la solución (C-A/D-O)	7. No es capaz de comprobar si su solución (o soluciones) a un determinado problema es (son) coherente(s) (M-D-E)	10. No le interesan las soluciones de los compañeros si son distintas a las suyas (AS-DS-A)
11. Cuando no le sale un problema es capaz de reflexionar sobre lo que ha hecho para avanzar en su resolución (M-DS-A)	12. Está tan concentrado que no hay nada que le distraiga (E-A/D-A)	14. Sabe afrontar las dificultades que surgen al resolver un problema (E-D-A)
15. Para el alumno no es importante resolver el problema por sí mismo (E-A-A)	16. Tiene recursos propios (y los usa) para entender los problemas (M-A/D-AC)	17. Es capaz de persistir en la búsqueda de la solución del problema, aunque eso se alargue una semana (M-A/D-AC)

3. Se calcularon las Kappa de Fleiss asociadas a pertinencia y relevancia, las cuales resultaron ser de 0.77±0,10 (grado de acuerdo del 82,57%) y 0.70±0,11 (grado de acuerdo del 77,75%), valores todos ellos considerados como sustanciales, considerables o buenos de acuerdo con diferentes autores como el propio Fleiss (1971).

Para finalizar, es preciso recordar que el trabajo mostrado cubre únicamente las primeras etapas de un proceso serio y riguroso de diseño y validación de instrumentos de medición de un constructo tan complejo como el de la autorregulación, tal y como se ha indicado ya con anterioridad. Queda pendiente continuar con las etapas asociadas a la validez del constructo, en términos de análisis

dimensionales, y a la validez convergente, así como afrontar las etapas propias de la fiabilidad, principalmente en términos de consistencia interna y fiabilidad test-retest.

Referencias

Araya, R. G. y Moreira-Mora, T. (2016). Un modelo explicativo de las creencias y actitudes hacia las Matemáticas: Un análisis basado en modelos de ecuaciones estructurales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 27-51.

Berenguel, E., Gil, F., Montoro, A. B. y Moreno, M. F. (2015). Influencia de la autoconfianza y el perfil motivacional en el "flujo" en matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 173-181). Alicante: SEIEM.

Boekaerts, M. (1993). Being concerned with well-being and with learning. *Educational psychologist*, *28*(2), 149-167.

Caballero, A., Cárdenas, J. y Gordillo, F. (2016). La intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. El MIRPM. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 75-91). Malaga: SEIEM.

Duckworth, A. L. y Seligman, M. E. (2005). Self-discipline outdoes IQ in predicting academic performance of adolescents. *Psychological science*, *16*(12), 939-944.

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, *6*(1), 27-36.

Fernández-Gago, J. (2012). *Relaciones entre actuaciones de alumnos y profesores de Matemáticas en ambientes de resolución de problemas, creencias y concepciones respecto de dimensiones relacionadas con el esfuerzo desde la teoría de la inteligencia creadora* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva.

Fleiss, J.L. (1971): Measuring nominal scale agreement among many raters. *Psychol. Bull. 76*(5), 378.

Gong, Y., Rai, D., Beck, J. E. y Heffernan, N. T. (2009). Does Self-Discipline Impact Students' Knowledge and Learning? *International Working Group on Educational Data Mining*.

Kendall, P. C. y Wilcox, L. E. (1979). Self-control in children: Development of a rating scale. *Journal of Consulting and Clinical psychology*, *47*(6), 1020-1029.

McLeod, D. B. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for research in mathematics education 19*(2), 134-141.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P. y Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

Perry, L. B. y McConney, A. (2010). Does the SES of the school matter? An examination of socioeconomic status and student achievement using PISA 2003. *Teachers College Record*, *112*(4), 1137-1162.

Randolph, J. J. (2005). Free-Marginal Multirater Kappa (multirater K [free]): An Alternative to Fleiss' Fixed-Marginal Multirater Kappa. *Online submission*.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp.334-370). New York: Macmillan.

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into practice*, *41*(2), 64-70.

Zimmerman, B. J. y Moylan, A. R. (2009). Self-regulation: Where metacognition and motivation intersect. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), *The educational psychology series. Handbook of metacognition in education* (pp. 299-315). New York, NY, US: Routledge/Taylor & Francis Group.

Zimmerman, B. J. y Kitsantas, A. (2014). Comparing students' self-discipline and self-regulation measures and their prediction of academic achievement. *Contemporary Educational Psychology*, *39*(2), 145-155.

UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DE LA ESTADÍSTICA[1]

A study and research path for the university teaching of statistics

Markulin, K.[a], Bosch, M.[a] y Florensa, I.[b]

[a]IQS School of Management, Univ. Ramon Llull, [b]Escola Universitària Salesiana de Sarrià, UAB

Resumen

Presentamos una experimentación piloto de un recorrido de estudio e investigación (REI) para la enseñanza de la estadística en un segundo curso de grado en administración y dirección de empresas. El trabajo se sitúa en la teoría antropológica de lo didáctico y se propone avanzar en el problema de la integración de los REI en la enseñanza universitaria para el caso de la estadística. Describimos el REI experimentado y lo analizamos a partir de observaciones de la experimentación y de una serie de entrevistas semiestructuradas a estudiantes del curso. Los resultados obtenidos proporcionan nuevos criterios para el diseño y gestión tanto de los REI como de la asignatura en la que se integran.

Palabras clave: *teoría antropológica de lo didáctico, estadística, enseñanza universitaria, recorridos de estudio e investigación, aprendizaje por proyectos*

Abstract

We present a pilot experiment of a study and research path (SRP) for the teaching of statistics in a second year of a degree in business administration and management. The work is situated in the anthropological theory the didactic and proposes to advance in the problem of the integration of SRPs in university teaching in the case of statistics. We describe the experienced SRP and analyse it based on class observations and semi-structured interviews with the students of the course. The results obtained provide new criteria for the design and management of both the SRPs and the corresponding subjects.

Keywords: *anthropological theory of the didactic, statistics, university teaching, study and research paths, project-based learning*

LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA POR PROYECTOS Y LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

En los años 90 la estadística se definió como la ciencia de los datos y se destacó la importancia del contexto del que proceden los datos empíricos y que estos permiten estudiar. Wild y Pfannkuch (1999) destacan la necesidad de datos, la "transnumeración" (o visualización) y el razonamiento dentro del contexto de la estadística. Para destacar la idea principal de este ámbito, Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) explican "el *sentido estadístico* como unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico" (p.8). Estos autores distinguen la "competencia en análisis de datos" y el "razonamiento estadístico", afirmando que la primera no implica necesariamente el segundo. Para crear un puente entre los conceptos matemáticos y el entorno estadístico "vivo", proponen el trabajo con proyectos e investigaciones como método para desarrollar el *sentido estadístico* de los estudiantes. Consideran que una investigación estadística comprende las siguientes fases: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y

[1] Esta investigación ha sido realizada dentro del proyecto RTI2018-101153-B-C21 del Programa Estatal de I+D+i orientado a los Retos de la Sociedad (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Markulin, K., Bosch, M. y Florensa, I. (2021). Un recorrido de estudio e investigación para la enseñanza universitaria de la estadística. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 417 – 424). Valencia: SEIEM.

obtención de conclusiones sobre el problema planteado. También muestran que los proyectos no solo permiten movilizar conocimientos técnicos, sino también conocimientos estratégicos "conocimientos estratégicos" (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado), al tiempo que aumenta la motivación de los estudiantes. Finalmente, indican que, para planificar bien un proyecto de este tipo, es fundamental conocer el contenido que se va a introducir o aplicar a partir de los conocimientos previos de los estudiantes.

Asumimos los principios que indican estos autores sobre la pertinencia del uso de proyectos para la enseñanza de la estadística, principios que han corroborado otras investigaciones en el área (Godino, Arteaga y Estepa, 2013; Spence, Bailey y Sharp, 2017).

Durante estos últimos 15 años, se ha desarrollado una línea de investigación en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) sobre el diseño, implementación, análisis y desarrollo de un nuevo tipo de propuesta didáctica, los *recorridos de estudio e investigación* (REI). Con el fin de avanzar en el estudio de las posibilidades que ofrece la enseñanza de la estadística basada en proyectos, proponemos utilizar este dispositivo didáctico como marco para el diseño, la implementación y el análisis de propuestas, siguiendo la metodología de la ingeniería didáctica (Barquero y Bosch, 2015; García, Barquero, Florensa y Bosch, 2019). Un estudio reciente (Quéré, 2019) muestra que la propuesta de los REI se puede también adaptar a la enseñanza de la estadística, de forma coherente con el trabajo por proyectos y las recomendaciones del informe GAISE (Carver, College, Everson y Ohio, 2016).

La propuesta de los REI consiste en organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de la consideración de cuestiones abiertas que se plantean a los estudiantes para que elaboren respuestas bajo la dirección del profesor o profesores. Se parte de una cuestión inicial o cuestión generatriz que dirige todo el estudio y genera una arborescencia de cuestiones derivadas. En el proceso de elaboración de las respuestas a estas cuestiones, aparecen actividades de investigación (búsqueda de información, recogida de datos, confrontación de la información recogida, producción de respuestas parciales, etc.) y actividades de estudio para entender las informaciones recogidas, adquirir y ser capaces de movilizar nuevos conocimientos y nuevas herramientas de análisis (Chevallard, 2013). Por lo tanto, los REI integran dentro del proceso de investigación, el estudio de nuevos conocimientos o saberes. Según Artigue y Blomhøj (2013), pueden considerarse como un caso particular de enseñanza por investigación o por proyectos en el sentido específico que se le da en la TAD.

Hasta la fecha, y sólo considerando la educación universitaria, se ha analizado la aplicación de varios REI para estudiantes de ingeniería, química, ciencias médicas, economía y administración y gestión de empresas (Bosch, 2018; Florensa, 2018; Lucas, 2015; Parra y Otero, 2017; entre otros). Estas investigaciones muestran diferentes modalidades de integración de los REI en la organización de las asignaturas (articulando un curso entero, desarrollándose como un proyecto en una parte parcial del curso, etc.) y utilizan distintas herramientas para la gestión de los REI originadas en la investigación didáctica, en particular, el uso de los mapas de preguntas y respuestas.

El estudio que presentamos se inscribe en un proyecto de tesis doctoral cuyo objetivo es avanzar en la difusión y el impacto de los REI en la enseñanza universitaria tomando como punto de partida la propuesta de Quéré (2019) sobre la enseñanza de la estadística. Nuestra propuesta es analizar la ecología didáctica de los REI en estadística, es decir, las condiciones que permiten su aplicación en el aula y las limitaciones de todo tipo (epistemológicas, pedagógicas, escolares y sociales) que impiden su desarrollo generalizado. En esta comunicación, presentamos un primer trabajo exploratorio sobre un REI piloto que hemos experimentado en una asignatura de estadística de segundo curso del grado de administración y dirección de empresas. Nos proponemos por lo tanto analizar el desarrollo de la experimentación de dicho REI.

EXPERIMENTACIÓN PILOTO DEL REI

La experimentación del REI que analizamos aquí corresponde a las tres últimas semanas de la asignatura de Estadística (6 ECTS) del segundo curso de grado en Administración y Dirección de Empresas. La asignatura se estructura en dos sesiones semanales de dos horas de trabajo teórico y práctico con el paquete R Commander (Rcmdr) de R. El curso se impartió a tres grupos de 41, 39 y 31 estudiantes, uno en castellano y los otros dos en inglés. Dos profesoras impartieron el curso conjuntamente en el aula, una con años de experiencia de la enseñanza universitaria y otra recién incorporada como ayudante y estudiante de doctorado. El curso consistía en una primera parte de unas 20 sesiones (10-12 semanas) organizadas en el estudio de un total de 5 casos quincenales donde se trabajaban con datos reales, recogidos por los propios estudiantes o proporcionados por las profesoras, y se abordaban los siguientes temas: análisis descriptivo de una variable, análisis descriptivo de relaciones entre dos variables, distribuciones de frecuencias y probabilidad, inferencia y distribuciones muestrales, contrastes de hipótesis. Esta primera parte acababa con un examen parcial donde los estudiantes debían interpretar los resultados de un estudio a partir de ciertos outputs de Rcmdr (gráficos, resúmenes estadísticos, tests de hipótesis). Las tres últimas semanas se dedicaron al proyecto que aquí presentamos, con un total de 6 sesiones de dos horas.

El proyecto se presentó como una colaboración conjunta entre departamento de métodos cuantitativos y un grupo de investigación de marketing de la misma facultad. Este grupo estaba iniciando una investigación sobre el comportamiento y los motivos de los veganos y vegetarianos sobre su dieta (motivaciones, valores, comportamientos de compra, etc.). El estudio estaba basado en una encuesta previamente diseñada por el equipo investigador. A los estudiantes se les entregó la encuesta realizada, y ellos se encargaron de reunir datos, organizar el estudio y elegir su foco de estudio por equipos. Las sesiones de clase estaban poco estructuradas para permitir a los estudiantes trabajar de forma autónoma bajo la supervisión de las dos profesoras. Solo había dos plazos estrictos: la presentación de un informe intermedio para mostrar el avance de cada equipo y la presentación de los resultados finales en formato póster, durante la última clase del curso. El informe intermedio era obligatorio y tenía por objeto proporcionar una retroalimentación concreta de los profesores y señalar los puntos fuertes y débiles de las vías de análisis. Durante la sesión de pósteres, cada equipo tuvo cinco minutos para presentar su trabajo y 10 minutos para defender sus propuestas discutiendo con un jurado formado por tres profesores de distintos departamentos. El proyecto pesaba un 30% de la calificación del curso y se evaluó mediante la presentación del póster y la defensa (20%), junto con el informe intermedio y el trabajo en clase (10%). Se evaluaron los aspectos siguientes: formulación del problema abordado, descripción del cuestionario y de la muestra, variables consideradas y creadas, calidad del análisis (gráfico, numérico y tests), principales resultados, conclusiones, nuevas cuestiones formuladas, redactado y visualización, presentación oral.

El objetivo de implementar este proyecto en la asignatura era doble. Como componente del curso, su función era proporcionar a los estudiantes un caso real, surgido de una investigación en curso, donde los estudiantes debían responsabilizarse de una gran parte del análisis estadístico. Es decir, debían recoger ellos mismos los datos y analizarlos de la manera que consideraran más pertinente. De esta forma, la asignatura acababa con una actividad estadística genuina en la que los estudiantes debían utilizar todos los conocimientos y destrezas aprendidos para un objetivo concreto. Pero el proyecto también tenía un objetivo desde el punto de vista de nuestra investigación. Lo experimentamos como caso piloto de *recorrido de estudio e investigación* (REI) para ser analizado e implementado de nuevo durante el curso 2020/21. Esta experimentación debía servirnos para explorar la organización didáctica del proceso, los dispositivos que facilitan su realización y las restricciones que podrían limitarla. El diseño del REI se basó en las siguientes fases o *dispositivos didácticos*, a la que añadimos las condiciones finales en que se realizaron:

1. *Objetivo del estudio y recogida de datos.* Presentación del estudio de dietas vegetales y del cuestionario por parte de la profesora del curso y recogida de datos por parte de los

estudiantes, con un mínimo de 15 individuos por estudiante (5 veganos y 10 vegetarianos aproximadamente). Los estudiantes tuvieron dos semanas para ello, una de las cuales coincidió con el inicio del proyecto en clase.

2. *Formulación de cuestiones.* Análisis del texto de cuestionario para que los estudiantes plantearan las cuestiones a las que cada equipo iba a aportar respuestas con el análisis de los datos recogidos. Esta actividad duró dos sesiones debido al retraso en la recogida de datos.
3. *Análisis libre de los datos recogidos* focalizándose cada equipo en un pequeño número de cuestiones relacionadas (es decir, en una parte del cuestionario).
4. *Informe intermedio.* Presentación de los primeros resultados obtenidos por cada equipo en un informe escrito de estructura similar a la de los casos que se entregaban durante el curso: cuestiones planteadas, descripción de la muestra, análisis de las respuestas, conclusiones, limitaciones y nuevas cuestiones.
5. *Preparación del póster.* Desarrollo de los análisis después de obtener feedback del informe intermedio y preparación del póster con una síntesis de los resultados obtenidos.
6. *Presentación de resultados* en la sesión de pósteres delante de un jurado formado por tres profesores de distintos departamentos.

CUESTIONES DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

Las cuestiones que nos planteamos en esta fase de la investigación son las siguientes:

> C1: ¿Qué dispositivos didácticos (recogida de datos, identificación de cuestiones generatrices, trabajo libre en equipo bajo la supervisión de las profesoras, preparación del informe intermedio, preparación del poster y defensa) implementados durante el proyecto piloto han funcionado según lo previsto? ¿Cuáles no y por qué motivos?
>
> C2: ¿Qué criterios para el diseño de nuevos REI para la enseñanza de la estadística en la universidad pueden desprenderse de la experimentación piloto?

Con el fin de analizar el resultado de la implementación del proyecto piloto realizamos un estudio cualitativo basado en entrevistas semiestructuradas a una muestra de seis estudiantes (tres chicos y tres chicas) realizadas por la profesora ayudante, sin la presencia de la profesora titular, y con la asignatura ya evaluada. Las entrevistas duraron unos 35 minutos en promedio, se grabó el audio y se transcribieron. La muestra estaba formada por un par de estudiantes de cada grupo y en total representaban cuatro equipos de trabajo. Para poder obtener el máximo de información sobre C1 y C2, los estudiantes fueron elegidos entre los equipos que hicieron buenas presentaciones, entregaron los informes intermedios dentro de los plazos marcados e hicieron la mayor parte del proyecto durante las sesiones de clase, lo que permitió a los profesores seguir mejor su investigación. Se trataba pues de estudiantes con buen rendimiento y buena predisposición hacia la asignatura.

El guion de las entrevistas se focalizó en los siguientes aspectos o hipótesis iniciales que involucran los seis dispositivos didácticos descritos anteriormente:

- H1. *Objetivo del estudio*. El objetivo del proyecto no se formuló bien, aunque el tema fuera interesante y digno de análisis.
- H2. *Recopilación de datos*. La recopilación de datos fue precipitada y poco fiable.
- H3. *Formulaciőn de cuestiones a partir del cuestionario*. Por problemas de calendario (falta de tiempo para recoger los datos), se utilizaron dos sesiones para formular preguntas a partir del cuestionario y guiar los análisis posteriores. El trabajo de los estudiantes durante estas sesiones no estuvo bien guiado ni fue productivo.
- H4. *Uso de conocimientos y herramientas estadísticos del curso.* Las clases previas y los estudios de caso proporcionaron herramientas y conocimientos apropiados para la realización del proyecto.

- H5. *Trabajo en equipo*. Una vez recopilados los datos, el trabajo en equipo no planteó demasiadas dificultades.
- H6. *Informes.* El informe intermedio y el póster final fueron útiles tanto para organizar el trabajo de los estudiantes como para la evaluación. Las sesiones de trabajo libre en clase tuvieron un rendimiento muy irregular.
- H7. *Calendario*. El período en que se realizó el proyecto (final del semestre) fue perturbado por exámenes parciales y trabajos de otras asignaturas. Hubiera sido mejor realizar el proyecto durante todo el curso en paralelo con las clases y estudio de casos.
- H8. *Sesión de pósteres.* Funcionó bien como trabajo de síntesis y difusión de los resultados obtenidos por cada equipo de estudiantes y el formato de organización resultó apropiado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En los siguientes párrafos presentamos los resultados de las entrevistas ilustrándolos con algunas citas textuales de los estudiantes (E1, E2, ..., E6).

- Sobre el objetivo del estudio (H1), los estudiantes mostraron interés por la tema aunque no les quedó claro cuál era su tarea en el proyecto. E4: "Es un tema super actual, pero al principio era un poco difícil identificar las cosas." E1: "Al principio las preguntas nos parecían extrañas, pero cuando las empezamos a analizar, empezamos a entenderlo".
- La recopilación de datos (H2) se realizó personalmente o de forma indirecta y los encuestados consideran que los datos fueron válidos (no inventados). Les costó recoger la muestra y tenían poco tiempo para ello. E6: "Pedimos a los amigos vegetarianos que lo respondieran y que lo reenviaran a otros. No creo que hubiera datos falsos." E4: "Todas mis respuestas fueron de contactos míos. El problema es que todos tenían el mismo rango de edad."
- El cuestionario (H3) era complicado y con muchas preguntas. Las sesiones de trabajo sobre las preguntas no les parecieron útiles. E1: "Al principio las preguntas nos parecían extrañas. Pero cuando las empezamos a analizar, con gráficos y resúmenes, empezamos a entenderlo"
- Sobre el uso de conocimientos y herramientas estadísticos (H4) los alumnos se sentían bien preparados tanto con el contenido como en el trabajo en grupo. E3: "Podías aplicar lo que aprendiste en estadística y sabías qué hacer." E6: "Creo que he aprendido más en el proyecto que en el resto del curso."
- Sobre el trabajo en equipo (H5), afirman que los casos les ayudaron a organizarse bien, aunque la complejidad del estudio no les permitió repartirse el trabajo de forma simple (como hacían con los casos). E1: "Lo hicimos todo juntas porque lo queríamos entender todo. Primero queríamos repartir el trabajo, pero no pudimos por la complejidad del cuestionario." E2: "Eso fue lo más difícil, yo creo. Saber cómo analizar, qué analizar, qué era importante y qué no era importante. Al final intentábamos llegar todos a un acuerdo entre todos."
- El *feedback* de profesoras en clase (H6) y sobre todo el informe intermedio resultaron muy útiles. A algunos alumnos les hubiera gustado tener más guía por parte de las profesoras. E2: "Fue muy útil poder preguntar siempre que queríamos." E5: "El informe intermedio fue muy útil, aunque en realidad trabajamos mucho más de lo que aparece en el póster final."
- A la mayoría, el calendario (H7) les pareció apropiado, aunque hubieran querido disponer del cuestionario antes para tener más tiempo para recoger los datos. E3: "Para mí fue un poco corto. Me hubiese gustado una semana más." E2: "Creo que estuvo bien que se hiciera hacia el final de curso, después del examen parcial porque es lo que siempre nos estresa más."
- La elaboración y presentación del póster (H8) ha sido muy bien acogida y el esfuerzo de síntesis les parecio útil. E4: "Al final con las presentaciones de cada grupo pudimos tener una visión amplia de todo." E2: "Aprendí que podías saber algo de cosas subjetivas de la gente y que, si se podía hacer con dietas vegetales, también se podía hacer con otros temas, como la política." Un alumno considera que la presentación del póster fue demasiado corta y que no

estaba claro a quién iba dirigido el póster. E5: "Solo mejoraría la dirección del proyecto. Tiene que ser más claro. ¿Para quién estamos presentando y qué tipo de póster estamos haciendo?"

La Tabla 1 resume los resultados esperados y los inesperados en relación con las hipótesis formuladas, que nos servirán para el rediseño del proyecto para el curso que viene. En relación con las cuestiones de investigación sobre el diseño y desarrollo real del proyecto, así como las consecuencias para el rediseño del curso que viene, destacamos los siguientes aspectos que consideramos han favorecido su desarrollo y las consecuencias que se desprenden. Muchos de estos aspectos son clave en la gestión de un REI tal como se han puesto en evidencia en otros trabajos (Bosch, 2018), pero encuentran aquí una especificidad propia en relación con el trabajo estadístico de análisis de datos y las condiciones particulares de su implementación.

En relación con las cuestiones de investigación sobre el diseño y desarrollo real del proyecto, así como las consecuencias para el rediseño del curso que viene, destacamos los siguientes aspectos que consideramos han favorecido su desarrollo y las consecuencias que se desprenden. Muchos de estos aspectos son clave en la gestión de un REI tal como se han puesto en evidencia en otros trabajos (Bosch, 2018), pero encuentran aquí una especificidad propia en relación con el trabajo estadístico de análisis de datos y las condiciones particulares de su implementación.

Tabla 1. Resumen de resultados esperados e inesperados en relación con las hipótesis

Resultados esperados / Hipótesis confirmadas	*Resultados inesperados / Hipótesis rechazadas*
El objetivo del proyecto no se formuló bien, aunque el tema fuera interesante y digno de análisis (H1)	Los estudiantes encuestados consideran que la recogida de datos fue realizada en buenas condiciones (H2)
Las sesiones de análisis de la estructura del cuestionario no se organizaron bien (H3)	El trabajo en equipo se hizo de forma colaborativa, pero hubo algunas dificultades debido a la estructura de la encuesta y a los errores de los estudiantes durante los análisis (H5)
El trabajo previo del curso aportó las herramientas necesarias para el desarrollo del proyecto (H4)	
El informe intermedio y la guía aportada por las profesoras fueron productivos (H6)	La ejecución del proyecto al final del semestre fue aprobada por los estudiantes e incluso se apreció que la mayor parte del trabajo se realizaba en las clases, lo que significaba un alivio para el estudio de los exámenes de otras asignaturas (H7)
La sesión final de pósteres cumplió su propósito (H8)	

Cuestión generatriz del REI y respuesta final. El tema elegido sobre las motivaciones y comportamientos de veganos y vegetarianos era real, actual e interesante para los estudiantes. Además, el resultado de los análisis era importante, si no para ellos, sí para el equipo de marketing que les encargó el estudio. El error fue no dar más protagonismo al equipo de marketing en la presentación y recepción del estudio para que los estudiantes pudieran plantearles las preguntas que les iban surgiendo. En general, la cuestión generatriz, el tipo de respuesta que se espera y su destino – a quién va dirigida y lo que se hará con ella –, deben ser enunciados cuidadosamente, evitando posibles malentendidos iniciales. Además, el hecho de utilizar un cuestionario ya diseñado, requería presentar bien el objetivo que perseguía y el porqué de su diseño. En positivo, consideramos muy acertada la presentación de los resultados finales en la sesión de pósteres, que obligó a los estudiantes a resumir sus resultados, resaltar sus principales contribuciones y difundirlos tanto al equipo de marketing como a otros profesores del centro.

Recogida de datos. Es bien sabido en el ámbito de la estadística (Batanero et al., 2013) que la recopilación de datos es una parte del estudio que puede parecer automática pero que resulta muy desafiante. Requiere por lo tanto una atención especial y debe ser guiada por el profesor-director de

proyecto, formando parte del mismo. Aquí se dejó un poco demasiado a cargo de los propios estudiantes, sin pedirles cuentas sobre el procedimiento seguido y sus consecuencias.

El REI y la asignatura. Es evidente en cuanto a la integración de los REI en la organización general de la asignatura que esta debe estar en armonía con el proyecto y viceversa. La estrategia seguida aquí es que el proyecto aparezca como el objetivo final del curso, la culminación práctica del trabajo realizado. Las respuestas de los estudiantes y nuestra propia vivencia muestran que las actividades del curso fueron una buena preparación para el trabajo del proyecto y que este permitió dar mayor sentido y pertinencia a las herramientas y conocimientos introducidos. Nuestras dudas sobre la pertinencia de programar el proyecto para final de curso o en paralelo con los casos de estudio quedaron disipadas, puesto que los estudiantes fueron unánimes sobre este punto.

Dispositivos didácticos. Si el proyecto se hace principalmente en equipo, es importante que este trabajo *en grupos* forme parte de la organización didáctica del curso, por ejemplo, aportando a los estudiantes dispositivos para la gestión de equipos o incluso (como fue en nuestro caso) exigir durante el curso entregas cortas por equipos, lo que fomenta la independencia y la sinergia cooperativa de los estudiantes. De todos modos, tal vez convendría que la gestión de los equipos formara parte de los informes que los estudiantes deben entregar regularmente, siguiendo la propuesta de Florensa (2018). Los *informes intermedios* durante el proyecto ayudaron a los estudiantes a mantener el ritmo de trabajo y reducir la probabilidad de que ciertos equipos pierdan el rumbo, pero también como puesta en común de resultados en gran grupo y para ayudar al profesor a retomar las riendas en algunos aspectos determinantes. En cuanto a la *evaluación*, en el REI piloto que presentamos esta se hizo de forma demasiado informal. En vistas a la experiencia vivida, consideramos importante estructurar mejor las sesiones de trabajo en grupo durante las clases, así como las consultas al profesorado, integrándolas en el sistema de evaluación, junto con el informe intermedio y el póster final.

Rol del profesorado. El hecho que los profesores participen en el proyecto desde la misma posición que los estudiantes en cuanto a su conocimiento del problema y cuestionario, puede resultar más una ayuda que una limitación en la gestión del recorrido. Descubrir conjuntamente con los estudiantes el interés de sus propios resultados es una experiencia formativa innegable para todos. Es importante también que la exposición final de los resultados se dirija a un público exterior al grupo clase (estudiantes y profesores), en coherencia con el origen y destino de la cuestión generatriz.

OBSERVACIONES FINALES

Hemos empezado hablando de la enseñanza por proyectos en el ámbito de la estadística y la propuesta de los REI por parte de la TAD que ofrece un marco para el diseño y análisis de propuestas de enseñanza más acordes con el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013). Tiene sentido preguntarnos qué puede aportar la propuesta de los REI a la implementación de una enseñanza de la estadística basada en proyectos. En la breve experimentación piloto que acabamos de presentar, podemos señalar los aportes siguientes. En primer lugar, la propuesta de los REI no se presenta como algo aislado, como un apéndice que se añadiría a una organización tradicional de la asignatura. Aunque el proyecto piloto que presentamos tuviera lugar al final de curso, podemos pensar que, en cierto sentido, el REI lo constituye toda la asignatura, donde, en la estrategia que hemos elegido, el "estudio" antecede en gran parte a la "investigación", aunque siga habiendo investigación en el estudio de casos que antecede al proyecto final, y estudio en la realización del proyecto. De todos modos, consideramos que el equilibrio entre estudio e investigación podría estar más repartido y que, en particular, podría haber habido más "estudio" en la realización del proyecto: por ejemplo, exigir a los estudiantes que se informaran más sobre las dietas vegetales o incluir en los análisis alguna herramienta estadística nueva (por ejemplo, el análisis de clústeres o los gráficos tipo "facet-grid" para analizar relaciones entre 3 o más variables). En segundo lugar, la propuesta de los REI nos recuerda constantemente que la cuestión generatriz debe guiar siempre el estudio y que, en todo momento, el uso de tal o cual conocimiento (aquí herramienta estadística) debe aparecer como un

medio para obtener resultados interesantes para el proyecto. No importa cuán elemental o sofisticado es el análisis o conocimiento estadístico utilizado, sino el tipo de cuestión que uno se plantea y la repuesta que obtiene. Por ejemplo, en el proyecto piloto se valoró positivamente la iniciativa de un equipo de estudiantes de analizar tickets de la compra de familias no vegetarianas para determinar el porcentaje del gasto total que representa la carne y el pescado, como respuesta a la pregunta de si mantener una dieta vegetal es más caro o no que una omnívora. También se valoró que algunos grupos de estudiantes decidieran recodificar algunas de las variables del cuestionario para poder generar nuevos constructos y poder así responder a las cuestiones que consideraban más pertinentes. Finalmente, y este es para nosotros un problema abierto, los REI proponen que sea el grupo clase en su conjunto el que aborde el estudio de la cuestión generatriz, y no cada uno de los alumnos individualmente. En nuestro caso, la organización del REI se basa en el trabajo en equipos, pero no sabemos resolver bien la capitalización de los resultados de los distintos equipos para construir una respuesta común única para toda la clase. Quedará como uno de los objetivos de la próxima etapa de nuestra investigación.

Referencias

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 797–810.

Barquero, B. y Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. In *Task Design in Mathematics Education* (pp. 249–272).

Batanero Bernabeu, M., Díaz Batanero, C., Contreras García, J. y Roa Guzmán, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, (83), 7–18.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. *International Congress of Mathematicians*, *3*, 4001–4022.

Carver, R., College, S., Everson, M. y Ohio, T. (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction Guidelines for Assessment and Instruction Guidelines for Assessment and Instruction Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE)*. (July), 1–141.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 61–1.

Florensa, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and in teacher education*. Tesis doctoral. Universitat Ramon Llull.

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, (15), 75–94.

Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos. *Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 173–180.

Lucas, C. (2015) *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.* Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Parra, V. y Otero, M. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las "dialécticas." *Educacion Matematica*, *29*(3), 9–49.

Quéré, P. V. (2019). *Les mathématiques dans la formation des ingénieurs et sur leur lieu de travail : études et propositions (cas de la France).* Tesis doctoral. Université de Brest (Francia).

Spence, D. J., Bailey, B. y Sharp, J. L. (2017). The impact of student-directed projects in introductory statistics. *Statistics Education Research Journal 16*(1), 240-261.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223–248.

GESTIÓN DE NORMAS QUE REGULAN EL PASO DE LA CONJETURA AL TEOREMA EN UN CURSO DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Management of the norms governing the transition from conjecture to theorem in a course on the geometry of space

Molina, O.[a], Font, V.[b], Pino-Fan, L.[c]

[a]Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), [b]Universidad de Barcelona (España), [c]Universidad de Los Lagos (Chile)

Resumen

Nos preguntamos: ¿cómo el profesor promueve la instalación de normas que regularon el proceso mediante el cual una "conjetura se convierte en teorema" en un curso de geometría llevado a cabo en un aula de indagación basada en la argumentación? *Usando herramientas del Enfoque Ontosemiótico y el Modelo de Toulmin para la argumentación, analizamos sesiones de clase en las que estudiantes abordaron problemas de conjeturación y demostraron conjeturas, y el profesor dirigió puestas en común. Describimos acciones y procedimientos recurrentes que implican el uso de argumentos abductivos o analógicos, y que apuntan a la generación y cumplimiento de normas que regulan el proceso en el que ciertas conjeturas se convierten en teoremas. Describimos también acciones de gestión del profesor para promover tales acciones y procedimientos.*

Palabras clave: *normas, procedimientos y acciones que involucran argumentos informales, acciones de gestión, proceso* "*conjetura se convierte en teorema*"*, geometría 3D*

Abstract

In this paper, we asked: How did the teacher encourage the instauration of norms about statement-becomes-theorem process in geometry course conducted in an argumentation‐based inquiry classroom? Using elements of the didactical analysis proposed by Onto-Semiotic Approach (OSA) and Toulmin's Model for argumentation, we analyze episodes of different class sessions when student addressed a conjecturing-problem and teacher managed whole class activities. Recurrence actions and procedures that involve informal arguments (abductive, analogical) and aiming at the fulfilment of certain norms relative to statement-becomes-theorem process are presented. Teacher's management actions to promote such actions and procedures are described.

Keywords: *norms, actions and procedures that involve informal arguments, management actions, statement-becomes-theorem process, 3D geometry*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

En nuestro estudio, grupos de estudiantes abordan problemas de conjeturación en los que deben usar un Entorno de la Geometría Dinámica (EGD). Este tipo de problemas pide explícitamente establecer una conjetura que exprese las relaciones de dependencia entre los elementos o propiedades de los objetos involucrados en la situación luego de realizar exploraciones (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). El desarrollo de prácticas en aulas con estas características requiere que la actividad se focalice en la producción de los estudiantes, y que profesores y estudiantes construyan colectivamente normas (sociales y sociomatemáticas) que regulen y apoyen estas prácticas (Yackel & Cobb, 1996). Ejemplos de normas sociales son: (i) escuchar activamente, tomar riesgos intelectuales (es decir, compartir ideas incompletas) y construir sobre las ideas de los demás (Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2015); (ii) dar solución a una tarea es responsabilidad de los estudiantes; la autoría del descubrimiento debe ser mencionada por el profesor o los compañeros para motivar a los estudian-

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2021). Gestión de normas que regulan el paso de la conjetura al teorema en un curso de geometría del espacio. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 425 – 432). Valencia: SEIEM.

tes (Assis, Godino, & Frade, 2012). Ejemplos de normas sociomatemáticas son: (i) investigar en matemáticas implica resolver problemas de manera creativa; los argumentos deben basarse en propiedades de objetos matemáticos (Partanen & Kaasila, 2014); las tareas sugeridas por el profesor deben conducir a la exploración o a la formulación de conjeturas (Assis, Godino, & Frade, 2012).

Son menos usuales estudios sobre la gestión que ejecuta un profesor para promover la instalación de normas. En sus estudios, Yackel y colegas precisan que la gestión del profesor consiste en guiar o redirigir las conversaciones entre los estudiantes con preguntas que susciten argumentos y proporcionar elementos de un argumento que se omiten o están implícitos –datos o garantías– (Yackel & Cobb, 1996; Yackel, 2002). Makar, Bakker, & Ben-Zvi (2015) son más precisos, indicando que las estrategias del profesor incluyen: usar carteles mostrando expectativas, recordar las normas frecuentemente, resaltar acciones ejemplares de los estudiantes, modelar expectativas con sus actos, y proveer tarea que promuevan prácticas que deben ser reguladas por las normas.

Aunque varios estudios sobre aulas de este tipo coinciden en ciertas normas, no hay muchos estudios que ilustren prácticas o procedimientos específicos que un profesor se propone instalar durante el proceso en que una conjetura se convierte en teorema en cursos de geometría 3D, más aún en contextos universitarios (Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017). La información recogida para el estudio permite inferir que: (i) existen prácticas y procedimientos concretos que apuntan al establecimiento de normas, (ii) la profesora lleva a cabo acciones deliberadas de gestión para promoverlas, y (iii) argumentos no deductivos (analógicos o abductivos) está relacionados con estos aspectos.

La pregunta de investigación que guía el estudio es: ¿cómo el profesor promueve la instalación de normas que regularon el proceso mediante el cual una "conjetura se convierte en teorema" en un curso de geometría llevado a cabo en un aula de indagación basada en la argumentación? Consideramos que la instalación de una norma se promueve si se especifican y ejecutan con frecuencia algunas prácticas y procedimientos destinados al cumplimiento de la norma. Por lo tanto, dicha pregunta puede especificarse en las siguientes: ¿qué prácticas y procedimientos recurrentes fomentó el profesor para promover el cumplimento de estas normas y cómo lo hizo? ¿Cómo se relacionaron diferentes tipos de argumentos con las posibles acciones recurrentes? Abordarlas, nos permitió proporcionar aspectos (procedimientos y acciones de gestión) sobre normas de un aula de investigación basada en la argumentación; en este sentido, ilustrar nuevos elementos sobre *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos* (Font, Breda, Giacomone, & Godino, 2018) al respecto.

MARCO DE REFERENCIA

Siguiendo el Enfoque Ontosemiótico (EOS), asumimos que una *práctica matemática* es un conjunto de ejecuciones (acciones) para resolver problemas matemáticos, y comunicar, validar o generalizar soluciones. La resolución de un problema requiere una actividad matemática caracterizada por objetos y procesos (Godino, Batanero y Font, 2019). En el presente trabajo nos interesan dos tipos de objetos, los procedimientos (conjunto de pasos a seguir -si se quiere, formulación verbal u oral de ese conjunto de pasos-) y los argumentos (nuestra postura al respecto se presentará más adelante), particularmente cuando emergen del proceso (entendido como secuencia de prácticas) en el que una conjetura se convierte en teorema. La conceptualización de los constructos *proceso*, *práctica* y *procedimiento* implica un vínculo natural entre estos: un *proceso* es un conjunto de prácticas y una *práctica* es un conjunto de ejecuciones (acciones) cuando se sigue un *procedimiento*; una acción es la ejecución de un paso del procedimiento. En algunas aulas, a veces se formula un procedimiento estandarizado y emerge la práctica asociada (los pasos son ejecutados); en otras, la práctica emerge sin que el procedimiento asociado haya sido formulado, aun cuando estas hayan sido recurrentes.

Tanto las prácticas matemáticas como el proceso de instrucción están regulados por normas (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009): Normas epistémicas (o sociomatemáticas, regulan las prácticas y contenidos matemáticos en correspondencia con el discurso matemático que es posible desarrollar en una institución), normas mediacionales (regulan los recursos -temporales o artefactos-

utilizados en las prácticas), normas interaccionales (o sociales, regulan los modos de interacción entre las personas involucradas en la práctica o proceso instructivo), normas ecológicas (aspectos externos -directrices curriculares, políticas educativas- que condicionan prácticas en el aula). Es necesario aclarar que asumimos que las normas regulan una práctica cuando las acciones que la constituyen apuntan al cumplimiento de esas normas. Nos centramos en los tipos de normas que regulan las prácticas en el aula que implican un proceso de enunciado convertido en teorema; para este caso, las prácticas, los procedimientos y otras normas, surgen en dos situaciones concretas en las que se produce este proceso: cuando se aborda un problema con el EGD y cuando se demuestra la conjetura enunciada como solución. En la Tabla 1 de la sección de Metodología se ofrecen ejemplos de normas tipificadas, las cuales regulan procedimientos que a su vez regulan prácticas.

Argumento y argumentación

Dado que nos proponemos ilustrar la forma en que diferentes tipos de argumentos se relacionan con asuntos normativos, es conveniente especificar una conceptualización al respecto. Existe un acuerdo en considerar la argumentación como un proceso llevado a cabo por un individuo o un grupo para convencer a otros de una posición adoptada (aceptación o rechazo) con respecto a una determinada aserción o acción (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016). El argumento es el producto de este proceso (Molina, Pino-Fan, & Font, 2019). Utilizamos el Modelo básico de Toulmin (Toulmin, 2003) para hacer operativa esta conceptualización en una situación específica (e.g., hacer una prueba o resolver un problema de conjeturación). En este modelo, un argumento incluye tres elementos: la afirmación del orador (A), el conjunto de datos (D) que respaldan la afirmación A, y la garantía (G) o la regla de inferencia, que relaciona los datos con la afirmación. El modelo es útil para especificar diferentes tipos de argumentos según la forma en que se relacionan los tres elementos (Pedemonte, 2007): La deducción es la inferencia de A a partir de un D y una G conocidos. La abducción es la inferencia de D a partir de un hecho observado A que permite aplicar una G evocada o descubierta que justifica el paso de D a A. La inducción es la inferencia de una G a partir de algunos casos de D en los que se observa un patrón de regularidad A. La analogía parte de dos dominios S (un dominio conocido) y O (un dominio menos conocido) que son comparables mediante la proposición *p*' *es a q*' *como p es a q* (G). Sean los datos (D): *p*, *q* en S y *p*', *q*' en O; *p*', *q*' respectivamente comparables con *p*, *q* y una relación entre *p*, *q* [R(*p*, *q*)] válida en S. Entonces [R(*p*', *q*')] puede inferirse como posiblemente válida en O (A). En la Figura 1 se muestran diagramas para cada tipo de argumento usando el Modelo de Toulmin. Los rectángulos de línea gruesa indican lo que se infiere; los de líneas discontinuas indican que la inferencia es probable.

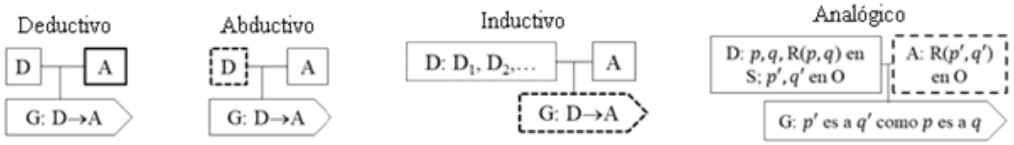


Figura 1. Diagramas para cada tipo de argumento

Con lo anterior, tenemos un contexto para conceptualizar sobre *teorema* y *demostración*. Un *teorema* es un conjunto de tres elementos: enunciado, demostración y sistema teórico (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997). Una *demostración* es un tipo de argumento, compuesto por uno o varios argumentos deductivos conectados lógicamente y cuyas garantías son elementos de un sistema teórico (Stylianides, Stylianides y Weber, 2017).

METODOLOGÍA

El estudio de caso se centra en un curso de geometría euclidiana en 2D y 3D que se imparte en un programa de formación de profesores en Colombia. Este curso fue seleccionado porque la profesora está particularmente interesada en promover en el aula la argumentación. Normas de este curso (características de aula de investigación basada en la argumentación) son: i) Se utilizan problemas de conjeturación para promover la actividad y el contenido matemático. (ii) Los alumnos deben abor-

dar los problemas en pequeños grupos (3-4 alumnos) utilizando Entornos de Geometría Dinámica –EGD– (Cabri 3D). Los grupos (10 en total, cada uno de tres estudiantes) siempre fueron constituidos por los mismos alumnos; esto les permitió la oportunidad de conocerse de tal manera que su comportamiento fue relativamente estable a lo largo del curso. (iii) Los estudiantes deben describir y compartir sus producciones. (iv) Los estudiantes deben argumentar las conjeturas propuestas como solución al problema. (v) El profesor es responsable de validar e institucionalizar producciones de los estudiantes luego de un proceso de discusión y decantación. Vale decir que la mayoría de los estudiantes tenían experiencia previa con aulas de estas características pues habían tomado el curso de Geometría 2D con la misma profesora.

Para la obtención de la información se utilizaron dos técnicas: la observación no participante (26 sesiones, cada una de dos horas) a fin de acercarse a la información en un ambiente natural (Kelly & Lesh, 2000) y entrevistas semiestructuradas a la profesora y estudiantes para completar información. La primera de estas técnicas se realizó con apoyo de tres cámaras de video (una dirigida a la profesora, otra que tomaba toda el aula, y una centrada en grupos cuya producción se consideraba relevante). Para este reporte se toman como datos la trascripción de cuatro episodios de tres sesiones diferentes de clase (descripciones breves de estos se presentan en la primera parte de la sección de resultados) y las respuestas de la profesora a la entrevista. Fueron escogidos por cuanto ilustran suficientemente cómo ciertas acciones de los estudiantes, no esperadas por la profesora, fueron legitimadas por ella y convertidas en prácticas recurrentes; todo como consecuencia de procurar cumplir con ciertas normas del curso. Los datos fueron analizados de forma descriptiva e interpretativa con base en los elementos del análisis didáctico propuesto por el EOS (Font, Planas, & Godino, 2010), con énfasis en los análisis normativo e interaccional, necesarios para identificar normas y la gestión del profesor. Respecto a esto último, adicionalmente se tuvieron en cuenta las acciones propuesta por Makar, Bakker, & Ben-Zvi (2015). El Modelo de Toulmin (Toulmin, 2003) se usó para tipificar argumentos de la actividad matemática que tomó lugar en los episodios.

Como ejemplo, la Tabla 1 presenta normas (y su correspondiente procedimiento) de la situación *resolver problemas* del proceso *conjetura se convierte en teorema*, que habrían sido instaladas en el curso anterior y que serán consideradas en este escrito (otras se presentan en la ponencia). Estas fueron mencionadas por la profesora en la primera entrevista. Lo clasificado como procedimiento fue explicitado así por la profesora, en correspondencia tácita con nuestra conceptualización.

Tabla 1. Ejemplos de normas y procedimiento del curso de Geometría 2D

Norma mediacional	N1: El EGD debe ser usado como un entorno de exploración que permita resolver problemas de conjeturación.
Norma epistémica	N2: La(s) solución(es) de los problemas abiertos de conjeturación debe(n) ser enunciada(s) como una proposición condicional (llamada conjetura).
Procedimiento asociado	
1. Identificar las condiciones y la pregunta dados en el enunciado del problema 2. Usar el EGD para construir los objetos dados en las condiciones del problema. 3. Usar el EGD para hacer exploraciones que permitan responder la pregunta. 4. Formular conjeturas que expongan soluciones al problema. 5. Verificar la solución realizando una construcción que corresponda al antecedente de la conjetura y constatando empíricamente que este conduce a su consecuente. 6. Si la conjetura es incorrecta como resultado de la verificación repetir los pasos 3-5. 7. Hacer un reporte escrito de las producciones (procedimiento de construcción, exploración, conjetura).	

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Cuatro episodios y una entrevista son los datos de este reporte. A continuación, estos son descritos:

Episodio 1. Sesión 16 de Clase: La profesora planteó un problema de congruencia de triángulos que puede ser abordado en la geometría 2D y 3D. Utilizamos la actividad de un grupo de estudiantes

(Armando, Juan, Valentín) como dato. Su producción ilustra acciones que especifican pasos del procedimiento presentado en la Tabla 1. El enunciado del problema es el siguiente: Dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ congruentes. ¿Es posible determinar un punto *E* tal que Δ*ABE* y Δ*CDE* son congruentes?

Episodio 2. Sesión 17 de Clase. Adriana (de otro grupo) y Armando compartieron sus soluciones. La profesora legitima sus acciones las cuales involucran argumentos abductivos y analógicos. Se institucionalizan las conjeturas-solución (Conjetura 1[i]: Dados $\overline{AB}, \overline{CD} \subset \alpha$, α un plano, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}} = \{E\}$, entonces $\Delta CDE \cong \Delta ABE$. Conjetura 2: Dados $\overline{AB}, \overline{CD}$ no coplanares, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}} = m$, y $E \in m$, entonces $\Delta CDE \cong \Delta ABE$).

Episodio 3. Sesión 17 de Clase. Las demostraciones de las conjeturas son elaboradas entre estudiantes y profesora. Ella legitima acciones que involucran argumentos abductivos y analógicos que contribuyen en el proceso de la elaboración de las demostraciones respectivas.

Episodio 4. Sesión 21 de Clase. La profesora planteó otro problema (Dados cuatro puntos no coplanares. ¿Es posible determinar un punto *E* para que sea equidistante de los puntos dados?). Su expectativa era que los estudiantes hicieran acciones como las de la sesión 17. Varios grupos lo hicieron.

Entrevista 2. Al final del curso, la profesora fue entrevistada. Para este reporte, nos centramos en asuntos ocurridos en las sesiones 16 y 17. Dos de las preguntas fueron: (i) ¿Por qué es importante el estudio del objeto "plano mediador"? y (ii) ¿Cuáles acciones de gestión realiza para ayudar a los estudiantes a desarrollar prácticas recurrentes que apunten al cumplimiento de normas como las identificadas en los episodios? El propósito de la pregunta (i) fue determinar si la profesora quiso incentivar una analogía mediante la comparación de "mediatriz" con "plano mediador"; el de la (ii) fue determinar su nivel de conciencia de las acciones de gestión.

A continuación, Ilustramos con detalle lo sucedido en los dos primeros episodios y la entrevista.

Episodio 1. Actividad matemática grupo Armando-Juan-Valentín

Armando aborda el problema en el dominio de Geometría 3D ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ alabeados). En correspondencia con la norma de *usar EGD*, le pide a Juan (quien está a cargo del manejo de Cabri 3D) construir el plano perpendicular a los $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ por su punto medio (objeto que no había sido introducido en el curso) y hacer la intersección de esos planos. Dice que el piensa que "un punto en la recta de intersección de esos planos podría equidistar de los extremos de los segmentos". En correspondencia con la norma de *reportar la producción*, Valentín hace un reporte con el procedimiento de construcción propuesto y una conjetura como la número 2. Este reporte fue entregado a la profesora.

Mientras los reportes eran entregados a la profesora y los grupos dejaban el salón, Valentín le pregunta a Armando cómo se le había ocurrido esa idea de solución. Armando dice que "[…] primero lo hice en el plano [$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ coplanares] y usé las mediatrices de los segmentos AC y BD… que se intersecan en E". En correspondencia con la norma del curso *proveer argumentos formales*, estos estudiantes producen dos argumentos deductivos para validar esta solución: Armando dice "*E* es equidistante [de *A* y *C*, y *B* y *D*] por [definición de] mediatriz" y Valentín dice: "Y entonces, nosotros tenemos los triángulos congruentes por [el teorema de congruencia] Lado-Lado-Lado". La Figura 1muestra tales argumentos usando el Modelo de Toulmin.

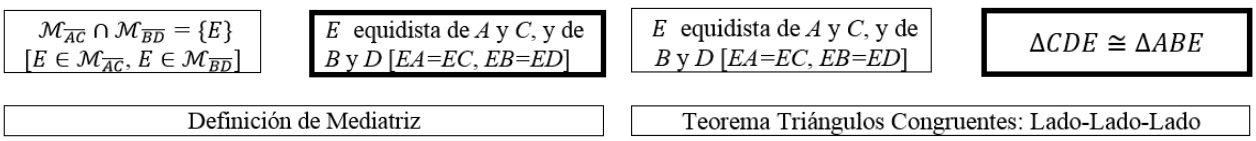


Figura 1. Argumentos deductivos para validar Δ*CDE*≅Δ*ABE*

El primer autor de este reporte le replantea a Armando la pregunta hecha por Valentín, con el propósito de precisar porqué la ocurrencia de su idea. Él dijo:

Armando: Porque yo tomé el curso de Cálculo en Varias Variables y allí el profesor nos dijo que el plano es al espacio como la recta es al plano. Entonces, la idea de usar el plano perpendicular se me ocurrió… mmm… en lugar de usar mediatriz, usamos esos planos.

Considerando la respuesta de Armando, identificamos el uso de la analogía *el plano es al espacio como la recta al plano* para resolver el problema en geometría 3D. Basados en ella, el supone que el plano perpendicular al segmento por su punto medio (plano mediador) resuelve el problema en el 3D como la mediatriz lo resuelve en el 2D. Un argumento por analogía fue producido tácitamente (Figura 2), algo que la profesora no esperaba. Consideramos que la acción de Armando sugiere una complementación al paso 3 del procedimiento relativo a N1 y N2, a saber:

Acción 3.1: Considerar una analogía que relacione los dominios 2D y 3D para inferir una solución en el dominio 3D mediante un argumento analógico. Una solución en el dominio 2D es ya conocida. Los objetos análogos y la relación inferida en 3D harían parte de la conjetura.

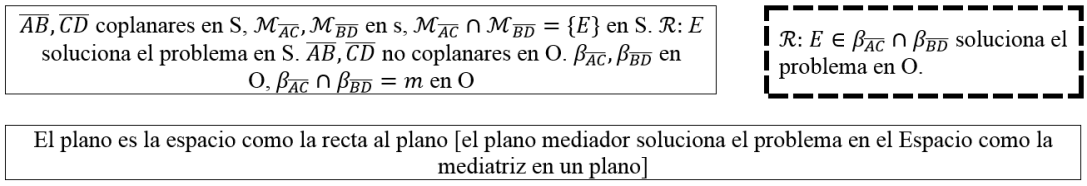


Figura 2. Argumento analógico para resolver el problema en el dominio de 3D

Episodios 2. Nuevas acciones son legitimadas

En la sesión 17, la profesora dirige la puesta en común sobre las soluciones propuestas; ya conocía su contenido pues las leyó previo al inicio de la clase. Pide a Adriana que exponga la producción de su grupo, la cual se corresponde con lo propuesto por Armando cuando los segmentos son coplanares. Enseguida, la profesora pide a un miembro del grupo de Armando que presente su solución; Armando toma el computador y proyecta a toda la clase su procedimiento; dice: "nuestra solución fue similar a la del grupo anterior [propuesta de Adriana] pero en el Espacio". Al terminar su intervención, enfatiza que usó un objeto que no hacen parte del sistema teórico del curso (plano perpendicular a un segmento). Seguida a la intervención de Armando, la profesora comenta:

1. Prof. El problema está preguntado por la congruencia de triángulos. ¿Yo que haría? Tengo algunos criterios, busco construir ángulos o lados congruentes, por ejemplo. Ellos [grupo de Adriana] escogieron ese camino. Mejor dicho, el punto E debe generar segmentos congruentes… si busco segmentos congruentes, por ejemplo, si quiero que BE y DE sean congruentes, yo podría usar la mediatriz del segmento BD; igual con el segmento AC. Hemos insistido en esta estrategia de ir hacia atrás. Me sorprende que no la usen todos.
2. Prof. Esta solución [la propuesta de Armando] es exactamente la que ellos hicieron [señala al grupo de Adriana] pero en el Espacio… lo que es mediatriz en la solución del plano se convierte en un plano, con iguales características, en la solución de Armando… esa es una buena estrategia.

Con estas intervenciones, la profesora llevó a cabo acciones de gestión como las siguientes: (i) Pedir a los estudiantes exponer sus ideas para construir sobre ellas, reconociendo la autoría (al inicio de la sesión). (ii) Usar acciones de los estudiantes como ejemplares (intervención 2). (iii) Modelar expectativas con sus actos (intervención 1). Consideramos que estas acciones de gestión apuntaron a favorecer acciones que promueven las normas N1 y N2: Mediante la acción de gestión (ii), la profesora legitimó la Acción 3.1 emergida en el Episodio 1; mediante la acción de gestión (iii), ella explicitó una nueva acción asociada al paso 3 del procedimiento expuesto en la Tabla 1 (todo en el marco del abordaje de problemas que preguntan por condiciones suficientes para concluir una propiedad dada en el enunciado –como el Problema 1–):

Acción 3.2: Considerar un argumento abductivo cuya garantía pertenece al sistema teórico disponible, su aserción es la propiedad dada en el enunciado, y su inferencia (dato) es una condición rela-

cionada con las condiciones impuestas en el enunciado. Ese dato haría parte del antecedente de la conjetura. (La Figura 3 expone el argumento abductivo producido por la profesora para este caso].



Figura 3. Argumento abductivo para resolver el problema

Entrevista 2. Gestión de la profesora

La respuesta de la profesora a la pregunta (i) evidencia su interés por introducir el objeto *Plano Mediador* como una extensión "natural" [término empleado por ella] del objeto *Mediatriz*. En este sentido, lo que guio su actuar no fue cumplir con un currículo (norma ecológica) sino considerar amplitud de significados (norma epistémica). Pese a esto, ella no aludió explícitamente al uso de analogías para estudiar el objeto *Plano Mediador*. En lo que respecta a la segunda pregunta, ella explicitó las siguientes acciones de gestión que fomentan que ciertas acciones de los estudiantes sean recurrentes durante el proceso en el que una conjetura se convierte en el teorema: (i) Plantear problemas de conjeturación como metodología del curso; esto, dice ella "promueve la argumentación porque los estudiantes deben apoyar sus conjeturas y elaborar las demostraciones […] usando abducción o inducción". Y (ii) ilustrar (o modelar) el uso de tales argumentos cuando sea necesario. Vale decir que, aunque la profesora aludió a su acción de "evaluar las producciones de los estudiantes y tomar las interesantes como ejemplos", no fue consciente de una acción que, de hecho, ella ejecutó: legitimar el uso de argumentos analógicos para resolver problemas en el dominio 3D.

Discusión y conclusiones

Respondimos las preguntas que orientaron el estudio ilustrando acciones recurrentes (acciones 3.1 y 3.2) que apuntan al cumplimiento de normas (Tabla 1) presentes en el proceso en el que una conjetura se convierte en teorema en un curso de Geometría 3D; mostramos cómo dichas acciones involucran argumentos abductivos o analógicos. Así mismo, ilustramos competencias (acciones de gestión) del profesor que promueven tales acciones (precisando la propuesta de Makar, Bakker, y Ben-Zvi, 2015). Este escenario nos permitió ratificar que la gestión de un aula cuyo objetivo es el desarrollo de la argumentación es compleja. Coincidimos con Yackel (2002), y Stylianides, Stylianides, y Weber (2017) en que ello implica considerar conocimientos profundos sobre las matemáticas y la demostración. Sin embargo, el estudio nos deja ver que esta idea puede ser complementada, precisando piezas del conocimiento didáctico-matemático y competencias que debe desarrollar un profesor. Para el caso reportado, las competencias de la profesora no provenían de la improvisación natural con la que a veces se actúa; más bien, fueron producto de su conocimiento sobre aspectos de la Educación Matemática; ella tenía conocimiento sobre (i) normas que deberían ser consideradas para generar un aula de indagación; (ii) tipos de argumentos informales (específicamente, los abductivos), y su papel para explorar y producir demostraciones, y (iii) el papel que el DGE y los tipos de problemas pueden tener en los procesos de exploración (por ejemplo, provocar la producción de argumentos que apoyen una conjetura). Este escenario le permitió tener una interpretación adecuada de acciones de estudiantes que no había contemplado (utilizar argumentos analógicos), pero que, por su riqueza, legitimó y quiso hacerlas recurrentes. En suma, el estudio nos ha provisto de un insumo más para destacar la importancia del conocimiento y las competencias que sobre asuntos normativos debe tener el profesor (Font, Breda, Giacomone, & Godino, 2018), en este caso para regular el proceso en que una conjetura se convierte en teorema.

Referencias

Assis, A., Godino, J. D., & Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(2), 171–198.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*, 225–253.

Brousseau, G. (2002). The Didactical Contract: The Teacher, the Student and the Milieu. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Mathematics Education Library* (Vol. 19). Dordrecht: Springer.

Font, V., Breda, A., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García, & A. Bruno (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (págs. 23-38). Gijón: SEIEM.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59–76.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *for the learning of mathematics, 39*(1), 35-40.

Kelly, A., & Lesh, R. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. doi:https://doi.org/10.4324/9781410602725

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. *ZDM, 47*(7), 1107-1120. doi:https://doi.org/10.1007/s11858-015-0732-1

Mariotti, M., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen, *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for thePsychology of Mathematics Education* (Vol. 1, págs. 180-195). Lahti, Finland: PME.

Molina, O., Pino-Fan, L., & Font, V. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116. doi:https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Partanen, A., & Kaasila, R. (2014). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(4), 927-946. doi:https://doi.org/10.1007/s10763-014-9521-5

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41. doi:https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Stylianides, A., Bieda, K., & Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En A. Guitérrez, G. Leder, & P. Boero, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 315-352). Rotterdam: Sense Publishers.

Stylianides, G., Stylianides, A., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai, *First compendium for research in mathematics education.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments* (Actualización de 1 ed.). Cambridge: Cambridge University Press. doi:https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423–440. doi:https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(4)*, 458-477. doi:10.2307/749877

[i] Precisamos un asunto de notación: $\mathcal{M}_{XY}$ indica mediatriz del $\overline{XY}$. β_{XY} indica plano mediador de $\overline{XY}$.

UN AÑO DESPUÉS DE UN MÓDULO DE ENSEÑANZA: ANTICIPACIÓN DE RESPUESTAS DE PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES[1]

One year after a teaching module: Anticipation of solving measurement division problems with fractions

Montero, E.[a], Callejo, M. L.[b] y Valls, J.[b]

[a]Escuni Centro Universitario de Magisterio, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo estudiantes para maestro de primaria (EPM), que han participado un año antes en un módulo de enseñanza, anticipan tres respuestas de niños de primaria que se encuentren en diferentes etapas de la progresión de estrategias de Empson y Levi (2011) para la resolución de problemas de división medida con fracciones. Los participantes fueron 41 EPM que se encuentran en 4º año del Grado en Maestro en Educación Primaria en Escuni, centro universitario de magisterio, cuya metodología de trabajo está basada en favorecer procesos de autorregulación del aprendizaje. Los resultados muestran que el 78% de los EPM, un año después, han sido capaces de anticipar tres respuestas de al menos dos etapas de la progresión de estrategias. Posiblemente las características del diseño del módulo de enseñanza basado en procesos de autorregulación del aprendizaje han favorecido estos resultados.

Palabras clave: *anticipación, progresión de estrategias, autorregulación del aprendizaje, aprendizaje profundo*

Abstract

The aim of this research is to characterize how prospective primary teachers (PPT), who have participated in a teaching module a year earlier, anticipate three responses from elementary school children who are at different stages of a progression of solving strategies by Empson and Levi (2011) for measurement division problems with fractions. The participants were 41 PPT in 4th year of their Education Teaching Degree in Escuni, a University Centre where its work and organization methodology is based on promoting self-regulated learning. The results show that 78% of PPT, a year later, have been able to anticipate three responses corresponding to at least two stages of the progression of solving strategies. The design features of the teaching module based on self-regulated learning processes have possibly favored these results.

Keywords: *anticipation, progression of strategies, self-regulated learning, deep learning*

INTRODUCCIÓN

Anticipar, interpretar las respuestas de los estudiantes y tomar decisiones ante dichas respuestas (mirada profesional, Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010) forman parte de las tareas profesionales de los docentes. En la planificación de una actividad es conveniente que los docentes anticipen las respuestas que podrían dar los estudiantes, lo cual les permitiría planificar las preguntas que podrían hacer y qué variables didácticas de la tarea podrían modificar para superar sus dificultades o para plantearles situaciones más complejas. La importancia de anticipar ha sido puesta de manifiesto en el marco del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames, & Phelps, 2008) y de las

[1] La participación de M. Luz Callejo y Julia Valls en esta investigación se realiza a través del proyecto EDU2017-87411-R, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Gobierno de España.

Montero, E., Callejo, M. L. y Valls, J. (2021). Un año después de un módulo de enseñanza: anticipación de respuestas de problemas de división medida con fracciones. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 433 – 440). Valencia: SEIEM.

competencias que debe poner en juego el profesorado para tener en cuenta las ideas de los estudiantes (Smith & Stein, 2011). Por tanto, en la formación de futuros maestros la anticipación debe incluirse como una tarea profesional integrada en la planificación de la enseñanza.

Wilson, Sztajn, Edgington y Myers (2015) han mostrado cómo una progresión de aprendizaje sobre la equipartición ayudó a profesores en ejercicio a anticipar respuestas de estudiantes atendiendo a los niveles de competencia indicados en la progresión. De igual manera, Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo (2018) constataron que identificar la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango como avance conceptual (Key Developmental Understanding –KDU–, Simon, 2006) en la progresión de aprendizaje sobre el límite de una función en un punto, ayudó a los estudiantes para profesor de Secundaria a anticipar respuestas y a apoyar sus propuestas de enseñanza. Las progresiones de aprendizaje son "formas sucesivamente más sofisticadas de pensamiento sobre un tópico que pueden seguir los niños mientras aprenden e investigan un determinado tópico" (National Research Council, 2007, p. 214).

Son pocas las investigaciones realizadas en el ámbito de la formación inicial en el contexto del desarrollo de la mirada profesional que se hayan centrado en la forma en la que los futuros docentes anticipan posibles respuestas de los estudiantes (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Llinares, Fernández, & Sánchez-Matamoros, 2016; Montero & Callejo, 2019; Stahnke, Schueler, & Roesken-Winter, 2016), como una tarea profesional integrada en la planificación de la enseñanza.

La puesta en práctica de programas para la formación de maestros que faciliten el desarrollo de un aprendizaje profundo puede ser efectiva a la hora de formar EPM con un tipo de capacidades en la resolución de problemas que sostengan su autoeficacia en la tarea docente (Gordon & Debus, 2002). La autorregulación del aprendizaje se ha mostrado como una de las mejores variables predictoras del rendimiento académico (Hernández & Camargo, 2017), por lo que el desarrollo de módulos de enseñanza basados en fomentar procesos de autorregulación (Bandura, 1997; Zimmerman, 1998) y el aprendizaje profundo pueden favorecer que las competencias profesionales desarrolladas por los EPM permanezcan un año después del periodo de instrucción.

En este contexto el objetivo de esta investigación es caracterizar cómo EPM, que han participado un año antes en un módulo de enseñanza, anticipan tres respuestas de niños de primaria que se encuentren en diferentes etapas de la progresión de estrategias de problemas de división medida con fracciones.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación se ha tomado como marco teórico la progresión de aprendizaje de estrategias de problemas de grupos múltiples de división-medida con fracciones de Empson y Levi (2011) (Figura 1).

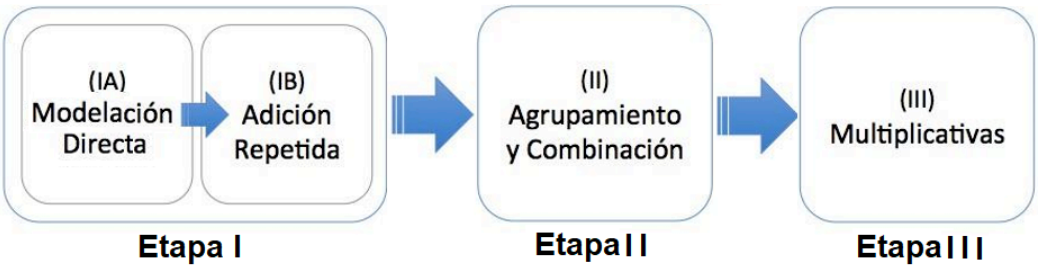


Figura 1. Progresión de estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida (Empson y Levi, 2011, p. 62)

Esta progresión consta de tres etapas, en las dos primeras se utilizan estrategias aditivas y en la tercera estrategias multiplicativas:

Etapa I: Modelado directo y adición repetida. Se representa cada unidad fraccionaria individualmente. En el modelado directo los niños representan de forma icónica todas las cantidades en el problema y cuentan o suman (y en ocasiones restan) hasta llegar a la respuesta final. Por ejemplo, en el problema (Figura 2):

> *Estamos preparando brochetas de fruta y hemos decidido colocar 3/8 de naranja en cada brocheta. Si tenemos 12 naranjas, ¿cuántas brochetas de fruta podremos hacer?*

Una forma de implementar esta estrategia es dibujar las 12 naranjas, dividir cada una en octavos consiguiendo 96 octavos. A continuación, se hacen grupos de 3/8 que se usan en cada brocheta hasta completar los 96 octavos; como hay 32 grupos de 3/8 la solución es 32 brochetas de fruta.

La estrategia de adición repetida se diferencia de la modelización directa en que las fracciones se representan de manera simbólica, con números fraccionarios, en lugar de con dibujos.

Etapa II: Agrupamientos y combinaciones. En la segunda etapa también se utilizan estrategias aditivas, pero no se representa cada unidad fraccionaria, sino que se agrupan y se cuentan conjuntos de fracciones con la idea de que con ese agrupamiento se tenga un número entero y así poder utilizar estos agrupamientos para contar el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.). Por ejemplo, en el problema de las brochetas se agrupa ocho veces 3/8 y se tiene 3/8 + 3/8 + 3/8 + 3/8+ 3/8 + 3/8 + 3/8 + 3/8 que son 3 naranjas que dan para 8 brochetas; 3/8 + 3/8 + 3/8 + 3/8+ 3/8 + 3/8 + 3/8 + 3/8 son otras 3 naranjas más que dan para 8 brochetas más; de nuevo, con 3 naranjas que dan para 8 brochetas y otras 3 que dan para otras 8 brochetas. En total con 12 naranjas se pueden preparar 32 brochetas.

*Etapa III: Estrategias multiplicativas***.** En esta etapa se relaciona el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la relación de proporcionalidad ($f(ax)=af(x)$), un proceso constructivo combinando las relaciones de proporcionalidad y la suma ($f(ax+bx) = af(x)+bf(x)$), o directamente la multiplicación; en este último caso se interpreta el significado de la fracción como relación multiplicativa. Por ejemplo: 3/8 significa que con 3 naranjas se pueden hacer 8 brochetas; si se tienen 12 naranjas (el cuádruple), entonces podremos hacer 4 x 8 = 32 brochetas (el cuádruple de brochetas).

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación son 41 EPM que cursaron la asignatura "Matemáticas y su Didáctica II" de 3er curso del Grado en Maestro en Educación Primaria (quinto semestre) durante el curso académico 2018-2019, en Escuni. En este Centro Universitario el modelo de aprendizaje de los EPM está enfocado a favorecer procesos de autorregulación del aprendizaje en los estudiantes. En esta asignatura se diseñó un módulo de enseñanza con el objetivo de que adquirieran la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de Primaria cuando resuelven problemas de división-medida con fracciones apoyándose en la progresión de estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones propuesta por Empson y Levi (2011) (Montero & Callejo, 2019). Los EPM trabajaron en pequeños grupos las distintas tareas que se plantearon en el módulo de enseñanza. En el curso 2019-2020 los participantes se encuentran en 4º año del Grado en Maestro en Educación Primaria (séptimo semestre).

Instrumento de recogida de datos

En el curso 2019-2020, al final del séptimo cuatrimestre, en una clase ordinaria de la asignatura "Matemáticas y su didáctica III" de 4º curso del grado en Maestro en Educación Primaria se pidió a los alumnos presentes que resolvieran una tarea (Figura 2), sin darles información ni material de apoyo.

Anticipa las resoluciones que podrían hacer 3 niños que se encontraran en 3 etapas diferentes de la progresión de estrategias según Empson y Levi (2011) al siguiente problema:

Estamos preparando brochetas de fruta y hemos decidido colocar 3/8 de naranja en cada brocheta. Si tenemos 12 naranjas, ¿cuántas brochetas de fruta podremos hacer?

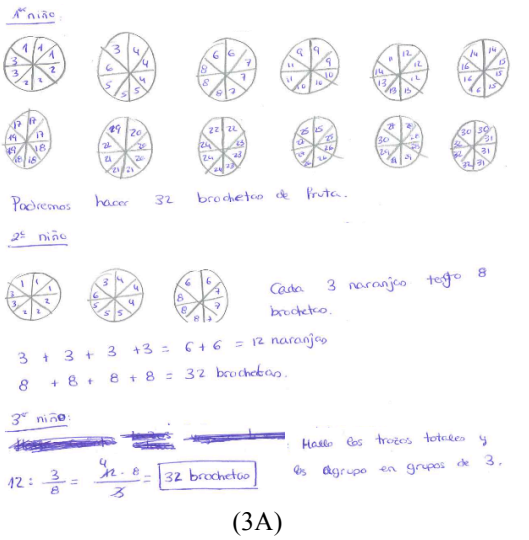
Figura 2. Tarea propuesta a los EPM

Los datos de esta investigación son las respuestas de los EPM a la tarea propuesta.

Análisis de datos

Para el análisis cualitativo de los datos hemos tenido en cuenta el número de estrategias diferentes que han anticipado los EPM y las etapas de la progresión en que se encuentran estas estrategias: Etapa I (E1): modelización directa (IA) y adición repetida (IB); Etapa II (E2): agrupamiento y combinaciones (II); y Etapa III (E3): multiplicativas (III), en el marco de la progresión de estrategias de Empson y Levi (2011). Solamente se han considerado aquellas respuestas que correspondían a las tres etapas de esta progresión y sus cuatro estrategias.

Por ejemplo, el EPM-21 anticipa una respuesta para el niño 1 con la estrategia "modelización directa" (IA) dibujando 12 círculos divididos en ocho partes iguales (octavos), agrupándolos de tres en tres y contando cuántos grupos puede hacer con ellos (brochetas). Para el niño 2, anticipa una respuesta con la estrategia "agrupamiento y combinaciones" (II) dibujando tres círculos divididos en octavos que agrupa de tres en tres (8 brochetas) e indica que con "tres naranjas tengo ocho brochetas" para a continuación sumar 3 + 3 + 3 + 3 = 6 + 6 = 12 naranjas y 8 + 8 + 8 + 8 = 32 brochetas. La anticipación para el tercer niño no ha sido considerada por haber empleado el algoritmo de la división que no estaba contemplado en la progresión de estrategias (Figura 3A). La respuesta de EPM-21 se ha codificado como "2 (E1-E2)" porque anticipa dos estrategias diferentes que corresponden a las dos primeras etapas de la progresión. El análisis de las respuestas de todos los participantes se organizó en una hoja de cálculo, parte de la cual se puede ver en Figura 3B.



(3A)

IDENTIFICADOR	+1año niño1	+1año niño2	+1año niño3	+1 año Cuántas etapas
EPM-31	IA-mal	IB-mal	III-mal	0
EPM-13	IA-mal			0
EPM-17	IB-mal	IA-mal		0
EPM-30	IA	IB-mal		1 (E1)
EPM-10	IA	IA	Algoritmo	2 (E1)
EPM-46	IA	IB	F. Operador	2 (E1)
EPM-26	IA	IB	F. Operador	2 (E1)
EPM-21	IA	II	Algoritmo	2 (E1-E2)
EPM-34	IA	II	F. Operador	2 (E1-E2)
EPM-61	IA	III	F. Operador	2 (E1-E3)
EPM-22	IA	III	F. Operador	2 (E1-E3)
EPM-39	F. Operador	II	III	2 (E2-E3)
EPM-29	IA	IB	II	3 (E1-E2)
EPM-59	IA	IB	III	3 (E1-E3)
EPM-54	IA	III	IB	3 (E1-E3)
EPM-55	IB	IA	III	3 (E1-E3)
EPM-56	II	II	III	3 (E2-E3)
EPM-42	IA	II	III	3 (E1-E2-E3)
EPM-37	IA	II	III	3 (E1-E2-E3)
EPM-47	III	IA	II	3 (E1-E2-E3)
EPM-33	IA	II	III	3 (E1-E2-E3)
EPM-53	II	IA	III	3 (E1-E2-E3)
EPM-41	IA	II	III	3 (E1-E2-E3)
EPM-60	II	III	IA	3 (E1-E2-E3)
EPM-57	IA	II	III	3 (E1-E2-E3)
EPM-09	IA	II	III	3 (E1-E2-E3)

(3B)

Figura 3. Respuesta del estudiante con identificador EPM-21 (3A) y codificación de respuestas de un grupo de EPM (3B)

Este análisis ha dado lugar a cuatro categorías en función del número de etapas diferentes de la progresión de estrategias usadas por los EPM para anticipar respuestas de niños. Estas categorías se describen en la sección de resultados.

RESULTADOS

Esta sección se ha organizado en cuatro apartados que corresponden a cuatro formas de anticipar respuestas de niños de primaria.

G0. EPM que no anticipan respuestas en el marco de la progresión de estrategias

En esta categoría se encuentran tres EPM que anticipan respuestas que muestran rasgos de alguna de las estrategias de la progresión, pero sin que ello les permita dar respuesta a la pregunta planteada.

Por ejemplo, EPM-31 (Figura 4) en su anticipación para el niño 1 muestra un rasgo de la estrategia "modelización directa" ya que dibuja varios rectángulos (cinco en lugar de 12) divididos en octavos. En cada rectángulo solamente subraya tres octavos. Esta modelización no permite dar respuesta a la pregunta planteada. Para el niño 2 comienza una estrategia de adición repetida que deja inconclusa porque se para cuando llega a 12/8. Para el niño 3 hace una regla de tres mal planteada.

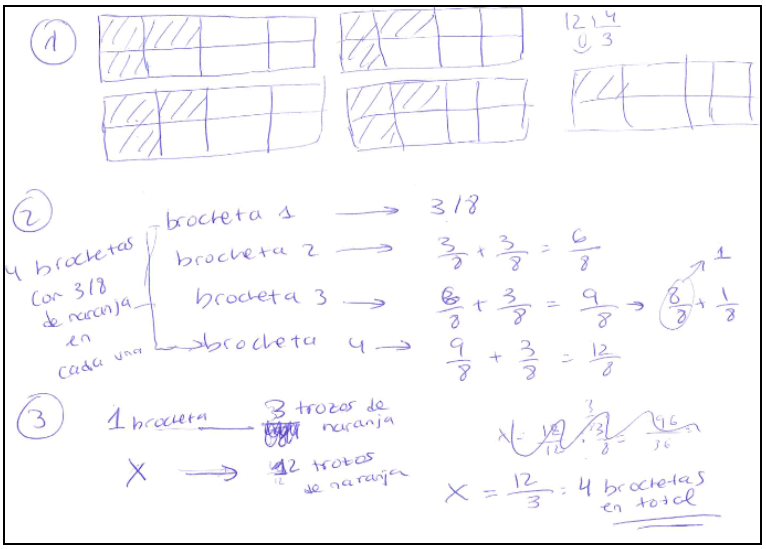


Figura 4. Respuesta de EPM-31

G1. EPM que anticipan respuestas usando estrategias de una sola etapa

En esta categoría se encuentran seis EPM que anticipan dos respuestas de niños de primaria mediante dos estrategias de la misma etapa (cuatro EPM anticipan de la E1, un EPM de la E2 y un EPM de la E3) y la tercera anticipación mediante alguna estrategia que no aparece en la progresión (algoritmo de la división, regla de tres…).

Por ejemplo, EPM-46 (Figura 5) en su anticipación para el niño 1 utiliza la estrategia "modelización directa" y para el niño 2 utiliza "adición repetida", ambas pertenecientes a la misma etapa I. Para el niño 3, utiliza una estrategia que no aparece en la progresión. Calcula el número de porciones totales que se pueden obtener con las 12 naranjas divididas en octavos (12x8 = 96 porciones) para posteriormente dividirlas entre tres que se colocan en cada brocheta (96/3 = 32 brochetas).

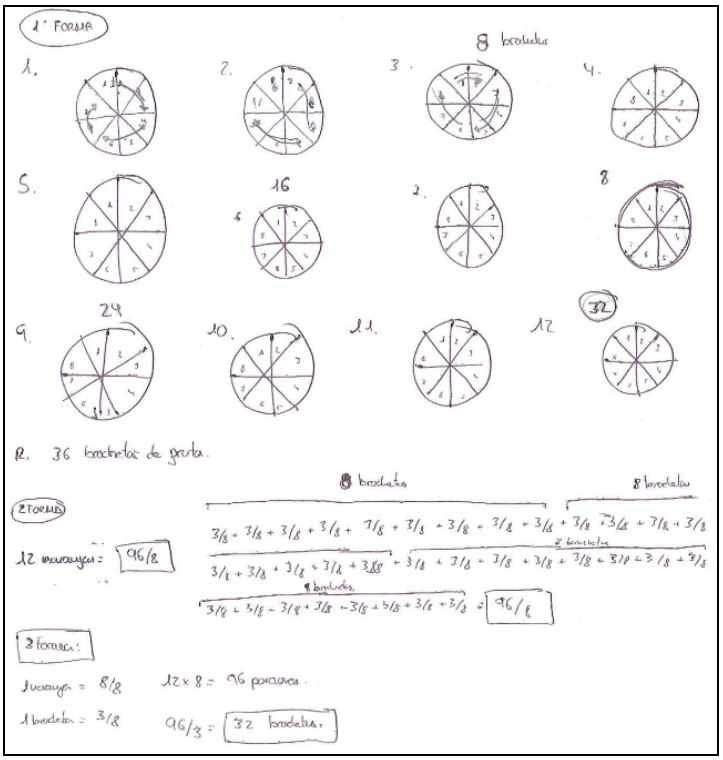


Figura 5. Respuesta de EPM-46

G2. EPM que anticipan respuestas usando estrategias de dos etapas

En esta categoría se encuentran 22 EPM que anticipan dos o tres respuestas de niños de primaria mediante estrategias pertenecientes a dos etapas diferentes. Diez de los 22 EPM anticiparon respuestas de las etapas E1 y E2; otros diez EPM de las etapas E1 y E3; y dos EPM de las etapas E2 y E3. Ocho de los 22 EPM anticiparon tres respuestas con diferentes estrategias de la progresión. Una evidencia de esta categoría se presenta en la sección de Análisis de datos (Figura 3).

G3. EPM que anticipan respuestas usando estrategias de las tres etapas

Diez de los 41 EPM han sido asignados a esta categoría. Estos EPM anticipan tres respuestas de niños de primaria mediante diferentes estrategias pertenecientes a las etapas de la progresión. Todos ellos han empleado la estrategia "modelización directa" correspondiente a la etapa E1.

Por ejemplo, la respuesta de EPM-57 (Figura 6) anticipa tres estrategias diferentes que corresponden a las tres etapas de la progresión. Para el niño 1, utiliza la estrategia "modelización directa" dibujando 12 rectángulos divididos en ocho partes iguales (octavos), agrupándolos de tres en tres y contando cuántos grupos (brochetas) puede hacer. Para el niño 2, utiliza la estrategia "agrupamiento y combinaciones" dibujando en primer lugar tres rectángulos divididos en octavos que agrupa de tres en tres (brochetas). A continuación, indica que con tres naranjas obtiene ocho brochetas, y que con tres naranjas más obtendrá ocho brochetas más, con seis naranjas más, 16 brochetas más. Para el tercer niño ha empleado la estrategia "multiplicativa", partiendo de que con tres naranjas se hacen ocho brochetas, con el cuádruple de naranjas se obtiene el cuádruple de brochetas. El dato de tres naranjas y ocho brochetas lo ha obtenido haciendo previamente una "adición repetida".

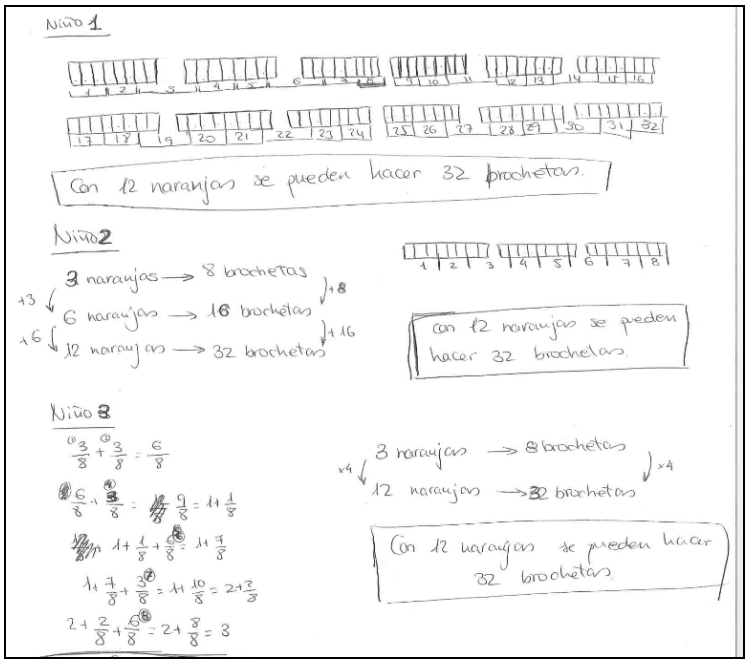


Figura 6. Respuesta de EPM-57

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue caracterizar cómo EPM, que han participado un año antes en un módulo de enseñanza, anticipan tres respuestas de niños de primaria que se encuentren en diferentes etapas de la progresión de estrategias de problemas de división medida con fracciones.

Nuestros resultados muestran que el 78% de los EPM, un año después de participar en un módulo de enseñanza que buscaba desarrollar en los EPM la mirada profesional del pensamiento matemático de los niños de primaria cuando resuelven problemas de división-medida con fracciones, haciendo uso de la progresión de estrategias propuesta por Empson y Levi (2011), han sido capaces de anticipar tres respuestas de niños de primaria de al menos dos etapas de dicha progresión. Este resultado podría indicar que el diseño e implementación del módulo de enseñanza basado en procesos de autorregulación con tareas realizadas en pequeños grupos ha favorecido procesos de aprendizaje profundo que han permitido que un año después los EPM hayan usado el conocimiento adquirido en el módulo de enseñanza (Bandura, 1997; Gordon & Debus, 2002; Zimmerman, 1998) y, en consecuencia, adquirir la competencia docente de anticipar respuestas de niños de primaria a problemas de grupos múltiples de división-medida con fracciones.

Nuevamente hemos constatado que los EPM (Montero & Callejo, 2019), un año después, siguen teniendo dificultades para anticipar las estrategias multiplicativas, solo el 56,1% de estos anticiparon respuestas con este tipo de estrategias. Esta dificultad puede ser debida a que las ideas de razón y proporción están en el centro de las relaciones multiplicativas y, en consecuencia, es más difícil de encontrar la razón entre las cantidades que visualizar y representar las diferencias entre dos cantidades cuando estas se comparan aditivamente.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change. *Psycological review*, *84*(2), 191.

Empson, S. B. & Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M.L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias*, *36*(1), 143-162.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM- Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 39-61.

Gordon, C., & Debus, R. (2002). Developing deep learning approaches and personal teaching efficacy within a preservice teacher education context. *British Journal of Educational Psychology, 72*(4), 483-511.

Hernández, A., & Camargo, Á. (2017). Autorregulación del aprendizaje en la educación superior en Iberoamérica: una revisión sistemática. *Revista Latinoamericana de Psicología*, *49*(2), 146-160.

Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *12*(8), 2155-2170.

Montero, E. & Callejo, M. L. (2019). Cambios en cómo estudiantes para maestro anticipan respuestas de niños de Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 433-442). Valladolid: SEIEM.

National Research Council (2007). *Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K-8*. Washington, DC: The National Academies Press.

Simon, M. (2006). Key Developmental Understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 359-371.

Smith, M. S. & Stein, M.K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 1-27.

Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, *66*(3), 227-244.

Zimmerman, B. (1998). Developing self-fulfilling cycles of academic regulation: An analysis of exemplary instructional models. In D. Schunk & B. Zimmerman (Eds.), *Self regulated learning: From teaching to self-reflective practice* (pp. 1–19). New York: Guilford Press.

LA ARITMÉTICA EN LA REAL ACADEMIA MILITAR DE MATEMÁTICAS DE ZAMORA (1789-1808)

Arithmetic in the Royal Military School of Mathematics of Zamora (1789-1808)

Monterrubio-Pérez, M. C.

Universidad de Salamanca

Resumen

La Academia de Matemáticas de Barcelona fue una institución muy importante de enseñanza militar durante el siglo XVIII, dedicada a la formación de los ingenieros militares. Con la misma normativa se creó la Real Academia Militar de Matemáticas de Zamora. En este trabajo se analiza un manuscrito, que se encuentra en la Biblioteca Central Militar de Madrid, y que presenta una serie de reflexiones para ayudar en la comprensión de los contenidos matemáticos impartidos en la Academia de Zamora. En particular, se presta atención a las aportaciones didácticas de dicho texto.

Palabras clave: *aritmética, siglo XVIII, academia militar, ingenieros militares, aspectos didácticos*

Abstract

Mathematic School of Barcelona was a very important institution for military taught during the 18th century, for the training of military engineers. With the same normative it was founded the Royal Military School of Mathematics of Zamora. In this paper we analyse a manuscript from Military Library of Madrid that include some reflections in order to help understanding the mathematical contents taught in the Academy of Zamora. We focused the attention in the didactical aspects of this manuscript.

Keywords: *arithmetic, 18th century, military school, military engineers, didactical aspects*

INTRODUCCIÓN

En el siglo XVIII, tal como señalan Riera y Riera (2008), se produce en España un gran avance en el estudio de la ciencia y la tecnología, en particular, en el estudio de las matemáticas, donde tiene especial importancia el papel de la Secretaría de Guerra y la de Marina. Concretamente, instituciones de carácter militar, como la Armada y el Ejército de Tierra, contribuyeron de forma significativa a fomentar el estudio de las Matemáticas. De hecho, como señalan Ceballos, Núñez y Villacampa (2013), la enseñanza de las Matemáticas fue llevada a cabo en las instituciones militares antes de la creación de cátedras de Matemáticas en las universidades españolas. En particular, podemos destacar la labor del cuerpo de Ingenieros militares, creado en 1710, tal como indican Capel, Sánchez y Moncada (1988), por Jorge Próspero de Verboom, discípulo de Fernández de Medrano, que había dirigido la Real Academia Militar de Matemáticas de Bruselas creada en 1675. El interés de Verboom por conseguir una formación de calidad para los ingenieros llevó a la creación de la Academia de Matemáticas de Barcelona, que entró en funcionamiento el 15 de octubre de 1720, con Mateo Calabro como director y donde la enseñanza era llevada a cabo por profesores pertenecientes al cuerpo de Ingenieros militares. En 1739 Pedro Lucuce es nombrado director de la Academia y permanece en este puesto durante cuarenta años, exceptuando el periodo de 1756 a 1760, dedicado a la Sociedad de Matemáticas de Madrid. Además de la Academia de Barcelona, existieron otros centros como las Academias militares de Cádiz, Orán, Ocaña y Zamora, entre otras.

Monterrubio-Pérez, M. C. (2021). La Aritmética en la Real Academia Militar de Matemáticas de Zamora (1789-1808). En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 441 – 448). Valencia: SEIEM.

De acuerdo con Carracedo Primo (2009, 2014), la Academia de Zamora se crea siguiendo la Real Orden de 22 de septiembre de 1789, con el mismo reglamento que la Academia de Barcelona, de forma que queda regulada por la Real Ordenanza de 29 de diciembre de 1751. La Academia se cierra en 1793 debido a la Guerra con Francia y se abre de nuevo en 1795. En 1803 se crea una nueva Academia para Ingenieros en Alcalá de Henares y se cierra la Academia de Barcelona. En 1805 se suprime la Academia de Cádiz. Solo queda en funcionamiento la Academia de Zamora, que cerrará en 1808.

A continuación se reproducen los artículos 54, 56, 57 y 58 de dicha Real Ordenanza:

> **54.** Los tratados, y asuntos, que se hubieren de dictar en la Academia, deberàn disponerse, y coordinarse por el Director de ella, dirigido todo por èl, como doctrina propia, con aquella concision o extension que juzgare, según las materias, convenir al mayor fruto, teniendo para ello presente, que el fin de esta Academia, es la instrucción de las Tropas solo en las partes de las Mathematicas concernientes al Arte de la Guerra, tomando de ellas solo lo preciso à este intento, prefiriendo siempre lo util à lo deleytoso.
>
> **56.** Antes de dictar en la Academia los Quadernos pertenecientes à cada clase, los harà vèr al Inspector, para que con su aprobacion se escriban, omitiendo esta prevencion, quando haviendose de dar en otro Curso, no huviere hecho novedad en ellos.
>
> **57.** Aprobados los Quadernos por el Inspector, los entregarà el Director de la Academia à los Ayudantes, para que los dicten en sus clases, y de ellos no variaràn cosa alguna sin consentimiento del Director, ni se estenderàn en su explicación à otros asumptos, que los respectivos à aquellos de que traten, sin mezclar agenas especies, que solo perturban la genuina inteligencia de los Quadernos; y el Inspector cuidarà se archive copia de estos en la Libreria de la Academia.
>
> **58.** Qualquier alteracion, que el Director de la Academia tuviere por necesaria, ò conveniente hacer en lo perteneciente à la enseñanza, que aqui se establece, segun la experiencia fuere manifestando, la harà presente al Ingeniero General; y si no fuere asumpto de mucha entidad, que mereciere mi Real atencion, resolverà por sì lo que juzgáre mas util.

De acuerdo con la ordenanza el plan de estudios está formado por los siguientes contenidos: Aritmética; Geometría Especulativa (los seis primeros libros de Euclides, el once y el doce); Cónicas (Elipse, Parábola, Hipérbola); Geometría Práctica (incluye Trigonometría); Fortificación defensiva y ofensiva, regular e irregular, real y de campaña, con ataque y defensa de las plazas; Mecánica general; Tratado teórico de Artillería; Cosmografía o descripción del Universo; Arquitectura Civil y Dibujo.

Tal como se señala en la ordenanza, los contenidos impartidos eran seleccionados por el director de la Academia y las clases eran tomadas al dictado. Capel, Sánchez y Moncada (1988), señalan que Pedro Lucuce fue el encargado de redactar los textos utilizados en la Academia. Según indican Ceballos, Núñez y Villacampa (2013), Lucuce se basó en los seis primeros libros de Euclides, en obras de Crouzaz, Bellidor, Le Clerc, obras españolas de Mateo Calabro, Fernández de Medrano, Larrando de Mauleón, el Marqués de Santa Cruz de Marcenado y el Compendio Mathematico del padre Tomás Vicente Tosca. Dado que el texto de Lucuce se iba a destinar a la enseñanza, posiblemente eligió a Tosca ya que, como señalan Maz-Machado y Rico (2015), en el texto de Tosca "El interés por mostrar estos contenidos matemáticos de forma didáctica y facilitar su comprensión es una constante" (p. 58).Este manuscrito basado en el curso de Pedro Lucuce se encuentra en la Biblioteca Central Militar de Madrid (BCM) con el título Curso inédito de matemáticas, fortificación, artillería, cosmografía y arquitectura que sirvió de texto en las Academias militares (Pedro Lucuce), y corresponde a los apuntes tomados por Antonio Remón y Zarco Torralbo y Orbaneja en los años 1760.

Además, en la BCM también se encuentra un manuscrito, de autor anónimo, pero que, según indica Velamazán (2015), algunos autores atribuyen a Antonio Sangenís, que estudió en la Academia de

Barcelona y en 1795 fue nombrado profesor de la Academia de Zamora. El documento se presenta con el título: "Reflexiones y observaciones necesarias para la más completa inteligencia del tratado de Aritmética Universal que se enseña en la Real Escuela Militar de Matemáticas de Zamora".

Teniendo en cuenta que, tal como se ha indicado, las clases se daban al dictado, es posible que este texto se utilizara para trabajar de forma más sencilla con aquellos alumnos que no aprobaban y que debían trabajar más la parte de Aritmética.

El objetivo de este trabajo consiste en analizar las aportaciones, desde el punto de vista didáctico, de este documento atribuido a Sangenís.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El siglo XVIII fue un año especialmente importante en el desarrollo del conocimiento matemático. Como señala Garma Pons (1978) los grandes avances en la producción matemática van unidos a los avances de la técnica. Una forma de analizar los contenidos desarrollados es a través de las obras de diferentes autores de la época. Es el caso, por ejemplo, del trabajo de Maz (2009) que analiza el concepto de número en manuales españoles de matemáticas de los siglos XVIII y XIX, Oller-Marcén (2018) que analiza la obra matemática de Ventura de Ávila, o el estudio de Sánchez Sierra y González Astudillo (2020) sobre la obra de Odriozola.

Un aspecto de especial interés en el análisis de materiales de este tipo es la idea de Fenomenología de Freudenthal entendiendo, como señala Puig (1997, que "El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización" (p. 63). En particular, resulta de especial interés lo que Freudenthal denomina Fenomenología didáctica, que lleva a prestar atención a los fenómenos relacionados con el mundo de los alumnos y las situaciones propias del proceso de enseñanza-aprendizaje.

METODOLOGÍA

Se trata de un estudio de carácter descriptivo en el que se realiza un análisis de dos documentos. De acuerdo con Rico y Fernández-Cano (2013) "El análisis didáctico es un método de investigación propio de la didáctica de la matemática" (p. 13). Tal como describe Gómez (2002), el análisis didáctico consta de cuatro fases: Análisis de contenido, Análisis cognitivo, Análisis de instrucción y Análisis de actuación. En particular nos centraremos en el análisis de contenido y, siguiendo a Gómez (2002) prestaremos atención a la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico. Este estudio consiste en una investigación en la que se realiza una búsqueda documental sobre documentos de carácter histórico, que nos lleva al análisis de dos fuentes directas (o primarias) que cumplen con las condiciones señaladas por Saez-Rosenkranz (2016) que considera que "Es necesario verificar la capacidad de las fuentes para entregar una información fiable y adecuada para explicar el fenómeno que se quiere resolver" (p. 110). En nuestro caso, las dos fuentes son dos manuscritos. Nuestro análisis se centra en un manuscrito que expone una serie de reflexiones necesarias para poder entender mejor los contenidos desarrollados en las Academias militares de Matemáticas y que se encuentran en el otro manuscrito estudiado.

RESULTADOS

En primer lugar, prestamos atención a la estructura de ambos textos. Posteriormente, observaremos algunos de los conceptos que se incluyen en cada uno de los manuscritos analizados y la forma en la que se presentan dichos conceptos, y prestaremos especial atención al análisis fenomenológico y a las aportaciones desde el punto de vista de la didáctica.

El manuscrito basado en el curso de Lucuce (Figura 1) se presenta con el título "Curso matemático para la instrucción de los militares". Cuenta con una Introducción, un apartado dedicado a

Fundamentos de la Matemática y un primer tratado, De la Aritmética, compuesto por los siguientes libros y capítulos:

Libro 1º. De la Aritmética.

Capítulo 1º. De la numeración.

Capítulo 2º. Del algoritmo de los números enteros: esto es de las cuatro primeras reglas de la Artimética vulgar que son Sumar, Restar, Multiplicar y Partir.

Capítulo 3º. De las fracciones vulgares.

Libro 2º. Del Algoritmo Literal.

Capítulo 1º. De la Adición, Sustracción, Multiplicación y Partición de las Cantidades Literales.

Capítulo 2º. De los quebrados literales

Libro 3º. De la razón y proporción en común.

Libro 4º. De las reglas de Proporción.

Libro 5º. De las potencias y raíces de los números, y singularmente de la composición y resolución de los números cuadrados y cúbicos.

Capítulo 1º. De la síntesis o composición de las potencias.

Capítulo 2º. Del análisis o resolución de las potencias: esto es de la extracción de la raíz.

Libro 6º. De las progresiones.

Capítulo 1º. De la Progresión Aritmética.

Capítulo 2º. De la Progresión Geométrica.

El manuscrito atribuido a Sangenís (Figura 2) y cuyo análisis nos ocupa en este trabajo, presenta la siguiente estructura:

Un apartado de Introducción, con el título Reflexiones necesarias para la más completa inteligencia de los principios de la Matemática.

Capítulo 1º. De la numeración.

Capítulo 2º. Del algoritmo de los números enteros.

Capítulo 3º. De la resolución y composición de los números.

Capítulo 4º. De las fracciones en general.

Capítulo 5º. De las fracciones decimales.

Capítulo 6º. De las fracciones continuas.

Capítulo 7º. De la extracción de la raíz cuadrada y cúbica.

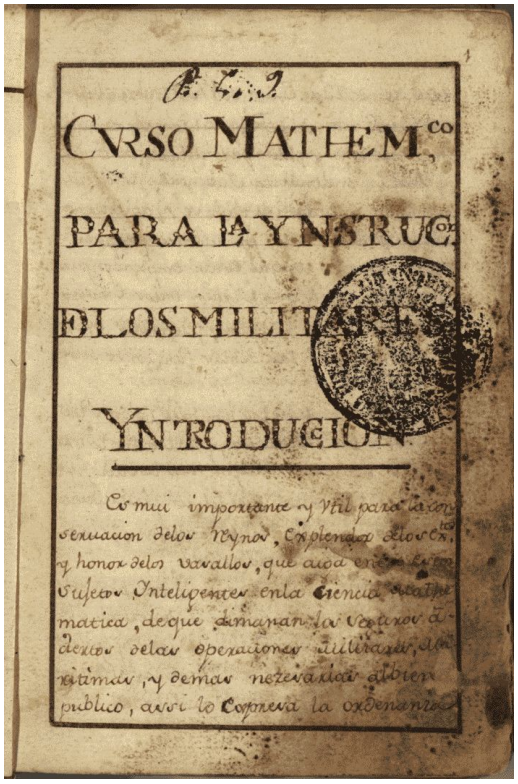


Figura 1. Manuscrito basado en el curso de Pedro Lucuce

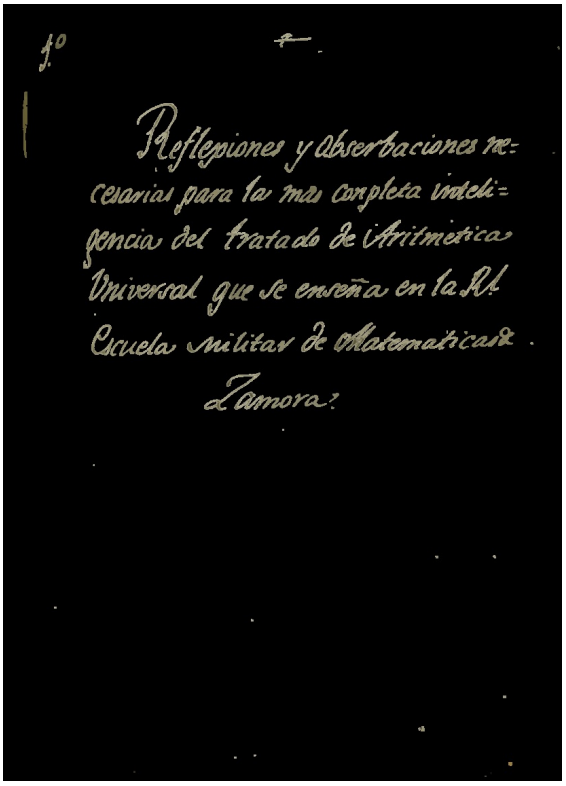


Figura 2. Manuscrito anónimo atribuido a Sangenís

En el apartado de Fundamentos del manuscrito basado en el curso de Lucuce se explica el significado de los términos Definición, Axioma, Postulado, Proposición, Teorema, Problema, Lema, Corolario, Escolio e Hipótesis. En la introducción del manuscrito atribuido a Sangenís se explica lo que es Analizar, las ideas singulares (las que adquirimos por medio de los sentidos), que nos llevarán a la formación de las ideas abstractas que pueden ser simples (color o sonido, por ejemplo) o compuestas (idea de hombre, caballo, árbol, casa, etc.). Señala la importancia de las ideas abstractas en el estudio de las Matemáticas explicando que primero se prescinde del color, peso y otras cualidades físicas para llegar a la idea abstracta de la extensión figurada y, después, se prescinde de la figura y se obtiene la idea simple y abstracta de la extensión. Además, señala que el hecho de que la extensión, peso, medida, etc., pueda ser mayor o menor que cualquier otra extensión, peso, medida, etc., permite llegar a la idea abstracta de cantidad.

En el primer capítulo, titulado "De la numeración" tanto en el manuscrito basado en el curso de Lucuce como en el manuscrito que nos ocupa, se comienza presentando una serie de definiciones que se muestran en la Tabla 1.

Hay algunos conceptos que solo figuran en el manuscrito basado en el curso de Lucuce, como por ejemplo: Número racional o efable (conmensurable con la unidad), Número irracional, inefable o Geométrico (es con la unidad inconmensurable), partes alícuota y alicuanta.

En el estudio de las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, ambos textos trabajan con situaciones reales y presentan enunciados en los que intervienen las siguientes unidades:

> Varas, pies, pulgadas y líneas (una vara está formada por 3 pies, un pie por 12 pulgadas y una pulgada por 12 líneas).
>
> Pesos, reales y maravedíes (un peso equivale a 15 reales y un real a 34 maravedíes).

Quintal, arroba, libra y onza (un quintal está compuesto por 4 arrobas, la arroba por 25 libras y la libra por 16 onzas).

Signos, grados, minutos y segundos (un signo está formado por 30 grados, un grado por 60 minutos y un minuto por 60 segundos).

En el manuscrito basado en el curso de Lucuce los ejemplos con este tipo de unidades se centran en la suma y la resta mientras que el texto de Reflexiones también las utiliza en la multiplicación y la división. Un aspecto de interés en este texto se presenta en la explicación de la resta, cuando señala que "Siendo el sustraendo mayor que el minuendo, si se sustrae este de aquel, la resta será lo que falte al minuendo para poderse efectuar la sustracción, o lo que quedará por restar". Es decir, plantea la posibilidad de que el sustraendo sea mayor que el minuendo, pero no se habla en ningún momento de números negativos que sí se incluyen en el manuscrito basado en el curso de Lucuce.

TABLA 1. Definiciones de algunos conceptos en las dos obras analizadas

CONCEPTO	MANUSCRITO BASADO EN EL CURSO DE PEDRO LUCUCE	MANUSCRITO ATRIBUIDO A SANGENÍS
Número	Uno es lo que de tal suerte es algo que no puede ser otra cosa, como un ángel, una piedra, un hombre, etc. Unidad es el abstracto por quien se dice uno. Número: Cuanto se refiere o hace relación a la unidad	Número: Cuanto se refiere o hace relación a la unidad. En particular define número concreto (referido a la unidad concreta) y número abstracto (referido a la unidad abstracta).
Cantidades homogéneas y heterogéneas	Dos cantidades se dicen homogéneas cuando la una repetida algunas veces puede exceder a la otra. Heterogéneas, cuando la una por muchas veces que se repita no puede exceder a la otra.	Cantidades homogéneas: se refieren a una misma unidad. Cantidades heterogéneas: se refieren a distintas unidades. Para expresar las relaciones que corresponden a los números determinados es necesario que se examinen contando, midiendo y pesando las mismas cantidades.
Número entero	Se refiere a la unidad como el todo a la parte	El que solo consta de unidades
Quebrado, fracción o minucia	Se refiere a la unidad como la parte al todo	Equivale a parte de una unidad

Otro elemento cuyo análisis resulta interesante es el cálculo del máximo común divisor, que en ambos manuscritos se denomina mayor medida común. Mientras que el manuscrito basado en el curso de Lucuce solo propone calcularlo aplicando el algoritmo de Euclides, el manuscrito atribuido a Sangenís trabaja, además, con la factorización en números primos y el cálculo haciendo el producto de los factores comunes. Además, este texto presenta los criterios de divisibilidad para el dos, el tres y el cinco.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

El manuscrito basado en el curso de Lucuce presenta los diferentes elementos que componen el estudio de las matemáticas distinguiendo de forma expresa definiciones, lemas, teoremas, corolarios, escolios, etc., mientras que el manuscrito atribuido a Sangenís tiene una estructura lineal en la que se dan definiciones y se procede con las explicaciones que se consideran pertinentes para la comprensión del concepto y su utilización en la resolución de situaciones que, generalmente, tienen que ver con lo que les va a resultar de utilidad a los alumnos de la Academia en su vida cotidiana.

Se observa que las definiciones en el manuscrito basado en el curso de Lucuce se presentan de forma muy rigurosa, mientras que el manuscrito de Reflexiones trata de ser más didáctico, añadiendo más explicaciones, tratando de presentar los contenidos de forma más concreta. De hecho no incluye algunas definiciones, por ejemplo, numero efable e inefable, puesto que no son necesarias para las aplicaciones prácticas que presenta. Además, trabaja siempre con ejemplos numéricos, mientras que Lucuce incluye un libro completo, el segundo, dedicado a la Aritmética literal. También es interesante observar que propone procedimientos diferentes para realizar algún cálculo, como en el caso del cálculo del máximo común divisor de varios números, en el que además del algoritmo de Euclides, propuesto en el manuscrito basado en el curso de Lucuce, indica la posibilidad de calcularlo a partir de la factorización en números primos. Sin duda, es interesante como recurso didáctico ofrecer diferentes posibilidades de realizar un mismo cálculo.

Se pone de manifiesto que para tratar de ayudar a comprender los contenidos matemáticos, se intenta trabajar de forma concreta, prestando atención a la parte numérica en lugar de trabajar con variables y tratando de contextualizar los contenidos, tal como señalan los principios de la Fenomenología didáctica. Es el caso de los aspectos observados en el estudio de la multiplicación y la división que, en el caso del manuscrito atribuido a Sangenís, plantea enunciados verbales variados en los que se deben utilizar las operaciones para resolver situaciones reales con diferentes unidades habituales en la vida diaria de la época (varas, pies, pesos, reales, etc.).

El estudio de un documento como el manuscrito atribuido a Sangenís, que ya en su título indica que está destinado a “la más completa inteligencia” de los contenidos tratados en la Academia nos lleva a compartir la idea de Oller-Marcén (2018) cuando señala que este tipo de trabajos sobre aspectos didácticos de obras del pasado pueden ser de utilidad para la formación de profesorado, entre otros aspectos porque nos permite conocer recursos didácticos utilizados en el pasado.

Este trabajo se debe completar analizando, de forma exhaustiva, todos los libros que componen el tratado de aritmética del manuscrito basado en el curso de Lucuce y las reflexiones propuestas en el manuscrito atribuido a Sangenís.

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Instituto de Estudios Zamoranos Florián de Ocampo la concesión de una beca de investigación en la convocatoria de 2019 para el desarrollo de la investigación sobre la Real Academia Militar de Matemáticas de Zamora (1789-1808).

BIBLIOGRAFÍA

Anónimo (s.f.). *Reflexiones y observaciones necesarias para la más completa inteligencia del tratado de Aritmética Universal que se enseña en la Real Escuela Militar de Matemáticas de Zamora.* (BCM, ML-R-338 A)

Capel, H.; Sánchez, J. E. y Moncada, O. (1988). *De Palas a Minerva. La formación científica y la estructura institucional de los ingenieros militares en el siglo XVIII.* Barcelona: Serbal.

Carracedo Primo, J. (2009) Las academias militares de la ciudad de Zamora. *Actas del IV Congreso de Historia militar, Zaragoza. Vol. II*, comunicaciones pp. 25-27. Madrid: Ministerio de Defensa.

Carracedo Primo, J. (2014). *Historia Militar de Zamora desde el siglo XVIII*. Zamora: Instituto de Estudios Zamoranos "Florian de Ocampo".

Ceballos, M., Núñez, J. y Villacampa, R. (2013). Pedro de Lucuce y Ponce y las instituciones matemático-militares españolas del siglo XVIII. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 16* (1), 147-168.

Garma Pons, S. (1978). Producción matemática y cambios en el sistema productive en la España de finales del siglo XVIII. En A. Carreira, J. A. Cid, M. Gutiérrez y R. Rubio, Homenaje a Julio Caro Baroja. Madrid: Centro de Investigaciones sociológicas.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7* (3), 251-292.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 5-20). Santander: SEIEM.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 18* (1), 49-76. Doi: 10.12802/relime.13.1812

Oller-Marcén, A. M. (2018). Aspectos didácticos de las obras matemáticas del ilustrado Ventura de Ávila. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 417-426). Gijón: SEIEM.

Puig, L. (1997): Análisis fenomenológico. En Rico, L. (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* pp. 61-94. Barcelona: ICE Universidad de Barcelona – Horsori.

Real Ordenanza de 29 de diciembre de 1751 para la subsistencia, régimen y enseñanza de la Real Academia Militar de Matemáticas, establecida en Barcelona, y las particulares de Ceuta, Orán, unas y otras al cargo y dirección del Cuerpo de Ingenieros, para la enseñanza de los Oficiales y Cadetes del Ejército.

Remón Zarco Torralbo Orbaneja, A. (1759-61) *Curso inédito de matemáticas, fortificación, artillería, cosmografía y arquitectura que sirvió de texto en las academias militares*. Cuaderno copiado del *Curso de Matemáticas* manuscrito elaborado por Lucuce. (BCM, ML-R-235 A).

Rico, L. y Fernández Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en Educación Matemática* pp. 1-22. Granada: Comares.

Riera, J. y Riera, L. (2008). La Academia de Matemáticas de Barcelona: Ilustración e inquisición a finales del siglo XVIII. *Nova Época, 1* (2), 153-159.

Sáez-Rosenkranz, I. (2016). El método histórico aplicado a la investigación educativa. *REIRE. Revista d'Innovació i Recerca en Educació, 9* (2), 106-113. Doi: 10.1344/reire2016.9.2927.

Sánchez Sierra, I. M. y González Astudillo, M.T. (2020). La geometría analítica en el Curso completo de matemáticas puras (1829) de José de Odriozola. *Historia y Memoria de la Educación 11*, pp. 113-149

Velamazán, M. A. (2015). Revisión de la formación y la aportación matemática del ingeniero militar Antonio Sangenís (1767-1809). *Llull, Vol. 38* (N.º 82), 371-397. ISSN: 0210-8615.

ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE VÍDEOS EDUCATIVOS SOBRE PROBABILIDAD ELABORADOS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO[1]

Analysis of the didactical suitability of educational videos about probability elaborated by primary education student teachers

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso-Castaño, M. y Rodríguez-Muñiz, L. J.

Universidad de Oviedo

Resumen

El diseño y empleo de vídeos educativos están aumentando a un ritmo notable en todas las disciplinas. Su uso se está incorporando a la formación inicial de maestros, al tiempo que se necesita valorar la idoneidad de los materiales creados, con el fin de garantizar que cumplen los objetivos de aprendizaje establecidos. El primer objetivo de este trabajo es analizar la idoneidad didáctica de 16 vídeos educativos sobre probabilidad elaborados por 67 estudiantes para maestro. Un segundo objetivo consiste en estudiar la interpretabilidad de los indicadores de idoneidad cuando los aplican distintos revisores. Los resultados revelan que la idoneidad de la mayoría de los vídeos educativos es media o baja, a excepción del indicador relativo a la adecuación del nivel lingüístico. Este hecho señala la necesidad de implementar acciones específicas en la formación inicial de maestros. Por otro lado, se apunta a la necesidad de matizar algunos de los indicadores.

Palabras clave: *formación de maestros, idoneidad didáctica, probabilidad, vídeos educativos*

Abstract

The design and use of educational videos are increasing at a remarkable rate in all disciplines. Its use is being incorporated into initial teacher training, while it is necessary to assess the suitability of the designed materials, to ensure that they meet the established learning standards. The first aim of this work is to analyze the didactical suitability of 16 educational videos about probability elaborated by 67 primary education student teachers. A second goal consists on studying the interpretability of the suitability indicators when applied by different reviewers. The results reveal that the suitability of most educational videos is medium or low, except for the indicator related to the adequacy of the linguistic level. This fact indicates the need to implement specific actions in initial teacher training. On the other hand, it points the need to clarify some indicators.

Keywords: *teacher training, didactical suitability, probability, educational videos*

INTRODUCCIÓN

Los vídeos educativos se han convertido en un material didáctico valioso en la educación matemática (Myllykoski, 2016). Entre otras razones, el alumnado destaca la posibilidad de convenir el lugar y el momento para su visualización, su adaptabilidad a los distintos ritmos de aprendizaje, su capacidad para complementar explicaciones síncronas que precisan ser repetidas (por seguir un ritmo acelerado o por la complejidad de los contenidos) como los principales beneficios en el uso de vídeos educativos (Howard, Meehan, y Parnell, 2017). A su vez, son numerosas las metodologías de enseñanza y aprendizaje que se sustentan en el empleo de vídeos educativos: *blended learning*, *flipped classroom*, *mobile learning* u *online learning* (Borba et al., 2016). El uso de vídeos educativos también se ha

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto TIN2017-87600-P del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso-Castaño, M., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Análisis de la idoneidad didáctica de vídeos educativos sobre probabilidad elaborados por estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 449 – 456). Valencia: SEIEM.

hecho hueco como herramienta para capacitar al profesorado por su potencial en el desarrollo de competencias docentes (Burgos, Beltrán-Pellicer, y Godino, 2020; Llinares, 2012; Muñiz-Rodríguez et al., 2018). En este trabajo no se analiza el uso de vídeos educativos como instrumento de formación de profesorado, sino cómo los estudiantes para maestro (EPM) elaboran vídeos dirigidos al alumnado de Educación Primaria.

La calidad de los vídeos educativos es un elemento clave que no siempre queda patente (Beltrán-Pellicer y Giacomone, 2021; Burgos et al., 2020). Desde el ámbito de la formación docente se considera indispensable que el profesorado, además de ser capaz de seleccionar vídeos educativos adecuados según el contexto, demuestre las competencias necesarias para diseñar vídeos educativos de calidad. El primer objetivo de este trabajo es analizar la idoneidad didáctica de un conjunto de vídeos educativos sobre probabilidad elaborados por EPM. Dada la naturaleza de las unidades de análisis, este estudio utiliza la noción de idoneidad didáctica, nacida en el marco del enfoque ontosemiótico (Godino, 2012, 2013), con el fin de evaluar la faceta epistémica a partir de una serie de componentes e indicadores definidos para el tema de probabilidad en Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018b). Un segundo objetivo consiste en estudiar la interpretabilidad de los indicadores empleados para el análisis, cuando los aplican distintos revisores, analizando su nivel de acuerdo y el origen de posibles discrepancias.

MARCO TEÓRICO

La idoneidad didáctica es una herramienta que permite valorar la medida en que un proceso matemático de enseñanza y aprendizaje puede ser considerado como óptimo, tomando como referencia seis facetas de idoneidad (Godino, 2013): la epistémica, la cognitiva, la interaccional, la mediacional, la afectiva y la ecológica. Estas facetas se concretan en componentes empíricas que permiten medir la idoneidad didáctica a distintos niveles, desde la generalidad de un plan de formación hasta la especificidad de un material didáctico como, por ejemplo, un vídeo educativo.

En el caso de los vídeos educativos, por su vocación originalmente asíncrona, cobra especial protagonismo la idoneidad epistémica, definida como el grado de representatividad de los significados implementados respecto a un significado de referencia. Para su análisis, Godino (2013) define cinco componentes: situaciones-problema (SP), lenguajes (LE), reglas (RG), argumentos (AR) y relaciones (RL). Para valorar la idoneidad epistémica del objeto de análisis se considera imprescindible partir de un significado de referencia del elemento matemático que caracteriza el proceso de instrucción, en este caso, la probabilidad. Batanero (2005) establece cinco significados en el ámbito de la matemática escolar: el intuitivo o informal, el clásico, el frecuencial, el subjetivo y el axiomático, aunque este último no se considera en la Educación Primaria por su formalismo.

Tomando como referencia lo anterior, Beltrán-Pellicer et al. (2018b) concretan unos indicadores para cada componente de la idoneidad epistémica en probabilidad (Tabla 1). Estos indicadores han sido previamente utilizados en trabajos sobre el diseño de pautas de observación de clases (Vásquez y Alsina, 2019), el análisis de vídeos educativos (Beltrán-Pellicer, Giacomone, y Burgos, 2018a), y el desarrollo de competencias docentes (Burgos et al., 2020).

Tabla 1. Indicadores para la idoneidad epistémica en probabilidad en cada componente (Beltrán-Pellicer et al., 2018b).

SP1. Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica).
SP2. Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales, distinguiéndolas de experiencias deterministas. Por ejemplo: lanzamientos de dados o monedas, simulaciones de concursos o bingos, etc.
SP3. Se propone una muestra representativa de contextos donde ejercitar y aplicar los contenidos tratados.
SP4. Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios (problematización) por los propios estudiantes.

LE1. Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólica, conjuntos, etc.), señalando las relaciones entre las mismas. LE2. Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado al que se dirige, en cuanto a construcciones gramaticales y vocabulario. LE3. Se emplean términos precisos como suceso, espacio muestral, frecuencia relativa, aleatorio, determinista, casos favorables, casos totales, resultado de un experimento, sucesos simples y sucesos compuestos. LE4. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.
RG1. Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. RG2. Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad. RG3. Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario; propiedades de las frecuencias relativas. RG4. Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. RG5. Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de tablas y diagramas de árbol. RG6. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
AR1. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. AR2. Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas. AR3. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
RL1. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones…) se relacionan y conectan entre sí. RL2. Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (uso informal, subjetivo, frecuencial y clásico).

METODOLOGÍA

Las unidades de análisis consideradas para este estudio consisten en vídeos educativos diseñados por EPM dentro de la asignatura "Matemáticas y su didáctica III" impartida en el tercer curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo. En esta asignatura se aborda, por primera vez, la probabilidad y su didáctica. La elaboración de un vídeo educativo es una tarea que se propone en el tramo final de la asignatura, tras haber tratado estos contenidos siguiendo, principalmente, el manual de Batanero y Godino (2002). La consigna era elaborar, por grupos de 3 a 5 personas, un vídeo educativo sobre estadística, probabilidad o resolución de problemas para ser utilizado en una metodología de aprendizaje invertido (*flipped learning*), es decir, un vídeo que pueda ser visualizado antes de la sesión presencial y que abarque contenidos que no han sido estudiados con anterioridad, pero que serán tratados a continuación de forma presencial. El vídeo podía dirigirse a cualquier curso de Educación Primaria, debía indicar los estándares de aprendizaje con los que se relaciona y podía (como opción de mejora) incluir la forma de interacción con el alumnado durante su visualización (preguntas, *quizzes*…). La duración del vídeo estaba delimitada entre 5 y 8 minutos.

Para este trabajo, se clasificaron los vídeos por tema y se seleccionaron aquellos relacionados con la probabilidad que se encontraban disponibles para su revisión en el momento en el que se desarrolló la investigación y que cumplían mínimamente con las especificaciones de la tarea. Se obtuvieron un total de 16 vídeos elaborados por sendos grupos que representaban la tercera parte del total de vídeos diseñados involucrando a 67 EPM, de los 196 matriculados en la asignatura. Algunos de estos vídeos incluían secuencias relacionadas con la estadística, que no se tuvieron en cuenta para el análisis. La Tabla 2 muestra información sobre los vídeos analizados.

Tomando como referencia el modelo de análisis expuesto por Burgos et al. (2020), se valoró cualitativamente el grado de idoneidad epistémica del vídeo en cada una de las cinco componentes, utilizando la escala: baja, media o alta. La valoración fue realizada de forma independiente por los

tres investigadores. Del conjunto de puntuaciones se calculó el porcentaje de consenso exacto (54.6 %) y el de consenso adyacente (con una diferencia máxima de un nivel de idoneidad entre las valoraciones de los tres investigadores respecto a la escala cualitativa, 92.1 %), superando los estándares de calidad establecidos a nivel internacional en valoración de vídeos por distintos revisores (Bell, 2020). También se calculó la mediana de las puntuaciones de cada indicador. En una segunda fase, las puntuaciones fueron confrontadas y discutidas por los investigadores, con el fin de analizar discrepancias en la interpretabilidad de los indicadores.

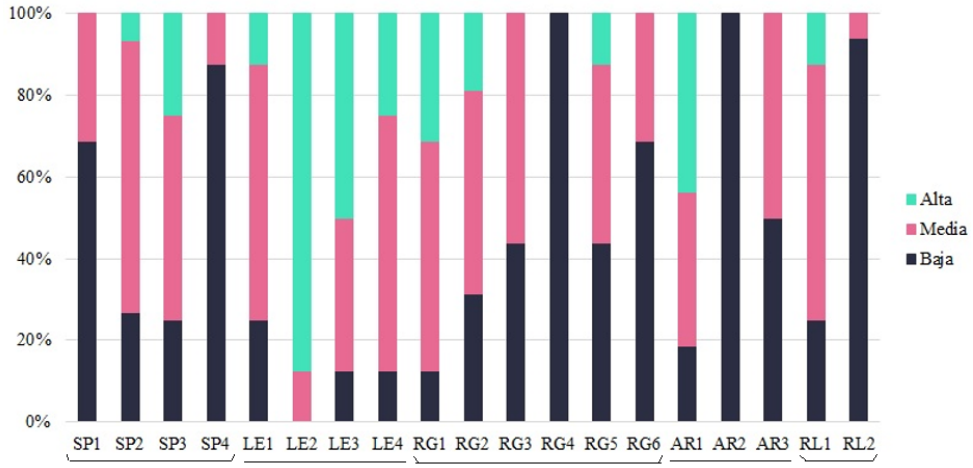
Tabla 2. Información sobre los vídeos educativos analizados.

ID	Tiempo	Curso	ID	Tiempo	Curso	ID	Tiempo	Curso	ID	Tiempo	Curso
1	6:09	Sexto	5	7:29	Sexto	9	7:22	Cuarto	13	8:07	Sexto
2	8:51	Sexto	6	7:20	No se indica	10	7:14	Tercero	14	7:25	Sexto
3	6:44	Cuarto	7	8:15	No se indica	11	7:59	Cuarto	15	7:46	Sexto
4	6:14	Sexto	8	6:32	Sexto	12	7:55	No se indica	16	8:00	Cuarto

RESULTADOS

La Figura 1 muestra el porcentaje de vídeos cuya idoneidad epistémica mediana es baja, media o alta para cada uno de los indicadores.

Figura 1. Porcentaje de vídeos según su valoración de la idoneidad epistémica en cada indicador.



En la primera componente se observó una idoneidad baja en general respecto a plantear situaciones-problema que muestren y relacionen los diferentes significados de la probabilidad (SP1). De los dieciséis vídeos, cuatro no presentaron de manera explícita ningún significado de la probabilidad y nueve presentaron solo uno, mayoritariamente el clásico, a excepción de un vídeo que muestra el intuitivo. En ambas situaciones se consideró, por tanto, que la idoneidad didáctica del indicador SP1 era baja. Solo tres vídeos relacionaron dos significados: en dos casos el clásico y el intuitivo, y en uno el frecuencial y el subjetivo (aunque en este último se advierte un error al mezclar el significado frecuencial con el clásico). En estos tres vídeos se consideró una idoneidad media. Para que la idoneidad del indicador SP1 fuera considerada alta, se entendió que se deberían plantear situaciones-problema que no solo mostraran, sino también que relacionaran al menos tres de los significados de la probabilidad. La idoneidad de los vídeos fue mayor respecto a proponer experiencias aleatorias (SP2) y contextos donde ejercitar y aplicar los contenidos (SP3), aunque en la mayoría de los vídeos se reflejaron situaciones arquetípicas (resultado al lanzar un dado o una moneda, o al sacar una carta de una baraja u objetos de una bolsa), pasando desapercibidos otros contextos cercanos y de mayor interés para el alumnado (Vásquez, García- Alonso, Seckel, y Alsina, 2021), a pesar de que se trataron previamente en la asignatura. Conviene añadir que solo en un vídeo se distinguen las experiencias aleatorias de las deterministas (SP2). Por otro lado, dos vídeos invitaron a la

problematización por parte del alumnado (SP4), aunque al realizarse planteamientos sencillos y puntuales ("¿sabrías decirme algún juego de azar?"), se consideró una idoneidad media en este caso.

En lo referido a la componente del lenguaje, la idoneidad didáctica fue, principalmente, media o alta en los cuatro indicadores, destacando el empleo de un nivel lingüístico adecuado (LE2). En cuanto a los registros utilizados para representar situaciones aleatorias (LE1) predominó la combinación del numérico (oral, y/o escrito) y del simbólico (tanto numérico como algebraico), cuya idoneidad se consideró media. En tres vídeos se incluyó, además, el uso de tablas y/o el diagrama de árbol y, en esos casos, se consideró que se alcanzaba el mayor nivel de idoneidad. Solo cuatro vídeos hicieron uso de un único registro, lo que se consideró una idoneidad didáctica baja para este indicador. Aun observándose un notable empleo de terminología en cada uno de los vídeos (LE3), conviene destacar que ninguno de ellos mencionó las frecuencias relativas y, solo uno, el concepto de experimento determinista. También es preciso señalar el empleo frecuente de términos distintos a los mencionados en el indicador como, por ejemplo, azar o aleatoriedad. Así, para que la idoneidad del vídeo fuese considerada como alta en este indicador se entendió que no era necesario emplear todos los términos de su definición, valorando más la precisión y la frecuencia de aparición que el número de términos diferentes que se mostraban. La idoneidad didáctica del indicador LE4 fue consistente con el comportamiento de los indicadores SP2 y LE1, entendiendo que la máxima valoración quedaba supeditada al planteamiento de una muestra significativa de experiencias manifestadas mediante diversas representaciones, aspecto cuya dificultad de interpretación se comentará más adelante.

La componente de reglas se valora mediante seis indicadores, cuya idoneidad didáctica fue mayoritariamente media o baja. Es más, ninguno de los vídeos obtuvo una idoneidad alta en tres de los indicadores (RG3, RG4 y RG6). Respecto al primer indicador de esta componente (RG1) fue frecuente el uso de definiciones recursivas, especialmente al definir el azar como algo "que ocurre de manera aleatoria" y la aleatoriedad como algo que "depende del azar", pero también al definir la probabilidad: "La probabilidad, básicamente, consiste en medir o determinar cuantitativamente la probabilidad de que un determinado suceso ocurra en un determinado resultado". También se detectaron definiciones y procedimientos que contenían errores o imprecisiones, como confusiones con las nociones de suceso y experimento aleatorio: "los resultados de estos sucesos aleatorios varían", "cuando repetimos muchas veces un suceso es probable que unos resultados nos salgan más veces que otros", "lanzar una moneda al aire es un suceso equiprobable". También se encontraron definiciones a partir de un ejemplo: "un suceso elemental sería, por ejemplo, la probabilidad de sacar un 1". En algunos de los vídeos que incluían el concepto de espacio muestral se encontraron errores al definirlo como, por ejemplo, indicar el espacio muestral como la suma de los posibles resultados (E={Rojo+Azul+Verde}). En cuanto a los procedimientos, en uno de los vídeos aparece el error de confundir el cálculo de la probabilidad de un suceso compuesto con la probabilidad condicionada. Respecto al segundo indicador (RG2) de esta componente, la mayoría de los vídeos no presentaron una definición del concepto de probabilidad, sino que lo relacionaron con otros conceptos cuya definición sí se formuló explícitamente, como el azar o la aleatoriedad. Este hecho llama la atención, si tenemos en cuenta que la consigna era diseñar un vídeo educativo que abarcase contenidos nuevos. Por tanto, se aborda un concepto sin presentar su significado. Por otro lado, aunque en la mayoría de los vídeos se definieron los distintos tipos de sucesos, no todos presentaron proposiciones relacionadas con su probabilidad y ninguno presentó propiedades de las frecuencias relativas (RG3), lo que motivó la ausencia de vídeos de idoneidad alta para este indicador. En ningún vídeo se trabajó la estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad (RG4). Respecto a RG5, en algunos vídeos no se abordaba el cálculo de probabilidades y se consideraron de idoneidad baja, a pesar de que algunos vídeos estaban adecuadamente diseñados para el nivel educativo al que se dirigían. En la mayoría de los vídeos sí se abordó el cálculo de probabilidades, aunque recurriendo a la regla de Laplace como único procedimiento y sin comentar las condiciones de aplicabilidad (RG5), omitiéndose otras técnicas como las tablas de contingencia o los diagramas de árbol. Estos

solo se mencionaron, junto con la regla de Laplace, en tres vídeos, a los que se otorgó una idoneidad alta. En pocos vídeos se propusieron situaciones donde el alumnado tuviera que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos (RG6), aunque puntualmente aparecieron cuestiones como "¿sabríais explicarme qué es el azar y si está relacionado con la probabilidad?", que recibieron una valoración de idoneidad media.

En relación con la componente de los argumentos, se observó un comportamiento dispar entre los tres indicadores que la conforman. Por un lado, la mayoría de los vídeos presentaron explicaciones, comprobaciones o demostraciones adecuadas al nivel educativo al que se dirigen (AR1), aunque se redujo la idoneidad de aquellos que omitían argumentos como calcular la probabilidad de un suceso compuesto sin explicar la operación lógica que interviene en el proceso. Por otro lado, no se encontraron simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas (AR2) y hubo escasez de situaciones donde el alumno tuviera que argumentar (AR3). Lo primero es coherente con la baja idoneidad didáctica detectada en los indicadores LE3, RG3 o RG4. En cuanto a lo segundo, aunque entendemos que quizá el formato del material didáctico analizado puede percibirse como poco apropiado para la argumentación (AR3) y generación de ideas por parte del alumnado (RG6), la posibilidad de incluir preguntas interactivas en el vídeo permitía dar respuesta a estos indicadores, como sí se hizo en alguno de ellos. No obstante, la mayoría de los vídeos que usaron preguntas interactivas lo hicieron para proponer nuevas oportunidades de práctica del cálculo de probabilidades y no tanto la argumentación (AR3) o negociación (RG6) de ideas, lo que justificó una idoneidad principalmente media o baja en estos indicadores.

Las valoraciones de la última componente reflejaron una idoneidad didáctica media en cuanto a las relaciones entre objetos matemáticos (RL1) y baja con respecto a la conexión entre los diversos significados de la probabilidad (RL2), hecho avalado por los resultados obtenidos para el indicador SP1. Sobre RL1, se consideró una idoneidad didáctica media cuando una definición o procedimiento teórico era implícitamente vinculado con su aplicabilidad práctica, asignando una idoneidad alta cuando la conexión fuese explícita (algo que ocurrió solo en dos vídeos). También conviene detallar la ausencia de hilo conductor que relacione distintos conceptos relativos a la probabilidad. Por ejemplo, el vídeo comenzaba con una introducción dedicada a la definición de conceptos como probabilidad, azar, experimentos aleatorios, tipos de sucesos, etc., seguida, sin solución de continuidad, por una explicación del cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.

En relación con el segundo objetivo del trabajo, debemos señalar algunas discrepancias entre los revisores, que surgen de las posibles diferentes interpretaciones de los indicadores definidos por Beltrán-Pellicer et al. (2018b) y que abren una línea de investigación futura. Con carácter general, en algunos indicadores se considera necesario precisar qué significa ser representativo en cuanto al número de muestras (SP2) o de contextos (SP3), o cuántos registros (LE1) o términos (LE3) deben aparecer. A nuestro juicio, una cuantificación de estos indicadores o un acuerdo previo reduciría las discrepancias entre revisores. Sería interesante matizar si, por ejemplo, una amplia muestra de contextos o un número elevado de registros repetitivos o de escasa demanda cognitiva, pueden compensar que la práctica que se propone sea puramente reproductiva, como ocurre en alguno de los vídeos, que dedican un tiempo excesivo a ejercitar un determinado procedimiento, en lugar de profundizar en otro tipo de procesos matemáticos escasamente representados como la argumentación.

De modo más concreto, se detecta que la inexistencia de una definición clara del significado intuitivo o informal de la probabilidad puede que dificulte identificar su presencia en los vídeos, algo que es más claro con los otros significados de la probabilidad y que afecta a la valoración del indicador SP1. Así, algunos revisores se plantean que expresiones relativas a creer que un suceso es más o menos probable que otro puedan ser consideradas como un uso implícito del significado intuitivo de la probabilidad. Esta discrepancia entre los revisores podría tener el preocupante sustrato de que el significado intuitivo no haya sido realmente comprendido por los maestros en formación.

Por otro lado, el indicador SP2 genera un disenso derivado de si una idoneidad didáctica alta requiere distinguir entre experiencias aleatorias y deterministas, o basta con que se proponga una muestra representativa de las aleatorias.

También es controvertida la interrelación entre algunos indicadores, como LE1 y LE4, pues no queda claro hasta qué punto la idoneidad didáctica del segundo ("se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios en los diferentes registros mencionados") queda supeditada a la idoneidad del primero ("se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias señalando las relaciones entre las mismas"). Es decir, ¿el uso de pocos registros resulta en una baja idoneidad de LE1 y LE4? o, por el contrario, si se proponen situaciones de interpretación respecto a los registros utilizados, ¿se puede otorgar una idoneidad alta a LE4 a pesar de que sean pocos los registros utilizados?

Se detecta la necesidad de matizar si en los indicadores LE3, RG3, RG4 y AR2, en los que interviene el concepto de frecuencia relativa, se puede considerar una idoneidad media si en el vídeo se comenta la realización de una serie larga de experimentos o se discute la probabilidad de todos los sucesos posibles dentro de un experimento, sin mencionar las frecuencias relativas. De la interpretación más o menos restrictiva de este matiz, surgieron diferencias en las valoraciones.

Por último, la idoneidad del indicador RG5 queda supeditada al nivel educativo al que vaya dirigido el vídeo, ya que presenta un escenario (el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace) utópico en niveles educativos iniciales, quedando su idoneidad parcialmente subestimada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A la vista de los resultados sobre la valoración de la idoneidad didáctica de los vídeos educativos elaborados por EPM, se detecta la necesidad de implementar acciones formativas que permitan reforzar la importancia de considerar y relacionar los distintos significados de la probabilidad en el ámbito de la matemática escolar, la alfabetización probabilística en contexto, la problematización, la transición de unos registros de representación a otros, y la generación y argumentación de conceptos y procedimientos, como así señalaron Alsina, Vásquez, Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz (2020). Además de identificar los errores e imprecisiones evidenciadas por los vídeos respecto a su conocimiento del contenido, se hace patente la necesidad de concienciar a los EPM sobre la importancia de movilizar otros elementos clave de la práctica matemática avalados por la literatura científica relativa a la didáctica de la probabilidad. Por ello, de acuerdo con Burgos et al. (2020), se propone como futura tarea profesional que sean los propios maestros en formación quienes valoren la idoneidad epistémica de los vídeos educativos aquí analizados, brindándoles así la oportunidad de aprender *sobre* y *para* la práctica, desarrollando su mirada profesional, entre otras competencias docentes (Ivars, Fernández, y Llinares, 2017). También parece interesante analizar la débil influencia de los significados, contextos y procesos matemáticos fomentados por los formadores en las tareas profesionales realizadas por los EPM. Por ejemplo, ¿qué motivos llevan a los EPM a movilizar con mayor asiduidad el significado clásico de la probabilidad en simulaciones de su práctica docente cuando la importancia de trabajar el resto de los significados es promovida por sus formadores?

Del segundo objetivo de investigación se concluye la necesidad de matizar para algunos de los indicadores los criterios de cada una de las valoraciones de la escala (baja, media o alta). Puesto que la idoneidad didáctica es una herramienta pensada para valorar desde la generalidad de una sesión de clase hasta la especificidad de un material didáctico, es preciso concretar cómo se debe entender la idea de la representatividad en vídeos con una duración tan limitada como los considerados. La concreción de estos indicadores a modo de rúbrica también supone una tarea profesional de alto interés formativo.

Referencias

Alsina, Á., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L.J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épsilon – Revista de Educación Matemática, 104*, 99-128.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME, 8*(3), 247-264.

Batanero, C., y Godino, J. D. (2002). Estocástica para maestros. En J.D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 694-766). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Bell, C. (2020). *Rating teaching components and indicators of video observations.* http://www.oecd.org/education/school/GTI-TechReport-Chapter6.pdf

Beltrán-Pellicer, P., y Giacomone, B. (2021). Una primera aproximación al análisis de vídeos educativos de estadística: el caso de la mediana. *Números, 106*, 53-61.

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Burgos, M. (2018a). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J.D., y Giacomone, B. (2018b). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 526-548.

Borba, M.C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., y Aguilar, M.S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM, 48*(5), 589-610.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., y Godino, J.D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía, 78*(275), 27-49.

Godino, J.D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J.D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Howard, E., Meehan, M., y Parnell, A. (2017). Live lectures or online videos: students' resource choices in a first-year university mathematics module. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(4), 530–553.

Ivars, P., Fernández, C., y Llinares, S. (2017). Uso de una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 315-324). Zaragoza: SEIEM.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L.J., De Coninck, K., Vanderlinde, R., y Valcke, M. (2018). Exploring the effectiveness of video-vignettes to develop mathematics student teachers' feedback competence. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), 1-17.

Myllykoski, T. (2016). *Educational videos and use of tools in mathematics remedial instruction* (Tesis de maestría). Tampere University of Technology: Finlandia.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2019). Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. *REVEMAT, 14*, 1-20.

Vásquez, C., García- Alonso, I., Seckel, M.J., y Alsina, Á. (2021). Education for sustainable development in primary education textbooks - An educational approach from statistical and probabilistic literacy. *Sustainability, 13*, 1-21.

NOTAS AL PIE EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES DEL SIGLO XIX. EL CASO DE JUAN CORTÁZAR[1]

Footnotes in Spanish 19th Century Textbooks. The case of Juan Cortázar

Muñoz-Escolano, J. M.[a] y Oller-Marcén, A. M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

El análisis de libros antiguos de Matemáticas es una importante línea de trabajo en el ámbito de la Historia de la Educación Matemática y el siglo XIX resulta un periodo de especial interés debido a la proliferación de libros de texto que se produjo durante esa época. Desde el punto de vista de la Educación Matemática no solo resulta de interés el estudio del contenido, sino que también ciertos elementos de la obra (prólogos, notas al pie, etc.) proporcionan información relevante para los investigadores. En este trabajo abordamos el estudio de las notas al pie de algunas obras de uno de los autores españoles más influyentes del siglo XIX: Juan Cortázar. Las obras elegidas se dirigen a públicos diferentes (desde primera enseñanza hasta universidad) y las notas se analizan desde el punto de vista de su función y su temática.

Palabras clave: *Historia de la Educación Matemática, siglo XIX, libros de texto, paratextos, notas al pie*

Abstract

The analysis of old Mathematics books is an important line of work in the field of History of Mathematics Education and the 19th century is particularly interesting period due to the proliferation of textbooks that took place during that time. From the point of view of Mathematics Education, the content in not the only interesting aspect, since certain elements of the work (prologues, footnotes, etc.) also provide relevant information for researchers. In this work, we approach the study of the footnotes of some works of one of the most influential Spanish authors of the 19th century: Juan Cortázar. The selected works are addressed to different audiences (from elementary education to university) and the notes are analyzed from the point of view of their function and their theme.

Keywords: *History of Mathematics Education, 19th century, textbooks, paratexts, footnotes*

INTRODUCCIÓN

Durante el siglo XIX se desarrollaron las primeras leyes educativas en España que terminarían desembocando en la denominada Ley Moyano de 1857 cuyo espíritu se mantuvo vigente prácticamente hasta la Ley General de Educación de 1970. También es en el siglo XIX cuando se fundan las Escuelas Normales (Carrillo Gallego, 2005). No es de extrañar, por lo tanto, que "el ámbito en el que se movieron los físicos y matemáticos españoles de aquella centuria fue, con muy pocas excepciones, el de la enseñanza" (Sánchez Ron, 1992, p. 58). En relación con esto, durante la época se produjo un gran aumento en la producción de libros de texto de matemáticas, así como una popularización de los mismos que ha llevado a que algunos autores denominen "periodo del libro de enseñanza" al siglo XIX (Gómez, 2011, p. 13).

[1] Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (Grupo S60_20R).

Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2021). Notas al pie en libros de texto españoles del siglo XIX. El caso de Juan Cortázar. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 457 – 464). Valencia: SEIEM.

El análisis de libros antiguos de Matemáticas es una importante línea de trabajo en el ámbito de la Historia de la Educación Matemática, entre otros motivos, porque permite contextualizar los conceptos matemáticos y conocer diversos acercamientos (López-Esteban, 2019). Fan, Zhu y Miao (2013) señalan que a nivel internacional los estudios más frecuentes son aquellos que se centran en el análisis del tratamiento recibido por algún contenido y en el caso de la investigación histórica esta tendencia parece mantenerse. Así, a modo de ejemplo, podemos citar los trabajos de González Astudillo y Sierra Vázquez (2004) sobre los puntos críticos de funciones o de Picado (2012) sobre el sistema métrico decimal.

En cualquier caso, aunque un buen número de trabajos se centran de forma prioritaria en el análisis del contenido matemático, cabe señalar que existen cuestiones no directamente matemáticas que merece la pena tener en cuenta a la hora de analizar globalmente un texto matemático antiguo. La originalidad de la obra, los principios didácticos seguidos por el autor, etc. (Maz-Machado & Rico, 2015) son aspectos que permiten contextualizar la obra, valorar su importancia o evaluar su posible impacto en la formación matemática de la época. Muchos de estos elementos, además, no se encuentran presentes en el cuerpo del texto, sino que pueden identificarse en otros elementos como los prólogos, las advertencias y dedicatorias, las notas al pie de página, etc.

De las consideraciones anteriores surge la siguiente pregunta de investigación: ¿qué información relevante desde el punto de vista de la Historia de la Educación Matemática está presente en las notas al pie de los libros de texto y manuales escolares del siglo XIX? En este trabajo, para dar respuesta a esta pregunta de investigación, abordamos los siguientes objetivos.

- Determinar la presencia de notas al pie en una selección de obras de un autor influyente en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas en España en el siglo XIX.
- Analizar el contenido de las notas al pie para determinar su función, así como los temas tratados por el autor en ellas.

MARCO TEÓRICO

Con el término 'paratexto' se definen todos aquellos acompañamientos de un texto escrito que hacen que dicho texto "se convierta en un libro" (Genette, 2001). En la Tabla 1 se proporciona un listado relativamente exhaustivo de posibles paratextos.

Tabla 1. Posibles paratextos de una obra literaria (Genette, 2001).

Peritextos del editor (portada, portadilla, anexos, etc.)	Epigramas
Nombre del autor	Prefacios
Título	Intertítulos
Prière d'insérer[2]	Notas
Dedicatorias (del trabajo y del ejemplar)	Epitextos (públicos o privados)

La presencia de paratextos es especialmente importante y relevante en obras de carácter literario. No obstante, existen diversos trabajos centrados en el análisis de paratextos de libros de texto de matemáticas. Barbosa (2014) analiza los paratextos de traducciones al portugués de manuales franceses utilizados en la *Real Academia Militar de Río de Janeiro*. Por su parte, Andrade y de Souza Ferreira (2015) ilustran la contribución que el análisis de los paratextos puede hacer a la Historia de la Educación Matemática estudiando en detalle los paratextos presentes la obra *Arithmetica theorico-pratica* de André Perez y Marín.

También podemos encontrar trabajos centrados en el análisis de paratextos concretos, sobre todo en el análisis de prólogos. Así, Oller-Marcén y Muñoz-Escolano (2019) muestran que los prólogos constituyen una unidad de análisis interesante para identificar concepciones y creencias del autor de

[2] Este término no parece tener traducción en castellano. Genette (2001, p. 91) lo define como una "hoja impresa que contiene indicaciones sobre una obra y que es adjuntada a los ejemplares que se envían a la crítica".

la obra analizando el caso del *Compendio Mathematico* de Tosca. Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2020) realizan un estudio similar, aunque en mayor profundidad, analizando el conjunto de los textos sobre Álgebra escritos en español en el siglo XVI.

Al margen de los prólogos, no existen demasiados trabajos centrados en analizar la presencia y el contenido de paratextos concretos en libros de texto de matemáticas. Podemos mencionar el trabajo de Puig (2006) centrado en analizar detalladamente el contenido de una nota al pie del *Tratado Elemental de Matemáticas* de Vallejo y que, no obstante, su carácter anecdótico, muestra que las notas al pie pueden contener información de interés desde el punto de vista de la historia de la educación matemática.

Genette define las notas (2001, p. 272) del siguiente modo:

> Una nota es un enunciado de extensión variable (una palabra es suficiente) relativo a un segmento más o menos determinado del texto, y dispuesto ya sea junto a ese segmento o en referencia a él. El carácter siempre parcial del texto de referencia, y en consecuencia el carácter siempre local de enunciado de la nota, me parece el rasgo formal más distintivo de este elemento del paratexto, que lo opone al prefacio entre otros.

De entre los diversos tipos existentes, nos centramos aquí en las notas originales (de primera edición) presentes en textos de carácter discursivo. En este ámbito, Genette (2001) distingue hasta ocho funciones posibles para las notas: proporcionar definiciones o explicaciones de términos usados en el texto, aportar traducciones de citas que aparecen en el texto, proporcionar referencias de citas y fuentes empleadas, exhibir autoridades o documentos de apoyo o confirmativos, precisar un hecho mencionado de forma vaga o descuidada en el texto, señalar incertidumbres o complejidades que el autor ignoró en el texto por considerar que no interesan al lector ordinario, aportar argumentos suplementarios o anticipaciones a objeciones y, por último, realizar digresiones a propósito.

MÉTODO

Para alcanzar los objetivos indicados anteriormente, abordamos una investigación de carácter documental (McCulloch, 2004) a través de un estudio de caso de tipo exploratorio (Lune & Berg, 2017). El trabajo se ha desarrollado según las fases del método de investigación histórico: heurística, crítica (interna y externa) y hermenéutica; aplicadas al ámbito de la Historia de la Educación Matemática (González Astudillo, 2009).

El estudio realizado se centra en algunas de las obras de Juan Cortázar. En palabras de León-Mantero (2017, p. 319) se trata "del autor que probablemente más influencia tuvo en la difusión de las matemáticas escolares en España y en la formación matemática de los estudiantes españoles de la segunda mitad del siglo XIX". Fue autor de textos de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría dirigidos a todos los niveles educativos (desde primera enseñanza hasta universidad) que fueron reeditados en numerosas ocasiones, en algunos casos, hasta ya bien entrado el siglo XX. Además del ya citado, existen diversos trabajos que abordan el estudio de la vida y la obra de Cortázar desde el punto de vista de la historia de la educación matemática (León-Mantero & Maz-Machado, 2016; León-Mantero, Maz-Machado, Madrid & Jiménez-Fanjul, 2018; León-Mantero, Maz-Machado & Madrid, 2019).

De los doce textos escritos por el autor (algunos de ellos inéditos), las obras seleccionadas han sido:

- *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856).
- *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847).
- *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855).

Estas obras se han seleccionado con el objetivo de representar cada uno de los niveles educativos a los que el autor dirige su obra. Como su título indica, la *Aritmética práctica* se dirigía a alumnos de primera enseñanza y fue reeditada al menos 12 veces hasta 1900. El *Tratado de Geometría elemental*

estaba destinado a alumnos de segunda enseñanza, universidad y escuelas profesionales, se reeditó en 37 ocasiones hasta 1917, y formó parte de los listados de libros de texto para la enseñanza en secundaria desde 1848. Por último, el *Tratado de Geometría analítica* se dirigía a alumnos de universidades y escuelas superiores, se reeditó en 5 ocasiones hasta 1885, y desde su segunda edición de 1862 se señaló como obra de texto en dichas instituciones. En todos los casos hemos analizado versiones digitalizadas de la primera edición de estas obras disponibles en repositorios públicos. Así pues, en lo relativo a la crítica interna se garantizan los criterios de autenticidad, credibilidad, representatividad y significado señalados por Scott (1990) para investigaciones de tipo documental.

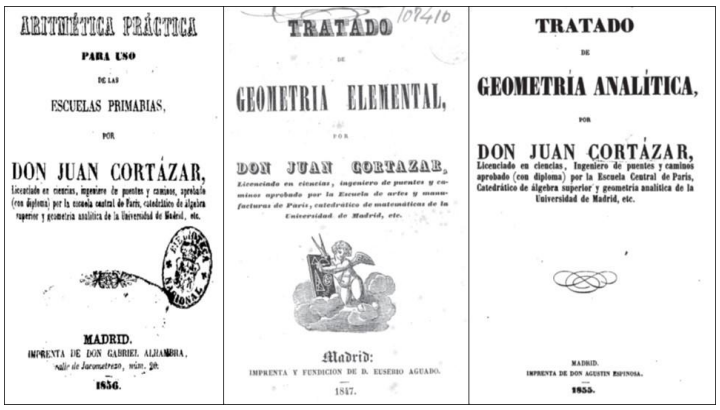


Figura 1. Portadas de las obras analizadas

La primera fase de análisis (crítica externa) se ha abordado de un modo deductivo. En primer lugar, se han identificado todas las notas al pie de cada una de las tres obras consideradas y, a continuación, se les ha asignado al menos una de las ocho funciones distinguidas por Genette (columna izquierda de la Tabla 2). En la segunda fase del análisis (hermenéutica) se ha analizado en detalle el contenido de las distintas notas al pie asignando a cada nota al pie, cuando ha sido posible, al menos una de las categorías señaladas por Maz-Machado y Rico (2015) que se presentan en la columna derecha de la Tabla 2.

Tabla 2. Categorías para en las dos fases del análisis

Funciones (Genette, 2001)	Temas (Maz-Machado & Rico, 2015)
F1 – Definir o explicar términos.	T1 – Actualización.
F2 – Traducir de fragmentos del texto.	T2 – Originalidad.
F3 – Mencionar de referencias o fuentes.	T3 – Rigor y precisión.
F4 – Exhibir autoridades y/o documentos de apoyo.	T4 – Interés social de las matemáticas.
F5 – Precisar afirmaciones o enunciados.	T5 – Principios filosóficos.
F6 – Señalar complejidades ignoradas en el texto.	T6 – Principios didácticos
F7 – Aportar argumentos suplementarios o anticipar objeciones.	
F8 – Realizar digresiones.	

En las dos fases de análisis se ha seguido una estrategia de triangulación de investigadores (Flick, 2004) de modo que cada uno de los dos investigadores implicados en el estudio asignaron independientemente las categorías a cada nota y, en los casos de discrepancia, se asignaron finalmente categorías tras un debate entre ellos. De este modo se mejora la confianza en las interpretaciones realizadas y aumenta la legitimación del estudio en el sentido de Onwuegbuzie y Leech (2007).

RESULTADOS

En primer lugar, presentamos un resumen sobre el número de notas al pie identificadas en cada una de las tres obras analizadas (Tabla 3). Como podemos observar, la densidad de notas al pie es similar en las 3 obras, con un muy ligero decrecimiento en su presencia conforme aumenta el nivel de los destinatarios objetivos del texto.

Tabla 3. Notas al pie en las obras analizadas

Obra	Notas al pie	Páginas	Densidad
Aritmética práctica	14	108	0,13
Geometría elemental	28	237	0,12
Geometría analítica	43	464	0,09

En cuanto a las finalidades de las notas al pie en cada texto, la Tabla 4 nos permite apreciar que, en mayor o menor medida, todos los tipos de finalidades están presentes en alguno de los tres textos analizados. Además, observamos que existen notas que cumplen más de una finalidad.

En cuanto a su frecuencia, las categorías de finalidades más presentes en las tres obras analizadas de Cortázar son F1, F5, F6 y F7, mientras que las categorías F2, F3, F4 son muy escasas.

Tabla 4. Frecuencia (porcentaje sobre el total de notas al pie) de las finalidades en las obras analizadas

Finalidad	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Aritmética Práctica	8 (57%)	0	0	0	5 (36%)	4 (29%)	2 (14%)	1 (7%)
Geometría Elemental	8 (29%)	0	2 (7%)	1 (4%)	12 (43%)	9 (32%)	12 (43%)	4 (14%)
Geometría Analítica	8 (19%)	1 (2%)	3 (7%)	1 (2%)	17 (40%)	18 (42%)	21 (49%)	5 (12%)

Como ya hemos dicho, existen notas con las que el autor perseguía más de una finalidad. Por ejemplo, en el texto *Aritmética práctica* al presentar por primera vez el metro como unidad de medida de longitud, se incluye la siguiente nota al pie (Cortázar, 1856, p. 93): "(*a*) Diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre *que pasa por París*, y no de un meridiano cualquiera, pues es muy probable que los meridianos de la tierra sean desiguales". Esta nota reúne rasgos tanto de la categoría F1 (pues el autor presenta la definición del término 'metro' citado en el texto) como de la categoría F6 (puesto que el autor aporta una información adicional acerca de la desigualdad de los meridianos terrestres, complejidad ignorada en el texto por el autor y que cree conveniente incluir en la nota).

A pesar de que las categorías F1, F5, F6 y F7 son las más abundantes en los tres textos, existen ciertas diferencias entre las obras. La categoría F1 es la más frecuente en el texto *Aritmética práctica*, que está dedicado a la primera enseñanza. Sin embargo, esta categoría va perdiendo presencia relativa en las obras dedicadas a segunda enseñanza y educación superior, en las que aparece una mayor cantidad de notas asociadas a las finalidades F5, F6 y, sobre todo, F7. Así, casi la mitad de las notas del texto *Geometría analítica* tienen como objetivo aportar algún argumento suplementario a algún resultado o demostración presente en el texto (categoría F7). Los ejemplos más claros y frecuentes de esta situación los encontramos cuando, después de demostrar un enunciado o teorema, Cortázar señala en nota al pie, que existe alguna otra forma más breve de demostrarlo (ver Figura 2).

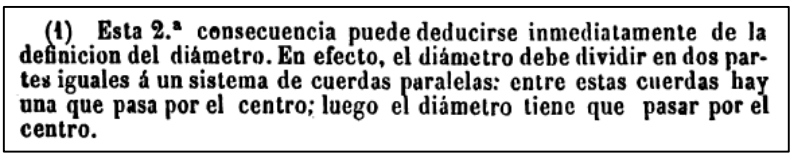

(1) Esta 2.ª consecuencia puede deducirse inmediatamente de la definicion del diámetro. En efecto, el diámetro debe dividir en dos partes iguales á un sistema de cuerdas paralelas: entre estas cuerdas hay una que pasa por el centro; luego el diámetro tiene que pasar por el centro.

Figura 2. Nota al pie correspondiente a F7 (Cortázar, 1855, p. 140)

Las notas incluidas en la categoría F6 tienen como objeto aportar una información adicional (relacionada de forma directa con el texto) compartiendo algunos aspectos o matices que el autor no ha creído imprescindible incluir en el mismo y que se dirigen a lectores más expertos o interesados. Por ejemplo:

> Obsérvese que la demostración geométrica de estos teoremas comprende a toda clase de números comensurables e incomensurables; mientras que el razonamiento con que la mayor parte de los autores

> pretenden probar dichos teoremas en el álgebra, supone que los números son comensurables, y aún números enteros (Cortázar, 1847, p. 115).

Las notas asociadas a la categoría F5 se utilizan para precisar de forma muy concreta algún aspecto del texto y, por lo tanto, suelen tener una extensión y carga argumentativa menor que las anteriores. Un ejemplo lo encontramos cuando el autor, al hablar en el texto de la división de dos números naturales, señala en una nota al pie (Cortázar, 1856, p. 25): "Si la división es inexacta, entiéndase cociente entero" para precisar la definición de 'cociente' que se da en el texto. En otros casos, este tipo de notas se utilizan para introducir ciertos abusos de lenguaje, como en el siguiente ejemplo (Cortázar, 1855, p. 8): "En adelante, con objeto de abreviar, en lugar de decir *la recta cuyo valor es* a, b, *etc.*, se dirá *la recta* a, b, *etc.*".

Entre las categorías F5, F6 y F7 es donde mayor cantidad de notas encontramos con finalidades múltiples. Muchas de las notas clasificadas a la vez como F5 y F6 son aquellas que precisan y además demuestran que algunas de las condiciones aportadas en una definición o en las hipótesis de un resultado en el texto son necesarias y, por otro lado, muchas de las notas clasificadas como F6 y F7 simultáneamente explican un paso de una demostración que no está suficientemente claro en el texto.

Por último, indicamos que las notas asociadas a las categorías F3 y F4 son escasas y están presentes únicamente en las obras dirigidas a segunda enseñanza y enseñanza superior. En ellas se hace referencia principalmente a otros textos del propio autor y únicamente se mencionan explícitamente tres autores: Lambert y Euler (tan solo por el nombre) y Legendre (del que se cita su Geometría).

Respecto a las diferentes temáticas abordadas en las notas, la Tabla 5 ilustra la presencia de todas las temáticas consideradas, si bien algunas aparecen de forma poco significativa. Además, como ya sucedió en el caso de las temáticas, se han identificado notas que abordan más de un tema.

Tabla 5. Frecuencia de las temáticas de las notas presentes en las obras analizadas

Temática	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Aritmética práctica	0	1 (7%)	8 (57%)	4 (29%)	1 (7%)	3 (21%)
Geometría elemental	8 (11%)	1 (4%)	26 (93%)	0	2 (7%)	2 (7%)
Geometría analítica	0	3 (7%)	42 (98%)	0	2 (5%)	4 (9%)

Como podemos observar, el tema mayoritario de las notas analizadas está relacionado con el rigor y la precisión (T3). De hecho, en el caso de las obras dirigidas a segunda enseñanza y a enseñanza superior, este tema aparece en la práctica totalidad de las notas analizadas. En la *Aritmética práctica*, sin embargo, se aprecia un mayor equilibrio entre este tema y aquellos menos relacionados con aspectos puramente matemáticos (T4, T5 y T6).

Como cabía esperar, se ha detectado un cierto grado de asociación entre las finalidades de la nota y los temas abordados en la misma. Así, notas como la mostrada en la Figura 2 (que se corresponde con la función F7) abordan claramente el tema T3. Del mismo modo, las funciones F3 y F4 tienen una cierta relación con los temas T1 y T2 (Figura 3).

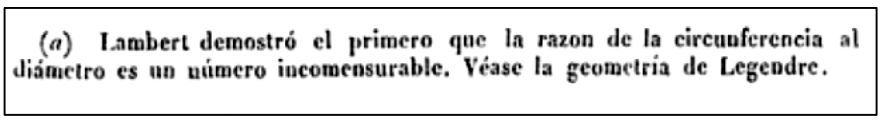

(*a*) Lambert demostró el primero que la razon de la circunferencia al diámetro es un número incomensurable. Véase la geometría de Legendre.

Figura 3. Nota al pie correspondiente a F3, F4 y T1 (Cortázar, 1847, p. 98)

Por último, los temas de mayor relevancia desde el punto de vista de la Educación Matemática (T5 y T6) suelen estar vinculados a notas cuya finalidad es incluir digresiones (F8). Un ejemplo lo encontramos en la siguiente nota (Cortázar, 1847, p. 27): "Esta comprobación debe hacerse mentalmente, sin escribir ningún guarismo. Recomendamos este método de comprobación a los profesores; los que lo sigan, pronto adquirirán la suficiente destreza y verán la ventaja de este método sobre los otros".

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos abordado el análisis de las notas al pie en tres obras de Juan Cortázar. Las notas al pie son un elemento importante de una obra escrita al que no se ha prestado demasiada atención específica en el ámbito de la Historia de la Educación Matemática. En el análisis realizado hemos constatado que su presencia es relativamente importante en las obras estudiadas (en torno a una nota por cada diez páginas). Del mismo modo, las categorías utilizadas para el análisis se han demostrado útiles, tanto las relativas a las funciones (Genette, 2001) como las referidas a la temática (Maz-Machado & Rico, 2015). Se aprecia, no obstante, que resultaría de interés para futuras investigaciones en esta línea un refinamiento de la categoría T3 (asociada al rigor y precisión) que nos permita realizar un análisis más fino, sobre todo teniendo en cuenta que se trata del tema más frecuente.

Cortázar se formó en Francia y vivió en Inglaterra, en consecuencia, cabría esperar una clara influencia de autores de dichos países en su obra. Sin embargo, estas posibles influencias no se ponen de manifiesto en sus notas al pie, que incluyen muy escasas referencias. Este hecho coincide con lo observado por León-Mantero (2017), quién señala que esta escasez de referencias es un fenómeno generalizado en toda la obra del autor. Por otro lado, la presencia de notas que abordan los temas T4, T5 y T6 (aunque no muy frecuentes excepto en el caso de la *Aritmética práctica*), evidencian "el interés de uno de los autores de mayor influencia en la formación de escolares del siglo XIX, por establecer estrategias didácticas" (León-Mantero, Maz-Machado, Madrid, & Jiménez-Fanjul, 2018, p. 43). La abundancia de notas relacionadas con la categoría T3 ponen de manifiesto elementos esenciales de la obra de Cortázar como "su rigurosidad […] y la preocupación por ofrecer al lector un texto matemático de alta calidad" (León-Mantero, Maz-Machado, & Madrid, 2019, p. 167).

Hemos observado diferencias relativamente claras entre la *Aritmética práctica* y los dos textos de Geometría, tanto desde el punto de vista de las funciones como desde el de los temas. Pensamos que estas diferencias se deben principalmente a los destinatarios objetivos a los que se dirigen las obras, de modo que la necesidad de abordar unos temas u otros varía y también la función de las notas incluidas. Así, mientras la definición o explicación de términos (F1) supone el 57% de las notas en el texto dedicado a la primera enseñanza (y, por tanto, a principiantes sin conocimientos anteriores), sólo representa el 19% de las notas del texto destinado a la universidad (donde la necesidad de aportar explicaciones de términos es menor).

Finalmente, pensamos que los resultados obtenidos en este estudio de caso abren la puerta a realizar investigaciones más amplias en esta línea.

Referencias

Andrade, M.M., & de Souza Ferreira, M.P. (2015). Uma análise paratextual da obra "arithmetica theorico-pratica". *Conexões-Ciência e Tecnologia*, *9*(4), 153-165.

Barbosa, E.M. (2014). *As matemáticas puras e mistas e a Academia Real Militar do Rio de Janeiro: análise de paratextos de tratados, elementos e compêndios*. (Tesis de maestría). Universidad de Sao Paulo, Sao Paulo. Recuperada de https://teses.usp.br/teses/disponiveis/100/100135/tde-01122014-225110/es.php.

Carrillo Gallego, D. (2005). *La Metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-68) y sus antecedentes*. (Tesis doctoral). Universidad de Murcia, Murcia. Recuperada de https://www.tesisenred.net/handle/10803/78030.

Cortázar, J. (1847). *Tratado de Geometría elemental*. Madrid: Imprenta y fundición de D. Eusebio Aguado.

Cortázar, J. (1855). *Tratado de Geometría analítica*. Madrid: Imprenta de Don Agustín Espinosa.

Cortázar, J. (1856). *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*. Madrid: Imprenta de Don Gabriel Alhambra.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633-646.

Flick, U. (2004). Triangulation in qualitative Research. En U. Flick, E. von Kardoff, & I. Steinke I. (Eds.), *Companion to Qualitative Research* (pp. 178-183). London: SAGE.

Genette, G. (2001). *Umbrales*. México: Siglo XXI.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon*, *28*(1), 9-22.

González Astudillo, M.T. (2009). La investigación en historia de la educación matemática. *Educación y Ciencia*, *1*(36), 37-58.

González Astudillo, M.T., & Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389-408.

León-Mantero, C. (2017). *Juan Cortázar y su contribución a la formación matemática española en el siglo XIX*. (Tesis doctoral). Universidad de Córdoba, Córdoba. Recuperada de https://helvia.uco.es/handle/10396/14562.

León-Mantero, C., & Maz-Machado, A. (2016). Análisis comparativo de las primeras ediciones del Tratado de Álgebra superior de Juan Cortázar. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 609). Málaga: SEIEM

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., & Madrid, M.J. (2019). Juan Cortázar (1809-1873): profesor, autor y matemático. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, *22*(1), 159-169.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Madrid, M.J., & Jiménez-Fanjul, J. (2018). Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: los tratados elementales de Juan Cortázar. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, *52*, 34-45.

López-Esteban, C. (2019). La institucionalización del análisis matemático en el siglo XVIII a través de libros históricos y su reflejo en la enseñanza para Educación Secundaria en España a través del análisis de manuales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 95-116). Valladolid: SEIEM.

Lune, H., & Berg, B. L. (2017). *Qualitative Research Methods for the Social Sciences*. Essex: Pearson.

McCulloch, G. (2004). *Documentary research in education, history, and the social sciences*. New York: Routledge/Falmer.

Maz-Machado, A., & Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 49-76.

Muñoz-Escolano, J.M., & Oller-Marcén, A.M. (2020). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados en España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación*, *11*, 51-85.

Oller-Marcén, A.M., & Muñoz-Escolano, J.M. (2019). Conceptions about mathematics, its teaching and its learning in the Compendio Mathematico (1707) written by the Spanish Thomas Vicente Tosca (1651-1723). *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(64), 635-648.

Onwuegbuzie, A. J., & Leech, N. L. (2007). Validity and qualitative research: An oxymoron? *Quality & Quantity*, *41*(2), 233-249.

Picado, M. (2012). *El sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada,. Recuperada de https://digibug.ugr.es/handle/10481/35157.

Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En A. Maz, M. Torralbo, & L. Rico (Eds.). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Sánchez Ron, J.M. (1992). Las ciencias Físico-Matemáticas en la España del siglo XIX. *Ayer*, *7*, 51-84.

Scott J. (1990). *A matter of record, documentary sources in social research*. Cambridge: Polity Press.

MEDIACIONES UTILIZADAS CON ESTUDIANTES DE SEGUNDO Y CUARTO DE PRIMARIA AL REALIZAR UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN

Mediations used with Second and Fourth Elementary students when performing a generalization task

Narváez, R. y Cañadas, M. C.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación más amplia sobre pensamiento algebraico. Describimos aquí las mediaciones realizadas por un investigador con estudiantes de segundo (7-8 años) y cuarto (9-10 años) de primaria. Los estudiantes explicaron al investigador sus respuestas a un cuestionario que involucra una tarea de generalización en entrevistas individuales semiestructuradas. El investigador medió cuando el estudiante no avanzaba, estaba equivocado en sus respuestas o para pedir explicaciones. Identificamos diferentes tipos de mediaciones. Cada mediación cumplió un rol específico que ayudó a cada estudiante a generalizar. Las mediaciones invitar y desafiar fueron las más utilizadas. Desde el ámbito docente, este estudio proporciona algunas orientaciones sobre cómo guiar a los estudiantes hacia la generalización.

Palabras clave: *Educación Primaria, generalización, mediación, pensamiento funcional*

Abstract

This work is part of a broader investigation on algebraic thinking. We describe here the mediations carried out by a researcher with second (7-8 years) and fourth (9-10 years) primary school students. Students explained their responses to a questionnaire involving a generalization task to the researcher in individual semi-structured interviews. The researcher mediated when the student did not progress, he was wrong in his answers or to require explanations. We identify different types of mediations. Each mediation fulfilled a specific role that helped each student to generalize. Invite and challenge mediations were the most used. From the teaching field, this study provides some guidance on how to guide students towards generalizing

Keywords: *generalization, mediation, Primary Education, functional thinking*

INTRODUCCIÓN

Diferentes autores (e.g. Brizuela y Blanton, 2014; Warren, Miller y Cooper, 2013) destacan la importancia de potenciar el pensamiento funcional y la generalización en educación primaria. Trabajar la generalización no es una tarea sencilla, y menos con estudiantes de cursos iniciales. Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) identificaron algunos errores que se presentan al trabajar con en este proceso matemático. Esta situación justifica la necesidad de investigar una forma de guiar el proceso de generalización de los estudiantes. Así nos centramos en el rol de la mediación, tratado en otros ámbitos, pero no tanto en el pensamiento algebraico hasta la fecha. La mediación es un proceso de interacción destinado a generar experiencias de buen aprendizaje (Escobar, 2011). Hay escasos antecedentes que abordan la mediación y la generalización en estudiantes de diferentes cursos (e.g., Mata-Pereira y Ponte, 2017; Ureña, Ramírez y Molina, 2019) pero no con estudiantes de cursos iniciales y medios de educación primaria. Por ello, nos centramos en describir las mediaciones realizadas con estudiantes de segundo y cuarto de educación primaria al realizar una tarea de generalización. En concreto, abordamos la generalización desde un enfoque funcional, analizando la función de cada mediación en el proceso de generalización. Con este estudio hacemos una aproximación a la mediación y a la generalización en primeros cursos de educación primaria.

Narváez, R y Cañadas, M. C. (2021). Mediaciones utilizadas con estudiantes de segundo y cuarto de primaria al realizar una tarea de generalización. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 465 – 472). Valencia: SEIEM.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

Un elemento clave del pensamiento funcional es la generalización, considerada por Mason (1996) como el núcleo central del álgebra. Cañadas y Castro (2007) describen que la generalización se produce cuando una "conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados" (p. 57). La generalización permite ver particularidades de una situación matemática y sacar una conclusión que va más allá de esas particularidades, pasando de lo particular a lo general y ver lo general en lo particular (Mason, 1996). En la generalización, juega un rol importante el patrón o pauta que se observa a partir de los casos particulares. La generalización es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse (Cañadas y Castro, 2007).

La mayor parte de las investigaciones sobre generalización en las primeras edades se realizan con la interacción del docente o investigador con los estudiantes. Partimos de la premisa de que el rol de estos agentes influye en las respuestas de los estudiantes, aun cuando no hay instrucción directa. Desde esta idea surge la importancia de analizar la mediación que se produce entre estos agentes educativos. La mediación es "un proceso de interacción pedagógica; social, dialógica, lúdica, consciente, intencional, sistemática, destinada a generar experiencias de buen aprendizaje" (Escobar, 2011, p. 60). En este proceso de mediar, se pueden explorar las respuestas de los estudiantes, a través de preguntas o acciones o desde la argumentación hasta el análisis de sus respuestas. La mediación es el conjunto de intervenciones realizadas hacia los estudiantes que contribuyen en el proceso de generalización, que va más allá de la mera formulación de preguntas (Ureña, et al., 2019), que conducen a experiencias positivas de aprendizaje. En este proceso de mediación, destacamos el rol del docente. Ponte, Quaresma y Mata-Pereira (2017) destacan acciones del docente que facilitan el aprendizaje de los estudiantes: (a) invitar, dirigida a iniciar una discusión; (b) apoyar/guiar, destinada a guiar a los estudiantes a resolver una tarea a través de preguntas u observaciones y ese punto, de manera explícita o implícita, el camino para que sigan; (c) informar/sugerir, cuando el maestro introduce información, da sugerencias, presenta argumentos o validar las respuestas de los estudiantes y (d) desafiar, cuando el docente busca que los estudiantes asuman el papel de producir nuevas representaciones, interpretar una declaración, establecer conexiones o formular un razonamiento o una evaluación. Ureña, et al., (2019) agregan cuestionar como acción del docente en la mediación. Esta mediación permite que los estudiantes corrijan errores en sus respuestas.

Algunas investigaciones, aunque escasas, relacionan las acciones o mediaciones de investigadores que asumen el rol de docentes en el proceso de generalización de estudiantes de últimos cursos de primaria. Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) describieron las intervenciones de un entrevistador ante errores en los que incurren estudiantes de 6° de educación primaria (11-12 años) durante el desarrollo de una tarea de generalización. Estas autoras distinguen entre acciones que requieren la acción del entrevistador de aquellas que requieren la acción del entrevistado. Entre los resultados, destacamos que las acciones mediadoras permitieron al estudiante cambiar su estrategia o la forma inadecuada en la que estaba entendiendo el patrón y la relación entre las variables implicadas en la tarea. Ureña, et al., (2019) analizaron la generalización y representación de generalizaciones evidenciada por estudiantes de cuarto curso (9 a 10 años). En sus conclusiones consideran que la mediación tiene un impacto elevado sobre la generalización de los estudiantes: ocho estudiantes entrevistados reconocieron y representaron la relación funcional de la tarea y justificaron sus respuestas tras la mediación.

Con base en los antecedentes presentados, la importancia que se le reconoce al mediador en el proceso de aprendizaje matemático y a la escasez de estudios relacionados con la mediación y generalización con estudiantes de cursos iniciales y medios de educación primaria, nos centramos en la generalización en un contexto algebraico y la mediación en cursos iniciales. En concreto,

nuestro objetivo de investigación es describir las mediaciones realizadas a estudiantes de segundo (7-8 años) y cuarto (9-10 años) de primaria, analizando la función de cada mediación en el proceso de generalización al abordar una tarea que involucra una función lineal.

MÉTODO

Este estudio forma parte de una investigación más amplia con estudiantes de educación primaria. El enfoque de esta investigación es de carácter mixto. Combinamos un conjunto de procesos de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos en un mismo estudio (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Así mismo, realizamos un estudio de casos, definido como "la descripción y el examen o análisis en profundidad de una o varias unidades y su contexto de manera sistémica y holística" (Hernández et al, 2014, p. 2).

La selección del centro fue intencional, según la predisposición del centro y de los docentes. Los sujetos de estudio fueron seis alumnos de segundo de educación primaria (7-8 años) y seis de cuarto (9-10 años) de educación primaria de un colegio concertado de niveles socio-económico y cultural bajos de Granada (España). Nos centramos en estos cursos por no existir estudios previos en estas edades. La selección de estos estudiantes fue según lo propuesto por la maestra de cada clase, considerando sus diferentes logros de aprendizaje. Tras una descripción general de lo acontecido con los seis estudiantes, presentamos un estudio de caso de un estudiante que destacó por su evolución desde antes de la mediación a después de la misma, pasando de no generalizar a lograrlo.

En nuestro estudio, dos investigadores del proyecto de investigación asumieron el rol de docentes. Ellos fueron los responsables de las sesiones y de todas las actividades que se llevan a cabo en el centro educativo. Los entrevistadores mediaron cuando el estudiante no avanzaba, daba respuestas erróneas o para pedirles justificar su respuesta. Su rol fue orientar a los alumnos y aclarar dudas.

Diseñamos e implementamos dos instrumentos de recogida de información: (a) un cuestionario individual escrito y (b) entrevistas semiestructuradas la cuales son "una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información" (Hernández et al. 2014, p. 403). Implementamos sendos cuestionarios a un grupo de segundo de primaria con 24 estudiantes y a otro de cuarto de primaria, con 25 estudiantes. Posteriormente realizamos la entrevista a seis estudiantes seleccionados de cada curso utilizando un protocolo de entrevista. Diseñamos las preguntas del cuestionario y de las entrevistas con base en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), partiendo de casos particulares, la organización de los mismos, la formulación de conjeturas, hacia la generalización. Tanto el cuestionario como el protocolo de entrevista fueron diseñados y validados por expertos investigadores miembros del proyecto en el que se desarrolla este trabajo. En la sesión 1, para ambos cursos, presentamos unas máquinas impresas en tamaño A3, en la que entraba un determinado número de bolas y salía otro número. Los números que entraban y salían estaban ocultos y, a medida que se dialogaba con los estudiantes, se mostraban el total de bolas que salían de la máquina. La relación entre el número de bolas que entraban (variable independiente) y el número de bolas que salían (variable dependiente) se regía por la función $f(x) = x+3$ para segundo de primaria y por la función $f(x) = 2x+1$ para cuarto de primaria. Planteamos a todos los estudiantes diferentes casos particulares mediante una representación pictórica de la máquina (ver Figura 1).

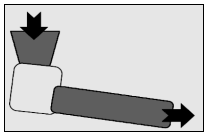


Figura 1. Representación pictórica de la máquina

Los estudiantes resolvieron preguntas sobre casos particulares. En ningún momento el entrevistador les indicó la relación funcional. Tras esta introducción, trabajaron sobre un cuestionario individual escrito. En ambos cursos presentamos un cuestionario a toda la clase durante la sesión 1. Había preguntas abiertas o de doble opción (verdadero o falso). Unas preguntas abordaban casos particulares y otras la generalización. Después de su realización, escaneamos los cuestionarios.

En la sesión 2 realizamos entrevistas semiestructuradas individuales a seis estudiantes de segundo y a seis estudiantes de cuarto de primaria. Diseñamos y seguimos un protocolo de entrevista con un guion con preguntas preestablecidas. Este protocolo consideraba preguntas (a) para recordar el problema presentado, (b) aplicar regularidad en casos particulares y (c) identificar las ideas de los estudiantes sobre el uso de letras. Las entrevistas fueron grabadas y posteriormente transcritas. Usamos los cuestionarios cumplimentados por cada estudiante para guiar sus entrevistas. Cada entrevista duró de 20 a 25 minutos, de manera que el tiempo no fuera una limitación.

Diseñamos un sistema de categorías para analizar la información obtenida sobre la generalización y la mediación con base en nuestros antecedentes (Cañadas y Castro, 2007; Mata-Pereira y Ponte, 2017 y Ureña et al., 2019). Para la generalización, consideramos que el estudiante generalizaba correctamente cuando respondía de forma correcta las preguntas que abordan casos particulares o sobre generalización, expresando la regularidad de la tarea planteada. Respecto a la mediación, asumimos las categorías descritas por Mata-Pereira y Ponte (2017), Ponte, et al., (2013, 2017) y Ureña et al., (2019) las que se detallan en el marco teórico.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este apartado presentamos los resultados. En primer lugar, describimos la generalización que realizaron los estudiantes de segundo y cuarto de primaria antes de la mediación. En segundo lugar, analizamos las mediaciones realizadas con los estudiantes de cada curso, describiendo la función de cada una de ellas. En tercer y último lugar, describimos la generalización de los estudiantes después de las mediaciones. Para resguardar la identidad de los estudiantes, les asignamos una codificación alfanumérica para cada curso. Para hacer referencia a los estudiantes de segundo de primaria le asignamos la letra S y un número y para hablar de los estudiantes de cuarto de primaria le asignamos la letra C y un número.

Antes de la mediación

La generalización de los estudiantes antes de la mediación de puede observar en la tabla 1.

Tabla 1. *Generalización de los estudiantes antes de la mediación*

Curso	Generalización correcta	Generalización incompleta	No generaliza
2°	S6	S1; S2; S3; S4; S5	-
4°	C2; C6	C5; C1	C3; C4

Destacamos que la mayoría de los estudiantes generalizaron en las entrevistas (seis de segundo y cuatro de 4º). Un estudiante de segundo y dos de cuarto de primaria generalizaron correctamente. Aunque la mayoría de ellos lo hicieron de forma incompleta (cinco de 2º de primaria y dos de 4º) ya que detectaron un aumento en la cantidad de bolas que salían de la máquina, pero no cuantificaron ese aumento. Por último, dos estudiantes de cuarto no generalizaron y dieron respuestas del tipo "hay que sumar y restar, depende del número". En este caso, los estudiantes no determinaron una regularidad en la tarea planteada.

Mediación

Tras el trabajo con los cuestionarios, realizamos las entrevistas a cada estudiante. En la tabla 2 presentamos las mediaciones del entrevistador, junto con el número de veces que se observó cada mediación para cada curso.

Tabla 2. *Mediaciones realizadas por el entrevistador*

	Mediación					
Curso	Invitar	Apoyar/guiar	Informar/sugerir	Desafiar	Cuestionar	Total
2º	36	13	7	26	17	99
4º	25	19	7	21	9	81
Total	61	32	14	47	26	180

Identificamos cinco mediaciones diferentes durante las entrevistas: (a) invitar, (b) apoyar/guiar, (c) informar/sugerir, (d) desafiar y (e) cuestionar. En general, la cantidad de mediaciones realizadas para los estudiantes de segundo fue mayor que en cuarto de primaria. Respecto a los estudiantes de segundo, las mediaciones que tuvieron mayor frecuencia fueron invitar (36), desafiar (26) y cuestionar (17). En el caso de los estudiantes de cuarto de primaria, las mediaciones que mayor uso tuvieron en las entrevistas fueron invitar (25), desafiar (21) y apoyar/guiar (19). Para ambos cursos la mediación menos utilizada fue informar/sugerir (7).

Cuestionar fue una mediación utilizada más en los estudiantes de segundo que en los de cuarto. Para ambos cursos esta mediación se realizaba cuando presentaban errores de cálculo o de operación matemática. Esto ayudó a los estudiantes a darse cuenta del error y así continuar trabajando con la tarea correctamente.

La mediación apoyar/guiar fue más utilizada en los estudiantes de cuarto de primaria. Esta mediación ayudó a contextualizar la situación en la que se estaba trabajando y cuando los estudiantes no avanzaban por no recordar algún dato o información. Apoyar/guiar daba la posibilidad de repetir ciertos datos o resultados, con el fin de guiar al estudiante a la generalización. Así mismo, a cuatro de los seis estudiantes de cuarto (C1, C3, C4 y C5) se les realizó esta mediación a través del cambio de la función lineal planteada en el cuestionario ($f(x)=2x+1$) por la función $f(x)=2x$. Esto permitió disminuir la dificultad para que el estudiante no se desmotivara. El entrevistador al ver que este grupo de estudiantes no avanzaba, realizó este cambio y les presentó una nueva máquina, como se detalla a continuación:

E: Vamos a probar con esta otra máquina. Esta máquina funciona de manera que cuando entra un dos, sale un cuatro.

C3: Esa máquina ahora mismo ha sumado un dos.

E: Muy bien, ahora mismo le ha sumado un dos.

Dentro de la mediación apoyar/guiar, destacamos que además de lo indicado, el apoyo afectivo para los estudiantes fue importante porque permitió que los estudiantes se mantuvieran tranquilos y motivados.

La mediación menos usada para los dos cursos fue informar/sugerir. Esta mediación era utilizada por el entrevistador cuando los estudiantes no sabían cómo seguir. Cuando se sugería, el entrevistador ayudaba al estudiante a buscar un procedimiento para encontrar la respuesta. En esta mediación el entrevistador le ofrecía una estrategia para ordenar los datos y comprender de mejor forma la tarea presentada. Mostramos un ejemplo en el siguiente fragmento.

E: ¿Entonces cómo podríamos buscar una relación? Por ejemplo, si hacemos una tabla [el entrevistador la dibuja en la parte superior de la hoja] El número que entra… aquí ponemos por ejemplo el dos. ¿Cierto? Aquí la operación… ¿qué hicimos?

C5: Sumar.

Para los dos cursos, las mediaciones más utilizadas fueron invitar y desafiar. En el caso de desafiar, el entrevistador utilizó esta mediación para que los estudiantes de ambos cursos justificaran sus respuestas. Esta mediación ayudó a los estudiantes a expresar la generalización. En las entrevistas pedimos a los estudiantes que explicaran su razonamiento sobre la tarea, ayudando a que expresaran

la generalización. Por ejemplo, preguntamos a S1: "¿Me podrías volver a contar como lo encontraste?". Y respondió "Pues si hay uno, nos salen cuatro, le tenemos que sumar tres más."

Desafiar motivó a los estudiantes a requerir un esfuerzo mayor para dar respuesta a las situaciones planteadas, las que cada vez aumentaban en complejidad. Esta mediación la realizó el entrevistador mayormente cuando el estudiante estaba trabajando con casos particulares, aumentando la complejidad en la numeración de las preguntas propuestas. Esto ayudó en la generalización de los estudiantes, porque al proponer ejemplos con números mayores, comprobaban que su generalización era correcta para todos los casos posibles. Un ejemplo se refleja el siguiente fragmento de entrevista con S5.

E: Vale, o sea que siempre le sumas tres ¿Y si…? Imagínate que tienes un número, voy a poner aquí (escribe en el folio), un número muy grande de bolas. ¿Cuántas te saldrían?

S5: Pues si es un millón pues te saldría un millón tres.

Después de las mediaciones presentamos las generalizaciones en la tabla 3. En general, se observa un aumento en las generalizaciones, en particular las generalizaciones correctas.

Tabla 3. *Generalización de los estudiantes después de las mediaciones*

	Generalización correcta	Generalización incompleta	No generaliza
2°	S1; S3; S5; S6	S2; S4	-
4°	C1*; C2; C3*; C4*; C6	C5	-

Nota. * Generaliza correctamente una función distinta a la original

Después de la mediación

Después de la mediación, cuatro estudiantes de segundo y cuatro estudiantes de cuarto de primaria generalizaron correctamente. Los estudiantes restantes, dos estudiantes de segundo y dos estudiantes de cuarto, detectaron un aumento en la cantidad de bolas que salían de la máquina, pero no lo cuantificaron correctamente (generalización incompleta).

Respecto a los estudiantes de segundo, S1, S3 y S5 pasaron de una generalización incompleta a una generalización correcta. Los estudiantes S2 y S4 continuaron generalizando de forma incompleta. El avance de los estudiantes de segundo se logró con ayuda de todas las mediaciones identificadas, pero invitar, desafiar y cuestionar tuvieron un rol importante dentro de este avance.

Referente a los estudiantes de cuarto, destacamos que este cambio en la generalización se debió a la modificación de la función en la tarea planteada, o como se les indicó a los estudiantes, al cambio de máquina con ayuda de la mediación apoyar/guiar. Esto favoreció para que los estudiantes respondieran correctamente a las preguntas y generalizaran. En el caso de C3 y C4 pasan de no generalizar a generalizar correctamente la nueva función. En el caso de C1 pasa de generalizar de forma incompleta a generalizar correctamente la nueva función y C5 se mantiene en la misma categoría de generalización. El avance de los estudiantes de cuarto se logró con ayuda de todas las mediaciones identificadas, pero invitar, desafiar y apoyar/guiar tuvieron un rol importante dentro de este avance.

Estudio de caso

A continuación, detallamos a modo de ejemplo el caso de un estudiante de cuarto, que pasó de no generalizar a generalizar correctamente la nueva función, después de la mediación. La estudiante C3 no generalizó al comienzo, indicando que la función de la máquina era "Hay que sumar o restar, depende el número, si sale un dos hay que sumar tres para que salga el resultado". En la figura 2 vemos un ejemplo de esta situación.

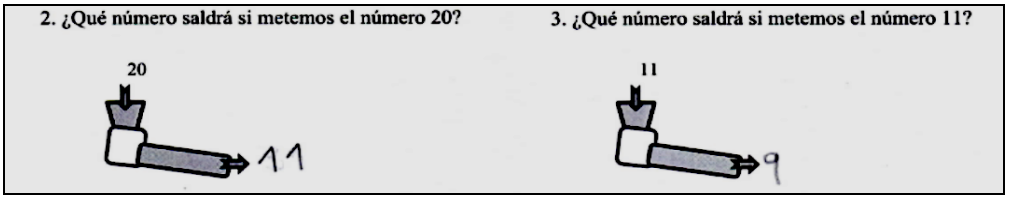


Figura 2. Respuesta cuestionario de estudiante de cuarto de primaria

Posteriormente, el entrevistador utilizó las mediaciones cuestionar, invitar y apoyar/guiar para ayudar a la estudiante a comprender la tarea presentada. Durante la entrevista, la estudiante pasó a una generalización incompleta. El entrevistador le pregunta qué hace la máquina y C3 le dijo "sumarlos", mencionado después que "depende de la cantidad de número que sea". La estudiante indica que se debía sumar a la cantidad que entra a la máquina, pero no cuantifica una cantidad constante para cada caso.

El entrevistador, al ver que C3 no avanzaba, realizó la mediación apoyar/guiar. En esta oportunidad el entrevistador cambió la función de la tarea planteada, indicándole que trabajarán con otra máquina (función 2X). Para que C3 entendiera el funcionamiento, el entrevistador realizó la mediación informar/sugerir, indicándole que fuera registrando todos los datos con el fin de visualizar lo que va sucediendo. Cuando la estudiante responde los casos particulares correctamente, el entrevistador realiza la mediación desafiar, aumentando el rango numérico, como se indica a continuación:

E: Y si pongo… te lo voy a poner difícil… ¿quieres que te lo ponga más difícil para que sea más divertido?

C3: ¡Vale!

E: Si entra ciento veinte.

C3: Ciento veinte… ciento veinte… sale doscientos cuarenta.

Por último, se le invita nuevamente a explicar el funcionamiento de la máquina donde C3 indica "hay que sumar el número que está puesto arriba". Con esto evidenciamos que C3 generaliza correctamente la tarea planteada con la nueva función propuesta.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Con este trabajo identificamos las mediaciones que se realizan con estudiantes de segundo y cuarto de primaria durante el trabajo con una tarea de generalización en un contexto funcional del *early algebra*. Analizamos la función que tiene cada mediación identificada y los beneficios de realizar mediaciones a los estudiantes en su proceso de generalización. Corroboramos lo señalado por Ureña et al., (2019) e Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020), quienes indicaron que la mediación alienta a los estudiantes a responder y tiene un impacto considerable en la capacidad de los estudiantes para generalizar. Esto era lo esperable, pero los tipos de mediaciones son un aporte para futuras investigaciones o para los docentes en su actividad diaria.

Al analizar el trabajo de estudiantes de dos cursos diferentes, destacamos que las mediaciones identificadas se adecuaron a las necesidades de cada estudiante y de cada curso. Por un lado, para segundo de primaria realizamos un mayor número de mediaciones que en cuarto. Esto se puede deber a que en segundo fueron menos los estudiantes que generalizaron correctamente antes de la mediación. Además de la guía en el proceso de generalización, requirieron de más motivación, quizá por inseguridad o porque ven la figura de autoridad en el adulto presente en el aula.

Para el grupo de cuarto, la mediación apoyar/guiar cumplió un rol clave en aquellos estudiantes que no generalizaron o lo hicieron de forma incompleta. Al cambiar la función de la tarea por una más sencilla, les dimos una nueva posibilidad.

Para los dos cursos la mediación más utilizada fue invitar. Esta mediación ayudó a que los estudiantes justificaran sus respuestas y expresaran la generalización. Como lo indica Mata-Pereira y Ponte (2017) es esencial que los estudiantes entiendan la necesidad de la justificación. Esto motiva a dar espacios dentro del aula para que se realicen diálogos pedagógicos que motiven no solo a corregir las respuestas erróneas, sino que además los estudiantes se acostumbren a razonar y argumentar los procesos algebraicos. Otra de las mediaciones más utilizadas para los dos cursos fue desafiar. La función de esta mediación fue alentar a los estudiantes a llevar su conocimiento más allá.

Respecto a la generalización, aunque no es nuestro foco, nos ha servido como indicador para analizar el efecto de las distintas mediaciones. A través de este análisis, destacamos que los estudiantes han realizado un tipo de generalización al que llamamos incompleta. Esta generalización la identificamos cuando los estudiantes indicaron qué variable de las involucradas era mayor, pero sin cuantificar esa diferencia. Este tipo de generalización no se ha documentado en nuestros antecedentes.

La contribución de este trabajo tiene interés también para futuras investigaciones donde está previsto planificar sesiones de instrucción directa en el aula con estudiantes de estas edades. A su vez, esperamos que este estudio proporcione algunas orientaciones a los docentes sobre cómo guiar a los estudiantes hacia la generalización en el aula.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771 y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)14*, 37-57.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69-81.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 54*, 55-67.

Escobar, N. (2011). La mediación del aprendizaje en la escuela. *Acción Pedagógica, 20*, 58-73.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6a ed.). México, DF: McGraw-Hill.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA, 14*(3), 204-225.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Londres, Reino Unido: Kluwer Academic Publishers.

Mata-Pereira, J. y Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169-186.

Ponte, J. P., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae, 1*, 45-59.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570-614.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

IMÁGENES EN LOS TEXTOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA: ¿CUÁNTO APORTAN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

Pictures in elementary education texts: How much do they contribute to problem solving?

Olivares, D.[a], Segovia, I.[a] y Lupiáñez, J. L.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo es caracterizar la presencia de imágenes que acompañan a problemas en tres libros de texto de educación primaria en Chile. Analizamos en total 397 imágenes, utilizando como método el análisis de contenido. Nos enfocamos en tres aspectos: presencia de imágenes que acompañan a problemas en los libros de texto; tipos de imágenes (ilustrativas, analíticas o abstractas) y aporte a los procesos de resolución. Como resultado encontramos una cantidad considerable de imágenes que acompañan a problemas, en mayor proporción de tipo ilustrativas, pero con poca relevancia como apoyo a la resolución. Como conclusión, consideramos que las imágenes que incorporan los textos podrían aportar más a la resolución de problemas si uso fuera más intencionado.

Palabras clave: *análisis de textos, resolución de problemas, análisis de contenido, representaciones visuales*

Abstract

The goal of this work is to characterize the presence of pictures that accompany problems in three primary education textbooks in Chile. We analyzed 397 images, using the content analysis method. We focused on three aspects: the presence of pictures that accompany problems in textbooks, types of pictures (illustrative, analytical or abstract pictures) and contribution to the solving processes. As a result, we found a considerable amount of pictures that accompany problems, in a greater proportion of illustrative type, but with little relevance to support solving processes. In conclusion, we consider that the pictures that incorporate the texts could contribute more to problem solving if its use were intentional.

Keywords: *text analysis, problem solving, content analysis, visual representations*

INTRODUCCIÓN

Los libros de texto se consideran un recurso fundamental para la enseñanza de las matemáticas, ya que dan forma a nuestra manera de aprenderlas (Son y Diletti, 2017). En los libros de texto, así como en las matemáticas en general, la resolución de problemas es o debiera ser un aspecto central (Zimmermann, 2016). Por este motivo, múltiples estudios han centrado sus esfuerzos en determinar cómo se aborda la resolución de problemas en los textos utilizados a nivel escolar, y cuáles son las mejores condiciones para obtener resultados en su aprendizaje (Cai, Jiang, Hwang, Nie, y Hu, 2016; Fan y Zhu, 2007; Jäder, Lithner, y Sidenvall, 2019; Mauch y McDermott, 2007; Takahashi, 2016; van Zanten y van den Heuvel-Panhuizen, 2018).

Sin embargo, a pesar de la larga tradición que existe en el análisis de libros de texto, hay un aspecto que se ha tomado poco en cuenta, y que no ha tenido el mismo desarrollo que otros ámbitos de análisis. Se trata del estudio de los elementos no textuales, imágenes o ilustraciones presentes en los textos de matemáticas (Jellis, 2008). Las representaciones visuales, adecuadamente utilizadas, permiten a los estudiantes contar con herramientas para analizar los problemas y pensar de manera

Olivares, D., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2021). Imágenes en los textos de Educación Primaria: ¿Cuánto aportan a la resolución de problemas?. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 473 – 480). Valencia: SEIEM.

más flexible (NCTM, 2003). La presencia de ilustraciones en tareas de resolución de problemas es aún más importante en cursos pequeños, en que los estudiantes aún se encuentran desarrollando sus habilidades de lectura y comprensión (Jellis, 2008).

Sin embargo, no todas las imágenes contribuyen de la misma forma a facilitar los procesos de resolución de problemas (Puig y Cerdán, 1988), ni todos los textos incorporan la misma cantidad de imágenes. Nos preguntamos entonces, ¿qué tipo de imágenes acompañan a los problemas en los libros de texto de un curso de educación primaria?, ¿cuántos problemas aparecen apoyados por el uso de imágenes?, ¿en qué medida estas imágenes contribuyen a los procesos de resolución?

El objetivo de este trabajo es caracterizar la presencia de imágenes que acompañan a los problemas que aparecen en tres libros de texto de cuarto año de la educación primaria en Chile. Para ello nos centramos en tres aspectos: cantidad de imágenes que acompañan a problemas, tipos de imágenes y aporte a los procesos de resolución. En este trabajo utilizaremos el término 'imágenes' para referirnos de manera genérica a elementos no textuales presentes en los libros de texto, tales como figuras, ilustraciones, esquemas, dibujos, etc.

MARCO TEÓRICO

Desde finales de los años 80 hasta la actualidad, distintas investigaciones han abordado algunos aspectos en el estudio del uso de ilustraciones, dibujos y esquemas en los libros de texto de matemáticas. Son y Diletti (2017) los llaman de forma genérica "elementos no-textuales", y señalan la importancia de analizar no solo su presencia en los libros de texto, sino principalmente su relevancia y relación con los problemas o conceptos matemáticos trabajados. Mauch y McDermott (2007) señalan que los diagramas y figuras son una parte importante de los libros de texto de matemáticas, aunque no debe excederse en su uso ya que pueden resultar abrumadores y distraer la atención. Agrawal, Gollapudi, Kannan y Kenthapadi (2011) apelan a la falta de calidad del material visual incluido en los libros de texto, y desarrollan un algoritmo para encontrar imágenes relevantes en la Web que complementen a las presentes en los textos. El trabajo de estos autores pone de manifiesto la necesidad de establecer mejores criterios a la hora de incluir elementos como las imágenes en los libros de texto.

Kim (2012) utiliza una clasificación para analizar la adecuación de los elementos no textuales a los libros de matemática en general, usando los criterios de precisión, conectividad, contextualidad y concisión, en relación con el contenido enseñado. Otros trabajos han abordado aspectos particulares sobre el uso de imágenes en los textos de matemáticas, como por ejemplo Marmolejo y González (2013), que proponen una metodología para caracterizar tareas de áreas de regiones poligonales como apoyo al desarrollo de la visualización.

En este trabajo utilizamos la clasificación usada en Puig y Cerdán (1988), sobre las imágenes que aparecen en los libros de texto. Empleamos esta clasificación ya que nos permite hacer una valoración del uso de imágenes con respecto, no al contenido en sí, sino específicamente a los problemas que aparecen en los textos. Según estos autores, las imágenes que acompañan a los problemas en los libros de texto pueden ser de tres tipos:

Objeto-ilustrativas: se refiere a imágenes que pueden haber sido mencionadas en el problema, o figuras que representan el tema del problema. Puede estar representado material de cálculo e incluso el resultado numérico. Los detalles expresivos que pueda incluir este tipo de imágenes son prescindibles a la resolución de los problemas (Edens y Potter, 2008). Por ejemplo, si un problema requiere determinar el área de una superficie dadas sus medidas, una imagen de este tipo puede ser la de un parque, una cancha o un patio, sin incluir detalles esquemáticos.

Objeto-analíticas: se trata de imágenes de objetos que ofrecen una idea de las relaciones entre los datos, mediante una adecuada configuración espacial. Incluyen algunos elementos esquemáticos, y

por lo general requieren ayuda del profesor para entenderlos. Se representan relaciones y proporciones espaciales entre objetos (Edens y Potter, 2008).

Diagramas abstractos y esquemas que reflejan relaciones entre los datos: se trata de figuras abstractas. Según la teoría, debiesen ser los más provechosos. Sin embargo, no tienen utilidad si aparecen en el texto sin mayor preparación, ya que los estudiantes necesitan de entrenamiento especial para llegar a comprenderlos. Según Edens y Potter (2008), los estudiantes que aprenden a utilizar este tipo de representaciones suelen ser también los resolutores más exitosos.

ANTECEDENTES

Algunos estudios recientes analizan el uso de imágenes, comparando textos de distintos países, o varias ediciones en un mismo país. Zhu y Fan (2006) analizan libros de texto de China y los comparan con series de libros de los Estados Unidos. Encontraron que en los textos de Estados Unidos hay más presencia de elementos visuales que forman parte de problemas, o que constituyen el problema en sí mismo (41,6%, en comparación con el 19,3% de los textos de China). Estos resultados los relacionan con otros informes que señalan que los estudiantes estadounidenses tienen más habilidades y disposición a trabajar con elementos visuales al resolver problemas que los estudiantes chinos. Kim (2012) realiza un estudio exploratorio de los elementos no textuales que son incluidos en tres libros de texto de Estados Unidos y tres de Corea. El estudio demuestra que las ilustraciones incorporadas en los textos, especialmente aquellas más pictóricas, no contribuyen mayormente a la comprensión de los conceptos matemáticos trabajados. A pesar de que estas pueden tener un potencial para el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento, en los libros de texto se suelen usar más como elementos decorativos o motivacionales. Takahashi (2016) analiza libros de textos japoneses, comparando ediciones de 2006 y de 2011. Como resultado encuentra que las ediciones más recientes incluyen más diagramas que ayudan a los estudiantes a resolver los problemas de forma independiente, e incluyen ilustraciones sobre distintos enfoques para abordar un problema.

MÉTODO

El trabajo fue de tipo interpretativo, utilizando el análisis de contenido. Elegimos este método ya que a través de una descomposición del contenido analizado, permite descubrir la estructura interna de lo comunicado (Luis Rico y Fernández-Cano, 2013). Lo comunicado en este caso corresponde a las imágenes que acompañan a los problemas en los libros de texto.

La muestra se compone de tres textos de las editoriales que han ganado las licitaciones del Ministerio de Educación desde el año 2013. Las licitaciones son procesos que deciden qué editorial elabora los textos que son distribuidos de forma gratuita al sistema público y particular subvencionado. Las editoriales deben atenerse a los criterios planteados en las bases de licitación entregadas por el Ministerio de Educación. Los textos analizados son los que se han utilizado desde que entró en vigencia el currículo reformado de 2012, y son los que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Textos analizados.

Texto	Código
Batarce, Y., Cáceres, B. y Kükenshöner, C. (2013). Matemática 4° básico Tomo I. Santiago: Editorial Santillana.	T1
Alfaro, S., Espinoza, Y. y Cano, S. (2014). Texto del estudiante Matemática 4° básico. Santiago: Editorial Galileo.	T2
Rodríguez, R., García, D., Romante, P. y Verdejo, A. (2019). Texto del estudiante Matemática 4° básico. Santiago: Editorial SM.	T3

El análisis constó de los siguientes pasos: en primer lugar, realizamos una inspección general de cada texto para lograr familiarización con su estructura, forma de presentar el contenido, método de trabajo, etc. En segundo lugar, llevamos a cabo una lectura en profundidad, a la vez que selección

de unidades de análisis. Una unidad de análisis corresponde a segmentos de datos a los cuales se les aplica una categoría que describe conceptos de interés para comprender el fenómeno de estudio (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). En nuestro caso las unidades de análisis son las imágenes que acompañan a los problemas. Para identificarlas, primero determinamos en cada caso a qué tipo de tareas cada texto considera como problemas, para luego identificar las imágenes que los acompañan. En tercer lugar, asignamos categorías a las unidades de análisis, a través de un código, con apoyo del software Atlas.ti. Utilizamos este software ya que permite guardar la codificación y volver a recuperar las unidades de análisis en su contexto. Posteriormente se traspasó la codificación a hojas de cálculo para futuros análisis y chequeo de consistencia. La codificación del mismo material fue realizada varias veces en distintos momentos de la investigación, lo que nos permitió comprobar que las codificaciones fueran consistentes.

En principio utilizamos un sistema de categorías a priori, basado en nuestro marco teórico. A medida que avanzó el análisis debimos incorporar una categoría emergente, la cual explicamos en profundidad en el apartado de Resultados. El sistema final quedó conformado como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Sistema de categorías.

Categoría	Subcategoría	Código
Presencia de imágenes que acompañan a problemas	Problemas	Problema
	Imágenes acompañando a problemas	Imagen
Tipos de imágenes utilizadas	Objeto-ilustrativas	Ilustrativas
	Objeto-analíticas	Analíticas
	Diagramas abstractos y esquemas que reflejan relaciones entre los datos	Abstractas
Papel de las imágenes en el proceso de resolución	Parte del problema	Parte
	Ayuda para la resolución	Ayuda

RESULTADOS

A continuación, damos a conocer los resultados, organizados según las preguntas de investigación.

Presencia de imágenes que acompañan a problemas

Para analizar la categoría presencia de imágenes que acompañan a los problemas en los libros de texto, utilizamos dos subcategorías: problemas e imágenes que acompañan a problemas. En la Tabla 3 mostramos la cantidad total de problemas y de imágenes halladas en los tres textos.

Tabla 3. Presencia de imágenes que acompañan a los problemas

	T1	T2	T3
Total de problemas	294	601	211
Cantidad de imágenes que acompañan a los problemas	95	207	95

En los tres textos encontramos imágenes acompañando a los problemas, aunque en el T3 fue donde encontramos mayor proporción de imágenes en relación con el total de problemas. Por otro lado, en T2 encontramos mayor cantidad de problemas por un amplio margen. Sin embargo, muchos problemas sólo consistían en la lectura de un texto, o compartían una misma imagen que otorgaba un contexto general. Por ejemplo, una imagen de un safari en África y un gráfico de barras horizontales dan paso a 2 tareas de resolución de problemas sobre datos, 4 sobre álgebra y una tarea de invención de problemas.

Tipos de imágenes utilizadas

Para esta categoría utilizamos la clasificación de Puig y Cerdán (1988), según la cual, las imágenes incluidas en los libros de texto pueden pertenecer a una de las siguientes subcategorías:

Ilustrativas: Corresponden a objetos individuales, o imágenes alusivas al tema del problema, que no incluyen elementos esquemáticos. En los tres textos, este tipo de imágenes es el que predomina. Tanto en T1 como en T2, este tipo de imágenes corresponden por lo menos a la mitad de todas las imágenes encontradas. En T3 el porcentaje llega al 76,8% de todas las imágenes que acompañan a problemas. Por lo general, las imágenes reflejan lo mismo que expone el texto del problema. En otras ocasiones corresponde a un personaje, o a la ilustración de un paisaje que da contexto a la situación planteada. Por ejemplo, un espectáculo de circo, una estación espacial o una carretera en las montañas.

Analíticas: Corresponden a objetos que permiten apreciar las relaciones numéricas o espaciales entre los datos. Suelen incluir elementos abstractos, y requieren entrenamiento para comprenderlos. Este tipo de imágenes aparece en menor proporción que las ilustrativas. En T2 fue donde más encontramos este tipo de imágenes en relación con el total de problemas (33,3%), y en T3 donde menos (18,9%). En general este tipo de imágenes las encontramos en mayor cantidad en el tratamiento de temas del eje de Medición y Geometría. Por ejemplo, en problemas relacionados con el cálculo de áreas, o con orientación en el plano. En el eje de Números y Operaciones también encontramos algunos ejemplos, relacionados con el uso de bloques multibase. Los elementos esquemáticos por lo general corresponden a los pasos necesarios para llevar a cabo los algoritmos de las operaciones básicas, y no necesariamente para entender las relaciones entre los datos. La Figura 1 muestra un ejemplo de este tipo de imágenes.

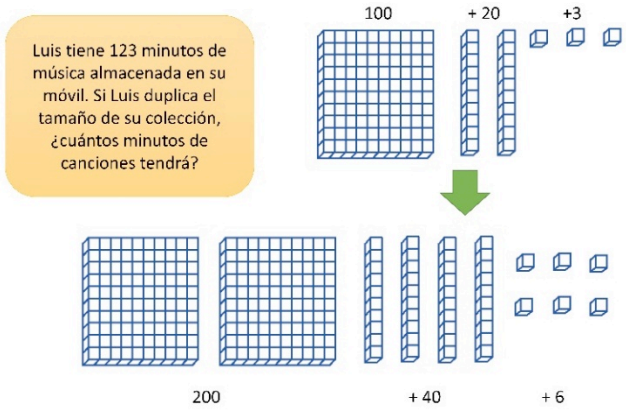


Figura 1. Ejemplo de Imagen Analítica.

Abstractas: Según Puig y Cerdán (1988), estas corresponden a figuras esquemáticas, completamente abstractas que requieren de formación especial para llegar a utilizarlas con provecho. Además, son de las que menos aparecen en los libros de texto. Nuestro análisis coincide con esta afirmación, ya que fue el tipo de ilustraciones que menos aparecieron en los tres textos. La mayoría de las ilustraciones abstractas encontradas corresponden a esquemas para la resolución de problemas en el contexto del método Singapur, como la presentada en la Figura 2. En nuestro análisis además, incluimos los gráficos y pictogramas como figuras abstractas, ya que representan de forma visual y no figurativa relaciones entre los datos necesarios para resolver un problema. Sin embargo, al incluirlos dentro de esta subcategoría, encontramos una salvedad que implicó la creación de una categoría emergente, que será explicada en el siguiente apartado.

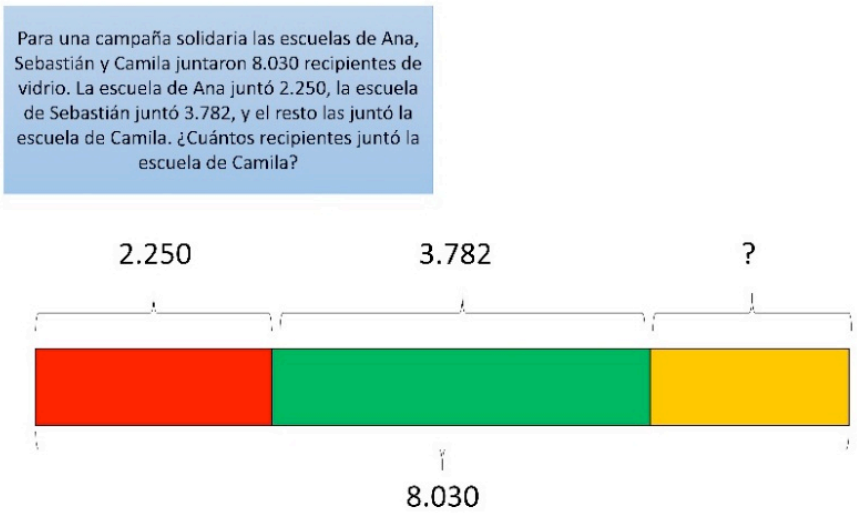


Figura 2. Ejemplo de Imagen Abstracta.

En la Tabla 4 mostramos la distribución de los tipos de imágenes encontradas en los tres textos.

Tabla 4. Distribución de tipos de imágenes.

	Ilustrativas	Analíticas	Abstractas
T1	52 (54,73%)	23 (24,21)	20 (21,05%)
T2	111 (53,62%)	69 (33,33%)	27 (13,04%)
T3	73 (76,84%)	18 (18,95%)	4 (4,21%)

Ayuda que proporcionan las imágenes al proceso de resolución

Al codificar las imágenes, especialmente las de tipo abstracto, surgieron dos nuevas subcategorías. Según Puig y Cerdán (1988), las imágenes abstractas son las que más pueden aportar al proceso de resolución. Sin embargo, en el caso de los gráficos, estos no se utilizan como ayuda sino como parte de los problemas. En vez de ser un apoyo para la visualización de las relaciones y procedimientos, la interpretación misma de gráficos y otro tipo de imágenes abstractas resulta ser parte del problema en sí mismo. Por lo tanto, categorizamos las imágenes en dos nuevos tipos: parte del problema y ayuda para la resolución. En los tres textos resultó que la mayoría de las imágenes abstractas eran parte del problema. En T1 fue donde pudimos encontrar mayor proporción de imágenes abstractas de ayuda a la resolución (40% del total de imágenes abstractas). Sin embargo, esto representa solo un 3,7% del total de los problemas de todo el texto.

De la misma forma, las imágenes analíticas podían servir de ayuda o ser parte de los problemas. En T1 encontramos mayor proporción de imágenes de ayuda a la resolución (43,4%), pero que sin embargo, solo representa el 3,4% del total de los problemas del texto. En T3 fue en donde encontramos menor cantidad de imágenes analíticas que aportan a la resolución, con solo 2 imágenes en todo el texto.

En cuanto a las imágenes ilustrativas, el 100% de ellas corresponden a figuras que forman parte del problema. Ya sea entregando algunos datos, como adorno, u ofreciendo un panorama de la situación en que se inserta el problema.

En la Tabla 5 mostramos los resultados de esta categoría de análisis. Cabe señalar además, que en su mayoría, tanto las imágenes analíticas como abstractas cuando entregan ayuda a la resolución, lo hacen enfocándose en cómo llevar a cabo los cálculos, más que en las relaciones entre los datos para entender los problemas.

Tabla 5. Distribución de imágenes según su aporte a la resolución.

	Ilustrativas		Analíticas		Abstractas	
	Parte	Ayuda	Parte	Ayuda	Parte	Ayuda
T1	52 (100%)	0 (0%)	13 (56,52%)	10 (43,48%)	12 (60%)	8 (40%)
T2	111 (100%)	0 (0%)	53 (76,81%)	16 (23,19%)	19 (70,37%)	8 (29,63%)
T3	73 (100%)	0 (0%)	16 (88,89%)	2 (11,11%)	3 (75%)	1 (25%)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el análisis de los tres textos encontramos una cantidad considerable de imágenes que acompañan a problemas. Sin embargo, no todas las imágenes resultan un aporte a la resolución de problemas. En algunos casos, como en el de T2, la gran cantidad de contenido incluido en el texto dificulta un uso provechoso de las imágenes, y llega a resultar en algunos casos abrumador. Tanto en T1 como en T2 se incluyen esquemas abstractos que pueden servir de ayuda para establecer las relaciones entre los datos. Sin embargo, estas solo se encuentran en algunas secciones del texto, muy distanciadas unas de otras. Los estudiantes no alcanzan a tener la formación suficiente para usarlas después por su propia cuenta.

En general, el espacio utilizado por las imágenes incorporadas podría ser mejor aprovechado. Observamos que la cantidad de imágenes ilustrativas supera por mucho a las analíticas o abstractas. Por lo general este tipo de imágenes se utilizan como adorno, lo cual coincide con los resultados de Kim (2012). Las imágenes analíticas aparecen en segundo lugar en los tres textos, y las imágenes abstractas son las que menos presencia tienen en los libros analizados. Lo anterior resulta preocupante, ya que estas podrían ser las de mayor utilidad para resolver problemas. Al contrario de lo que ocurre en Takahashi (2016), sólo una pequeña parte del total de imágenes constituye una herramienta de ayuda a los procesos de razonamiento. Incluso entre las imágenes que sirven de ayuda, gran parte está dedicada a la correcta aplicación de cálculos aritméticos, como la de la Figura 1, más que a alcanzar una comprensión de las relaciones entre los datos, como la Figura 2.

Pareciera ser que el uso de imágenes no está del todo intencionado, y que son puestas para cumplir con los requerimientos de las bases de licitación. Si su diseño estuviera mejor planificado, bajo un enfoque didáctico claro, tanto las imágenes como los esquemas y otras representaciones podrían tener un mayor impacto en el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.

Creemos que los resultados obtenidos resultan relevantes para la mejora de los textos escolares. También consideramos oportuno retomar esta línea de investigación en el análisis de textos, dados los avances técnicos disponibles hoy en día para la elaboración de estos recursos, que deben ir de la mano con los aportes del lado de la investigación en didáctica de la matemática. Los materiales instruccionales se desarrollan cada día más en el ámbito tecnológico. Sólo basta pensar en la calidad física de los textos actuales (comparados con los de hace tres décadas), o incluso en los libros de texto digitales. Los cambios en tecnología necesitan tomar en cuenta sus implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje, e integrar aspectos pedagógicos y del contenido (Yerushalmy, 2005).

Esperamos que este trabajo sea un aporte en ese sentido, tanto a nivel teórico como práctico para el diseño de los libros de texto de la educación primaria.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el seno del Proyecto de Investigación PGC2018-95765-B-I00 “Competencias profesionales del profesor en formación inicial y Educación STEM (PROFESTEM)” del Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades y gracias a la beca CONICYT PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018 folio 72190671.

Referencias

Agrawal, R., Gollapudi, S., Kannan, A. y Kenthapadi, K. (2011). Enriching textbooks with images. En *Proceedings of the 20th ACM international conference on Information and knowledge management* (pp. 1847-1856).

Cai, J., Jiang, C., Hwang, S., Nie, B., y Hu, D. (2016). How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study. En P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 3-22). Cham: Springer.

Edens, K., y Potter, E. (2008). How Students "Unpack" the Structure of a Word Problem: Graphic Representations and Problem Solving. *School Science and Mathematics, 108*(5), 184-196.

Fan, L., y Zhu, Y. (2007). From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. *ZDM, 39*(5-6), 491–501.

Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. México: McGraw Hill.

Jäder, J., Lithner, J., y Sidenvall, J. (2019). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-17.

Jellis, R. (2008). Primary children's interpretation and use of illustrations in school mathematics textbooks and non routine problems : a school based investigation (Tesis doctoral). Universidad de Durham.

Kim, R. (2012). The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States. *ZDM, 44*(2), 175-187.

Marmolejo, G. y González, M. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación matemática, 25*(3), 61-102.

Mauch, K., y McDermott, M. (2007). Can elementary mathematics textbooks be improved to facilitate student understanding of mathematics? *Mathematics and Computer Education, 41*(2), 127–135.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos Escolares*. Madrid: Síntesis.

Rico, Luis, y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. Lupiáñez, y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada: Comares.

Son, J.-W., y Diletti, J. (2017). What Can We Learn from Textbook Analysis? En *What Matters? Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education* (pp. 3-32). Springer International Publishing.

Takahashi, A. (2016). Recent trends in Japanese mathematics textbooks for elementary grades: Supporting teachers to teach mathematics through problem solving. *Universal Journal of Educational Research, 4*(2), 313-319.

Van Zanten, M., y van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM, 50*(5), 827-838.

Yerushalmy, M. (2005). Functions of interactive visual representations in interactive mathematical textbooks. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(3), 217-249.

Zhu, Y., y Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (4), 609-626.

Zimmermann, B. (2016). Improving of mathematical problem-solving: Some new ideas from old resources. En P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 83-108). Cham: Springer.

COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE TABLAS ESTADÍSTICAS Y SU DISTRIBUCIÓN EN TEXTOS CHILENOS DE EDUCACIÓN BÁSICA

Semiotic complexity of statistical tables and its distribution in Chilean Basic Education textbooks

Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P.

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo del trabajo es extender los niveles de complejidad semiótica definidos por Arteaga para gráficos estadísticos a las tablas estadísticas, partiendo del análisis semiótico de los objetos intervinientes en cada tipo de tabla. Se aplica el modelo propuesto al estudio de la distribución de las tablas estadísticas en una muestra de seis libros de texto chilenos, dirigidos a 7º y 8º Básico (12 y 13 años). La complejidad semiótica más frecuente es el nivel 3, en cada uno de sus tres subniveles. El nivel de complejidad 4, paradójicamente, disminuye su uso en el último curso de educación básica.

Palabras clave: *tablas estadísticas, complejidad semiótica, libros de texto, educación básica.*

Abstract

The aim of this work is to extend the semiotic complexity levels defined by Arteaga for statistical graphs to statistical tables, basing on the semiotic analysis of the intervening objects in each type of table. The proposed model is applied to the study of the distribution of statistical tables in a sample of six Chilean textbooks, aimed at 7th and 8th Basic (12 and 13 year-olds). The most frequent semiotic complexity is level 3, in each of its three sub-levels. The semiotic complexity level 4 decreases paradoxically in the last year of basic education.

Keywords: statistical tables, semiotic complexity, textbooks, Basic Education.

INTRODUCCIÓN

La tabla estadística, es un contenido importante en el estudio de la estadística como medio para representar y comunicar información (Arteaga, 2011), aunque su construcción e interpretación no son sencillas. Respecto a las mismas, se puede plantear una diversidad de tareas, como representar información, lectura, interpretación, o traducción de la tabla a otra representación (Koschat, 2005). Por otra parte, Estrella (2014) sugiere que en el proceso de enseñanza se prioriza más la técnica (pautas rutinarias), que la comprensión de aspectos fundamentales para su construcción o lectura.

Su enseñanza se incluye en diferentes directrices curriculares (CCSSI, 2010; MECD, 2014; NTCM, 2014) a través de la representación y organización de la información recogida por los propios estudiantes u obtenida por otras fuentes. El currículo chileno (MINEDUC, 2015; 2018) no es la excepción, donde la enseñanza de las tablas estadísticas es propuesta de manera explícita a partir de los primeros niveles de Educación Básica. En nuestro estudio nos interesamos por la enseñanza de las tablas estadísticas en 7º y 8º básico (12 y 13 años), pues en estos niveles se trabajan una diversidad de tipos de tablas, que se utilizan para representar información en el tratamiento de diferentes temas de estadística y probabilidad.

La finalidad de este trabajo es adaptar el constructo complejidad semiótica, descrito por Arteaga (2011) para los gráficos estadísticos a las tablas estadísticas, y mostrar la diferente dificultad que implica el trabajo con cada una de ellas. Finalmente, analizamos la distribución de estos tipos de tablas en una muestra de textos chilenos de educación básica. Con ello, contribuimos a la

Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2021). Complejidad semiótica de tablas estadísticas y su distribución en textos chilenos de educación básica. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 481 – 488). Valencia: SEIEM.

investigación sobre libros de texto que ha sido tratada anteriormente en los simposios de la SEIEM (e.g., Ortiz, Mohamed, Serrano y Albanese, 2017; Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo, 2018).

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Nos basamos en el enfoque ontosemiótico de la educación matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) y, más concretamente, en la definición de los niveles de complejidad. También nos apoyamos en el estudio de los textos en que se han tenido en cuenta algunos de los tipos de objetos primarios considerados en dicho enfoque, esto es: lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos); situaciones-problemas (problemas, aplicaciones extra-matemáticas o matemáticas, ejercicios, etc.); conceptos, dados por su definición o descripción; propiedades o atributos; procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas); razonamientos o argumentos usados para validar y explicar las proposiciones y procedimientos (deductivo, inductivo, etc.).

Además, tomaremos en cuenta los niveles de complejidad semiótica propuestos por Arteaga y colaboradores (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010). Estos autores definen cuatro niveles de complejidad en los gráficos, en función del tipo de objetos representados en ellos, pues la comprensión de los mismos requiere diferentes procesos interpretativos, tanto de cada elemento representado, como del gráfico en su conjunto. Los niveles propuestos son los siguientes:

- Nivel 1 (N1). Representar solo algunos datos aislados de una variable. En este nivel no se usa la idea de variable o de distribución.
- Nivel 2 (N2). Representar un conjunto de datos asociado a una variable, sin formar la distribución de frecuencias. Se utiliza la idea de variable y sus valores, pero no la de frecuencia o distribución.
- Nivel 3 (N3). Representar la distribución de frecuencias de una variable. En este caso, ya aparece el concepto de frecuencia y de distribución.
- Nivel 4 (N4). Representar la distribución de frecuencias de dos o más variables. Se emplean todos los objetos anteriores y, además, generalmente, se utiliza una misma escala para representar las variables.

Antecedentes

Lahanier-Reuter (2003) identifica tres tipos de tablas, presentes en la enseñanza de la estadística: tabla de datos, tabla de distribución de una variable y la tabla de contingencia. Cada una posee funciones específicas que la dotan de sentido, y se analizan a continuación.

- Tabla de datos. Es la primera organización de un conjunto de datos. Tiene forma de matriz y contiene, para cada individuo de la muestra, los valores de una o varias variables.
- Tabla de distribución de una variable. Esta tabla se construye a partir del conjunto de datos sin clasificar o desde una tabla de datos. Describe la distribución de una variable, dado que asocia cada modalidad de la variable con el número de individuos de la muestra (frecuencia) que presentan dicha modalidad.
- Tabla de doble entrada o de contingencia. Representa datos mediante el cruce de dos variables estadísticas. En la parte superior de la tabla (primera fila), se indican las modalidades de una de las variables, mientras que, en la primera columna se indican las modalidades de la segunda variable. El cuerpo de la tabla está formado por las frecuencias conjuntas, que corresponden a la modalidad de la fila para la primera variable y de la columna para la segunda variable.

Además, tendremos en cuenta las investigaciones que analizan tablas estadísticas en libros de texto en otros niveles educativos, puesto que no tenemos antecedentes directos. Díaz-Levicoy, Morales y

López-Martín, (2015) analizan las tablas estadísticas en cuatro libros de texto chilenos de 1º y 2º de educación básica (6 y 7 años) de dos editoriales diferentes, en la que consideran, entre otras variables, el tipo de tabla (datos, conteo, frecuencia y doble entrada). Las tablas de conteo (tabla en la que se registra los recuentos de frecuencia, a través de marcas dentro de una celda) en una de las colecciones alcanza cerca de un 83% de presencia, mientras que, en la otra, el 42%. Esta última editorial mostró un reparto más equilibrado con tablas de frecuencias (50%) y de doble entrada (17%), que no son consideradas por la primera. Este estudio, es complementado posteriormente (Díaz-Levicoy, Ruz y Molina-Portillo, 2017), analizando las tareas con tablas estadísticas en tres libros de texto chilenos de tercero (8 años) de educación básica. El análisis mostró, la ausencia de la tabla de doble entrada, mientras que la tabla de conteo es la que más aparece (38,9%), seguida de la tabla de frecuencias absolutas (32,2%), y luego la de datos (25,6%); en menor medida aparecen tablas que combinan los tipos mencionados anteriormente, como conteo y datos, o conteo y frecuencias.

En nuestro propio trabajo previo (Pallauta, Gea y Batanero, 2020), realizamos un análisis semiótico de los objetos matemáticos primarios presentes en diferentes tipos de tablas, en una muestra de doce textos escolares chilenos dirigidos al alumnado y profesores de 5º a 8º Básico (10 a 13 años). Entre los hallazgos se encuentra que el tipo de tabla que aparece con mayor fuerza es la de distribución con frecuencias ordinarias (51,8%), que en la clasificación propuesta se asocia a un nivel de complejidad N3. Las tablas de contingencia, en esta clasificación de máxima complejidad semiótica (N4), son escasamente abordadas (13,1%) y su presencia va decayendo conforme se progresa de curso.

En este trabajo se adaptan y amplían los niveles de complejidad semiótica para los distintos tipos de tablas, mediante el análisis de los objetos matemáticos implícitos que en estas intervienen, evidenciando que, a pesar de que las tablas puedan tener un aspecto similar, se requiere de diferentes demandas cognitivas para su comprensión, las que suelen ser desatendidas por los profesores en la escuela (Koschat, 2005). Esta nueva clasificación es un instrumento para el análisis de tablas estadísticas en libros de texto y pruebas de evaluación y para organizar la enseñanza y evaluación de las tablas estadísticas. Además, analizaremos la distribución de los tipos de tablas en nuevos libros de texto de 7º y 8º básico, comparando con otros estudios realizados también con textos chilenos.

METODOLOGÍA

La investigación que desarrollamos es de tipo descriptiva, y se emplea como técnica el análisis de contenido en una muestra de textos escolares, siguiendo etapas de modo sistemático (Mayring, 2000), lo que permite obtener categorías de análisis de manera cíclica e inductiva.

La muestra está constituida por seis libros de texto (Apéndice), dirigidos a estudiantes de 7º y 8º curso (12 y 13 años) de educación básica de Chile. Se trata de tres series diferentes: una distribuida por el Ministerio de Educación en Chile de forma gratuita a los estudiantes del sistema público y concertado, y las siguientes editadas por Santillana y SM, que siguen las recomendaciones oficiales y se encuentran disponibles en el mercado. Estas últimas fueron seleccionadas por su uso generalizado en las escuelas concertadas y privadas, además de su reconocida tradición. De dichos textos se ha realizado un análisis semiótico, a partir del estudio de las bases curriculares (MINEDUC, 2015; 2018), complementado también con libros especializados de Educación Estadística. Este proceso, permite valorar la instrucción planificada en un libro de texto, y su resultado se puede considerar como el significado institucional pretendido (Godino, 2002; 2017) para los niveles educativos examinados.

Para llevar a cabo el análisis se estudia, para cada tipo de tabla, algunos de los elementos primarios considerados en el enfoque ontosemiótico, pues el trabajo con la tabla estadística requiere activar un conjunto de elementos que conforma una configuración epistémica, en cada una de ellas (Godino, 2002; 2017), compuesta de los siguientes objetos: situaciones-problemas, lenguaje, argumentos y reglas (conceptos, proposiciones y procedimientos).

RESULTADOS

Presentamos a continuación los resultados del análisis. En primer lugar, describimos los niveles de complejidad semiótica correspondientes a los diferentes tipos de tabla estadística descritos por Lahanier-Reuter (2003), para adaptar a las mismas los niveles de complejidad semiótica definidos para los gráficos estadísticos por Arteaga (2011). Seguidamente, para cada tipo de objeto primario considerado en el marco teórico EOS (Godino, 2002; 2017), describimos los asociados a cada tipo de tabla. Se finaliza con un estudio de la distribución de los tipos de tablas en los textos de la muestra.

Niveles de complejidad semiótica asociados a diferentes tipos de tablas

Para adaptar los niveles de complejidad semiótica, definidos para los gráficos estadísticos por Arteaga y colaboradores (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero et al., 2010), necesitamos ajustar su categorización, al no contemplar el nivel más bajo y subdividir los dos niveles superiores en otros. Dichos niveles guardan una estrecha relación con los diferentes tipos de tablas descritos por Lahanier-Reuter (2003):

Tabla de datos. Se caracterizan por su gran tamaño, pues poseen tantas filas como individuos hay en la muestra. Generalmente, en la parte superior de la tabla se incluye un encabezado con la descripción de las variables recogidas de cada individuo. La primera columna de la izquierda contiene el listado con los sujetos, mientras que en las siguientes aparecen los datos asociados a cada variable (Ver Figura 1). En nuestra propuesta, este tipo de tabla corresponde al nivel semiótico N2 de Arteaga (2011), puesto que en esta representación aparece la idea de variable y valor de la variable, pero no emerge el concepto de distribución de la variable estadística, pues no es requerido su uso

La siguiente tabla muestra algunos enfrentamientos que han tenido dos grandes tenistas mundiales: Rafael Nadal y Roger Federer.

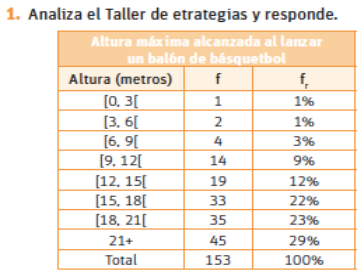
Año	Torneo	Superficie	Ronda	Ganador
2011	Masters de Miami	Dura	Semifinal	Nadal
2011	Masters de Madrid	Tierra batida	Semifinal	Nadal
2011	Roland Garros, París	Tierra batida	Final	Nadal
2011	ATP World Tour Finals, Londres	Dura	RR	Federer
2012	Abierto de Australia, Melbourne	Dura	Semifinal	Nadal
2012	Masters de Indian Wells	Dura	Semifinal	Federer
2013	Masters de Indian Wells	Dura	Cuartos de final	Nadal
2013	Masters de Roma	Tierra batida	Final	Nadal
2013	Masters de Cincinnati	Dura	Cuartos de final	Nadal
2013	ATP World Tour Finals, Londres	Dura	Semifinal	Nadal
2014	Abierto de Australia, Melbourne	Dura	Semifinal	Nadal

Figura 1. Tabla de datos (Marambio y Castro, 2016, p. 316)

Tabla de distribución de una variable. Usualmente, estas tablas poseen varias columnas; en la etiqueta superior (primera fila) se indica el tipo de frecuencias representadas (absolutas, relativas, acumuladas o porcentajes). En la primera columna se indica las modalidades o valores que toma la variable, y cada una de las siguientes celdas contienen frecuencia (del tipo indicado en la primera fila para esa columna) que corresponde a dicho valor o modalidad. En ocasiones, la última fila es destinada para registrar valores totales, según sea el interés (Ver Figura 2). Sugerimos que estas tablas corresponden al nivel semiótico N3 (Arteaga, 2011), puesto que en ellas se representa la distribución de frecuencias de una variable. Este nivel, además, podríamos dividirlo en tres subniveles, dependiendo de si se consideran las frecuencias acumuladas y los intervalos de clase. Su diferenciación obedece a la variedad de objetos matemáticos que en ellas intervienen (Cobo y Batanero, 2000), dotándolas de diferente sentido y complejidad para el estudiante.

- *Nivel de complejidad N3.1*: Tablas de distribución de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
- *Nivel de complejidad N3.2*: Tablas de distribución de frecuencias que incluyen también frecuencias acumuladas (absolutas, relativas o porcentuales). Su nivel de complejidad es mayor, porque involucra el manejo de desigualdades.

- *Nivel de complejidad N3.3*: Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia, tanto ordinaria como acumulada. Se añade la idea de intervalo, sus extremos y marca de clase (Ver Figura 2).



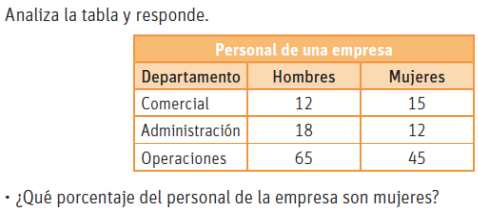
1. Analiza el Taller de etrategias y responde.

Altura máxima alcanzada al lanzar un balón de básquetbol		
Altura (metros)	f	f_r
[0, 3[	1	1%
[3, 6[	2	1%
[6, 9[	4	3%
[9, 12[	14	9%
[12, 15[	19	12%
[15, 18[	33	22%
[18, 21[	35	23%
21+	45	29%
Total	153	100%

Figura 2. Tabla de distribución de una variable (Schwerter, Aguilar y Maulén, 2014, p. 221)

Tabla de contingencia. Estas tablas corresponderían al nivel más alto de complejidad semiótica: N4, según Arteaga (2011), pues permiten comparar la distribución de dos variables estadísticas unidimensionales y relacionarlas entre sí. Las celdas pueden contener frecuencias ordinarias (absolutas, relativas o porcentuales), pero en este caso, encontramos diferentes tipos de frecuencias relativas (respecto a la fila o a la columna). La última fila y columna son destinadas para registrar subtotales, de filas y columnas respectivamente. Estas tablas, a su vez, podrían contener intervalos de clase, aunque no es habitual considerar frecuencias acumuladas. Por tanto, se podría clasificar este nivel en dos subniveles, según se consideren intervalos de clase o no:

- *Nivel de complejidad N4.1*: Tablas de contingencia de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales (Ver Figura 3).
- *Nivel de complejidad N4.2*: Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia.



Analiza la tabla y responde.

Personal de una empresa		
Departamento	Hombres	Mujeres
Comercial	12	15
Administración	18	12
Operaciones	65	45

- ¿Qué porcentaje del personal de la empresa son mujeres?

Figura 3. Tabla de contingencia (Castro, Curiche y Vega, 2014, p. 63)

Tabla 1. Conceptos ligados a los diferentes tipos de tablas estadísticas

Conceptos	Nivel N2	Nivel N3			Nivel 4	
		N3.1	N3.2	N3.3	N4.1	N4.2
Población, individuo, censo, muestra	x	x	x	x	x	x
Variable, valores, rango, máximo, mínimo	x	x	x	x	x	x
Intervalos de clase, extremos, marca de clase				x		x
Frecuencias ordinarias		x	x	x	x	x
Frecuencia acumulada			x	x		
Frecuencias dobles					x	x
Frecuencias marginales y condicionadas					x	x
Probabilidades simples		x	x	x	x	x
Probabilidades compuestas y condicionales					x	x
Medidas de tendencia central, dispersión	x	x	x	x	x	x
Covarianza, correlación, regresión					x	x

Una vez propuesta nuestra clasificación de las tablas, según niveles de complejidad semiótica, presentamos en las Tablas 1 y 2 los conceptos y propiedades que caracterizan a cada uno de los niveles de complejidad semiótica propuestos. Podemos apreciar que la mayor riqueza de conceptos y

propiedades que emanan de la tabla estadística se concentran en los subniveles N3.3, N4.1 y N4.2.

Tabla 2. Propiedades ligadas a los diferentes tipos de tablas estadísticas

Propiedades	Nivel	Nivel N3			Nivel N4	
	N2	N3.1	N3.2	N3.3	N4.1	N4.2
Tipos de variable y escala de medida	x	x	x	x	x	x
Suma de frecuencias absolutas y tamaño muestra		x		x	x	x
Suma de frecuencias relativas, proporcionalidad de frecuencias relativas y absolutas		x		x	x	x
Valor creciente de las frecuencias acumuladas, la última de las cuales es el tamaño muestral			x			
Relación entre frecuencias acumuladas y no acumuladas			x	x		
Variable dependiente e independiente, asociación entre variables					x	x
Relación entre frecuencias relativas condicionales, dobles y marginales; Frecuencias esperadas en caso de independencia					x	x

Para completar el trabajo, se ha realizado un análisis estadístico de la distribución de los diferentes niveles de complejidad semiótica en las tablas de los textos de la muestra (Tabla 3). Como resultado del análisis, observamos que un porcentaje importante (73%) de las tablas presentes en los libros de texto, corresponden al tipo de distribución de una variable (N3); en particular, las que se reducen a frecuencias ordinarias (N3.1, 38,3%), seguido de las tablas con valores agrupados en intervalos (N3.2, 23,1%), y tablas de datos (N2, 20,8%). Las tablas de contingencia son las que menos se plantean en los textos (N4, 6,3%). La tendencia de nuestros resultados es similar a lo evidenciado por Díaz-Levicoy y colaboradores (2015; 2017) globalmente, puesto que ellos no subdividen los niveles de complejidad semiótica y, por otro lado, diferencian tipo de tabla y nivel de complejidad semiótica. Nosotros hemos preferido unirlos, debido a que coinciden estas dos variables entre sí. Otra diferencia es que en el estudio de Díaz-Levicoy y colaboradores, la mayoría de las tablas son de conteo, que no aparecen en nuestro estudio.

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) del tipo de tabla, según nivel educativo

		7º Básico			8º Básico			
		MINEDUC	Santillana	SM	MINEDUC	Santillana	SM	Total
N2.Tabla de datos		36(17,4)	21(20,4)	18(15)	50(36)	3(5,6)	17(22,4)	145(20,8)
N3.Tabla de distribución de una variable	N3.1. Ordinaria	100(48,5)	46(44,7)	51(42,5)	36(25,9)	9(16,7)	25(32,9)	267(38,3)
	N3.2 Acumuladas	48(23,3)	7(6,8)		26(18,7)			81(11,6)
	N3.3. Agrupadas		27(26,2)	45(37,5)	23(16,5)	42(77,8)	24(31,6)	161(23,1)
N4.Tabla de contingencia	N4.1. Ordinarias	22(10,7)	2(1,9)	4(3,3)	4(2,9)		7(9,2)	39(5,6)
	N4.2. Agrupadas			2(1,7)			3(3,9)	5(0,7)
Total		206	103	120	139	54	76	698

Detectamos una cantidad importante de tablas con valores agrupados (N3.3), ausentes solo en un libro de texto, por otra parte, observamos una pobre o nula propuesta de tablas de contingencia asociadas a un máximo nivel de complejidad semiótica (N4), cuya frecuencia decrece en 8º curso, situación advertida por Pallauta, Gea y Batanero (2020). Otro aspecto de interés, es la presencia, aunque escasa, de tablas de contingencia que incorporan valores en intervalos, por parte de la editorial SM, lo que

implica una mayor variedad de objetos matemáticos en la comprensión de este tipo de representación, enmarcada en un nivel superior de complejidad semiótica (N4.2).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En la exposición realizada, se puede apreciar la complejidad cognitiva ligada en torno a la tabla estadística, la que requiere de la comprensión de una variedad de objetos matemáticos necesarios de poner en juego para llevar a cabo con éxito tareas que las involucren. El análisis semiótico de la tabla estadística, a través de los elementos primarios del enfoque ontosemiótico (Godino, 2017), se convierte en una herramienta metodológica útil para profundizar e identificar los diversos objetos matemáticos necesarios de conocer para tratar con los diferentes tipos de tablas propuestos por Lahanier-Reuter (2003), dado que cada una de ellas posee una estructura y función específica, logrando de este modo caracterizar el significado institucional pretendido de la tabla estadística.

El estudio de la distribución de las tablas en los textos analizados, muestra que la mayoría de las actividades se basan en tablas de nivel de complejidad N3, situación que, de acuerdo a los antecedentes, se repite para los cursos inferiores. Al igual que en investigaciones previas, coincidimos en que la tabla de contingencia, de mayor nivel de complejidad semiótico (N4), son las que menos aparecen en los textos, hecho que se agudiza en el último curso de enseñanza básica, en lugar de aparecer con mayor fuerza por la riqueza de conceptos y propiedades que ofrece.

En este trabajo, confirmamos la aplicabilidad de los niveles de complejidad propuestos inicialmente por Arteaga (2011) para los gráficos estadísticos a las tablas. Para conseguirlo, se realizó un refinamiento de los niveles para poder asociarlos a los diferentes tipos de tabla estadística. Esto con el propósito de profundizar y describir de mejor manera la complejidad semiótica, especialmente en los niveles superiores N3 y N4, ofreciendo de este modo una complementación del modelo. La incorporación de tres subniveles de complejidad para N3, y dos para el nivel N4, obedece a los distintos objetos matemáticos que es posible identificar en la tabla (tipos de frecuencias, agrupación de valores) lo que varía el grado de dificultad, dentro de un mismo nivel de complejidad semiótico.

Agradecimientos: Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 (MICIN), Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía) y Beca CONICYT Folio: 72190280.

Referencias

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Arteaga, P. y Batanero, C. (2011). Relating graph semiotic complexity to graph comprehension in statistical graphs produced by prospective teachers. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 368-377). Rzeszów: ERME.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 141-154.

Cobo, B. y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo? *UNO*, *23*, 85-96.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2010), *Common Core State Standards for Mathematics.* Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de Educación Primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *4*(7), 10-39.

Díaz-Levicoy, D., Ruz, F. y Molina-Portillo, E. (2017). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de tercer año de Educación Primaria. *Espaço Plural*, *18*(36), 196-218.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Actualidades Investigativas en Educación*, *14*(2), 1-23.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Koschat, M. (2005). A case for simple tables. *The American Statistician*, *59*(1), 31-40.

Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, *32*(32), 143-154.

Mayring, P. (2000). Qualitative inhalts analyse. *Forum: Qualitative Social Research*, *1*(2). Art. 20.

MECD (2014), *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

MINEDUC (2015). *Bases curriculares 7º Básico a 2° Medio. Santiago, Chile:* Unidad de currículum y evaluación.

MINEDUC (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico.* Santiago, Chile: Unidad de currículum y evaluación.

NCTM (2014), *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Serrano, L. y Albanese, V . (2017). La estimación de la media: análisis del lenguaje en libros de texto de Bachillerato. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 377-386). Zaragoza: SEIEM.

Pallauta, J.D., Gea, M.M. y Batanero, C. (2020). Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en libros de texto chilenos. *Zetetiké, 28*, 1-18.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 594-603). Gijón: SEIEM.

APÉNDICE. *Libros utilizados en el análisis*

Nivel	Texto
7º básico	Marambio, V. y Castro, C. (2016). *Matemática 7º básico, Proyecto Todos Juntos*. Santiago: Santillana.
	Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B. y Rupin, P. (2016). *Matemática 7º básico*. Santiago: SM.
	Schwerter, S., Aguilar, M. y Maulén, M. (2014). *Sé protagonista, Matemática 7º*. Santiago, Chile: SM Chile.
8º básico	Castro, C., Curiche, A. y Vega, M. (2014). *Sé protagonista, Matemática 8*. Santiago, Chile: SM.
	Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante Matemática 8º básico*. Santiago: SM.
	Ramírez, A., Maldonado, L., Castro, C. y Ávila, J. (2016). *Matemática 8º básico*. Santiago: Santillana.

EXPLORANDO LA DEMANDA COGNITIVA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE BÚSQUEDA DE PATRONES DISEÑADAS POR FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Exploring the cognitive demand of patterns seeking mathematics tasks designed by pre-service primary education teachers

Pincheira, N. y Alsina, Á.

Universidad de Girona

Resumen

En este estudio se presenta el análisis de la demanda cognitiva de un conjunto de tareas matemáticas de búsqueda de patrones. Tales tareas fueron diseñadas por futuros profesores de Educación Primaria en el contexto de una clase regular del proceso de formación. Para el análisis de las tareas se ha utilizado la técnica de análisis de contenido. Los resultados obtenidos muestran una variedad de tareas matemáticas, predominando mayoritariamente tareas de bajo nivel de demanda cognitiva. Se concluye que es necesario brindar experiencias de formación al profesorado que permitan enriquecer el diseño de tareas matemáticas para la enseñanza de patrones y profundizar en el nivel de pensamiento requerido para determinar su solución.

Palabras clave: *tarea matemática, demanda cognitiva, patrones, futuros profesores*

Abstract

This study presents the analysis of the cognitive demand of a set of mathematical pattern search tasks. These tasks were designed by future Primary Education teachers in the context of a regular class of the training process. For the analysis of the tasks, the content analysis technique has been used. The results obtained show a variety of mathematical tasks, with a predominance of tasks with a low level of cognitive demand. It is concluded that it is necessary to provide teacher training experiences to enrich the design of mathematical tasks for the teaching of patterns and to deepen the level of thinking required to determine their solution.

Keywords: *mathematical tasks, cognitive demand, patterns, pre-service teachers*

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, los currículos contemporáneos de Educación Primaria (e.g. NCTM, 2000; ACARA, 2015) han incorporado conocimientos de naturaleza algebraica como un estándar de contenido más (Pincheira y Álsina, 2021). Esta propuesta responde a una nueva corriente de cambio e innovación curricular (Molina, 2009), conocida como *Early-Algebra*, desde ahora álgebra temprana, que plantea la integración de modos de pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolarización (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007).

Papic, Mulligan y Mitchelmore (2011) señalan que el pensamiento algebraico comienza a desarrollarse a través del proceso de generalización. Carraher, Martínes y Schliemann (2007) plantean que para abordar la generalización matemática en Educación Primaria se requiere trabajar a partir de la identificación de patrones, relaciones y estructuras. De este modo, los patrones contribuyen al desarrollo de la representación y abstracción matemática, proporcionando una base esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Papic, 2015). Las tareas de generalización "involucran la búsqueda de patrones y su solución exige hallar un elemento a partir de otros dados o conocidos" (Merino, Cañadas y Molina, 2013, p. 4)

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Explorando la demanda cognitiva de tareas matemáticas de búsqueda de patrones diseñadas por futuros profesores de Educación Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 489 – 496). Valencia: SEIEM.

Así pues, las tareas matemáticas que se proponen en las etapas escolares iniciales conforman un elemento clave para alcanzar los propósitos que plantea el álgebra temprana. En este estudio, asumiremos por tarea matemática la información que impulsa el trabajo con los estudiantes, incluyendo representaciones, contexto, preguntas e instrucciones (Sullivan, Clarke y Clarke, 2012).

El NCTM (2014) señala que un aprendizaje eficaz requiere involucrar a los estudiantes en tareas matemáticas que sean desafiantes, puesto que gran parte del aprendizaje se encuentra condicionado al tipo de tareas a las que se enfrentan los estudiantes. Sin embargo, no todas las tareas matemáticas ofrecen las mismas oportunidades de aprendizaje (Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2009).

En este contexto, es necesario prestar atención a las tareas que propone el profesorado, dado que éstas pueden ser utilizadas como medio para articular los contenidos y alcanzar los objetivos de enseñanza (Stein et al., 2009), en nuestro caso, para abordar la generalización, más específicamente la enseñanza de patrones.

Dada la importancia que tienen las tareas matemáticas para conducir la enseñanza y, considerando que aún son escasos los estudios que analicen las tareas propuestas por el profesorado para abordar conocimientos de naturaleza algebraica en los primeros niveles de escolaridad, resulta necesario indagar en el tipo de tareas que plantea el profesorado y evaluar la dificultad que supone la resolución de tales tareas.

Desde esta perspectiva, la finalidad de este estudio consiste en analizar la demanda cognitiva de las tareas matemáticas de búsqueda de patrones propuestas por futuros profesores de Educación Primaria. Para ello, nos situaremos desde la perspectiva de Smith y Stein (1998) quienes proponen una categorización de los niveles de exigencia cognitiva de las tareas matemáticas que valoran la complejidad del razonamiento requerido para su solución.

NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA

La demanda cognitiva o exigencia cognitiva es definida por Stein et al. (2009) como "el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito" (p.1). Este concepto permite clasificar el tipo de razonamiento que una determinada tarea demanda a los estudiantes. Smith y Stein (1998) caracterizaron cuatro niveles de demanda cognitiva de las tareas:

- Tareas de memorización: implican reproducir fórmulas, reglas o definiciones. Dada la naturaleza de este tipo de tareas, su resolución no implica un procedimiento. No hay ambigüedad sobre lo que se debe realizar y cómo se debe hacer. Se requiere la reproducción exacta del material previamente visto. La tarea es clara y direccionada. No hay conexión con otros conceptos.
- Tareas de procedimientos sin conexión: corresponden a tareas algorítmicas o procesos rutinarios, utilizan un procedimiento evidente, descrito en la instrucción de la tarea. Exige una limitada demanda cognitiva para realizar con éxito la tarea. Hay poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer y cómo hacerlo. No hay conexión con conceptos o significados que subyacen al procedimiento. No requieren explicaciones sobre el procedimiento que se utiliza para responder la tarea. Se focaliza en la producción de respuestas correctas en lugar de promover la comprensión matemática.
- Tareas de procedimiento con conexión: requieren la atención de los estudiantes sobre el uso de procedimientos con el fin de desarrollar niveles más profundos de ideas y conceptos matemáticos. Los enunciados sugieren, explícita o implícitamente, el procedimiento a seguir, pero son procedimientos generales vinculados con los conceptos matemáticos subyacentes a la tarea. Se representan de formas variadas, como diagramas, objetos manipulativos, símbolos y situaciones problema. Requieren de cierto grado de esfuerzo

cognitivo. Aunque los estudiantes pueden seguir procedimientos generales, deben hacerlo rigurosamente, utilizando los conceptos matemáticos implícitos en los procedimientos para realizar la tarea con éxito.

- Tareas de construir matemáticas: estas tareas requieren de un procedimiento complejo y no algorítmico. Exige comprender conceptos, procesos y relaciones matemáticas. Para dar respuesta a la tarea, de manera exitosa, los estudiantes deben acceder a experiencias y conocimientos relevantes, y hacer uso adecuado de ellos en su desarrollo, como también analizar la tarea, las limitaciones a las posibles estrategias de solución y soluciones.

De acuerdo con los autores, los dos primeros tipos de tareas se asocian a una demanda cognitiva de bajo nivel, mientras que las dos últimas responden a un alto nivel cognitivo.

Este referente teórico surge hace más de dos décadas, con el propósito de proponer una herramienta de desarrollo profesional para el análisis de las tareas matemáticas escolares, sin embargo, su potencialidad ha permitido el desarrollo de diversos estudios hasta la actualidad, en diferentes ámbitos del conocimiento matemático (e.g Bustos y Rodríguez-Ramos, 2020; Benedicto, Gutiérrez y Jaime, 2017; Benedicto, Jaime y Gutiérrez ,2015).

METODOLOGÍA

De acuerdo con el propósito de la investigación, se ha diseñado un estudio de carácter exploratorio-descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) en el que han participado 22 futuros profesores chilenos del tercer año de Educación Primaria que cursan la asignatura Didáctica de las Matemáticas, profundizando en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. En este curso se recibe formación didáctica que complementa la formación disciplinar y experiencias de práctica profesional previas. Cabe destacar que los participantes han recibido un curso de formación en Didáctica de la Matemática con anterioridad, profundizando en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética y geometría.

En el contexto de una clase regular del proceso de formación (sesión 90 minutos) se plantea a los participantes proponer, de manera individual, una tarea matemática que promueva la enseñanza de patrones. Para ello, se indica que la tarea debe estar dirigida a estudiantes de primero año básico de acuerdo con el objetivo de aprendizaje: "Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos…) y patrones numéricos hasta 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo" (Ministerio de Educación, 2012, p. 228). Estas tareas constituyen las unidades de análisis del estudio.

Categorías y procedimientos de análisis

Las unidades de análisis se han clasificado de acuerdo con los cuatro niveles de demanda cognitiva propuestos por Smith y Stein (1998), considerado como indicadores la caracterización de dichos niveles (Tabla 1).

Para llevar a cabo el análisis se ha utilizado la técnica de análisis de contenido, que es "una técnica de investigación para hacer inferencias replicables y válidas a partir del texto (u otra materia significativa) a los contextos de su uso" (Krippendorff, 2013, p. 24). Esta técnica permite descubrir la estructura interna de los textos a través del estudio de su contenido semántico (Rico y Fernández-Cano, 2013), en nuestro caso, las producciones escritas de tareas matemáticas de búsqueda de patrones propuestas por los futuros profesores.

Tabla 1. Categorías e indicadores utilizados en el proceso de codificación (Smith y Stein, 1998, p.348)

Nivel de demanda	Indicadores

cognitiva	
Memorización	1. Incluyen la reproducción de memoria de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos. 2. No se pueden resolver mediante procedimientos porque no existen o porque el tiempo asignado para completar la tarea es muy breve para emplear un procedimiento. 3. No son ambiguas. Dichas tareas involucran la reproducción exacta de material visto con antelación y aquello que se ha de reproducir se establece con claridad y de manera directa. 4. No tienen relación con los conceptos o el significado subyacente a los hechos, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.
Procedimientos sin conexiones	5. Son algorítmicas. Usan el procedimiento que se requiere de manera específica o que es evidente a partir de instrucciones, de experiencias o de la asignación de tarea previamente establecidas. 6. Requieren una exigencia cognitiva limitada para su exitosa consumación. Hay poca ambigüedad sobre lo que se necesita llevar a cabo y sobre cómo hacerlas. 7. No guardan relación con conceptos o con el significado subyacente al procedimiento empleado. 8. Se enfocan en generar respuestas correctas, en lugar de desarrollar la comprensión matemática. 9. No requieren explicaciones o éstas se centran solamente en la descripción del procedimiento utilizado.
Procedimientos con conexiones	10. Enfoca la atención del estudiante en la utilización de procedimientos, con el propósito de desarrollar niveles más profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticos. 11. Sugiere seguir caminos implícitos o explícitos, los cuales son procedimientos muy generales que tienen estrechas relaciones con ideas conceptuales subyacentes, en contraposición con los limitados algoritmos que son poco claros respecto de los conceptos subyacentes. 12. Suelen representarse en multitud de formas, tales como diagramas visuales, objetos manipulables, símbolos y problemas contextualizados. Llevan a cabo conexiones entre una gran cantidad de representaciones que ayudan a desarrollar el significado. 13. Necesitan cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque pueden seguirse procedimientos generales, no se puede hacer en forma irreflexiva. Los estudiantes requieren involucrarse con ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos (con el objeto de finalizar la tarea con éxito) y que desarrollan su comprensión.
Construir matemáticas	14. Requieren un pensamiento complejo y no algorítmico; la tarea, sus instrucciones o un ejemplo resuelto no sugieren en forma explícita un enfoque o camino predecible y trillado. 15. Demandan que los estudiantes exploren y entiendan la naturaleza de los conceptos matemáticos, así como los procesos o relaciones. 16. Requieren la auto verificación o la autorregulación de los procesos cognitivos de uno. 17. Necesitan que los estudiantes tengan acceso al conocimiento o experiencias relevantes y que hagan un uso apropiado de ambas cosas al estar trabajando en la tarea. 18. Exigen que los estudiantes analicen la tarea y examinen de manera activa las restricciones de ésta que pudieran limitar las posibles estrategias de solución y las soluciones mismas. 19. Requieren un esfuerzo cognitivo significativo y pudieran entrañar un nivel de ansiedad para los estudiantes, debido a la naturaleza impredecible de los procesos de solución necesarios.

Las tareas matemáticas se codificaron de acuerdo con los indicadores antes descritos. Se han dicotomizado los indicadores correspondientes a cada nivel de demanda cognitiva según la asignación de puntuaciones en caso de presencia (1 punto) o ausencia (0 puntos).

Cabe destacar que la clasificación de las tareas se llevó a cabo realizando revisiones sucesivas de forma cíclica e inductiva, considerado la formulación de la tarea a nivel general, las preguntas que se formulan en la tarea y cómo se orienta el desarrollo del contenido algebraico temprano para obtener las respuestas.

RESULTADOS

De acuerdo con el objetivo de estudio, se describen los datos a partir de los niveles de demanda cognitiva descritos en la tabla 1 (Smith y Stein,1998).

En total, se han analizado 22 tareas matemáticas propuestas por futuros profesores de Educación Primaria para abordar la enseñanza de patrones, estableciendo el nivel de demanda cognitiva mostrada, como se aprecia en la Tabla 2.

Tabla 2. Distribución de las tareas matemáticas de acuerdo con los niveles de demanda cognitiva

Nivel cognitivo	Frecuencia (%)
Memorización	11 (50%)
Procedimientos sin conexiones	7 (31,8%)
Procedimientos con conexiones	4 (18,2%)
Total	22 (100%)

A nivel general, se observa que los participantes del estudio proponen con mayor predominancia tareas de bajo nivel de demanda cognitiva (81,8%), destacando las tareas de memorización (50%), seguidas de las tareas vinculadas al uso de procedimientos sin conexión (31,8%). Se observa una presencia menor de las tareas que requieren un alto nivel de demanda cognitiva para su desarrollo (18,2%). Cabe destacar que no hay presencia de tareas de construir matemáticas.

De manera más específica, si nos situamos desde la perspectiva de los indicadores que caracterizan los niveles de demanda cognitiva (Tabla 3) es posible evidenciar la predominancia de los indicadores en relación al total de tareas analizadas. Cabe señalar, que una tarea puede atender a más de un indicador.

Tabla 3. Distribución de los indicadores que caracterizan la demanda cognitiva en las tareas matemáticas

Nivel cognitivo	Indicador	Frecuencia (%)
Memorización	1	5 (22,7%)
	2	8 (36,3%)
	3	8 (36,3%)
	4	2 (9%)
Procedimientos sin conexiones	5	3 (13,6%)
	6	2 (9%)
	7	1 (4,5%)
	8	1 (4,5%)
	9	2 (9%)
Procedimientos con conexiones	10	3 (13,6%)
	11	2 (9%)
	12	4 (18,1%)
	13	2 (9%)

En el caso de las tareas de memorización (50%), destacan con un 36,3 % los indicadores 2 y 3, que tienen relación con el planteamiento de tareas matemáticas que no pueden ser resueltas mediante procedimientos y tareas no ambiguas, es decir, tareas que requieren la reproducción exacta del

material previamente visto, respectivamente. Un ejemplo de este tipo de tareas se observa en la figura 1, puesto que, para responder de manera correcta, los estudiantes deben reproducir el ejemplo que plantea el profesor para establecer el patrón. Esta tarea no requiere de algoritmos para su resolución.

A través del juego, se modela la siguiente situación: Aplauso-zapateo-decir "A"- Aplauso-zapateo-decir "A"- Aplauso-zapateo-decir "A"-Aplauso

Preguntas: ¿Qué sigue?, ¿y luego?, ¿Cuál es el patrón?, ¿Cuántos elementos tiene el patrón? ¿De qué manera se repiten los elementos, ordenados o desordenados?
El profesor debe explicar a sus estudiantes que un patrón es un conjunto de elementos ordenados de acuerdo a una regla, que al repetirse varias veces forma una secuencia.
¿Podemos formar otro patrón con estos elementos?, ¿Cómo quedaría la secuencia?

Figura 1. Ejemplo de tarea de memorización

Respecto de las tareas propuestas por los futuros profesores que involucran el uso de procedimientos sin conexión (31,8%), destaca el indicador 5 referido a tareas principalmente algorítmicas que utilizan un procedimiento específico o evidente a partir de las instrucciones de la tarea (13,6%). La figura 2, muestra un ejemplo de este tipo de tarea.

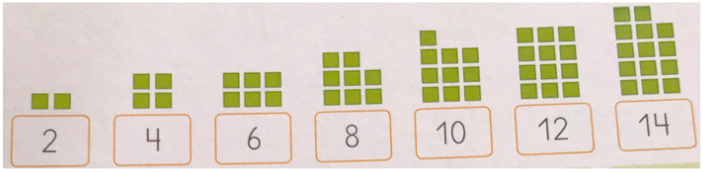
Se plantea la siguiente secuencia numérica 3-6-9-12-15
Determinar los siguientes tres términos de la secuencia contando los elementos. ¿Cuál es el patrón que permite continuar la secuencia?
Se formaliza el contenido: Un patrón numérico es una regla que forma un grupo de números ordenados llamado secuencia numérica. Las secuencias numéricas pueden ser crecientes (cuando se agrega o suma) o decrecientes (cuando se quita o resta)

Figura 2. Ejemplo de tarea de procedimiento sin conexión

El desarrollo de esta tarea requiere que los estudiantes utilicen el procedimiento de contar de tres en tres para continuar la secuencia numérica y establecer el patrón creciente.

Por otra parte, las tareas planteadas por los participantes que suponen el uso de procedimientos con conexión (18,2%), predomina el indicador 12 referido a tareas que pueden representarse en diversas formas, tales como diagramas visuales, objetos manipulables, símbolos y problemas contextualizados), con un 18,1%. Un ejemplo de este tipo de tareas se observa en la figura 3.

El profesor presenta el siguiente esquema en la pizarra. Los estudiantes pueden interactuar en el pizarrón y completar la casilla de acuerdo a la cantidad de fichas que observa. Esto también se puede trabajar con tarjetas sobre la mesa del niño de manera concreta.



Preguntas para orientar la actividad: ¿qué observan?, ¿cómo es la secuencia?, ¿cuál es el patrón de la secuencia?

Figura 3. Ejemplo de tarea de procedimiento con conexión

Para dar solución a esta tarea, el estudiante debe establecer conexiones entre las representaciones que la tarea promueve para desarrollar los conceptos matemáticos implicados en ésta.

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se ha presentado un análisis de un conjunto de 22 tareas matemáticas de búsqueda de patrones propuestas por futuros profesores chilenos de Educación Primaria para un primer año básico, situándonos desde la perspectiva de Smith y Stein (1998), de acuerdo con los niveles de demanda cognitiva de las tareas que estos autores proponen (memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión, construir matemáticas).

El análisis de las tareas matemáticas ha evidenciado que, para promover la enseñanza de patrones, los futuros profesores plantean principalmente tareas de bajo nivel de demanda cognitiva, alcanzando un 50% las tareas de memorización, seguidas de tareas que involucran procedimientos sin conexión para su resolución (31,8%). Una presencia mucho menor alcanza las tareas de alto nivel de demanda cognitiva, con tan sólo un (18,2%), correspondiente a tareas que requieren del uso de procedimientos con conexión. No se evidencian tareas de construir matemáticas.

De acuerdo con Wake (2018) el diseño de tareas matemáticas forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza, puesto que desempeñan un rol importante en las experiencias de aula para los estudiantes y profesores. Por tanto, consideramos que es necesario brindar experiencias de formación al profesorado que permitan enriquecer el diseño de tareas matemáticas vinculadas al estudio del álgebra temprana, y, de manera específica, de tareas de generalización que incluyan la exploración de patrones repetitivos y numéricos, puesto que el pensamiento algebraico temprano se desarrolla a través de las relaciones estructurales de los patrones y la aritmética (Kaput, 2008). Por otra parte, es necesario proporcionar herramientas a los futuros profesores que les permitan valorar y profundizar en el nivel del pensamiento requerido para determinar la solución de una tarea matemática, de manera que sea posible avanzar hacia el desarrollo de tareas que requieran una exigencia cognitiva mayor. A modo de ejemplo, consideramos que estas experiencias formación deben orientarse hacia el diseño de tareas matemáticas en contextos reales de enseñanza e implementación de las tareas propuestas acompañado de un proceso de reflexión y mejora de dichas tareas, fundamentado en las trayectorias hipotéticas de aprendizaje propuestas por Clements y Sarama (2015).

Agradecimientos: Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447.

Referencias

ACARA (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. Recuperado de: https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Bustos, B., y Ramos-Rodríguez, E. (2020). Estudio de la práctica educativa de una profesora novel a través de la demanda cognitiva de una tarea escolar sobre fracciones iguales. *Paulo Freire. Revista de pedagogía crítica*, 23, 5-23.

Benedicto, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2017). Análisis de la demanda cognitiva de resoluciones de problemas de visualización. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 501). Zaragoza: SEIEM.

Benedicto, C., Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer.

Carraher, D. W., Martínez, M. V., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.

Clements, D. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. 5. Ed. México: McGraw-Hill Interamericana.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology*. 3. ed. California, CA: Sage Publications.

Merino, E., Cañadas, M.C., y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensmaiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *De los principios a la acción: Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, VA: NCTM

Papic, M. M. (2015). An early mathematical patterning assessment: Identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 153-180.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp.1-22). Comares.

Sullivan, P., Clarke, D., y Clarke, B. (2012). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer Science & Business Media.

Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 3, 344-350.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. Nueva York: Teachers College Press.

Wake, G. C. (2018). A case study of theory-informed task design: what might we, as designers, learn? En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García, A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 94-109). Gijón: SEIEM.

ESTUDIANTES DE SEXTO DE PRIMARIA COMPARAN FUNCIONES LINEALES: EL ROL DEL LENGUAJE NATURAL

Sixth graders comparing linear functions: The role of natural language

Pinto, E.[a], Cañadas, M. C.[b], Moreno, A.[b] y Torres, M. D.[b]

[a]Universidad del Desarrollo, Chile, [b]Universidad de Granada, España

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas escritas y orales de seis estudiantes de quinto/sexto de primaria (10-12 años) al resolver diferentes problemas que involucran la comparación de funciones lineales. En el contexto del pensamiento algebraico, el objetivo del trabajo es identificar y describir cómo los estudiantes usan el lenguaje natural al resolver problemas que involucran la comparación de dos funciones. Empleamos un sistema de categorías que permite describir el modo en que los estudiantes expresan sus ideas a través del lenguaje natural (escrito u oral). Los principales hallazgos muestran que los estudiantes generalizan y reconocen la variación en las funciones involucradas en los problemas mediante este tipo de representación. Finalmente, discutimos la importancia del lenguaje natural cuando los estudiantes interactúan con contenidos de carácter algebraico.

Palabras clave: *pensamiento funcional, representaciones, lenguaje natural, función lineal*

Abstract

In this work, we analyze written and oral responses of six fifth/sixth graders (10-12 years) solving different problems that involve the comparison of linear functions. In the context of algebraic thinking, our goal is to identify and describe how students use natural language when solving problems that involve the comparison of two functions. We use a system of categories that allows us to describe how students express their ideas through natural language (written or oral). The main findings show that students generalize and recognize the variation in functions involved in problems using this type of representation. Finally, we argue the importance of natural language when students interact with algebraic ideas.

Keywords: *algebraic thinking, functional thinking, natural language, linear function, representations*

INTRODUCCIÓN

En los últimos veinte años, el rol del pensamiento algebraico en los primeros cursos educativos ha mostrado una creciente presencia e interés en la agenda investigativa. Por ejemplo, en pasados Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), un importante número de publicaciones tienen elementos asociados al pensamiento algebraico entre sus objetivos (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2019). En particular, algunas investigaciones abordan el pensamiento algebraico desde un enfoque funcional y han evidenciado cómo diferentes grupos de estudiantes de educación primaria (6-12 años) trabajan, principalmente, con problemas que involucran funciones (e.g., Brizuela y Earnest, 2008; Pinto y Cañadas, 2019). En este trabajo exploramos cómo un grupo de estudiantes de educación primaria resuelven problemas de generalización que involucran la comparación de funciones, un tema de reconocida importancia en la literatura de investigación (e.g., Brizuela y Blanton, 2014).

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2021). Estudiantes de sexto de primaria comparan funciones lineales: el rol del lenguaje natural. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 497 – 504). Valencia: SEIEM.

Dos razones principales motivan este trabajo. En primer lugar, diferentes investigaciones dan cuenta que los estudiantes de educación primaria, e incluso de educación infantil, trabajan con problemas que involucran una única función (e.g. Pinto y Cañadas, 2019). Sin embargo, son escasos los trabajos que describen cómo estudiantes comparan el comportamiento de dos funciones en un mismo problema). Describir cómo estudiantes de primaria comparación funciones permitirá entregar más evidencias del razonamiento algebraico de estudiantes en estas edades.

En segundo lugar, asumimos que los estudiantes pueden expresar sus ideas al resolver problemas de carácter algebraico mediante diferentes tipos de representaciones (e.g., pictórica, manipulativas, numéricas, etc.). Para diferentes autores, el rol del lenguaje natural es esencial, ya que es considerado un andamio útil para otros tipos de representaciones más simbólicas, como la notación algebraica, por ejemplo (Radford, 2003). Por ejemplo, Brizuela y Earnest (2008) exploran cómo estudiantes de tercero de primara resuelven un problema en el que se involucra la comparación de dos funciones lineales e interactúan con cuatro tipo de representaciones (lenguaje natural, notación algebraica, representación tabular y gráfica). Los autores destacan qué elementos del problema resalta cada representación. El lenguaje natural permitió a los estudiantes discutir el contexto del problema, conectar dicha situación con sus experiencias previas y establecer predicciones sobre la regla general involucrada en el problema. Por tanto, el lenguaje natural y la comparación de funciones cobra especial relevancia en las primeras edades.

A partir de los elementos anteriores, nuestro objetivo es identificar y describir cómo estudiantes de educación primaria usan el lenguaje natural al resolver problemas que involucran la comparación de funciones.

MARCO CONCEPTUAL

Existen diferentes aproximaciones al pensamiento algebraico (e.g., Kaput, 2008; Radford, 2003). Nuestro marco conceptual se basa en el análisis del álgebra escolar de Kaput. Específicamente, nos centramos en un enfoque funcional del álgebra escolar, el cual involucra la generalización de relaciones que covarían, las cuales pueden ser generalizadas o no, y son expresadas mediante diferentes representaciones.

Concepto de función

Asumimos el concepto de función como "una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asigna cada elemento en el primer conjunto (el dominio) a exactamente un elemento en el segundo conjunto (codominio)" (Vinner y Dreyfus, 1989, p. 357). El trabajo con funciones se centra en las relaciones entre cantidades que covarían y es presentada a través de problemas. Algunos problemas involucran una única función y otros problemas involucran dos o más funciones. Para ilustrar la manera en que se introduce un problema que involucra dos funciones, en la figura 1 presentamos el problema del trato de la abuela (adaptado de Brizuela y Earnest, 2008).

> Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela quiere recompensarle por un trabajo que le ha hecho. Le ofrece dos tratos: (a) trato 1: "te doblo el dinero que tienes"; o (b) trato 2: "te doy el triple de tu dinero y tú me das 7 euros".

Figura 1. Problema del trato de la abuela

Tal como lo mostramos en la figura 1, este problema involucra la relación entre "el dinero que tiene" y el "trato", y las funciones involucradas son $y=2x$; e $y=3x-7$.

Representaciones: el rol del lenguaje natural

Las representaciones son "todas aquellas herramientas -signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas" (Rico, 2000, p. 221). En concreto, las representaciones son el medio por el cual los

estudiantes pueden organizar y expresar las relaciones encontradas, con la finalidad de comprender, analizar, explicar, predecir y justificar la forma en la cual se relacionan las variables (Brizuela y Blanton, 2014).

En el contexto del pensamiento algebraico, el lenguaje natural cobra especial relevancia. Este tipo de representación, tal como lo señala Molina (2014), se refiere al lenguaje del día a día, el cual involucra términos específicos como los del lenguaje matemático y es el que comúnmente está presente en los problemas que involucran funciones y que se presentan a los estudiantes. Generalmente, en el lenguaje natural se distingue entre lenguaje escrito o y el hablado. El lenguaje natural-hablado incluye un sublenguaje especializado, de características orales, y que se relaciona con dominios de las matemáticas, mientras que el lenguaje natural-escrito, involucra la producción escrita de oraciones y frases (Lesh, Behr y Post, 1987). En el contexto del uso de este tipo de representación por los estudiantes, Mason y Pimm (1984) indican que el rol del lenguaje natural es esencial para generalizar y su uso puede influir en la expresión algebraica de la generalización, en contextos matemáticos u otros.

MÉTODOLOGÍA

Los datos que analizamos en este trabajo son las respuestas escritas y orales de estudiantes de quinto/sexto de Educación Primaria (10-12 años), con las cuales buscamos explorar cómo estos relacionan las variables involucradas en los problemas y describir cómo usan representaciones para expresar relaciones funcionales y compararlas.

En primer lugar, diseñamos un experimento de enseñanza que fue llevado a cabo con un grupo de quinto de educación primaria (10-11 años) (ver Pinto y Cañadas, 2019). Implementamos cuatro sesiones y en cada una de ellas presentamos problemas de generalización que involucraban funciones lineales (y=ax+b, con a y $b \in$ N). Específicamente, en la segunda y tercera sesiones presentamos a los estudiantes problemas que involucran la comparación de funciones: el problema de las camisetas (Carla y Daniel venden camisetas. Carla gana 3 euros por cada camiseta vendida. Daniel gana el doble por cada camiseta vendida y tiene 15 euros ahorrados) y el problema del trato de la abuela (ver figura 1).

En segundo lugar, y con la finalidad de profundizar en los razonamientos de los estudiantes, los entrevistamos cuando los mismos estudiantes cursaban sexto de primaria (11-12 años). Al iniciar la entrevista, presentamos a los estudiantes el problema de las tarifas telefónicas (adaptado de Brizuela y Martinez, 2012). En la figura 2 presentamos el problema de las tarifas.

Jorge y Rosa tienen diferentes tarifas telefónicas:
- La tarifa de Jorge: Él paga 10 céntimos por minuto para todas las llamadas que haga.
- La tarifa de Rosa: Ella paga 60 céntimos al mes más 5 céntimos por minuto para todas las llamadas que haga.

(no importa la hora del día ni el día de la semana en el que se haga la llamada)
Discute las ventajas y desventajas de cada tarifa.

Figura 2. Problema de las tarifas telefónicas

En los tres problemas, los estudiantes respondieron a preguntas que involucraban las relaciones entre casos particulares y el caso general (por ejemplo, en el problema de las tarifas telefónicas, una pregunta planteada a los estudiantes fue: "Si realizo solo una llamada de un minuto, ¿qué tarifa me conviene más?"). Adicionalmente, en cada problema trabajaron con diferentes representaciones matemáticas.

Los participantes de este trabajo son seis estudiantes de sexto curso, que el año anterior habían participado en el experimento de enseñanza. Ellos fueron seleccionados con base en sus avances en la identificación de patrones y generalización, así como su disposición a colaborar. Los seis pertenecían a tres grupos con diferentes logros de aprendizaje en las sesiones: dos estudiantes del

grupo avanzado (E1 y E2), dos estudiantes del grupo intermedio (E3 y E4) y dos estudiantes del grupo inicial (E5 y E6).

Las fuentes de recogida de información fueron las hojas de trabajo y las videograbaciones de los problemas presentados durante el experimento de enseñanza (camisetas y trato de la abuela) y en la entrevista (tarifas telefónicas). Las categorías que hemos usado en este estudio se apoyan en las ideas de Brizuela y Martinez (2012). En concreto, y según el objetivo de este trabajo, estas categorías permiten caracterizar cómo los estudiantes usan el lenguaje natural al resolver los problemas. Para ello, analizamos si esta representación les permite: (a) tratar con casos particulares, (b) hace referencia a lo indeterminado; (c) explicar cálculos aritméticos; (d) reconocer la totalidad de la variación o solo una parte (reconocer la parte constante de la variación, se enfocan en expresar la variación total, o reconocen la variación de cada función); (e) expresar la regla general; y (f) comparar la variación de cada función (comparación con base en casos particulares y/o comparación con base en la regla general).

RESULTADOS

En la tabla 1 presentamos cómo los seis estudiantes (E1-E6) usan el lenguaje natural (escrito o hablado) al resolver los tres problemas descritos.

Tabla 1. *Uso del lenguaje natural en los problemas que involucran la comparación de funciones*

	E1			E2			E3			E4			E5			E6		
	C	A	T	C	A	T	C	A	T	C	A	T	C	A	T	C	A	T
Trata con casos particulares			x			x			x			x			x			x
Trata con lo indeterminado																		
Explica cálculos aritméticos	x			x														
Reconoce la parte constante de la función	x	x									x				x			
Se enfoca en expresar la cantidad total															x			
Reconoce la variación en cada función	x	x	x			x		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
Expresa la regla general para cada situación										x			x			x		
Compara con base en algunos casos particulares									x						x			x
Compara con base en la regla general		x						x		x	x			x			x	

Nota. C = problema de las camisetas; A = problema del trato de la abuela; T = problema de las tarifas telefónicas.

Con la intención de profundizar en el uso del lenguaje natural de los estudiantes en cada problema, en las siguientes secciones describimos las principales tendencias, así como ilustramos con algunas evidencias.

Problema de las camisetas

El problema de las camisetas fue respondido por los seis estudiantes. De manera general, los estudiantes muestran evidencias de uso del lenguaje natural para: (a) explicar cálculos aritméticos; (b) reconocer la parte constante de la función; (c) reconocer la variación en cada situación; (d) expresar la regla general; (e) comparar con base en la regla general. Sobre estos hallazgos, describimos tres ideas principales. En primer lugar, el lenguaje natural es un medio que permite

expresar las reglas generales involucradas en cada situación: las ventas de camisetas que realiza Carla ($y=3x$) y Daniel ($y=2x+15$). Específicamente, tres estudiantes (E4, E5 y E6) expresan la regla general mediante este tipo de representación. Por ejemplo, y ante la pregunta "Cuando acaben de vender camisetas y sepan cuántas ha vendido cada uno, ¿cómo puede saber Carla cuánto dinero tiene?", E6 responde "multiplicando el número de camisetas vendidas por 3". La respuesta de E6 permite describir la manera en que el estudiante hace relación a la operación aritmética ("multiplicando") que involucra las variables. En este caso, la regla general coincide con la función que está involucrada en el problema.

En segundo lugar, tres estudiantes (E1, E4 y E6), por medio del lenguaje natural, reconocen que las ventas de camisetas que realiza Carla o Daniel pueden variar de forma diferente. Por ejemplo, E4 al responder a la pregunta "¿Pueden ahorrar la misma cantidad?" señala "depende del valor de X". En esta respuesta es posible identificar la expresión *depende* para referirse a la variación que está involucrada en las ventas que realice Daniel o Carla.

En tercer lugar, dos estudiantes (E1 y E2) usan este tipo de representación para explicar cálculos aritméticos específicos. Por ejemplo, en la figura 4 presentamos las respuestas de E1 a una de las preguntas.

Cuando acaben de vender camisetas y sepan cuántas ha vendido cada uno, ¿cómo puede saber Carla cuánto dinero tiene?

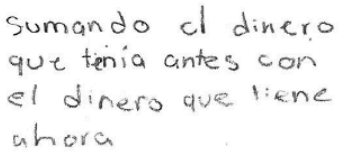


Figura 4. Respuestas de E1

Las respuestas presentadas en la figura 4 muestran cómo el estudiante relaciona, a través de una operación aritmética específica, "el dinero que tenía antes" con "el dinero que tiene ahora". Tanto en E1 como en E2, las operaciones aritméticas no han sido usadas para relacionar variables, sino más bien para responder a la pregunta planteada.

Problema del trato de la abuela

A partir de los datos presentados (ver tabla 1), es posible señalar que el lenguaje natural es usado, al responder este problema, para: (a) reconocer la variación que supone cada trato; y (b) comparar con base en la regla general. No observamos evidencias, ni en el análisis de los vídeos ni en las hojas de trabajo, de otros usos del lenguaje natural. Específicamente, en lo que respecta al reconocer la variación involucrada en ambos tratos, los cinco estudiantes reconocen que no hay un trato que sea siempre mejor que el otro. Por ejemplo, ante la pregunta "¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?", E5 responde "No. Porque depende del dinero que tenga. En esta respuesta, la expresión *depende* permite identificar que los estudiantes reconocen la variación. Dicha expresión está directamente relacionada a la variable "dinero".

Por otra parte, los cinco estudiantes establecen comparaciones basados en la regla general; señalan cuál es el mejor trato indicando cuál es el punto (en términos de euros) en la cual conviene un trato o el otro. Por ejemplo, en la figura 5 presentamos las respuestas de E1 y E4 al responder a la pregunta "¿Qué debes hacer? Ayúdale a elegir el mejor trato".

(E1)

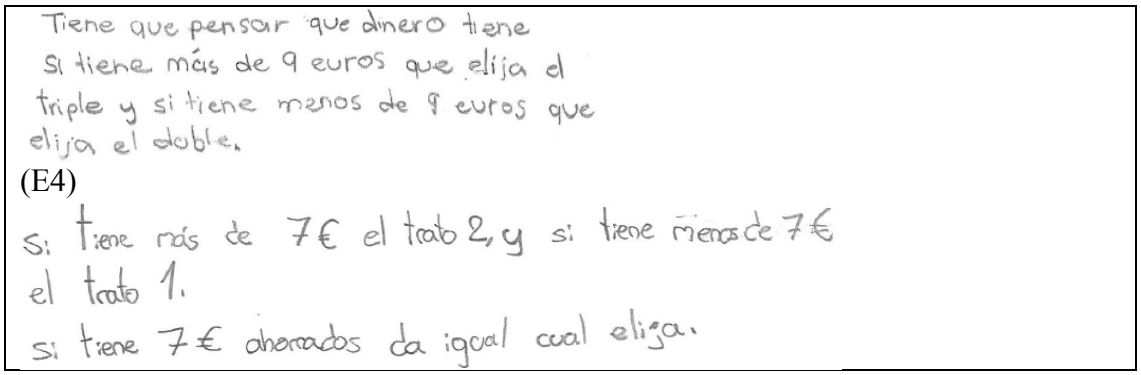


Figura 5. Respuestas de E1 y E4

Problema de las tarifas telefónicas

A partir de las respuestas de los estudiantes, el lenguaje natural ha sido utilizado para: (a) tratar con cantidades específicas; (b) reconocer la parte constante de la función; (c) expresar el precio total de ambas tarifas; (d) reconocer la variación en ambas situaciones; y (e) comparar con base en algunos casos particulares. Este tipo de representación ha sido usado, principalmente, para interactuar con casos particulares (0, 1, 8 y 20). En otras palabras, los estudiantes explican qué tarifa es más conveniente dado los casos particulares involucrados. Adicionalmente, todos los estudiantes reconocen de manera oral, que las tarifas telefónicas varían de manera diferente. El siguiente extracto de entrevista, refleja cómo una estudiante (E5) reconoce la variación de las tarifas telefónicas.

1. I: Bueno, E5, este es el pequeño reto que tenemos. ¿Vale? Léetelo un poquito y ya me dices lo que me interesa.
2. E5: Vale
3. I: Vale. Como ves vamos a comparar dos tarifas telefónicas y, en principio, ¿ves alguna ventaja o desventaja en una de ellas?
4. E5: Depende.
5. I: ¿De qué depende?
6. E5: De cuantos [minutos] llames (…)

En el extracto anterior, y tras la presentación del problema (líneas 1 a 3), la estudiante reconoce que la ventaja o desventaja por una tarifa telefónica "depende" (línea 5) de la cantidad de minutos. En este caso, la estudiante reconoce que existe una variación en los valores que puede tomar la variable "precio", considerando la variable "tiempo".

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El pensamiento funcional alienta naturalmente a que los estudiantes investiguen (Yerushalmy, 2000), ya que el foco de introducir problemas que involucran funciones es que los estudiantes atiendan a las relaciones y estructuras matemáticas involucradas, más que centrarse en cálculos aislados. En concreto, esta investigación contribuye a describir cómo estudiantes de educación primaria (6-12 años) resuelven problemas que involucran la comparación de funciones, un tópico que se reconoce necesario para profundizar (Brizuela y Blanton, 2014). Adicionalmente, y en lo que respecta a la originalidad de este trabajo, destacamos que este estudio proporciona evidencias de: (a) el trabajo de estudiantes a diferentes problemas, que fueron resueltos en diferentes momentos; y (b) una diversidad de estudiantes, lo que nos permite tener una diversidad de formas de abordar la comparación de funciones por estudiantes de primaria.

Considerando nuestro objetivo de investigación —identificar describir cómo estudiantes de primaria, en concreto de quinto/sexto, usan el lenguaje natural al resolver problemas que involucran la

comparación de funciones—, destacamos que la notación algebraica no es el único camino para que los estudiantes interactúen con problemas que involucran la comparación de funciones (e.g., Brizuela y Martinez, 2012). Tal como lo reportamos en este trabajo, el lenguaje natural es una representación que, a este grupo particular de estudiantes, les permite comparar el comportamiento de las funciones involucradas en los problemas, así como generalizar. En lo que respecta a la generalización, la mitad de los estudiantes expresó reglas generales mediante el lenguaje natural en los problemas de las camisetas y el trato de la abuela (experimento de enseñanza), mientras que este tipo de representación no fue precisamente usado para generalizar en el problema de las tarifas telefónicas (entrevistas). Esto sugiere que, posiblemente y con el paso del tiempo, los estudiantes expresan sus generalizaciones de maneras más sofisticadas. Los anterior permite enfatizar que el lenguaje natural (hablado o escrito) es considerado el primer paso hacia la apropiación de una representación más simbólica y, a la vez, es un vehículo útil para expresar la generalidad (Mason, 2008). Los resultados de este trabajo complementan los hallazgos reportados por otros autores sobre la importancia del lenguaje natural al comparar funciones. Considerando el estudio de Brizuela y Earnest (2008), nuestros resultados brindan más detalle sobre cómo el lenguaje natural resalta diferentes aspectos de las funciones involucradas en el problema como, por ejemplo: (a) reconocer la variación en cada función, (b) expresar la regla para cada función, (c) comparar con base en algunos casos particulares y (d) comparar con base en la regla general. Lo anterior nos hace reflexionar que existe un creciente interés en proporcionar a los estudiantes representaciones cada vez más simbólicas, abandonando la importancia que tiene el lenguaje natural para que los estudiantes sean capaces de interactuar con otras representaciones.

Por otra parte, y según los resultados reportados en este trabajo, existen expresiones o palabras que nos entregan orientaciones sobre cómo los estudiantes perciben la comparación de funciones. Por ejemplo, la expresión *depende* (que aparece en los problemas del trato de la abuela y las tarifas telefónicas) muestra cómo los estudiantes reconocen y expresan, desde su lenguaje cotidiano, que las variaciones entre las funciones varían de maneras diferentes (considerando las necesidades específicas de cada problema). Este hallazgo está en sintonía con lo reportado por Radford (2018), quien identifica la manera en que estudiantes perciben reglas generales usando la expresión *siempre*. Lo anterior sustenta una idea interesante: algunas expresiones o palabras entregan información valiosa que favorece comprender e interpretar la manera en que los estudiantes interactúan con elementos propios de las funciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2019). Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, A. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 183-192). Valladolid, España: SEIEM.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)*, *14*, 37-57.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). Nueva York, NY: LEA.

Brizuela, B. M. y Martinez, M. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero (Ed.), *Desarrollo cognitivo y educación [II] Procesos de conocimiento y contenidos específicos* (pp. 267-290). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: LEA.

Lesh, R. A., Behr, M. y Post, T. (1987). Rational numbers relations and proportions. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Nueva York, NY: LEA.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277-289.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *La Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579.

Moreno, A., Cañadas, M. C., Jaldo, P. y Bautista, A. (2016, julio). Functional topics in grade 5 students' comparison of two linear functions. Documento presentado en el *13th International Congress on Mathematical Education* (ICME). Hamburgo, Alemania.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (first online). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 1-22. DOI10.1007/s13394-019-00300-2

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5 - 12 year- olds. ICME 13 Monographs* (pp. 3-25). Berlín, Alemania: Springer.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IV* (pp. 219-231). Huelva, España: SEIEM.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function base approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(2), 125-147.

SIMULACIÓN DE INTERVENCIONES DOCENTES ANTE CONJETURAS DE LOS ESTUDIANTES EN UN ENTORNO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON RECURSOS TIC[1]

Simulation of teaching interventions in the face of student conjectures in a problem-solving environment with ICT resources

Pochulu, M.[a], Font, V.[b] y Breda, A.[b]

[a]Universidad Nacional de Villa María, [b]Universitat de Barcelona

Resumen

El objetivo de este trabajo es, en el contexto de un curso de formación dirigido a formadores de futuros profesores de matemáticas de secundaria, caracterizar las intervenciones docentes simuladas que se realizan para gestionar una clase, donde se resuelven situaciones problemas usando un recurso TIC, para dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿qué tipos de interacciones de aula ficticias proponen los formadores de profesores? ¿tienen en cuenta la idoneidad interaccional y ecológica en sus propuestas de diálogos ficticios? Se utilizó una metodología que tiene elementos de la investigación basada en el diseño de un ciclo formativo fundamentada en el empleo de herramientas del Enfoque Ontosemiótico. Se concluye que los tipos de interacción corresponde a los siguientes estilos: mayéutico, falsacionista, dogmático y paternalista y que no hay una alta idoneidad interaccional en sus propuestas de diálogos ficticios y que no se contempla la ecológica.

Palabras clave: *idoneidad didáctica, configuración didáctica, diálogos ficticios de aula*

Abstract

The objective of this work is, in the context of a training course, aimed at trainers of future high school mathematics teachers, to characterize the simulated teaching interventions that are carried out to manage a class, where problem situations are solved using an ICT resource, to answer the following questions: What types of fictional classroom interactions do teacher educators propose? Do they take into account interactional and ecological suitability in their proposals for fictitious dialogues? A methodology that has elements of research based on the design of a training cycle based on the use of Ontosemiotic Approach was used. It is concluded that the types of interaction correspond to the following styles: maieutic, falsificationist, dogmatic and paternalistic and that there is no high interactional suitability in their proposals for fictitious dialogues and that ecological suitability is not contemplated.

Keywords: *didactical suitability, didactic configuration, fictional classroom dialogues*

INTRODUCCIÓN

En Godino, Batanero y Font (2019) se presenta una síntesis del Enfoque Ontosemiótico (EOS), sobre el conocimiento y la instrucción matemáticos, resaltando los problemas, principios y métodos de investigación en didáctica de la matemática que se abordan con este marco teórico. Dos de los problemas que se aborda son los llamados *Problema educativo-instruccional* y *Problema de optimización del proceso de instrucción*, en el marco de los cuales se formula el siguiente subproblema: ¿Qué tipos de interacciones entre personas, conocimientos y recursos se deberían implementar en los procesos instruccionales para optimizar los aprendizajes?

[1] Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Pochulu, M., Font, V. y Breda, A. (2021). Simulación de intervenciones docentes ante conjeturas de los estudiantes en un entorno de resolución de problemas con recursos TIC. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 505 – 512). Valencia: SEIEM.

Con relación a esta última problemática (y usando herramientas del EOS), el objetivo de la investigación que se presenta es caracterizar –en el contexto de un curso de formación, dirigido a formadores de futuros profesores de matemáticas de secundaria –, las intervenciones docentes simuladas que se realizan para gestionar una clase, donde se resuelven situaciones problemas usando un recurso TIC. En particular, estábamos interesados en investigar algunos patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada al aprendizaje, que permitieran caracterizar estilos de interacción, y valorar tanto su grado de idoneidad interaccional como ecológica. Este objetivo pretendía dar una respuesta, entre otras, a las siguientes preguntas: ¿Qué tipos de interacciones de aula ficticias proponen los formadores de profesores? ¿Tienen en cuenta la idoneidad interaccional y ecológica en sus propuestas de diálogos ficticios? Se trata de preguntas relevantes ya que diferentes autores han señalado las potencialidades didácticas de los diálogos ficticios en la formación de profesores (por ejemplo, Cusi y Morselli, 2018).

REFERENTE TEÓRICO

En Godino, Batanero y Font (2019) se explica que uno de los problemas que se abordan en el EOS es el llamado *Problema educativo-instruccional* cuyas preguntas primordiales son las siguientes: ¿Qué es la enseñanza? ¿Qué es el aprendizaje? ¿Cómo se relacionan?

El modelo de instrucción (entendido como la relación entre enseñanza y aprendizaje de un contenido específico) que se asume en el EOS atribuye un papel clave a la "zona de desarrollo potencial" lo cual ha llevado a asumir los siguientes principios específicos: 1) se postula que el aprendizaje tiene como finalidad la apropiación por los estudiantes de los significados y objetos institucionales que le permitan afrontar la solución de determinados problemas y desarrollarse como persona, 2) el estudio de los significados personales de los estudiantes es un componente esencial de la problemática educativa, ya que la apropiación de los significados institucionales pretendidos está condicionada por los significados personales iniciales de los estudiantes.

En el EOS, la noción de configuración didáctica constituye la principal herramienta metodológica para el análisis a nivel micro de los procesos de instrucción (Godino, Contreras y Font, 2006). Se define como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin del proceso de resolución de una situación – problema. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea. Se consideran cuatro tipos de configuraciones teóricas que se designan como configuración *magistral*, *adidáctica*, *personal* y *dialógica*. La configuración *adidáctica* se concreta en una secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización. La manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas basada en la presentación magistral, seguida de ejercicios de aplicación caracteriza la configuración *magistral*. Cuando la resolución de la tarea se realiza por el estudiante sin una intervención directa del docente (por ejemplo, resolver ejercicios propuestos por el profesor fuera del aula) se trata de un tipo de configuración didáctica en la que básicamente predomina el *estudio personal*. Otro tipo de configuración puede definirse respetando el momento de exploración por parte de los alumnos, pero asumiendo el profesor básicamente la validación y la institucionalización mediante un *diálogo contextualizado* entre el docente y los alumnos. Las configuraciones didácticas empíricas que acontecen están más o menos próximas a estas configuraciones teóricas. Otra herramienta metodológica para el análisis de la instrucción es la secuencia de configuraciones didácticas que constituye una trayectoria didáctica. Por tanto, en el EOS, se considera que la metodología para investigar los procesos de instrucción consiste en realizar el análisis de la configuración didáctica (trama de acciones docente y discentes y medios usados para abordar el estudio de una situación-problema) y de la trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas).

En toda configuración didáctica se puede diferenciar tres componentes: a) una configuración epistémica (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la

tarea), b) una configuración instruccional (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes) y c) una configuración cognitiva - afectiva (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan). En la configuración instruccional, la interacción - entendida como acción, relación o influencia recíproca entre dos o más personas o cosas en el proceso de enseñanza y aprendizaje – es un factor relevante para facilitar (o no) los aprendizajes matemáticos de los alumnos (Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz, 2009). Si bien hay muchos tipos de interacción, hay cierto consenso en que en los procesos de instrucción se debe potenciar un tipo de interacción que permita que cualquier participante exprese opiniones, convicciones, sugerencias, etc. (que tengan relación con la tarea y conocimientos que son el objeto de la interacción) e intente convencer sobre la validez de sus ideas. Por otra parte, el profesor debe tener la competencia para desarrollar este tipo de interacción y mostrarla en la gestión que realiza en los procesos de instrucción que implementa y, para ello, dicha competencia se debe desarrollar en los procesos de formación de profesores. Ello da origen a la siguiente problemática que es la que nos ha interesado en esta investigación: ¿Qué tipos de interacciones entre personas, conocimientos y recursos se deberían implementar en los procesos instruccionales para optimizar los aprendizajes?

Esta última pregunta se engloba en la siguiente pregunta más general: ¿qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático? A la que el EOS pretende dar respuesta con la noción de idoneidad didáctica asumiendo que los conocimientos didácticos ayudan a generar principios para guiar la práctica del profesor y su mejora. En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de idoneidad didáctica como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. El logro de una alta idoneidad didáctica requiere un equilibrio entre los diferentes criterios parciales relativos a las distintas facetas, teniendo en cuenta el contexto en que tiene lugar. La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor. Implica la asunción de una racionalidad axiológica en educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, y en definitiva responder a la pregunta genérica, ¿sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora progresiva de los procesos de instrucción matemática?

La noción de idoneidad se ha particularizado en criterios, componentes e indicadores. A continuación (Cuadro 1), se reproducen los componentes de los criterios de idoneidad interaccional y ecológica, adaptados de Breda, Pino-Fan y Font (2017), que son los que más se han tenido en cuenta.

Cuadro 1. Componentes de la idoneidad interaccional y ecológica.

Idoneidad Interaccional Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.	
Componentes	(II1) Interacción profesor-alumno, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Idoneidad Ecológica Para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etcétera.	
Componentes	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

METODOLOGÍA

Se utilizó una metodología de investigación que tiene elementos de la investigación basada en el diseño (Cobb, Confrey, di Sessa, Lehrer y Schauble, 2003). En particular: 1) La experiencia se realizó en contextos naturales (un curso de formación para profesores en este caso), 2) Se buscó que el diseño, la implementación y la investigación fuesen interdependientes, y 3) Se consideraron las siguientes fases: a) Preparación del experimento; b) Experimentación para apoyar el aprendizaje; c) Análisis retrospectivos de los datos generados durante la realización del experimento. A su vez, se trata de una metodología de investigación de diseño fundamentada en el empleo de herramientas del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2019). Por un lado, el diseño del ciclo formativo sirvió como un contexto para la investigación. Por el otro, los continuos análisis realizados junto a una mirada retrospectiva proporcionaron información para rediseñar y mejorar el ciclo formativo.

Los sujetos participantes fueron 102 profesores formadores de futuros profesores de Matemática que cursaron el Módulo de Matemática para Formación Docente de la Especialización en Educación y TIC, del Instituto Nacional de Formación Docente (INFD) dependiente del Ministerio de Educación de Argentina. Estos profesores desarrollan sus actividades en Institutos de Formación Docente de Argentina y tienen conocimientos de algunas líneas y enfoques teóricos de la Didáctica de la Matemática, en particular, de Teoría de Situaciones Didácticas, de acuerdo a lo expresado en el foro de presentación del curso. El curso tiene por propósito ofrecer elementos teóricos y prácticos que permitan desarrollar en los profesores competencias para el diseño y análisis didáctico de actividades de enseñanza mediadas por las TIC. Además, el eje del curso radica en el análisis, diseño y fundamentación de problemas de actividades para la clase de Matemática para el Nivel Superior, donde las TIC tienen un rol protagónico como recursos para la enseñanza y el aprendizaje. Para ello se trabaja con criterios para el diseño de consignas de tareas e intervenciones para la gestión de la clase, acordes con los diseños curriculares de Argentina y con las tendencias actuales en Educación Matemática y, para ciertas tareas, también los criterios de idoneidad didáctica, en particular por las características del curso se pone el énfasis en la idoneidad mediacional.

Para esta investigación, sólo se realizará el análisis de una actividad realizada en el curso. La tarea propuesta consistía en que los formadores de profesores analizasen las respuestas de un grupo de estudiantes en una actividad matemática mediada por TIC. La tarea, que estaba englobada en una configuración adidáctica de acción y formulación, era la siguiente: sea $f: R \rightarrow R$, con $f(x)=ax^2+bx+c$, donde a, b y c son números reales. Describir las características gráficas de la familia de curvas que resultan al variar sólo el parámetro b. Los estudiantes disponían de un programa de geometría dinámica para realizar exploraciones, y en ese entorno de aprendizaje, formulaban conjeturas que intentaban validar. Las conjeturas más frecuentes que se presentaron fueron las siguientes:

- Si b es positivo, la parábola corta con su rama creciente al eje de las ordenadas, y si b es negativo, la parábola corta al eje de las ordenadas con su rama decreciente.
- A medida que b es más chico, las parábolas se hacen más grandes.
- Si a y b tienen el mismo signo, el vértice de la parábola está a la izquierda del eje de ordenadas. Si a y b tienen distintos signos, el vértice se halla a la derecha del eje de las y.
- Los vértices de la familia de parábolas de la forma $y=ax^2+bx+c$, describen como lugar geométrico otra parábola que tiene por ecuación $y=-ax^2+c$.
- Si b es negativo, la parábola se encuentra hacia la izquierda del eje de ordenadas y si b es positivo, la parábola se encuentra hacia la derecha.
- Si b es negativo, la parábola se halla hacia la derecha y si b es positivo, hacia la izquierda.
- El parámetro b provoca corrimientos de la parábola, pero depende del signo del parámetro a.

- A medida que *b* decrece, o crece, la parábola desciende.

A los participantes se les pidió analizar las conjeturas de los estudiantes, determinando el valor de verdad de la conjetura y en qué condiciones ella podría resultar verdadera, como así también, las razones que llevaron al alumno a formular esa conjetura si no era verdadera. Posteriormente, debían escoger una conjetura y describir la gestión de la clase, en términos de intervenciones que haría para orientar a un estudiante a reflexionar sobre su producción y construir conocimiento matemático. Estas intervenciones debían presentarse mediante un hipotético diálogo entre profesor y estudiante, y siguiendo los criterios que se enuncian en Pochulu, Font y Rodríguez (2016):

- Evitar dar más información que la estrictamente necesaria.
- Intervenir a partir de lo que el estudiante presenta, tratando de identificar lo que piensa y cómo lo hace. Evitar llevar al alumno al modo en el que el profesor tiene pensada la resolución. En cierta manera, se trata de generar un conflicto cognitivo en el alumno (en términos piagetianos) para que él mismo llegue por sí solo a la solución.
- Evitar decir directamente si la resolución es o no correcta. En cambio, pedir explicaciones para tratar de entender el modo de pensar que lo llevó al alumno hasta ahí.
- Considerar que no es necesario que en una única intervención el profesor resuelva la duda del alumno y posponer la resolución de la duda a intervenciones posteriores. Por ejemplo, ampliarle la duda, hacerle nuevas preguntas o recordarles estrategias anteriores.
- Evitar pedir sólo explicaciones cuando se advierte que la respuesta es incorrecta. Pedir explicaciones también cuando la respuesta es correcta puede develar un argumento inválido usado que llegó a una solución correcta por un camino inapropiado.

Por las características de la tarea, se optó por proponer criterios que concretan sobre todo el componente autonomía y el indicador "se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.)" del componente interacción docente - discente. En cambio, para el criterio ecológico no se realizó ninguna orientación explícita. Lo que se les pedía a los participantes era la creación de una narrativa de una interacción de clase ficticia siguiendo estas orientaciones. La recopilación de trabajos que se analizaron corresponde a 4 cursos del segundo semestre del año 2014 y 4 cursos del primer semestre del 2015.

La lectura y la organización de los datos se desarrollan a partir de unas categorías a priori: tipos generales de configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006) y de los indicadores y componentes de los criterios de idoneidad didáctica (Breda et al., 2017). Es decir, se categorizan los datos tomando, de entrada, unas categorías teóricas como referentes. Una vez realizada esta categorización, se hace una subcategorización que considere especificidades mayores (en este caso, se trata de categorías inductivas). También se considera la emergencia de categorías no contempladas previamente, en el caso de que haya dificultades para considerar que un determinado dato caiga bajo el dominio de una de las categorías consideradas a priori. La validación de las categorías se realiza mediante una triangulación de expertos. Fundamentalmente se trata de una metodología del análisis de contenido que ya ha sido utilizada por otros autores en el marco del EOS (Seckel, Breda, Sánchez y Font, 2019).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para contestar a la pregunta ¿qué tipos de interacciones de aula ficticias proponen los formadores de profesores? Se realizó el análisis de sus propuestas distinguiendo dos momentos: el trabajo previo de exploración, y la propuesta de gestión de la clase. El análisis del momento del trabajo previo llevó a clasificar a las exploraciones realizadas por los profesores en tres grandes categorías:

- A1: Quienes hacen una exploración a conciencia de lo que pudo haber realizado el alumno.
- A2: Quienes especulan pensando que *"tal vez pudo hacer…"*, pero sin realizar una exploración ni verificar si eso conduce a una conjetura como la formulada por el estudiante.
- A3: Quienes anteponen las dificultades del estudiante para entender una consigna, o que usan vocabulario no apropiado, o juzgan de falsa la conjetura para cualquier caso, o expresan que no es posible saber lo que hizo.

Este primer análisis tiene, indudablemente, correspondencia con el tipo de intervenciones que el profesor propone para la clase, más allá de los criterios que se les pidió que tuviesen en cuenta. Esto llevó a que aparecieran intervenciones docentes con las siguientes características:

- I1: Quienes hacen preguntas a los estudiantes partiendo de lo que ellos han hecho para hacerlos reflexionar sobre sus producciones.
- I2-I3: Quienes hacen preguntas para que reflexionen los estudiantes, pero ignorando lo que hicieron (I2) y/o sugiriendo el camino que deberían seguir (I3).
- I4: Quienes ignoran lo realizado por los estudiantes y dan sólo órdenes para llevarlos al modo en que él quiere, incluso desacreditando conjeturas verdaderas pero inesperadas.

El primer tipo de intervención encaja mejor con una configuración didáctica dialógica, mientras que el último lo hace con la magistral. La I2 e I3 tienen aspectos de la configuración dialógica, aunque no se puede considerar que encajen del todo con este tipo de la configuración porque, si bien hay diálogo, de hecho, el profesor tiene poco en cuenta al alumno.

Si tenemos en cuenta el análisis del primer momento y lo relacionamos con las intervenciones propuestas (segundo momento), tenemos las relaciones del Cuadro 2. El análisis de las intervenciones que proponen los profesores permite hacer emerger categorías (estilos) de gestión de la clase, junto a sus implicancias educativas, más allá de esta la tarea puntual. Estas categorías devienen de caracterizar el tipo de análisis que realiza el profesor sobre la tarea, en cuanto a errores, dificultades, conflictos cognitivos y respuestas inesperadas que se podrían presentar en la clase (primer momento), y el tipo de gestión que implementaría para hacer evolucionar en el razonamiento matemático a los estudiantes (segundo momento). Son las siguientes:

- *Estilo mayéutico*: Se realizan preguntas para que el alumno llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un conocimiento aprendido.
- *Estilo falsacionista*: Se realizan intervenciones que buscan refutar una conjetura verdadera mediante un contraejemplo o sugiriendo la exploración con más casos particulares.
- *Estilo dogmático*: Se realizan intervenciones que ignoran lo realizado por el alumno para proponer el modo en que el profesor tiene pensada la actividad.
- *Estilo paternalista*: Se realizan intervenciones que conllevan una reducción de la libertad y autonomía del estudiante, en tanto se sugiere el modo de realizar la tarea.

Los dos primeros estilos tienden a proponer variantes de una configuración didáctica dialógica, mientras que los dos últimos con una magistral. A continuación, sigue un episodio que ejemplifica el estilo falsacionista. Se trata de un diálogo relacionado con la siguiente conjetura: si b es positivo, la parábola corta con su rama creciente al eje de las ordenadas, y si b es negativo, la parábola corta al eje de las ordenadas con su rama decreciente (que es verdadera cuando a es positivo):

1. P: ¿Qué valores consideraste para los parámetros a, b y c?
2. A: a y c positivos y b es el que varié. Y probé los siguientes valores: $a = 1$, $c = 2$ y con b probé con 2 y -2, 4 y -4, 1/2 y -1/2, 3 y -3, 9 y -9. Además, las gráficas pasan por la ordenada dos.

3. P: ¿Será casualidad ese punto común?
4. A: No porque cuando cambié el valor de *c* por otro la rama creciente o decreciente cortaba al eje de ordenadas en ese valor.
5. P: ¿Fue lo único que cambiaste?
6. A: Si, por ahora.
7. P: (comentario) Darle un tiempo para que pueda probar otra variación y volver a verlo, si no lo hizo, y puede surgir, por ejemplo:
8. A: Profe cambie el valor de *a* por uno negativo y la curva se invierte, pero igual las ramas cortan al eje en el valor de *c*.
9. P: ¿Te parece si probás otros cambios? (comentario del profesor: esta última pregunta pretende sugerir que siga probando y buscar otras variaciones. Por ejemplo, variar *a* para ver el ensanchamiento de la curva o el encogimiento según los diferentes valores de *a*).

Cuadro 2. Análisis a priori *versus* intervenciones docentes propuestas

Estilo	Análisis a priori		Intervenciones docentes	Estilo
A1	12 profesores	→	12 profesores	I1
A1	23 profesores	→	23 profesores	I3
A2	19 profesores	→	19 profesores	I3
A2	12 profesores	↘	2 profesores	I2-I3
A3	2 profesores	↗	8 profesores	I2
A3	8 profesores	↘	12 profesores	I4
A3	26 profesores	→	26 profesores	I4

Al tratarse de formadores de profesores sorprende que, al hacer el trabajo previo de exploración, prácticamente las dos terceras partes (A2 y A3) no hacen una exploración a conciencia y no logran aproximarse a lo que pudo haber realizado el alumno. Este resultado podría ser razonable con futuros profesores que no tienen suficiente conocimiento matemático-didáctico, pero resulta más difícil de explicar al ser profesores formadores de profesores. Dicho de otra manera, profesores acostumbrados a realizar y a analizar propuestas de gestión de la clase, no debieran presentar deficiencias en los subdominios del conocimiento didáctico del contenido. Esto es, se espera que los formadores de profesores sean capaces de detectar el origen de los errores de los estudiantes y proponer procesos de enseñanza y aprendizaje que los integre, lo cual en muchos casos no sucedió.

Con relación a la pregunta ¿tienen en cuenta la idoneidad interaccional y ecológica en sus propuestas de diálogos ficticios? Resulta significativo que, a pesar de que se les propusieron orientaciones concretas para conseguir un alto nivel de autonomía del alumnos (un componente de la idoneidad didáctica), sus diálogos ficticios, en muchos casos, no crearon intervenciones de acuerdo con las herramientas teóricas que fueron presentadas en el curso, por lo que no crearon interacciones idóneas en el aula con una adecuada alternancia entre alumnos y profesor − desde el punto de vista, sobre todo, del fomento de la autonomía y del indicador "se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.)"−. Por otra parte, no hubo comentarios sobre la idoneidad ecológica, pero indirectamente se concluye que no la tuvieron en cuenta ya que la mayoría de sus diálogos ficticios no guardan correspondencia con lo que promueven las orientaciones curriculares de la Argentina.

CONCLUSIONES

La investigación se realizado en el marco de un curso de formación docente para relacionar competencias y conocimientos didáctico-matemáticos con la práctica docente mediante tareas de creación de diálogos ficticios en el aula. El criterio de idoneidad interaccional concretado en orientaciones para fomentar, sobre todo, la autonomía del alumno fue una herramienta que se les suministró antes de la creación de sus diálogos. Pero, a pesar de ello, la mayor parte de los diálogos no se pueden considerar con una alta idoneidad en este componente. Además, la mayor parte de los estilos de intervenciones de los profesores ante conjeturas erróneas, no guardan correspondencia con lo que promueven las orientaciones curriculares y/o líneas de Educación Matemática, ya que los diseños curriculares de Argentina promueven un estilo mayéutico de intervención de los profesores, donde el docente es un mediador de las producciones de los estudiantes. Dicho de otra manera, en sus propuestas de interacción no tienen en cuenta la idoneidad ecológica, dado que no siguen las orientaciones curriculares.

Por último, el estilo de intervenciones de los profesores guarda estrecha relación con el tipo de exploración para lograr aproximarse a lo que pudo haber realizado el alumno, fundamentalmente en el caso del mayéutico y el dogmático. En este sentido, si el profesor hace una exploración a conciencia y logran aproximarse a lo que pudo haber realizado el alumno, tiene más chances de realizar una gestión de la clase acorde a las orientaciones curriculares. En cambio, si antepone las dificultades del estudiante para entender una consigna, o que usan vocabulario no apropiado, o juzgan de falsa la conjetura para cualquier caso, o expresan que no es posible saber lo que hizo, será muy difícil que gestione la clase tal como se promueve en las orientaciones curriculares.

Los resultados obtenidos aportan información relevante sobre: 1) las potencialidades didácticas de los diálogos ficticios en la formación de profesores y 2) el tipo de diálogos que crean los participantes, un aspecto sobre el cual hay poca información aún.

Referencias

Cobb, P., Confrey, J., di Sessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893–1918.

Cusi, A., & Morselli, F. (2018). Linking theory and practice: prospective teachers creating fictional classroom discussions. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 323-330). Umeå, Suecia: PME.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Contreras A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, *19*(1), 71-98.

Seckel, M. J., Breda, A., Sanchez, A., Font, V., Breda, A., (2019). Criterios asumidos por profesores cuando argumentan sobre la creatividad matemática, *Educação e Pesquisa, 45*(e211926).

Schwarz, b.; Dreyfus, t.; Hershkowitz, r. (eds.): Transformation of knowledge through classroom interaction. Londres. EARLI-Routledge,

ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Strategies and representations to solve a task of mathematics modeling

Porras, K.[a], Castro-Rodríguez, E.[b] y Aguayo-Arrigada, C. G.[c]

[a]Universidad Nacional de Costa Rica, [b]Universidad de Granada, [c]Universidad de Almería

Resumen

Este trabajo presenta una investigación centrada en profundizar en las estrategias y representaciones que realizan un grupo de estudiantes de Educación Secundaria cuando resuelven una tarea de modelización matemática sobre proporciones. Para ello, se llevó a cabo un estudio de casos de carácter cualitativo y se recolectó información de observaciones participantes y producciones escritas de los estudiantes. Entre los resultados destacamos que el uso de cálculos numéricos fue la estrategia más utilizada y la representación de mayor frecuencia fue de tipo simbólico-numérico. Concluimos que es necesario que la enseñanza haga un mayor énfasis en el uso el uso de diversas estrategias, más allá de la realización de algoritmos, utilizando para ello distintas representaciones.

Palabras clave: *representaciones, estrategias, modelización matemática, proporciones*

Abstract

This paper presents a study focused on deepening the strategies and the representation systems when Secondary students solve a mathematical modeling task about proportionality. Through a qualitative approach, different information collection techniques were applied: participant observation and written productions of the students. Among the results we emphasize that the use of numerical calculations was the most used strategy and the most preferred symbolic-numerical representation. We conclude that it is necessary for teaching to place emphasis on the use of various strategies, beyond of the use of algorithms, and using different representations for this.

Keywords: *representations, strategies, mathematical modelling, proportions*

INTRODUCCIÓN

La modelización matemática ha incrementado su atención en la comunidad de educadores e investigadores en las últimas décadas (Socas, Ruano y Hernández, 2016; Stender, 2018). Muestra de ello, son los números especiales dedicados a este tópico en revistas como ZDM (2006 (2-3), 2018 (1-2)), AIEM (2020 (1)) y UNO (2015 (69)), la celebración anual del congreso internacional de modelización matemática (*International Conference on Mathematical Modeling and Analysis*), los grupos de trabajo en congresos como el *International Congress on Mathematical Education* (ICME) y el *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME), o el concurso internacional de modelización matemática para estudiantes (*The International Mathematical Modeling Challenge*).

En educación matemática, no hay unanimidad en el significado de modelización matemática, no obstante, la mayoría de los autores coinciden en que su objetivo principal es construir y desarrollar un modelo matemático de una determinada situación real (Ärlebäck y Doerr, 2020). Atendiendo a Lesh y Doerr (2003), durante este proceso, se llevan a cabo cuatro etapas: descripción, manipulación, predicción y validación, en las que es necesario un manejo flexible y espontáneo de representaciones de los contenidos matemáticos involucrados.

Porras, K., Castro-Rodríguez, E. y Aguayo-Arrigada, C. G. (2021). Estrategias y representaciones en la resolución de una tarea de modelización matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 513 – 520). Valencia: SEIEM.

La literatura previa muestra que la investigación sobre representaciones proporciona información relevante en cuanto a deficiencias que los estudiantes presentan al resolver problemas (Brown, Bossé y Chandler, 2016), dificultades de compresión de sistemas de representación como el verbal y simbólico (González, Castro-Rodríguez y Castro, 2016) o conexiones entre el conocimiento previo y el nuevo (Roorda, Vos y Goedhart, 2015). En particular, los trabajos sobre resolución de problemas de tareas de proporcionalidad, revelan que los estudiantes utilizan el sistema de representación numérico, por ejemplo, en la construcción del concepto de unidad, de la estructura multiplicativa y de los esquemas de iteración o patrones (Singh, 2000), y que usan técnicas centradas en brindar una respuesta mecánica a través de cálculos matemáticos en lugar de reflexionar sobre cómo resolver el problema con sentido (Ärlebäck y Doerr, 2020; Van Dooren, De Bock, Vleugles y Verschaffel, 2008). Asimismo, diversas investigaciones a nivel de primaria (Avcu y Avcu, 2010; Sánchez, 2013) y a nivel de secundaria (Tjoe y de la Torre, 2014) proponen dejar de lado el uso de algoritmos mecánicos en la resolución de problemas de razonamiento proporcional y estimular la reflexión en el uso de diversas estrategias utilizando para ello distintas representaciones con el fin de mejorar el aprendizaje de los contenidos matemáticos (Morgan y Kynigos, 2014; Orey y Rosa, 2018).

Dada la relevancia que tienen las representaciones en el proceso de modelización (Lesh y Doerr, 2003) y debido a que desarrollar representaciones adecuadas para expresar las ideas matemáticas en una tarea de modelización es una área de investigación que necesita atención (Ärlebäck y Doerr, 2020; Orey y Rosa, 2018), en este trabajo nos proponemos como objetivo profundizar en las estrategias y las representaciones que se presentan en las respuestas de un grupo de estudiantes de séptimo curso de educación secundaria a una tarea de modelización matemática. El contenido matemático seleccionado para la tarea fue el de proporcionalidad directa, pues diversas investigaciones destacan la existencia de dificultades en su aprendizaje, por ejemplo, al tener un razonamiento multiplicativo deficiente se afecta el razonamiento proporcional (Singh, 2000) y errores como el uso inadecuado de porcentajes y números decimales; con repercusiones en posteriores aprendizajes (Fernández y Brey, 2012).

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

En la resolución de una tarea de modelización, donde se involucra la resolución de problemas, es importante la estrategia o plan de acciones que el estudiante planifica y reflexiona para obtener una solución con sentido (Ärlebäck y Doerr, 2020; Stender, 2018). Estas estrategias o heurísticos específicos son modos de proceder que le permite al estudiante abordar el problema, estableciendo una guía en el camino de resolución, a la vez que desarrolla estructuras conceptuales matemáticas que ayudan a tomar decisiones para encontrar una solución (Pólya, 1981).

Entre las distintas propuestas de estrategias específicas, en este trabajo consideramos el listado planteado por Fan y Zhu (2007) basado en los trabajos de Pólya, Schoelfeld y el *National Council of Teachers of Mathematics.* Específicamente, las estrategias que se abordan en el presente trabajo son: (a) uso de cálculos numéricos —a través de la realización de operaciones aritméticas—; (b) uso de correspondencias matemáticas —establecer una relación binaria entre dos conjuntos de elementos distintos, utilizando símbolos para representación la información del problema y sus relaciones—; (c) uso de diagramas —hacer un dibujo basado en la información disponible para representar visualmente el problema— y (d) uso de patrones —identificar patrones o características comunes, variaciones o diferencias en los números.

REPRESENTACIONES EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

En la resolución de tareas matemáticas, las descripciones, explicaciones y construcciones proporcionadas por los estudiantes son expresadas a través de distintas representaciones, por lo que constituyen un elemento central en el desarrollo de estrategias de resolución (Morgan y Kynigos, 2014; Stylianou, 2011). Durante el proceso de modelización, las representaciones no solo se usan para producir una solución, sino que constituyen las componentes más importantes, donde se

demuestra el proceso de análisis y reflexión del estudiante (Lesh y Doerr, 2003; Morgan y Kynigos, 2014).

En Educación Matemática el término representación ha adquirido distintos significados y connotaciones (Presmeg, 2006). Entre las distintas causas, se encuentra su doble naturaleza —referida tanto al proceso de capturar un concepto o relación matemática, como al producto de la forma misma (NCTM, 2000)—, así como la dualidad entre representación externa e interna —en forma de lenguaje hablado, símbolos escritos, imágenes u objetos físicos o ideas con las que la mente opera (Hiebert y Carpenter, 1992). En este trabajo consideramos las representaciones como signos o gráficos específicos que permiten comunicar los conceptos y procesos matemáticos (Lesh y Doerr, 2003). Estos signos y gráficos no pueden entenderse de forma aislada, sino dentro de un sistema de representación que satisface un conjunto de reglas con el que se puede identificar o crear representaciones, operar sobre y con ellas, y determinar relaciones (Goldin, 2002; Kaput, 1991). Dentro de los modos convencionales de representación de las estructuras numéricas, comúnmente se distingue entre sistemas de representación simbólico-numérica —formado por símbolos con los cuales podemos relacionar y hacer operaciones con cantidades numéricas—, tabular —elementos en forma matricial o dispuestos en filas y columnas—, icónico-gráfica —diagramas, trazos, dibujos, imágenes, figuras, entre otros, que facilitan la visualización de los conceptos matemáticos— y verbal —lenguaje natural de enunciados expresados en forma oral o escrita— (Castro y Castro, 1997; Goldin, 2002; Kaput,1991).

METODOLOGÍA

El enfoque de investigación que se siguió fue un estudio de casos de carácter cualitativo, pues la finalidad es comprender y analizar situaciones profundizando en su significado (Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista, 2014). En el estudio participaron 24 estudiantes de la provincia de San José en Costa Rica matriculados en séptimo año de educación secundaria y cuya edad promedio fue de 13 años. Según el Programa de Matemática del Ministerio de Educación Pública, es en este nivel en donde se desarrolla el tema matemático de proporcionalidad directa. No obstante, este tema también es abordado en menor medida en el nivel de sexto año de primaria, por lo que los participantes deben poseer conocimientos previos del tema.

La tarea de modelización matemática utilizada en este estudio, "*Cocinando con mi mamá*" (figura 1), ha sido utilizada en investigaciones previas (Porras, 2013). Se construyó según los lineamientos del programa del MEP (2012) y siguiendo los principios propuestos por Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewski (2003) para las actividades de modelización. Es decir, la actividad posee un contexto familiar del estudiante, pero el método de resolución es desconocido para este, no obstante, las estrategias y representaciones dependen del conocimiento previo del estudiante.

A la mamá de Carlos le encanta cocinar para su familia. Un día decidió hacer pan casero. La receta especifica que necesita 3 tazas de harina y una taza de leche, además de otros ingredientes para preparar 20 panecillos. Como su familia se deleita mucho con el pan casero, ella decide usar toda la harina con la que cuenta y cuando la mide descubre que tiene 16,5 tazas de harina. Ahora, el problema para ella es determinar la cantidad de leche y el resto de los ingredientes de manera exacta para cumplir con la receta. Como sabe que a Carlos le gusta realizar cálculos matemáticos, le pide ayuda para determinar las cantidades exactas que necesita.



Así, ¿cuántas tazas de leche debería usar? Además, ¿cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la con la cantidad de ingredientes que usó?
Redacte un informe donde se describe el método de solución utilizado y sus conclusiones para cada una de las preguntas anteriores. Además, contesta e la siguientes pregunta, ¿en qué otras situaciones similares se podría aplicar el razonamiento a este problema?

Figura 1. Tarea planteada a los participantes (Porras, 2013)

La implementación de la tarea se llevó a cabo en el horario habitual de la asignatura de matemáticas. Los 24 participantes se dividieron en subgrupos, los cuales fueron establecidos por ellos mismos,

como es habitual en su trabajo en clase. A lo largo de su educación primaria y secundaria, los estudiantes han trabajado tareas de modelización y han recibido instrucción sobre sus etapas: descripción, manipulación, predicción y validación (Lesh y Doerr, 2003), en las cuales es necesario el uso de estrategias a través de representaciones para la comunicación de sus pensamientos matemáticos. Para obtener los datos, se recolectó información de diversas fuentes: observaciones participantes y producciones escritas de los estudiantes.

Análisis

Los datos obtenidos fueron sometidos a un análisis de contenido (McMillan y Schumacher, 2006) que se llevó a cabo en dos etapas. La primera etapa consistió en la categorización de los datos realizada por una de las investigadoras. Para ello, nos centramos en la identificación de estrategias con base en las categorías propuestas por Fan y Zhu (2007) y en las categorías de sistemas de representación: simbólico-numérica, tabular, icónica-gráfica, y verbal-escrita, propuestas por Castro y Castro (1997), Goldin (2002) y Kaput (1991) presentadas en el marco teórico. En la segunda etapa, la segunda investigadora revisó el análisis realizado y se discutió entre ambas investigadoras hasta que no hubo discrepancias entre los resultados.

RESULTADOS

Cada grupo de estudiantes planteó una respuesta a la tarea, por lo que se obtuvo un total de 9 respuestas de las que solo dos (el grupo 1 y 9) llegaron a una solución final correcta. En sus respuestas escritas, los participantes plasmaron diversas estrategias expresadas por medio de representaciones. La tabla 1 presenta las estrategias y representaciones presentes en las respuestas de cada grupo.

Tabla 1. Estrategias y representaciones presentadas en las respuestas de los grupos de estudiantes

	Representación simbólico-numérica	Representación tabular	Representación icónica-gráfica	Representación verbal-escrita
Cálculos numéricos	G1, G3, G4, G5, G6, G7, G9			G1, G3, G4, G5, G6, G7, G9
Correspondencias	G2, G8			G2, G8
Diagramas	G1		G1	G1
Patrones	G9	G9		G9

Nota: Los Gi para i=1, ..., 9 corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

Uso de cálculos numéricos

La primera estrategia detectada fue el uso de operaciones básicas aritméticas a través de cálculos numéricos para expresar procesos. Esta estrategia fue la más usada por los grupos al resolver la tarea, específicamente, está presente en las respuestas de 7 de los 9 grupos. Se presentó al realizar operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, entre otros. La figura 2 muestra ejemplos de respuestas pertenecientes a esta categoría.

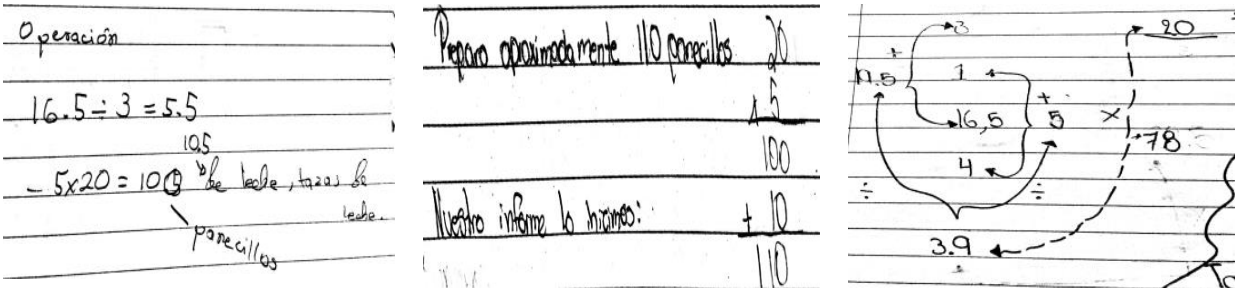


Figura 2. Ejemplo de la estrategia uso de operaciones aritméticas básicas

La primera imagen de la figura 2 evidencia el uso de operaciones de división y multiplicación al buscar la cantidad de veces que crece la cantidad de harina, es decir la constante de proporcionalidad, que en este caso se obtuvo como resultado 5,5. Los estudiantes la usaron para determinar la cantidad

de tazas de leche. En la segunda imagen de la figura 2, usando la cantidad de tazas de leche correcta (5,5 tazas), los estudiantes realizan el producto de la cantidad de 20 panecillos por la cantidad entera de las tazas de leche. A los resultados anteriores le suman la mitad de una taza de leche que hace falta y, la mitad de los panecillos a la cantidad anterior (10 panecillos), obteniendo como solución correcta los 110 panecillos. Por último, en la tercera imagen de la figura 2 se muestra una solución desordenada, que no verifica las condiciones del problema y presenta errores conceptuales, pues no aplicaron la etapa de validación del proceso de modelización matemática.

En las respuestas se presentan las representaciones simbólica-numérica, realizada por siete de los nueve grupos participantes, a través de los símbolos numéricos, los símbolos de las operaciones, y flechas. En menor medida se detecta representaciones verbales escritas.

Uso de correspondencias matemáticas

La segunda estrategia detectada presenta una relación binaria entre dos conjuntos de elementos distintos. Esta estrategia se manifestó en 2 de los 9 grupos participantes. Un ejemplo se presenta en la figura 3.

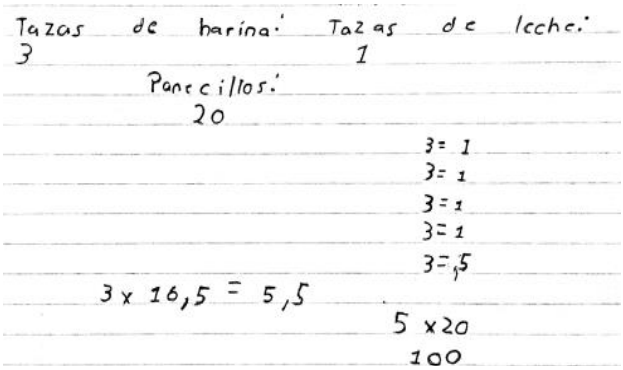


Figura 3. Ejemplo de la estrategia uso de correspondencias

En la figura anterior, se observa la correspondencia 3=1, que significa que cada 3 tazas de harina tenemos 1 taza de leche. En este caso los elementos del primer conjunto corresponden a las cantidades de las tazas de harina y los elementos del segundo, serían las cantidades de tazas de leche. La solución que se presenta en la imagen es incorrecta, debido a que aparece 4 veces la correspondencia 3=1. Al sumar los miembros izquierdos y derechos de las igualdades respectivamente se obtiene una correspondencia de 15 tazas de harina es igual a 4,5 tazas de leche. Además, la correspondencia 3 = 0,5 es errónea pues en la parte derecha de la igualdad dividen por la mitad la unidad, pero la parte izquierda se muestra invariante.

Los dos grupos que usaron este tipo de estrategia realizaron representaciones simbólica-numéricas, pero a diferencia de las respuestas anteriores en donde el símbolo de igualdad se usa dentro de un cálculo, en esta ocasión este símbolo se presenta para indicar una relación de proporcionalidad (figura 3). También, se detectó en menor medida el uso del lenguaje verbal-escrito.

Uso de diagramas

Una tercera estrategia detectada en uno de los grupos participantes es la realización de un diagrama. Un ejemplo se presenta en la figura 4, donde las tazas de harina son representadas gráficamente como bolas y las tazas de leche como cajas. Además, se establece la relación en forma gráfica de 1 taza de leche = 3 tazas de harina, deduciendo gráficamente que 5 tazas de leche es igual a 15 tazas de harina. También, los estudiantes expresaron la mitad de la taza de leche en lenguaje verbal-escrito “media leche”, pero realizaron gráficamente media circunferencia para representar esta situación. La respuesta final fue brindada en lenguaje verbal-escrito “Se necesitan 5 tazas y media de leche para 16,5 tazas de harina”. Por lo que, este grupo utilizó un sistema de representación icónico junto con sistema un numérico y verbal-escrito.

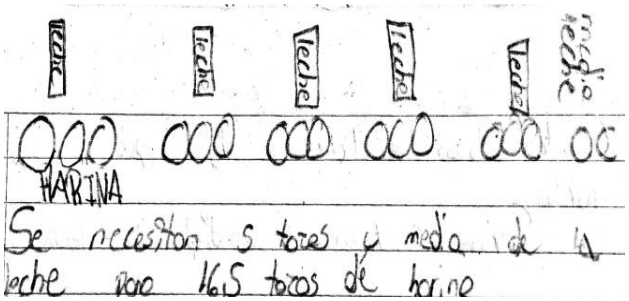


Figura 4. Ejemplo de la estrategia de uso de diagramas

Por otra parte, este grupo cambió de estrategia en la segunda pregunta del problema para determinar la cantidad de panecillos. Esta segunda estrategia fue el uso de cálculos numéricos (ver imagen 2 de figura 2), donde se utilizó la representación simbólica-numérica, logrando una solución correcta. Además, en ambas estrategias se usó en menor medida una representación verbal-escrita para fundamentar sus procesos matemáticos, por lo que este grupo, además de utilizar varias estrategias, utilizó tres sistemas de representación: simbólico-numérico, icónico-gráfico y verbal-escrito.

Uso de patrones

La última estrategia detectada fue el uso de patrones donde se establece una serie o comportamiento recurrente entre valores numéricos que se repiten de una manera predecible.

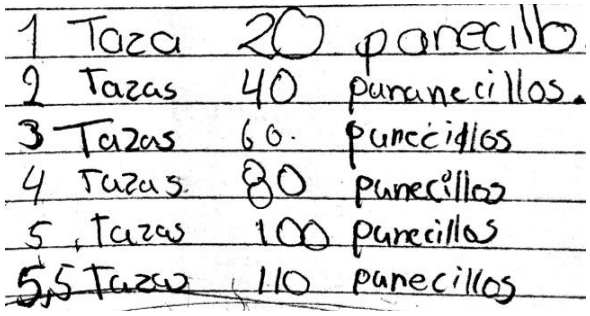


Figura 5. Ejemplo de la estrategia de uso de patrones

Solamente uno de los nueve grupos participantes usó esta estrategia (figura 5). En esta respuesta se presenta una tabla, en la cual la primera fila se observa la cantidad inicial de 1 taza de leche equivale a 20 panecillos. Luego, los estudiantes utilizaron una iteración o patrón al ir aumentando en una unidad las tazas de leche, y en el caso de la cantidad de los panecillos, se duplica la cantidad anterior. Este comportamiento, se mantuvo hasta el quinto caso, es decir hasta las 5 tazas de leche. En la siguiente fila el patrón utilizado cambia, pues a las tazas de leche se les realizó un aumento de 0,5 obteniendo como resultado final 5,5 tazas de leche. Esto mismo lo realizan con la cantidad de panecillos aumentando la mitad de la cantidad que iba creciendo, es decir 10 panecillos, obteniendo 110 panecillos, logrando una solución correcta de la tarea de modelización.

En esta respuesta (figura 5), se realiza una representación tabular utilizando la exploración de patrones y formulación de conjeturas en su solución, sin aplicar mecanismos de memorización o fórmulas para determinar la cantidad de tazas de leche y de panecillos correctas. Además, en la representación tabular se utilizó una representación simbólica-numérica y verbal-escrita para explicar los procesos matemáticos, por lo que este grupo utilizó tres sistemas de representación distintos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo profundizamos en las estrategias y representaciones que se presentan en las respuestas a una tarea de modelización matemática por estudiantes de séptimo curso de Educación Secundaria de Costa Rica. Los resultados muestran que la estrategia más utilizada por los participantes fue el uso de cálculos numéricos, la cual fue aplicada para obtener la constante de proporcionalidad. Dos de los

grupos muestran un uso mayor de distintos sistemas de representación en sus estrategias en comparación del resto de grupos que utilizaron solo el sistema simbólico-numérico y lenguaje verbal-escrito, lo que sugiere un pensamiento proporcional más reflexivo y analítico en la resolución de la tarea de modelización (Morgan y Kynigos, 2014; Van Dooren et al., 2008; Tjoe y de la Torre, 2014).

En relación con el tema de proporciones, coincidiendo con los resultados de (Roorda, Vos y Goedhart, 2015), algunos grupos no mostraron conocimientos relativos al razonamiento proporcional, pues en sus respuestas no se incluyeron procesos o conceptos relativos a este tópico (como la regla de tres o el uso de porcentajes), conocimientos previos que los participantes debían manejar en el momento del estudio. Además, varios grupos no crearon interpretaciones adecuadas con base en las condiciones del problema. Se obtuvieron razonamientos desordenados y cometieron errores que pudieron haberse detectado y evitado en la etapa de validación del proceso de modelización matemática (Lesh y Doerr, 2003). A la luz de los resultados obtenidos, y siguiendo las propuestas de Avcu y Avcu (2010), Sánchez, (2013) y Tjoe y de la Torre (2014), consideramos necesario que en la enseñanza se haga un menor énfasis en el uso de algoritmos y se estimule la reflexión y análisis, así como el uso de diversas estrategias de resolución de problemas, utilizando para ello distintas representaciones. Con ese fin, los ambientes de modelización matemática son adecuados pues las condiciones de este tipo de tareas incentivan la participación activa y curiosidad del estudiante, lo que conlleva que asuman la tarea como un desafío por resolver (Avcu y Avcu, 2010; González et al., 2016; Tjoe y de la Torre, 2014).

A pesar de las limitaciones de trabajo relativas a la generalización de los resultados, consideramos valiosos los resultados obtenidos, pues amplían la información en relación con el área de estrategias y representaciones en tareas de modelización matemática.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado con el apoyo del proyecto PCG2018-095765-B-100 del Plan Nacional de I+D+I (MICINN) y al grupo FQM-193: Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico.

REFERENCIAS

Ärlebäck, J. B. y Doerr, H. M. (2020). Moving beyond descriptive models: Research issues for design and implementation. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *17*, 5-20.

Avcu, R. y Avcu, S. (2010). 6th grade students' use of different strategies in solving ratio and proportion problems. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *9*, 1277-1281.

Brown, M., Bossé, M. J. y Chandler, K. (2016). Student Errors in Dynamic Mathematical Environments, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *17(1)*, 1-27.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Ed.), *Educación Matemática en la Enseñanza* Secundaria (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 61-75.

Fernández, A. y Brey, R. (2012). Errores en el aprendizaje de las matemáticas financieras. *Enseñanza de las ciencias, 30(2),* 73-92.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197–218). Mahwah: Erlbaum.

González, F., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. *PNA*, *10(4)*, 280-306.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed). México: McGrall Hill.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.65-97). Nueva York, NY: MacMillan.

Kaput, J. (1991) Notations and Representations as Mediators of Construct Live Processes. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer A. P.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. y Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 203-204). Mahwash, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 203-204). Mahwash, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2006). *Research in education*. New York, NY: Longman.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. Costa Rica: autor.

Morgan, C., & Kynigos, C. (2014). Digital artefacts as representations: Forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *85(3),* 357-379".

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Orey, D. C., y Rosa, M. (2018). Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. *ZDM, 50(1-2)*, 315-326.

Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (2a ed.). DF, México: Trillas.

Porras, K. (2013). Modelación matemática: Recurso de mediación pedagógica en el aprendizaje geométrico del tema de semejanza, en octavo año de secundaria. *Acta del congreso del 8th CIEMAC* (pp. 104-115).

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

Roorda, G., Vos, P., y Goedhart, M. J. (2015). An actor-oriented transfer perspective on high school students'development of the use of procedures to solve problems on rate of change. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13(4)*, 863-889.

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. *Revista Sigma*, *11(1),* 10-25.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and radio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, *43(3),* 271-292.

Socas, M., Ruano, M.R., Hernández, J. (2016). Análisis Didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *AIEM, 9*, 21-41.

Stender, P. (2018). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM*, *50(1-2),* 315-326.

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, *76(3),* 265-280.

Tjoe, H., y de la Torre, J. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 1-7.

Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K., y Verschaffel, L. (2008). Pupils' reasoning on proportionality: solving versus classifying missing-value word problems. *Proceedings of the 32nd PME and 30th PME-NA* (Vol. 4, pp. 369-376).

LA ACTITUD DE FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA ANTE EL USO DE ROBOTS PROGRAMABLES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS[1]

The attitude of future secondary teachers to the use of programmable robots in the mathematics class

Roanes, E., Fernández-Salinero, C.

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

Presentamos una experiencia realizada con estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria (MFPS) enfocada a determinar las preferencias de estos estudiantes acerca de la utilización de un cierto tipo de software sobre distintos hardware: tradicional (ordenadores, tablets, smartphones) e innovador (robots programables) en su futura labor docente como profesores de matemáticas. El enfoque de esta investigación es cualitativo, de carácter etnográfico. Los resultados han sido curiosos, con un claro sesgo hacia los hardware tradicionales.

Palabras clave: *TIC, software matemático, robots, aprendizaje basado en indagación*

Abstract

We present an experience carried out with students of the Master's Degree in Secondary Teacher Training (MFPS) focused on determining the preferences of these students regarding the use of a certain type of software on different hardware: traditional (computers, tablets, smartphones) and innovative (programmable robots) in their future teaching work as math teachers. The focus of this research is qualitative, of an ethnographic nature. The results have been curious, with a clear bias towards traditional hardware.

Keywords: *ICT, mathematical software, robots, inquiry-based learning*

INTRODUCCIÓN

Se presenta una experiencia enfocada a determinar las preferencias de unos y unas estudiantes, futuros profesores de matemáticas de Enseñanza Secundaria, acerca de la utilización de un cierto tipo de software sobre distintos hardware: tradicional e innovador (robots programables) en su ulterior labor docente. En el año 2019 los autores presentaron al congreso *14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching - ICTMT 14* (Roanes-Lozano y Fernández-Salinero, 2020) una propuesta de jerarquización del nivel de implicación computacional de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje matemático en tres niveles, usando tres escenarios (con un nivel ascendente de implicación). Para que los resultados del experimento fueran plausibles, se usaron en los tres escenarios la misma teoría pedagógica y las mismas estrategias metodológicas (Viladot, 2002).

Se aplicó un enfoque constructivista, siguiendo estrategias metodológicas expositiva y, fundamentalmente, activa. Los tres escenarios eran:

- Escenario I: los y las estudiantes trabajan sin tecnología,

[1] Parcialmente subvencionado por el proyecto nacional PGC2018-096509-B-100 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades).

Roanes, E., Fernández-Salinero, C. (2021). La actitud de futuros profesores de secundaria ante el uso de robots programables en la clase de matemáticas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 521 – 528). Valencia: SEIEM.

- Escenario II: simulación (los y las estudiantes utilizan recursos de software especializado de propósito específico ya desarrollados),
- Escenario III: estudiante desarrollador (los y las estudiantes utilizan sistema de cálculo simbólico o de geometría dinámica para afrontar las cuestiones matemáticas e incluso desarrollan pequeñas aplicaciones).

La experimentación, propuesta en el nivel de Enseñanza Secundaria en el segundo cuatrimestre del curso 2019-2020, no pudo llevarse a cabo por la pandemia. Sí se llevó a cabo ese mismo curso una experiencia formativa más modesta con estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria (MFPS) de la universidad pública de los autores, derivada de la puesta en práctica de los tres escenarios especificados, en el marco de un proyecto de innovación educativa. La experiencia se enfocó en el tema de la integral definida (Fernández-Salinero Miguel, de la Riva Picatoste, Roanes Lozano y Roanes Macías, 2020), que aparece en los contenidos del *Bloque 3: Análisis* de la asignatura *Matemáticas II* del Bachillerato de la Especialidad de Ciencias (Real Decreto 1105/2014, 2015, p. 421).

El resultado constató la preferencia del uso de la tecnología (en alguno de los dos escenarios que la contemplaban) por parte de una abrumadora mayoría de los futuros profesores de Educación Secundaria (90%), sin distinción por sexo o titulación de procedencia. Se encontraron más cómodos en los planteamientos metodológicos más activos e innovadores, es decir, aquellos que dan más protagonismo a los y las estudiantes en su proceso de aprendizaje y que se apoyan en la tecnología como vehículo (Escenario II y, especialmente, Escenario III). Destacaron que podían resolver las cuestiones planteadas más fácilmente, con menores errores y ahorrando tiempo. La única dificultad subrayada era la necesidad de tener un conocimiento adecuado de los programas informáticos y que las instrucciones dadas por el docente fueran claras y precisas. El 10% restante (con un sesgo de mayor edad, entre 35 y 45 años) se encontraron más cómodos en el Escenario I (tradicional), por ser al que estaban más habituados.

Como estos trabajos se centraban en la forma de utilizar la tecnología, una continuación natural era centrarse en el tipo de soporte tecnológico utilizado: ordenador tradicional o un hardware innovador (robots programables). Para realizarlo en un colectivo de características similares, se ha llevado a cabo esta nueva experiencia con estudiantes del MFPS de la misma universidad (del curso siguiente), con curiosos resultados, como se detalla más adelante.

MARCO TEÓRICO

Al igual que en la experiencia anterior citada en la Introducción, para realizar una comparativa sobre actitudes ante distintos hardware a utilizar para la docencia con un cierto tipo de software, es fundamental usar en ambos casos la misma teoría pedagógica y las mismas estrategias metodológicas (Viladot, 2002), asumiendo un marco actitudinal de análisis de las posibilidades pedagógicas y de innovación del uso de los distintos hardware, desde una perspectiva crítica y reflexiva.

A partir de nuestra experiencia previa (el primer autor ha impartido clase de matemáticas con TIC a profesores en formación desde los años 80), un aprendizaje activo basado en el descubrimiento puro, como el propuesto con los micromundos de *Logo* (Papert, 1980), sin la guía de un docente y sin objetivos curriculares claros, no es la opción óptima, siendo preferible un descubrimiento guiado (Mayer, 2004). En la nueva experiencia llevada a cabo hemos elegido también como teoría pedagógica el constructivismo, que intenta desarrollar en el alumnado competencias (Perrenoud, 1999). En el ámbito de esta teoría se toma generalmente como referente el grado de participación de docentes y estudiantes en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje para clasificar los planteamientos metodológicos, cada uno con sus correspondientes métodos específicos o maneras de organizar los recursos y presentar el contenido para llegar a alcanzar los objetivos, y sus técnicas

o planteamientos que nos indican cómo llevar a la práctica las metodologías y que están definidas por normas de implementación directa (Bernal *et al.,* 2019). De acuerdo con este criterio, pueden distinguirse tres estrategias metodológicas: expositiva (con mayor protagonismo del docente), demostrativa (con protagonismos similares docente-discente) y activa (con mayor protagonismo del discente). A su vez es posible, dentro de estas estrategias metodológicas, utilizar distintos métodos y aplicar diferentes técnicas.

En nuestro caso, como estrategias metodológicas se aplicaron la expositiva y la activa, esencialmente esta última. En la primera estrategia metodológica citada, los métodos utilizados fueron la exposición oral (con su técnica de lección magistral) y el interrogativo (con su técnica de preguntas exploratorias). En la segunda estrategia metodológica citada, los métodos utilizados fueron el aprendizaje basado en la indagación (Enquiry Based Learning o EBL) y el aprendizaje por descubrimiento guiado, aplicados a problemas matemáticos y desarrollos informáticos. Más concretamente, de acuerdo con la propuesta de cuatro niveles de EBL planteada por Bianchi y Bell (2008), se usaron fundamentalmente los Niveles 2 (Structured Enquiry: los estudiantes investigan un problema propuesto por el profesor, del modo propuesto por el profesor) y 3 (Guided Enquiry: los estudiantes trabajan, siguiendo los procesos elegidos por ellos mismos, un problema propuesto por el profesor) y raramente el Nivel 1 (Confirmation Enquiry: los estudiantes comprueban o demuestran un resultado conocido). Mencionar por último que la aplicación del EBL al caso particular de la docencia matemática ha sido analizada, entre otros, por Artigue y Blomhøj (2013).

ESTADO DEL ARTE

Son innumerables los artículos sobre el uso de robots en STEM o STEAM en general y en educación matemática en particular. Podríamos mencionar, por ejemplo, el de Highfield (2010), uno de los más citados sobre el desarrollo en niños de habilidades para la resolución de problemas, o el más reciente de Leoste y Heidmets (2019).

Otro ejemplo serían las dos siguientes investigaciones realizadas con otros robots en el nivel de Educación Primaria sobre ángulos e interpretación de planos (mapas). Nos referimos a la investigación de Blanco, Salgado y Gorgal Romarís (2017) y a la de González-Calero, Cózar, Villena y Merino (2017), respectivamente.

Existen, asimismo, artículos que evalúan el efecto positivo de la tecnología, en particular del uso de lenguajes informáticos, que utilizan la geometría de la tortuga en el aprendizaje de conceptos geométricos, como Martínez Zarzuelo, Rodríguez Mantilla, Roanes Lozano y Fernández Díaz (2020).

No obstante, el artículo más próximo a nuestro trabajo que hemos encontrado es el de Castro, Cecchi, Salvini, Valente, Buselli, Menichetti, Calvani y Dario (2018), donde se hace un exhaustivo estudio de la actitud de profesores en ejercicio tras seguir un completo curso de robótica educacional. Otro similar es el de Baccaglini-Frank, Santi, Del Zozzo y Frank (2020). Sin embargo, no hemos encontrado ningún trabajo que se centre en comparar la actitud ante el soporte en que se va a utilizar un mismo software para la enseñanza de la geometría (ordenador tradicional frente a robot programable). De ahí el interés de esta experiencia.

PROCESO DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo

Con esta experiencia se trata de valorar (sobre un pequeño colectivo) si unos futuros docentes de Educación Secundaria, nativos digitales, se muestran claramente inclinados o no a utilizar otros hardware (robots programables) distintos a los que están habituados a usar (ordenadores, tablets, smartphones) en su futura práctica docente.

Metodología

El enfoque de esta investigación es cualitativo, de carácter etnográfico, con el que pretendemos conseguir una aproximación a la realidad "desde dentro", junto con las personas implicadas y comprometidas en dicha realidad (Eisenhart, 1988). Este tipo de metodología podemos definirla como: "una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también al descubrimiento" (Sandín, 2003, p. 123). La desarrollaremos en seis fases: selección del diseño, determinación de las técnicas, acceso al escenario de investigación, selección de los informantes, recogida de datos y procesamiento de la información recogida (Bisquerra, 2009).

El diseño parte de la formulación de la siguiente pregunta: ¿El profesorado en formación del máster tiene o no la misma predisposición a llevar un determinado software a su futura labor docente, independientemente del hardware con el que trabajen (ordenador versus robot programable)?

En cuanto a las técnicas empleadas, hemos seleccionado dos (Bisquerra, 2009):

- La observación no participante, a través de la mirada del docente del comportamiento de los y las estudiantes, sin intervenir.
- La entrevista, realizada por medio de un conjunto de preguntas abiertas y presentadas por escrito que nos permiten obtener la perspectiva interna de los y las participantes.

El escenario de investigación es el aula del Máster de Formación del Profesorado donde se imparte docencia a los futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato.

El informante seleccionado es el propio docente del máster.

La recogida de datos se realiza a través de escritos descriptivo-narrativos realizados por el docente, complementados con una batería de preguntas planteadas a los y las participantes para conocer su punto de vista.

La información se procesa, finalmente, por medio del continuo análisis de los datos a lo largo del estudio, realizado a través de los escritos descriptivo-narrativos del docente, complementados con una batería de preguntas planteadas a los y las participantes para conocer su punto de vista, a lo que ya nos hemos referido con anterioridad. El proceso de recogida de los datos y su análisis están indisolublemente unidos. Se trata de aspectos interactivos e interdependientes.

Participantes

El grupo ha estado compuesto por 30 estudiantes (casi todos recientemente egresados) quienes, como consecuencia de la actual pandemia, se han dividido en dos grupos de 15 que alternaban presencialidad/asistencia online. Este curso todos, excepto una de las estudiantes, ingeniera, tenían un grado en matemáticas o un doble grado incluyendo matemáticas. Todos habían estudiado en universidades de nuestro país y tenían vocación por ser profesores de matemáticas (este curso hubo muchas más solicitudes que plazas).

Recursos para la intervención

En esta experiencia era clave elegir un software que fuera lo más similar posible en ambas plataformas y que, a la vez, pudiera resultar útil en el futuro para estos profesores en formación. Pensamos por ello en las implementaciones de la geometría de la tortuga (Abbelson y diSessa, 1981; Papert, 1980), en el lenguaje de programación *Scratch* (Scratch, n.d.) y en robots basados en ella, como *Pro-Bot* (Terrapin. Tools for thinking. Pro-Bot, n.d.; Terrapin Software, 2013). Aunque la geometría de la tortuga se asocia generalmente con el lenguaje *Logo*, se ha renovado el interés por ella tras la aparición del lenguaje *Scratch* y hay diversos robots que la usan, con sus características usuales, como el que nos ocupa, o simplificadas, más orientadas a la Educación

Infantil (Acosta y Alsina, 2018, Diago, Gutiérrez, Jaime y Yáñez, 2018; Pérez y Diago, 2018), como *Bee-Bot* (Terrapin. Tools for thinking. Bee-Bot, n.d.) o *Code & Go*® (Code & Go Activity Set, n.d.).

El *Pro-Bot* incluye, además de otras características, un lenguaje de programación y un entorno muy similar al de los *Logo* de los años 80, anteriores a la aparición de los sistemas operativos basados en ventanas. Por supuesto sus movimientos están apoyados en los cuatro comandos típicos de la geometría de la tortuga (Forward, Back, Right, Left). Mientras, el lenguaje *Scratch 3* está basado en la programación por bloques que van "encajando unos en otros" (los bloques están agrupados por colores –categorías–). Es muy intuitivo y adecuado para comenzar a programar.

Para poder llevar a cabo esta experiencia se contaba con un aula informática magníficamente dotada, con dos enormes monitores (uno de ellos táctil) y cuatro monitores más para trabajo por grupos. Además, la escasa dotación de robots disponibles (uno) fue incrementada con 6 más, adquiridos gracias a la concesión de una ayuda de la *Convocatoria de Cofinanciación de Actividades y material científico e informático 2020* del *Instituto de Matemática Interdisciplinar* de la *Universidad Complutense de Madrid*, al que agradecemos aquí su apoyo, pues permitió su introducción en el MFPS, así como la realización de la experiencia aquí descrita.

Temporalización y desarrollo de la experiencia.

Simplificando la cronología de la experiencia, esta consistió en dos largas sesiones, de unas 3 horas cada una, de manejo de *Scratch 3* y su aplicación a problemas de matemática elemental, al estilo de Roanes Lozano (2018), como, por ejemplo: "Programa que dibuje una colección de hexágonos regulares con un vértice común, cada uno de ellos girado 60 grados respecto del anterior" o "Procedimiento cuyas 6 entradas sean las coordenadas de 3 puntos, que dibuje un triángulo de vértices esos puntos y coloque al gato en el interior del triángulo, sea cual sea este". Por ejemplo, este último fue resuelto por ciertos estudiantes con las soluciones usuales: usando las coordenadas del baricentro o calculando las del punto medio de una mediana, pero requirieron de pistas generales por parte del profesor. Se realizaron breves exposiciones orales que eran seguidas de actividad individual o en grupo (como desearan los y las estudiantes en cada caso), siguiendo una metodología activa (método EBL, Nivel 3 en el primer ejemplo citado y Nivel 2 en el segundo). Podríamos considerarlas sesiones de trabajo guiado, pues el profesor se movía continuamente de un estudiante o grupo de estudiantes a otro, resolviendo dudas y destacando carencias de lo planteado o perfilando los retos propuestos.

A estas sesiones siguió una breve sesión de *FMS-Logo* (FMSLogo, n.d.) de 1 hora (*Logo* es aún más similar a la programación del robot por su uso de los corchetes y la existencia de un comando para retroceder, aunque nos pareció más adecuado centrarnos en el mucho más moderno y ahora popular *Scracth*), en un formato de trabajo parcialmente libre, pues debían trabajar en cuestiones ya tratadas con *Scratch 3* (las que desearan).

Finalmente, en otra sesión de 1 hora en el mismo formato, los aproximadamente 15 estudiantes presentes interactuaron con los 7 robots por parejas. Para ello desplazaron el mobiliario y el hardware y trabajaron sobre mesas o en el suelo. Destacó claramente el entusiasmo mostrado en esta actividad, así como la colaboración entre parejas, mucho mayor de lo habitual en esta clase, y, en concreto, que en la sesión en el mismo formato que la precedió (en la que los y las estudiantes se centraban casi todo el tiempo en su propia pantalla). Esta sesión se repitió 2 veces por motivos de presencialidad (mientras, los y las estudiantes conectados online realizaban otras tareas).

Evaluación

Como complemento a los escritos descriptivo-narrativos realizados por el docente y derivados de la observación no participante llevada a cabo, se elaboró a modo de encuesta estructurada final una batería de preguntas abiertas que se trasladó a los y las participantes en la experiencia, por

considerarse fundamentales para la evaluación de la misma. En concreto, se pidió a los y las docentes en formación que respondieran por escrito a las siguientes cuestiones (desde el punto de vista de futuros profesores de matemáticas):

1. Relata dos momentos breves pero intensos en la sesión que hemos tenido en el MFPS con los *Pro-Bot* (para detectar lo que más había impactado).
2. Formula una pregunta para ti mismo, relativa a la sesión (para localizar indirectamente lo que consideraba el o la estudiante como más importante).
3. Responde a tu propia pregunta de manera específica (para comprobar el dominio del tema).
4. ¿Algo no te ha quedado claro? (para comprobar el éxito de la actividad).
5. ¿Qué crees que te ha aportado el manejar durante una sesión el *Pro-Bot*? (sobre la aceptación del hardware innovador en el rol de estudiante).
6. Si en tus próximas prácticas tuvieras a tu disposición un aula informática adecuada, ¿te gustaría utilizar *Scratch* en algunas clases de matemáticas? (para contrastar con la última pregunta).
7. Si en tus próximas prácticas tuvieras a tu disposición suficientes *Pro-Bot*, ¿te gustaría utilizarlos en algunas clases de matemáticas? (la pregunta clave de la experiencia: aceptación del hardware innovador en el futuro rol de docente).

Mientras las cinco primeras preguntas tienen el propósito de ver el nivel adquirido y el interés por el nuevo hardware, las dos últimas son la clave para comparar la actitud ante el uso de este software en estos dos hardware en la futura práctica docente.

RESULTADOS

En la Tabla 1 se resumen las respuestas dadas a las dos últimas preguntas por los 27 estudiantes que respondieron la encuesta (hubo 3 estudiantes que no pudieron participar de manera presencial en el manejo de los robots por la pandemia actual y, en consecuencia, no contestaron las preguntas abiertas planteadas), categorizadas en función de tres tipos de respuesta: afirmativa, dudosa o negativa.

Tabla 1. Distribución bidimensional de las respuestas (aclaración sobre la estructuración de la tabla: por ejemplo el valor 4 corresponde a: *Sí usaría Scratch* y *Dudoso sobre el uso del robot*).

Pro-Bot / *Scratch*	Sí	Dudoso	No
Sí	16	4	2
Dudoso	1	3	1
No	0	0	0

A partir de los datos que aparecen en la tabla 1, en lo referente al uso de *Scratch* en el aula en el futuro profesional docente, se han obtenido los siguientes resultados: 16+4+2=22 Sí (81.5%), 1+3+1=5 Dudoso (18.5%) y 0+0+0=0 No (0%), y en lo referente al robot: 16+1+0=17 Sí (63.0%), 4+3+0=7 Dudoso (25.9%) y 2+1+0=3 No (11.1%).

En resumen, una importantísima mayoría, más de cuatro quintos, desearía usar *Scratch* en su clase, menos de la quinta parte tiene dudas de algún tipo y nadie rechaza su uso. Sorprendentemente, en lo referente a usar el robot en la clase, baja casi una cuarta parte los que desearían usarlo (del 81.5% al 63.0%), los dudosos suben casi un 50% (del 18.5% al 25.9%) y los que rechazan su uso pasan de un 0% a más del 10%.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Como resultado de la observación no participante llevada a cabo consideramos que, de todas las actividades del curso, la que provocó un mayor entusiasmo entre los futuros docentes (y una mayor colaboración e interacción entre ellos y ellas) fue, sin lugar a dudas, la realizada con los robots programables. Por ello, es muy llamativa la bajada de interés por llevarlo a la futura práctica docente mostrada por estos y estas estudiantes en las respuestas dadas a las preguntas abiertas. Es cierto que el entusiasmo mostrado por los y las participantes puede ser debido a la novedad o al atractivo de los robots; sin embargo, consideramos que la experiencia educativa poseída por dichos participantes tiene un peso mayor en la concepción de su futura docencia que la posible utilización de herramientas novedosas útiles para el desarrollo del aprendizaje.

Los y las estudiantes arguyen en sus respuestas a las preguntas abiertas formuladas distintas razones (mantener el orden en el aula, pérdida de tiempo, aburrido, desconfianza en la capacitación informática propia –lo que influye también en el posible uso de *Scratch*, en el único caso en que se cita esta razón,–, complicación de llevarlo a la clase de matemáticas, etc.), pero sospechamos que están más ligadas al rechazo o inseguridad con un hardware novedoso frente al uso habitual de aplicaciones ejecutadas en entornos informáticos basados en la utilización de ventanas (smartphones, tablets y ordenadores).

Ello abre el camino a diseñar y llevar a cabo una futura experiencia más enfocada a tratar de determinar si ésta es realmente la razón o si, por el contrario, las razones son efectivamente de las índoles reflejadas en las respuestas.

Referencias

Abbelson, H., y di Sessa, A. (1981). *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. Cambridge, MA, EEUU: The MIT Press.

Acosta, Y., y Alsina, À. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: El caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111-120). Gijón: SEIEM.

Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, 797–810.

Baccaglini-Frank, A.E., Santi, G., Del Zozzo, A., y Frank, E. (2020). Teachers' Perspectives on the Intertwining of Tangible and Digital Modes of Activity with a Drawing Robot for Geometry. *Education Science*, 10, 387.

Bernal, A., Fernández-Salinero, C., y Pineda, P. (2019): *Formación continua*. Madrid: Síntesis.

Bisquerra, R. (coord.). (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Blanco, T.F., Salgado, M., y Gorgal Romarís, A. (2017). Análisis de prácticas con robots para la enseñanza de ángulos en Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p. 503). Zaragoza: SEIEM.

Castro, E., Cecchi, F., Salvini, P., Valente, M., Buselli, E., Menichetti, L., Calvani, A., y Dario, P. (2018) Design and Impact of a Teacher Training Course, and Attitude Change Concerning Educational Robotics. *International Journal of Social Robotics*, 10, 669–685.

Code & Go Robot Mouse Activity Set. (Sin fecha). Recuperado de: https://www.learningresources.com/code-gor-robot-mouse-activity-set

Diago, P. D., Gutiérrez, Á., Jaime, A., y Yáñez, D. F. (2018). Uso de visualización por estudiantes de alta capacidad matemática al programar un Bee-Bot. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 621). Gijón: SEIEM.

Eisenhart, A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19, 99-114.

Fernández-Salinero Miguel, C., de la Riva Picatoste, B., Roanes Lozano, E., y Roanes Macías, E. (2020). *Utilización de metodologías activas de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, centradas en el estudiante y desarrolladas en el espacio innovador de una hiperaula*. Madrid: Los autores.

FMSLogo. (Sin fecha). Recuperado de: https://fmslogo.sourceforge.io/

González-Calero, J.A., Cózar, R., Villena, R., y Merino, J.M. (2017). Interpretación de planos mediante el uso de robots educativos. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 529). Zaragoza: SEIEM.

Highfield, K. (2010). Robotic Toys as a Catalyst for Mathematical Problem Solving. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15(2), 22-27.

Leoste, J., y Heidmets, M. (2019). The Impact of Educational Robots as Learning Tools on Mathematics Learning Outcomes in Basic Education. En T. Väljataga y M. Laanpere (Eds.), *Digital Turn in Schools. Research, Policy, Practice* (pp. 203-217). Singapore: Springer Singapore.

Martínez Zarzuelo, A., Rodríguez Mantilla, J. M., Roanes Lozano, E., y Fernández Díaz, M. J. (2020). Efecto de Scratch en el aprendizaje de conceptos geométricos de futuros docentes de Primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 23(3), 357-386.

Mayer, R. E. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? The Case for Guided Methods of Instruction. *American Psychologist*, 59(1), 14–19.

Pérez, G., y Diago, P. D. (2018). Uso de lenguajes de programación simbólicos en resolución de problemas con Bee-bot. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 652). Gijón: SEIEM.

Papert, S. (1980) *MINDSTORMS. Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books, Inc.

Perrenoud, P. (1999). *Construir competencias desde la escuela*. Santiago de Chile: Dolmen Ediciones.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE 3 de enero de 2015, pp. 169-546. Recuperado de: https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Roanes Lozano, E. (2018). *Geometría de la tortuga con Scratch 2.0 y enseñanza de matemática elemental*. Recuperado de https://webs.ucm.es/info/secdealg/ApuntesLogo/INF_MATN_Scratch18-19_v11.pdf

Roanes-Lozano, E., y Fernández-Salinero, C. (2020). Evaluating CAS and DGS at the maths classroom: a proposal for an unbiassed experimental study of the impact of the computational role of the students in the meaningful of their learning, en B. Barzel, R. Bebernik, L. Göbel, M. Pohl, H. Ruchniewicz, F. Schacht, y D. Thurm (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14* (pp. 328-337). Essen: DuEPublico, Duisburg-Essen Publications Online.

Sandín, M. P. (2003) *Investigación cualitativa en Educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGrawHill.

Scratch. (Sin fecha). Recuperado de: https://scratch.mit.edu/

Terrapin. Tools for thinking. Bee-Bot. (Sin fecha). Recuperado de: https://www.terrapinlogo.com/bee-bot-family.html

Terrapin. Tools for thinking. Pro-Bot. (Sin fecha). Recuperado de: https://www.terrapinlogo.com/products/robots/pro/probot.html

Terrapin Software (2013). Pro-Bot Robotics. Recuperado de: https://www.terrapinlogo.com/downloads.html

Viladot, G. (2002). Métodos y técnicas de formación en las organizaciones, in: P. Pineda. (Coord.), *Gestión de la formación en las organizaciones* (pp.149-169). Barcelona: Ariel.

DE LA CONSTRUCCIÓN A LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA

From construction to the conceptualization of natural numbers in Primary Education

Rodríguez González, M. L., Gómez Alfonso, B. y Filloy Yagüe, E.

[a]Cinvestav – México, [b]Universidad de Valencia, [c]Cinvestav – México

Resumen

En esta comunicación se presentará un fragmento del análisis de dos entrevistas clínicas, consistente en identificar si persisten las dificultades que se presentaron en la etapa previa de experimentación del Modelo de Enseñanza diseñado con base en el modelo matemático de Von Neumann para la conceptualización de los números naturales; o bien hay nuevas dificultades. El marco teórico metodológico es el de los Modelos Teórico Locales (MTL) y sus cuatro componentes: Formal, Cognitivo, Comunicación y Enseñanza. Con el aporte de la Semiótica se diseñaron las categorías de análisis para observar y explicar dificultades de uso del Sistema Matemático de Signos (SMS) involucrado en la construcción de los primeros números naturales, usando la iteración y el proceso recursivo. De los resultados se puede inferir que hay posibilidades de potenciar el pensamiento matemático abstracto en alumnos de edades tempranas.

Palabras clave: *aprendizaje, enseñanza, niños, números naturales*

Abstract

This communication will present an excerpt of the analysis of two clinical interviews, consisting in identifying whether the difficulties that occurred in the previous stage of experimentation of the Teaching Model designed based on Von Neumann's mathematical model for the conceptualization of natural numbers persist; or there are new difficulties. The methodological theoretical framework is that of Local Theoretical Models (MTL) and its four components: Formal, Cognitive, Communication and Teaching. With the contribution of Semiotics, the categories of analysis were designed to observe and explain difficulties in the use of the Mathematical Sign System (SMS) involved in the construction of the first natural numbers, using iteration and the recursive process. From the results it can be inferred that there is possibilities to enhance abstract mathematical thinking in students of early ages.

Keywords: *learning, teaching, children, natural numbers*

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Desde la mirada de la Matemática Educativa se sostiene que las dificultades de aprendizaje de los niños no están sólo en la enseñanza sino que están principalmente en la matemática, por lo que se considera necesario conocer con profundad la estructura matemática para trasladarla a la enseñanza.

La problemática que se ha observado es que generalmente en los primeros grados de educación primaria, la enseñanza de los números naturales se centra en su sentido cardinal y en menor medida en el ordinal; el número cero se usa como cifra en la representación de cantidades y como columna vacía, pero no hay un tratamiento conceptual del mismo.

De acuerdo con la metodología de los MLT, observar dificultades de aprender desde una propuesta formal matemática, permite centrar la atención en las acciones matemáticas más elementales y fundamentales, que para el caso de los números naturales es la *iteración* y la *recursión* (Hamilton y Landin, 1961).

Rodríguez, M. L., Gómez, B. y Filloy, E. (2021). De la construcción a la conceptualización de los números naturales en Educación Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 529 – 536). Valencia: SEIEM.

Si bien, Cantor, Frege y Dedekind propusieron generar los números naturales a partir de las relaciones entre conjuntos y Peano inspirado en la definición de Dedekind, propuso caracterizarlos axiomáticamente (Mosterín, 2000, p. 55), para la enseñanza no es práctico apoyarse sólo en la teoría de conjuntos porque no hay orden numérico, ni tampoco en la axiomatización porque va en contra de las maneras en que los niños procesan cognitivamente las primeras acciones con números.

La conceptualización del cero como número va más allá de su uso en el sistema de numeración; por eso en este trabajo se considera fundamental iniciar con el número cero el aprendizaje de los números naturales. Así lo proponen Hamilton y Landin (1961) al traducir el modelo matemático de Von Neumann, quien usa la teoría de conjuntos y encapsula la axiomatica de Peano en el principio de inducción finita a través de la *iteración*, para construir cada número a partir de un número finito de iteraciones. El orden está implicito por la misma construcción, empieza por la definición del número cero como conjunto vacío y usando proceso recursivo da sentido a la conceptualización de sucesor, que le permite definir el número uno y todos los demás.

Con el fin de estudiar la viabilidad de introducir un Modelo de Enseñanza adaptado al Modelo Matemático Formal para la construcción de los números naturales se diseñó un proyecto en tres fases, que es el que sustenta la presente comunicación: Primera.- Diseñar un Modelo de Enseñanza con base en Von Neumann, dirigido a niños de 6 a 9 años. Segunda.- Experimentar con tres grupos (1º, 2º y 3º) de educación primaria y identificar dificultades de aprendizaje. Tercera.- Contrastar a través de la entrevista clínica las dificultades observadas durante la experimentación.

Para guiar estas fases se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué elementos del modelo formal en los términos señalados por Hamilton y Landin (1961) se deben considerar para diseñar un Modelo de Enseñanza que se traduzca en actividades concretas, dirigidas a niños de 6 a 9 años de edad?

¿Qué dificultades se pueden observar cuando los niños trabajan a partir de la construcción de los números naturales, con base en ese modelo de enseñanza?

¿Cuál es el efecto del Modelo de Enseñanza con relación a las dificultades observadas en su implementación, una vez transcurrido un periodo aproximado de un curso escolar desde su implementación?

Para dar respuesta a estas preguntas, se propuso como Objetivo General:

Identificar dificultades de aprender la construcción de los números naturales, cuando se les propone un modelo de enseñanza basado en el modelo matemático de Von Neumann.

Esta comunicación se centra en el objetivo particular:

- Analizar a través de la entrevista clínica el efecto del Modelo de Enseñanza implementado, en relación a las dificultades identificadas en su experimentación, pasado un lapso aproximado de un curso escolar.

Los resultados del análisis de la experimentación se publicaron en (Rodríguez y Filloy 2018) y (Rodríguez, Gómez y Filloy 2019[a], 2019[b]).

Marco Teórico

En Matemática Educativa, los MTL (Filloy, Rojano y Puig, 2008) son un marco teórico - metodológico para la observación experimental en la investigación. La semiótica de Peirce (1987) es el fundamento para dar sentido a los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS), que constituyen una teoría en los MTL para la interpretación de observaciones experimentales. Los SMS centran la atención en la producción de intertextos a través de la lectura/transformación de textos matemáticos en relación con otros textos. Esto permite a los usuarios producir sentido y dar significado matemático a los procesos de comunicación que se producen en las aulas, cuando se implementan

secuencias de actividades con un fin determinado. El sentido de lo *local*, focaliza su análisis en un fenómeno específico a través de los cuatro componentes: formal, cognitivo, de comunicación y de enseñanza.

Para este trabajo estas cuatro componentes se concretan de la siguiente manera:

Formal: La base de esta componente es el Modelo de Von Neumann (Hamilton y Landin, 1961) cuya lógica de construcción precisa el SMS involucrado en la construcción de los números naturales. La iteración y la recursión se usan para la construcción de cada número. Comienza con la definición de cero: $0 = \varnothing$; la noción de sucesor se introduce con la construcción del número uno, como el conjunto que contiene un el elemento, el vacío, representando como sigue: $1=\{\varnothing\}$; el dos es el conjunto que contiene dos elementos, $2=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; $3=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$; y así sucesivamente.

Es importante señalar que en este proceso de construcción recursiva, se hace patente el aspecto ordinal del número en el sentido de que cada número es el conjunto de todos los números que le preceden.

Para definir el conteo y la cardinalidad se introduce la noción de intervalo: "Si $a,b \in N$, $[a,b] = \{x \mid x \in N$ y $a \leq x$ y $x \leq b\}$" (Hamilton y Landin, 1961, p. 97). "Contar un conjunto A es una correspondencia uno-uno φ: $[1,n] \rightarrow A$, entre $[1,n]$ y A, donde $n \in N$". (Op. Cit. p. 99). La cardinalidad es el resultado de un conteo:

> Si n es el resultado de un conteo de A, entonces A tiene n elementos, o el número de elementos en A es n, o la cardinalidad de A es n. Esto también lo denotamos como la cardinalidad de A por $\#(A)$. (Op. Cit. p. 101).

La suma se introduce desde la unión de conjuntos disjuntos $A \cup B$. Si m y n son sus cardinales respectivamente, entonces $m + n$ es la suma. Cada una de las sumas se obtiene de manera natural por iteración y partiendo del sucesor de n, $n+1$, del sucesor del sucesor de n, $(n+1) + 1$, …

Cognitiva: La base de esta componente son los aportes de la teoría de la actividad (Talizina, 2001) que señala que las dificultades observadas se pueden explicar a través de los obstructores cognitivos (OB). Éstos obstructores son los aprendizajes previos sobre los números que tienen los niños de 6 a 9 años y que les dificultan el tránsito de la acción a la operación cognitiva para la conceptualización del número cero y para usar la iteración y la recursión en la construcción del *sucesor* de cada número.

Comunicación: La base de esta componente es la Semiótica (Peirce, 1987), de la cual se toman los argumentos de inducción, deducción y abducción como procesos de significación y base del razonamiento reflexivo y, también, las relaciones significantes como interrelaciones continuas y complejas entre la sintaxis, la semántica y la pragmática, con el uso de códigos establecidos en el contexto, para la producción de sentido (Dotación de Sentido) en las acciones numéricas.

También es importante señalar que la lógica de uso de los SMS (Filloy, Rojano y Puig 2008), es una herramienta para entender y explicar los sistemas o estratos de signos que producen los niños para producir sentido a las actividades que se les proponen con el modelo de enseñanza.

Enseñanza: La base de esta componente es la colección de textos concretos que entienden los alumnos y que gradualmente van transformando en textos cada vez más abstractos, con significado matemático convencional. A tal fin se ha traducido el modelo formal matemático de Von Neumann en un modelo de Enseñanza estructurado en secuencias de actividades concretas, con uso de material manipulativo.

Metodología: Diseño, ejecución del Modelo de Enseñanza y protocolo de Entrevista clínica

El diseño de las actividades se realizó siguiendo la secuencia de principios (P_i) propuestos por Hamilton y Landin (1961) en su adaptación del Modelo de Von Neumann. Además, como recurso didáctico, se ha incorporado una semirrecta para representar gráficamente el orden de los números, que si bien no está contemplado explícitamente en los principios Hamilton y Landin (1961) se puede derivar implícitamente de la definición de intervalo (Op. Cit. p. 97).

P_1: El número cero es el conjunto vacío: 0 = Ø.

Actividad: *Adivina quién soy*. Se les pide que observen una bolsa vacía de plástico transparente; la relacionen con el conjunto vacío y número cero y le peguen la etiqueta del número cero en la cara posterior de la bolsa.

P_2 y P_3: Contrucción del número uno como sucesor del cero 0 = Ø; 1 = {Ø}. Concepto de sucesor como un *siguiente*. Con esta idea y usando el proceso recursivo se construyen todos los demás números; 2={Ø,{Ø}}; 3={Ø,{Ø}, {Ø,{Ø}}}. Las llaves que representan a los conjuntos se sustituyen en las actividades con los niños por bolsas transparentes, como se ilustra en la figura 1.

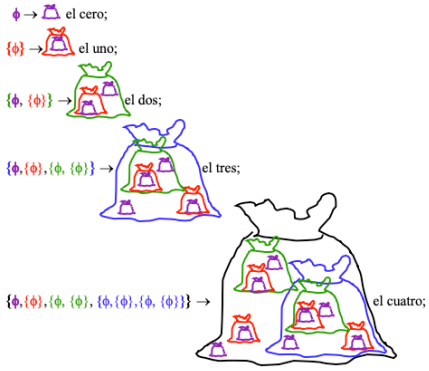


Figura 1. Proceso de construcción recursiva de los números, usando bolsas

Actividad: *¿Podemos construir el siguiente número?*.- Una vez relacionada y nombrada la bolsa vacía con el número cero, se les pregunta: ¿Podemos construir el siguiente número? El sucesor es la bolsa/número que contiene a la bolsa/número vacía o cero. Esta nueva bolsa/número se etiqueta con el número uno. Se vuelve a preguntar ¿Podemos construir el siguiente? El sucesor del uno es el dos, usando la recursión se tiene una bolsa/número que contiene dos bolsas: la bolsa/número cero y la bolsa/número uno que a su vez contiene dentro de ella la bolsa/número cero. Así sucesivamente se sigue con la construcción (Figura 1). Conforme se van construyendo todas las bolsas/números se va colocando una marca en una semirrecta de izquierda a derecha, empezando por el cero (Figura 2).



Figura 2. Las bolsas/número colocadas de izquierda a derecha en la semirrecta.

P_4: Definición de número natural como conjunto *n*. La bolsa con *n* elementos es el número *n*. El conjunto *n* contiene a todos los anteriores; si está vacío es el número cero, si no está vació es un sucesor.

Actividad: *¿Cómo soy?* Se les cuestiona a los niños para que reflexionen empleando preguntas como: ¿Qué relación hay del número cero con cualquier sucesor? ¿quién está antes y después de? ¿Quién no tiene sucesor?...

P_5: Conteo: cardinalidad y ordinalidad.

Actividad: *¿Cuál es el orden?* Está actividad no se implementó en el modelo de enseñanza dado que los niños están habituados al conteo; pero si en la entrevista, primero con un tarro y canicas idénticas y después manipulando figuras concretas de los numerales. Con la finalidad de que reflexionaran sobre la relación del conteo y el orden.

P_6: Adición y multiplicación. Uso del proceso recursivo para la construcción de tablas de doble entrada (filas y columnas) de sumar y multiplicar.

Actividad: *Construimos las tablas de suma y multiplicación*. – Los resultados de (+) y (x) se escriben en las celdas donde se cruzan filas y columnas. Se les propone usar la forma $a \cdot 10 + b$, para representar los números mayores que 10.

La construcción de la tabla de multiplicación se apoya en el uso de una semirrecta para resaltar *los saltos* (iteración del multiplicador) en la obtención de cada producto.

Metodología del protocolo de las entrevistas y categorías de análisis

Para el protocolo de entrevista se siguieron las mismas actividades del modelo de enseñanza señaladas en los párrafos anteriores, se agregó una actividad para P_5. Para P_6 se sustituyó la construcción de las tablas por la resolución de problemas aditivos y multiplicativos.

Para el analisis de las dificultades observadas en la experimentación y en la aplicación de la entrevista clínica, se utilizaron las mismas categorías de análisis, de acuerdo con el aporte del marco teórico:

- *Obstructores (OB*) que generan tendencias cognitivas, por las maneras en que han aprendido las nociones numéricas, manifestadas en dificultades semánticas, pragmáticas, sintácticas y de uso numérico.
- *Argumentos como Procesos de Significación* (APS), para identificar el razonamiento inductivo, deductivo y abductivo en el uso de la iteración y recursividad en la conceptualización de los números naturales.
- *Dotación de Sentido* (DS) de los SMS con la utilización de códigos personales, para desarrollar el tránsito de lo concreto a lo abstracto.

Las dificultades identificadas en el modelo de enseñanza se clasificaron de acuerdo con los obstructores en tres ejes:

- *Pragmático. A.* Uso de conocimientos pragmáticos y espontáneos de los números en acciones de representación de conteo. En este rubro las dificultades fueron: A1. Identificar al cero como número (P_1) y A2 Identificar el sucesor y antecesor de cualquier número (P_3).
- *Semántico. B.* Uso semántico de los números en acciones de representación y conteo. En este otro rubro las dificultades fueron: *B1.* Reconocer al número cero como conjunto vacío (P_1), *B2.* Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor (P_2), *B3.* Reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores (P_3), *B4*. Identificar el cero como el punto origen en la recta.
- *Sintáctico. C.* Uso sintáctico en las operaciones. Aquí, las dificultades fueron: C1. Uso de la forma $a \cdot 10+b$ para representar a los sucesores (P_6).

Análisis de las entrevistas clínicas con respecto a las dificultades observadas

Los criterios de selección de los alumnos para la entrevista clínica fueron:

a) Registro y análisis Cuantitativo de respuestas a los ejercicios escritos de cada alumno.

b) Análisis Cualitativo su desempeño en cada sesión grupal.

Por sus resultados cada alumno se clasificó en estratos (alto, medio y bajo), usando el modelo tridimensional propuesto por Rojano (1985). Se seleccionó a un alumno representante de cada estrato por grupo, teniendo un total de 6 entrevistas.

La entrevista clínica se aplicó en el siguiente ciclo escolar y tuvo como finalidad comparar si persistían las dificultades identificadas durante la experimentación, si se superaron o si aparecieron nuevas. Para esta comunicación y debido a la limitación de espacio se presenta sólo el fragmento de la actividad "¿Podemos construir el siguiente?" para la construcción del sucesor del número cero, de dos alumnos representantes del estrato bajo (Daniel de 2º grado y Guillermo de 4º grado) y posteriormente el análisis de estos fragmentos. La simbología que se usa para la transcripción es Daniel (D), Guillermo (G) y Entrevistadora (E).

Fragmento de Daniel 2º grado.

1. E: ¿Cuál es el siguiente? [Se refiere al sucesor del cero]
2. D: El uno.
3. E: ¿Qué necesito para que sea el número uno?
4. D: Un número que esté adentro.
5. E: ¿Quién va a ser ese elemento que esté adentro?
6. D: ¿El uno?
7. E: ¿Quién era el que estaba antes?
8. D: ¡Ah! El cero.
9. E: El cero. ¿Qué tienes que hacer?
10. D: Agarrar una… [Daniel toma otra bolsa vacía y la etiqueta con el número cero y la introduce en la nueva bolsa/número].
11. E: ¿Qué nombre le voy a poner?
12. D: El uno. [Daniel señala las etiquetas del número uno].
13. E: ¡Muy bien! ¿Quién está antes del uno?
14. D: El dos.
15. E: ¿El dos?
16. D: ¡Ah no! El cero.

Fragmento de Guillermo 4º grado.

17. E: ¿Podremos construir el siguiente? [se refiere al sucesor del cero].
18. G: El uno.
19. E: ¿Cómo le hacemos?
20. G: Con otro… [Guillermo toma otra bolsa vacía y le pega la etiqueta del cero].
21. E: Muy bien.
22. G: Poner este adentro… [Toma otra bolsa vacía más grande y va describiendo oralmente sus acciones].

23. E: ¡Muy bien! ¿Dónde lo vas a meter?
24. G: En el uno.
25. E: ¿Cómo podemos saber que es la bolsita del uno?
26. G: Porque está más grande.
27. E: Y porque tiene… ¿Cuántos elementos adentro?
28. G: Uno.
29. E: ¿Quién es ese elemento?
30. G: Cero.

En las primeras líneas de cada entrevista D (2) y G (18) afirman que el número uno es el sucesor del cero, lo que se puede entender que han superado la dificultad (B2), dando sentido al proceso recursivo. Sin embargo, hay diferencias de actuación entre Daniel y Guillermo.

D(4) expresa un argumento deductivo: "un número que esté adentro" para referirse a la noción de sucesor, pero cuando E(5) lo cuestiona, se observa que aun no tiene claro el sentido de la recursión (B3), por lo que la intervención de E(7), le permite recordar la construcción de los números D(8), realiza el proceso de construcción recursiva D(10) introduciendo en la bolsa/número uno la bolsa/número cero, lo que se puede interpretar como una dotación de sentido (DS) a la noción del sucesor del número cero.

Mientras que G(20, 22 y 24) realiza el proceso de manera natural al tomar otra bolsa vacía, etiquetarla con el número cero e introducirla en la nueva bolsa/número uno, mostrando que tiene mayor claridad en el uso de la construcción recursiva.

En Daniel la dificultad (B3) se vuelve a presentar (13 a 15) y es superada por el cuestionamiento de la entrevistadora E(15). En el caso de Guillermo, se observa que también presenta esta dificultad, al referirse al sentido perceptual G(26) centrando la atención en el tamaño de la bolsa y no en el proceso de construcción recursiva; por lo que el cuestionamiento de E(27 y 29) le posibilita rectificar su respuesta G(30). Ambos alumnos usaron de manera eficiente el proceso recursivo en cada construcción de los números, para Daniel fue claro al expresarlo oralmente D(4); mientras que Guillermo realiza directamente la acción a la pregunta de E (19). Las acciones realizadas por ambos, las entendemos como una dotación de sentido (DS) de uso de este SMS.

Se observa que Guillermo superó en menor tiempo las dificultades, en comparación con Daniel. Por lo que se considera que la edad influye, pero no determina la dotación de sentido para usar el proceso recursivo en la construcción de los números naturales a partir de la noción del sucesor (P_2 y P_3) empezando por el cero (P_1).

Discusión final

Se insiste en que el objetivo general de la investigación es identificar las dificultades de aprendizaje cuando se les enseña con el modelo de enseñanza basado en el modelo formal matemático de von Neumann para la construcción de los números naturales y los SMS involucrados en dicha tarea. Podemos afirmar que la influencia de las maneras en que los niños han adquirido las nociones numéricas en los diferentes entornos de su vida cotidiana pueden obstruir la comprensión y uso pragmático de la recursividad para reconocer que cada sucesor (número) contiene a todos los sucesores; que el número cero es el primer elemento de la construcción, que es el único que pertenece a todos sus sucesores y que no tiene antecesor. Pero cuando se trabaja con un modelo de enseñanza con una base formal matemática, como en este caso Von Neumann, esas dificultades se pueden superar, como muestran los resultados de la entrevista; a pesar de haberse realizado la entrevista en el siguiente ciclo escolar al de la implementación de la enseñanza. Los niños con un bajo nivel de competencia (estrato bajo) superaron las dificultades que se presentaron durante la

experimentación grupal, lo que nos permite proponer la posibilidad de implementar estos modelos desde los primeros grados de educación elemental, brindando un área de oportunidad para establecer las bases un pensamiento matemático que les permita acceder a otros niveles de comprensión. Además, se presupone que incorporar la componente formal para la conceptualización de los números desde el primer grado de primaria, facilitará el desarrollo conceptual antes del uso del simbolísmo, evitando concebir la enseñanza de los números naturales como una construcción trivial, memorística y operativa.

Es por esto que se considera que es necesario recuperar la tradición formal matemática en la enseñanza, para potenciar el pensamiento matemático abstracto, que les permita a los alumnos acceder a niveles superiores de conocimiento matemático.

Referencias

Filloy, Rojano y Puig. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. USA: Springer.

Hamilton, N. y Landin. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. USA. Allyn and Bacon, Inc.

Mosterín, J. (2000). *Los Lógicos. España*: Spasa Calpe, S. A.

Peirce, Ch. (1987). *Obra Lógico Semiótica.* Madrid: Taurus Ediciones.

Rodríguez y Filloy. (2018) Dificultades de uso de la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en la construcción de los números naturales. En Herrera Carrasco D. y Macías Romero, F. (Coods.) *Matemáticas y sus aplicaciones 10*. ISBN 978-607-525-521-7. México: BUAP.

Rodríguez, et. al. (2019[a]). Dificultades en el aprendizaje del cero, en alumnos de escuela elemental. En Marbán, et. al. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*. España: SEIEM XXIII.

Rodríguez, et. al. (2019[b]). *Un modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en Von Neumann*. Colombia: CIAEM XV.

Rojano, C. T. (1985). *De la Aritmética al álgebra.* Tesis Doctoral no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Talizina, N. (2001). *La formación de las habilidades del Pensamiento Matemático.* México: UASLP

SENTIDO ESPACIAL EN FUTUROS MAESTROS

Spatial sense in pre-service teachers

Roura, R.[a] y Ramírez, R.[b]

[a] Centro de Magisterio La Inmaculada [b] Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se analiza el sentido espacial de 52 estudiantes de segundo curso del Grado de Educación Primaria mediante un test de concepción espacial (PMA-E) así como su rendimiento en la resolución de una tarea que pone en juego su sentido espacial. Los resultados muestran que mayoritariamente los futuros maestros analizados obtuvieron un nivel medio en la visualización y que un elevado porcentaje de ellos cometieron errores al identificar giros y simetrías. Se ha evidenciado que la visualización de los futuros maestros puede influir en la resolución de tareas que involucren otras componentes del sentido espacial.

Palabras clave: s*entido espacial, test PMA, formación de profesores*

Abstract

In this work, the visualization of 52 second year students of the Primary Education Degree is analyzed by means of a spatial conception test (PMA-E) as well as their performance in the resolution of a task that puts into play their spatial sense. The results show that most future teachers are average visualizers and that a high percentage of students make mistakes when identifying turns and symmetries. It has been shown that visualization can influence the resolution of tasks that involving spatial sense.

keywords: s*patial sense, PMA test, teacher training*

INTRODUCCIÓN

La terminología utilizada por los autores en sus diferentes investigaciones en los que aparece el concepto de sentido espacial es muy variada. Bennie y Smit (1999) afirman que en este campo se puede utilizar una variedad de terminología y que existe poco consenso a la hora de dar una definición. Otros autores que no hacen referencia explícitamente al sentido espacial aluden a elementos relacionados. Podemos organizar estas definiciones atendiendo a las alusiones a contenidos geométricos y elementos visualizadores.

En los elementos visualizadores se resalta el papel de la habilidad espacial, razonamiento espacial y visualización. Lean y Clements (1981) utilizan el término de habilidad espacial y lo entienden como la habilidad para crear imágenes mentales y para manipular estas imágenes en la mente. Lea (1990) define el sentido espacial como un conjunto complejo de habilidades entrelazadas que interactúan necesariamente para relacionarse con el espacio. Clements y Battista (1992) usaron la noción de razonamiento espacial, como un conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales construyen en la mente y manipulan representaciones mentales de objetos, así como sus relaciones y transformaciones espaciales. Jones y Tzekaki (2016) enfatizan sobre la inevitable superposición de la visualización geométrica y el razonamiento espacial, mediante el cual toman la visualización como la capacidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual.

Roura, R. y Ramírez, R. (2021). Sentido espacial en futuros maestros. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 537 – 544). Valencia: SEIEM.

Otros autores también hacen alusión a contenidos geométricos. Por ejemplo, Lupiañez y Rico (2015) plantean que el sentido espacial es un campo del sentido matemático y destacan que es importante la visualización y las nociones, propiedades y relaciones geométricas.

Jones y Tzekaki (2016), en una revisión de la investigación sobre la enseñanza de la geometría presentada en el International Group for the Psychology of Mathematics Education, destacan el papel del razonamiento espacial, más que por ser una componente importante de la acción humana y el pensamiento, por estar estrechamente relacionado con el pensamiento y el desarrollo del conocimiento geométrico. En la recopilación de trabajos sobre el conocimiento de los estudiantes relacionados con las capacidades espaciales, los autores indican un bajo desarrollo de habilidades relacionadas con la orientación espacial, relaciones espaciales y de las transformaciones. Este hecho contrasta el papel que juega la visualización en el aprendizaje de las matemáticas (Clements y Battista, 1992, New Jersey Mathematics Coalition, 1996).

La enseñanza de elementos visualizadores no es una tarea fácil para los profesores como revelan las investigaciones. En los Principios y Estándares del "National Council of Teachers of Mathematics" (NCTM, 2000) se hace especial alusión a los elementos visuales en los programas de enseñanza de todas las etapas. Estos programas deberían capacitar a todos los estudiantes para que puedan utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas. Las orientaciones españolas donde se desarrolla el currículo básico de Educación Primara, también hacen referencia al tema de la "orientación y representación espacial" (MEC, 2014)

Esta perspectiva se ha abordado en los planes de formación de los futuros maestros. Ruiz, Flores, Ramírez y Fernández (2019) destacan el desarrollo del sentido espacial en maestros en formación, tanto para la resolución, el análisis y el diseño de tareas en su futura labor docente.

En el XVII encuentro de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), Fernández (2013) analiza las investigaciones en visualización, poniendo de manifiesto que sigue siendo un tema de interés para futuras investigaciones en el ámbito de la geometría. En posteriores encuentros también se ha trabajado en la visualización y el sentido espacial, destacando los trabajos relacionados con habilidades de visualización (Escrivá, Beltrán-Meneu, Gutiérrez y Jaime, 2016; Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez, 2016). Salgado, Berciano y Jiménez-Gestal (2019) en la última SEIEM, destacan que la orientación espacial y la capacidad para comunicar la posición de los objetos en el entorno, son dos de los aspectos de la competencia matemática que se deben favorecer desde el aula de Educación Infantil. Pese a este interés investigador, Gutiérrez y Jaime (2015) ponen de manifiesto la escasez de contenidos de Geometría espacial tanto en los currículos españoles de educación primaria como en los de educación secundaria. Bennie y Smit (1999), señalan que el sentido espacial no puede ser enseñado, pero debe ser desarrollado a lo largo de un periodo de tiempo.

Según la revisión anterior, destacamos que desarrollar el sentido espacial es un objetivo básico de la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Por ello, consideramos pertinente investigar sobre sentido espacial en los futuros maestros, ya que estos son los responsables de formar a las generaciones futuras y deberán proponerles las tareas que les permitan desarrollarlo. Para ello, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿El nivel de visualización de los futuros maestros está relacionado con el rendimiento al resolver una tarea de sentido espacial?

En relación con la visualización, Cruz y Ramírez (2018) realizan una exploración de las propiedades geométricas de los ítems del test PMA entre estudiantes de secundaria. Estos han manifestado mayor número de errores en ítems con un menor número de elementos. Para reconocer si la figura de la respuesta es la misma (salvo giros) o distinta (presencia de simetrías), una estrategia posible es fijar algunos elementos de referencia para establecer el centro, ángulo de giro o eje de simetría. Un menor número de elementos podría entenderse como una mayor dificultad para fijar estas referencias.

Sobre futuros maestros y sus conocimientos en visualización, Fernández (2014) realiza una evaluación diagnóstica usando un cuestionario con diferentes aspectos relacionados con habilidades de visualización y razonamiento espacial. El trabajo ha revelado importantes carencias de los futuros maestros en cuanto a conocimiento común del contenido de visualización y razonamiento espacial. La autora destaca la necesidad de diseñar e implementar acciones formativas específicas para promover la mejora de este tipo de conocimiento para favorecer la autonomía de estos estudiantes a la hora de proponer nuevas tareas. Este resultado está en la línea de la investigación de Gonzato, Godino y Neto (2011) donde se plantean el problema de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen los futuros maestros sobre la visualización. Se observa que, aunque consiguen resolver correctamente algunas tareas relacionadas con los conocimientos común y ampliado del contenido, tienen dificultades a la hora de justificar las respuestas e identificar los objetos y procesos puestos en juego en la resolución.

Nuestro trabajo pretende aportar a las investigaciones actuales información que permita conocer si el nivel de visualización de los futuros maestros se relaciona con su rendimiento a la hora de resolver tareas que requieren del sentido espacial.

MARCO TEÓRICO

El Estándar número 7, Geometría y sentido espacial, recoge en su definición tanto los contenidos geométricos como los elementos visualizadores:

> "Todos los estudiantes desarrollarán el sentido espacial y una habilidad para usar las propiedades geométricas y las relaciones para resolver problemas en matemáticas y en la vida diaria (..). El sentido espacial es un sentido intuitivo para la forma y el espacio. Implica los conceptos de geometría tradicional, incluyendo una habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas" (New Jersey Mathematics Coalition, 1996, p. 209).

Flores, Ramírez y Del Río (2015) operativizan esta definición realzando la necesidad de conjugar el aprendizaje geométrico con el desarrollo de habilidades de visualización que permitan dar más significado a los elementos geométricos. Estos autores destacan cuatro componentes del sentido espacial. La primera hace referencia al conocimiento de las características y propiedades de las distintas formas geométricas en el plano o en el espacio. La segunda implica reconocer y establecer relaciones geométricas entre formas y cuerpos geométricos. La tercera se centra en la ubicación y movimientos que se pueden realizar en las figuras. Ramírez (2012) sostiene que el conocimiento de conceptos geométricos (que englobaría las tres componentes citadas anteriormente) no puede entenderse de forma aislada. El sentido espacial implica, además una cuarta componente transversal, la visualización, entendida como el conjunto de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos (Gutiérrez, 2006).

Conocimiento y habilidades no son independientes ya que la fortaleza del sentido espacial radica justamente en establecer conexiones entre las componentes anteriores, lo cual se consigue al ir incorporando las destrezas de visualización. Conceptos geométricos y visualización espacial, aunque diferentes, se complementan para lograr un dominio geométrico funcional (figura 1)

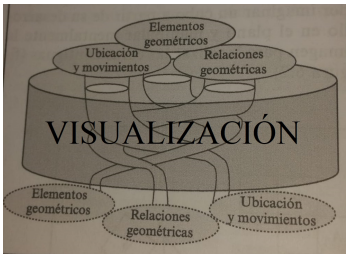


Figura 1. Conexión de las componentes. (Flores, Ramírez y Del Río, 2015)

METODOLOGÍA

Los sujetos que han participado en este estudio son 54 estudiantes de segundo curso del Grado de Educación Primaria del Centro de Magisterio la Inmaculada del curso 2018/2019, de los cuales 30 son mujeres y 24 son hombres. Se ha escogido a los alumnos de segundo curso ya que el sentido espacial es uno de los contenidos que trabajan en la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria.

Toma de Datos

En el estudio se ha utilizado como primer instrumento en la toma de datos, la prueba de Aptitudes Mentales Primarias (PMA) que permite la evaluación de los factores básicos de la inteligencia entre ellos el Factor espacial, que es el que se ha usado en este trabajo. Este factor se define, como la "aptitud para interpretar y reconocer objetos que cambian de posición en el espacio, manteniendo su estructura interna" (Thurstone y Thurstone, 1976). El Test se constituye de 20 ítems, un ejemplo de uno de ellos se muestra en la Figura 2.

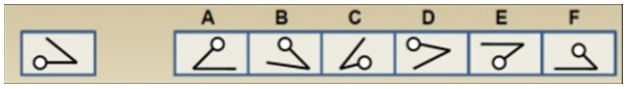


Figura 2. Ejemplo de ítem para el factor espacial PMA

En un tiempo limitado de 5 minutos los estudiantes debían determinar cuál o cuáles figuras coincidían con el modelo al aplicarle un giro en el plano. El segundo instrumento para la toma de datos está adaptado de Flores, Ramírez y Del Río (2015). Se propone a los estudiantes la resolución de la siguiente tarea. Construye todas las piezas que pueden obtenerse al unir cuatro cuadrados de manera que dos de ellos coincidan en un lado (tetraminos). Identifica cuales pueden obtenerse unos a partir de otros mediante movimientos en el plano.

Los autores de la actividad resaltan que las componentes del sentido espacial que intervienen principalmente en el proceso de resolución de esta son la ubicación y movimientos y las habilidades de visualización, de forma más específica.

Las posibles figuras que podían construir son las siguientes:

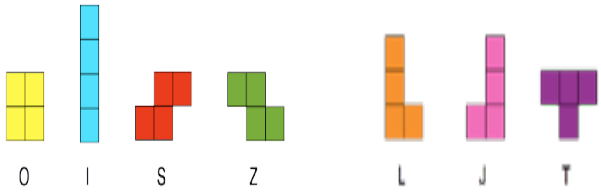


Figura 3. Tetraminós

En relación con el test, en la resolución de la tarea es importante discriminar qué figuras se consideran iguales al aplicar giros o simetrías. Pero aquí, según las instrucciones dadas las figuras S y Z, y las figuras L o J serían la misma figura, ya que ambas pueden obtenerse la una de la otra por simetría.

Categorías para el análisis de datos

Puesto que el objeto de estudio es el sentido espacial, establecemos como categorías las componentes del sentido espacial mostradas en el marco teórico (Flores, Ramírez y Del Río, 2015). Por un lado, se analizan los resultados del test y por otro lado las respuestas a la tarea planteada.

El test se ha corregido y evaluado siguiendo las normas de corrección y puntuación que establece el test PMA factor E, es decir, la puntuación directa (PD) es igual al número de aciertos menos el número de errores (PD= A-E), sin tener en cuenta las omisiones. La puntuación máxima que se puede obtener es una puntuación directa de 54 puntos.

Para analizar el rendimiento de la tarea, se utiliza como unidad de análisis la respuesta completa a la tarea planteada. Las categorías de análisis se basan en las componentes del sentido espacial de identificar y emplear relaciones geométricas y determinar la ubicación y movimientos de las formas y figuras. Teniendo en cuenta las posibles respuestas a la actividad, estas se van a analizar según las categorías de la Tabla 1.

Tabla 1. Categorías para el análisis de la tarea

Construcción de las posibles figuras	Construye la O		CO
	Construye la I		CI
	Construye la T		CT
	Construye la L o J		CL
	Construye la S o Z		CS
Identificación de movimientos	Identificación de giros incorrecta	Identifica incorrectamente dos piezas iguales por un giro	IIPG
		No identifica dos piezas iguales por un giro	NIPG
	Identificación de simetrías incorrecta	Identifica incorrectamente dos piezas iguales por una simetría	IIPS
		No identifica dos piezas iguales por una simetría	NIPS

RESULTADOS

Para responder a la pregunta de investigación en relación con la visualización y el rendimiento en la tarea, describimos primero por separado lo observado en ambos aspectos.

Visualización

Los resultados del Test se han clasificado en tres niveles, dividiendo la puntuación máxima del test (54 puntos) en tres tramos de igual rango: Visualización Baja si la puntuación directa era menor o igual de 18, Visualización Media si la puntuación era mayor que 18 y menor o igual que 34 y Visualización Alta si la puntuación directa es mayor que 34.

Los resultados del Test para describir la visualización han sido los siguientes.

Tabla 2. Resultados del test PMA-E

Nivel	Rango	Alumnos	Porcentaje
Visualización Baja	PD ≤ 18	18	33,34 %
Visualización Media	18< PD ≤ 34	31	57,40 %
Visualización Alta	PD >34	5	9,26 %

De la Tabla 2 destacamos el mayor porcentaje de estudiantes (57,4%) en el tramo que se consideró como Visualizadores Medios.

Rendimiento de la tarea

Para analizar el rendimiento en la resolución de una tarea de sentido espacial, también se han clasificado a los alumnos en tres categorías: Los estudiantes que no construyeron los 5 tetraminós posibles, los estudiantes que construyeron los 5 tetraminós y cometieron errores al identificar giros y simetrías, y los estudiantes que construyeron 5 tetraminós y no cometieron errores. Los resultados han sido los siguientes:

Tabla 3. Resultados de la Tarea de construcción de las piezas

Categoría	Alumnos	Porcentaje
No construye los 5 tetraminós	8	14,81%
Construye los 5 y no identifica todos los movimientos	34	62,97 %
Construye los 5 e identifica todos los movimientos	12	22,22 %

De estos resultados destacamos que un número elevado de alumnos, más del 62 % comete errores en la identificación por simetría o giro, aun siendo capaz de construir las 5 figuras.

Relación entre la visualización y el rendimiento de la tarea.

Para establecer relaciones entre la capacidad visual y el rendimiento, se relacionan los resultados del test con la forma en que resolvieron la tarea (Tabla 4).

Tabla 4. Comparación resultados del test con la resolución de la tarea

	No construye	Construye y no identifica	Construye e identifica	Total
Visualización Baja	3 (5,55%)	11 (20,37%)	4 (7,40%)	18 (33,32%)
Visualización Media	5 (9,26%)	21 (38,89%)	5 (9,26%)	31 (57,41%)
Visualización Alta	0 (0,00 %)	2 (3,71 %)	3 (5,56%)	5 (9,27%)
Total	8 (14,81%)	34 (62,97%)	12 (22,22%)	54 (100%)

Observando la comparación de la visualización con la resolución de la tarea, destacan que el mayor porcentaje (38,89%) se corresponde con alumnos con visualización media que, aunque son capaces de construir los cinco tetraminós, realizan de forma incorrecta la identificación de piezas por giro o simetría. De los alumnos con menor visualización según el test, el 20,37% son capaces de construir las 5 piezas, pero no identifican de forma correcta los giros o simetrías y el 5,55% no son capaces de construir todas las piezas, entre ellos encontramos a los alumnos que en el test han tenido una puntuación directa negativa. Observamos que 4 estudiantes con visualización baja resuelven correctamente la tarea, estos alumnos tienen una puntuación muy próxima a la visualización media. Por otro lado, destacan 2 estudiantes con visualización alta que no identifican los movimientos.

En la Figura 4 vemos el ejemplo de un alumno con visualización baja que no identifica movimientos entre dos de las figuras. En este caso identifica de forma incorrecta un giro.

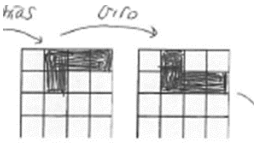


Figura 4. Ejemplo alumno de visualización baja.

Tanto en los estudiantes de visualización baja y media, el mayor porcentaje se corresponde con los estudiantes que construyen correctamente pero no identifican todos los giros y simetrías. En cambio, aunque con una diferencia derivada de un estudiante, cuando los estudiantes muestran visualización alta, el mayor porcentaje se ha presentado en la resolución correcta de la tarea. También observamos que hay más estudiantes que no construyen todas las piezas en la visualización media que en la visualización baja, no teniendo ningún alumno que no haya construido todas las piezas en la visualización alta. De los alumnos que han construido e identificado todos los movimientos, los

porcentajes de los 3 grupos de visualización son muy parecidos, siendo un porcentaje mayor los alumnos de visualización media.

CONCLUSIONES

Con los resultados obtenidos con el test PMA- E hemos podido describir el nivel de visualización de los maestros en formación. Los resultados muestran que mayoritariamente los futuros maestros tienen un nivel medio de visualización ya que mayoritariamente presentaron una puntuación en el rango considerado intermedio en el test. Solo 5 de los 54 estudiantes analizados obtuvieron una puntuación considerada como correspondiente a una visualización alta.

Con estos resultados obtenidos se ha comparado la visualización de los estudiantes y la forma en que resolvieron la tarea. En el trabajo se muestran algunas evidencias de que la visualización puede influenciar la resolución de tareas que involucren sentido espacial, pues los estudiantes con visualización baja o media mayoritariamente cometen errores al resolverla. La habilidad analizada en el test es necesaria para discriminar las figuras equivalentes por giros o simetrías en la tarea. Pero los resultados sugieren que basta un nivel medio e incluso bajo para afrontarla. El rendimiento en el test puede ir asociado a los elementos que componen cada ítem (Cruz y Ramírez,2018). El hecho de que visualizadores medios e incluso bajos hayan obtenido rendimiento alto en la tarea puede derivarse de los elementos geométricos de los distintos tetraminós. La S o la Z tienen unas relaciones geométricas diferentes de la L o J, por lo que puede haberle resultado menos complejas que algunos de los ítems del test. Este trabajo puede aportar ideas para los procesos formativos sobre sentido espacial en el Grado de Primaria, utilizando tareas de formación que desarrollen el sentido espacial de los estudiantes (Ruiz, Flores, Ramírez y Fernández, 2019). En este trabajo hemos visto que la visualización es importante a la hora de resolver la tarea propuesta. Pero en la tarea, además de la habilidad, intervienen componentes del sentido espacial asociadas al proceso de construcción de las piezas y los conceptos geométricos involucrados (cuadrado, lado, giro, simetría…). Por tanto, pensamos que se debe dar más importancia al sentido espacial a la hora de trabajar en Geometría. Soto-Andrade (2008) muestra que, a pesar de que el razonamiento visual está contemplado en los currículos, en general, los profesores lo siguen presentando como un argumento auxiliar o introductorio. Por tal motivo, los alumnos no lo consideran como un tipo de razonamiento básico para su formación ni como una acción del todo válida para hacer matemáticas.

Referencias

Bennie, K. y Smit, S. (1999). *"Spatial sense": Translating curriculum innovation into classroom practice*. Paper presented at the 5th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), Port Elizabeth.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420-464). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Cruz, A. y Ramírez, R. (2018). Componentes del sentido espacial en un test de capacidad espacial. En L. J. Rodríguez Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 211-220). Gijón: SEIEM.

Escrivá, M.T., Beltrán-Meneu, M.J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016): Habilidades de visualización de estudiantes de Primaria en actividades de geometría espacial. En J.A. Macías et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 595). Málaga, España: SEIEM.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Fernández, T. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. *Memorias IX Festival Internacional de Matemática*, 21-33.

Flores, P., Ramírez, R., y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores, y L. Rico, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Gonzato, M., Godino, J. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación matemática*, *23(3), 5-37*.

Gutiérrez. A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P., Ruíz, F. y De la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. PNA, *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *9*(2), 53-83.

Jones, K. Y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Ledery P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 109-149). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lea, H. (1990). Spatial concepts in the Kalahari. En O. George Booker, P. Cobb y T. Mendicuti. (Eds.), *Proceedings of 14th PME conference* (pp. 259-266). México: Program Committe of the 14th PME Conference.

Lean, G. y Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, *12* (3), 267-299.

Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico. (Cds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Madrid*: Pirámide.

MEC (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado número 54.

New Jersey Mathematics Coalition (1996). Geometry and spatial sense, Standard 7. En *New Jersey Mathematics Curriculum Framework* (pp. 209-249). Trenton, NJ: New Jersey State Dept. of Education.

NTCM (2000). Principios y estándares para la educación matemática. Cádiz: SAEM THALES.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático (Tesis doctoral)*. Universidad de Granada, Granada.

Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T.Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 447-457). Málaga: SEIEM.

Ruiz, J. F., Flores, P., Ramírez, R., y Fernández, J. A. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación MatEMática*, 31(1), 121-143.

Salgado, M., Berciano, A. y Jiménez-Gestal, C. (2019). Tareas de representación espacial en el aula de tres años: detección de dificultades. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (p. 651). Valladolid: SEIEM.

Soto-Andrade, J. (2008). *Mathematics as the art of seeing the invisible*. Comunicación presentada en 11th International Congress in Mathematical Education (ICME), Monterrey, México.

Thurstone, L. L. y Thurstone, T. G. (1976). *P.M.A.: Aptitudes Mentales Primarias*. Madrid: TEA.

ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA PARA LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD USANDO UN RECURSO COMPUTACIONAL

Analysis of a sequence for the notion of probability distribution using one computational resource

Salinas, J.[a], Valdez-Monroy, J. C.[a], Salinas-Hernández, U.[b], Sánchez, E.[c] y Carrillo, J.[d]

[a] CCH, UNAM., [b] IFÉ, ENS de Lyon., [c] CINVESTAV., IPN, [d] Universidad de Huelva

Resumen

En la presente comunicación se exponen los resultados de un episodio de un experimento de enseñanza más amplio cuyo objetivo fue introducir a estudiantes de bachillerato en nociones de probabilidad desde una perspectiva del concepto de distribución aprovechando el recurso de muestreo repetido utilizando el software Fathom. Se ofrecen evidencias de que los estudiantes asumen una perspectiva distribucional cuando estiman una probabilidad a partir de una distribución que ellos generaron con el software.

Palabras clave: *didáctica de la estadística, práctica educativa, TIC, distribución de probabilidad*

Abstract

This manuscript shows the results of one episode of a larger teaching experiment whose objective was to introduce high school students to probability notions from a distribution concept perspective, taking advantage of the repeated sampling resource using the Fathom software. Evidence is provided that students take a distributional perspective when estimating a probability from a distribution they generated with the software.

Keywords: *didactics of statistics, educational practice, TIC, probability distribution*

INTRODUCCIÓN

El concepto de distribución es central en la estadística y la probabilidad toda vez que es una poderosa herramienta matemática para representar, y operar con la variación y la incertidumbre. Se pueden distinguir dos clases, a saber, las distribuciones empíricas y las teóricas. En la práctica estadística se presenta un problema recurrente que consiste en relacionar adecuadamente distribuciones empíricas (datos) y distribuciones teóricas (modelos), pues de esta manera es posible hacer predicciones y generalizaciones. "Las distribuciones teóricas son modelos que generan variación que es similar a la que puede ser observada en distribuciones empíricas" (Biehler, Frischemeier, Reading y Shaughnessy, 2018, p. 155).

En la enseñanza, el tratamiento de ambas clases de distribuciones se suele hacer de manera separada, las distribuciones empíricas se estudian en el tema de estadística descriptiva y las distribuciones teóricas (probabilísticas) en el tema de probabilidad. Además, la secuencia de conceptos que se van estudiando en probabilidad siguen una trayectoria completamente ajena a las distribuciones empíricas: Noción de probabilidad, variables aleatorias, distribuciones de probabilidad. Dicha separación no contribuye a formar una base sólida para la estadística ni tampoco para la probabilidad misma que requiere abrirse a aplicaciones más allá de los juegos de azar. La investigación sobre el concepto de distribución se ha centrado en averiguar cómo razonan los estudiantes con las distribuciones empíricas (Biehler, et al. 2018), pero no hemos encontrado el

Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C., Salinas-Hernández, U., Sánchez, E. y Carrillo, J. (2021). Análisis de una secuencia para la noción de distribución de probabilidad usando un recurso computacional. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 545 – 552). Valencia: SEIEM.

mismo interés de la comunidad de investigadores estadísticos por explorar formas alternativas para desarrollar el razonamiento de distribuciones teóricas.

La disponibilidad de software educativo proporciona la posibilidad de imaginar otra ruta para aproximarse a distribuciones teóricas de probabilidad mediante procesos de simulación que tiene una mayor cercanía a las distribuciones empíricas, de hecho, en la literatura se les suelen llamar del mismo modo. Aunque desde la educación estadística se han propuesto diversas formas para utilizar la simulación para abordar y resolver problemas clásicos de inferencia, por ejemplo, el proceso de las tres "R^s" (Lee, 2011) hacen falta estudios enfocados a producir un sentido estadístico de las distribuciones teóricas de probabilidad. El concepto de distribución teórica de probabilidad se basa en las nociones de modelo de probabilidad y variable aleatoria. Con ayuda de la simulación computacional y un acercamiento frecuencial de la probabilidad es posible acercarse a nociones importantes sobre distribución evitando ciertos formalismos relacionados con el modelo de probabilidad y dejando implícita la noción de variable aleatoria.

En la presente comunicación se exponen los resultados de un episodio de un experimento de enseñanza más amplio cuyo objetivo fue introducir a estudiantes de bachillerato en nociones de probabilidad desde una perspectiva del concepto de distribución aprovechando el recurso de muestreo repetido utilizando el software Fathom.

Conviene aclarar que los datos que aquí se analizan se limitan a la parte concerniente a la aplicación de un problema inserto en una lección, que a su vez forma parte de un estudio realizado con un grupo de profesores basados en la metodología de *estudio de lecciones* (*Lesson Study Group)* (Salinas, Valdez-Monroy y Salinas-Hernández, 2018).

ANTECEDENTES

Jones, Langrall y Mooney (2007) señalan que el concepto de distribución se suele introducir en el currículo de probabilidad y estadística del nivel bachillerato; en general, los programas de estudio enfatizan en la *distribución binomial*. Entre los estudios didácticos de este tema destacamos los siguientes. En los niveles básico y medio básicos se encuentran Abrahamson (2009) y Flores, García y Sánchez (2014). El primero explora un dispositivo físico de mediación semiótica para que los estudiantes (11-12 años) diseñen agrupamientos de objetos que prefiguran una distribución hipergeométrica (casi binomial). Los segundos promueven y observan los avances de los estudiantes (13-14 años) en nociones de probabilidad mediante la simulación de datos binomiales en un ordenador. En el nivel bachillerato ubicamos los trabajos de Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens y Verschaffel (2003), Bill, Watson y Gayton (2009) y García, Medina, y Sánchez (2014). Los primeros informan sobre una tendencia a aplicar propiedades de proporcionalidad en problemas binomiales donde no son pertinentes. Los segundos informan acerca de un estudio donde se examina un problema binomial mediante tres enfoques diferentes: clásico, el triángulo de Pascal y un enfoque frecuencial con el uso de Fathom; este último enfoque resultó provechoso para los estudiantes con menores habilidades matemáticas. Los terceros informan de una actividad en la que se generan datos binomiales y se evalúa la percepción de los estudiantes de variabilidad de los datos simulados. En el nivel universitario Maxara y Biehler (2006) informan de una investigación con futuros profesores de matemáticas quienes habían participado en un curso introductorio sobre estocástica. En sus resultados encuentran que el trabajo con software estadístico permitió que los estudiantes percibieran la variabilidad en situaciones binomiales, los efectos del tamaño de la muestra y aspectos de la ley de los grandes números.

Las distribuciones de probabilidad muestran importantes conexiones entre la probabilidad y la estadística a través de la noción de frecuencias relativas. Por ello, el enfoque frecuencial en la enseñanza es muy útil. Asimismo, se ha dicho que esta aproximación tiene la ventaja de que la tecnología permite aplicar de manera muy sencilla este enfoque. Usando la simulación se puede repetir un experimento un número grande de veces y se observa la convergencia (Maxara &

Biehler, 2006). "Se aborda así la dificultad de la ley de los grandes números, sustituyéndola por una aproximación empírica e intuitiva de la misma" (Gea, Parraguez y Batanero, 2017, p. 268).

La ausencia, o falta de consolidación, de los conocimientos previos relacionados con la distribución normal es una de las principales dificultades que se han detectado en la literatura. Al respecto, Batanero, Tauber y Sánchez (2004) analizaron los resultados de un experimento de enseñanza llevado a cabo con 117 estudiantes universitarios y encontraron que la complejidad de la distribución normal se debe a que su comprensión requiere la integración y la relación de diferentes conceptos e ideas estadísticas que resultan igualmente complejas: probabilidad, curva de densidad, dispersión, asimetría e histograma. En esta misma línea, Carpio, Gaita, Whilhelmi y Sáenz de Cabezón (2009) analizaron la desadaptación de los significados personales de 45 estudiantes universitarios respecto de los significados institucionales del concepto de distribución normal.

MARCO TEÓRICO

En un experimento de enseñanza (Steffe & Thopmson, 2000), de acuerdo con la *Aproximación documental de lo didáctico* (ADD) (Trouche, Gueudet & Pepin 2018), una componente de gran importancia es el diseño de una secuencia de actividades. Ahora bien, en dicho experimento también se pretende la consecución de ciertos aprendizajes. Por otra parte, en su implementación, en relación con el análisis de las secuencias es necesario destacar la componente de la gestión de la participación de los alumnos por parte del profesor (Carrillo, Climent, Gorgorió, Prat y Rojas, 2008). De acuerdo con la ADD, consideramos esta última componente como un recurso. A continuación, se presentan algunos elementos de la ADD, que orientan el análisis de este experimento de enseñanza.

Consideramos la *Aproximación documental de lo didáctico* (ADD) (Trouche et al., 2018), cuya perspectiva es estudiar los recursos diseñados y utilizados por el profesor en su práctica docente. Esto se lleva a cabo enfocándose en el uso y diseño de los recursos y el efecto que –a través de su apropiación y transformación (trabajo documental)– tienen en la reflexión de los profesores acerca de su actividad docente.

En esta teoría se utiliza el término recurso para dar énfasis a la variedad de artefactos producidos en un medio social y cultural por la actividad humana. Los artefactos pueden ser físicos o psicológicos, como las computadoras y el lenguaje. De esta manera, los recursos se conciben no solamente provenientes de objetos materiales, sino de todos aquellos que intervienen en la comprensión y resolución de problemas, como las interacciones entre maestro y alumno (Gueudet & Trouche, 2010). La interacción que lleva a cabo el profesor con los recursos materiales y no materiales, en su práctica docente, es el motor de la génesis –surgimiento o transformación de éstos en otros; llamados "documentos"-, pues permite al profesor transformar esos recursos. El trabajo que lleva a cabo el profesor con los recursos, propicia el "surgimiento o transformación" de éstos en "documentos"; este proceso dialéctico y dinámico es conocido como "génesis documental" (Gueudet & Trouche, 2010).

En la génesis documental, los documentos son creados a partir de un proceso en el cual los profesores construyen esquemas de utilización de los recursos para situaciones dentro de una variedad de contextos, proceso que se ejemplifica por la ecuación: "documento = recursos + esquemas de utilización" (Trouche et al., 2018). Los esquemas comprenden reglas particulares de acción y se estructuran a través de los *usos* y los *invariantes operatorios,* en el transcurso de la actividad. Los *usos* corresponden a la parte observable del *esquem*a, que ocurre durante la acción del profesor. Mientras que los *invariantes operatorios* corresponden a la estructura cognitiva que guía la acción del profesor, éstos son los elementos cognitivos que determinan la activación de los esquemas. Así, los esquemas sólo son observables a través de las acciones que lleva a cabo el sujeto al trabajar con los recursos.

MÉTODO

Este estudio se centra en el uso de secuencias de enseñanza y su estudio. Lo enfocamos desde el uso de recursos (Trouche. et al., 2018), en particular observando el papel de la tecnología computacional y el del profesor en la gestión de las actividades, para identificar el tipo de razonamiento que los alumnos llevan a cabo frente a problemas de distribuciones de probabilidad.

Uno de los autores, profesor-investigador (PI), aplicó una lección previamente diseñada a un grupo de 18 de alumnos de bachillerato de entre 17 y 18 años, quienes se encontraban tomando el curso de estadística y probabilidad II. La lección se apoyó en el concepto de distribución muestral, el cual desconocían los estudiantes, como una forma de introducir el concepto de distribución normal. El principal recurso empleado por el profesor que atendió al grupo fue la lección diseñada usando el software Fathom, con el cual los alumnos estaban familiarizados, y la gestión de la participación de los alumnos a través de la intercomunicación con el grupo. La lección consistió en tres sesiones con una duración de 90 minutos cada una, las cuales fueron videograbadas. En el presente estudio sólo se analiza la secuencia realizada en la primera sesión. El estudio utiliza un enfoque interpretativo porque el objetivo es obtener información de cómo incide el recurso computacional en el razonamiento de los alumnos, teniendo en cuenta cómo se muestra en sus respuestas a los problemas y situaciones planteadas sobre la noción de distribución.

En una fase previa de esta investigación se identificaron algunos invariantes operatorios (IO) del profesor que diseñó y aplicó la lección (Salinas et al., 2018). Estos son los invariantes en los que se apoya la gestión de la participación de los alumnos en esta investigación; se relacionan con tres dimensiones: *responsabilización del aprendizaje*, *comunicación promovida* y *validación del conocimiento* (Carrillo, et al., 2008). Cada una de estas dimensiones tiene diferentes niveles y están relacionadas entre sí. La *responsabilización del aprendizaje* alude a la participación de los estudiantes que requiere una implicación cognitiva al participar en una conversación colectiva. La *comunicación promovida* está relacionada con la apertura de espacios de participación de los alumnos para propiciar sus contribuciones en la construcción de significados compartidos, y *la validación del conocimiento* es la fase que se requiere para consensuar los significados matemáticos, y permitir avanzar en el aprendizaje. (Ibid.).

Los *invariantes operatorios* (IO) corresponden a la estructura cognitiva que guían la acción del profesor; en este caso fueron los siguientes:

IO1. ‘Los estudiantes se involucran mejor con una situación que les es familiar, tanto vivencial como conceptualmente’;

IO2. ‘Entienden y recuerdan mejor un concepto y un procedimiento cuando surgen como una necesidad’;

IO3. ‘La simulación (el aspecto visual y dinámico del software) facilita la comprensión de las ideas estadísticas’;

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

De acuerdo con el invariante operatorio IO1, en la primera sesión se les pidió a los alumnos resolver el siguiente problema:

> María ha acudido a presentar un examen de ingreso a la Universidad. El examen es de opción múltiple y consta de 200 preguntas. Cada pregunta cuenta con tres opciones de respuesta, de las cuales sólo una es correcta. El mínimo de preguntas correctas para aprobar el examen, e ingresar a la Universidad, es 120. María contesta correctamente 75 preguntas y las restantes al azar debido a que no sabe las respuestas. ¿Qué probabilidad tiene María de ingresar a la Universidad? Justifica tu respuesta.

Al implementar la lección el profesor continúa con la génesis documental, es decir, la transformación de los recursos en otros documentos (Salinas et al., 2018), los cuales incorporan algunos *esquemas de utilización de los recursos* que guían la actividad. El esquema pertinente para este problema es el muestreo repetitivo, usando el enfoque frecuencial de la actividad. Inicialmente, los alumnos comentan en parejas la posible solución del problema. El profesor observa lo que van haciendo los alumnos y se percata de que algunos estudiantes intentan calcular la probabilidad utilizando la distribución binomial, de acuerdo con la expectativa del IO2, pues era el tema que recién habían visto en clase, y habían abordado un problema análogo con menos casos (20 preguntas en total, de las cuales 8 ya eran correctas y los 12 restantes fueron respondidas al azar). Como se había previsto en el diseño de la lección, algunos alumnos se dieron cuenta de lo poco factible que era esta vía debido al número de cálculos que involucraba. Desde este primer episodio, el profesor promueve que los estudiantes formulen preguntas y propongan respuestas en un ambiente grupal. En esta situación, respecto a la dimensión de r*esponsabilización*, el profesor propicia un nivel de *corresponsabilización*, para la cual "la participación requiere una implicación cognitiva por parte del alumno en el momento de "depositar" sus argumentaciones en la conversación colectiva" (Carrillo, et al., p. 69):

1. PI: ¿Alguien puede decir cómo calcular la probabilidad que se les está pidiendo?
2. E1: Yo estaba intentando con distribución binomial.
3. PI: ¿Y qué pasó?
4. E1: Apenas lo estoy haciendo.
5. PI: ¿Alguien más trató de utilizar la distribución binomial?
6. E2: Yo con Bernoulli.

   [*El profesor les recuerda a los alumnos que una distribución binomial es suma de variables aleatorias de Bernoulli*].
7. E2: ¡Ah! Entonces sí. Pues sí como en el ejemplo anterior [*el cual involucraba menos casos y se resolvió con la distribución binomial*]
8. PI: ¿Qué pasó?
9. E2: […] Como son más casos, ya son multiplicaciones más grandes.
10. PI: Se puede utilizar la distribución binomial, pero ¿cuál es el inconveniente?
11. E3: Que son muchos casos.

Debido a la experiencia que tenían los alumnos con el software, como se supuso (IO2), algunos consideraron directamente utilizarlo. De manera corresponsable, y con ayuda del profesor, todo el grupo buscó resolver el problema usando este recurso. El profesor jugó un papel central en la actividad, tanto para manipular con destreza el software, como para orientar la reflexión de los alumnos en los aspectos importantes de la simulación.

Enseguida, el profesor llevó a cabo la simulación (Figura 1) a partir de la cual, se fue construyendo una respuesta aproximada, de acuerdo con el IO3. En este proceso se avanza paralelamente en la *validación*, cuya función es realizar un proceso de negociación de los significados adecuados. Asimismo, se hace presente un proceso reflexivo que va desde la implicación cognitiva individual a la del grupo en su conjunto participando activamente en el aprendizaje.

En la Figura 1, la caja de la izquierda representa los posibles resultados de cada pregunta; la siguiente un posible resultado de responder 125 preguntas al azar; la tercera caja corresponde al número de aciertos obtenidos en cada una de 1000 muestras de tamaño 125; el histograma representa la distribución muestral de los aciertos obtenidos en las 1000 muestras; y el área sombreada en el lado derecho del histograma corresponde al número de aciertos con el que se

aprueba el examen. Así, los alumnos observaron que la distribución binomial tiende a aproximarse a una distribución en forma de campana conforme aumenta el número de repeticiones.

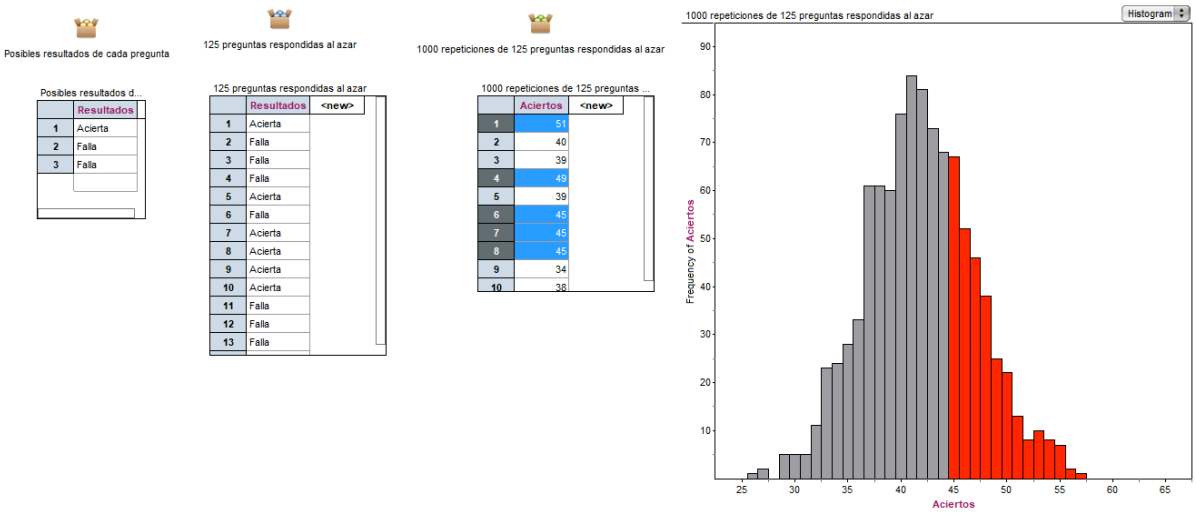


Figura 1. Simulación del problema.

A pesar de que en la simulación subyace el concepto de distribución muestral, tema que los estudiantes aún no abordaban en clase, la mayoría pudo interpretar la simulación de manera correcta y concluir que la probabilidad de aprobar el examen era menor que la de no aprobar. Esta situación muestra que la simulación ayudó a los alumnos a cambiar su razonamiento del cálculo de la probabilidad de ciertos sucesos, a una situación inversa, es decir, a la vista de los resultados observados poder inferir las probabilidades asociadas. Este hecho muestra que la simulación es un auxiliar importante para desarrollar la intuición que apoya el concepto formal de la distribución normal.

12. PI: Viendo esa simulación […] ¿Creen que María apruebe el examen?

    [Un gran número de alumnos responde que no]

13. PI: ¿Por qué?

14. E4: Porque sólo entre el 30 y el 33% aprueban.

15. PI: ¿Cómo sabes que es entre el 30 y 33%?

16. E4: Porque seleccioné los que tuvieron 45 aciertos hacia adelante [Figura 1] y me sale que fueron 300 [aproximadamente].

Así, la simulación les permite a los alumnos concluir que la probabilidad de aprobar el examen es poca. Esta situación no es espontánea ni evidente, hay alumnos que tienen dificultad para reconocer que la proporción de casos en la que se obtienen 45 aciertos, o más, es la probabilidad aproximada de que María apruebe el examen.

17. PI: ¿Qué indica eso? ¿Qué es eso?

    [*Algunos alumnos señalan que es la probabilidad, pero no es claro a qué se refieren*]

18. PI: ¿La probabilidad de qué?

19. E4: De que 1,000 alumnos en la misma situación que María ingresen a la universidad.

20. PI: No.

21. E2: La probabilidad que tiene María [*de aprobar el examen*]

    [*Asiente el profesor, pero aclara que es una probabilidad aproximada*].

CONCLUSIONES

El diseño de este experimento de enseñanza, mediante el uso de la computadora, generó un contexto de aprendizaje que permitió a los alumnos reflexionar sobre la simulación de un problema, con la distribución binomial. Centramos nuestro análisis en el episodio con el que dio inicio el experimento. Como se conjeturó en este diseño, el problema inicial fue un buen detonador para la participación corresponsable de los alumnos en la búsqueda de su solución. Así, la implicación cognitiva de los alumnos favoreció la negociación de los significados implicados en esta tarea.

Enfocar el análisis en el uso de recursos, permitió observar la importancia central de la gestión de la actividad por parte del profesor, de esta manera se amplió el análisis sobre el pensamiento del profesor-investigador en cuanto a los *invariantes operatorios*, identificados en una investigación previa (Salinas, et al., 2018), y que corresponden a la estructura cognitiva que permitió la gestión de la actividad realizada en esta investigación. En un subsecuente rediseño de este experimento de enseñanza es importante retomar esta experiencia. Es una conjetura plausible que tal rediseño dará origen a un documento (Trouche et al., 2018), el cual sucesivamente permitirá entender mejor el proceso de comprensión de los alumnos de la noción de distribución de probabilidad.

Hallamos evidencias a favor de la conjetura central del diseño, de que el ordenador puede apoyar la comprensión de conceptos estadísticos, en este caso, desarrollar la percepción de los alumnos de la simulación para tener un acercamiento a la noción de la distribución para resolver el problema planteado. De esta manera, observamos que la simulación con el ordenador ayudó a los alumnos a cambiar su razonamiento del cálculo de la probabilidad de ciertos sucesos, como en una distribución discreta, a una situación inversa, en la que, a la vista de los resultados observados en la simulación, pudieron inferir las probabilidades asociadas. De esta manera, se superó la tendencia de los alumnos a percibir un conjunto de datos como una colección de datos individuales (Hancock, Kaput y Goldsmith, 1992), se reenfocó hacia ver el conjunto de datos como un todo. Este es un paso significativo, puesto que de acuerdo con Bakker, Doorman y Drijvers (2003) los estudiantes deben ver un conjunto de datos como un agregado, como una condición para desarrollar la noción de distribución, íntimamente ligada a la idea de forma, y poder interpretar estas formas como símbolos con significado en términos de frecuencias o densidad. Los estudiantes necesitan entender esta situación antes de poder desarrollar el significado matemático de la distribución.

Este diseño está sujeto a sucesivos ajustes y adaptación de las actividades para su repetición y profundizar en el entendimiento de la manera en que el uso de recursos como la computadora pueden ayudar a la comprensión de la noción de distribución de probabilidad.

Referencias

Abrahamson, D. (2009). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction, 27*(3), 175-224.

Bakker, A., Doorman, M., y Drijvers, P. (2003). Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education. *Paper presented at the Onderwijs Research Dagen (ORD)*. Netherlands: Kerkrade.

Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C., y Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning about data. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 139-192). New York: Springer.

Bansilal, S. (2014). Using an APOS framework to understand teachers' responses to questions on the normal distribution. *Statistics Education Research Journal, 13*(2), 42-57.

Batanero, C., Tauber, L., y Sánchez, V. (2004). Students' reasoning about the Normal distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 257–276). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bill, A., Watson, J., y Gayton, P. (2009). Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem in three different ways. *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1* (pp. 57-64). Tasmania: MERGA

Carpio, M., Gaita, C., Wilhelmi, M., y Sáenz de Cabezón, A. (2009). Significados de la distribución normal en la universidad. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), Trabajo presentado en los grupos de trabajo del *XIII Simposio de la SEIEM.* Santander: SEIEM. Disponible en: http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/depc/Carpio_Gaita_Wilhelmi_Saenz_R.pdf.

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Prat, M. y Rojas, F. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias,* 2008, 26(1), 67-76.

Flores, B., García, J. y Sánchez, E. (2014). Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología. *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Salamanca, España.

García, J., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática,* **6**, 5-23.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2010). Des ressources aux documens, travail du professeur et genèses documentaires. En G. Gueudet y L. Trouche (Eds.), *Ressources vives; le travail documentaire des professeurs en mathematiques*, (pp. 57-74). Rennes, France: PUR et INR.

Gea, M., Parraguez, R., y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.

Hancock, C., Kaput, J. J., y Goldsmith, L. T. (1992). Authentic Enquiry with Data: Critical Barriers to Classroom Implementation. *Educational Psychologist*, *27*(3), 337-364.

Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909–955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Lee, H. S. (2018). Probability concepts needed for teaching a repeated sampling approach to inference. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 89-101), [ICME-13 Monographs]. New York: Springer.

Maxara, C., y Biehler, R. (2006). Students' Probabilistic Simulation and Modeling Competence after a Computer-Intensive Elementary Course in Statistics and Probability. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS 7*. Salvador de Bahía, Brasil.

Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C. y Salinas-Hernández, U. (2018). Un acercamiento a la metodología Lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Agular González, O. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 525-534). Gijón: SEIEM.

Steffe, L., y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Trouche L., Gueudet G., y Pepin B. (2018) Documentational Approach to Didactics. En Lerman S. (Eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 113-138.

UN ESTUDIO DE CASO DE CÓMO ENTIENDE LA CREATIVIDAD Y SU DESARROLLO EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS UN FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS[1]

A case study of how a pre-service teacher of mathematics understands creativity and its development in mathematics classroom

Sánchez, A.[a], Font, V.[a], Diamantidis, D.[b] y Breda, A.[a]

[a]Universitat de Barcelona, [b]National and Kapodistrian University of Athens

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar cómo entiende la creatividad y su desarrollo en las aulas de matemáticas un futuro profesor, que cursaba un máster de formación de profesores de secundaria y no ha recibido una capacitación específica en el desarrollo de la creatividad. Es un estudio de caso al que se entrevistó, tras haber contestado un cuestionario sobre creatividad y haber presentado su portafolio del Prácticum y su Trabajo de Fin de Máster. Se realizó un análisis de contenido a la transcripción de la entrevista. El futuro profesor define la creatividad como la capacidad de generar ideas específicas nuevas sobre un tema concreto. Considera que un alumno creativo puede transferir lo aprendido en un contexto a otro diferente y no es necesario que cree algo nuevo, solo que sea nuevo para él. Además, explica tareas para promover la creatividad de los alumnos que permiten inferir que, para él, la creatividad deriva indirectamente del trabajo sobre otros aspectos.

Palabras clave: *creatividad matemática, futuro profesor, desarrollo de la creatividad matemática*

Abstract

The aim of this work is to study how a pre-service teacher who participated in a master's program in teaching in secondary school, without receiving a specific training in the development of creativity, understands creativity and its development in mathematics classroom. In this case study, he was interviewed after answering a questionnaire about creativity and presenting his Practicum portfolio and his Master's Final Project. We did a content analysis of the transcript of the interview. The pre-service teacher defines creativity as the capacity to generate new specific ideas about a certain subject. He considers that a creative student can transfer what he has learnt in a context to a different one and it is not necessary that he creates something new, but only something new for him. In addition, he explains some activities that could enhance students' creativity, which allows to infer that, for him, creativity indirectly derives from the work on other aspects.

Keywords: *mathematical creativity, pre-service teacher, development of mathematical creativity*

INTRODUCCIÓN

Desde hace unos años, ha aumentado el interés por desarrollar la creatividad matemática de los alumnos y, en particular, sobre cómo los profesores piensan que pueden promoverla en sus alumnos (Lev-Zamir y Leikin, 2011). En este sentido, encontramos investigaciones sobre las concepciones que tienen los profesores de la creatividad y cómo desarrollarla en sus alumnos, tanto con docentes en servicio (Lev-Zamir y Leikin, 2013; Seckel, Breda, Sánchez y Font, 2019) como con futuros profesores (Bolden, Harries y Newton, 2010; Yazgan-Sağ y Emre-Akdoğan, 2016). El contexto de nuestra investigación es un máster de formación de profesorado de secundaria, en la especialidad de

[1] Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y con el apoyo de la Secretaria d'Universitats i Recerca de la Generalitat de Catalunya y del Fons Social Europeu.

Sánchez, A., Font, V., Diamantidis, D. y Breda, A. (2021). Un estudio de caso de cómo entiende la creatividad y su desarrollo en la clase de matemáticas un futuro profesor de matemáticas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 553 – 561). Valencia: SEIEM.

matemáticas, que no ofrece a los participantes una formación específica para desarrollar la creatividad matemática de sus futuros alumnos. En este trabajo, presentamos un estudio de caso de un futuro profesor (FP), alumno de este máster, cuyo objetivo es determinar cómo entiende la creatividad y su desarrollo en el aula, y, en particular, qué criterios orientarían su práctica docente si se propone el desarrollo de la creatividad en sus alumnos.

REFERENTES TEÓRICOS

La creatividad en el contexto escolar

Kaufman y Beghetto (2009) distinguen varios niveles de creatividad: Big-C, Pro-c, mini-c y little-c. En concreto, la creatividad mini-c permite relacionar ideas y descubrir resultados nuevos para uno mismo, por lo que estaría asociada a los procesos de aprendizaje.

Los componentes de fluidez (cantidad de soluciones para un problema), flexibilidad (variedad en los tipos de soluciones), originalidad o novedad de las ideas y elaboración (grado de desarrollo de las ideas) se utilizan frecuentemente para caracterizar la creatividad. Lev-Zamir y Leikin (2013) consideran la flexibilidad, la originalidad y la elaboración en su modelo de concepciones de los profesores sobre la creatividad en la enseñanza de las matemáticas. Diferencian dos tipos de concepciones: cuando los profesores se refieren a estos componentes en sus propias acciones (el que es creativo es el docente); y cuando se refieren a acciones de los alumnos al realizar tareas que fomentan su creatividad. Dentro de las concepciones relacionadas con el profesor, distinguen entre flexibilidad matemática y pedagógica, y entre originalidad matemática y pedagógica.

El modelo CCDM y la idoneidad didáctica

El modelo de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas (CCDM) articula conocimientos y competencias consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). En este modelo, las dos competencias clave del profesor son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Esta última consiste en diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora (Breda, Pino-Fan y Font, 2017). Esta competencia general está formada por diferentes subcompetencias: 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centramos en la última subcompetencia. La noción de idoneidad didáctica se descompone en los siguientes criterios: idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados respecto de un significado de referencia; idoneidad ecológica, es el grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, a la sociedad y a los condicionamientos del entorno donde se desarrolla; idoneidad cognitiva, es el grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados; idoneidad afectiva, se refiere a la implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio; idoneidad interaccional, es el grado en que la gestión de la interacción en la clase permite, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se pueden detectar a priori), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción; e idoneidad mediacional, corresponde al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Un sistema de componentes e indicadores (Breda et al., 2017) permite valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.

METODOLOGÍA

A continuación, presentamos el contexto institucional del estudio de caso y los instrumentos de recogida de datos, con los que hicimos una triangulación de fuentes: cuestionario escrito, portafolio del Prácticum, Trabajo de Fin de Máster (TFM) y entrevista semiestructurada. La metodología consistió en un análisis de contenido de estos documentos escritos (la entrevista se transcribió).

Contexto institucional y del estudio de caso

El estudio de caso que se presenta forma parte de una investigación más amplia en la que participan futuros profesores de un máster de formación de profesorado de secundaria (especialidad de matemáticas) del curso 2017-2018. Dicho máster pretende desarrollar la competencia de análisis e intervención didáctica de los profesores y, en particular, realiza un proceso de instrucción para el uso de la herramienta idoneidad didáctica en la reflexión sobre la práctica. Tiene una duración de 1 año y 60 créditos ECTS divididos en tres bloques: a) el bloque general (12 ECTS) incluye las asignaturas de psicología, sociología y pedagogía; b) el bloque específico (28 ECTS) contempla una asignatura de complementos de la disciplina (matemáticas) y dos de su didáctica; y c) el bloque de Prácticum y TFM (20 ECTS) se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica. En el Prácticum los futuros profesores implementan la unidad didáctica que han planificado. Al final del curso, los futuros profesores entregan el TFM, un trabajo individual en el que reflexionan sobre su práctica como profesores y proponen mejoras de la unidad didáctica que implementaron.

El FP del estudio de caso era un alumno de este máster, al cual ingresó con un Grado en estadística. Antes de iniciar el máster trabajaba como técnico de proyectos de investigación I+D, realizando estudios estadísticos para su equipo de investigación. El FP manifestó su consentimiento a formar parte de esta investigación.

Instrumentos de recolección de datos

El cuestionario sobre creatividad se implementó en los tres grupos de un máster de formación de profesorado de secundaria (especialidad de matemáticas) del curso 2017-2018, con los alumnos asistentes ese día que voluntariamente quisieron contestarlo, en total 43. El cuestionario consta de 26 preguntas cerradas tipo Likert donde indicar el grado de acuerdo o desacuerdo (de 1 a 5) y 5 preguntas abiertas. Cuando contestaron el cuestionario, los futuros profesores ya habían completado el período de prácticas, por lo que tenían la experiencia como docentes de implementar una unidad didáctica con un grupo de alumnos de secundaria. El análisis de las respuestas a este cuestionario se halla en Sánchez, Font y Breda (2019). En particular, se tuvieron en cuenta las respuestas del FP en el cuestionario para preparar la entrevista que se le hizo. Si bien el cuestionario era anónimo, en su caso no lo fue porque ya se había acordado con él su participación en esta investigación.

El segundo y el tercer instrumento han sido el portafolio del Prácticum y el TFM[2], respectivamente. El FP de este estudio de caso explica en su portafolio la planificación e implementación de una unidad didáctica sobre funciones en el segundo curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO). En su TFM, realiza el análisis y valoración de la idoneidad de la unidad implementada, organizando su valoración mediante los criterios de idoneidad didáctica, y formula una propuesta de mejora justificada de dicha unidad didáctica. Ambos documentos se utilizaron para preparar la entrevista.

La entrevista personal, con una duración aproximada de una hora, se grabó en audio al acabar el máster, tras haber presentado el TFM. En el caso de este FP, los dos últimos meses del curso estuvo trabajando en un instituto, sustituyendo a otro profesor. Durante la sustitución, trabajó con alumnos de 3º de ESO y enseñó contenidos de geometría y estadística. En la entrevista, habla tanto de la

[2] Los trabajos finales de máster son documentos públicos, pero no se encuentran registrados en un repositorio digital. En caso de querer consultar el TFM, puede solicitarlo a los autores de la comunicación a través de correo electrónico (asanchezb@ub.edu; o vfont@ub.edu).

experiencia en las prácticas del máster como de la experiencia posterior en este instituto. La entrevista semiestructurada constaba de dos bloques de preguntas. En el primer bloque, se preguntaba por su definición de creatividad y, en particular, cómo la entiende en el contexto de los procesos de enseñanza y aprendizaje a nivel de educación secundaria obligatoria y bachillerato. También, se pedía que identificase qué características debe tener un trabajo de alumnos de secundaria para considerarlo creativo y se proponían los componentes de flexibilidad, fluidez, originalidad y elaboración, para que los valorase en este contexto particular. El segundo bloque de preguntas estaba relacionado, sobre todo, con el TFM del entrevistado. Tras la lectura de su TFM (donde como anexo se presenta la unidad didáctica planificada, implementada y rediseñada), se identificaron algunas referencias a la creatividad, utilizando palabras clave (crea*, intui*, imagin*, geni*, ingen*, inven*, origin*) en base a estudios previos (Sánchez y Font, 2020). Durante la entrevista, se le pedía que comentase los extractos del TFM seleccionados y que indicase si consideraba que había otras actividades de la unidad didáctica o de la propuesta de mejora u otros aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje que podían ayudar a fomentar la creatividad de los alumnos. Al inicio de la entrevista, se le indicó que, siempre que quisiera, podía intervenir para añadir cualquier idea que hubiera quedado pendiente relacionada con la creatividad.

Análisis de contenido

Los datos se han registrado en forma de documento textual, dado que se usan como fuente primaria documentos escritos por el FP y la transcripción de su entrevista. Se hace el análisis de contenido de dichos documentos, que básicamente es una técnica de inferencia e interpretación de textos (Bardin, 2011). Se considera que los textos albergan un contenido que leído e interpretado adecuadamente nos permite inferir los criterios que los profesores consideran valiosos para diseñar, implementar y rediseñar sus clases (en este caso, específicamente para desarrollar la creatividad matemática de los alumnos). Tanto los datos expresos (lo que el autor dice) como los latentes (lo que indirectamente dice) cobran sentido y pueden ser captados dentro de un contexto. Texto y contexto son dos aspectos fundamentales en el análisis de contenido. En nuestro caso el contexto es un determinado dispositivo formativo: el máster de formación del profesorado de secundaria de matemáticas. La lectura y la organización de los datos se desarrollan a partir de unas categorías deductivas: a) del modelo de concepciones de Lev-Zamir y Leikin (2013) –cuando se analiza la definición de creatividad del FP- y b) de los indicadores y componentes de los criterios de idoneidad didáctica (Breda et al., 2017) –cuando se analizan las estrategias indicadas por el FP para el desarrollo de la creatividad. También se consideró la emergencia de categorías no contempladas previamente.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Por cuestiones de espacio, en esta sección nos centramos en las partes de la entrevista directamente relacionadas con el objetivo propuesto y puntualmente nos referimos a los otros tres documentos.

Definición de creatividad y caracterización del trabajo creativo de los alumnos

El FP define la creatividad, en general, como "la capacidad de generar ideas específicas nuevas sobre un tema concreto". Por tanto, se identifica el componente de originalidad. También en el cuestionario había indicado que en un proceso creativo aparecen contribuciones originales o novedosas. En cambio, no parece dar tanta importancia a otros componentes como la fluidez, la flexibilidad y la elaboración.

Al preguntarle por la creatividad en matemáticas, se sitúa en el contexto educativo y caracteriza al profesor y al alumno. Para él, un profesor creativo tiene "la capacidad de generar actividades o de encontrar recursos que [le] puedan ser útiles, por ejemplo, para poder llevar a clase." Y considera que un alumno creativo se caracteriza por "ser capaz de imaginar escenarios a partir de la explicación [que le da el profesor] donde ponga en práctica aquellos conceptos" y "hacer inferencia

[de lo que le están explicando] sobre otro contexto u otro planteamiento incluso". Además, describe el trabajo creativo de los alumnos de secundaria de la siguiente manera:

> FP: Que no sea exactamente una réplica de eso mismo que le estás explicando. O sea, que sea capaz de hacerle alguna modificación. Pero tampoco tiene porqué ser muy original, sino es algo que él no ha visto en ese momento. Porque a lo mejor está viendo algo que mucha gente ha visto, pero él no lo había visto nunca, sería creativo igualmente.

En la descripción que hace el FP de un profesor creativo, se identifica el componente de originalidad pedagógica de las concepciones relacionadas con el profesor del modelo de Lev-Zamir y Leikin (2013), porque indica que el profesor puede generar actividades que sean útiles en clase. El FP describe a un profesor creativo, a pesar de que en la entrevista no le pedimos que lo haga. Esto nos hace pensar que, para él, la propia creatividad del profesor afecta al desarrollo de la creatividad de los estudiantes. Yazgan-Sağ y Emre-Akdoğan (2016) obtienen resultados similares al entrevistar a futuros profesores de matemáticas y lo comparan con la opinión de uno de los formadores de estos futuros profesores, que opina que no es necesario ser matemáticamente creativo para enseñar matemáticas. En la descripción de alumno creativo del FP, se incluye el componente de elaboración de las concepciones relacionadas con el estudiante (Lev-Zamir y Leikin, 2013), porque se refiere a la capacidad de hacer inferencia, de aplicar lo que se ha explicado en clase a otro contexto, ir más allá de lo que se ha presentado. Al caracterizar el trabajo creativo de un alumno de secundaria, destaca la originalidad, pero enfatiza que es una originalidad relativa al alumno, es decir, algo que resulta novedoso para él y no necesariamente para otras personas. Esta visión de la creatividad correspondería a la mini-c, en el modelo de Kaufman y Beghetto (2009). Valora que un alumno proponga ideas o soluciones diferentes a un problema (flexibilidad), pero no la cantidad de soluciones propuestas (fluidez). En cuanto a la elaboración, considera que no es tan importante que un alumno sepa explicar su idea en detalle, como que haya conseguido llegar a esa idea.

Estrategias para desarrollar la creatividad

Al preguntar al FP por tareas de la unidad que implementó durante las prácticas, o del rediseño, que ayuden a desarrollar la creatividad de los alumnos, explica dos. La primera que explica también la habían identificado los investigadores antes de la entrevista en el análisis del TFM.

> FP: En la planificada, no, porque estaba demasiado encorsetado todo. En el rediseño, sí. Hay un intento justamente de potenciar esto, a partir de la actividad de materiales que ponía al final, ponerla al principio, para ver si son capaces ellos de llegar a generar los conceptos sin darlos.
>
> I: ¿Puedes explicar un poco la actividad?
>
> FP: A partir de envases, hacerles llenarlos. Claro, en principio eran envases rectos, de manera que es una función de proporcionalidad. Si los subes un poco, es la función afín. Y a partir de aquí, pues, la siguiente sesión, con una aplicación que hay en internet, darles diversos tipos de envases y ver si eran capaces de generar la función. A lo mejor eso sí que potenciaba la creatividad. En la unidad inicial, no. Estaba todo demasiado encorsetado. A lo mejor justamente por eso, ¿no? Por la inseguridad se trata una cosa en concreto en cada actividad.

Justifica así que la actividad podría promover la creatividad de los alumnos:

> FP: Claro, porque tendrían que ser capaces de entender, de hacer la relación de según el tipo de envase, cómo aumentará o no la función resultante, etcétera... Entonces, sí que da pie a ser más creativo, ¿no? Porque tienen que buscar diversas formas, sin que yo se lo dijese, porque este es el objetivo. El primer día lo haces tú, te hago la tabla, todo, estás una sesión entera haciendo la tabla, haciendo la actividad, no sé qué; pero el segundo día, es dárselo y decirles: Vale, tenéis esta serie de funciones, ¿qué envase lo habrá generado? Con estos envases, ¿qué función generarán? Entonces, ellos ya tendrían que pensar: Hago la tabla, no la hago, cómo se hará o... Esto es como el otro, más grueso, más pequeño, más pendiente, menos... Sin haberles introducido el concepto de pendiente. Entonces, aquí sí que daría más pie.

En esta primera actividad aparecen varias referencias implícitas a los criterios de idoneidad didáctica. Se trata de una actividad en la que los alumnos tienen que descubrir la función que representa el llenado de unos envases a partir de la experimentación. Por lo tanto, generan un modelo de función para cada envase. También destaca que los alumnos tienen que relacionar conceptos, hacer conexiones. Esto se relaciona con la riqueza de procesos, un componente del criterio de idoneidad epistémica. La actividad matemática que realizan los alumnos se apoya en el uso de material manipulativo (envases) y recursos virtuales (aplicación), un componente de la idoneidad mediacional. Más adelante, se le pregunta si considera que utilizar material manipulativo o software puede ayudar o no a fomentar la creatividad. Dice que puede ayudar porque "alumnos que por otro lado no los ves involucrados, con una actividad así, sí." Y explica un ejemplo de su experiencia posterior a las prácticas:

> FP: Bien, me pasó cuando llegué ahora al instituto, con geometría, les costaba mucho el volumen. Me di cuenta y cogí, imprimí unas cuantas plantillas de cómo hacer los volúmenes y se las di. Que habría podido hacer que lo hicieran ellos, sí, pero habríamos perdido más de una clase y tampoco teníamos mucho tiempo. Y se las di y alumnos a los que les costaba montar, y cuando tenían el volumen en la mano, te hacían el volumen y el área perfectamente. ¡Ostras! ¿Cómo es que con la fórmula que se supone que sabes aplicar, que te han explicado, etcétera, no, y teniendo esto, sí? Pues, porque llega a través de otro conducto que no es el ordinario de aplicar una fórmula... Que el que es académico, perfecto, pues llega pronto, pero aquel que en aquella clase no estaba atento y no sabe lo que es la n de la fórmula del polígono regular, pues, se pierde. Entonces, sí, sí que lo potencia.

De alguna manera, según el futuro profesor, este tipo de recursos favorecen que los alumnos estén más motivados para realizar la actividad, especialmente aquellos que tienen más dificultades para entender algunos contenidos, esto les permite entender mejor lo que están haciendo y alcanzar conocimientos que de otra manera les cuestan más, lo cual considera que es un proceso creativo. En Bolden et al. (2010), los futuros profesores también identifican el uso de recursos como un factor que promueve la creatividad de los alumnos, pero lo asocian únicamente al potencial de los recursos para motivar al alumnado. No muestran una reflexión sobre cómo estos recursos pueden hacer más accesibles los conceptos matemáticos a través de diferentes representaciones.

Por otra parte, volviendo a la primera actividad, también da importancia a la autonomía del alumno, ya que a partir de la segunda sesión son ellos los que tienen que buscar la manera de organizarse para llegar a una solución. Cuando se le pregunta por este aspecto, lo confirma:

> FP: Sí, es que la autonomía y la creatividad probablemente estén muy relacionadas. Una de las cosas que yo dije en el rediseño es que me faltaban muchas actividades de alto contenido cognitivo, de alta demanda cognitiva y de autonomía, que considero que los dos conceptos están muy relacionados. O sea, cuanta más demanda cognitiva, más autonomía, ¿no? Porque más tendrá que aportar el alumno para poder llegar, ¿no?

En Bolden et al. (2010), los futuros profesores también consideran que plantear actividades de exploración y experimentación autónoma por parte de los alumnos puede promover su creatividad. La autonomía es un componente de la idoneidad interaccional. En cambio, el FP no parece valorar tanto la interacción entre alumnos para fomentar su creatividad, otro componente de la idoneidad interaccional que se identifica en estudios previos (Sánchez y Font, 2020; Yazgan-Sağ y Emre-Akdoğan, 2016). Cuando se le pregunta por las actividades en grupo, explica

> FP: Yo creo que el hacer actividades en grupo lo que hace es potenciar las capacidades de cada uno y ellos son muy inteligentes y saben en qué es bueno cada uno. Mira, si tú les das una actividad de un tipo o de otro, tirarán más de este o más del otro y lo que sí que potencia mucho es la comunicación. Es el hecho de tener que expresar.

En el cuestionario, sin embargo, indicó que la interacción con otras personas era un elemento importante en los procesos creativos en general, no específicamente en el contexto escolar. En las

clases, sí que destacaba el hecho de "dejar intervenir a los alumnos y que se valoren positivamente sus intervenciones" como estrategia para promover la creatividad.

Al justificar que el trabajo de los alumnos es creativo, hace referencia a la flexibilidad y fluidez: "buscar diversas formas" de resolver la tarea. También, comenta que las actividades de alta demanda cognitiva podrían promover la creatividad, el hecho de "dar el paso más allá", como él dice, podría relacionarse con el componente de elaboración. La segunda actividad que explica pretende precisamente hacer pensar a los alumnos.

FP: Estaba pensando que, a lo mejor, por ejemplo, tenía una actividad que era de temperaturas alrededor del mundo. Bueno, no era muy creativa, pero sí que tendrían que haber pensado un poco para poder relacionar... Según cómo era el gráfico de temperaturas, en qué lado del mundo... Que evidentemente no son funciones, es una función, pero más que tratar funciones, aquí de lo que se trataba es de que razonen, ¿no? Que para mí es el principal objetivo, es conseguir que eso que tienen dentro de la cabeza funcione un poco. Que me estoy encontrando con que no lo hacen. Y mira que llevo poco, pero el principal problema es que son perezosos a la hora de pensar. No... Si, si no consideras lo de ser perezosos, el mundo es suyo, pueden llegar a donde quieran. El problema es que les da pereza pensar. Entonces, aprenderán más o menos matemáticas, sí, pero dejarán de ser perezosos. Y cuando dejen de serlo, aprenderán lo que quieran. Entonces, esta actividad era un poco para eso.

En esta actividad se identifican también conexiones interdisciplinares, un componente de la idoneidad ecológica. En el cuestionario, también explicaba que, para promover la creatividad de los alumnos, se podían realizar actividades abiertas, con más de un método de resolución posible, y que tengan conexiones con otras áreas (Seckel et al., 2019). Y propuso la siguiente actividad:

> Poner nombre a un gráfico. Es decir, dado un gráfico con una función determinada buscar una situación que pueda ser explicada por aquel gráfico. Es creativa porque hace que el alumno tenga que entender lo que implica el gráfico y hacerlo corresponder con una situación de la vida real que el alumno haya imaginado.

En otro momento de la entrevista, se le pregunta por la evaluación, otro componente que se había identificado en estudios previos (Sánchez y Font, 2020) que aparecía a veces relacionado con la creatividad en los comentarios de los TFM de futuros profesores. Para el FP, la evaluación no permite promover la creatividad de los alumnos (Bolden et al., 2010).

FP: No, no la fomenta. Es decir, no veo que la fomente. ¿Puede tenerla en cuenta? Sí, pero no la fomenta. (…)

I: O sea, el hecho de ponerlo como criterio no fomentaría que sean más creativos.

FP: No. No, porque entonces lo que harías sería intentarlo forzar y la creatividad debe ser algo que salga de manera espontánea. Creo. E intentarlo hacer... Puedes intentar fomentar el espíritu crítico, etcétera, y eso, al fin y al cabo, te acabará haciendo ser más creativo, pero tú no le puedes decir a un alumno: Tienes que ser creativo. Porque entonces lo que harás será que intente pensar todo el día en pajaritos. Y no llegará, porque intentará siempre buscar cosas raras. Es decir, me parece que es algo que... Es decir, puedes conseguir trabajar a partir de muchos recursos y actividades diferentes, pero no le puedes decir que estás trabajando eso específicamente porque si no, lo sobreforzarás. Y la evaluación no lo potenciará.

CONCLUSIONES

Aunque el máster no ofrezca una formación específica sobre cómo desarrollar la creatividad de los alumnos en las clases de matemáticas, observamos que el FP considera que es posible promover la creatividad y plantea algunas estrategias para ello. Piensa que un alumno es creativo cuando puede transferir lo aprendido en un contexto a otro diferente y no considera necesario que el alumno cree algo nuevo, sino que recree algo que sea nuevo para él. Además, para el FP, el desarrollo de la creatividad no estaría restringido a los alumnos que suelen obtener mejores resultados en la materia.

Explica que alumnos que de otra manera tendrían dificultades para seguir las clases, al introducir ciertos recursos, pueden desarrollar su creatividad y completar las actividades. De alguna manera, la creatividad derivaría indirectamente del trabajo sobre otros aspectos que se realiza en las clases. Además del uso de tecnología y material manipulativo, destaca realizar actividades donde los estudiantes puedan desarrollar procesos matemáticos relevantes (modelización, cambios de representación, conexiones, etc.) y donde tengan autonomía (Bolden et al., 2010; Seckel et al., 2019). Un resultado que contrasta con otras investigaciones (Yazgan-Sağ y Emre-Akdoğan, 2016) es que el FP no considera que el trabajo en grupo de los alumnos fomente su creatividad. El FP considera que promueve la comunicación, pero, según explica, no se consigue una auténtica interacción de los alumnos para trabajar con un objetivo común porque señala que, dependiendo de la tarea, los propios alumnos exigirán más a un miembro del grupo u otro, en función de sus habilidades. Esto podría explicar que no relacione la creatividad con el trabajo en grupo: el hecho de agrupar a los alumnos no estimularía especialmente su creatividad si la interacción entre ellos es escasa. Otro aspecto interesante es la evaluación. El FP no considera que pueda favorecer el desarrollo de la creatividad de los alumnos (Bolden et al., 2010). Sin embargo, algunas investigaciones (Amabile y Pillemer, 2012) señalan que un método de evaluación cualitativa centrada en el alumno sí que podría ayudar en el desarrollo de su creatividad. Conocer la visión de la creatividad y su desarrollo en las aulas que tienen los futuros profesores nos permite identificar elementos de su práctica como docentes con los que se sienten aun inseguros y convendría reforzar.

Referencias

Amabile, T. M., y Pillemer, J. (2012). Perspectives on the social psychology of creativity. *The Journal of Creative Behavior, 46*(1), 3–15.

Bardin, L. (2011). Análise de conteúdo. São Paulo: Edições 70.

Bolden, D.S., Harries, A.V., y Newton, D.P. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational studies in mathematics, 73*(2), 143-157.

Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893–1918.

Godino, J.D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Kaufman, J.C., y Beghetto, R.A. (2009). Beyond Big and Little: The Four C Model of Creativity. *Review of General Psychology, 13*(1), 1-12.

Lev-Zamir, H, y Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education, 13*(1), 17-32.

Lev-Zamir, H., y Leikin, R. (2013). Saying versus doing: teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education, 45*, 295-308.

Sánchez, A., y Font, V. (2020). Las justificaciones dadas por futuros profesores de secundaria para la promoción de la creatividad matemática en sus proyectos de fin de máster. En N. Ruiz-Herrera, A. Guillén-Riquelme y M. Guillot-Valdés (Coord.). *Avances en Ciencias de la Educación y del Desarrollo, 2019* (pp. 440-445). Granada: Asociación Española de Psicología Conductual (AEPC).

Sánchez, A., Font, V., y Breda, A. (2019). Análisis de las respuestas de futuros profesores a un cuestionario sobre el desarrollo de la creatividad en el aula de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 543-552). Valladolid: SEIEM.

Seckel, M. J., Breda, A., Sánchez, A., y Font, V. (2019). Criterios asumidos por profesores cuando argumentan sobre la creatividad matemática. *Educação e Pesquisa*, *45*(e211926), 1-18.

Yazgan-Sağ, G., y Emre-Akdoğan, E. (2016). Creativity from two perspectives: prospective mathematics teachers and mathematician. *Australian Journal of Teacher Education, 41*(12), 25-40.

RELACIONES NUMÉRICAS ESTABLECIDAS POR ALUMNADO DE PRIMARIA

Numerical relationships established by Primary students

Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta un estudio sobre el tipo de relaciones numéricas que establecen alumnos de Educación Primaria entre números naturales, entendiendo estas como las conexiones a través de operaciones aritméticas, propiedades, ordenaciones o secuenciaciones. Se analizan las respuestas de 154 estudiantes de 5º y 6º de Primaria (10-12 años) a dos cuestiones de una prueba escrita. Los resultados indican que los estudiantes establecieron un alto número de relaciones, predominando el uso de propiedades, como la paridad, y de operaciones, con escasa presencia de las operaciones inversas (resta y división). Se observa además que establecer relaciones en forma de secuencias les resulta más complicado, desciende el número de respuestas y también la diversidad.

Palabras clave: *relaciones numéricas, patrones numéricos, problemas de final abierto*

Abstract

This report presents the results of a research on the types of numerical relations that Primary School students have proved to be able to establish by making connections between different numbers through arithmetic operations, property, number's order or sequences. This research was carried out by analysing the answers of 154 Primary 5th and 6th grade students (10 -12 years old) to two different questions in a written test. The results indicate that students established a high number of relationships, predominantly the use of properties, such as parity, and operations, with a low presence of inverse operations (subtraction and division). Moreover, establishing relationships in the form of sequences is more complicated, number and diversity of responses decreases.

Keywords: *numerical relationships, number patterns, open-ended problems*

INTRODUCCIÓN

Existe un acuerdo general entre educadores e investigadores en educación matemática al considerar que practicar procedimientos y rutinas numéricas, sin comprensión, resulta insuficiente en la preparación de los estudiantes para manejarse en los modos de vida actual, en especial, en una sociedad dominada por la comunicación y la tecnológica (Anghileri, 2006). Se indica que la enseñanza numérica debe ir más allá de las rutinas de cálculo para lograr que los estudiantes desarrollen comprensión conceptual de los números, las operaciones, sus propiedades y estructuras.

Desde la década de los 80 se ha promovido un cambio para romper con la tendencia de practicar únicamente algoritmos numéricos, orientándose hacia otras tareas escolares que desarrollen el cálculo mental, la observación de patrones, la predicción de los resultados de las operaciones y el establecimiento de relaciones o conexiones numéricas (Anghileri, 2006; NCTM, 2000; Veloo, 2010). Esto se refleja en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias (Decreto 89/2014, de 1 de agosto), que establece que el aprendizaje numérico:

> Tiene como finalidad el desarrollo del sentido numérico, es decir, la habilidad para componer y descomponer números; comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, y utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos y resolver problemas. (p. 22238).

Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A. (2021). Relaciones numéricas establecidas por alumnado de Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 563 – 570). Valencia: SEIEM.

El *sentido numérico* en estudiantes de Educación Primaria ha sido estudiado en distintos países. La investigación en este ámbito, en España, se ha centrado en estudiantes de secundaria (Almeida y Bruno, 2014) o futuros docentes (De Castro, Castro y Segovia, 2004), aunque también existen trabajos que analizan el pensamiento relacional entendido como *modos flexibles de construcción de estrategias para abordar una situación o problema matemático, en los que la atención se centra en las relaciones o elementos clave, en lugar de un método estandarizado* (Castro y Molina, 2007). En este trabajo se indica que es necesario conocer las propiedades de las operaciones, trasformar expresiones numéricas y entender cómo estas trasformaciones afectan a las operaciones.

El trabajo que aquí se presenta tiene como objetivo analizar qué tipo de relaciones establecen entre números naturales, los estudiantes de últimos cursos de Educación Primaria, observando si establecen relaciones a través de las operaciones, de la ordenación o de otras propiedades numéricas. Se estudia qué relaciones predominan en sus respuestas ante determinadas tareas numéricas y si ponen en juego conceptos o propiedades adquiridos a lo largo de la Educación Primaria. Se presentan los resultados de dos tareas de una prueba escrita con el objetivo de mostrar la línea general del estudio.

MARCO TEÓRICO

Ejecutar procedimientos de cálculo de forma precisa, fluida y rápida no implica que se posea la habilidad de ser flexible en el manejo numérico o la capacidad para adaptar las estrategias en función de las necesidades de cada situación (Veloo, 2010). Esto último implica tener *comprensión conceptual*, entendiéndola como la capacidad de realizar conexiones mentales entre hechos matemáticos, procedimientos e ideas (Hiebert y Carpenter, 1992). Tal y como señalan estos autores, esta comprensión conceptual crece a medida que las conexiones mentales se vuelven más ricas y amplias, por lo que los estudiantes deben tener oportunidades para desarrollarla y, para ello, el énfasis en la enseñanza debería ponerse en apoyar que los estudiantes establezcan relaciones, en lugar de fomentar únicamente que sean ejecutores competentes de procedimientos. Esto no implica que memoricen conexiones, sino que valoren y construyan aquellas que les resulten verdaderamente útiles en cada situación (Hiebert y Carpenter, 1992) y las pongan en práctica con flexibilidad.

A la comprensión conceptual y procedimental se le suma el conocimiento de estrategias y su uso adecuado en cada situación. En el caso concreto de los números y las operaciones, desarrollar estrategias flexibles y variadas al utilizar los números y las operaciones es un aspecto importante del aprendizaje que ha sido abordado en numerosos estudios tomando como fundamento teórico el *sentido numérico* (McIntosh, Reys, y Reys, 1992; Yang, Li, y Lin, 2008). Sowder (1992) define *sentido numérico* como una *red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible*.

Para hacer un uso operativo del *sentido numérico*, diversos autores han tratado de caracterizarlo identificando distintas componentes. En esta investigación utilizaremos la propuesta de McIntosh, Reys, y Reys (1992), que estructura el *sentido numérico* en torno a tres áreas, relacionadas con: (i) el conocimiento de los números, (ii) las operaciones entre los números y (iii) aplicar los números y las operaciones en contextos que lo requieran. Cada uno de estos ámbitos se caracteriza por una serie de componentes y sub-componentes que están estrechamente relacionadas, de forma que generalmente aparecen varias de ellas en la resolución de una misma tarea. En esta investigación nos centramos en las siguientes componentes y sub-componentes.

> *Sentido de la organización de los números*. Implica comprender la organización del sistema de numeración decimal (valor posicional), establecer relaciones entre tipos de números, y ordenar dentro y entre tipos de números.
>
> *Representar los números de formas diferentes*. Se refiere a utilizar formas numéricas equivalentes como descomponer y recomponer números.

Comprender las relaciones entre las operaciones. Reconocer la suma y la resta o la multiplicación y la división como operaciones inversas una de la otra.

Comprender que existen múltiples estrategias. Crear, aplicar y seleccionar estrategias eficientes.

El objetivo general de la investigación es analizar el grado de desarrollo del sentido numérico en alumnado de Primaria, en particular, en relación con las componentes indicadas, a través de tareas en las que se pide establecer relaciones (o conexiones) entre los números. En este trabajo nos centramos en dos objetivos específicos, para alumnado de 5º y 6º de Primaria:

- Identificar el tipo de relaciones numéricas que establecen entre números naturales.
- Analizar la cantidad y la variedad de relaciones numéricas correctas entre números naturales.

METODOLOGÍA

El estudio se realizó con 154 estudiantes de Educación Primaria (82 de 5º y 72 de 6º) de dos centros públicos de Tenerife (España), uno urbano y otro semiurbano.

Como instrumento de recogida de datos se diseñó una prueba escrita con 5 cuestiones, en las que los estudiantes debían establecer relaciones entre números naturales. Todas las cuestiones eran abiertas, en el sentido de que los estudiantes podían dar múltiples respuestas. Estos ítems fueron extraídos de Reys, Reys, McIntosh y Gage (1997), donde se proponen diferentes actividades para desarrollar el *sentido numérico,* y que contiene una sección que trata las relaciones numéricas. Una de las investigadoras seleccionó los ítems, atendiendo a los objetivos de la investigación, y los tradujo; posteriormente los ítems fueron sometidos a un juicio de expertos, en el que participaron las otras dos investigadoras y cinco docentes de uno de los colegios.

La prueba se realizó de forma individual, en una sesión de clase ordinaria de una hora. Las preguntas se entregaron simultáneamente a todos los estudiantes, en el mismo orden, dándoles 10 minutos para cada ítem, sin poder pasar al siguiente hasta que se les indicara. No se realizó instrucción previa, por lo que los estudiantes debían usar el conocimiento numérico adquirido hasta ese momento. Durante la realización de las pruebas siempre estuvo presente una de las investigadoras, que se encargó de cronometrar el tiempo y de resolver las dudas que surgieran.

En este trabajo se presenta el análisis de las respuestas a dos de las cinco cuestiones (Tabla 1), cuyos requerimientos en términos de relaciones eran diferentes: conectar tres números a través de operaciones, orden o propiedades; y continuar una secuencia, dados los dos primeros números.

Tabla 1. Cuestiones 1 y 2 de la prueba escrita

Cuestión 1. Conecta números

Elige tres números de la izquierda y busca relaciones entre ellos. Escríbelos en la tabla de la derecha. ¿Habrá otras posibilidades? Puedes usar los mismos números u otros.

		Números elegidos	¿Qué relación?
35	9		
11			
7	21		
4			
12	15		
8			
5	32		
3			

Cuestión 2a. Cómo seguirías…

1, 3,…

Escribe todas las posibilidades que encuentres.

Cuestión 2b. Cómo seguirías…

1, 10,…

Escribe todas las posibilidades que encuentres

El proceso de análisis consistió, por un lado, en identificar el tipo de relaciones numéricas que los estudiantes mostraban en sus respuestas (primer objetivo de investigación) y, por otro lado, en analizar el número de relaciones que establecía cada alumno y de cuántos tipos diferentes eran esas relaciones (segundo objetivo).

Las categorías de análisis de las respuestas se generaron a partir del tipo de relación numérica que se mostraba y su relación con las componentes del sentido numérico indicadas en el marco. En la cuestión 1 se identificaron cinco tipos principales de relaciones (Tabla 2): Sistema de numeración decimal (valor posicional, regularidades en la escritura de los números), operaciones (suma, resta, multiplicación, división), ordenación (mayor/menor, ordenación de mayor a menor, o viceversa), secuencias numéricas (series numéricas con distintos criterios como progresiones aritméticas) y propiedades de los números (par, impar, múltiplo, divisor, primo). En la cuestión 2, dada la propia naturaleza de la pregunta, las categorías de respuesta se establecieron en función del tipo de secuencia desarrollada (Tabla 4).

Las respuestas relacionadas con el sistema de numeración decimal, el orden, la construcción de secuencias numéricas o la identificación de propiedades se asociaron a la componente que abarca el *sentido de la organización de los números*, y aquellas respuestas en las que realizaron operaciones aritméticas se asociaron a las componentes de *representación de los números de diferentes formas* y la *comprensión de las relaciones entre las operaciones*. El análisis de los datos comenzó con un proceso de doble codificación que consistió en: seleccionar 20 cuestionarios al azar, dos de las investigadoras codificaron las respuestas, se calculó el porcentaje de coincidencia en las codificaciones y se analizó en conjunto las respuestas que habían recibido distinta codificación, hasta llegar a un consenso sobre cuál era la codificación correcta. El criterio de la tercera investigadora sirvió para tomar decisiones en caso de discrepancias entre las dos codificadoras. Este proceso se repitió, añadiendo cuestionarios, hasta que el porcentaje de coincidencia superó el 60%, momento en el que la codificación quedó a cargo de la primera autora.

RESULTADOS

Resultados de la cuestión 1. Conecta números

En total se obtuvieron 1008 respuestas, siendo correctas casi el 82%. La Tabla 2 muestra el porcentaje de éxito en cada categoría, en función del tipo de relación numérica observada.

Tabla 2. Porcentaje de tipos de relaciones numéricas establecidas en la Cuestión 1

Categorías de respuestas	Éxito	Fracaso	Totales
Sistema de numeración decimal	14,3	0,2	14,5
Orden	7,3	0,5	7,8
Operaciones	16,5	0,5	17
Secuencias numéricas	9,9	0,3	10,2
Propiedades	22,5	0,9	23,4
Otras respuestas	11,4	15,5	26,9

Se puede observar que los tipos de conexiones establecidos por el alumnado han sido variados. La categoría “Otras respuestas” incluye: (i) relaciones matemáticas muy generales, como por ejemplo “Tienen un 3”, sin mencionar nada relativo al valor posicional de ese número, (ii) relaciones de naturaleza no matemática como, por ejemplo, “son mis números favoritos” y (iii) relaciones donde no se respeta el enunciado de la actividad, por ejemplo, porque utilizan 4 o 5 números del listado.

Excluyendo la categoría “Otras respuestas”, la relación que aparece con mayor frecuencia es la que agrupa los números a partir de propiedades generales, con un 23,4%. Las propiedades más frecuentes, descritas por los alumnos, son decir que los tres números pertenecen a una tabla de multiplicación, son pares/impares (predominando “ser par” frente a “ser impar”) o que son primos (Tabla 3).

Le siguen las operaciones, es decir, aquellas respuestas en las que se eligen dos números de la lista para obtener un tercero, también de la lista, mediante una suma, resta, multiplicación o división. Este tipo de conexiones representa un 17% del total, predominando aquellas en las que se utiliza la suma o la multiplicación, frente a la resta o la división. Es decir, el alumnado tiende a establecer operaciones directas y en menor medida sus inversas. Solo dos estudiantes dieron muestras de relacionar las operaciones como inversas una de la otra (ver ejemplo de la categoría Operaciones en la Tabla 3).

Tabla 3. Ejemplos de respuestas de cada categoría

Sistema de numeración decimal 7, 8, 9 | Son numeros de 1 cifra 35 | 15 | 5 | Tienen la misma unidad.	Orden 12, 9, 7 | 12 > 9 > 7 11 | 12 | 15 | Son mayores que el 10.
Operaciones 3 5 8 | 3+5=8 | 8-3=5 | 8-5=3	Secuencias 3 | 5 | 7 | Van de dos en dos 987 | Van de cuenta atras
Propiedades 3 | 21 | 12 | Porque estan en la tabla del 3. 4, 8 y 12 | Son numeros pares	Otros 12+8+35 | 12+8=20+35=55 8 | 7 | 4 | Son mis numeros favoritos 7, 9 y 4 | Son numeros naturales 3 35 32 | que tienen un tres

En cuanto a la cantidad de relaciones correctas que se establecen, 16 estudiantes no contestaron o no establecieron ninguna conexión correcta (Figura 1a), lo que podría deberse a que no entendieran la actividad o que cometieran errores en todas sus respuestas. En el otro extremo, destaca un alumno que presentó 20 conexiones correctas; su estrategia fue relacionar los 3 mismos números mediante diferentes operaciones, tal y como se muestra en el ejemplo de la categoría "Operaciones" en la Tabla 3. El 57%, de los participantes (88 estudiantes) presentaron entre 1 y 6 conexiones correctas.

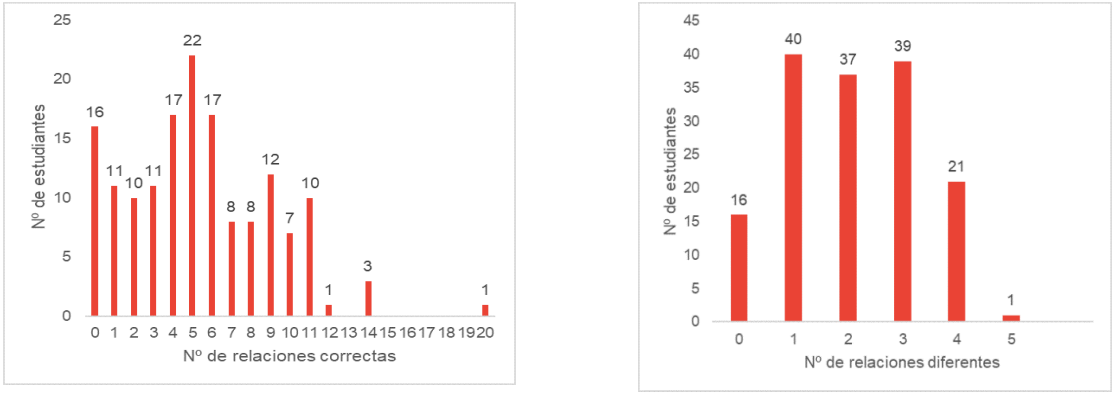


Figura 1. Número de estudiantes según número de relaciones correctas (a) y según número de relaciones diferentes (b)

Por otra parte, la mitad de los estudiantes presenta únicamente uno o dos tipos de conexiones diferentes (Figura 1b), mientras que casi un 40% establece entre 3 y 5 tipos de relaciones diferentes entre los números dados. Destaca un estudiante que presentó los 5 tipos de conexiones distintas.

En resumen, la cuestión 1 resultó de interés por el alto nivel de éxito y de tipología de respuesta presentado por la mayoría de los estudiantes. Destaca la tendencia a presentar operaciones o

propiedades directas frente a sus inversas, ya comentado, y el hecho de que no aparecieran los términos múltiplos y divisores, que ya habían sido estudiados por los estudiantes.

Resultados Cuestión 2a y 2b. Cómo seguirías

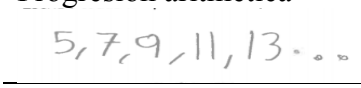
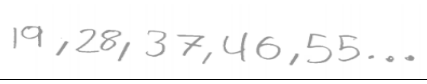
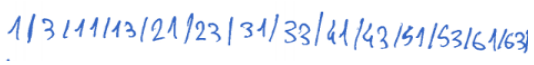
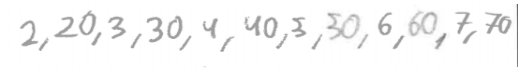
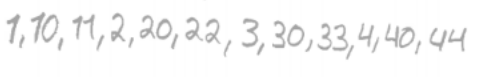
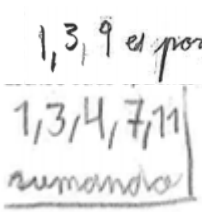
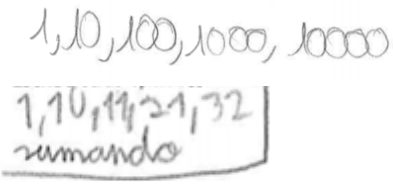
Los estudiantes presentaron 285 secuencias para la cuestión 2a, el 57,5% correctas, y 253 en el apartado 2b, el 37,5% correctas. La Tabla 4 muestra la tipología de dichas secuencias, ejemplificadas en la Tabla 5. En la categoría "Otras respuestas" se incluyen secuencias que aparecieron en un porcentaje muy pequeño (progresiones geométricas o sucesiones recurrentes que sumaban los dos términos anteriores) y respuestas erróneas que no se correspondían con secuencias numéricas.

Tabla 4. Porcentaje de tipologías de secuencias

Categorías de respuestas	1, 3,…			1, 10,…		
	Éxito	Fracaso	Totales	Éxito	Fracaso	Totales
Progresión aritmética	43,8	27	70,8	16,9	45,1	62
Secuencia alterna	10,1	4,2	14,3	14,6	5,5	20,1
Otras respuestas	3,5	11,2	14,7	5,9	11,8	17,7

La mayoría de las secuencias que presentan los alumnos son progresiones aritméticas y en menor porcentaje optan por secuencias con alternancia en los términos (Tabla 4). De estas últimas, algunas son de patrón alterno AB, en las que se modifican los términos que ocupan la posición par, dejando fijos los términos impares o viceversa. También dieron secuencias alternas en las que se modifican tanto los términos pares como los impares. Incluso escribieron secuencias alternas con patrón ABC (1, 10, 11, 2, 20, 22…) o ABCD (1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8…). En ambos apartados, el principal error que cometieron los estudiantes fue no considerar el número 1 del inicio de la secuencia, contestando 1, 3, 6, 9,… o bien, 1, 10, 20, 30... (es decir, las tablas del 3 y del 10, exceptuando el primer término).

Tabla 5. Ejemplos de respuestas de los alumnos

Progresión aritmética	
	
Secuencias alternas	
 	 
Otras	
 	

En cuanto al número de secuencias correctas presentadas por cada estudiante (Figura 2a), se obtuvo que la secuencia 1,3… fue menos costosa que la secuencia 1,10… De hecho, 26 alumnos no escribieron ninguna respuesta correcta en la cuestión 2a, frente a 79 en la cuestión 2b. Esto puede estar provocado por la tipología de los números. Así, para hacer una progresión aritmética, en la primera secuencia bastaba sumar 2 (1, 3, 5, 7,….), lo cual es habitual para los estudiantes, pues es hacer la serie de los números impares, mientras que en la segunda secuencia debían sumar 9. Esto es menos intuitivo y requiere de un conocimiento explícito de la creación de una progresión aritmética.

De hecho, muchos estudiantes escribieron la secuencia errónea 1, 10, 20, 30,… En ambos apartados son menos estudiantes los que logran dar más de una respuesta correcta. Lo que muestra que el tiempo requerido y el nivel matemático de la cuestión 2a y 2b fueron superior a la cuestión 1. Esto se ratifica si se observan las tipologías de secuencias correctas creadas por cada estudiante (Figura 2b) donde se refleja que un porcentaje bajo de alumnos pudo escribir más de una tipología de secuencia. De hecho solo 9 estudiantes de los 156 dieron dos o más secuencias correctas que empezaran por 1, 10… frente a 26 en la secuencia 1,3,…

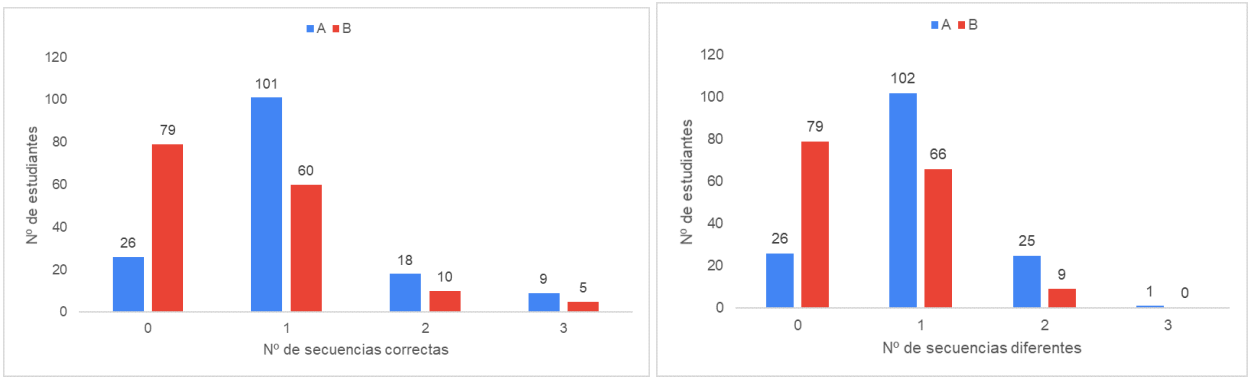


Figura 2. Número estudiantes según número de secuencias correctas (a) y según número de secuencias diferentes (b)

En resumen, la cuestión 2 fue más complejas que la cuestión 1, además los estudiantes emplearon más tiempo para obtener cada respuesta. A cambio, sirvió para explorar su capacidad para buscar regularidades y su creatividad, y observamos como establecen secuencias diferentes a las que habían trabajado en el currículo, que eran las progresiones aritméticas.

CONCLUSIONES

La mayoría de los estudiantes de 5º y 6º de Educación Primaria de este estudio han mostrado capacidad para establecer relaciones numéricas correctas; más del 90% de los participantes indicó, al menos, una relación correcta. Es destacable además, la capacidad, en muchos casos, para verbalizar dicha relación de forma escrita (Tabla 2). Sin embargo, hay un porcentaje de estudiantes que no establece ninguna relación correcta (10,4 % en la cuestión 1 y un 16,9% en la cuestión 2) y otros que presentan muy pocas respuestas o con relaciones más pobres desde el punto de vista del sentido numérico (por ejemplo: "tener un 3"). En las respuestas de los estudiantes predominan propiedades como "ser par", "estar en la tabla de multiplicar de un número", seguido de las operaciones de suma y multiplicación; en menor medida utilizan la resta y, prácticamente, no aparece la división. Esto es coherente con los resultados obtenidos por Coronado-Hijón (2014) en un trabajo con estudiantes de 4º y 6º de Educación Primaria, donde se observa que los participantes tienen más dificultades con la resta y la división que con la suma y la multiplicación. La suma y multiplicación son más fáciles; el pensamiento reversible que implica pensar en las operaciones inversas está menos practicado. Por otra parte, las secuencias numéricas de tipo *+/-a* forman parte del currículo, se trabajan a lo largo de la Educación Primaria en diferentes cursos; esto se refleja en las secuencias que escriben los participantes de esta investigación. Sin embargo, resulta muy interesante observar la gran cantidad de secuencias por alternancia que presentaron los estudiantes, lo que refleja cierto grado de creatividad y de desarrollo del pensamiento relacional (Castro y Molina, 2007).

A pesar de los esfuerzos curriculares por incorporar un aprendizaje diferente de los números, se sigue dedicando mucho tiempo del aprendizaje numérico a tareas cerradas y con una única solución algorítmica. Las dos tareas planteadas alientan a pensar que, si la instrucción proporciona oportunidades enriquecedoras para explorar números y sus relaciones y para descubrir reglas (Alsawaie, 2012, Castro y Molina, 2007), los estudiantes serían capaces de aprovecharlas. Los estudiantes, sin haber recibido instrucción previa en este tipo de actividades, han presentado

numerosas y diversas respuestas. Esa diversidad ha sido mayor en la cuestión 1, lo que podría estar relacionado con el hecho de que es más abierta que la cuestión 2, en cuanto a los tipos de relaciones numéricas que se pueden establecer. Estos datos ponen de manifiesto que la escuela debe hacer un esfuerzo por desarrollar tanto el pensamiento reversible como la capacidad de resolver problemas de diferentes formas desde la perspectiva del sentido numérico, ya que como afirman Yang, Hsu y Huang (2004), la instrucción en este sentido es efectiva.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado con el Proyecto de investigación del Ministerio de Economía y Competitividad. Madrid. España. EDU2017-84276-R.

Referencias

Almeida, R., Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127-136). Salamanca: SEIEM.

Alsawaie, O.N. (2012). Number sense-based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1071-1097.

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense* (2nd ed.). London: Continuum.

Castro, E., Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática, 19*(2).

Coronado-Hijón, A. (2014). Estudio de prevalencia de dificultades de aprendizaje en el cálculo aritmético. *Bordón, 66* (3), 39-59.

De Castro, C., Castro, E., y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. de la Torre (eds.). *Actas del VIII Simposio de la SEIEM*. A Coruña: Universidade da Coruña, pp. 183-194.

Decreto 89/2014, de 1 de agosto, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias. Boletín Oficial de Canarias, núm. 156, de 13 de agosto de 2014, pp. 22233-22295.

Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65−97). New York: Macmillan.

McIntosh, A., Reys, B. J., y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B., Reys, R., McIntosh, A., Gage, R. (1997). *Number sense: Simple effective number sense experiences, Grades 3-4*. Dale: Seymour Publications.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–389). New York: Macmillan and the National Council of Teachers of Mathematics.

Veloo, P.K. (2010). *The Development of Number Sense and Mental Computation Proficiencies: An Intervention Study with Secondary One Students in Brunei Darussalam*. Doctor Ph. University of Otago. New Zealand.

Yang, D.C., Hsu, C. J. y Huang, M.C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 407-430.

Yang, D.C., Li, M.N., y Lin, W.J. (2008). Development of a computerized number sense scale for 3-rd graders: reliability and validity analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *3*(2), 110-124.

SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA HERMENÉUTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

On the value of hermeneutics in the teaching of mathematics

Sanz, H., Cuida, A. y Martínez-Moro, E.

Universidad de Valladolid

Resumen

El objetivo de este estudio es explicitar el papel fundamental de la comprensión relacional de las matemáticas desde el enfoque de la teoría del conocimiento. Asimismo, se propone una concepción hermenéutica de la Matemática considerando que el lenguaje humano es una realidad social y comunicativa. Además, se estudia el impacto de esta postura sobre el entendimiento relacional a través del análisis del discurso en una muestra de 10 alumnos sobre conceptos relacionados con el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Los resultados sugieren una mejora de la comprensión relacional debida a ese proceso interpretativo. Se concluye que la negociación del significado, guiada por el docente, genera conocimiento matemático.

***Palabras clave**: comprensión relacional, conocimiento, hermenéutica, lenguaje natural*

Abstract

The purpose of this study is to explain the fundamental role of relational understanding of mathematics from the approach of knowledge theory. It also proposes a hermeneutic conception of mathematics considering that human language is a social and communicative reality. In addition, the impact of this posture on relational understanding is studied through discourse analysis in a sample of 10 students on concepts related to greatest common divisor and least common multiple. Results suggest an improvement in relational understanding due to this interpretative process. It is concluded that the negotiation of meaning, guided by teacher, generates mathematical knowledge.

Keywords: *relational understanding, knowledge, hermeneutic, natural language*

INTRODUCCIÓN

Para exponer nuestra propuesta, partimos de la norma fundamental que organiza el sistema educativo actual, esto es, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). Nada más comenzar su examen, en el preámbulo, puede observarse que entran es escena los *talentos*, para poco después afirmar que tras ellos se encuentran "las competencias que los materializan y los conocimientos que los construyen" (p.97858). Así, aparece en la LOMCE por primera vez la noción de *conocimiento*. Noción que también se desliza en las definiciones que hace la propia norma de *competencia* y *contenido*. Por ello, no es demasiado pretencioso suponer que, al fin y al cabo, lo que se está planteando en todo momento es la adquisición de conocimientos tanto teóricos como prácticos. En consecuencia, aunque no acapare la atención merecida, la noción de *conocimiento* se encuentra en el núcleo del sistema educativo.

Dejando a un lado la naturaleza del *saber*, cabe mencionar que la epistemología actual ha dado en considerar como los tres sentidos más fundamentales del término al *conocimiento proposicional*, al *conocimiento directo* y al *conocimiento práctico*. El primero tiene por objeto de conocimiento a una proposición verdadera, es el *saber qué*. El segundo, conocimiento directo (*acquaintance*), es

Sanz, H., Cuida, A. y Martínez-Moro, E. (2021). Sobre la importancia de la hermenéutica en la enseñanza matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 571 – 578). Valencia: SEIEM.

eminentemente distinto al proposicional pues resulta evidente, por ejemplo, que alguien puede saber cosas sobre una persona, pero no haberla visto nunca. Algunos filósofos han venido a afirmar que los únicos objetos de los que podemos tener conocimiento directo a través de proposiciones teóricas son las palabras del lenguaje utilizadas para denotarlos (Russell, 1921). También el primer Wittgenstein manifiesta que uno solo puede estar seguro de sus datos sensoriales expresados en el propio lenguaje (Wittgenstein, 2002). Estas posturas han sido criticadas por varios autores al denunciar el solipsismo en el que incurren de forma manifiesta (Strawson, 1959). Aun así, el propio Wittgenstein, en su segunda etapa, rompe con ese solipsismo anterior admitiendo que los *juegos del lenguaje* entrañan unas reglas que han de ser eminentemente sociales. De este modo, deja de interesarse por la figuración mental que uno hace al significar algo para poner el foco en el uso, en el juego y en el contexto de las palabras, que pasan a ser los ejes centrales de la interpretación del significado. Para Wittgenstein no se aprende representando figuras mentales, sino actuando, esto es, comunicando con otros mediante el lenguaje. Por último, además del conocimiento proposicional y el directo, conviene considerar el conocimiento práctico, el *saber cómo*. Para algunos autores, este tipo de conocimiento no es más que una versión que se puede incardinar en el conocimiento proposicional. Otros, incluso, llegan a negar que constituya alguna forma de conocimiento (Villoro, 1999). También encontramos a quienes sostienen que el conocimiento proposicional es una forma de conocimiento práctico. Es este el caso de Piaget quien, a diferencia de la especulación filosófica tradicional en torno al problema del saber, formula hipótesis de carácter empírico que puedan ser puestas a prueba en procesos de observación puros. Así, ante la complejidad de definir lo que es el *conocimiento*, Piaget propone hablar del complejo cognoscitivo integrado por comportamientos afectos de aspectos biológicos, mentales y sociales.

Aunque son por todos conocidas las críticas a las teorías de Piaget (Dasen, 1994), lo que aquí resulta relevante es que el epistemólogo suizo falla por completo a la hora de considerar el efecto de los influjos sociales en el desarrollo cognitivo. Para él, el lenguaje es un síntoma del desarrollo cognitivo, esto es, que el pensamiento ha de preceder al lenguaje. En ello repara el psicólogo ruso Lev Vygotski, quien sostiene que el origen del pensamiento se encuentra en la habilidad humana para comunicarnos con el resto y no así en nuestra mera interacción con el mundo. Una de las ideas principales de Vygotsky manifiesta que el aprendizaje conceptual es una operación realizada por un niño y un adulto de manera conjunta a través de un diálogo. Este planteamiento a su vez encuentra un antecedente en la mayéutica socrática descrita en el diálogo Menón, la que puede considerarse un tipo de negociación conceptual por la cual un joven esclavo alcanza una comprehensión imprevista de cierta rama de las matemáticas a través de una sucesión de preguntas clave planteadas por el propio Sócrates.

MARCO TEÓRICO

Richard Skemp (1962) plantea su teoría sobre lo que realmente significa *entender* o *comprender* las matemáticas. Su tesis fundamental sostiene que existen distintos tipos o clases de entendimiento que han de tratarse, potenciarse y perseguirse de manera diferente según sean los propósitos docentes que desencadenan la acción educativa. Así, diferencia entre entendimiento i*nstrumental* y entendimiento *relacional*. El primero de ellos supondría el aprendizaje en la utilización de ciertas reglas sin la capacidad de aportar razones que las justifiquen. Por su parte, el entendimiento relacional implica no solo saber qué hacer, sino aportar razones que justifiquen aquello que se hace. En la misma línea, el autor señala respecto al entendimiento relacional su adaptabilidad a las tareas nuevas. El corolario inmediato que obtenemos al recordar la definición que se hacía en la normativa vigente de la competencia matemática es que se ha de perseguir un entendimiento relacional de las matemáticas por parte del alumnado. Además, aun cuando Skemp explicita que ha de prevalecer una enseñanza relacional de las matemáticas (Skemp, 1976), nosotros vamos allá al asociar su

planteamiento con las distintas concepciones del conocimiento. En efecto, la incapacidad para aducir razones que justifiquen la acción, lo cual es característico del entendimiento instrumental, supone un incumplimiento manifiesto de los requisitos que son necesarios para poder hablar de conocimiento. La mera reproducción irreflexiva de una concatenación de procedimientos no puede en ningún caso constituir conocimiento en tanto que no supone la manifestación de una creencia justificada. Además, dado que no implica un proceso de especulación intelectual interior, el entendimiento instrumental, no puede avivar en absoluto el pensamiento crítico y autónomo del alumno, en contra de lo que promulgan las normativas de aplicación en el ámbito educativo como el actual marco legal vigente.

Por otro lado, es cierto que el entendimiento relacional tiene algunos inconvenientes que dificultan su implementación efectiva en el aula. Entre otros, Skemp advierte la dificultad para evaluar cuándo una persona ha comprendido algo relacionalmente. Debemos notar aquí la sutileza de nuestra propuesta y es que poco ha de importar lo que pueda haber tenido lugar en la mente de alguien. En efecto, si supeditamos el conocimiento al acto de proferir proposiciones sobre unos conceptos que son continuamente reintrepretados de la mano del lenguaje natural, sí que resulta perceptible la densidad y la complejidad de las relaciones, argumentos y razonamientos.

De esta forma, al amparo de las ideas de Bruner (1984) sobre el aprendizaje, es posible establecer una concepción original de la enseñanza matemática. Para ello, hay que empezar reconociendo que el lenguaje necesariamente implanta una perspectiva desde la que apreciar las cosas. Así, un mensaje concreto puede crear la realidad que se está transmitiendo y condicionar el pensamiento de quienes lo reciben. Se constituye así un sistema conceptual dinámico en actualización continua. Sin embargo, debemos ser cuidadosos al hablar de estos sistemas. Estas "realidades" no residen en ningún objeto tangible, ni tan siquiera en la cabeza de nadie. Estas "realidades" se encuentran en el acto de afirmar, de comunicar, de negociar, de interpretar y de manifestar el significado de tales conceptos, y esa manifestación se produce al intercambiar rastros de nuestras cogniciones humanas. En particular, acontece de esta manera con los conceptos propios de la matemática. Esta concepción, digamos *hermenéutica*, de la matemática supone entonces que las matemáticas están en un proceso de constante interpretación llevado a cabo después de algún acto comunicativo concreto.

Bajo esta concepción, el aula se convierte en una suerte de foro donde renegociar continuamente el significado de los conceptos matemáticos. Debemos reparar en que esta postura confiere un papel activo a los alumnos como participantes del conocimiento matemático en lugar de relegarlos a la categoría de meros espectadores amaestrados que desempeñan con mayor o menor acierto un conjunto de procedimientos.

En virtud de todo lo expuesto anteriormente, resulta claro que el lenguaje natural constituye el medio idóneo en el que reinterpretar o negociar los conceptos que conforman nuestros esquemas de conocimiento. De acuerdo con Austin y Searle, un *acto de habla* se da en tanto que la enunciación de una determinada proposición constituye una trasformación de las relaciones entre los interlocutores con los referentes. (Austin, 2008).

De esta forma, todo lo que uno diga y cómo lo diga lleva consigo una actitud propia sobre el referente en cuestión, una *postura* (Feldman, 1974). Feldman realizó un estudio por el cuál analizaba el uso de expresiones que contenían verbos modales de incertidumbre y probabilidad en las conversaciones de los profesores de una determinada escuela con sus alumnos y con otros profesores del centro. El resultado fue que estos verbos aparecían con muchísima más frecuencia en las conversaciones entre profesores que en las realizadas con los alumnos. De esta forma, Feldman hizo patente que los profesores presentaban a los alumnos un mundo menos propenso a la

reinterpretación y a la negociación que el que ellos mismos se ofrecían entre sí. En consecuencia, bajo esta concepción que estamos considerando, los alumnos no tendrían ninguna posibilidad de engendrar su conocimiento, de cuestionarse nada, ni de ser críticos. Solo podrían limitarse a recibir informaciones sin poder tomar una postura al respecto del contenido en cuestión.

Hemos señalado que todo cuanto experimentamos a través del lenguaje natural está empapado de posturas. Sin embargo, debemos reparar en que, en lo relativo al ámbito educativo, algunas de estas posturas son invitaciones a la elaboración y a la reflexión. La fuerza ilocutiva de la que habla Searle supone una perspectiva de interpretación (Searle, 1980). Así, el conocimiento, el pilar fundamental de la educación, se presta a sufrir una trasformación imaginativa por parte del alumno, convirtiéndose este a su vez en una parte del proceso negociador y, por ende, en un ingrediente de la elaboración del conocimiento y no un simple receptor del mismo.

De esta manera, si se plantea una postura abierta a la negociación conceptual por parte del profesor, el receptor del mensaje, el alumno, desarrolla su sentido del yo, adquiriendo un conjunto de posturas hacia el conocimiento que se obtiene. Este proceso de posicionamiento es lo que Bruner (1984) dio en llamar *intervención reflexiva* y, como él mismo señala, si el alumno no llega a desarrollarlo, podrá actuar únicamente de afuera hacia dentro, quedando limitado por las formas de conocimiento ya establecidas. Es decir, para Bruner, la capacidad de poder afrontar con solvencia problemas en contextos distintos queda supeditada al crédito del que el alumno disponga para reflexionar, reinterpretar y negociar sus propios conceptos y relaciones entre tales. Esto, llevado al terreno de la consabida competencia matemática, tiene una implicación nada desdeñable y es que, para desarrollarla se debe instar al alumno a inquirir profundamente y de manera activa en los conceptos matemáticos, habilitando para ello un contexto de negociación e interpretación.

Si bien esta manera hemenéutica de desarrollar la compresión relacional propuesta por Skemp podría suponer una cuestión que posiblemente fuese conveniente investigar de forma más general, en este caso particular nos ceñiremos al caso de la compresión en torno a los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo a través de un tipo concreto de instrucción apoyada en el diálogo.

METODOLOGÍA

Nuestro planteamiento sostiene que el entendimiento relacional es la única forma de entendimiento que puede constituir conocimiento. Además, va inevitablemente ligado a un proceso de interpretación conceptual continuo que es llevado a cabo por el alumno mediante una suerte de diálogo que puede acontecer consigo mismo o con otro individuo. Ese diálogo tiene lugar gracias al lenguaje y, por tanto, en última instancia puede afirmarse que el lenguaje crea conocimiento. De esta forma, lo que hemos hecho hasta ahora ha sido plantear un original marco de sentido sobre el que desplegar fundadamente el propósito que establece el actor que desencadena la acción educativa, la LOMCE, y que es el adquirir conocimiento.

Para dar forma y contrastar nuestro planteamiento, realizamos una investigación mixta, predominantemente cualitativa desde un paradigma interpretativo, que utiliza el análisis del discurso, con un grupo 10 alumnos de 4º curso de educación secundaria, de un centro concertado de educación secundaria. El análisis cualitativo de los discursos entre el profesor-investigador y los estudiantes forman parte de un estudio más amplio. Por su parte, el objeto de la investigación, más bien cuantitativa, que aquí se presenta fue contrastar si la negociación del significado, guiada por el docente, inducía una mejora en la compresión relacional sobre el tema elegido, que fue el de

máximo común división (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm) al entender que es un conocimiento básico para el alumnado de ese curso.

La investigación se sirvió de un instrumento para recoger datos sobre la comprensión instrumental y relacional consistente en un cuestionario individual, con diseño de pre y post. El pre estuvo integrado por preguntas instrumentales (por ejemplo, "calcular el mcd y el mcm de dos números dados") y por preguntas relacionales (por ejemplo, "¿puede tener sentido pretender calcular el máximo común múltiplo?"). El post se limitó solo a las mismas preguntas relacionales. Entre las dos partes del cuestionario se realizó una intervención en forma de entrevista corta semiestructurada e individual en la que negociar el significado de los conceptos propios del tema. Estas entrevistas fueron grabadas y, posteriormente, transcritas, arrojando datos que también se analizaron con el propósito de contribuir al análisis del desarrollo de ambos tipos de comprensión en los alumnos.

Es conveniente mencionar que la intervención, en tanto que entrevista semiestructurada, alternaba preguntas espontáneas con otras que habían sido establecidas de antemano. Estas últimas habían sido concretadas y secuenciadas con el objeto de desgranar el sentido de las etiquetas 'mcd' y 'mcm'. Así, la entrevista habría de comenzar haciendo evidente el conocimiento de las tres palabras que componen estas "etiquetas" (esto es, "máximo", "común" y "divisor", "mínimo", "común" y "múltiplo"), para dar paso a una negociación del significado de cada una de ellas. Más adelante, la atención se desviaría hacia las nociones de factor y múltiplo. Finalmente, con el objeto de que el alumno relacionase estas ideas con las reglas para calcular el mcd y el mcm ("factores comunes al menor de los exponentes", "factores comunes y no comunes al mayor de los exponentes"), se preguntaría por la necesidad de haber factorizado previamente los números como producto de primos.

Asimismo, se conformó un grupo de control de otros 7 alumnos que participaron en la parte relativa al cuestionario pre-post, pero no en la intervención en forma de entrevista. Para poder comparar los resultados de las partes relacionales, asignamos dos puntuaciones en el intervalo [0,10] a cada alumno, una por cada parte del cuestionario. Estas puntuaciones resultan de normalizar los promedios de variables dicotómicas (correcto/incorrecto). Se eligió esta manera de proceder para no otorgar un mayor peso a alguna de las preguntas relacionales frente a las demás.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En general, las respuestas proporcionadas a los cuestionarios evidenciaban un bajo nivel de todo tipo de comprensión del tema elegido. En cuanto a las preguntas instrumentales, solo el 50% del grupo de trabajo y el 43% del grupo de control respondió favorablemente. Respecto a las cuestiones relacionales, la media de las puntuaciones obtenidas en el primer cuestionario fue de 3,11 y 3,65 sobre 10, para los grupos de trabajo y control respectivamente.

La segunda parte de la investigación, las intervenciones en forma de entrevista semi-esctructurada mantuvieron un tono negociador, haciendo ver a los alumnos que no se trataba de responder correctamente sino de analizar lo que realmente se quiere decir, de significar realmente los objetos matemáticos. Además, se puede advertir cómo se persiguió en todo momento el lograr alcanzar una suerte de acuerdo al respecto de tales significados, como se desprende del uso de expresiones como "vale", "de acuerdo" o "me parece bien". Estos aspectos pueden observarse en la siguiente transcripción de una de las entrevistas:

I: Bueno, pues aquí estamos. Vamos al lío. ¿Qué es el mcd?

E: El máximo común divisor.

I: El máximo común divisor [asintiendo]. ¿Y el mcm?

E: El mínimo común múltiplo.

I: Vale. Y… ¿qué significa eso del "máximo común divisor"?

E: Pues que es el mayor número por el que puedes dividir [pausa dubitativa] los dos números que te dan.

I: ¡Ah! Entonces solo sirve para dos, ¿no?

E: Hombre, de esos y de sus múltiplos.

I: Bueno a ver… Has dicho que es el máximo común divisor. Lo de que es "máximo" es que es el mayor. Eso está claro. Lo de que sea "común"… ¿qué podría querer decir?

E: Entre los dos.

I: O sea… que solo tiene sentido cuando hay exactamente dos números, ¿no?

E: Si te dan dos, pues para dos. Si te dan tres, pues para tres…

I: Entonces… [preguntando]

E: Pues para cualquier cantidad de números que te den.

I: ¡Ah! De acuerdo, muy bien. Y lo de "divisor"… ¿qué querrá decir?

E: ¿Cómo que qué quiere decir?

I: Pues que cuándo decimos que un número es divisor de otro.

E: Pues que… [pausa larga] que puedes hacer… que ese número… lo puedes dividir por el otro.

I: Pero… ¿cuándo se dice que puedes dividirlo?

E: [Pausa larga] Pues cuando el resto de da cero.

I: De acuerdo. Me parece bien. Pero entonces, en ese caso, del número menor decimos que es el divisor, pero… ¿qué decimos del grande?

E: Que es múltiplo.

I: ¡Ah! Cierto, eso era. Que es múltiplo [asintiendo]. De uno se dice que es divisor y del otro que es múltiplo… Y aquí [mostrando su respuesta a la pregunta instrumental de calcular el mcm y el mcm de dos números] cuando has hecho esto de poner la rayita e ir dividiendo así, entre todos estos números… ¿Por qué has dividido por estos números?

E: Porque eran divisores del que tenía.

I: Sí, sí… Estoy de acuerdo. Pero, además de ser divisibles… Quiero decir… No pones aquí cualquier divisor de trescientos sesenta. No has puesto el cuatro, ni el seis… Has puesto dos, tres, cinco…

E: ¡Ah! Porque son primos.

I: Eso me parecía a mí. Pero… Entonces a estos números primo… ¿Qué les ocurre?

E: [Pausa larga] Que no tienen divisores.

I: ¿Seguro de eso?

E: Bueno, el uno.

I: ¿Solo?

E: Y él mismo.

I: Y entonces, ¿por qué has utilizado los números primos para intentar dividir al número que te daban?

E: [Pausa larga] Porque si no, estarías haciendo trampa.

I: ¿Qué quieres decir por "hacer trampa"?

E: Pues… [Pausa] Que habría más factores entonces…

I: Explícamelo, porfa.

E: No sé… Pues eso…

I: Venga, inténtalo.

E: Pues… [Pausa larga] que si no son primos, los factores se podrían seguir dividiendo…

I: Muy bien. Pues ahora te voy a dar unas preguntas y tratas de responderlas, ¿ok? [Le entrego la última parte de la actividad]

Como se aprecia en la Tabla 1, en relación a los resultados obtenidos en el segundo cuestionario, el que se realizó después de las entrevistas, cabe decir que evidenció una mejora significativa para el grupo de trabajo, que pasó del 3,11 inicial a 5,56 sobre 10. Por su parte, el grupo de control no mejoró respecto al primer ensayo, sino que su resultado medio pasó de 3,65 a 3,33 sobre 10. Asimismo, no se observó ninguna diferencia significativa en la homogeneidad de los grupos.

Tabla 1. Comparación de resultados de ambos cuestionarios.

Número de elementos (*N*), media del primer cuestionario (*M1*), media del segundo cuestionario (*M2*), diferencia de las medias (*Dif*) y desviación típica (*DT*) de los grupos de trabajo y control.

	N	*M1*	*M2*	*Dif*	*DT*
Grupo trabajo	10	3,11	5,56	2,44	1,87
Grupo control	7	3,65	3,33	-0,32	1,89

Cabe señalar que el alumno de la entrevista previa obtuvo una puntuación de 3 sobre 10 en el primer cuestionario y de 6 sobre 10 en el segundo.

Por otro lado, conviene comentar que se analizó la correlación entre las respuestas proporcionadas por la totalidad de los alumnos a la pregunta de carácter instrumental y las diferencias entre las puntuaciones de cada una de las partes relacionales. El coeficiente de correlación hallado fue de 0,09, indicando así una ausencia casi completa de correlación lineal. Este hecho no hace sino reforzar la tesis de que el entendimiento instrumental no constituye ninguna forma de conocimiento toda vez que está desligado de la parte relacional y, así, tampoco es un buen indicador para esta.

CONSIDERACIONES FINALES

Como venimos anunciando, el conocimiento no penetra en el alma de uno, sino que se encuentra vinculado a actos comunicativos que acontecen en el paradigma del lenguaje. Y esto ha de tenerse en cuenta en el ámbito de la enseñanza y en las metodologías que en ella se utilicen en general. Si se acepta que el aprendizaje consiste en la construcción de conocimiento por parte del alumnado, entonces la metodología habrá de centrarse en la interacción, fomentando su participación activa.

En particular, este trabajo ha pretendido extender esta idea en el terreno de la didáctica de la matemática, promulgando una concepción hermenéutica de esta ciencia con el propósito velado de respaldar la adopción por parte del docente de una postura negociadora. Se ha contrastado la

eficacia de una forma concreta de implementación efectiva de estas ideas: una metodología basada en el diálogo a través de la entrevista corta semiestructurada para negociar el significado de los conceptos matemáticos favorece el desarrollo de la comprensión relacional. Conviene mencionar que, pese al carácter exploratorio de esta investigación y a la imposibilidad de llevar a cabo un análisis estadístico más profundo dadas las limitaciones de los grupos considerados, confiamos en que este estudio pueda contribuir modestamente a poner de relieve la necesidad de la promoción de la hermenéutica en el ámbito de la enseñanza matemática escolar.

Referencias

Austin, J. L. (2008). *Cómo hacer cosas con palabras*. Barcelona, España. Paidós.

Bruner, J.S. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid, España. Alianza Editorial.

Dasen, P. (1994). Culture and cognitive development from a Piagetian perspective. En Lonner,W.J & Malpass, R.S. (Eds.) *Readings in psychology and culture*, (pp. 141-150). Boston, EEUU: Allyn and Bacon.

Feldman, C. (1974). Pragmatic features of natural language. En M.W.LaGally, R.A. Fox & A. Bruck (Eds.), *Papers from the Tenth Regional Meeting, Chicago Linguistic Society*, (pp. 151-160). Chicago, EEUU: Chicago Linguistic Society.

Gettier, E. (1963). Is justified true belief knowledge? *Analysis*, *23*(6), 121-123.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). *Publicada en Boletín Oficial del Estado* No. 295, de 10 de diciembre de 2013.

Platón. (1988). *Diálogos, V. Parménides, Teeteto, Sofista, Político*. Madrid, España. Gredos.

Russell, B. (1921). *The analysis of mind*. London, United Kingdom. Allen & Unwin.

Searle, J. R. (1980). *Actos de habla.* Madrid, España. Ediciones Cátedra SA.

Skemp, R. (1962). The need for a schematic learning theory. *British journal of educational pshychology*, *31*, 45-55.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Strawson, P.F. (1959). *Individuals, an Essay in Descriptive Metaphysics*. London. Methuen.

Vigotsky, L. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Villoro, L. (1999). *El conocimiento*. Madrid, España. Trotta.

Wittgenstein, L. (2002). *Tractatus lógico-philosophicus*. Madrid, España. Tecnos.

ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE VISUALIZACIÓN EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3D Y REALIDAD AUMENTADA: ALINEANDO PUNTOS EN EL ESPACIO

Analysis of an activity of visualization in a 3d dynamic geometry with augmented reality environment: aligning points in space

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

Resumen

La representación plana de objetos tridimensionales acarrea problemas en la interpretación y reconocimiento de propiedades del objeto. Se considera que los programas de geometría dinámica ayudan a resolver en parte esta problemática. Pero se ha realizado poca investigación sobre el uso de aplicaciones de geometría dinámica espacial. Analizamos la actividad y los niveles de pensamiento espacial (Kondo et al., 2014) de dos estudiantes para maestro de educación primaria al resolver una tarea de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica y realidad aumentada. Hemos identificado distintos niveles de pensamiento geométrico en las estrategias de resolución, así como la complejidad de las interacciones con objetos espaciales en un ambiente de geometría dinámica espacial dotado de realidad aumentada.

Palabras clave: *realidad aumentada, Geogebra, visualización, representaciones planas, geometría espacial*

Abstract

Plane representation of 3-dimensional objects causes problems in the interpretation and recognition of properties of the objects. It is considered that dynamic geometry software partly helps address this issue. However, little research has been done on the use of this software in spatial geometry. In this paper, we analyse the activity and levels of spatial thinking (Kondo et al., 2014) of two future primary school teachers when solving a spatial geometry task in a dynamic geometry software with augmented reality environment. We have identified different geometry thinking levels in the strategies of solution, and the complexity of students' interactions with space objects in a dynamic geometry environment 3d with augmented reality.

Keywords: *augmented reality, Geogebra, visualization, 2-dimensional representation, spatial geometry*

INTRODUCCIÓN

Hoy en día hay un amplio reconocimiento de los programas de geometría dinámica (en adelante PGD o GD), sus principales características y las bondades y retos que este recurso demanda para su inserción en la enseñanza y aprendizaje de la geometría (Sinclair et al., 2016). Según estos autores, son varios los esfuerzos investigativos desde la didáctica de las matemáticas que se han realizado en esta vía. Sin embargo, un especial énfasis se ha dado a los PGD que corporeizan objetos de geometría plana, dejando de lado la investigación sobre los PGD de geometría espacial (en adelante, PGD3d o GD3d) (Gutiérrez y Jaime, 2015).

En los últimos años, el desarrollo tecnológico de tabletas y teléfonos inteligentes ha permitido el diseño de entornos de realidad virtual y realidad aumentada que aprovechan características específicas de estos dispositivos. En particular, se ha integrado la realidad aumentada (en adelante, RA) en

Sua, C., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3d y realidad aumentada. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579 – 586). Valencia: SEIEM.

algunos PGD3d. La RA amplifica el mundo real al insertar en él contenido multimedia creado por computador, en nuestro caso, objetos de geometría espacial. Estos objetos son observados en las pantallas de los dispositivos móviles. GeoGebra ofrece la posibilidad de explotar esta posibilidad en la educación matemática, presentando sus construcciones en RA, para interactuar con ellas en este ambiente y observarlas en el mundo real y no en la pantalla de un computador (Tomaschko y Hohenwarter, 2019).

Un problema de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría espacial es el tratamiento por los estudiantes de representaciones de objetos geométricos (Jones et al., 2012). Por lo general, estos objetos se presentan mediante representaciones planas, lo que lleva a errores en su elaboración o lectura (Parzysz, 1988). Los PGD3d son una forma de atender esta problemática, al permitir manipular los objetos corporeizados y poder observarlos desde distintos puntos de vista. La investigación ha mostrado que los tipos de representaciones tridimensionales a los que se accede inciden en el razonamiento de los estudiantes sobre los objetos corporeizados (Kondo et al., 2014), dando con ello respaldo a los PGD3d y, en particular, a los ambientes de RA.

Dado el estado embrionario en que se encuentra la investigación sobre la incidencia de los PGD3d, es necesario recoger evidencia empírica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con estos recursos (Gutiérrez y Jaime, 2015). Haciendo énfasis en el aprendizaje, presentamos una experiencia en la que se propuso una tarea de geometría espacial en un ambiente de GD3d con RA a estudiantes de Magisterio, con el objetivo de investigación de analizar las interacciones con las representaciones de objetos tridimensionales corporeizadas en este ambiente, las estrategias de solución desarrolladas y sus niveles de pensamiento geométrico.

REFERENTES CONCEPTUALES

El análisis que hacemos de la actividad de resolución de tareas de geometría espacial en un ambiente de GD3d con RA se basa en dos componentes centrales, la interpretación por los estudiantes de las representaciones en la pantalla de objetos espaciales y su uso de la visualización.

Objetos tridimensionales y representaciones bidimensionales

De acuerdo con Parzysz (1988), cuando un objeto tridimensional es representado en el plano, se pierde información debido a las limitaciones del medio donde este se representa. Esta perdida de información se evidencia al tratar de decidir si una representación plana corresponde a un objeto tridimensional y, si es así, observar sus propiedades. También se presenta al querer representar un objeto tridimensional en un formato bidimensional. Aunque hay convenciones que mitigan este problema (segmentos punteados, proyecciones, etc.), el problema persiste cuando esas convenciones no se conocen o cuando no son suficientes para capturar la naturaleza del objeto espacial (p. ej., representar o identificar la tangencia de una esfera inscrita en un dodecaedro).

En los ambientes computacionales, se ha visto una posibilidad para apoyar el reconocimiento de relaciones en representaciones gráficas o las representaciones de un objeto geométrico (Laborde et al., 2006). En particular, los PGD3d ofrecen la posibilidad de acceder a varias representaciones gráficas de un objeto geométrico (Jones et al., 2012) a través de su manipulación. Sin embargo, como en los libros de texto, las representaciones en una pantalla también son planas, por lo que, aunque están dotadas de movimiento, solo se puede ver una representación apropiada en la pantalla si se interactúa correctamente con el PGD3d.

Para comprender la naturaleza del pensamiento geométrico de los estudiantes al interactuar con objetos tridimensionales, Kondo et al. (2014) proponen un modelo analítico en el que articulan los constructos de los niveles de pensamiento espacial y las capacidades que intervienen en la interpretación de objetos tridimensionales. La Tabla 1 presenta este modelo, con tres niveles caracterizados por dos dimensiones: (i) reconocimiento de propiedades de figuras tridimensionales y (ii) manipulación de diferentes representaciones de objetos tridimensionales. Este modelo es apropiado para analizar las

actuaciones con PGD3d, ya que las representaciones en pantalla son bidimensionales.

Tabla 1. Niveles de pensamiento en geometría espacial (Kondo et al., 2014, p. 27)

Nivel	Razonamiento con propiedades 3d	Manipulación	Características del pensamiento 3d de los estudiantes
1	No	No	El pensamiento de los estudiantes está influenciado por representaciones 2d.
2 a	Sí (no apropiado)	No	Los estudiantes empiezan a utilizar propiedades 3d de las figuras, pero sin su manipulación efectiva.
2 b	Sí (no apropiado)	Sí (no apropiado)	Los estudiantes utilizan propiedades 3d y manipulan la figura, pero esta no es apropiada.
2 c	Sí (no apropiado)	Sí	Los estudiantes utilizan propiedades 3d y manipulan la figura apropiadamente, pero con respuesta incorrecta.
3	Sí	Sí	Los estudiantes utilizan propiedades 3d y manipulan la figura apropiadamente, con respuesta correcta.

Componentes de la visualización

De acuerdo con Gutiérrez (1996), la visualización es un componente básico en la enseñanza y aprendizaje de la geometría 3d, de ahí su interés para la investigación en educación matemática. Para este autor, la visualización es una actividad de razonamiento que se apoya en elementos visuales o espaciales, que pueden ser mentales o físicos, con los cuales se da solución a tareas. Esta actividad involucra cuatro elementos: imágenes mentales, representaciones externas, procesos de visualización y habilidades de visualización, caracterizados por (Gutiérrez, 1996, pp. 9-10):

"Una *imagen mental* es cualquier tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática apoyado en elementos visuales o espaciales." Estas imágenes son elementos básicos en la visualización. "Una *representación externa* … es cualquier tipo de representación verbal o gráfica de conceptos o propiedades … que ayudan a crear o transformar las imágenes mentales y hacer un razonamiento visual." "Un *proceso de visualización* es una acción física o mental que involucra imágenes mentales. En visualización se reconocen dos procesos: interpretación visual de la información, para crear imágenes mentales, e interpretación de imágenes mentales, para generar información". Finalmente, las *habilidades de visualización* son necesarias "para llevar a cabo los procesos necesarios con imágenes mentales específicas en la tarea dada."

Aunque los PGD3d ofrecen representaciones aparentemente tridimensionales de objetos espaciales, el medio donde se muestran es plano; por lo tanto, la interpretación que se realice de estas representaciones puede acarrear dificultades en las imágenes mentales generadas (p. ej., establecer propiedades sin tener certeza de estas). Por otro lado, los PGD3d pueden apoyar la conformación de imágenes mentales ricas (Gutiérrez y Jaime, 2015), ejemplo de ello es que una representación externa estática pueda verse como instancia de un objeto geométrico en movimiento. Aun con un PGD3d, es necesario interpretar correctamente las representaciones externas que este recurso provee.

METODOLOGÍA

Participaron tres estudiantes de una asignatura de didáctica de la geometría de 4º curso del Grado de Maestro de Primaria de la Universidad de Valencia, elegidos como muestra de conveniencia debido a su notable desempeño en dicha asignatura. La formación matemática de los estudiantes incluía un curso de matemáticas para maestros en 2º año del Grado, donde se estudian temas de geometría 3d como sólidos, simetrías, áreas y volúmenes. El experimento, con el primer autor como profesor, consistió en resolver varias tareas planteadas en la aplicación Calculadora 3D de GeoGebra con la RA activada y se realizó en un aula con un amplio espacio vacío de mesas, que permitía el movimiento libre de los estudiantes. Las tareas eran parte de una secuencia en construcción para utilizar la RA. La experiencia de los estudiantes con GD3d era mínima y nunca habían utilizado RA.

Cada estudiante disponía de un iPad, desde el que podía acceder a archivos preparados para realizar las tareas. Al empezar, les explicamos cómo arrastrar puntos en el espacio y activar la RA. La primera tarea requería moverse alrededor de una figura geométrica mostrada en RA para encontrar posiciones de la figura en las que se vieran configuraciones geométricas particulares, por ejemplo, dos cuadriláteros (Figura 1a). El objetivo de esta tarea era familiarizarse con el uso del iPad, los ambientes RA y el cambio de representaciones en pantalla. La segunda tarea mostraba un conjunto de puntos de distintos colores ubicados en el espacio y sin relación alguna entre ellos (Figura 1b). El objetivo era arrastrar los puntos hasta que fuesen colineales. Los puntos eran libres excepto dos de ellos que estaban bloqueados, lo cual impedía mover todos los puntos al plano z = 0 y alinearlos allí. En este texto analizamos la resolución de la segunda tarea. Resolver la primera tarea tomó entre 11 y 15 minutos y la segunda tomó 9, 18 y 24 minutos.

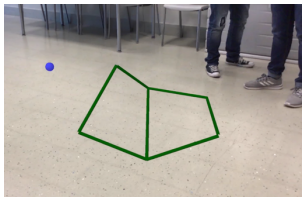
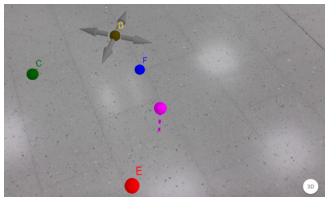
a)  b) 

Figura 1. Tareas de reconocimiento de formas (a) y de alineación de puntos (b)

Los datos recogidos provienen del registro audiovisual de lo que ocurría en las pantallas del iPad (captura de pantalla), los movimientos que hacían los estudiantes y lo que estudiantes e investigadores verbalizaban (cámara externa) durante la sesión cuando surgía alguna inquietud o el investigador quería conocer con mayor detalle alguna estrategia. Cuando un estudiante finalizaba la tarea, explicaba verbalmente el procedimiento llevado a cabo y los motivos por los que consideraba que su solución era correcta. Para el análisis de la información, hemos utilizado el marco teórico detallado antes, caracterizando la actividad de visualización y el pensamiento geométrico espacial exhibidos por los estudiantes a partir de su interacción con el iPad y sus verbalizaciones.

RESULTADOS: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES DE LOS ESTUDIANTES

Primero describimos las interacciones con la RA observadas al resolver la tarea. Después, apoyados en estas interacciones y algunas verbalizaciones, analizamos el proceso de solución. Por motivos de espacio, seleccionamos y analizamos dos estudiantes, cuyas actuaciones al resolver la tarea permiten ilustrar diferentes aproximaciones con la RA y niveles de pensamiento geométrico espacial.

Tipos de interacciones de los estudiantes con la RA

Durante la resolución de la segunda tarea, los estudiantes evidenciaron diversas estrategias de interacción con la RA, es decir de movimiento por el aula y de arrastre de los puntos en la pantalla para tratar de alinear los puntos:

- Interacción i1: Se para en una posición fija y observa la nube de puntos. Arrastra los puntos para alinearlos de acuerdo con su percepción visual.
- Interacción i2: Se para en una posición fija y observa la nube de puntos. Arrastra los puntos para alinearlos con el apoyo de líneas observadas en elementos del entorno, como suelo, paredes, mesas, etc.
- Interacción i3: Se para en una posición fija y observa la nube de puntos. Arrastra los puntos para alinearlos prestando atención a las líneas de proyección en el plano z =0.
- Interacción i4: Se para en una posición fija, elije un punto y ubica los demás detrás de ese.
- Interacción i5: Se sitúa en distintas posiciones para observar desde cada una la nube de puntos.

Arrastra los puntos para alinearlos; se mueve a otra posición, verifica si se mantienen alineados y, en caso necesario, arrastra puntos para volver a alinearlos; repite el procedimiento las veces necesarias. Todo ello, con el apoyo de la percepción visual.

- Interacción i6: Se sitúa en distintas posiciones para observar desde cada una la nube de puntos. Arrastra los puntos para alinearlos; se mueve a otra posición, verifica si se mantienen alineados y, en caso necesario, arrastra puntos para volver a alinearlos; repite el procedimiento las veces necesarias. Todo ello, con el apoyo de la percepción visual y de líneas observadas en elementos del entorno.

Análisis de las resoluciones de la tarea

Para preservar su anonimato, llamamos a los estudiantes E1 y E2. E1 siguió la estrategia i3, hasta afirmar que había terminado la tarea. Cuando el profesor le solicitó que explicara la validez de su construcción, E1 se basó en la colinealidad de las proyecciones en pantalla: *las líneas* [proyecciones de los puntos] *coinciden con esta línea* [punteada rosada] *que me sirve de guía* (Figura 2a). El profesor le pidió que cambiara su posición, con lo que vio que su solución no era válida (E1: *Se mueven* [los puntos]) y que la pantalla debía mostrar los puntos colineales desde cualquier posición (E1: *Entonces, hay una forma desde la que todas las perspectivas se ven rectas*). E1 realizó nuevamente i3, a la vez que se movía para observar la construcción desde distintos ángulos: *¿Cómo hacemos para que queden fijos? Yo he conseguido hacerlo desde una perspectiva, no de todas, se mueven*.

E1 utilizó la estrategia i1 en varias ocasiones sin éxito (Figura 2b), pues, al cambiar de posición, se rompía la colinealidad: *Es que se mueven, debe haber un tipo de estrategia* (Figura 2c). En algunas oportunidades integró i3 a i1, pero el resultado era el mismo. Esta secuencia de intentos fallidos llevó a E1 a mostrar algo de impotencia: *Utilice la forma que utilice, no da... No sé cómo fijarlos*.

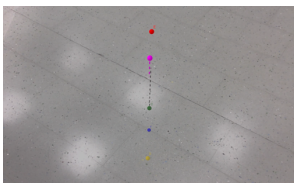
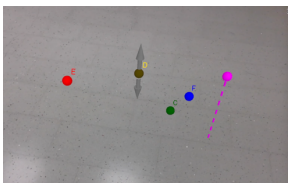
a)  b)  c) 

Figura 2. Primeras estrategias de solución de E1

E1 cambió de estrategia y utilizó i4: *Y si los pongo todos en el* [punto] *E…*, con lo cual los tres puntos manipulables quedaron detrás del punto rojo E (Figura 3a). Cuando cambió su posición notó que el punto E y los otros tres que manipuló estaban ligeramente alineados: *Más o menos me sale, pero no los he cuadrado exacto debajo del punto E…* (Figura 3b). El profesor le explicó que no debía preocuparse por la precisión, solo por lograr una buena aproximación y que observara que uno de los puntos no satisfacía aún la condición (Figura 3c). El ya era consciente de ello:

E1: He utilizado una táctica, que *es* poner todos en [detrás de] el E, pero no los puedo poner todos exactamente porque entonces [el punto E] me lo[s] tapa y no lo[s] veo. Parecía que, desde varias perspectivas, no todas, varias, sí que estaban [alineados; se desplaza para mostrar los puntos alineados, Figura 3a]. Lo que pasa es que no puede ser exacto. Ahí, más o menos. Y me estiro así [se aleja de la construcción] y aquí coinciden [Figura 3b], más o menos. Pero luego vamos a probar otra [posición]… aquí ya no [Figura 3c, el punto rosa no está alineado].

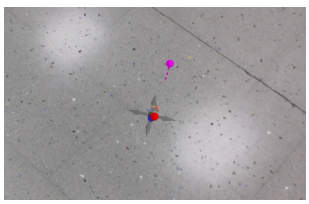
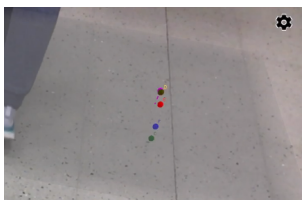
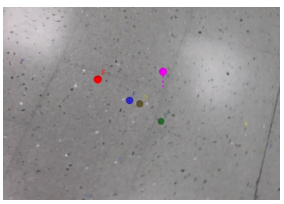
a)  b)  c) 

Figura 3. Colocar todos los puntos tras otro

E1 reconoció en i4 una forma efectiva de alinear los puntos, sin embargo, no era consciente que la limitación de esta estrategia residía en tomar únicamente uno de los dos puntos fijos como referente. Este estudiante replicó i4 y observó la representación desde distintas perspectivas: *El rosa tiene que ir incluido en los puntos colineales, ¿no?* Ante la respuesta afirmativa, E1 retomó i1 e i4 sin éxito alguno. Parece que aun no era consciente de la ineficacia de estas estrategias tal como las había usado hasta ahora. Al final E1 reconoció que i3 no era efectiva: *Si yo, por ejemplo, intento hacer la misma línea* [punteada] *con todos así… tampoco vale, porque hay una perspectiva en la que se ve* [colinealidad] *y en las otras no*. En un último intento, E1 ejecutó nuevamente i1 y, sin moverse, ejecutó i4. Al observar la construcción desde distintas posiciones, notó que el punto verde cumplía la condición y que el azul estaba próximo a cumplirla (Figura 4a). Arrastró los puntos amarillo y azul, ajustando su posición respecto a los otros hasta obtener la colinealidad (Figura 4b). Pese a ello, no era consciente de cómo lo había realizado: *Te digo una cosa, no sé cómo lo he hecho*.

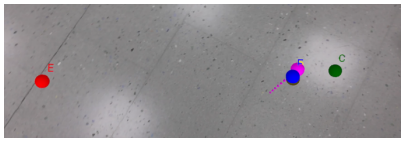
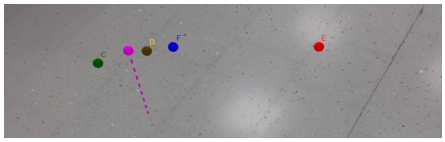
a)  b) 

Figura 4. Último intento de alinear los puntos

Las acciones iniciales de E1 sobre los puntos en pantalla y las expresiones que las acompañan reflejan un nivel 1 de pensamiento (Tabla 1). E1 se apoya en una representación externa plana provista por la pantalla al mantenerse en una sola posición, desde la cual arrastra los puntos hasta que se ven alineados gracias a las líneas de proyección de estos sobre el plano z = 0. Sus verbalizaciones, al ver los puntos desde otras posiciones, dejan ver que E1 no reconoce propiedades 3d en la configuración estudiada. La interpretación de la información que realizaba era básica, ligada a una única representación externa, con la que ha interactuado, por lo que su imagen mental de la nube de puntos inicial es estática e incompleta.

Después, E1 integra otras representaciones a su labor, pero sigue apoyado solo en una para manipular los puntos, usando la segunda para corroborar la colinealidad. En este caso, su nivel de pensamiento es 2a ya que, aunque no manipula distintas representaciones externas para alcanzar el resultado, sí hay un razonamiento sobre la forma de verificar la validez de sus acciones con estas, lo cual se evidencia al expresar la necesidad de una estrategia que le permita alcanzar la colinealidad. Así pues, parece que la imagen mental que ha formado mejora por el uso de varias representaciones externas y no es tan básica como antes, aunque parece seguir siendo estática.

La estrategia de colocar los puntos detrás de otro le permite a E1 reconocer oportunidades y limitaciones, como la imposibilidad de solucionar la tarea al dejar un punto fijo fuera de la configuración. En este caso, hay una manipulación de distintas representaciones, aunque su razonamiento no es adecuado al no contemplar el segundo punto fijo. Por lo tanto, se sitúa en el nivel de pensamiento 2c. Sus expresiones y las representaciones externas a las que acude como soporte dejan ver un beneficio en su imagen mental. Al final, E1 reconoce las limitaciones y bondades de cada estrategia empleada, pero no usa esta experiencia para articular de buena forma sus acciones. Sin tener conciencia de cómo lo hace, una composición de estrategias lo lleva a resolver la tarea. E1 exhibe una manipulación de las representaciones y un razonamiento apoyado en los objetos tridimensionales al hablar de las estrategias empleadas, aunque este no es totalmente válido por la ausencia de articulación en sus ideas. De esta forma, sigue evidenciando el nivel 2c.

Analizamos ahora las acciones realizadas por el estudiante E2. E2 empezó utilizando la estrategia i2, usando las divisiones de las baldosas del suelo (Figura 5a). Reconoció que esto no era acertado, pues el punto rojo, que es un punto fijo, no estaba en esta línea, así que rotó la construcción hasta que los puntos fijos (rosa y rojo) quedaron sobre la línea del suelo (Figura 5b). Entonces, E2 ejecutó nuevamente i2, logrando la colinealidad desde la posición adoptada (Figura 5c).

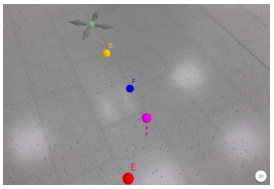
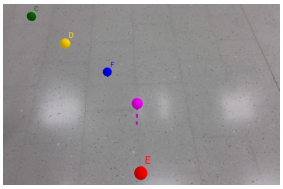
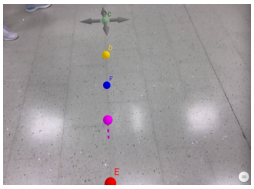
a)  b)  c) 

Figura 5. Uso de referentes externos

E2 afirmó: *Vale, ya tengo esta… lo que va a pasar es que uno* [de los puntos] *va a estar más alto que el otro*, por lo que se desplazó para cambiar la representación en pantalla, hasta que los puntos no se vieran colineales (Figura 6a). En esta nueva perspectiva utilizó i1 hasta lograr la colinealidad desde la vista a la que tenía acceso (Figura 6b). Esto último le permitió colocar todos los puntos a la misma "altura". E2 cambió su posición y observó la construcción desde la parte superior, donde manipuló los puntos, bajo un esquema i5, hasta lograr la colinealidad solicitada (Figura 6c).

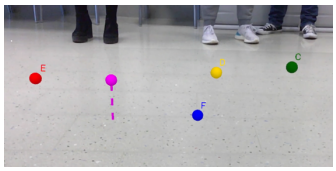
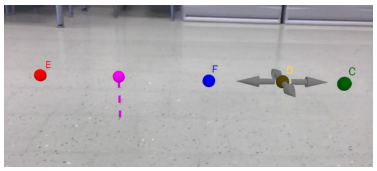
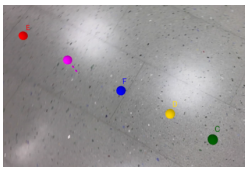
a)  b)  c) 

Figura 6. Alineación vertical de los puntos

E2 corroboró su construcción observándola desde distintas posiciones y dijo que había terminado. En algún momento el profesor le pidió que observara la construcción desde abajo, posición no alcanzable por lo bajo que estaban los puntos. E2 dijo: *No sale, por que está más bajo que yo… pero bueno, si se ve desde arriba, se verá desde abajo, ¿no?* Cuando se le pidió explicar por qué su estrategia era válida, E2 aseguró: *Están uno detrás del otro, porque lo mire desde donde lo mire, no está uno más bajo o alto que el otro*.

Destaca que, en sus acciones, E2 aprovecha el entorno físico, aspecto favorecido por la RA, y que reconoce su error en el primer intento, pues no puede alinear un punto fijo con los otros, lo que moviliza un ajuste en su representación en pantalla. A diferencia de E1, este estudiante toma los dos puntos fijos como referencia. Antes de ejecutar cualquier otra acción, E2 sospecha que los puntos no están a la misma altura, por lo que busca una nueva posición en que esto se aprecie mejor y le permita manipular los puntos en atención a ello. La estrategia de E2 combina dos perspectivas, que le permiten solucionar la tarea. Se aprecia el nivel 3 en su pensamiento, dado que anticipa la configuración de los puntos al realizar la primera manipulación y, con ello, muestra que está razonando sobre propiedades geométricas de estos objetos. Además, la segunda manipulación que realiza responde a una necesidad expuesta.

La imagen mental que refleja E2 es amplia y dinámica, no solo por las representaciones externas que elabora para materializar sus ideas y que le permitan operar para obtener nueva información, sino también por las habilidades de visualización que exhibe cuando considera innecesario ver los puntos desde debajo para corroborar que son colineales.

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

El experimento realizado con apoyo de la GD3d y la RA permitió reconocer formas de interactuar de los estudiantes con los puntos en pantalla, así como limitaciones y oportunidades de este entorno. Las limitaciones se debían a considerar las imágenes de la pantalla como bidimensionales. Esto ilustra cómo una configuración tridimensional es interpretada como bidimensional, aunque no sabemos si esta limitación es por el medio empleado o la falta de experticia de los estudiantes. El experimento permitió ver que los PGD, en nuestro caso RA, dada la posibilidad de manipulación y acceso a distintas vistas continuas, facilitó a los estudiantes contar con varias representaciones de la configuración estudiada, adoptar estrategias para corroborar si sus acciones sobre los puntos eran acertadas y tomar

decisiones sobre las acciones a realizar posteriormente. Aun así, adoptar estas prácticas no es intuitivo y puede requerir experiencias cuidadosamente diseñadas.

El experimento permitió ver diferencias en los niveles de pensamiento de los estudiantes y cómo en un caso estos se transformaron gracias a la experiencia que se adquiría al interactuar con la RA. Sin embargo, los niveles presentados corresponden a una configuración geométrica sencilla, en la que intervenían apenas puntos. Considerar una configuración en la que otros objetos de la geometría espacial intervengan (p. ej., poliedros), lleva a contemplar la necesidad de realizar esfuerzos de largo alcance que permitan a los estudiantes alcanzar niveles de pensamiento tridimensional superiores. Aun cuando se cuenta con PGD tridimensionales, estos por su propia cuenta no garantizan acceder a dichos niveles y otorgan un rol relevante a la gestión del profesor. Como se vio en este experimento, los PGD apoyan la dimensión de manipulación, aun cuando no de manera sencilla, pero la de razonamiento requiere esfuerzos aun mayores.

La RA es una tecnología emergente que ofrece la posibilidad de interactuar con objetos geométricos y el entorno mismo en que estos se representan. Entre estas formas de interacción muchas aludían a acciones físicas sobre el cuerpo. Hemos mostrado en el desarrollo de una tarea aparentemente sencilla la complejidad que puede acarrear el uso de esta tecnología en términos instrumentales y conceptuales. Esta idea bien podría aplicar a los PGD tridimensionales en general. Al proponer una tarea en la que se requería apenas el arrastre de puntos y el cambio de perspectivas de la configuración geométrica, se pudo observar un abanico de posibilidades y problemáticas. Considere ahora lo que ocurriría al involucrar en estos ambientes digitales objetos como poliedros, superficies y otros similares. Por lo anterior, se ve la necesidad de realizar mayores esfuerzos investigativos que permitan caracterizar el impacto de estos recursos en el aprendizaje de la geometría espacial.

Esta investigación forma parte del proyecto I+D+i EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y de la ayuda predoctoral EDU2017-84377-R.

REFERENCIAS

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–19). Valencia: PME.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9*(2), 53–83.

Jones, K., Fujita, T., y Kunimune, S. (2012). Representations and reasoning in 3-D geometry in lower secondary school. En T.-Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 2, pp. 339–346). Taipéi, Taiwan: PME.

Kondo, Y., Fujita, T., Kunimune, S., Jones, K., y Kumakura, H. (2014). The influence of 3D representations on students´ level of 3D geometrical thinking. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting PME 38 and PME-NA 36*. (Vol. 4, pp. 25–33). Vancouver: PME.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., y Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275–304). Leiden, Países Bajos: Sense Publishers. https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789087901127_011

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79–92.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM, 48*(5), 691–719.

Tomaschko, M., y Hohenwarter, M. (2019). Augmented Reality in Mathematics Education: The Case of GeoGebra AR. En T. Prodromou (Ed.), *Augmented reality in educational settings* (pp. 325–346). Leiden, Países Bajos: Brill | Sense. https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789004408845_014

ESTRATEGIAS DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE EN LAS AULAS DE MATEMÁTICAS Y DE FÍSICA

Strategies of simple proportion in math and physics classroom

Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este trabajo analizamos las estrategias utilizadas por alumnado de 3º de ESO y 1º de Bachillerato en la resolución de problemas de proporcionalidad simple en aula de matemáticas y en el aula de física. El análisis se centra en valorar la tasa de éxito y en identificar las estrategias utilizadas, sean correctas o incorrectas. Los resultados muestran que el alumnado de 3º de ESO usa una mayor variedad de estrategias. En contraposición, el alumnado de 1º de bachillerato obtienen una mayor tasa de éxito. También indican que, indiferentemente del curso del alumnado, las estrategias utilizadas en el aula de física varían de las utilizadas en el aula de matemáticas.

Palabras clave: *proporcionalidad, educación secundaria, actividades intercurriculares, análisis de estrategias*

Abstract

In this work we analyse the strategies used by students of 3rd of ESO and 1st of Baccalaureate in solving problems of simple proportionality in the mathematics classroom and in the physics classroom. The analysis focuses on assessing the success rate and identifying the strategies used, whether correct or incorrect. The results show that 3rd ESO students use a greater variety of strategies. In contrast, the students of 1st baccalaureate obtain a higher success rate. They also indicate that, regardless of the student's course, the strategies used in the physics classroom vary from those used in the mathematics classroom.

Keywords: *proportionality, secondary education, cross-curricular activities, analysis of strategies*

INTRODUCCIÓN

La proporcionalidad es un concepto presente en el currículum de Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Postobligatoria (bachillerato), siendo en el currículo catalán de matemáticas un contenido clave en las etapas obligatorias. Lesh, Post y Behr (1998), lo describen como concepto fundamental para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares ya que supone la culminación de la aritmética elemental y es la piedra angular para adquirir muchos conocimientos posteriores (Martínez, Muñoz y Oller, 2015). También está implícitamente presente en física, siendo la cinemática, y concretamente el movimiento rectilíneo uniforme, un caso utilizado en varios estudios donde analizan las estrategias usadas por el alumnado de distintas edades en relación con la proporcionalidad (Cramer y Post, 1993; Lamon, 1993; Park, Park y Kwon, 2010). Pese a ser el mismo conocimiento, es posible que los métodos utilizados para afrontar la proporcionalidad por parte del alumnado sean diferentes en física y en matemáticas. Un ejemplo en este sentido lo presentan Monterrubio-Pérez, González-Astudillo, García-Olivares, Rodríguez-Cornejo y Rodríguez-Barrueco, (2019) en un estudio sobre desconexión entre matemáticas y física percibida por el alumnado de 4º de ESO, donde resuelven un problema de cinemática. Otro ejemplo más detallado de esta diferencia lo muestra el estudio con relación al concepto de pendiente en gráficos lineales de Planinic et al., (2012). Estudiar esta situación en otras edades y otros conceptos clave, como la proporcionalidad, es relevante para ampliar el conocimiento sobre conexiones entre disciplinas.

Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Estrategias de proporcionalidad simple en las aulas de Matemáticas y de Física. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 587 – 594). Valencia: SEIEM.

Conjeturando que los métodos puestos en práctica por el alumnado en problemas de proporcionalidad serán diferentes en el aula de física y en el aula de matemáticas, nos proponemos realizar un estudio exploratorio centrado en la identificación de las estrategias que utilizan los alumnos ante dichos problemas para estudiar la forma en la que las diferentes tradiciones propias de cada una de estas disciplinas condicionan el trabajo de los alumnos.

Por consiguiente, y buscando ampliar este campo de investigación, el propósito principal del trabajo es analizar las respuestas del alumnado de distintos niveles educativos a determinados problemas de proporcionalidad de valor perdido relacionados con movimiento rectilíneo uniforme en el aula de física y en el aula de matemáticas. En particular, nos centramos en:

- Estudiar la tasa de éxito del alumnado resolviendo los problemas.
- Analizar las estrategias utilizadas por el alumnado.
- Observar similitudes y diferencias de los anteriores puntos según el grado de nivel educativo y aula de trabajo

MARCO TEÓRICO

En relación con la clasificación de problemas de proporcionalidad, Cramer y Post (1993) clasifican dichos problemas en dos tipos: problemas de comparación numérica y problemas de valor perdido. Por otro lado, Lamon (1993) clasifica los problemas de proporcionalidad en cuatro tipos según la estructura semántica: problemas de medidas bien compactadas, parte-parte-todo, conjuntos asociados y ampliadores-reductores. Según el contenido de las actividades, aquellas que comprenden más de una disciplina, como en el caso de matemáticas y física, son denominadas actividades intercurriculares (Alsina, 1998). Las cuales se subdividen en tres tipos (Michelsen, 1998): actividades (tipo I) de una materia que contienen ciertos aspectos de otra, actividades (tipo II) donde hay una gran coordinación entre dos o más materias y actividades (tipo III) de tipo temático, donde interactúan varias materias, pero difícilmente se puede distinguir.

En referencia a las magnitudes utilizadas, podemos clasificar los problemas en razones internas y externas (Freudenthal, 1978), siendo las internas aquellas razones que corresponden a una misma magnitud y las externas aquellas que se dan en términos de distintos sistemas, por ejemplo, espacio y tiempo. Continuando con la razón, Fernández y Llinares (2010) determinan que el tipo de razón influye a la hora de resolver el problema correctamente. Añadir en este campo el trabajo de Nunes, Deli y Bell (2003) el cual indica que los problemas de proporcionalidad con magnitudes intensivas en el enunciado son más complicados que los que solo contienen extensivas, asociándolo a la familiaridad del alumnado con estas últimas.

En los estudios de identificación y análisis de estrategias del alumnado en problemas de proporcionalidad resulta muy interesante el trabajo desarrollado por Lamon (1993) con alumnado de 6º grado en el que categoriza las estratégicas en seis tipos: visual o aditivo, evasivo, construcción de patrón, razón proporcional, razón de proporción cuantitativa y razón de proporción cualitativa. Cramer y Post (1993), con alumnado de 7º y 8º grado determina cuatro estrategias diferenciadas: reducción a la unidad, algoritmo de producto cruzado, fracción equivalente y razón numérica como operador, agrupando las respuestas incorrectas en una misma categoría. Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel (2009) ofrecen una nueva clasificación centrándose en estrategias utilizadas por alumnado en problemas de valor perdido en primaria, dividiéndolas en aditivas o multiplicativas. Fernández y Llinares (2010) plantean una clasificación similar refiriéndose a ellas como aditivas o proporcionales, remarcando la tendencia del alumnado a utilizar mayoritariamente las proporcionales a medida que avanza de estudios de educación primaria a estudios de secundaria. En el estudio de Park, Park y Kwon (2010) aparecen nuevas categorías respecto los anteriores, añadiendo la fórmula matemática para referirse a la expresión algebraica de la velocidad bajo el modelo físico. En los estudios similares de otras disciplinas científicas encontramos estrategias no

presentes en los estudios de didáctica de la matemática anteriormente mencionados. Gabel, Sherwood y Enochs (1984) obtienen como resultado de su estudio sobre habilidades del alumnado de educación secundaria en la resolución de problemas de química, que el alumnado con una gran habilidad en el uso del razonamiento proporcional tiende a usar estrategias algorítmicas de forma más frecuente siendo el factor de conversión la estrategia más utilizada. Observamos una gran variedad de estrategias en la resolución de problemas de proporcionalidad simple. Su utilización está influenciada por la estructura semántica del problema, aun así, la estructura numérica influye en la tasa de éxito y en la estrategia utilizada de manera más determinante que la estructura semántica (Steinthorsdotti, 2006).

MÉTODO Y MUESTRA

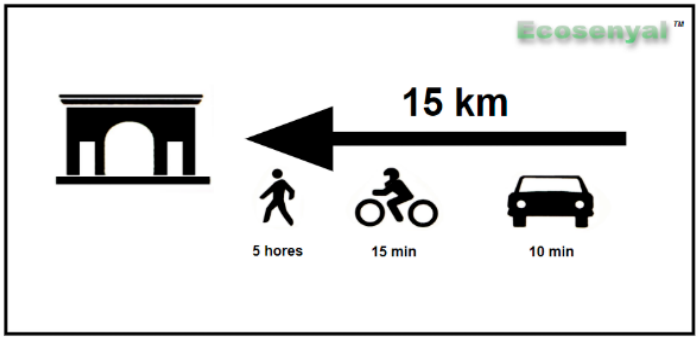
Acorde con los objetivos de investigación se plantea una metodología mixta. Los datos cualitativos se desprenden de la identificación y categorización de los métodos utilizados por los alumnos que se realiza mediante análisis de contenido. Los datos cuantitativos los aporta la descripción estadística de la población a partir de las categorías cualitativas establecidas a partir del análisis (Berg, 2007).

La muestra del estudio consta de 190 alumnos de 4 centros públicos del área metropolitana de Barcelona. Se trata de una muestra por conveniencia (Mejía, 2000) formada por alumnado de 3º de ESO y 1º de Bachillerato (Tabla 1). En cada uno de los niveles educativos se realizaba la prueba una única vez por alumno, llevándose a cabo en el aula de física o en el aula de matemáticas, con su profesor habitual y como actividad ordinaria de aula, sin instrucción específica previa sobre proporcionalidad.

Tabla 1. Clasificación del alumnado muestra según nivel educativo y aula en la que realizó la prueba

Grupos	Cantidad Alumnado
Alumnado de 3o de ESO en el aula de matemáticas	53
Alumnado de 3º de ESO en el aula de física	60
Alumnado de 1º de Bachillerato Científico en el aula de matemáticas	31
Alumnado de 1º de Bachillerato Científico en el aula de física	46

Para dar respuesta a los objetivos se diseñó y se aplicó un problema al alumnado en aula de física o en la de matemáticas. Posteriormente se analizaron las respuestas escritas. El problema aplicado consta de una imagen inicial que representa una señal informativa de tránsito seguida de un enunciado y cinco subapartados (Figura 1). El enunciado de la prueba es el siguiente:



La empresa Ecoseñal está trabajando en una nueva señalización viaria para generar conciencia ecológica sobre el transporte. Esta señal indica la distancia a una zona monumental y el tiempo estimado para llegar utilizando diferentes medios de transporte.
Responde las siguientes preguntas explicando el proceso que realizas en cada caso:
1) ¿Qué nuevos datos deberían aparecer bajo las figuras de la persona, la motocicleta y el coche en un cartel si la distancia a recorrer fuese de 30 km?
2) ¿Qué nuevos datos deberían aparecer bajo las figuras de la persona, la motocicleta y el coche en un cartel si la distancia a recorrer fuese de 7,5 km?

3) ¿Qué nuevos datos deberían aparecer bajo las figuras de la persona, la motocicleta y el coche en un cartel si la distancia a recorrer fuese de 25 km?
4) ¿Qué nuevos datos deberían aparecer bajo las figuras de la persona, la motocicleta y el coche en un cartel si la distancia a recorrer fuese de 4 km?
5) En un nuevo cartel se indica la cantidad, en gramos, de dióxido de carbono (CO_2) que se emite a la atmosfera con cada medio de transporte: 29g, 1275g y 2100 g. ¿Qué datos deberían aparecer en un cartel si se expresan las cantidades en litros? La densidad del CO_2 es de 1,87g/l

Figura 1. Enunciado de la prueba.

El problema se diseña con subapartados que involucran dos magnitudes extensivas, espacio y tiempo, generando una razón externa (Freudhental, 1978) y un único apartado con la magnitud intensiva de la densidad. Las razones externas son simples en los primeros apartados y crecen en complejidad, buscando un cambio de estrategia aplicada por el alumnado (Cramer y Post, 1993). Se opta por cantidades numéricas naturales en los enunciados para facilitar los cálculos (Steinthorsdottir, 2006) y se proponen valores que generan razones enteras, inicialmente, y se varía a no enteras, acorde al aumento de dificultad con razones no enteras (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009; Fernández y Llinares, 2010). La estructura semántica es de medidas bien compactadas (Lamon, 1993) y de tipo valor perdido (Cramer y Post, 1993). El contenido de la prueba, movimiento rectilíneo uniforme, se basa en las actividades de tipo 2 (Michelsen 1998), con gran coordinación entre dos materias, matemáticas y física, y se incluye una actividad relacionada con la densidad añadiendo química como disciplina.

ANALISIS

A partir de la literatura estudiada y recogida en el marco teórico, y tal y como se detalla en la tabla 2, se establecieron 11 categorías atendiendo a las estrategias usadas por el alumnado:

Tabla 2. Estrategias utilizadas por alumnado en la resolución de la prueba

Estrategia	Código
Sin respuesta	NC
Reducción a la unidad (Cramer y Post, 1993)	Ru
Algoritmo del producto cruzado (Cramer y Post, 1993)	R3
Aditivas (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009)	A
Razonamiento proporcional cualitativo “Comparación” (Lamon, 1993)	C
Reducción tomando la unidad como valor arbitrario (Park, Park y Kwon, 2010)	Rd
Multiplicación o división (Park, Park y Kwon, 2010)	D
Fracción equivalente (Cramer y Post, 1993)	Fe
Razón numérica como operador (Cramer y Post, 1993)	R
Factor de conversión (Gabel, Sherwood y Enochs (1984)	FC
Fórmula matemática (Park, Park y Kwon, 2010)	F

Utilizando la tabla 2 y los ejemplos de la literatura indicada en cada estrategia en dicha tabla se realiza un análisis de contenido de las respuestas del alumnado. Ejemplificaremos el análisis realizado a partir de un caso concreto en el que el alumno utiliza el factor de conversión (Figura 2). Se caracteriza por utilizar una fracción como operador. Una fracción que representa una equivalencia entre dos magnitudes o una equivalencia de diferente orden dentro de la misma magnitud. Dicho operador debe colocarse de tal forma que el análisis dimensional de como resultado la magnitud solución. En el caso de la imagen, utiliza la equivalencia entre las magnitudes de volumen y masa (densidad) como operador, colocando la masa como denominador y el volumen como numerador de tal forma que el resultado dimensional sea el volumen.

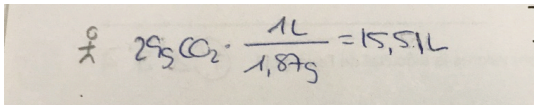


Figura 2. FC: Factor de conversión

Otros ejemplos de estrategias identificadas y recogidas en la tabla 2 son:

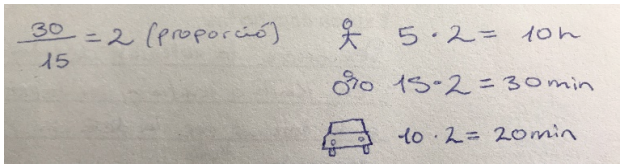


Figura 3. R: Razón numérica como operador.

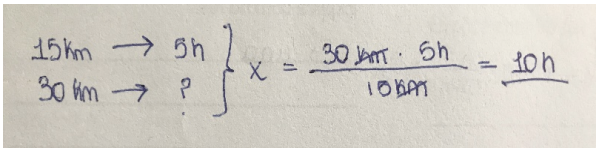


Figura 4. R3: Algoritmo cruzado o regla de tres

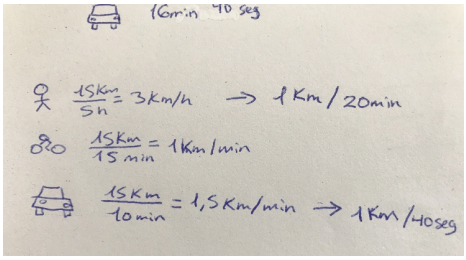


Figura 5. Ru: Reducción a la unidad.

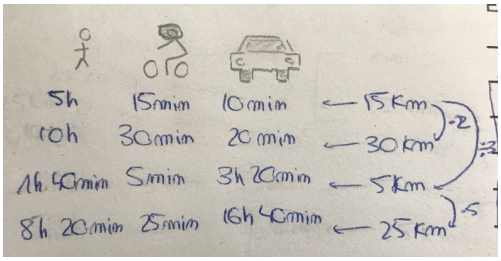


Figura 6. Rd: Reducción unidad como valor arbitrario

RESULTADOS

Análisis cuantitativo de las respuestas

El análisis cuantitativo se focaliza en los resultados correctos e incorrectos del alumnado. Como errores se han tenido en cuenta tanto aritméticos como dimensionales. Los resultados se representan en la tabla 3, separándolos por problemas y niveles educativos:

Tabla 3. Tasa porcentual de éxito del alumnado de por actividad (Correcto, Incorrecto, No Contesta)

	1			2			3			4			5		
	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
3º ESO	96,5	3,5	0,0	87,6	5,3	7,1	65,5	12,4	22,1	56,6	15,0	28,3	22,1	23,0	54,9
1º Bch	96,1	2,6	1,3	96,1	3,9	0,0	93,5	5,2	1,3	93,5	5,2	1,3	79,2	13,0	7,8

Comparando actividades, podemos observar la tendencia común de disminución del éxito con la subida de la dificultad de las actividades, especialmente en la actividad 5. Comparando grupos, dicha tendencia es mucho mayor en 3º de ESO que en 1º de Bachillerato. En la mayoría de las actividades, la tasa de éxito en bachillerato es mayor que la de 3º de ESO. También es relevante la disminución de respuestas en blanco de 3º de ESO a 1º de bachillerato.

Análisis cualitativo de las respuestas

Se clasifican las respuestas del alumnado acorde con la tabla 2 y se presentan resultados para alumnado de 3º de ESO según el aula en la que realizaron la prueba. Las tablas relacionan el número de actividad con el porcentaje de respuesta para cada tipo de estrategia:

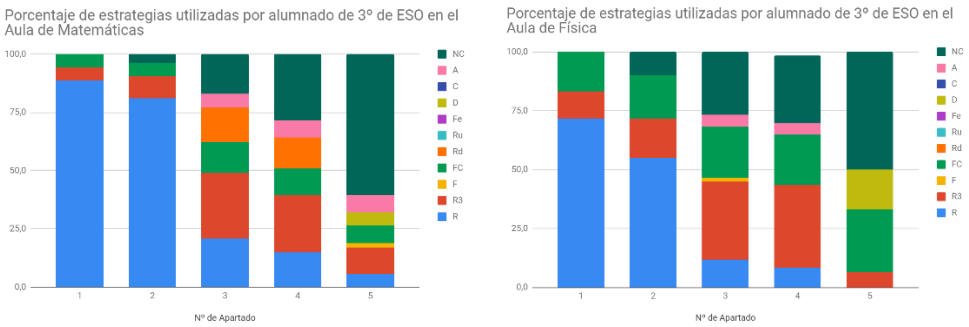


Figura 7. Gráficos de estrategias utilizadas por el alumnado de 3º de ESO

En el caso de bachillerato:

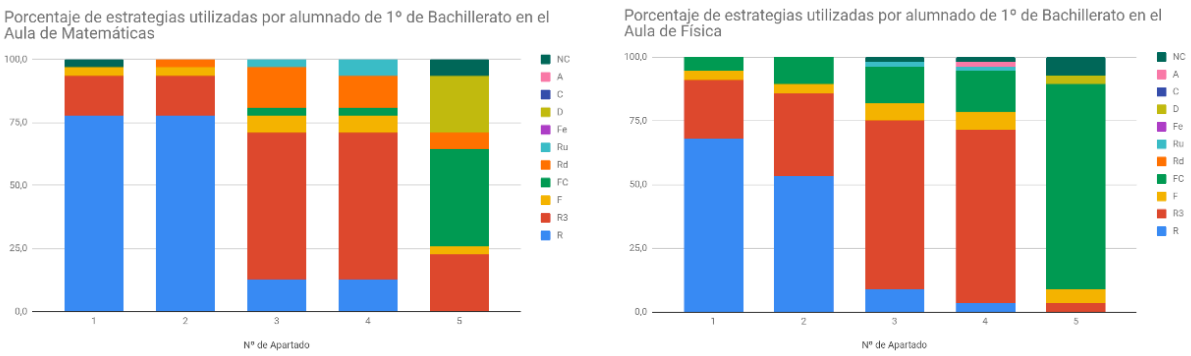


Figura 8. Gráficos de estrategias utilizadas por el alumnado de 1º de Bachillerato

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En primer lugar, los resultados de este estudio muestran una coincidencia con las conclusiones de los estudios de Martínez, Muñoz y Oller, (2015) y Park, Park y Kwon (2010), donde se establece una relación entre el aumento de la tasa de éxito con el nivel educativo y la instrucción recibida, asociándose a la mayor experiencia con problemas y estrategias de proporcionalidad del alumnado. Aun así, la diferencia en la tasa de éxito no es relevante en las actividades 1 y 2, donde se obtiene prácticamente los mismos resultados tanto en 3º de ESO como en 1º de bachillerato. Ambas son actividades de razones simples (Cramer y Post, 1993), deduciéndose que llegado a cierto nivel de instrucción este tipo de problema no plantea un reto para el alumnado.

El aumento progresivo de la dificultad en las actividades, a partiendo de razones enteras y tendiendo a razones no enteras (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009; Fernández y Llinares, 2010), ha facilitado el cambio y la variedad en las estrategias utilizadas por al alumnado en todos los niveles y aulas, como se puede observar en la actividad 3. Esa dificultad se hace más explícita en los resultados obtenidos en la actividad 5, muestra de ello lo encontramos en a la tasa de errores y de respuestas en blanco en 3º de ESO y menos marcada en bachillerato. Esta situación coincide con las conclusiones de Nunes et al. (2003) en las que establece una mayor dificultad para el alumnado realizar problemas con magnitudes intensivas.

En segundo lugar, analizando las estrategias utilizadas observamos que las actividades 1 y 2 se resuelven en su mayoría utilizando la razón numérica como estrategia. A partir del problema 3 augmenta la variedad de estrategias identificadas. En total, se identifican nueve diferentes, las trabajadas en educación primaria y que recogen los estudios de Lamon (1993) o Cramer y Post (1993) así como las identificadas en el estudio de Park, Park y Kwon (2010). Una visión general nos aporta unas estrategias "predilectas" según la disciplina, siendo la razón numérica como operador la más utilizada en matemáticas mientras que en física es la Regla de tres. Hay que añadir la observación de estrategias "exclusivas", aquellas que solo encontramos en una de las dos disciplinas, siendo la Reducción a la unidad tomando un valor arbitrario en matemáticas, mientras que en física es el Factor de conversión. Este hecho podría denotar una influencia relevante por parte de la instrucción en la disciplina respecto a la estrategia utilizada, el ejemplo de física lo encontramos en el factor de conversión, una estrategia trabajada únicamente en el aula de ciencias. Por otro lado, las estrategias aditivas (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009) tienen una presencia prácticamente nula en bachillerato y son poco presentes en 3º de ESO.

Indiferentemente de la tasa de éxito, se constata que el nivel de 3º de ESO presenta una mayor variedad de estrategias que el de bachillerato tanto en el aula de matemáticas como en la de física. Este hecho coincide con el estudio de Gabel, Sherwwod y Enochs (1984), dado que observamos un mayor uso de estrategias algorítmicas en alumnado de bachillerato que en alumnado de ESO. Pero

se abre una pregunta interesante a las razones de las elecciones, pues ambos grupos son conocedores de todas las estrategias y optan por estrategias diferentes.

En el análisis en el ámbito disciplinar, podemos observar que en el aula de física hay menor variedad de estrategias que en el aula de matemáticas indiferentemente del nivel educativo. El contenido disciplinar del problema es relevante en el uso de la estrategia como muestran los resultados para la actividad 5, donde el factor de conversión es la estrategia más utilizada en todo el alumnado. Es interesante destacar el tipo de estrategias utilizada en esta actividad, ya que difiere del resto de actividades. El contenido de la actividad, el cual enmarca el uso de un concepto químico como la densidad, favorece el uso de estrategias diferentes a los problemas que no lo plantean.

CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo nos permiten corroborar las aportaciones de estudios previos, pero también aportan nuevos elementos para estudiar la influencia de la forma de trabajar en cada materia sobre las estrategias de proporcionalidad que usan los alumnos. Se constatan tanto la relevancia de la estructura semántica del problema (Lamon, 1993), la estructura numérica (Steinthorsdottir, 2006) y el tipo de magnitud involucrada (Freudenthal, 1978) en los problemas de proporcionalidad simple de valor perdido (Cramer y Post, 1993) sobre la estrategia utilizada por alumnado.

Nuestros resultados coinciden con Monterrubio-Pérez et al. (2019) indicando que la disciplina del aula en la que se desarrolla la recogida de datos es un elemento determinante en la estrategia utilizada por el alumnado indiferentemente del nivel educativo. Este aspecto es relevante ya que pone de manifiesto que el trabajo disciplinar condiciona al alumnado y acota sus estrategias, dificultando que pueda establecer conexiones entre disciplinas. Si nos centramos en un conocimiento central dentro del currículo de matemáticas como es la proporcionalidad, esta variabilidad de aproximaciones puede condicionar el aprendizaje de los alumnos de diferentes formas. En algunos casos los alumnos establecerán las conexiones entre estrategias por ellos mismos o con ayuda del profesorado, pero en otros casos puede generar bloqueos de aprendizaje al mostrar como distintos conceptos equivalentes.

Si nos centramos en los alumnos de 3º de ESO, encontramos una mayor variedad de estrategias utilizadas indiferentemente de la disciplina en la que se desarrolla la prueba. Este hecho refuerza la conclusión anterior, ya que al aumentar el nivel educativo la parcelación de las disciplinas es mayor, dificultando la conexión de conocimientos entre disciplinas o el trabajo interdisciplinar.

El contenido de los problemas también es un elemento relevante en la estrategia utilizada por alumnado indiferentemente del nivel educativo. Nuestros resultados muestran que una mayor variedad de disciplinas presentes en el enunciado del problema (enunciado 5 con química) aumenta la variedad de estrategias utilizadas. Indicando que las actividades de tipo 2 o interdisciplinares (Michelsen, 1998), enriquecen la variedad estratégica.

Interpretando los resultados desde una perspectiva interdisciplinar de los aprendizajes, nos preguntamos si el trabajo disciplinar limita la conexión conceptual o limita la profundidad con la que se deben aprender conceptos clave como la proporcionalidad. Esta pregunta nos lleva a cuestionarnos si la variedad de estrategias que usan los alumnos en contextos de aula interdisciplinares puede aportar oportunidades de aprendizaje a los alumnos en la que se promueva la conexión entre distintas formas de afrontar los contenidos de proporcionalidad. Por ello entendemos que es necesario explorar en el futuro la variedad de estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad entre el alumnado que trabaja de forma interdisciplinar e indagar en la toma de decisiones de los alumnos al elegir estrategias, para identificar los aspectos de aula específicos que influyen en sus decisiones.

Referencias

Alsina, C. (1998). Mathematics and Cross-Curricular Activities: Bridges Exist for Crossing them. *ZDM 30*(2), 34−36.

Berg, B. L. (2007). *Qualitative research methods for the social sciences.* Boston: Allyn and Bacon.

Cataluña. Decreto 119/2015, de 23 de junio, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primaria. *Diari oficial de la Generalitat de Catalunya*, 26 de junio de 2015, núm. 6900, pp. 76

Cataluña. Decreto 187/2015, de 25 de agosto, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundaria obligatòria. *Diari oficial de la Generalitat de Catalunya*, 28 de agosto de 2015, núm. 6945, pp. 99-112

Cramer, K. y Post. T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404−7.

Fernández, C., Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing, Mathematics as an educational task.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Gabel, D., Sherwood, R. y Enochs, L. (1984). Problem-solving skills of high school chemistry students. *Journal of Research in Science Teaching*, 21(2), 221−233.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for research in Mathematical Education, 24*(1), 41−61

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. En J. Hiebert, y M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93−118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum y NCTM.

Martínez S., Muñoz J. M. y Oller A. M. (2015). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351−359). Alicante: SEIEM.

Mejía, J. (2000). El muestreo en la investigación cualitativa. *Investigaciones sociales 4*(5), 165−180.

Michelsen, C. (1998). Expanding Context and Domain: A Cross-Curricular Activity in Mathematics and Physics. *ZDM, 30*(4), 100−106.

Monterrubio-Pérez, M. C., González-Astudillo, M. T., García-Olivares, A., Rodríguez-Cornejo, P. y Rodríguez-Barrueco, M. J. (2019). ¿Existe desconexión en la enseñanza de Matemáticas y Física en Educación Secundaria? En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. inicial-final). Valladolid: SEIEM.

Nunes, T., Desli, D. y Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research*, *39*(7), 651–675.

Park, J., Park, H. y Kwon, O. (2010). Characterizing proportional reasoning of middle school students. *The SNU Journal of Education Research, 19*, 119–144.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A. y Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1393−1414.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variables influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, y N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 5, p. 169−176). Prague, Czech Republic: PME.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. y Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 187−211.

RESOLUCIÓN E INVENCIÓN DE PROBLEMAS: LA ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN CON RELACIÓN AL PROBLEMA INVENTADO

Problem solving and problem posing: The resolution strategy related to the problem posed

Torregrosa, A., Albarracín, L., Deulofeu, J.

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

El presente estudio muestra una experiencia que incluye resolución e invención de problemas llevada a cabo con dos grupos de alumnos de sexto de educación primaria. La investigación toma como objetivo categorizar los problemas que el alumnado inventa con relación a sus estrategias como resolutores. Los resultados enfatizan que aquellos alumnos que generan buenos problemas de patrones son aquellos alumnos que desarrollan el patrón aritmético como resolutores. En contraposición, aquellos alumnos que no generan problemas de patrones usan como estrategia de resolución la ampliación del dibujo presente en el enunciado del problema que se les propone.

Palabras clave: *invención de problemas, resolución de problemas, educación primaria, patrones matemáticos*

Abstract

The following study shows a problem solving and problem posing experience carried out with two groups of elementary school sixth graders. The research aims to categorize the problems that students pose in relation to their strategies as problem solvers. The results emphasize that those students who generate good pattern problems are students who find the arithmetic pattern as problem solvers. In contrast, those students who do not generate pattern problems expand the drawing of the statement as a resolution strategy.

Keywords: *problem posing, problem solving, elementary education, mathematical patterns*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha introducido la invención de problemas como tema de investigación en Educación Matemática. Si el objetivo de la educación es preparar a los estudiantes para distintos tipos de aplicación del conocimiento, parece razonable que la invención de problemas, como actividad que se complementa con la resolución de problemas, tenga un peso importante como parte del currículo educativo (Cai, Hwang, Jiang y Silber, 2015). Por este motivo la invención de problemas se incluyó dentro del desarrollo de la competencia matemática en la última modificación del currículo catalán de educación primaria (Departament d'Ensenyament, 2016, p.82).

En el presente estudio tomamos como objetivo principal categorizar los problemas que el alumnado inventa en relación con sus estrategias como resolutores. Los datos del estudio se recogieron con dos grupos de sexto grado de educación primaria pertenecientes al mismo centro. Dado que el alumnado no está familiarizado con la resolución de problemas no rutinarios (Mayer, 1985) seleccionamos los problemas de patrones como instrumento principal de la investigación puesto que permiten al alumnado aplicar distintos modos de visualización (McGarvey, 2012) y favorecen la versatilidad del alumnado entendida como la variabilidad de estrategias que pueden aplicar (Montenegro, Costa y Lopes, 2018). Aunque existen en la literatura algunos estudios que analizan

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Resolución e invención de problemas: la estrategia de resolución con relación al problema inventado. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 595 – 602). Valencia: SEIEM.

la relación entre la resolución de problemas y la invención de problemas, encontramos pocas investigaciones que apliquen una secuencia relativamente extensa de resolución de problemas con la finalidad de observar cómo el alumnado adapta o cambia su estrategia de un problema a otro y qué relación tiene este hecho con el tipo de problemas que inventan.

REFERENTES TEÓRICOS

En el presente estudio entenderemos la invención de problemas como una actividad de generación de nuevos problemas o reformulación de problemas dados que puede ocurrir antes, durante o después de una secuencia de resolución de problemas (Silver, 1994). Sobre la definición anterior destacamos dos aspectos relevantes; el momento en el cual se propone la tarea de invención de problemas y la tipología de problemas que se solicita generar.

Siguiendo a Ayllón, Castro y Molina (2011) los contenidos que el alumnado ha trabajado en los meses previos a una tarea de invención de problemas afectan directamente a la dificultad del problema inventado. Por lo tanto, antes de proponer tareas de invención de problemas el alumnado debe haber resuelto otras tareas de contenido similar. La tipología de tareas que el alumnado resuelve también es un factor determinante del éxito durante la invención de problemas. Baumanns y Rott (2018) hallaron una estrecha relación entre la tipología de tareas que el alumnado resuelve y el tipo de tareas que inventa. Cuando el alumnado resolvía un ejercicio o problema rutinario, gran parte de los resolutores generaba nuevos ejercicios de aplicación directa de algoritmos. En cambio, después de resolver un problema no rutinario el alumnado tendía a generar nuevos problemas no rutinarios con gran diversidad de contextos y riqueza matemática. Atendiendo a los resultados de ambos estudios consideramos pertinente proponer la resolución de varios problemas no rutinarios antes de proceder a la invención de problemas. En cuanto a la tipología de problemas que se solicita generar, Stoyanova y Ellerton (1996) diferencian entre situaciones libres, semiestructuradas o estructuradas. Dado que en la presente investigación no concebimos la tarea de invención de problemas sin haber resuelto previamente problemas del mismo contenido, consideraremos las situaciones semiestructuradas como las más idóneas. Baumanns y Rott (2018) entienden las situaciones semiestructuradas como aquellas en las que se ofrece un contexto abierto o contenido general pero la creación del problema toma un formato libre.

Las investigaciones que examinan la relación entre la resolución de problemas y la invención de problemas coinciden en que la habilidad o capacidad que el alumnado muestra al resolver un problema está directamente relacionada con la habilidad o capacidad de inventar un nuevo problema (Baumanns y Rott, 2018; Cai y Hwang, 2002; Silver y Cai, 2005). En la presente investigación seguiremos el estudio de Cai y Hwang (2002) en el que examinaron la relación que existe entre la estrategia que usa el alumnado al resolver un problema de patrones matemáticos y el tipo de problemas que inventan. Sus resultados muestran que aquellos alumnos que usan estrategias abstractas inventan problemas de más calidad que aquellos alumnos que usan estrategias concretas, es decir, arraigadas a las condiciones del problema que se les ha propuesto.

METODOLOGÍA

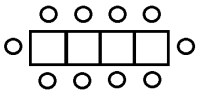
Los datos del presente estudio se recogen durante el trabajo de dos grupos de 25 alumnos de sexto grado de educación primaria pertenecientes al mismo centro educativo. La selección de la muestra es intencional dado que ambos grupos cuentan con poca o nula experiencia en resolución de problemas e invención de problemas. Por lo tanto, consideramos que el tipo de problemas que el alumnado debe generar no estarán tan influenciados por sus experiencias escolares previas.

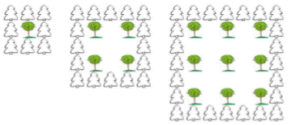
El alumnado resuelve un total de 4 problemas de patrones matemáticos organizados de más sencillo a más complejo atendiendo a la dificultad de hallar el patrón (tabla 1). La selección de dichos problemas se realiza atendiendo a la flexibilidad que caracteriza los problemas de patrones, entendida como la variabilidad de estrategias de distinta complejidad que se pueden aplicar (Callejo

y Zapatera, 2014). En los cuatro problemas presentados, el enunciado escrito se complementa con un dibujo que facilita su comprensión y su resolución en caso de no reconocer métodos aritméticos (Villalonga y Deulofeu, 2015).

Tabla 1. Problemas usados en el estudio numerados de más sencillo a más complejo

<table>
<tr>
<td>PROBLEMA 1 (P1)
Fuente: Arbona, Beltrán, Gutiérrez y Jaime (2017)

Queremos organizar una cena con nuestros amigos, pero no sabemos a ciencia cierta cuantas mesas necesitamos. Lo que sí que sabemos es que queremos poner mesas en una sola hilera y que los amigos se sentaran tal y como se muestra en el dibujo.
 
Si somos 40 amigos, ¿cuántas mesas necesitaremos? ¿Y si somos 100? A última hora nos han confirmado que, en total, seremos 143 amigos. Cuando estemos todos sentados, ¿quedará algún sitio vacío en la mesa? ¿Cómo lo harías? Explícalo.</td>
<td>PROBLEMA 2 (P2)
Fuente: Morera, Chico, Badillo y Planas (2012)

Un agricultor quiere plantar naranjos siguiendo una forma cuadrada y alrededor quiere plantar pinos. Se imagina el siguiente esquema para 1, 2 y 3 hileras de naranjos:
 
¿Cuántos pinos le harán falta si quiere plantar 4 hileras de naranjos? ¿Y si quiere plantar 10 hileras? ¿Cómo lo harías? Explícalo.</td>
</tr>
<tr>
<td>PROBLEMA 3 (P3)
Fuente: Elaboración propia

Juliana ha escrito en una tabla los números naturales 1, 2, 3, 4, 5… poniéndolos como se muestra en el dibujo:
<table>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td>14</td><td>15</td><td>18</td><td>19</td></tr>
<tr><td>12</td><td>13</td><td>16</td><td>17</td><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td>24</td><td>25</td><td>28</td><td>29</td></tr>
<tr><td>22</td><td>23</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>
Ha empezado a mirar la tabla y ha decidido sumar los números que tienen un lado en común con el 10. Así pues, ha sumado 9+7+19=35. Luego ha pensado: “Haré lo mismo con otro número. Sumaré los números que tienen un lado en común con el 100”. Pero… creo que no hace falta que dibuje todos los números.
¿Podrías explicar cómo lo ha hecho Juliana? ¿Qué resultado da la suma de los números que tienen un lado en común con el 100? ¿Y con el 1000? ¿Cómo lo harías? Explícalo.</td>
<td>PROBLEMA 4 (P4)
Fuente: Zapatera (2018)

Anna ha estado jugando a hacer figuras con palillos. Primero ha decidido hacer triángulos de la siguiente manera:
 
Se ha preguntado ¿cuántos palillos le hacen falta si quiere hacer 10 triángulos siguiendo el mismo patrón que en la figura? ¿Y si quiere hacer 20? ¿Cómo lo harías? Explícalo.</td>
</tr>
</table>

Se desarrollan un total de 4 sesiones de dos horas de duración por sesión. En cada sesión, el alumnado dedica una hora a la resolución de cada uno de los cuatro problemas propuestos y una hora más a resolver dos cuestionarios, uno de autoevaluación y otro de coevaluación. Ambos cuestionarios se diseñan como instrumentos de *feedback* (Sanmartí, 2010), por lo tanto, cuentan con preguntas referentes al detalle y la explicación de distintos momentos llevados a cabo durante la resolución. Los cuestionarios persiguen una doble finalidad, en primer lugar, que el alumnado detalle mejor las destrezas y procesos metacognitivos (Wilson y Clarke, 2004) que llevan a cabo durante su resolución pero que generalmente, omiten en el momento en el que resuelven el problema (Villalonga y Deulofeu, 2015). En segundo lugar, que el alumnado explicite tanto la estrategia que usa al resolver el problema como su desarrollo y justificación. Al finalizar las cuatro sesiones de resolución de problemas de patrones, se lleva a cabo una última sesión de una hora de

duración en la que el alumnado inventa individualmente, dos nuevos problemas de patrones que un alumno del grupo sea capaz de resolver. Se plantea esta última tarea de invención de problemas semiestructurados (Stoyanova y Ellerton, 1996) con la finalidad de analizar qué tipología de problemas crea el alumnado con relación a sus estrategias como resolutores.

ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de datos de presente estudio está dividido en dos partes puesto que encontramos una primera parte de la metodología referente a resolución de problemas y una última actividad referente a invención de nuevos problemas. Se presenta la categorización de los productos de los alumnos en cada actividad surgida de un análisis inductivo de las producciones de los alumnos, tal y como realizan Magiera y Zawojewski (2011). Este análisis nos permitió, en primer lugar, establecer tres categorías de estrategias distintas: la ampliación del dibujo propuesto, la continuación de la serie aritmética y las estrategias mixtas. Cuando hablamos de la ampliación del dibujo propuesto, nos referimos a aquellos casos en los que el alumnado amplía el dibujo que aparece en el enunciado hasta llegar a la posición de la secuencia que se le pide (figura 1 - izquierda). Cuando hablamos de la continuación de la serie aritmética nos referimos a aquellos casos en los que el alumnado abstrae la serie que se halla tras el enunciado y el dibujo del problema, y encuentra numéricamente el resultado para la posición solicitada (figura 1 - derecha).

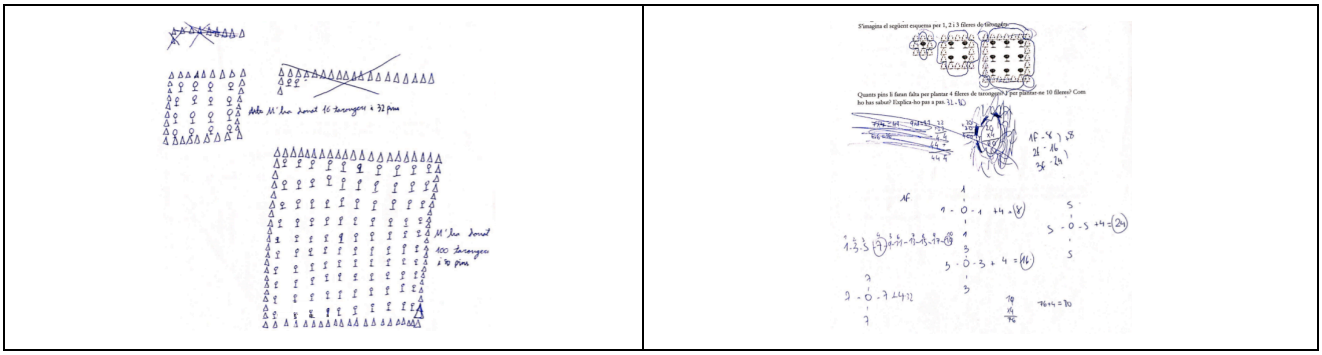


Figura 1. Problema 2 – Ampliación del dibujo (izquierda) y continuación de la serie (derecha)

Finalmente, cuando hablamos de estrategias mixtas, nos referimos a aquellos casos en los que el alumnado amplía el dibujo y también halla la serie aritmética. Dentro de los casos que clasificamos como uso de estrategias mixtas, hallamos alumnos que usan la serie aritmética para confirmar el resultado obtenido a través de la ampliación del dibujo, o bien, alumnos que usan el dibujo en primera instancia – en los primeros casos de la secuencia – y posteriormente, hallan la serie aritmética – en casos más complejos de dibujar – (figura 2).

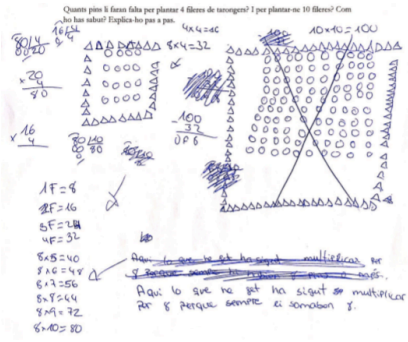
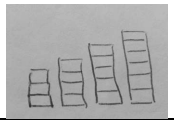
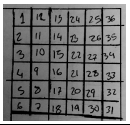
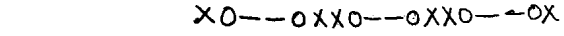


Figura 2. Problema 2 – Estrategia mixta

En referencia a la invención de problemas, hemos establecido cuatro categorías distintas: incomprensible, nulo, réplica de un problema resuelto y elaboración de un problema nuevo (tabla 2). Aquellos problemas clasificados como incomprensibles son los que, por falta de datos o de

información, no pueden ser resueltos en ningún caso. Cuando hablamos de problemas nulos, nos referimos a problemas coherentes y resolubles pero que no son de patrones matemáticos, como pueden ser los de aplicación de algoritmos simples. Cuando hablamos de problemas que replican un problema resuelto, encontramos dos casuísticas distintas: aquellos casos en los que el alumnado copia el patrón de uno de los cuatro problemas que se han resuelto con anterioridad; y aquellos en los que el alumnado replica el contexto de uno de los cuatro problemas resueltos y varía ligeramente los datos que llevan a hallar un patrón distinto. En última instancia, cuando hablamos de elaboración de un problema nuevo, nos referimos a aquellos casos en los que el alumnado genera un problema que cuenta con un patrón y un contexto no trabajado anteriormente.

Tabla 2. Caracterización de los problemas creados por el alumnado

CATEGORÍA	EJEMPLIFICACIÓN
Incomprensible	En una caja fuerte el código empieza con 1,22. Tiene 10 números, ¿qué código es?
Nulo	En una fiesta celebran un cumpleaños 10.500 personas, ¿cuantas mesas necesitan para todos si en cada mesa caben 15 personas?
Réplica de un problema resuelto *Copia el patrón del problema 4 con cambio de contexto*	¿Cuántas columnas más hacen falta para 20 cuadrados? 
Réplica de un problema resuelto *Copia del contexto del problema 3 con cambio del patrón*	¿En qué posición está el número 79? 
Elaboración de un problema nuevo	En un parque, unos niños han dibujado en el suelo una serie. Si esta serie llega a 100 figuras, ¿Cuántas de cada habrá? ¿Y si llega a 200? 

Una vez establecida la categorización de las estrategias de resolución y la categorización de los problemas inventados por el alumnado, se elaboró una tabla de doble entrada donde encontramos caracterizado cada alumno atendiendo a la estrategia de resolución usada en los cuatro problemas propuestos en relación con el problema inventado.

RESULTADOS

De los 68 problemas que el alumnado generó encontramos 8 incomprensibles (11,8%), 26 nulos (38,2%), 26 réplicas de problemas resueltos (38,2%) y 8 problemas nuevos (11,8%). Dividiremos la sección de resultados en dos apartados atendiendo a dos comportamientos distintos. En primer lugar, mostramos qué tipología de estrategias de resolución aplica el alumnado que genera dos problemas nulos y/o incomprensibles y que no tienen éxito durante la tarea de invención de problemas. En segundo lugar, mostraremos qué estrategias de resolución aplica el alumnado que genera réplicas de problemas resueltos y/o problemas nuevos y que tiene éxito durante la tarea de invención de problemas. Esta caracterización del comportamiento de los alumnos nos permite observar y discutir la tendencia general de aquellos alumnos que logran responder a la tarea demandada en relación con el tipo de estrategias de resolución que usan. Las tablas 3 y 4 muestran estos resultados. Para cada uno de los cuatro problemas presentados (P1, P2, P3, P4) se ha establecido la siguiente leyenda atendiendo a la estrategia de resolución: ampliación del dibujo propuesto (D), continuación de la serie aritmética (S), y estrategias mixtas (M). Cuando un alumno se encuentre ausente durante una de las sesiones, se indicará con un punto.

Problemas incomprensibles y nulos

La tabla 3 muestra que 15 alumnos generaron problemas nulos y/o incomprensibles. En gran parte de los casos observamos que el alumnado usa la ampliación del dibujo (D) como estrategia de resolución para resolver los problemas propuestos. Encontramos casos de aplicación de estrategias mixtas sobretodo en el caso del problema 3 donde el alumnado debía hallar cuánto sumaban los números entorno al 100 y al 1000. Al tratarse de un problema en el cual el patrón debía observarse en formato tabla numérica y no en el dibujo, la aparición de estrategias mixtas resulta más abundante puesto que el alumnado podía finalizar parte de la tabla con facilidad (Cai y Hwang, 2002). Sólo encontramos 3 casos puntuales (alumnos 1, 5 y 15) en los que se resuelve uno de los problemas propuestos hallando la serie numérica. En los tres casos, el alumnado usa puntualmente esta estrategia, pero se decanta por estrategias de ampliación del dibujo para resolver los otros tres.

Tabla 3. Caracterización de los problemas nulos e incomprensibles creados por el alumnado

		Problem solving						Problem solving			
Alumno	**Problem posing**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**Alumno**	**Problem posing**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
1	*Nulo* *Nulo*	**D**	**D**	**S**	**.**	22 23	*Incomprensible* *Incomprensible*	**M** **D**	**D** **D**	**M** **D**	**D** **D**
2	*Nulo* *Nulo*	**D**	**D**	**M**	**D**	24	*Incomprensible*	**D**	**D**	**D**	**D**
5	*Incomprensible* *Nulo*	**D**	**D**	**S**	**D**	29	*Nulo*	**D**	**D**	**M**	**.**
11	*Nulo* *Nulo*	**D**	**D**	**M**	**D**	30	*Nulo*	**D**	**D**	**M**	**D**
13	*Incomprensible*	**M**	**D**	**D**	**D**	31	*Nulo* *Nulo*	**M**	**D**	**D**	**M**
15	*Incomprensible*	**D**	**D**	**M**	**S**	42	*Nulo* *Nulo*	**.**	**M**	**M**	**M**
20	*Nulo*	**D**	**D**	**D**	**D**	44	*Nulo* *Nulo*	**M**	**D**	**D**	**D**

Réplicas de problemas resueltos y problemas nuevos

La tabla 4 muestra que 23 alumnos generaron problemas que son réplicas de los problemas resueltos o generaron problemas nuevos. En este caso, las estrategias predominantes son la continuación de la serie aritmética (S) y las estrategias mixtas (M). Observamos que en aquellos casos en los que el alumnado amplía el dibujo en los problemas 1 y 2, se produce un cambio de estrategia en los problemas 3 y 4 a favor del uso de la aritmética total o parcial por considerarse un estrategia más rápida y eficaz para resolver el problema (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, 2020). Los problemas más replicados por el alumnado son el 1 y el 4, que contienen en su enunciado dibujos más simples en comparativa a los de los problemas 2 y 3.

Tabla 4. Caracterización de los problemas replicados y nuevos creados por el alumnado

		Problem solving						Problem solving			
Alumno	**Problem posing**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**Alumno**	**Problem posing**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
3	*Réplica P1* *Réplica P4*	**D**	**M**	**M**	**M**	19	*Réplica P3*	**M**	**M**	**S**	**S**
4	*Réplica P1*	**S**	**S**	**S**	**S**	21	*Réplica P3*	**D**	**M**	**M**	**M**
6	*Problema nuevo*	**D**	**S**	**M**	**M**	27	*Réplica P1*	**M**	**M**	**M**	**S**
7	*Réplica P3*	**S**	**S**	**S**	**S**	28	*Réplica P1*	**S**	**S**	**M**	**S**
8	*Réplica P1* *Réplica P1*	**D**	**D**	**M**	**S**	32 33	*Problema nuevo* *PN*	**M** **S**	**S** **S**	**S** **S**	**S** **S**
9	*Réplica P1*	**D**	**D**	**S**	**S**	34	*Réplica P4*	.	**D**	**S**	**M**
10	*Réplica P2*	**M**	**M**	**S**	**M**	35	*Problema nuevo*	**M**	**M**	**S**	**M**

	Réplica P2					38	*Réplica P4*	**D**	**D**	**M**	**M**
12	*Problema nuevo* *Problema nuevo*	**S**	**S**	**S**	**S**	41	*Réplica P4* *Réplica P4*	**D**	**S**	**S**	**M**
14	*Réplica P3* *Réplica P2*	**M**	**M**	**S**	**S**	42	*Réplica P1* *Réplica P4*	**S**	**S**	**S**	**S**
17	*Problema nuevo*	**D**	**D**	**M**	**S**	46	*Réplica P4*	**M**	**M**	**M**	**M**
18	*Problema nuevo*	**D**	**M**	**M**	**S**						

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Al inicio del presente estudio nos planteamos como objetivo categorizar los problemas que el alumnado inventa en relación con sus estrategias como resolutores. Llegados a este punto, consideramos relevante la comparación de los resultados mostrados en las tablas 3 y 4.

La diferencia más relevante que observamos entre el alumnado que no inventa problemas de patrones y el alumnado que sí los inventa es la evolución que experimentan del primer al cuarto problema entendida como la abstracción del patrón matemático. Aquellos alumnos que usan reiteradamente la ampliación del dibujo propuesto en cada uno de los enunciados (tabla 3) sólo consideran el patrón expuesto en el problema que se les da, por lo tanto, no llegan a abstraer cómo pueden hallar el patrón en cualquier problema que se les proponga y, en conclusión, no generan nuevos problemas de patrones. En contraposición, observamos que aquellos alumnos que acaban hallando el patrón aritmético (tabla 4) e inventan nuevos problemas de patrones, no dependen del contexto particular del problema propuesto ya que podrían hallar otros patrones en contextos distintos usando otros desarrollos aritméticos. Coincidimos con Cai y Hwang (2002) al observar que aquellos alumnos que usan estrategias más abstractas generan problemas de patrones, mientras que aquellos alumnos arraigados a la ampliación del dibujo y que no experimentan algún tipo de evolución, no consiguen generar nuevos problemas de patrones.

Tal y como señalan Ayllón, Castro y Molina (2011) la tarea de invención de problemas presenta dificultades para el alumnado y más aún si tenemos en cuenta que los grupos del presente estudio no resuelven ni inventan problemas asiduamente (Mayer, 1985). Aun y las dificultades halladas, gran parte del alumnado resolvió los problemas propuestos y la mitad del alumnado generó problemas de patrones variados y ricos en contexto. Así pues, coincidimos con Baumanns y Rott (2018) al considerar que la metodología de resolución–evaluación llevada a cabo, así como el carácter semiestructurado de los problemas que el alumnado debía inventar es uno de los factores clave del éxito durante la tarea de invención de problemas planteada. Dicha metodología ha permitido a ambos grupos introducirse en la resolución de problemas de patrones, aplicando estrategias de distinta complejidad (Callejo y Zapatera, 2014) y valorando la adecuación de dichas estrategias tanto en la resolución como en la invención de nuevos problemas. Por lo tanto, en concordancia con Montenegro, Costa y Lopes (2018), la variabilidad de estrategias propia de la resolución de problemas de patrones ha favorecido la participación del alumnado durante la metodología llevada a cabo y ha propiciado que todos los alumnos hallaran resoluciones generalmente válidas a los problemas planteados.

Referencias

Arbona, E., Beltrán, M. J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2017). Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra. En Codina, A. (Coord.), Puig, L. (Coord), Arnau, D., Sánchez, M.T., Montoro, A. B., Carlos, J., Arnal, M. y Baeza, M. A. (Eds.), *Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017* (pp. 38-47). Madrid: Universidad Rey Juan Carlos y SEIEM.

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema difícil por alumnos de educación primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 277-286). Ciudad Real, España: SEIEM.

Baumanns, L. y Rott, B. (2018). Is problem posing about posing "problems"? A terminological framework for research into problem posing and problem solving. En A. Kuzle, I. Gebel y B. Rott (Eds.), *Proceedings of the 2018 Joint Conference of ProMath and the GDM Working Group on Problem Solving* (pp. 21-31). Münster: WTM.

Cai, J. y Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 401-421.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). New York, NY: Springer.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 64-88.

Departament d'Ensenyament (2016). Desplegament de les competències bàsiques. Currículum educació primària. Decret 142/2007, DOGC núm. 4915.

Magiera, M. T. y Zawojewski, J. S. (2011). Characterizations of social-based and self-based contexts associated with students' awareness, evaluation, and regulation of their thinking during small-group mathematical modeling. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(5), 486-520.

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. En E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*(pp. 123–138). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.

McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310-337.

Montenegro, P., Costa, C. y Lopes, B. (2018). Transformations in the visual representation of a figural pattern. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(2), 91-107.

Morera, L., Chico, J., Badillo, E. y Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. *Suma*, *70*, 9-20.

Sanmartí, N. (2010). *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.* Barcelona, España: Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19-28.

Silver, E. A. y Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135.

Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (p. 518–525). Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2020). *Orientación y evaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas.* Artículo entregado para la publicación.

Villalonga, J. y Deulofeu, J. (2015). La base de orientación en la resolución de problemas. En P. A. Sánchez (Ed.), *Actas JAEM 2015 – 17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 36-52. Cartagena, España: FESPM.

Wilson, J. y Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 25-48.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números*, *97*, 51-67.

PRIMERAS EXPERIENCIAS CON UNA TABLA EN SEGUNDO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. APROXIMACIÓN FUNCIONAL AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

First experiences with a table in second of primary education. Functional approach to algebraic thought

Torres, M. D. [a], Brizuela B. [b], Cañadas, M. C. [a] y Moreno, A.[a]

[a] Universidad de Granada, [b] Universidad de Tufts

Resumen

Abordamos este trabajo desde la perspectiva funcional, como un acercamiento al álgebra. Focalizamos nuestra atención en cómo interpretan y usan tablas en el trabajo con funciones los estudiantes[1] de segundo de primaria (7-8 años), en su primer encuentro con la representación tabular. Observamos la forma de organizar los datos en tablas e identificamos las estructuras que evidencian los niños como regularidades entre las variables de las funciones. Llevamos a cabo una entrevista semiestructurada sobre una tarea que incluye una función lineal y en la que hay presente una tabla en blanco sin indicaciones en los encabezados. De nuestro análisis obtenemos que los estudiantes lograron organizar los valores de las variables adecuadamente, relacionándolos por columnas; escribieron encabezados, identificando las variables que intervienen); e identificaron estructuras (relaciones entre variables).

***Palabras clave**: estructura, función, generalización, pensamiento funcional, representación tabular*

Abstract

We approach this study from a functional perspective, as an approach to algebra. We focus our attention on how second grade students (7-8 years), interpret and use tables in function work, in their first encounter with the tabular representation. We observe the way of organizing the data in tables and we identify the structures that the children show as regularities between the variables of the functions. We conducted a semistructured interview on a task that includes a linear function and in which a blank table is present with no indications in the headings. From our analysis we obtain that the students managed to organize the values of the variables appropriately, relating them by columns; they wrote headings, identifying the variables involved); and they identified structures (relationships between variables).

Keywords: *structure, function, generalization, functional thinking, tabular representation*

INTRODUCCIÓN

La actividad matemática se realiza necesariamente en un "contexto de representación" (Duval, 2006). En este estudio, pretendemos explorar el uso y la interpretación de la representación tabular por estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) al trabajar con una tarea de generalización que involucra una función lineal.

Las tablas constituyen un dispositivo de uso cotidiano más común de lo que podría suponerse (Martí, 2009). En la perspectiva funcional que ocupa este trabajo, la función posee un papel protagonista. Las tablas son una parte de los contenidos y de los estándares de aprendizaje evaluables del currículo de matemáticas en España. Sin embargo, sabemos poco sobre cómo esta

[1] En este texto usamos el masculino como genérico, tal y como recomienda la RAE y por una mayor legibilidad del documento.

Torres, M. D., Brizuela B., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Primeras experiencias con una tabla en segundo de Educación Primaria. Aproximación funcional al pensamiento algebraico. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 603 – 611). Valencia: SEIEM.

herramienta se presta para la comprensión de las funciones (Brizuela y Lara-Roth, 2002). No abordamos el concepto de función como se trabaja en educación secundaria, sino que atendemos al estudio de la relación entre las variables por la observación de regularidades. A la regularidad observada entre las variables la llamamos estructura en el contexto funcional. Permitir la observación de las estructuras entre variables en educación primaria activa el pensamiento funcional, favoreciendo el pensamiento algebraico. El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). En este estudio trataremos de responder a cuestiones tales como: ¿Cómo organizan los niños los valores de una función en una tabla sin encabezados? y ¿cómo identifican las regularidades en la relación entre las variables (estructuras evidenciadas)?

Como objetivos de este estudio pretendemos explorar el uso y la interpretación de las tablas por estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) al trabajar con una tarea de generalización que involucra una función lineal. Para esto describimos cómo organizan los valores en una tabla sin encabezados observando cómo identifican las variables) y cómo reconocen la regularidad entre las variables (cómo expresan la estructura).

PENSAMIENTO FUNCIONAL Y REPRESENTACIÓN TABULAR

El pensamiento funcional se centra en las relaciones entre cantidades que varían simultáneamente (Blanton y Kaput, 2004). El desarrollo del pensamiento funcional fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011) y ayuda a superar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función en educación secundaria (Doorman y Drijvers, 2011). Según Kaput (1987) el significado de la representación es dual, por lo que, tomaremos como representación la tabla y el concepto al que hace referencia será la relación entre las variables implicadas que evidenciaremos a partir de la estructura expresada por el estudiante. Una tabla es un formato de organización gráfica en el que una información cuantitativa se organiza de acuerdo con un doble eje, horizontal y vertical, que ordena y sistematiza datos o elementos de información relacionados entre sí (Campbell-Kelly, Croarken, Flood y Robson, 2003). En concreto, la representación tabular viene entendiéndose como una de las modalidades específicas de registro y organización de la información útil cognitivamente para una multiplicidad de usos (Gabucio, Martí, Enfedaque, Gilabert y Konstantinidou, 2010). Las tablas se encuentran entre las herramientas más utilizadas, constituyen un dispositivo de uso en la vida cotidiana más común de lo que quizá podría suponerse. La noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Pinto y Cañadas, 2017). Esta noción permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, generalizan dicha regularidad (Warren, Miller y Cooper, 2013). En este contexto, generalizar consiste en establecer la estructura general existente entre cantidades que covarían.

Entre los investigadores que exploran la identificación de estructuras y la generalización en estudiantes de educación primaria en contextos funcionales, Torres, Cañadas y Moreno (2018) en un estudio con seis estudiantes de 2º de primaria con una tarea que involucra la función $y = x+3$ describen cuatro tipos de estructuras diferentes ($y=x+3$, $y=x+x$, $y=x+2$, $y=x+1$) que los niños identificaron a partir de los casos particulares dados. La mayoría de los niños generalizó verbalmente la estructura correcta, $y=x+3$, cuando se les preguntó sobre la generalización, e identificaron la misma estructura para casos particulares y para el caso general, observándose coherencia en sus respuestas. Pinto y Cañadas (2017) abordan también la noción de estructura, con estudiantes de 8-9 años. Ellos emplearon 17 estructuras diferentes para una misma regularidad entre las variables ($y=2x+6$). Seis de las estructuras eran adecuadas a la tarea ($y=2(x + 2) + 2$, $y= 2x + 3 + 3$, $y= 3(x + 2) – x$, $y= 3x +$, $y= 2x + 2$, $y= (x + 3)\cdot 2$, $y= (x + 6) + 2x$), mientras que las 11

restantes no lo eran. En estas investigaciones no hay datos sobre cómo usan las tablas para identificar las estructuras.

Más allá del trabajo con él álgebra, encontramos el trabajo de Brizuela y Alvarado (2010) con veintidós niños de primer grado (6 años) que resolvieron problemas aditivos. Las autoras encontraron que las herramientas más útiles para los niños entrevistados en el estudio fueron las tablas sin etiquetas seguidas del papel y lápiz. También encontramos el trabajo de Martí (2009) centrado en la construcción tabular de estudiantes de entre 8 a 11 años. Ambos estudios se han centrado en la representación tabular pero no en la interrelación del uso de tablas e identificación de estructuras.

MÉTODO

Este estudio es de tipo cualitativo y de carácter exploratorio y descriptivo. En concreto se trata de un estudio de caso múltiple con cuatro estudiantes. Para este estudio llevamos a cabo cuatro sesiones de clase y una entrevista semiestructurada grupal. Los datos que analizamos son los obtenidos durante la entrevista. Mediante las entrevistas podemos profundizar más en los procesos individuales de los alumnos. El tiempo invertido en cada sesión fue de 50 minutos. Hubo una semana entre cada sesión de clase. El período de tiempo transcurrido de la sesión 4 hasta la entrevista grupal sobre las paradas de tren fue de dos semanas. El orden de aplicación de las diferentes sesiones y la entrevista con las funciones trabajadas la presentamos en la tabla 1.Propusimos funciones que iban de menor a mayor dificultad. Todas las sesiones fueron desarrolladas por todo el grupo de la clase, 24 alumnos

Tabla 1. Sesiones y entrevistas

Contexto	Función
Sesión 1: Máquina de bolas	$y=x+3$
Sesión 2: Parque de atracciones 1º	$y=x+3$
Sesión 3: Parque de atracciones 2º	$y=2x+1$
Sesión 4: Cumpleaños	$y=2x$
Entrevista grupal: Paradas de tren	$y=2x$

Después nos centramos en las diferentes representaciones con las que los niños nos transmitían las relaciones que observaban. Todas las sesiones planteadas y la entrevista partían del trabajo con casos particulares y avanzábamos hacia preguntas más generales siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). De esta forma, podemos observar cómo los estudiantes, a partir de los casos particulares, logran identificar estructuras para luego poder generalizar. Durante las sesiones los estudiantes contaban con un cuadernillo con la tarea que cumplimentaban de forma individual. Ellos no recibieron feeback de sus respuestas.

Participantes y centro escolar

Los participantes en este estudio son cuatro estudiantes (Alba, Ángel, Darío y Lola, seudónimos) de segundo de educación primaria (7-8 años) del curso escolar 2017/2018 de un centro escolar concertado de España que fue elegido intencionalmente según su disponibilidad. Este centro está caracterizado por tener un nivel socioeconómico bajo. Los estudiantes no asistían a las clases de forma habitual. Por esto fue difícil llevar un seguimiento de los datos de los estudiantes. Seleccionamos a los cuatro estudiantes del grupo total de 24 porque estuvieron presentes tanto en las cuatro sesiones como en la entrevista. En esta selección tuvimos en cuenta las recomendaciones de la tutora en cuanto a los logros de aprendizaje de cada estudiante (pretendíamos que estos logros fueran diferentes entre los diferentes niños para conseguir una mayor variedad en la muestra representada) y sobre la actitud y disposición de los estudiantes para conversar de cara a la entrevista. En ningún caso buscábamos que los alumnos a entrevistar fueran lo más aventajados. Los conocimientos previos de los estudiantes eran: números del 0 al 399, comparación de números

y operaciones de sumas y restas con llevadas. No habían recibido enseñanza previa en torno a tareas que involucraran funciones lineales, la generalización y tampoco sobre representación tabular.

La entrevista

En este trabajo nos centramos en la información que proviene de la entrevista realizada. Fue diseñada a partir de la guía que ofrece el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) hacia la generalización. La intención de entrevistar a los alumnos fue poder interactuar con ellos de una manera más individual que en las sesiones y profundizar más en el pensamiento de cada uno.

La entrevistadora, que no era el maestra del grupo, introdujo el contexto de la tarea. Comenzó mostrando a los estudiantes casos particulares pequeños (no consecutivos para evitar la recursividad en las respuestas de los estudiantes), e iba aumentando el tamaño de los casos particulares. Incluimos expresiones como "muchas" e "infinitas" como cantidades indeterminadas y así avanzamos inductivamente hacia la generalización. A la entrevista llevamos unas hojas con tablas sin encabezados, como aparece en la Figura 1, . El objetivo de la entrevista fue profundizar en las respuestas de los estudiantes relativo a sus interpretaciones de la representación tabular y su relación con las estructuras evidenciadas. La entrevista fue videograbada. La tarea de generalización usada en la entrevista la introdujimos de la siguiente manera: "Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Cuando el tren para una vez se suben dos personas". La entrevista fue grupal con la intención de que afloraran más argumentos entre los estudiantes que nos ayudaran a explorar su pensamiento.

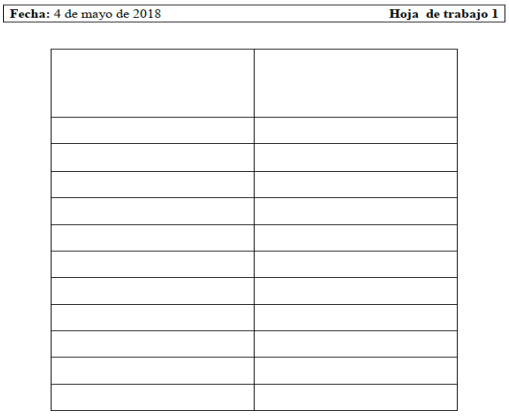


Figura 1. Tabla en blanco para comenzar la exploración

Seguimos la tarea con diferentes casos particulares: "¿Cuántas personas lleva el tren cuando pasa por 3 paradas?, ¿y cuando pasa por 5 paradas?". Los alumnos fueron dando diferentes respuestas en las que podíamos observar si expresaban algunas estructuras para la relación entre las variables y si anotaban algo en la tabla. Continuamos preguntando sobre la interpretación que podían hacer de la tabla: "¿Cómo podríamos escribir la información que nos da el problema en la tabla que os hemos dado?", "¿cómo podemos escribir los diferentes números dados para las paradas y las personas del tren?". Después de que los estudiantes se familiarizaran con la situación seguíamos haciéndoles otras preguntas: "¿Qué podríamos escribir al principio, en los títulos de las columnas, para organizar la información de este problema?", ¿qué relación existe entre los números que están ubicados en ambas columnas?". Después pasamos a preguntar por el caso general incluyendo en ocasiones términos indeterminados: "¿Cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas?", "¿cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren?", "¿cómo le explicarías a un amigo cuántas personas llevará el tren cuando pasa por infinitas paradas?". Con las respuestas de

los estudiantes al caso general pudimos observar diferentes estructuras expresadas para la relación implicada entre variables y si usaban la tabla para dar sus respuestas.

Análisis de datos

Tras transcribir la entrevista, diseñamos las siguientes categorías sobre el uso y la interpretación de la tabla en la identificación de la relación entre variables. Atendimos a si lograron y cómo lo lograron:

1. Organizar los datos en la tabla para resolver la tarea: ¿Ponen los datos donde corresponde? (sí/no) ¿Escriben o completan títulos para el encabezado de la tabla? (sí/no)
2. Identificar estructuras: ¿Relacionan los valores de cada variable (números o cantidades) de ambas columnas con las variables implicadas identificando las regularidades existentes entre ellas? (sí/no) ¿Son adecuadas las estructuras a las diferentes tareas? (sí/no)

Las estructuras identificadas fueron las expresadas por los estudiantes, tanto en los casos particulares presentados como en el caso general. Para considerar que un estudiante identifica una estructura debe responder a dos o más casos particulares siguiendo la misma regularidad o generalizar. Este criterio ha sido considerado en estudios anteriores (e.g., Pinto y Cañadas, 2017; Torres, Cañadas y Moreno, 2019). De esta manera, interpretamos que el estudiante toma conciencia de la relación entre las variables que está implicada.

RESULTADOS

Detallamos los resultados obtenidos en la entrevista y los complementamos con ejemplos de producciones de los estudiantes y extractos de las entrevistas.

Organización de datos en la tabla

Los estudiantes, con las primeras relaciones dadas entre las variables (los primeros casos particulares) de la entrevista, presentaron dificultades para situar los valores que se les daba de la variable independiente (número de paradas que hace el tren) y solían preguntar "¿dónde lo pongo?". En cuanto a los títulos para los encabezados de las columnas de la tabla observamos que ningún estudiante logró escribir títulos. Por esto, la entrevistadora introdujo el procedimiento para registrar los valores conocidos.

1. Entrevistadora (E): Bueno, no pasa nada, vamos a hacer una cosa: vamos a escribir en este espacio: número de paradas (primera columna). Ahora vamos a intentar poner en la tabla que el tren para una vez y recoge a dos personas.
2. Alumnos: (Siguen sin escribir nada.)
3. E: ¿Cómo podríamos poner que el tren para una vez? ¿Se os ocurre alguna manera?
4. Alumnos: (Niegan con la cabeza.)
5. E: Pues podemos poner un uno debajo de donde pone número de paradas. El tren para una vez y se montan dos personas cada vez que para. El número de personas lo ponemos al lado.
6. E: Si por ejemplo el tren para tres veces, lo ponemos debajo del 1.

Identificación de estructuras

Resumimos las estructuras identificadas por los estudiantes durante la entrevista en la tabla 2, atendiendo a las identificadas en los casos particulares y en el caso general implicando la función $y=2x$. Las hemos representado simbólicamente, aunque los estudiantes no han usado esa representación.

Tabla 2. Estructuras identificadas durante la entrevista

Estructuras

Estudiante	Casos particulares	Caso general
Ángel	$y = 2x$	NR
Lola	$y = 2x$	NR
Darío	$y = 2x$	$y = 2x$
Alba	$y = 2x$	NR

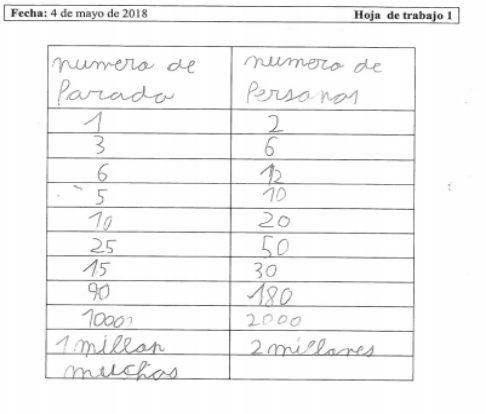
Nota. NR = No responde

Los cuatro estudiantes identificaron las estructuras adecuadas en el trabajo con casos particulares. Sin embargo, tres de ellos no respondieron al caso general. Ejemplificamos en la continuación del extracto de entrevista anterior la identificación de las estructuras en los casos particulares.

7. E: Si el tren para tres veces, ¿cuántas personas se suben?
8. Todos: Seis.
9. E: ¿Por qué seis?
10. Ángel: Porque dos más dos cuatro y otros dos son seis.
11. E: ¿Y cómo lo estás haciendo Ángel?
12. Ángel: Pues multiplicando dos por tres.
13. E: ¿Y por qué multiplicas por dos? ¿Qué es dos aquí?
14. Ángel: Pues el número de personas.
15. E: Bueno, vamos a ver. Cuando el tren para tres veces (señala a la columna de las paradas), ¿se han subido (señala a la columna del nº de personas) … cuántas personas?
16. Todos: Seis (todos escriben el 6 en la celda correspondiente).
17. E: ¿Alba tú puedes explicarme porqué son seis?
18. Alba: Porque si el tren para tres veces, se subirían seis personas. He multiplicado tres por dos.
19. E: ¿Y por qué por dos, Alba?
20. Alba: Porque dos es dos personas.
21. E: Vale, vamos a pensar lo que ocurre si el tren para, por ejemplo, 6 veces.
22. Lola: Se subirían 12.
23. Ángel: 12 (contesta más tarde).
24. E: ¿Y ahora cómo lo habéis hecho?
25. Ángel: Multiplicando seis por dos.
26. Darío y Lola: Multiplicando por dos.
27. Darío: Sí, siempre multiplicando.
28. E: Entonces podemos escribirlo en la tabla, si para 6 veces (señala columna de las paradas) ¿Cuánto tenemos que poner aquí (señala columna del nº de personas)?
29. Todos: (Escriben 12 en la celda adecuada.)
30. E: Muy bien. Y si ahora el tren ha parado 5 veces, ¿cuántos amigos de Elsa se han podido subir?
31. Todos: Diez (rápidamente contestan a la vez. Darío y Alba lo escriben en la tabla, ya sin indicaciones de la entrevistadora).

En un primer momento, Ángel contestó mediante una relación aditiva (línea 10). En los siguientes casos sus respuestas obedecieron a una estructura que reflejaba una relación multiplicativa, como los demás alumnos (líneas 12, 18 y 26). En la línea 27, Darío expresó que "siempre multiplica", lo que implica una generalización dada ya desde los primeros casos particulares. En cuanto al caso

general, hubo tres alumnos que no respondieron durante la entrevista al caso general debido quizás a la distracción producida entre ellos y en ese momento de la conversación. Esta entrevista fue grupal con los cuatro estudiantes por lo que en algunos momentos fue difícil captar la atención de todos. Darío generalizó una estructura adecuada a la función aplicada y además lo hizo de forma correcta, diciendo "siempre está multiplicando por dos, como antes". Sin embargo, no completó la tabla con el valor de variable independiente para el caso de muchas paradas (término indeterminado) aunque expresó que "muchas paradas podría ser un trillón" atribuyéndole un valor concreto a la indeterminación (ver figura 3).



Fecha: 4 de mayo de 2018 **Hoja de trabajo 1**

numero de Parada	numero de Personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	30
90	180
1000	2000
1 millon	2 millones
muchas	

Figura 3. Tabla de Darío

CONCLUSIONES

Consideramos con precaución los resultados anteriores ya que el análisis se aplica a una pequeña muestra de cuatro estudiantes por lo que no pretendemos generalizar ninguno de los resultados obtenidos.

A priori, hemos observado que los estudiantes no lograban escribir nada al trabajar con la tabla vacía y sin encabezados a diferencia de lo que ocurre en el trabajo de Brizuela y Alvarado (2010). El hecho de no señalar las variables dependientes e independientes en la tabla ha dificultado en este estudio que los estudiantes situaran los valores y pudieran identificar a partir de ellos la relación entre variables. Esto cambió cuando la entrevistadora introdujo el procedimiento para colocar los diferentes valores. Los estudiantes, con los datos escritos en la tabla, pudieron relacionar y reconocer las cantidades, variable independiente y dependiente (número de paradas y número de personas y edad de superhéroes) durante la entrevista. Muestra de esto han sido las estructuras evidenciadas en su mayoría adecuadas en la tarea presentada.

La cantidad de estructuras adecuadas que han sido evidenciadas por los estudiantes fue mayor en los casos particulares que el caso general. Esto puede deberse a que la entrevista fue grupal y esto dificultó en algunos casos la comunicación con la entrevistadora, que en momentos precipitó en la ausencia de respuesta por parte de los estudiantes, notándose en las preguntas sobre el caso general donde tres estudiantes no respondieron al caso general.

Hemos visto cómo los niños han desarrollado un trabajo de comprensión entre la representación (tabla) y el objeto representado (relación entre las variables) como apuntaba Kaput (1987). Esta puesta en juego difiere de estudios anteriores (e.g., Martí, 2009), al contar con tablas en blanco y es un aspecto que nos permite revisarlo como una opción de instrucción docente para la comprensión de la relación entre variables debido a que la solicitud cognitiva en la tarea es mayor que el solo hecho de completar una tabla. Los resultados de esta investigación, debidamente sistematizados, pueden ayudar a los maestros a implementar actividades en el aula que promuevan el desarrollo de las representaciones tabulares en estudiantes, a la vez que desarrollan su pensamiento funcional. Promover también las habilidades de comunicación mediante la representación tabular es

fundamental ya que actualmente las tablas, entre otros dispositivos de representación gráfica de la información, han llegado a formar parte de los planes de estudios de la enseñanza primaria y secundaria y son ampliamente usadas de manera cotidiana. Por eso existe un interés en observar el uso que hacen de ellas los niños.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771 y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 309–319.

Brizuela, B. y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE, 21*, 37-43.

Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R. y Robson, E. (Eds.) (2003). *The History of Mathematical Tables. From Sumer to Spreadsheets.* Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, (61), 103-131.

Gabucio, F. Martí, E., Enfedaque, J., Gilbert, S. y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación*. *22*(2), 183-197.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Martí, E. (2009) Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representational Systems and Practices as Learning Tools in different Fields of Learning* (pp. 133–148). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz- Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. PNA, 7(2), 75-84.

REPRESENTACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA (11-13 AÑOS) EN UNA TAREA FUNCIONAL

Primary and secondary students (11-13 years old)' representation of generalization in a functional task

Ureña, J.[a], Ramírez, R.[a], Molina, M.[b] y Cañadas, M. C.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

Describimos las representaciones de la generalización que manifiestan estudiantes de sexto curso de educación primaria (11-12 años) sin conocimientos formales de álgebra y alumnos de primero (12-13 años) y segundo curso de secundaria (13-14 años) que inician su formación algebraica. Participan 313 estudiantes que resuelven una tarea de generalización en el contexto funcional del álgebra escolar. Dicha tarea forma parte de una prueba de selección de un programa de estímulo del talento matemático. Los resultados muestran que los estudiantes representan la generalización de las relaciones funcionales verbal y simbólicamente. También evidencian que, a diferencia del uso de relaciones funcionales, las representaciones de generalización sí se ven influenciadas por el curso. En secundaria se detecta mayor diversidad en las estructuras de las relaciones funcionales.

Palabras clave: *generalización, pensamiento algebraico, relaciones funcionales, representaciones de generalización*

Abstract

We describe the representations of generalization used by elementary school sixth graders (12 years old), without formal knowledge of algebra, and first and second graders in high school (13 and 14 years old, respectively), who begin their algebraic training. A total of 313 students participated in solving a generalization task in the functional context of school algebra. The task was part of a selection test to participate in a mathematical talent program. The results inform that students represent the generalization of the functional relationships verbally and symbolically. They also show that, unlike the use of functional relationships, the representations of generalization are influenced by the students' grade. The representations of the functional relationships in high school are more diverse in structure.

Keywords: *generalization, algebraic thinking, functional relationships, representations of generalization*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la investigación centrada en el pensamiento algebraico revela que las dificultades que muestran los estudiantes en primaria son similares a las de los estudiantes de secundaria (e.g., Warren, Trigueros y Ursini, 2016). Así mismo, destacan la generalización, su representación, el sentido de variabilidad y la relación que se puede establecer entre variables como elementos clave para promover el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes (Radford, 2018; Warren et al., 2016). Se sugieren estos elementos como dimensiones a incorporar en el currículo desde los primeros cursos (Kaput, 2008). En esta línea, el enfoque funcional del álgebra comprende la generalización y la representación de relaciones entre cantidades covariantes así como el razonamiento con estas (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2021). Representación de la generalización por estudiantes de primaria y secundaria (11-13 años) en una tarea funcional. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 613 – 620). Valencia: SEIEM.

Dentro de la investigación en pensamiento algebraico es fundamental la generalización y, en consecuencia, la representación de la generalización y las estrategias para generalizar (Kaput, 2008; Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018; Radford, 2018). Estudios sobre la generalización revelan una extendida dificultad en los estudiantes para emplear estrategias adecuadas para generalizar (e.g., Moss y Beatty, 2006; Stacey, 1989). Las estrategias funcionales que abordan el establecimiento de una relación entre las variables destacan como las más útiles y eficaces para generalizar (e.g., Amit y Neria, 2008; Zapatera Llinares, 2018).

La literatura evidencia la capacidad de estudiantes de primaria y primeros cursos de secundaria para generalizar, usar estrategias funcionales y emplear representaciones variadas. Investigaciones en el enfoque funcional del *early algebra* evidencian las capacidades de estudiantes de primaria sin formación algebraica previa. Torres, Cañadas y Moreno (2019) identifican que estudiantes de segundo curso de primaria (7-8 años) reconocen estructuras y son consistentes en su empleo en casos particulares, aunque no siempre las generalizan. Los investigadores destacan que los estudiantes emplean representaciones verbales y numéricas en sus respuestas. Ureña et al. (2019) evidencian que estudiantes de cuarto curso (10-11 años), sin instrucción previa, usan distintas representaciones al generalizar (e.g., numérica, verbal y simbólica) y se mueven entre ellas. La distinción entre las representaciones radica en el modo en que expresan implícita o explícitamente la relación funcional que se reconoce entre las cantidades de las variables implicadas. Pinto y Cañadas (2017, 2019) muestran que estudiantes de tercer y quinto curso (8-9 y 10-11 años, respectivamente) generalizan relaciones funcionales, principalmente por medio de lenguaje natural, y observan que los mayores fueron más consistentes en el empleo de una estructura en su trabajo. Radford (2018), en un estudio longitudinal desde segundo curso (7-9 años) hasta séptimo (12-13 años), destaca la variedad de sistemas semióticos (e.g., gestos, lenguaje natural, símbolos) en la generalización. Con alumnos de sexto a octavo curso (10-15 años), Akkan (2013) observó que los estudiantes menores usaron más representaciones verbales en sus generalizaciones, a diferencia de los de cursos superiores, donde emplearon más simbología algebraica. Otros estudios en early algebra, muestran que, con instrucción, escolares desde los primeros cursos de primaria son capaces de identificar variables y la dependencia entre estas, progresar en el uso de representaciones conforme aumenta el curso, así como representar y generalizar diferentes relaciones funcionales (e.g., Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens, 2015; Blanton y Kaput, 2004).

En este estudio tenemos como objetivo analizar las representaciones de estudiantes de último curso de primaria y primeros cursos de secundaria al generalizar en una tarea que involucra una relación funcional. Las producciones de estos alumnos permitirán evidenciar cómo la formación algebraica y experiencias educativas que han recibido influyen en su representación de la generalización. Estos estudiantes no han recibido formación algebraica previa a la educación secundaria. Analizamos las respuestas de un grupo de estudiantes que se presentan a resolver una prueba para ingresar a un programa de talento matemático.

MARCO CONCEPTUAL

Este trabajo se centra en el pensamiento funcional, reconocido como uno de los componentes del pensamiento algebraico (Warren y Cooper, 2005). El pensamiento funcional comprende la manipulación, generalización y representación de relaciones entre cantidades que covarían (Blanton et al., 2011). Nos centramos en la generalización considerada como el corazón del pensamiento algebraico (Kaput, 2008), para describir las representaciones de generalización de los estudiantes.

En este contexto se distinguen tres tipos de relaciones funcionales: (a) de recurrencia, que atiende a la variación de los valores asociados a una sola de las variables, los cuales se obtienen a partir de otros valores de la misma variable determinados previamente, (b) correspondencia, que aborda la correlación entre pares de valores correspondientes asociados a la variable independiente y la dependiente y (c) covariación, que implica el análisis de cómo el cambio en una variable afecta a la

otra (Smith, 2008). Las relaciones de correspondencia representadas o utilizadas por los alumnos pueden ser caracterizadas en términos de su estructura, que hace referencia a cómo se organiza y expresa la regularidad entre las variables (Pinto y Cañadas, 2017).

Diferentes concepciones de generalización coinciden en el reconocimiento de la regularidad, la generación de nuevos casos y su representación. Según Pólya (1989), generalizar consiste en generar nuevos casos con base en la regularidad de un conjunto de elementos. Radford (2018), en la generalización algebraica, involucra también la elaboración de una expresión que represente a todos los elementos. Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela (2017) distinguen la generalización como proceso o producto, donde el producto sería el resultado de alguno de tres procesos: (a) la identificación de una regularidad en un conjunto de elementos, (b) extender el razonamiento más allá de los casos originales o (c) la ampliación de los resultados desde casos particulares.

En el contexto funcional de este trabajo, consideramos la generalización de una relación funcional como la identificación y representación de la regularidad subyacente a la tarea extendiendo el razonamiento más allá de los casos en los que fue originado (Ureña et al., 2019). Las representaciones de la generalización son un componente medular de la generalización (Kaput, 2008; Radford, 2018), y hacen referencia a cómo la generalización es manifestada y representada.

METODOLOGÍA

El estudio es descriptivo y exploratorio. Intencionalmente participan 313 estudiantes: 33 estudiantes de sexto curso de primaria (6EP), 167 de primer curso de secundaria (1ESO) y 113 de segundo curso de secundaria (2ESO). Los estudiantes resuelven un cuestionario de cinco tareas como prueba de ingreso a un programa de estímulo de talento matemático. Trabajamos con estos alumnos al presuponerse una actitud positiva hacia la matemática y mayor habilidad para generalizar, permitiendo obtener información directa sobre las representaciones de generalización que manifiestan. Analizamos aquí las respuestas a la primera tarea que implica la generalización de una relación funcional lineal.

Para el análisis de la información y la presentación de los resultados, cada estudiante fue designado por la letra E y un número del 1-313 así como un subíndice numérico (6=6EP, 1=1ESO, 2=2ESO) que refiere al curso. Por ejemplo, el estudiante $E110_1$ refiere al estudiante número 110 y está en 1ESO.

Tarea propuesta

La tarea (Figura 1) solicita a los estudiantes determinar la cantidad de cuadrados que se pueden formar habiendo marcado unos puntos que hacen de vértices. Esta tarea sigue una organización inductiva, es decir, va de los casos particulares (3, 4 y 100 días) al general (n días), e invita a los estudiantes a generalizar la función y=4x-6, que se establece entre el número de días (variable independiente) y la de cuadrados que se pueden formar (variable dependiente).

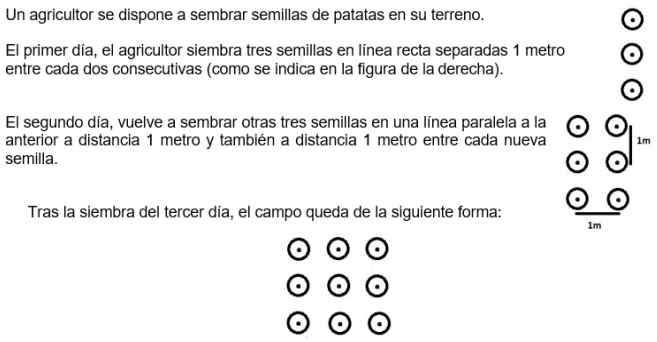


Figura 1. Tarea propuesta

Análisis

Analizamos las respuestas de los estudiantes a la tarea distinguiendo si evidencian o representan la generalización, en qué casos lo hacen y qué representación emplean. Las unidades de análisis son las respuestas a las preguntas para los casos 3 y 4, 100 y n, independientemente de si estas son correctas o incorrectas. Para analizar las representaciones de generalización de los estudiantes partimos de las categorías de representaciones de generalización definidas por Ureña et al. (2019) (numérica, verbal y simbólica) de las cuales seleccionamos las manifestadas por nuestros participantes. Distinguimos por tanto los siguientes casos según si el estudiante:

(a) No representa la generalización ni da evidencias de haber identificado ninguna regularidad en los casos particulares trabajados.

(b) No representa la generalización, pero sí da evidencias de haber identificado cierta regularidad en los casos particulares trabajados. En estos casos los estudiantes expresan sus respuestas con representaciones numéricas.

(c) Representa la generalización: el estudiante representa una regla que relaciona las cantidades indeterminadas involucradas. Diferenciamos dos casos:

   a. Representaciones verbales de la generalización: la regla general es representada por medio de lenguaje natural que refiere a las cantidades indeterminadas relacionadas.

   b. Representaciones simbólicas de la generalización: la regla general es representada utilizando simbolismo algebraico como representación de las cantidades indeterminadas.

RESULTADOS

Las generalizaciones de los estudiantes tienen lugar en las respuestas a las preguntas vinculadas a los casos 100 y n. La tabla 1 presenta estos datos distinguiendo el curso de los estudiantes, los casos en que representan la generalización y el tipo de representación empleada.

Tabla 1. Representaciones de generalización por caso y curso

	Caso n No representa ni identifica	Caso n No representa pero identifica	Caso n Representación Verbal	Caso n Representación Simbólica	Total
Curso	Caso 100 No representa ni identifica				
6EP	0	0	1	0	1
1ESO	0	0	0	3	3
2ESO	0	0	0	1	1
	Caso 100 No representa pero identifica				
6EP	1	0	1	0	2
1ESO	0	0	0	7	7
2ESO	1	0	0	7	8
	Caso 100 Representación Verbal				
6EP	4	0	1	2	7
1ESO	7	0	7	10	24
2ESO	1	0	4	10	15
	Caso 100 Representación Simbólica				
6EP	1	0	0	0	1
1ESO	0	0	0	4	4
2ESO	0	0	0	2	2

Un total de 11 (de 33) estudiantes de sexto de primaria, 38 (de 167) de primero de secundaria y 26 (de 113) de segundo de secundaria identifican cierta regularidad o representan la generalización estableciendo una relación funcional entre dos variables. Los casos en que el estudiante no representa, pero sí identifica una regularidad se dan sólo en el caso 100 y principalmente en secundaria. Los estudiantes relacionan las cantidades concretas asociadas a las variables haciendo uso de una

regularidad derivada de las soluciones a los primeros casos particulares. Por ejemplo, $E85_1$ responde que se forman $98 + 99 \cdot 2 = 296$ cuadrados, es decir, emplea la relación funcional (n-2)+(n-1)x2. La mayoría de estos estudiantes representan la generalización simbólicamente en el caso n.

En lo que respecta a las representaciones de generalización, distinguimos diferencias según el caso al que dan respuesta los estudiantes. En el caso 100 la representación de generalización más común en todos los cursos es la verbal (Tabla 1). Llama la atención que las representaciones de generalización más frecuentes son de la forma "cada día aumenta en 3 cuadrados" o similares, en las que expresan una regularidad general de tipo recursivo. Sin embargo, al analizar de forma global sus respuestas a la tarea, las relaciones funcionales generalizadas son de correspondencia. Dichas relaciones en ocasiones presentan estructura multiplicativa de la forma 3n o análogas (observadas en mayor cantidad en secundaria), pero también apreciamos relaciones funcionales con estructuras más complejas. Por ejemplo, en sexto curso, $E1_6$ generaliza verbalmente "cada día se añaden 3" y emplea la relación funcional de correspondencia 3(n-4)+8 tomando como base 8 cuadrados que se forman en 4 días (Figura 2). Análogamente, $E20_6$ reconoce que "cada día se forman 2 cuadrados de $1m^2$ y 1 de $4m^2$" y obtiene un total de 96*3=288 cuadrados. En secundaria, las representaciones verbales de generalización son similares, aunque reconocemos algunas que se ajustan más a la estructura de la relación funcional implícita en sus producciones. Ejemplificando, $E210_2$, quien reconoce todos los cuadrados posibles, afirma que "cada día que pasa se pueden formar 4 cuadrados más. Le restamos dos porque el segundo día sólo se pueden formar dos cuadrados, dos menos que cuatro. Luego le quitamos 4 porque el primer día no se forma ninguno". Él emplea la relación funcional de correspondencia 4n -2 -4, generalizada simbólicamente en el caso n. $E98_1$ plantea que en 100 días hay "x=2+98*3=296 porque me he dado cuenta de que cada día hay tres cuadrados más que el día anterior, entonces he pensado que como hay 2 cuadrados en 2 días habrá que sumarle 3 durante 98 días". En el caso n también son evidenciadas representaciones verbales de generalización parecidas a las descritas en el caso 100, principalmente en sexto curso de primaria.

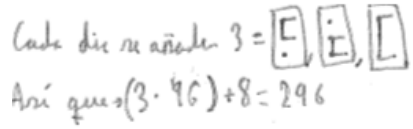


Figura 2. Respuesta de $E1_6$, caso 100

En el caso n la representación de generalización más común en secundaria es la simbólica (Tabla 1), donde los estudiantes representan relaciones funcionales de correspondencia con estructuras diferentes utilizando la letra propuesta (n). Distinguimos dos formas de representación simbólica de la generalización según si involucran términos generales a modo de variables o simbología alfanumérica. Ambas casuísticas se observan en sexto de primaria en los dos casos 100 y n, mientras que en primero de secundaria sólo se aprecia en el caso 100. Las relaciones funcionales representadas en sexto de primaria son sencillas y tienen principalmente una estructura multiplicativa, a pesar de que en el caso 100 usan otras estructuras (acorde con su trabajo en los casos previos). $E1_6$ por ejemplo pasa de la representación verbal (Figura 2) a simbólica en el caso n, y cambia la estructura de la relación funcional que identifica. En el último caso él escribe que se forman (n*3) cuadrados. En el caso 100 sobresale un estudiante que plantea simbólicamente la relación Solución=Nº de día*3, involucrando términos generales como variables. En secundaria, por otro lado, son expresadas simbólicamente generalizaciones con estructuras más diversas, coherentes con las empleadas por los mismos estudiantes en los casos anteriores de la tarea. Por ejemplo, $E292_2$ anota la relación 2n+(n-4) de acuerdo a la tabla que elabora previamente (Figura 3). Otros estudiantes escriben las siguientes expresiones simbólicas: 2(n-1)+n-2 ($E272_2$), n*3-4 ($E208_2$) o (n-2)+(n-1)*2 ($E85_1$), entre otras.

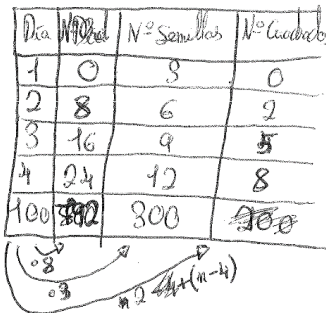


Figura 3. Tabla de $E292_2$, caso 100

La tabla 1 también muestra un contraste entre las representaciones de generalización de los estudiantes de primaria y secundaria. Los alumnos de sexto curso por un lado representan la generalización mayoritariamente en el caso 100 y principalmente de forma verbal. Solo tres alumnos generalizan en ambos casos 100 y n. Partiendo de la representación verbal de la generalización en el caso 100, uno de ellos mantiene la representación verbal en el caso n y los otros dos cambian a la representación simbólica. Por otro lado, en secundaria sobresale una mayor representación simbólica de la generalización en el caso n. También destaca el paso de la identificación de la regularidad o la representación verbal de la generalización a la representación simbólica entre el caso 100 y n. Y mientras que en secundaria una disminuida cantidad de estudiantes representa simbólicamente la generalización en ambos casos, en primaria esto no ocurre.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo describimos las representaciones de la generalización, en un contexto funcional, manifestadas por estudiantes que finalizan la educación primaria y estudiantes que inician su formación algebraica formal en secundaria. Aportamos una reorganización de las representaciones de generalización en contextos funcionales definidas por Ureña et al. (2019).

Tanto en primaria como en secundaria las representaciones de generalización evidenciadas son verbales o simbólicas. Entre primaria y secundaria cambian las estructuras de las relaciones funcionales y la coherencia entre la representación de generalización y la relación funcional usada. No identificamos grandes contrastes en las estructuras de las relaciones funcionales o las representaciones de generalización empleadas por los estudiantes de los dos cursos de secundaria. Sí observamos que, si bien los estudiantes de sexto curso usan en el caso 100 relaciones funcionales acordes con una regularidad derivada de los casos previos, es principalmente en secundaria dónde en el caso n los estudiantes representan de forma general (principalmente simbólicamente) las relaciones funcionales empleadas. El trabajo permite concluir que, si bien el establecimiento de relaciones funcionales no se ve influenciado por la edad y formación de los estudiantes, las representaciones de generalización sí probablemente como consecuencia de la formación algebraica recibida por los alumnos de secundaria. En concordancia con más investigadores (e.g., Akkan, 2013; Radford, 2018), apreciamos que conforme aumenta el curso mejora el rendimiento de los estudiantes para generalizar y representar.

Algunos estudiantes, mayoritariamente de secundaria, no representan la generalización en el caso 100 y sí en el caso n, dando incluso una representación simbólica de la relación funcional identificada. Las respuestas de estos estudiantes al caso 100 sugieren la identificación de una regularidad que, aunque no es representada, queda expresada implícitamente mediante las expresiones numéricas utilizadas. Interpretamos que este resultado se debe a la naturaleza numérica de la cuestión planteada. En consecuencia, destacamos la necesidad de proponer cuestiones generales a los estudiantes que demanden explícitamente la generalización para favorecer la expresión de la misma.

La representación verbal de generalización es observada principalmente en el caso 100. Coincidimos con otros trabajos (e.g., Akkan, 2013; Pinto y Cañadas, 2017, 2019; Torres et al., 2019) en reconocer

la inclinación de los estudiantes de primaria a usar la representación verbal en sus generalizaciones. Esto se puede deber a que no han sido introducidos al uso del simbolismo algebraico. Por otro lado, en esta forma de expresar la generalización apreciamos en todos los cursos una tendencia a referir al incremento constante entre los casos, sugiriendo la identificación de una relación funcional recursiva, y que, sin embargo, se ha vinculado con el empleo de relaciones funcionales de correspondencia con estructuras diversas. Este hallazgo evidencia la falta de precisión de las expresiones verbales de los estudiantes. Coincidimos con Barbosa et al. (2012) en la necesidad de proveer oportunidades a los estudiantes para que desarrollen y ejerciten la comunicación y expresión verbal de sus ideas.

La representación simbólica de la generalización es exhibida en el caso n y principalmente en secundaria como consecuencia de su familiaridad en el uso de letras. Este hallazgo evidencia además mayor habilidad de los estudiantes de secundaria para ir más allá del uso de una relación funcional hacia su representación general simbólica. Por otro lado, identificamos representaciones simbólicas que no sólo involucran simbolismo algebraico convencional y que han permitido la representación estructurada de relaciones funcionales. Como en otros trabajos, reconocemos la variedad de representaciones que validan el pensamiento algebraico de los estudiantes (e.g., Amit y Neria, 2008; Kaput, 2008; Radford, 2018; Ureña et al., 2019).

Llama la atención que, aunque se podrían presuponer habilidades matemáticas de los participantes para generalizar, la mayoría de estudiantes no generaliza, incluso en secundaria habiendo sido introducidos al álgebra. Contrastando nuestros resultados con estudios previos en el marco de la propuesta *early algebra* (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Blanton et al., 2015), reconocemos capacidades iguales o superiores en estudiantes de edades inferiores. Valoramos que una limitada experiencia de nuestros participantes con prácticas algebraicas desde los primeros cursos escolares puede haber limitado sus producciones. En línea con la promoción del pensamiento algebraico de los estudiantes y la habilidad de generalización en contextos funcionales, los resultados sugieren la pertinencia de (a) facilitar a los estudiantes situaciones que impliquen la generalización de relaciones funcionales con estructuras diversas que a su vez exijan un uso razonado de estrategias diferentes para generalizar e (b) invitar a la manipulación y representación de cantidades indeterminadas, así como de las relaciones entre estas por medio de distintos tipos de representaciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al financiamiento de los estudios de posgrado del primer autor por parte de la Universidad de Costa Rica y como parte de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders's efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema*, *27*(47), 703-732.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40(1), 111-129.

Barbosa, A., Vale, I. y Palhares, P. (2012). Pattern tasks: Thinking processes used by 6th grade students. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(3), 273-293.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M, Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*(4), 441-465.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: Un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Journal Mathematics Education Research Journal*. DOI 10.1007/s13394-019-00300-2

Pólya, G. (1989). ¿Cómo plantear y resolver problemas? México, DF: Trillas.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Hamburgo, Alemania: Springer.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). Reston, VA: NCTM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid: SEIEM.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 570-614.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162.

Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En Á. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Rotterdam, Países Bajos: SensePublishers.

Zapatera Llinares, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 87-114.

LA GESTIÓN DE UN REI EN SECUNDARIA: ¿CUÁNTO TIEMPO SE TARDA EN ABRIR UN CANDADO?

Managing an SRP at Secondary school: How long would it take to open a padlock?

Vásquez, S.[a], Barquero, B.[a] y Bosch, M.[b]

[a] Universitat de Barcelona, [b]Universitat Ramon Llull

Resumen

Presentamos una propuesta didáctica basada en la implementación de un recorrido de estudio e investigación (REI) para la educación secundaria obligatoria en el área de la combinatoria. Los resultados corresponden al análisis a posteriori de una primera experimentación del REI con alumnos de 4º de la ESO en un centro educativo con larga experiencia en la innovación educativa. El análisis de esta primera experimentación nos sirve de base para la descripción de algunas condiciones institucionales que han favorecido la gestión del REI y la detección de restricciones institucionales que han afectado su evolución prevista inicialmente. Intentamos en particular identificar qué aspectos de la tradición educativa del centro podrían explicar estas condiciones y restricciones, para poder avanzar en el estudio de la ecología de los REI en la enseñanza secundaria.

Palabras clave: *recorridos de estudio e investigación, secundaria, combinatoria, ecología didáctica*

Abstract

We present a didactic proposal based on the implementation of a study and research path (SRP) for compulsory secondary education in the area of combinatorics. The results correspond to the a posteriori analysis of a first experiment of the SRP with grade 10 students in a school with a long experience in educational innovation. The analysis of this first experimentation serves as a basis for the description of some institutional conditions that have favoured the management of the SRP and the detection of institutional restrictions that have affected its initially foreseen evolution. In particular, we try to identify what aspects of the educational tradition of the centre could explain these conditions and restrictions, in order to progress in the study of the ecology of SRPs in secondary education.

Keywords*: study and research paths, secondary, combinatorics, didactic ecology*

INTRODUCCIÓN

Presentamos aquí un estudio empírico sobre la implementación de los *recorridos de estudio e investigación* (REI) en la enseñanza secundaria española. Este estudio se inscribe en la línea de investigación desarrollada en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) sobre lo que (Chevallard, 2013) designa como el cambio de paradigma pedagógico que se está iniciando en nuestros sistemas educativos, desde el "monumentalismo" o paradigma de la visita de las obras hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo. Los REI pueden considerarse como propuestas didácticas que intentan aproximarse lo más posible al paradigma del cuestionamiento del mundo, caracterizado por considerar que el objetivo del proceso de enseñanza y aprendizaje no serían conocimientos – u "obras" – sino cuestiones abiertas a las que hay que aportar una respuesta colectiva, evaluarla y difundirla. Esta línea de investigación se está desarrollando desde hace años especialmente en el ámbito de la enseñanza universitaria, incluyendo la formación del profesorado (Florensa, 2018). Aunque existen investigaciones puntuales en Argentina, Dinamarca, Francia y Japón (Jessen et al., 2020; Parra y Otero, 2018), la implementación de REI en la enseñanza secundaria

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (2021). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado?. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621 – 628). Valencia: SEIEM.

está mucho menos estudiada. Un posible motivo sería las restricciones institucionales – especialmente curriculares – que pesan en este nivel de enseñanza. Nuestro estudio, que forma parte de una tesis doctoral en curso, consiste precisamente en analizar las condiciones para la implementación de REI en la enseñanza secundaria española y experimentar algunas propuestas, en el caso concreto de un centro educativo marcado por una larga tradición pedagógica innovadora, con un proyecto educativo basado en la investigación y el aprendizaje por proyectos, muy alejado en principio del paradigma "monumentalista" imperante (Chevallard, 2013). Nuestra estrategia consiste en dotarnos de un medio empírico que parece inicialmente facilitador del tipo de propuestas didácticas que representan los REI. De este modo, se neutralizarían algunas de las restricciones institucionales que pesan sobre este tipo de dispositivo didáctico, al tiempo que nos permitirá identificar nuevos dispositivos o estrategias pedagógicas facilitadoras.

Por motivos de calendario académico, se decidió diseñar un REI sobre combinatoria, un área que no ha sido demasiado estudiada en didáctica de las matemáticas, aunque sí existen algunos trabajos importantes en nuestro país (Millán, 2013; Navarro, Batanero y Godino, 1996; Roa, Batanero, Godino y Cañizares, 1997). Se pensó inicialmente en una cuestión generatriz sobre contraseñas y seguridad ("¿Por qué nos piden siempre que utilicemos mayúsculas, números y caracteres especiales?"), pero al final se decidió proponer una cuestión sobre un ámbito más sencillo (los candados) para ampliar en una segunda etapa al caso de las contraseñas.

En las próximas secciones, presentamos el contexto institucional en el que se ha llevado a cabo la implementación del REI, para describir posteriormente su desarrollo y análisis. Los resultados obtenidos nos servirán para responder a las siguientes cuestiones de investigación: (1) Qué aspectos del REI se han implementado según el diseño previsto y cuáles no? ¿Qué consecuencias se desprenden de cara a un nuevo diseño del mismo REI? (2) ¿Cuáles han sido los principales dispositivos didácticos que han favorecido el desarrollo del REI y cómo los han gestionado los profesores y alumnos? (3) ¿Qué condiciones han favorecido la existencia y desarrollo de estos dispositivos?

CONTEXTO INSTITUCIONAL Y CONDICIONES PARA LA IMPLEMENTACIÓN

La primera experimentación del REI sobre candados se llevó a cabo en un colegio concertado de Esplugues (Barcelona), el Col·legi Natzaret, entre abril y mayo de 2019, en la asignatura de matemáticas. Participaron un total de 58 alumnos de 4º de la ESO y los tres profesores de matemáticas de este curso, una de ellos investigadora en didáctica de la matemática, primera autora de este trabajo y coordinadora de la experimentación, y los otros dos profesores con poca experiencia docente. Los 58 estudiantes se organizaron en tres grupos-clase y se dividieron en equipos de trabajo de 3 a 4 personas. Los equipos se formaron de forma heterogénea según los criterios acordados por los profesores: los estudiantes se ordenaron según sus calificaciones en la última unidad y fueron clasificados en 4 niveles. Cada equipo de trabajo se formó por estudiantes de cada uno de los niveles. En la escuela, los tres grupos-clase estaban en salas separadas y los profesores iban rotando de grupo en cada sesión. Los profesores compartían un diario de seguimiento de la experimentación que actualizaban al finalizar cada sesión. De esta manera, los tres profesores iban siguiendo la evolución de todos los grupos y, al menos una vez por semana, guiaban presencialmente el trabajo de uno de ellos. Además, en prácticamente todas las sesiones, uno o dos de los grupos tuvo un observador-investigador externo que completó el diario de seguimiento de la experimentación.

La nueva metodología introducida con el REI era nueva tanto para estudiantes como para el profesorado. Aunque cabe destacar que la escuela tiene instaurados en las etapas de educación primaria y secundaria, ciertos dispositivos didácticos que favorecieron notablemente su experimentación. Los estudiantes están habituados a trabajar en equipos, a organizar los grupos clase de distintas formas, y a la rotación de docentes o la participación de varios de ellos en sesiones de clase. En el caso particular de matemáticas en 4º de la ESO, la asignatura de matemáticas se estructura

en distintas unidades. En general, cada unidad tiene un listado de problemas y ejercicios que los estudiantes van realizando. Voluntariamente, los estudiantes pueden atender a las denominadas "masterclass", unas clases magistrales donde los docentes presentan los contenidos específicos de la unidad y resuelven dudas. Cuando los estudiantes se sienten capacitados, realizan un examen el día de su elección y tienen la oportunidad de realizar un examen de recuperación una semana después. Cuando todos los alumnos han realizado el examen, toda la clase se organiza en grupos cooperativos, para desarrollar, durante una semana, un proyecto relacionado con la unidad.

En este contexto, se decidió implementar el REI en las últimas tres semanas del curso ya que, respetando la programación realizada al inicio del curso, durante ese tiempo se debía trabajar la unidad de combinatoria. El sistema de evaluación planteado debía encajar con la organización pedagógica de la asignatura, por eso, mantuvimos el sistema de evaluación previsto en la programación, aunque se introdujeron algunas variaciones para dar cabida a los dispositivos y instrumentos específicos de seguimiento y evaluación que se usaron durante la implementación del REI. Más concretamente, para realizar el seguimiento del trabajo de los estudiantes se prepararon y se fueron recogiendo distintos materiales que fueron específicamente diseñados para este REI. Más concretamente, se solicitó a los estudiantes que fueran entregando: los dossiers de trabajo (en formato papel) que los grupos rellenaban al finalizar cada sesión; el diario de la experimentación (también en formato papel) que los grupos actualizaban al finalizar cada sesión de experimentación; un mapa de cuestiones y respuestas que se solicitó a cada grupo como análisis del proceso desarrollado; informe final grupal y video con la validación experimental; una exposición oral y su autoevaluación del trabajo cooperativo y, finalmente, un examen individual sobre el trabajo desarrollada en las sesiones de experimentación del REI. La evaluación de todas estas entregas tenía el mismo peso en la nota final, excepto el examen individual que contaba un 40%. Los profesores disponían de rúbricas de evaluación para poder valorar las entregas y, durante las sesiones de clase, podían añadir puntos positivos y negativos por buenas o malas contribuciones o comportamientos, que tenían un impacto directo en el resultado final de cada estudiante.

ANÁLISIS A POSTERIORI DEL REI

Devolución de la cuestión generatriz del REI

En la primera sesión del REI, los profesores introdujeron el contexto de los candados con el que se trabajaría durante toda la unidad y se explicó la forma de trabajo y calendario aproximado. Empezaron por presentar cinco tipos diferentes de candados, cada uno con sus instrucciones particulares. En el dossier de trabajo los estudiantes tenían las imágenes de dichos candados, cada uno con sus instrucciones particulares. Algunos de ellos, además, se tenían físicamente en el aula para que los estudiantes pudieran manipularlos. Los profesores presentaron la cuestión generatriz Q_0 que guiaría todo el proceso sobre *¿cuánto tardaríamos en abrir cada uno de estos candados?* y que rápidamente suscitó que los estudiantes empezaran a interesarse y a dar respuestas muy espontáneas.

La primera cuestión que los profesores propusieron a los estudiantes fue decidir *¿por cuál de los candados proponemos empezar?* ($Q_{0.1}$). La mayoría de los estudiantes respondieron que deberían empezar con el segundo candado. En este, se permite apretar diferentes números sin tener en cuenta el orden. La principal razón que dieron fue que creían que era el que tenía menos combinaciones posibles. Aunque la mayoría de los grupos no supieron dar una explicación bien fundamentada sobre su elección, sí introdujeron la idea de que el número de combinaciones tendría que ver con la dificultad del candado para abrirse. Esto supuso una sorpresa para los profesores, quienes esperaban que los estudiantes escogieran el candado que fuera más fácil de calcular su número de combinaciones y precisamente, el segundo candado era el que tiene asociado un cálculo más complejo, pero, aun así, menor número de combinaciones. Antes las dudas abiertas, se propuso a los estudiantes proponer una clasificación de los cinco candados y explicar el criterio que utilizaban para clasificarlos. Antes de terminar la primera sesión, se dio a los estudiantes un primer dossier a rellenar para cada candado

donde se les pedía dar su respuesta a Q_0 en cada caso particular y la justificación de sus respuestas. Durante las siguientes sesiones, los estudiantes fueron elaborando respuesta a Q_0 para cada candado y, al inicio, esperaban por la validación de los profesores, aunque esta nunca llegó. Las herramientas más comunes para la validación fueron las discusiones en clase: los grupos de estudiantes exponían y defendían sus respuestas hasta que se llegaba a un acuerdo con el grupo clase. El rol del profesor consistía en guiar el proceso, resaltar cuestiones que iban surgiendo, establecer un vocabulario específico y clarificar y cuestionar las contribuciones de los alumnos. Así se consiguió que fuera el estudio de Q_0 y la construcción conjunta y consensuada de respuestas parciales tomaran la legitimidad necesaria. Cuando el grupo clase acordaba que el candado había quedado resuelto, cada equipo explicaba sus justificaciones en el dossier de trabajo.

Necesidad de establecer un *logos* sobre la actividad matemática desarrollada

Desde las primeras sesiones apareció una limitación importante. Los profesores y las observadoras notaron que los estudiantes empezaban a utilizar expresiones diversas para comunicar sus hipótesis, respuestas y razonamientos. Se evidenció la necesidad de establecer una terminología común y específica para referirse a la actividad matemática que estaban desarrollando – un *logos* en la terminología de la TAD (Chevallard, 2013) –, y que fuera compartida por estudiantes y profesorado para poder avanzar en las puestas en común.

Por este motivo, a partir de la segunda sesión, se decidió que los profesores institucionalizaran un vocabulario especifico. Así, se hablaba de *combinación*, para referirse a la contraseña que se puede introducir en un candado; de *casilla* o *celda*, para nombrar a cada elemento de una combinación concreta; y, de los *elementos de la casilla*, al grupo de valores que pueden introducirse en una casilla o celda. Aunque esta terminología no fue asimilada inmediatamente, permitió mejorar las condiciones bajo las cuales se compartían, comparaban y consensuaban las respuestas y justificaciones de los grupos de trabajo y entre grupos clase. Para facilitar su adopción, en las puestas en común, los profesores se refirieron constantemente a este vocabulario consensuado para poder avanzar y describir los resultados obtenidos. También sirvió para facilitar la institucionalización de los resultados parciales que se obtenían y las nuevas cuestiones que surgían.

Evolución del *medio didáctico* en la gestión del REI

A lo largo de la experimentación del REI, hubo etapas y decisiones importantes sobre qué *media* (entendidos como medios de información) poner a disposición de los estudiantes, qué conocimientos matemáticos y extra-matemáticas presentar, cómo compartir las cuestiones y respuestas que aparecían, etc. Todo ello entra en juego en el enriquecimiento progresivo del medio didáctico necesario para la gestión del REI. Comentamos a continuación las principales etapas y decisiones que se tomaron. Como hemos comentado sobre la devolución de la cuestión generatriz, queremos destacar que el uso físico-manipulativo de los candados en el aula tuvo un impacto muy positivo en los estudiantes. Poder manipular los candados aportó a los estudiantes un medio experimental excelente, tanto en las primeras sesiones para poder caracterizar cada uno de los candados, como en las últimas con la validación experimental de sus respuestas finales (ver en la siguiente sección). En consecuencia, fue una desventaja el no tener suficientes candados para todos los grupos. Como los tres grupos-clase estaban separados, a veces algún grupo no podía disponer de alguna tipología de candados para poder manipularlos.

Un aspecto que no se integró en el estudio fue la búsqueda de respuestas previamente disponible sobre los candados, sus estrategias de apertura y de robo. Desconocemos si los estudiantes llevaron a cabo esta indagación por su cuenta, pero en todo caso no tuvo su espacio en el aula. En cierta manera, el diseño del REI se adaptó a una cierta tradición escolar en la que es el profesor el que "controla" el medio inicial de los alumnos.

Otra decisión importante fue que, una vez se dio respuesta para los cinco primeros candados, se propuso repetir la tarea con estos mismos cinco candados, pero ahora con restricciones añadidas. Por ejemplo, en el primer candado quedaba prohibido que la combinación estuviera formada por números repetidos. Esta segunda etapa se desarrolló de forma mucho más ágil, ya que dicha variación en los candados introducía pequeñas variaciones respecto a su resolución, y permitió a los estudiantes y al profesorado institucionalizar algunas técnicas de resolución y su justificación, así como el vocabulario usados, es decir, institucionalizar parte del *logos* justificativo de la práctica desarrollada.

Una vez terminadas estas dos primeras fases del REI, se planteó realizar una clase magistral a cada grupo. Cada uno de los profesores se encargó de llevar la clase magistral a cada uno de los grupos. Para empezar la sesión, se repasó la clasificación que habían hecho los estudiantes de los candados. Se recordó las explicaciones que habían dado en general para encontrar el número de combinaciones en cada uno de los casos. Esta fue la primera ocasión en la que los profesores validaban oficialmente las soluciones. Una vez hecho esto, se les propuso a los estudiantes la cuestión: *¿Cómo podemos encontrar una técnica general para encontrar el número de combinaciones de cada candado?*

Para poder resolver esta cuestión, se platearon a los estudiantes las siguientes cuestiones derivadas que tendrían respuestas diferentes según el candado que se escogiera: ¿Dos combinaciones con los mismos elementos ordenados de maneras diferentes, cuentan como dos combinaciones o como una? ¿Pueden repetirse dos o más elementos en cada combinación? ¿Cuántas casillas tiene cada combinación? ¿Cuántos elementos están disponibles en cada una de las casillas? Estas cuestiones permitieron a los profesores, en esta clase magistral, formalizar el lenguaje para hablar de combinatoria y los métodos y fórmulas para poder calcular rápidamente el número de combinaciones. Al acabar la sesión, los profesores propusieron a los estudiantes que revisaran sus respuestas anteriores para asociar sus respuestas a la clasificación y métodos ahora formalizados. Se decidió también entregar un listado de problemas típicos de combinatoria en diferentes contextos. Se pidió a los estudiantes que, al empezar cada problema de combinatoria, relacionaran sus características y resolución con los tipos de candados estudiados. Finalmente, los estudiantes se evaluaron individualmente mediante un examen tipo test. Este examen contenía 10 preguntas con diferentes situaciones de combinatoria (sabores de helados, camisetas de colores, etc.) pero con la misma estructura: "¿De cuántas maneras diferentes podemos contar…?" Al día siguiente se les entregó el examen corregido y una semana después los estudiantes que querían podían presentarse a un segundo intento de este examen, con la misma estructura.

Los *mapas de cuestiones y respuestas* para describir el proceso seguido

En las últimas sesiones de experimentación del REI, y una vez los estudiantes habían elaborado una respuesta final a Q_0, los profesores plantearon una nueva tarea a los estudiantes. Se les pidió elaborar un *mapa de cuestiones y respuestas* para analizar y describir el proceso de estudio que habían seguido. En esta escuela, los estudiantes están habituados a trabajar con mapas mentales para organizar los contenidos de la unidad, tarea que habitualmente se plantea en el cierre de la unidad. En esta ocasión, se les solicitó no solamente describir los conceptos que habían intervenido, si no poner especial atención a la dinámica entre las cuestiones, las respuestas, y las estrategias que habían ido usando durante en su "recorrido" particular.

Se dedicaron dos sesiones para que los grupos pudieran avanzar en la elaboración del mapa de cuestiones y respuestas, pero se tuvo que alargar un día la fecha de entrega, dada la dificultad que suponía esta nueva tarea. Los mapas que entregaron inicialmente los estudiantes no eran del todo satisfactorios, en la opinión de los profesores e investigadores. Se pidió a los estudiantes que, para la entrega final, los completaran en caso de que lo consideraran necesario.

Validación experimental de la respuesta final y su evaluación

En la etapa final de REI, se propuso a los estudiantes trabajar en una *validación experimental* de las respuestas que habían elaborado. A cada grupo se le asignó un candado diferente. Al haber pocos candados disponibles, hubo grupos que trabajaron con el mismo caso. Cada grupo tenía que comprobar si el tiempo que había predicho se aproximaba correctamente al tiempo real que tardaban en abrirlo. Para cerrar esta última etapa, se les pidió a los grupos que elaboraran un vídeo donde cada grupo explicara cómo han descubierto todas las posibles combinaciones del candado, el tiempo que habían pronosticado que era necesario para abrir el candado, el video en *time-lapse* mostrando cuánto tardaban en realidad en abrir, y la comparación entre el tiempo pronosticado y el tiempo real. Durante este proceso aparecieron nuevas preguntas. Por ejemplo, los estudiantes encontraron que uno de los candados admitía hasta tres combinaciones diferentes que lo abrían. Ofrecieron una variedad de hipótesis sobre el funcionamiento interno del candado y buscaron información para describir por qué debía ocurrir esto. Además, los profesores plantearon una nueva cuestión derivada, *¿cuánto tiempo se tardaría en descifrar una contraseña de WiFi con un número fijo de elementos?* para hacerles pensar en cómo el estudio con los candados ayudaría a estudiar esta nueva cuestión. Aún así, esta nueva cuestión es mucho más amplia que la que ha guiado este REI sobre candados, pero se quería probar la reacción de los estudiantes para estudiar su posible potencialidad para futuras experimentaciones.

Finalmente, los estudiantes tuvieron que hacer una presentación oral delante de los tres profesores y del resto de los grupos de las tres clases. En esta presentación debían presentar su mapa de cuestiones y respuestas, el vídeo con la validación experimental de sus respuestas y una primera propuesta sobre cómo abordarían la cuestión de la contraseña de la WiFi. En estas exposiciones, todos los equipos tenían que evaluar a sus compañeros utilizando la misma rúbrica que los profesores.

PRIMEROS RESULTADOS: REACCIONES DE ESTUDIANTES Y PROFESORES

Al finalizar la unidad, se pidió a los estudiantes que rellenaran un cuestionario de evaluación del REI, valorando del 1 al 4 su grado de acuerdo con las afirmaciones. Además, tenían la opción de expresar sus opiniones sobre diferentes aspectos del proceso. Los estudiantes valoraron positivamente tanto la organización, la duración como la variedad de actividades. Sobretodo agradecieron la sesión con la clase magistral y coincidieron en pensar que sin ella seguramente no hubieran sido capaces de resolver el listado de problemas ni el examen. Afirman también que el tiempo de trabajo demandado por el profesorado se ajustaba a las horas de clase y agradecen la flexibilidad y los cambios generados por sus propias necesidades. Por lo general, estarían dispuestos a cambiar la mecánica de las clases por *proyectos* útiles para la comprensión de las matemáticas. En cuanto a las valoraciones más negativas, los alumnos consideraron que el mapa de cuestiones fue una actividad demasiado forzada, incluso innecesaria. Como se les pedía rellenar diariamente el diario de trabajo, consideraron que el mapa de cuestiones era una reiteración de ese trabajo ya hecho. Aun sintiendo que la sensación general era positiva, algunos estudiantes, aunque en minoría, siguen opinando que todo aquello que se aleje de las explicaciones de clase y la práctica de ejercicios de libro es innecesario y prefieren la metodología tradicional. Además, un grupo considerable de estudiantes opina que la resolución de las preguntas relativas a los candados no ha sido útil para el examen, pero si la clase magistral.

En cuanto a los profesores, los tres acabaron con una sensación positiva al finalizar el REI. Manifestaron que, gracias al trabajo manipulativo con los candados, la sesión de clase magistral fue mucho más fluida que si se hubiera empezado por ésta. Se sorprendieron con algunos razonamientos intuitivos de algunos alumnos (a veces los considerados peores estudiantes), que a priori no tenían nociones previas de combinatoria, cómo algunos llegaban a respuestas y razonamientos correctos, aun sin tener las fórmulas. Además, los profesores calificaron como reto el no poder validar (dar por buena o rechazar) las respuestas de los alumnos. El tener que conseguir, mediante preguntas, que

fueran los propios compañeros los que vieran flaquezas en las demostraciones, supuso momentos difíciles de gestionar por los profesores en el aula.

Por otro lado, reconocieron que fue un esfuerzo añadido el tener que documentar la actividad diaria del aula. La herramienta del diario compartido, donde los profesores tenían que apuntar lo ocurrido en el aula, a veces quedaba vacía y los profesores no encontraban momento para rellenarla hasta pasados unos días. Así pues, como la actividad del aula era muy dinámica y requería que se hicieran cambios en la planificación casi diariamente, encontrar los espacios para poder coordinar estos cambios fue prácticamente imposible y estas tareas sucedían entre pasillos y sin el tiempo de reflexión ideal. Esto hacía que, además, los profesores con menos experiencia tuvieran la impresión de descontrol o falta de seguridad. A esto se le sumaba el hecho de ir rotando de grupo entre el profesorado. Ocurría en alguna sesión, con algún grupo, que se generaban dudas por parte de los alumnos referentes a otras sesiones, con otro docente. Este tipo de situaciones, reconocen los profesores, eran difíciles de gestionar, ya que muchas veces se vivían con incomodidad profesional, al tener que poner en cuestión el buen hacer de un compañero.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN SOBRE EL REDISEÑO DEL REI

Intentaremos dar respuesta a los objetivos iniciales de esta primera investigación. En relación con los "imprevistos" o deficiencias del diseño inicial del REI, queremos mencionar dos puntos que consideramos importantes. El primero tiene que ver con el *medio* inicial que se proporcionó a los estudiantes. Como hemos mencionado antes, no dispusimos de suficientes candados materiales para proporcionar a los alumnos, un detalle que puede parecer menor que afectó sin duda el desarrollo de las primeras sesiones. Tampoco se contempló la posibilidad inicial de buscar en la web posible información disponible sobre la cuestión que se planteaba: un gesto de investigador muy evidente pero que no surge de forma espontánea en la cultura escolar tradicional. Finalmente, el aspecto más determinante a nuestro entender fue la necesidad terminológica que se evidenció en los primeros días del REI: la falta de vocabulario común y específico para una situación nueva y compleja para los estudiantes es una complicación que en futuras experimentaciones requerirá de una respuesta más temprana. Es, además, una limitación que ya ha surgido en investigaciones previas sobre los REI pero que todavía no se ha abordado de forma sistemática (Bosch, 2018; Florensa, 2018).

En relación con los dispositivos didácticos que instrumentan el REI, distinguiremos también varios aspectos. En cuanto a los *mapas de preguntas y respuestas,* podemos concluir que no se consiguieron los resultados esperados. Los estudiantes no le encontraron utilidad ya que apareció de una manera demasiado artificial y muy tardía en el proceso de investigación. Para futuras experimentaciones será el profesor el que disponga de esta herramienta y, con las contribuciones de los alumnos, irá construyéndolo durante los momentos de debate.

La *validación experimental* fue una actividad muy provechosa para los alumnos: tuvieron la oportunidad de completar el cómputo del número de combinaciones y analizar las estrategias más eficientes. Para futuras experimentaciones se valorará el poder alternar momentos de contaje con momentos de validación experimental y quizás, introducir herramientas informáticas para realizar el contaje más rápidamente. En cuanto a la *clase magistral,* fue muy útil también para los estudiantes. Basándose en la premisa que los estudiantes ya habían encontrado el número total de combinaciones para cada candado y teniendo claro que no habían necesitado de ninguna herramienta externa, la institucionalización del contaje de casos apareció como una manera de corroborar que los resultados obtenidos eran válidos y que existen alternativas más rápidas, pero no más eficaces, para realizar este contaje. El haber hecho también práctica de la técnica con problemas estándar y una evaluación típica ofreció a los estudiantes y a los profesores la sensación de tranquilidad en cuanto a los aprendizajes y contenidos adquiridos. Aunque no se siguió la estructura tradicional de las clases, los estudiantes eran capaces de saber cómo utilizar las técnicas de la combinatoria para múltiples situaciones.

Sobre las *herramientas de observación y seguimiento*, se observa que los diarios de los alumnos fueron útiles para la distribución y organización del trabajo cooperativo. Normalmente los estudiantes que suelen llevar el mando del equipo y de dirigir los razonamientos era incapaces de rellenar el diario. Esto forzaba a que el resto del grupo se tuviera que repartir las tareas diarias y que, por lo tanto, todos los miembros tuvieran que ser conocedores del proceso del equipo. El diario de los profesores también fue útil para asegurar un consenso común. Aun así, también fueron necesarias reuniones de departamento organizadas o espontáneas para llegar a decisiones comunes. Como suele ser habitual, la falta de disposición de horas de coordinación es una gran restricción para el grupo de profesores.

Finalmente, es necesario mencionar la posibilidad de que en futuras experimentaciones del REI se pueda cambiar la cuestión generatriz por una más abierta y menos "finalizada". Se considerará la opción de plantear: *¿Cuál de los siguientes candados es más seguro?* En el caso que se decida utilizar ésta, se introducirán restricciones añadidas, ya que no es del todo natural que esta cuestión se relacione con la condición institucional más importante que supone el tener que tratar el tema de combinatoria. Quizás, si la cuestión generatriz se cambia, los estudiantes podrán verse motivados a unas líneas de investigación más tecnológicas, lo que puede provocar que los profesores tengan que dirigir más la investigación y los estudiantes pierdan protagonismo en la investigación. En relación con la última cuestión de investigación, las condiciones favorables al REI proporcionadas por la tradición pedagógica del centro, es importante resaltar la naturalidad con la que los estudiantes trabajaban de manera cooperativa, adoptaban nuevos roles, y la facilidad con la que eran capaces de analizar y referenciarse al proceso de aprendizaje, de manera crítica y constructiva. Además, la infraestructura del centro, con disposición de herramientas digitales, facilitó a los estudiantes distintas maneras de interactuar a lo largo del proceso y evidenció su habilidad para crear materiales digitales.

Agradecimientos

Esta investigación se ha financiado en el marco de los proyectos I+D+i: RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y RTI2018-101153-B-C21 (MCIU/AEI/FEDER, UE)

Referencias

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. de Souza y M. Viana (Eds.), *International congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001–4022). Rio de Janeiro: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd https://eta.impa.br/dl/121.pdf

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182. http: //dx.doi.org/1 0.4471 /redimat.201 3.26

Florensa, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and teacher education*. Tesis doctoral. Universitat Ramon Llull.

Jessen, B., Otaki, K., Miyakawa, T., Hamanaka, H., Mozoguchi, T., Shinno, M. y Winsløw, C. (2020). The ecology of study and research paths in upper secondary school. En M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (pp. 118-138). Routledge.

Millán, E. F. (2913). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, *1*, 539-554.

Navarro, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación matemática*, *8*(1), 26-39.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1997). Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, *36*, 433-446.

Parra, V. y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *13*, 1–18.

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO A PARTIR DE UNA TAREA FORMATIVA SOBRE VISUALIZACIÓN[1]

Construction of specialized knowledge from a training task on visualization

Vergara, L., Climent, N. y Codes, M.

Universidad de Huelva

Resumen

En este artículo presentamos los resultados de una investigación sobre la construcción de conocimiento especializado en la formación inicial de maestros de Educación Primaria a partir de tareas formativas. En particular, discutimos el conocimiento sobre el aprendizaje y la enseñanza implicados en una tarea sobre visualización de un cuerpo geométrico. Describimos la tarea formativa, lo que pretende y el análisis del conocimiento movilizado. El modelo MTSK ha resultado útil en estos procesos de diseño y análisis de la implementación de la tarea. De los resultados de la implementación de la tarea destacamos su potencial para problematizar el aprendizaje de los cuerpos geométricos, descubriendo a los futuros maestros la complejidad de los procesos de visualización.

Palabras clave: *tareas formativas, conocimiento especializado, visualización, poliedros, futuros profesores de primaria*

Abstract

In this article we present the results of an investigation on the construction of specialized knowledge in the initial training of Primary teachers from training tasks. In particular, we discuss the knowledge about learning and teaching involved in a task on visualizing a geometric solid. We describe the training task, what it intends and the analysis of the mobilized knowledge. The MTSK model has been useful in these processes of design and analysis of the implementation of the task. From the results of the implementation of the task we highlight its to problematize the learning of geometric solids, revealing to the EPM the complexity of the visualization processes.

Keywords: *task design, specialized knowledge, visualization, polyhedra, future primary school teachers*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se ha hecho patente la necesidad de formar en geometría espacial en las escuelas, ya que la educación geométrica se vio acaparada por un largo tiempo por la geometría plana (Gutiérrez, 1998), deficiencias en el desarrollo de habilidades de visualización (Mulligan, et al., 2020).

La investigación en Educación Matemática ha indagado sobre el desarrollo de estas habilidades en futuros profesores (Sinclair, Mamolo y Whiteley, 2011), considerándose no solo el conocimiento matemático, sino también el conocimiento didáctico del contenido referido a la enseñanza y aprendizaje del pensamiento espacial.

En este artículo presentamos los resultados de la implementación de una tarea que tiene como fin la construcción de conocimiento especializado sobre poliedros en estudiantes para maestro de

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. Proyecto RTI2018-096547-B-I00,

Vergara, L., Climent, N. y Codes, M. (2021). Construcción de conocimiento especializado a partir de una tarea formativa sobre visualización. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 629 – 636). Valencia: SEIEM.

Primaria (EPM). La pregunta que dirige la investigación es: *¿Qué conocimiento especializado promueve una tarea formativa sobre visualización de poliedros?*

MARCO TEÓRICO

En esta investigación nos preocupa cómo se construye el conocimiento profesional en la formación inicial de profesores. El modelo del conocimiento del profesor *Mathematics Teacher Specialised Knowledge* (MTSK), nos facilita dimensiones de análisis (subdominios, categorías e indicadores) (Carrillo et al., 2018) que nos permitirán planificar e interpretar el conocimiento especializado que esperamos construyan los EPM (Montes et al., 2019; Montes, Climent, Carrillo y Contreras, 2019).

La tarea formativa que nos ocupa contempla la construcción relacionada de conocimiento matemático y sobre su enseñanza y aprendizaje (KOT, KMT y KFLM**,** ver destacado en la Figura 1). En particular, el conocimiento de los temas (KOT) recoge el conocimiento matemático articulador de la tarea; el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el de los recursos, estrategias, ejemplos y teorías utilizadas para enseñar el contenido; y el Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático (KFLM), el conocimiento sobre las formas, procesos, estrategias y errores inherentes al aprendizaje de un contenido matemático.

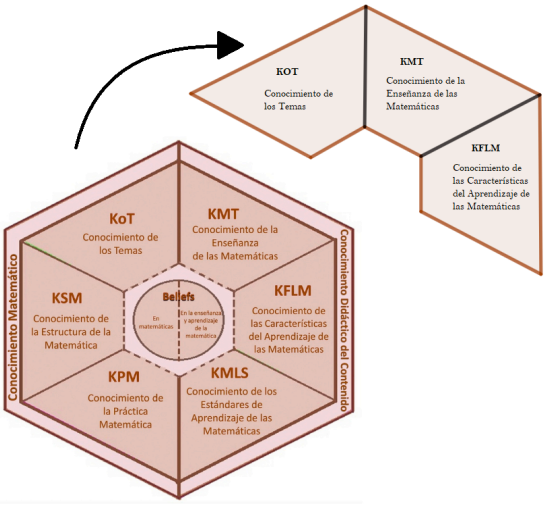


Figura1. Subdominios del modelo MTSK considerados en la tarea formativa.

La connotación del término *tarea* en este trabajo es la asumida por Watson y Ohtani (2015), quienes la describen como "las cosas para hacer" (p.3) (ejercicios, problemas y actividades) que establecen la dinámica de la clase, la interacción y la comprensión de los estudiantes hacia un determinado tema. Compartimos la perspectiva expuesta en Ribeiro, Almeida y Mellone (2019), donde las tareas para la formación de maestros se basan en la integración de aspectos del contenido matemático y didáctico del contenido, de tal forma que el EPM tiene oportunidad de aprendizaje sobre la práctica y de generar una reflexión profesional.

Entendemos que "siempre que estemos manejando objetos espaciales y nos veamos obligados a representarlos mediante figuras planas, tendremos planteado un problema que tiene que ver con la capacidad de visión espacial" (Gutiérrez, 1998, p.195). Para la adquisición de dicha capacidad es necesario desarrollar imágenes mentales (Presmeg, 1986), representaciones externas (Gutiérrez, 1996), procesos de visualización (Bishop, 1983) y habilidades de visualización (Del Grande, 1990).

Otros autores han mostrado el interés de trabajar en tareas para futuros maestros de primaria que involucren la visualización espacial (Battista, Wheatley y Talsma, 1982), pues su formación escolar en algunos casos no promovió la reproducción y construcción de sólidos (Guillén, 2010).

METODOLOGÍA

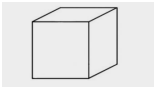
El objetivo de esta investigación es comprender los conocimientos matemáticos, de las características del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que movilizan EPM cuando se enfrentan a una tarea inspirada en una sesión de clase, sobre la visualización e identificación de elementos, propiedades y representaciones de los poliedros. Para ello diseñamos una tarea en el marco de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

En este artículo se presentan las dos primeras fases expuestas en Molina et al. (2011): preparación de la experimentación y experimentación (incluyendo un análisis preliminar). En la primera fase seleccionamos un vídeo de una sesión de clase de quinto de Primaria sobre poliedros. Analizamos el video considerando lo que muestra sobre el aprendizaje de la visualización (incluyendo dificultades, fortalezas y formas de interaccionar con el contenido), su enseñanza (recursos, estrategias, tareas y ejemplos-entendidos aquí como representaciones) y la relación entre la visualización y la construcción de conocimiento geométrico. Relacionamos estos elementos con conocimiento especializado potencial que los EPM podrían construir a partir de él. Seleccionamos entonces algunos aspectos de interés de este conocimiento especializado ligados a un evento del video y construimos una tarea inspirada en dicho evento (Figura 2), analizando a priori cuál es el conocimiento especializado que esperamos construyan los EPM a partir de la tarea.

En el análisis previo de esta sesión de clase de Primaria, identificamos numerosas manifestaciones de las dificultades y fortalezas que poseen algunos niños para visualizar elementos de un cuerpo geométrico. Además, el uso de representaciones planas de los cuerpos geométricos se relaciona con algunas de las dificultades mostradas por los alumnos, lo que permite problematizar dicho uso en relación con la visualización y la importancia de la visualización en el aprendizaje geométrico. En términos generales, la selección de este video permite crear una tarea que incite la construcción de conocimiento especializado sobre la visualización en el aprendizaje de los poliedros.

1. Observa detalladamente la situación y responde a las preguntas.

Elena dibuja en la pizarra un cubo (ver abajo) y pregunta a sus alumnos de primaria en un taller ¿Cuántas aristas tiene un cubo? ¿Qué procedimiento realizas para conocer el número de aristas? Participaron casi todos los alumnos, sin embargo, hay 3 alumnos cuyas respuestas no coinciden con el resto.



Juan: Un cubo tiene cuatro aristas. Son cuatro las que salen de los vértices.
Bartolomé: Son nueve. ¡Es fácil! Sólo tengo que contar las líneas del dibujo.
Rocío: Es un poco complicado. Yo tengo que pensar en el cubo en mi mente, para poder moverlo. Yo cuento doce: cuatro de arriba, cuatro de los lados y cuatro de abajo

a. ¿Qué procedimiento realiza cada estudiante?
b. ¿Qué aspectos ignoran en sus respuestas? ¿Cómo les ayudarías a dar una respuesta correcta?
c. ¿Puedes copiar (calcar) el cubo y señalar en este el razonamiento de cada niño?
d. ¿Influye la representación del cubo en sus repuestas?

2. Indica qué ventajas y desventajas pueden derivar de dibujar en el aula un cubo de las siguientes formas:

A B C D

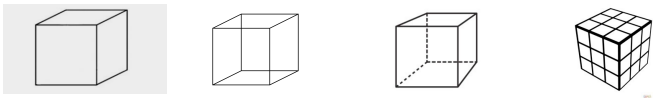


Figura 1. Tarea diseña para movilizar conocimiento especializado sobre poliedros en EPM.

Dentro del conocimiento especializado que pretendemos que movilicen los EPM se encuentra el de definiciones y propiedades básicas de los poliedros. Respecto al conocimiento de las características del aprendizaje de los poliedros, aspiramos a que movilicen ideas en relación con el desarrollo de las habilidades y procesos de visualización de poliedros (en la línea de Gutiérrez, 1998) y las dificultades en el aprendizaje de poliedros propuestos en Guillén (2004, 2010). Respecto al conocimiento de la enseñanza, pretendemos la reflexión sobre la selección de ejemplos, las representaciones de poliedros y los recursos para la reproducción, construcción y representación de poliedros (e.g. Alsina, Burgués y Fortuny, 1988; Van den Heuvel-Panhuizen, et al., 2004).

En la segunda fase, se implementó la tarea en una sesión virtual de una hora con once EPM. La formadora presentó la tarea, proporcionó un tiempo a los EPM para pensarla y se socializaron las respuestas grupalmente. De esta sesión se realiza una videograbación y se recogen las producciones escritas, donde los EPM plasmaron su reflexión (que servirá para complementar con la grabación).

Se ejecuta un análisis de contenido de la información, usando el modelo MTSK cómo instrumento analítico. Aquí se realiza una transcripción de la grabación, se establecen episodios que guardan relación con la estructura de la tarea y se examinan en una plantilla, en la que se toma en consideración la localización de la información, la unidad de información (fragmentos) y la descripción del conocimiento de los EPM en términos del modelo MTSK. Conviene destacar que dada la dinámica en la que se implementó la tarea (socialización), observamos más participaciones de algunos estudiantes, por lo que en el próximo apartado compartiremos las intervenciones de algunos EPM, que verbalizan su conocimiento y que a su vez reflejan las ideas aprobadas grupalmente. Para preservar su identidad, se identifican con EMPn.

RESULTADOS

El primer extracto de discusión corresponde a las repuestas de los EPM al primer ítem de la tarea, donde deben comprender las soluciones de tres alumnos de primaria. Discutiremos sobre el reconocimiento por parte de los EPM de las fortalezas y dificultades de los alumnos en actividades de visualización y sobre las habilidades que consideran implicadas en la actividad (Tabla 1). Asimismo, mencionaremos las estrategias y recursos que consideran para solventar las dificultades.

Tabla 1. Dificultades de alumnos de primaria en el conteo de las aristas de un poliedro.

Repuesta de los EPM al primer ítem de la tarea
1. EPM1: Yo pienso que Bartolomé nada más está contando las partes que ve. Las que están ocultas no las está contando.
2. EPM2: Yo creo que Juan no tiene en cuenta la idea de tres dimensiones en el cubo, entonces solo toma lo que viene siendo una cara del cubo y marca solamente las cuatro aristas. De manera frontal digamos…
3. EPM3: Rocío sí que ve el cubo en tres dimensiones, se lo imagina y ahora sí que cuenta las aristas.
4. EPM4: Rocío se imagina y puede darle la vuelta al cubo para seguir contando las aristas.

Tras los fragmentos presentados en la tabla anterior, es posible discutir sobre el reconocimiento de diferentes formas de interacción de los alumnos ante ciertas representaciones. Iniciamos con EPM1 quien manifiesta la dificultad para identificar elementos ocultos de un poliedro a partir de su representación plana, entendiendo que el alumno Bartolomé solo cuenta las aristas visibles [1]. Esta dificultad se relaciona con la habilidad que Del Grande (1990) denomina identificación visual, que permite identificar elementos ocultos en contextos visualmente complejos, como un cubo con caras opacas.

Por otro lado, EPM2 se percata de que los alumnos pueden confundir el plano con las tres dimensiones, dado que el alumno Juan concibe solo una cara del cubo en el conteo de las aristas [2]. Esto está relacionado con los procesos de visualización expuestos por Gutiérrez (1998) y el procesamiento visual de la información e interpretación de la información figurativa (Bishop, 1989). Estos procesos permiten al alumno convertir una información abstracta en una imagen mental y, a su vez, le permiten extraer información de esa imagen mental. La repuesta de EPM2 pone de relieve que no se debe suponer que es fácil ese procesamiento visual; que por muy básica que sea la estructura de un cuerpo geométrico, se necesita "aprender a ver", es decir, se deben desarrollar actividades que permitan desarrollar dichas habilidades, procesos e imágenes mentales.

La repuesta de EPM3 pone de manifiesto la necesidad de generar imágenes mentales de un poliedro y poder manipular la imagen mental (Gutiérrez, 1992; Presmeg, 1986; Bruce y Hawes, 2015). Esto se evidencia de manera implícita cuando considera que dichos procesos y habilidades son los que permiten a la alumna Rocío resolver exitosamente la actividad [3, 4].

Posterior al reconocimiento de las fortalezas y dificultades de los alumnos, los EPM contemplan el uso de estrategias o recursos que permitan solventar las dificultades de visualización Un caso concreto es EPM4, quien propone la implementación de material manipulativo [5].

5. EPM4 ¿Cómo le ayudaría a dar una respuesta correcta? Pues realmente enseñándole la figura, que lo vea y que le dé vueltas y pueda verlo. Simplemente ahí (representación plana propuesta en la tarea) está viendo tres caras de cubo.

El siguiente extracto guarda relación con la idea anterior sobre los recursos, estrategias y ejemplos, pero está vinculado a la segunda parte de la tarea. Analizaremos el conocimiento que poseen los EPM sobre los diferentes tipos de representación de un poliedro, las potencialidades y limitaciones de seleccionar cada representación y su relación con las habilidades de visualización (Tablas 2 y 3).

Tabla 2. Potencialidades de las diversas representaciones del cubo

Representación	Ventajas
A	6. EPM2: Podemos ver qué fallo tienen o si ya tienen la idea de tres dimensiones en su cabeza.
B	7. EPM1: Permite ver lo que ellos no veían.
C	8. EPM5: La línea discontinua sirve para visualizar mejor, ya que en un papel no puede manipular el objeto (…) y esas líneas son las que no se verían en la representación A, por ejemplo.
D	9. EPM5: Es una representación de un cubo de Rubik.

Iniciamos la discusión con la representación A, que ilustra un hexaedro con caras opacas. El EPM2 considera que esta representación permite valorar el aprendizaje de los estudiantes [6], puesto que para extraer información de ella, se requieren habilidades de visualización y conocimiento de los elementos, propiedades y procedimientos de la estructura de un poliedro. Este EPM problematiza como EPM4 la interpretación de esa representación [2, 10], reconociendo que es también un medio para la comprobación de saberes, lo que manifiesta la necesidad de identificar en qué momentos del aula es más apropiado usar ciertas representaciones, según la intención y objetivo didácticos.

Para EPM1 y EPM5, las representaciones con caras visibles o transparentes (B y C) tienen la potencialidad de facilitar la visualización de elementos ocultos (respecto de otros tipos de representación, como la A) [7, 8], puesto que cuentan con una estructura de armazón, donde aristas, vértices y caras quedan al descubierto. No obstante, EPM2 resalta que ambas pueden presentar desventajas. Este EPM reconoce que para la representación B, los alumnos necesitan la habilidad de discriminar ciertos segmentos de línea, es decir, hay que tener la habilidad de fijarse solo en algunos segmentos que se intersecan e ignorar otros [11]. EPM5 destaca la C, ya que parece

facilitar la diferenciación visual entre las líneas ocultas de las que no lo son, a través del uso de líneas discontinuas [8]. En relación con la representación C, EPM2 establece que los alumnos deben tener un conocimiento previo del significado de las líneas discontinuas [12], reconociendo que la decodificación de una representación no es inmediata y requiere del conocimiento de los códigos.

Tabla 3. Limitaciones de las diversas representaciones del cubo

Representación	Desventajas
A	10. EPM4: Para aquellos niños que no comprendan bien las tres dimensiones, pues les puede resultar un poco más complicado como la respuesta de Juan o Bartolomé.
B	11. EPM2: Al ser todas líneas continuadas a lo mejor puede confundir al niño y decir que "veo muchas líneas y no sé si esas líneas…" porque depende de cómo lo mire, puede ver el cubo como de una manera, en una orientación o en otra.
C	12. EPM2: Pero hay que explicarle al niño con antelación qué son esas líneas discontinuas.
D	13. EPM4: Al estar orientada de otra manera, si la comparamos con la C, sería un poco confuso para ellos ver que la cara de arriba en la C es más pequeña que la cara frontal o la lateral.

Por último, EPM5 destaca de la representación D su cercanía con el contexto del alumno, específicamente con un juego popular [9], lo cual puede facilitar la apropiación de las características del poliedro, ya sea por el conocimiento en profundidad del recurso o por cuestiones de motivación. Sin embargo, EPM4 considera que puede ser objeto de confusión ya que, al comparar sus caras (que tienen la apariencia de tener la misma superficie y forma) con las caras de otras representaciones como la A, B, C (con aparente superficie y forma distinta), el alumno puede cuestionarse sobre las longitudes y formas de las caras [13]. Conviene destacar que esto último que el EPM considera como limitación, puede ser entendido por otros cómo potencialidad, si se tiene como objetivo que el alumno comprenda las condiciones de un poliedro regular, donde sus caras deben ser iguales y se haga necesario la habilidad de discriminación visual (Del Grande, 1990).

ALGUNAS CONCLUSIONES

La construcción de conocimiento sobre el aprendizaje matemático resulta especialmente difícil en la formación inicial de profesores (Ivars, Fernández y Llinares, 2019). De los resultados destacamos el potencial de la tarea para problematizar el aprendizaje de los cuerpos geométricos, descubriendo a los EPM la complejidad de los procesos de visualización. Los EPM reconocen que la interpretación de una representación plana de un cuerpo geométrico requiere de un aprendizaje y el desarrollo de habilidades específicas. Lo anterior, permite construir conocimiento especializado sobre cómo aprenden los alumnos de Primaria el contenido (KFLM), referido tanto a cómo interaccionan con él como a dificultades. A su vez, los EPM problematizan las representaciones, reflexionando sobre las posibles diferencias en términos de potencialidad y limitaciones de cada una. Esto último contribuye a la construcción de conocimiento sobre la enseñanza de la matemática (KMT – estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Finalmente, identifican recursos que favorecen la enseñanza de sólidos (KMT –recursos materiales y virtuales).

De los conocimientos que movilizan los EPM, logramos observar relaciones entre sus conocimientos sobre el aprendizaje del alumno y las decisiones sobre enseñanza (KFLM-KMT). Nos fijamos en que ante la dificultad de algunos alumnos para identificar elementos ocultos en una representación plana con caras opacas, los EPM planteaban el uso de líneas discontinuas que hace visible esos elementos ocultos; el uso de recursos físicos, que permite manipular e identificar los elementos de forma no abstracta, y, a su vez, generar la habilidad de rotar un objeto mentalmente.

En un sentido similar, se observa que la intencionalidad de los EPM en la selección de los ejemplos o representaciones de un poliedro está basada en el conocimiento de las posibles dificultades del alumnado.

Por otro lado, se manifiesta que aquellos alumnos que confunden lo plano y las tres dimensiones, interpretan literalmente la representación plana de un poliedro, es decir, consideran esta como realidad del objeto espacial. En oposición, se identifica que los alumnos que son capaces de interpretar la representación plana de un cuerpo reconocen que esta no es más que una grafía del objeto espacial y que en ambos (plano y 3D) se mantienen las propiedades, elementos y características del cuerpo geométrico. Esta investigación pone de relieve la necesidad de que los EPM problematicen cuestiones que la investigación en Educación Matemática ha mostrado centrales en el aprendizaje del contenido matemático, y que pare ellos pueden ser difíciles de percibir, como la visualización.

El desarrollo de esta investigación contribuirá a la profesionalización de la formación de profesores, pero también muestra la necesidad de seguir indagando en cómo se construye conocimiento profesional en la formación inicial, en el diseño de tareas para la formación de profesores orientadas desde una perspectiva profesional (Ivars et al., 2019) y la utilidad del MTSK para el diseño y el análisis de su implementación (Barrera-Castarnado, Liñán-García, Muñoz-Catalán y Contreras, 2020; Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García y Barrera-Castarnado, 2019).

Finalmente, queremos destacar que los resultados y conclusiones de este documento provienen de una única implementación con un grupo pequeño de profesores en formación. De modo que no se pretende generalizar. No obstante, esta investigación brinda a los formadores de profesores una aproximación de algunos comportamientos en sus estudiantes para maestro, pues nuestra intención no es mostrar qué conocen los EPM sobre el contenido (en el sentido de conocimiento especializado) sino cómo formarlos, el producto es la propia tarea junto con los resultados de su implementación.

Referencias

Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, Síntesis, SA.

Barrera-Castarnado, V., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., y Contreras, L. C. (2020). El uso del MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de educación Primaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C Contreras (Eds.). *IV Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (110-108). Huelva: Universidad de Huelva publicaciones.

Battista, M. T., Wheatley G. H., y Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 332–340.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 7-16.

Bruce, C. D., y Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM Mathematics Education, 47*(3), 331–343.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación matemática, 16*(3), 103-125.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM

Guillén, G.; Gutiérrez, A.; Jaime, A.y Cáceres, M. (1992): *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* (memoria final del proyecto de investigación). (Valencia: Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo")

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema, 3*(3), 193-220.

Ivars, P., Fernández, C., y Llinares, S. principles in the design of tasks to support pre-service teachers' noticing enhancement (2019). En M. Graven, H. Venkat, A. Essien y P. Vale (Eds.). *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 408-415). Pretoria, South África: PME.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas, 29* (1), 75-88.

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. D. M., y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. Gonzales (Eds.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 157-175). Salamanca, Aquilafuente: ediciones Universidad de Salamanca.

Montes, M., Climent, N., Carrillo, J., y Contreras, L. C. (2019). Constructing tasks for primary teacher education from the perspective of Mathematics Teachers Specialised Knowledge. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3955-3962). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., Busatto, S., Lai, J., y Davis, B. (2020). Evaluating the impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) intervention in the primary school. *Mathematics Education Research Journal, 32*, 285-305.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311.

Ribeiro, M., Almeida, A., y Mellone, M. (2019). Desenvolvendo as especificidades do conhecimento interpretativo do professor e tarefas para a formação. *Problematizações sobre a Formação Matemática na Licenciatura em Matemática. [S. l.] SBEM.*

Sinclair, M., Mamolo, A., y Whiteley, W. J. (2011). Designing spatial visual tasks for research: the case of the filling task. *Educational Studies in Mathematics, 78*(2), 135-163.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Van den Brink, J., Janssen, C., Hochstenbach, J., Menne, J., de Moor, E., y Nelissen (2004). Geometry in grades 1 and 2. En M. Van den Heuvel-Panhuizen y K. Buys (Eds.), *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school* (pp. 227-326). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Watson, A., y Ohtani, M. (2015). *Task Design in Mathematics Education: an ICMI study 22*. Springer International Publishing.

Pósteres

LOS MODELOS DE CONOCIMIENTO PROFESIONAL COMO HERRAMIENTAS PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA INVESTIGADORA

Professional knowledge models as tools for the development of research competence

Aguilar-González, A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J.

Universidad de Oviedo

La adquisición de la competencia investigadora se debería comenzar a trabajar en el periodo de formación inicial docente. La literatura es abundante en cuanto al denominado aprendizaje basado en la investigación, especialmente en el ámbito de las CTIM (Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), pero es menos numerosa (Aguilar-González, y Rodríguez-Muñiz, 2019) en cuanto a cómo desarrollar esta competencia para la investigación educativa, en concreto, respecto a cómo enfocar la formación inicial respecto a esa competencia o cómo caracterizarla conceptualmente.

Se presentan resultados respecto al uso del modelo de conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (Technological Pedagogical Content Knowledge o modelo TPACK) (Mishra, y Koehler, 2006) y del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teachers' Specialised Knowledge o modelo MTSK) (Carrillo et al., 2018) en la formación de maestros en la asignatura "Investigación e Innovación en Didáctica de la Matemática" (en el Máster en Investigación e Innovación en Educación Infantil y Primaria) de la Universidad de Oviedo.

Con la finalidad de analizar el grado de interés y de satisfacción con las tareas realizadas sobre los dos modelos, así como para conocer aspectos metacognitivos, se procedió al diseño de un cuestionario online. De los 38 alumnos y alumnas matriculados en la asignatura, 25 procedieron a cumplimentar el cuestionario respecto al modelo TPACK, y 34 en cuanto al modelo MTSK. Estos cuestionarios eran de tipo mixto, combinando preguntas abiertas y cerradas.

Los resultados obtenidos muestran que existe un grado de satisfacción e interés muy alto en cuanto a la adecuación de la tarea para la formación de los maestros, y que este tipo de tarea ha permitido reflexionar sobre cómo aplicar el conocimiento matemático en las actividades, cómo estructurarlo como futuros docentes, centrándose en ciertos aspectos en los que no habían reflexionado hasta el momento.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto TIN2017-87600-P del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Aguilar-González, Á., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2019). Mathematics Teachers' Specialized Knowledge Model as a Metacognitive Tool for Initial Teacher Education. *In Proceedings of the Eleven Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 11)*, 6-10 February, Utrecht, Netherlands.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Aguilar-González, A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Los modelos de conocimiento profesional como herramientas para el desarrollo de la competencia investigadora. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 639). Valencia: SEIEM.

LA COMPRENSIÓN Y HABILIDAD LECTORA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON FRACCIONES

Reading Comprehension and Ability on Problem Solving with Fractions

Atienza-Prieto, A., Sanz, M. T. y López-Iñesta, E.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia

A lo largo de la historia de las matemáticas, muchos investigadores y profesores se han planteado dudas relacionadas con la resolución de problemas aritmético verbales, siendo la investigación sobre estos una fuerte área de investigación. Las destrezas al resolver por parte de alumnado y profesorado (Castro, 1991; Puig y Cerdán, 1995; Verschaffel et al., 2000) no son las únicas herramientas que se precisan para obtener éxitos en el proceso de la resolución de un problema. Tanto la lectura (Fransman, 2005; Vallicelli, 2012) como la comprensión lectora (Goldin y McClintock (1979) son fundamentales en este proceso y evidencian una notable relación directa sobre el éxito al resolver un problema.

De esta manera, en el estudio se pretende reflejar, utilizando un entorno tecnológico, la influencia que estos dos conceptos de la lectura- comprensión y habilidad lectora- tienen cuando se resuelve un problema aritmético verbal, siendo concretamente dichos problemas con fracciones, en los que la fracción actúa como operador. La investigación se centra en los números racionales, debido a la importancia que Freudenthal (1983) y otros autores afirman que tienen dentro de la aritmética de las matemáticas y por aquellas dificultades que puedan generar en los sujetos a la hora de operar con dichos números.

Dentro del marco presentado, en esta investigación se pretenden abordar los siguientes objetivos que se corresponden con las tres variables que van a ser materia de estudio: 1) estudiar la asociación entre la habilidad lectora y la comprensión lectora; 2) evaluar si existe una influencia de la comprensión lectora en el éxito de la resolución de un PAV; 3) conocer si existe relación entre el desempeño del alumnado frente a un PAV y la habilidad lectora medida a través de la lectura del propio enunciado PAV.

Agradecimientos

El trabajo ha sido respaldado por el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación: EDU2017-84377-R

Referencias

Castro, E. (1991). Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. Granada: Universidad de Granada.

Fransman, J. (2005). Understanding literacy: A concept paper. The EFA Global Monitoring Report, Literacy for Life, 31.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Holland: D. Reidel Publishing Company. 28-33, 133-177

Goldin, G. A., & McClintock, C. E. (1979). Task variables in mathematical problema solving.

Puig, L. & Cerdán, F. (1995). Problemas y problemas aritméticos elementales. En Problemas aritméticos escolares (pp.7-23). Madrid: Síntesis.

Vallicelli, A. E. (2012). The practicality of poetry: Using sonnets to improve Reading ability (Doctoral dissertation, Northern Illinois University).

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse: Swets & Zeitlinger Publishers

Atienza-Prieto, A., Sanz, M. T. y López-Iñesta, E. (2021). La comprensión y habilidad lectora en la resolución de problemas con fracciones. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 640). Valencia: SEIEM.

CREENCIAS Y EMOCIONES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN ALUMNADO CON DIFICULTADES AFECTIVAS Y/O SOCIALES

Beliefs and emotions on math learning in students with affective and/or social difficulties

Blanco, T. F. [a], Conde-Lago, J. [a], y Diego-Mantecón, J. M.[b]

[a]Universidade de Santiago de Compostela, [b]Universidad de Cantabria

Las cuestiones afectivas juegan un papel esencial en el aprendizaje de las matemáticas. Este está condicionado por las creencias del alumnado respecto a su propia persona y a las matemáticas, produciendo actitudes y emociones que, a su vez, influyen en dichas creencias. Además, dado que las dificultades sociales también se muestran en el aula de matemáticas (Gómez-Chacón, 2000), la perspectiva sociocultural debe estar presente. Existen trabajos sobre la dimensión afectiva del aprendizaje matemático, pero pocos de ellos utilizan una categorización completa (Diego-Mantecón et al., 2019) que posibilite la evaluación de contextos socioculturales desfavorecidos.

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio exploratorio que permita reconocer y categorizar las creencias y emociones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas en el caso de estudiantes con dificultades afectivas y/o sociales. La muestra está compuesta por alumnado con dificultades afectivas y/o sociales de los dos primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria de tres centros de Santiago de Compostela. El instrumento de análisis es el cuestionario sobre creencias de las matemáticas diseñado por Andrews y Diego-Mantecón (2015) que permite establecer relaciones entre la dimensión afectiva y el contexto sociocultural del alumnado, tratando de profundizar en ambos aspectos, tanto en su vertiente individual como social, y en sus repercusiones en el aprendizaje de las matemáticas.

Los resultados obtenidos sugieren que el rendimiento académico está ligado a una creencia positiva de uno mismo como estudiante de matemáticas, al gusto por esta materia, así como a un auto-concepto, y capacidad de trabajo, alto. Los análisis arrojaron también diferencias significativas en el auto-concepto con respecto a la variable género, siendo inferior la percepción que tienen las chicas con respecto a los chicos en este constructo. La relación entre auto-concepto y rendimiento fue sin embargo significativamente mayor en las chicas que en los chicos. De estos resultados, concluimos en el caso de alumnado con dificultades afectivas y/o sociales, no solo es necesario trabajar aspectos cognitivos del aprendizaje sino también aspectos relacionados con sus emociones y la complejidad de su realidad sociocultural.

Agradecimientos: Investigación financiada por FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ proyecto EDU2017-84979-R.

Referencias

Andrews, P., & Diego-Mantecón, J. M. (2015). Instrument adaptation in cross-cultural studies of students' mathematics-related beliefs: Learning from healthcare research. *Compare: A Journal of Comparative and International Education, 45*(4), 545-567. https://doi.org/10.1080/03057925.2014.884346

Diego-Mantecón, J. M., Blanco, T. F., Chamoso, J. M., & Cáceres, M. J. (2019). An attempt to identify the issues underlying the lack of consistent conceptualisations in the field of student mathematics-related beliefs. *PloS ONE*, *14*(11), e0224696. https://dx.doi.org/10.1371%2Fjournal.pone.0224696

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

Blanco, T. F., Conde-Lago, J., y Diego-Mantecón, J. M. (2021). Creencias y emociones en el aprendizaje de las matemáticas en alumnado con dificultades afectivas y/o sociales. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 641). Valencia: SEIEM.

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE FUTUROS MAESTROS EN UN PROGRAMA DE ESTÍMULO MATEMÁTICO

Analysis of prospective primary teachers' didactic-mathematical knowledge in a program to stimulate mathematical learning

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C. y González-Sequeiros, P.

Universidad de Santiago de Compostela

Este estudio tiene como objetivo analizar el conocimiento didáctico-matemático de una muestra de 30 futuros maestros que participaron en un programa de estímulo matemático para alumnado en riesgo de exclusión social. Dicha participación se integra en la metodología aprendizaje-servicio, que ofrece a estos estudiantes universitarios posibilidades específicas para la adquisición de las competencias propias de la titulación, a la vez que promueve una conciencia social y cívica indispensable en el desarrollo de su labor docente. Como instrumentos de recogida de datos se han empleado las grabaciones de la experimentación de las actividades STEAM del programa de estímulo (Blanco et al., 2019) por parte de los futuros maestros y su intervención en el centro educativo, las fichas de registro de cada una de las actividades, el cuaderno de campo y un cuestionario de satisfacción. Para el análisis se ha considerado el Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (Godino, 2009, Pino-Fan y Godino, 2015) en el que se proponen tres categorías globales sobre el conocimiento didáctico-matemático: conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado.

Los resultados obtenidos muestran que los futuros maestros consiguen realizar las actividades del programa con bastante inseguridad (conocimiento común). En cuanto al conocimiento especializado, se destacan sus dificultades para identificar los objetivos y contenidos matemáticos que persiguen las actividades (conocimiento del contenido especializado). Estas dificultades se manifiestan a lo hora de adaptarlas a otros cursos o niveles y establecer conexiones con otros contenidos y contextos (conocimiento ampliado), así como de prever las posibles dificultades con las que se podrían encontrar los alumnos en riesgo de exclusión social (conocimiento del contenido en relación con los estudiantes) e intentar solventarlas. A pesar de que los resultados del cuestionario de satisfacción fueron buenos, se concluye que esa falta de seguridad en el contenido común y escaso dominio del conocimiento ampliado tiene consecuencias importantes en la gestión de las actividades por parte de los futuros maestros. Esto supone un serio obstáculo, tanto para la promoción del estímulo matemático (dimensión servicio) como para la mejora de sus actitudes y emociones hacia las matemáticas en lo que a la dimensión aprendizaje se refiere.

Financiado por: FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ proyecto EDU2017_84979-R

Referencias

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C., Salgado, M., Salinas-Portugal, M. J., González-Sequeiros, P. y González-Roel, V. (2019). Análisis del efecto de un programa de estímulo matemático en adolescentes en riesgo de exclusión social. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 611). Valladolid: SEIEM.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 13-31

Pino-Fan, L. R., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma,* 36(1), 87-109.

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C. y González-Sequeiros, P. (2021). Análisis del conocimiento didáctico-matemático de futuros maestros en un programa de estímulo matemático. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 642). Valencia: SEIEM.

LA DIFICULTAD PARA OPERAR CON LO DESCONOCIDO EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA MEDIANTE LA HOJA DE CÁLCULO

The obstacle to operate with the unknown in algebraic resolution using spreadsheets

Cabero, I.[a] y Arnau, D.[b]

[a]Universitat Jaume I, [b]Universitat de València

Uno de los puentes que permiten el acceso a la comprensión de conceptos matemáticos abstractos es el lenguaje algebraico, la adquisición del mismo es crucial y es un objetivo primordial de la educación matemática. No obstante, los estudiantes se encuentran con serias dificultades durante la introducción del álgebra. Una explicación habitual es la dificultad para abandonar las formas de razonamiento asociadas a la aritmética (Demonty, Vlassis y Fagnant, 2018). Se han hecho planteamientos didácticos alternativos con el fin de modificar la transición entre la aritmética y el álgebra. Uno de ellos es la utilización de hojas de cálculo para la resolución de problemas verbales. Numerosas investigaciones han señalado sus potencialidades, aunque también se han mostrado limitaciones y obstáculos asociados a su uso (Dettori, Garuti y Lemut, 2001).

El objetivo principal de nuestro planteamiento es determinar si la incapacidad para expresar la incógnita es una limitación de los sujetos en cualquier lenguaje, y por tanto ligada a una forma de proceder típicamente aritmética, o si el lenguaje en el que se pretende realizar la simbolización, en nuestro caso el lenguaje de la hoja de cálculo, es un obstáculo determinante.

En nuestro estudio participaron estudiantes de segundo curso de secundaria que habían sido instruidos previamente en la resolución algebraica de problemas. Durante trece sesiones de cincuenta minutos se desarrolló una secuencia de enseñanza dirigida a capacitarlos en la resolución algebraica de problemas verbales mediante la hoja de cálculo. Tras la instrucción, se grabaron cinco parejas resolviendo problemas verbales algebraicos mediante la hoja de cálculo.

El análisis de las verbalizaciones nos ha permitido observar casos en los que los sujetos experimentales no siempre son capaces de simbolizar una ecuación en el lenguaje de la hoja de cálculo, pero si han expresado verbalmente la ecuación que resuelve correctamente un problema tanto mediante el lenguaje del álgebra como con el lenguaje natural. En consecuencia, la dificultad de operar con lo desconocido no es simplemente una diferencia entre la transición de la aritmética al álgebra, sino que también estaría influida por la capacidad, del lenguaje que se utiliza, para representar lo desconocido.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo del proyecto PGC2018-096463-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovacion y Universidades del Gobierno de España.

Referencias

Demonty, I., Vlassis, J., y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(1), 1-19.

Dettori, G., Garuti, R., y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland and T. Rojano and A. Bell and R. Lins (Eds.) *Perspectives on school algebra* (pp. 191-207). Springer.

Cabero, I. y Arnau, D. (2021). La dificultad para operar con lo desconocido en la resolución algebraica mediante la hoja de cálculo. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 643). Valencia: SEIEM.

REPERCUSIÓN DE LA TIPOLOGÍA DE PRESENTACIÓN DE LOS DATOS EN EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES

Impact of typology of data presentation on word problem-solving ability

Cabero, I.[a], Diago, P. D.[b], González-Calero, J. A.[c], Wu, Y.[b], Arnau, D.[b] y Arevalillo-Herráez, M.[b]

[a]Universitat Jaume I, [b]Universitat de València, [c]Universidad de Castilla-La Mancha

La resolución de problemas verbales es uno de los talones de Aquiles del conocimiento de los maestros en formación (Taplin, 1998). Por otro lado, numerosos estudios han puesto de manifiesto la existencia de una relación entre la competencia en la resolución de problemas verbales y la comprensión lectora (Vilenius-Tuohimaa, Aunola y Nurmi , 2008).

Bajo estas premisas, hemos planteado una experimentación en la que se pretendía evaluar el potencial de una secuencia de enseñanza sobre resolución aritmética de problemas verbales apoyada en el uso de los nombres de las cantidades en lugar de sus valores numéricos. Los sujetos participantes fueron 70 estudiantes de último curso de un grado de magisterio. Los sujetos se dividieron en un grupo experimental y otro de control. Durante la secuencia de enseñanza, ambos grupos resolvieron problemas típicamente aritméticos usando el programa HINTS (Arnau, Arevalillo-Herráez y González-Calero, 2014). En este entorno los usuarios introducen las operaciones aritméticas que constituyen una solución y el sistema les indica la validez de las mismas. La introducción de las operaciones se realiza usando una botonera en la que desde un principio aparecen las cantidades conocidas. A medida que se determina el valor de las cantidades desconocidas, el sistema crea nuevos botones para hacer posible se uso. El grupo de control utilizó una versión de HINTS en la que se mostraban los valores de las cantidades en los botones, mientras que en el grupo experimental se presentaban los nombres de las cantidades.

Para valorar el efecto del uso de los nombres de las cantidades en lugar de los valores, se compararon los resultados obtenidos por los grupos en dos cuestionarios formados por problemas verbales administrados antes y después de la instrucción. Los resultados efectivamente demuestran que el grupo experimental ha obtenido mejores resultados y se ha beneficiado de la práctica verbal.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo del proyecto PGC2018-096463-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovacion y Universidades del Gobierno de España y del proyecto de innovación docente UV-SFPIE_PID20-1351257 de la Universitat de València.

Referencias

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., y González-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an intelligent tutoring system for arithmetical problem solving. *IEEE transactions on learning technologies*, *7*(2), 155-164.

Taplin, M. (1998). Preservice teachers' problem-solving processes. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(3), 59-75.

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K., y Nurmi, J.E. (2008) The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, *28*(4), 409-426

Cabero, I., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Wu, Y., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2021). Repercusión de la tipología de presentación de los datos en el aprendizaje de la resolución de problemas verbales. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 644). Valencia: SEIEM.

IMPLICACIONES DE LA PRÁCTICA DE REFERENCIA EN EL ESTUDIO DEL CAMBIO

Implications of reference practice in the study of change

Cabrera-Chim, L. M.[a] y Martínez-Maldonado, J. A.[b]

[a]Universidad Autónoma de San Luis Potosí, [b]Escuela Secundaria Técnica Núm. 76

Ser competente para estudiar el cambio es un objetivo formativo social y matemático de gran relevancia; ya sea para analizar situaciones cotidianas, profesionales y sociales o para el aprendizaje de saberes matemáticos como los del Cálculo (Cantoral, 2019; Thompson & Carlson, 2017). En los últimos años se han generado varios trabajos y marcos de referencia que analizan cómo las personas enfrentan situaciones de variación; establecen niveles de desempeño que alcanza una persona al hacer esto; se analizan elementos que intervienen para analizar el cambio; entre otros (Cantoral, 2019; Thompson & Carlson, 2017). Sin embargo, se ha prestado poco énfasis en establecer cómo desarrollar esa competencia para estudiar el cambio a través de su variación.

En el sentido anterior, los autores y colaboradores están elaborando un modelo de referencia que sustente el diseño de situaciones variacionales que contribuyan al desarrollo de dicha competencia. Este modelo se compone de 4 estadios: *tomar conciencia de aquello que cambia* (las variables que intervienen); *establecer un sistema de referencia para medir y estudiar el cambio* (relación causal de las variables, elemento de referencia, unidad de medida y la temporización de estados); *análisis del comportamiento variacional* (variación de primer grado y variaciones sucesivas), *y abstraer el carácter estable del cambio* (regularidad que determina el comportamiento del fenómeno).

Como parte del trabajo empírico para desarrollar el modelo anterior, se aplicaron situaciones variacionales a un grupo de 20 estudiantes de tercero de secundaria (15 años) en una escuela de San Luis Potosí, México. Los resultados evidenciaron que los estudiantes pueden transitar, no sin algunos problemas, por los primeros dos estadios. Sin embargo, al llegar al tercero se comienzan a tener resultados no consistentes. Ellos pueden identificar patrones de comportamiento de las variables empleando el "método de las diferencias" (calcular diferencias de la variable dependiente y, en su caso, las diferencias de estos resultados y así sucesivamente) y los emplean para calcular estados desconocidos cuando solo importa su valor. Sin embargo, cuando la actividad requiere interpretar o significar el cambio en términos del contexto, las particularidades y normativas en las que se enmarca, es decir, la práctica de referencia (Montiel & Buendía, 2012), los estudiantes no logran dar sentido a los patrones identificados, lo que les impide analizar y solucionar lo planteado. Esto obliga a considerar cómo integrar el papel de las prácticas de referencia en el modelo en desarrollo. Además, evidencia la importancia de plantear situaciones de aprendizaje donde el contexto no sea un "adorno", sino que se promueva la interpretación y significación del cambio y su variación en términos de la práctica de referencia y que los estudiantes transiten por los 4 estadios.

Agradecimientos: Convenio 511-6/2020-8585 de PRODEP-SEP, México.

Referencias

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber. Pensamiento y Lenguaje Variacional*. España: Editorial Gedisa.

Montiel G. & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, Virginia, Estados Unidos: National Council of Teachers of Mathematics.

Cabrera-Chim, L. M. y Martínez-Maldonado, J. A. (2021). Implicaciones de la práctica de referencia en el estudio del cambio. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 645). Valencia: SEIEM.

¿QUÉ CARTA SOY? JUGANDO CON LA PROBABILIDAD PARA PARA POTENCIAR LOS AFECTOS POSITIVOS

What letter am I? Playing with the probability to enhance positive affects

De La Fuente, A.[a] y Garrido-Martos, R.[b]

[a]Colegio Divino Corazón, [b]Universidad Autónoma de Madrid

El proceso de enseñanza-aprendizaje es una continua interacción entre las dimensiones cognitiva y afectiva. En este trabajo nos hemos centrado en el uso de juegos y recursos didácticos, pero teniendo muy presente que "innovar en el aula conlleva múltiples esfuerzos, pero realmente si no cambiamos e innovamos en evaluación, de poco va a servir los otros esfuerzos, salvo para mejorar el ambiente y motivación momentánea en el aula" (Carmona y Cardeñoso, 2019, p. 74). Hay profesores que limitan sus análisis a lo divertido que ha sido la experiencia y realizan simplemente una valoración cualitativa sobre las impresiones de aprendizaje de los alumnos (Franco-Mariscal y Sánchez, 2019), pero nuestra propuesta sugiere definir bien los estándares de aprendizaje y los contenidos a trabajar. En concreto, optaremos por introducir el tema de probabilidad, permitiendo además que los estudiantes progresen en su conocimiento de la materia desde su experiencia y lenguaje cotidiano hasta experiencias y lenguajes matemáticos más avanzados llegando a comprender e interpretar los demás significados de la probabilidad y de la aleatoriedad (Rodríguez-Muñiz y Díaz, 2018).

Con una metodología de investigación-acción con enfoque cualitativo a partir de la observación sistemática y rejillas de evaluación previamente validadas, determinaremos si la presentación de un nuevo tema de probabilidad a través de juegos didácticos mejora aspectos como el autoconcepto, la actitud, el interés y, por supuesto, la adquisición de esos conocimientos. Para ello, se ha realizado una intervención en dos clases de 2ºESO de un colegio concertado de difícil desempeño en Madrid, en concreto 17 y 18 alumnos. La actividad se ha llevado a cabo en marzo del 2021, momento en el que hay restricciones por motivos de la COVID-19. En este trabajo se presenta el diseño de un juego adaptado al contexto; la construcción de un modelo de rúbrica de autoevaluación para que el alumno valore de forma sincera y en confianza la experiencia; y las rejillas de observación para que el docente pueda recopilar información sobre los aspectos de carácter afectivo, sobre el material utilizado y los efectos de implementación en busca de una mejora del aprendizaje. Los resultados obtenidos determinan valoraciones positivas en cuanto al interés, la implicación y la participación, el autoconcepto y la valoración del trabajo en grupo. Con respecto a las creencias previas, el 20% afirma que o tenía recuerdos muy diferentes sobre el tema o no tenía ninguna idea sobre el tema y se detectó incertidumbre en la gran mayoría, posiblemente por romper el contrato didáctico al que están habituados. Hay que destacar que un 34% no llegan a encontrar el juego como una buena herramienta de aprendizaje y que existen sujetos que no encuentran la relación entre el juego y la probabilidad.

Referencias

Carmona, E. y Cardeñoso, J. (2019). Situaciones basadas en juegos de mesa para atender la elaboración del conocimiento matemático escolar. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 101*, 57-81.

Franco-Mariscal, A.J. y Sánchez, P.S. (2019). Un enfoque basado en juegos educativos para aprender geometría en educación primaria: Estudio preliminar. *Educação e Pesquisa, 45*(21).

Rodríguez-Muñiz, J.L. y Díaz, P. (2018). Las investigaciones sobre la estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. ¿Qué se ha hecho y qué se puede hacer? *Avances de investigación en educación matemática, 4*, 65-81.

De La Fuente, A. y Garrido-Martos, R. (2021). ¿Qué carta soy? Jugando con la probabilidad para para potenciar los afectos positivos. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 646). Valencia: SEIEM.

RESOLVIENDO PROBLEMAS VERBALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA CON UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE: ¿QUÉ PIENSAN LOS ESTUDIANTES AL RESPECTO?

Solving verbal problems in elementary school with an intelligent tutorial system: What do students think about it?

del Olmo-Muñoz, J.[a], Tirado-Olivares, S.[a], Diago, P. D.[b], González-Calero, J. A. [a], Arnau, D.[b] y Arevalillo-Herráez, M.[b]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha, [b]Universitat de València

El uso de la tecnología tiene el potencial de transformar los modelos educativos tradicionales en modelos más flexibles y eficaces (Pedró, 2011). En el caso de los entornos interactivos de aprendizaje, uno de los motivos de esta mejora sería el elemento de interactividad que estos proporcionan al estudiante, que permitiría activar algunos de los procesos necesarios para un aprendizaje significativo (Moreno y Mayer, 2005), además de aumentar la motivación (Kristof y Satran, 2005). Dentro de los entornos interactivos de aprendizaje se encuentran los sistemas tutoriales inteligentes, caracterizados por ofrecer al estudiante la posibilidad de un aprendizaje individualizado en el que este puede marcar su propio ritmo.

En el presente trabajo se presentan los resultados de una investigación en la que 133 estudiantes de 5º y 6º de Educación Primaria trabajaron con el sistema tutorial HINTS en la resolución aritmética de problemas verbales. Tras seis sesiones de trabajo, con el objetivo de conocer las percepciones de los estudiantes sobre la herramienta, estos completaron un cuestionario de satisfacción basado en la *Escala de Evaluación de Objetos de Aprendizaje para Estudiantes* (LOES-S), validada en Kay y Knaack (2009). Dicho instrumento está compuesto por 12 ítems, valorados mediante escala Likert de 5 puntos, que miden las percepciones de los estudiantes en constructos como el aprendizaje, la calidad (diseño instruccional) o la motivación hacia un objeto de aprendizaje concreto. Por otro lado, los datos cuantitativos se complementan con las respuestas de los alumnos a una pregunta abierta y genérica sobre su trabajo con HINTS, extraída de un estudio de casos posterior con 26 de los estudiantes, seleccionados atendiendo a su nivel de desempeño en la resolución de problemas verbales con el fin de disponer de una selección representativa. Los resultados cuantitativos reflejaron una visión favorable de los estudiantes hacia esta herramienta en los constructos medidos de aprendizaje, calidad y motivación (con un promedio por encima de 4 sobre 5). Al mismo tiempo, los resultados cualitativos revelaron que los estudiantes valoraron favorablemente otros aspectos como, por ejemplo, la facilidad de uso de HINTS o el estímulo generado por el uso de la tecnología.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo de los proyectos PGC2018-096463-B-I00 y SBPLY/19/180501/000278.

Referencias

Kay, R. H., y Knaack, L. (2009). Assessing learning, quality and engagement in learning objects: the Learning Object Evaluation Scale for Students (LOES-S). *Educational technology research and development, 57*(2), 147-168.

Kristof, R., y Satran, A. (2002). *Interactivity by design*. Adobe Press.

Moreno, R., y Mayer, R. E. (2005). Role of guidance, reflection, and interactivity in an agent-based multimedia game. *Journal of educational psychology, 97*(1), 117.

Pedró, F. (2011). *Tecnología y escuela: lo que funciona y por qué.* Madrid: Fundación Santillana.

del Olmo-Muñoz, J., Tirado-Olivares, S., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2021). Resolviendo problemas verbales en Educación Primaria con un Sistema Tutorial Inteligente: ¿Qué piensan los estudiantes al respecto?. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 647). Valencia: SEIEM.

CONOCIMIENTO DE LOS FUTUROS DOCENTES SOBRE LA HISTORIA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Future Teachers Knowledge about the History of Definite Integral

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T.

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.

Universidad de Salamanca.

Diversos investigadores (Ma, 1999; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) señalan la necesidad de que los docentes de matemáticas tengan un conocimiento profundo de las mismas. Esto implica que no sólo deben conocer las matemáticas, sino que tienen que tener conocimiento sobre su origen, cambios y desarrollo (Kim, 2013). Es decir, el profesor debe "demostrar conocimiento sobre el desarrollo histórico de los tópicos" (N.C.A.T.E., 2003, p. 4). Esto permitirá una comprensión más profunda del concepto a tratar y nos revelará aspectos y conceptos matemáticos que, de otra manera, se ocultan bajo una fórmula final carente de sentido (González, 2004).

Con el propósito de indagar acerca del conocimiento previo que tienen los futuros docentes sobre el concepto de integral definida, se ha elaborado un cuestionario estructurado en dos partes. La primera, tipo test (6 ítems), sobre las concepciones en relación con la inclusión de la historia de las matemáticas en la docencia. La segunda, que se estructura en 7 preguntas, incluye una primera para indagar acerca de algunos matemáticos esenciales en la historia del concepto, y 6 problemas de aplicación de conocimientos histórico-matemáticos relacionados con el cálculo integral. Esta segunda parte, se diseñó después de un estudio pormenorizado de la historia y evolución del concepto, lo que permitió establecer diferentes hitos en su desarrollo. Iniciamos el recorrido desde la antigua Grecia con el método de exhausción, pasamos por el periodo medieval con la teoría de los indivisibles formulada por Cavalieri, entramos en el siglo XVII con las cuadraturas aritméticas de Fermat y Wallis, la noción de diferencial y el teorema fundamental del cálculo. Por último, se aborda la relación, no necesaria, entre primitiva analítica y función integrable. Este cuestionario se ha pasado a 15 estudiantes del máster de formación de profesores de la Universidad de Salamanca. Tras el análisis de las repuestas de la primera parte se evidencia que los futuros docentes de matemáticas ven la inclusión de la historia como una herramienta introductoria del tema/concepto y no como un complemento a sus saberes. En la segunda parte, aunque se testimonia cierto pensamiento infinitesimal, aparecen grandes dificultades de construcción y significado, constatándose una gran dependencia de la regla de Barrow para resolver problemas de cálculo de áreas.

Referencias

González, P.M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma nº 45, Febrero 2004*, 17-28.

Kim, Y. (2013). *Teaching Mathematical Knowledge for Teaching: Curriculum and Challenges*. Tesis doctoral. Universidad de Michigan.

Ma, L. (1999) *Knowing and Teaching Elementary mathematics: Teachers understanding of fundamental mathematics in China and in the United States*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council for the Accreditation of Teacher Education (2003). *Program standards: Programs for initial preparation of mathematics teacher*. Washington, DC.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.). *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321- 354). Rotterdam: Sense Publishers.

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T. (2021). Conocimiento de los futuros docentes sobre la historia de la integral definida. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 648). Valencia: SEIEM.

MODIFICACIÓN DE UNA TAREA DE LIBRO DE TEXTO SOBRE LONGITUD POR FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

Textbook task modification on length by prospective primary teachers

Fernández-Plaza, J. A. y López Centella, E.

Universidad de Granada

Es consabida la importancia de la selección, el diseño y la modificación de tareas en la competencia profesional del profesorado de matemáticas en todos los niveles educativos (Lee, Lee, y Park, 2016). En particular, la formación y el ejercicio del futuro profesorado de educación primaria en la modificación de tareas de libro de texto contribuye a su propio distanciamiento de la praxis de uso pasivo de dicho recurso como fuente exclusiva de tareas (Lee, Lee, y Park, 2016). Esto favorece la percepción de sí mismo como profesional reflexivo y crítico, con capacidad y autonomía para adaptar y diseñar propuestas educativas según sus objetivos didácticos. En este póster presentamos una investigación cualitativa, de carácter descriptivo y exploratorio, sobre los modos en que futuros maestros de Educación Primaria transforman una tarea sobre longitud, procedente de un libro de texto (Alonso, Bernal, Ferrero y Martín, 2015), en una secuencia de tareas sobre dicho tópico. Concretamente, nos centramos en identificar las acciones involucradas en sus propuestas de tareas y describir las deficiencias y errores cometidos en su diseño. Para ello analizamos las respuestas de 35 estudiantes del tercer curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada a un cuestionario en soporte papel diseñado con este fin. Con base en un sistema de categorías inspirado en el Análisis de Instrucción del Análisis Didáctico (Marín, 2013) y en trabajos de investigación relacionados, caracterizamos las propuestas de tareas de los participantes de acuerdo con nuestros objetivos de investigación. Con relación a las acciones involucradas en ellas, destacan notablemente en número la conversión de unidades de longitud y la medición de longitudes de objetos de manera estandarizada, mientras que acciones de carácter abierto, como la propuesta de objetos de longitudes dadas o el diseño de itinerarios de longitud comprendida en un intervalo de medida, resultan mucho menos frecuentes. Respecto a los errores observados en el diseño de las tareas (más de 60), casi la mitad de ellos resultan ser conceptuales (confusión entre escala y equivalencia de unidades, arbitrariedad en el establecimiento de equivalencias entre unidades, unidades de medida incorrectas para la magnitud indicada, etc.); más de la cuarta parte de los errores son de tipo didáctico (incoherencia entre las acciones y los objetivos declarados en la tarea, datos insuficientes en la formulación de la tarea, conversión de una unidad a otra poco apropiada en el contexto en cuestión, orden inadecuado de los enunciados de una misma tarea, asignación de medidas de longitud poco realistas a objetos cotidianos, etc.); respondiendo, el resto, a errores de expresión (uso de vocabulario impreciso o inapropiado). La implementación de futuras investigaciones permitirá ampliar y estudiar la representatividad de los sistemas de categorías presentados, así como ampliar el horizonte y alcance de las conclusiones de este estudio, que parecen señalar la necesidad de un refuerzo de la formación de los futuros maestros en los aspectos explorados. [Agradecemos el apoyo del grupo de investigación "FQM-193 Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico".]

Referencias

Alonso, G., Bernal, E. I., Ferrero, L. y Martín, P. (2015). *Matemáticas 6 Primaria*. Madrid: Anaya.

Lee, E. J., Lee, K. H., y Park, M. (2016). Task modification and knowledge utilization by Korean prospective mathematics teachers. *Pedagogical Research, 1*(2), 1-13.

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática - Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular.* Granada: Comares.

Fernández-Plaza, J. A. y López Centella, E. (2021). Modificación de una tarea de libro de texto sobre longitud por futuros maestros de primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 649). Valencia: SEIEM.

DIVULGACIÓN DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO MEDIO DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Divulgation of Mathematics Education like an environment for teacher's training

Flores-Medrano, E.[a], Escudero-Ávila, D.[b], Cruz-Márquez, G. [c], Flores-Medrano, K. [c] y Quiñones-Baldazo, N. [d]

[a] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, [b] Ciudad de México, [c] Cinvestav, [d] Universidad de las Américas Puebla

Una línea de investigación en Educación Matemática es la relativa a la formación del profesor. Al respecto, se han empleado distintos acercamientos teóricos y metodológicos. Dos elementos que se han explorado con regularidad son la noción de reflexión (e.g. Godino y Batanero, 2008) y el trabajo en comunidades (e.g. Camargo, 2010). A raíz del uso de nuevas tecnologías, también ha habido una proliferación de proyectos formativos que se han desarrollado de manera virtual (e.g. López y Casillas, 2016). Además del evidente, otro punto de encuentro entre estas propuestas es que, en su mayoría, se establecen en entornos de formación científica organizada.

En este póster se presenta una propuesta formativa del profesorado de matemáticas basada en la divulgación organizada de contenidos de la Educación Matemática. Dicha divulgación se ha realizado por medio de un canal de YouTube de manera semanal durante los últimos dos años. De acuerdo con Blanco-López (2004), "la tarea de divulgación consiste en recontextualizar en una situación comunicativa común (para una audiencia lega y masiva, con medios diferentes, etc.) un conocimiento previamente construido en contextos especializados (entre científicos, con unos instrumentos comunicativos especiales, etc.)" (p. 76). Y aunque existen diferencias entre la formación científica y la divulgación científica, la propuesta formativa que presentamos pretende explorar el impacto que puede tener sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas este tipo de ambientes divulgativos masificados. Se respalda, de manera germinal, el estudio de tal impacto a partir de estadísticas de audiencia autogeneradas y con base en la organización de contenidos que nos permite establecer el modelo MTSK de Carrillo-Yáñez et al. (2018). Asimismo, se abordan posibles preguntas de investigación, modos de acceder a estas y dificultades asociadas con el entorno de desarrollo de la propuesta.

Referencias

Blanco-López, A. (2004). Relaciones entre la educación científica y la divulgación científica. *Revista Eureka sobre la enseñanza y divulgación científica*, *1*(2), 70-86.

Camargo, L. (2010) *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* [Tesis de Doctorado]. Universidad de Valencia.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Godino, J.D., y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Actas VI CIBEM* (pp. 4-9). CIBEM.

López, L.F.G., y Casillas, J.C.S. (2016). La comunidad virtual de prácitca. Alternativa para la formación continua de profesores. *CPU-e*, *Revista de Investigación Educativa*, 22, 28-51.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Cruz-Márquez, G., Flores-Medrano, K. y Quiñones-Baldazo, N. (2021). Divulgación de la educación matemática como medio de formación de profesores. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 650). Valencia: SEIEM.

UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES SOBRE LOS NÚMEROS COMPLEJOS DE ALUMNOS UNIVERSITARIOS

A characterization of undergraduate students´ conceptions about complex numbers

García-Caro, D.[a], Valenzuela, C.[a], García, M.[b] y Sanz, M. T.[c]

[a]Universidad de Guadalajara [b]Universidad Autónoma de Guerrero, [c]Universidad de Valencia

La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos desde la educación matemática se han indagado poco, y las investigaciones que hay al respecto señalan que su tratamiento se hace comúnmente desde el registro algebraico. Con la intención de contribuir al estudio de la problemática que se relaciona con ese concepto, se ha diseñado un proyecto de investigación en el que se tiene como objetivos, por un lado, caracterizar las concepciones relacionadas con los números complejos, y que han construido los estudiantes que inician sus estudios universitarios, y, por otro lado, a partir de dicha caracterización, diseñar un modelo de enseñanza que contribuya a la construcción de nuevas concepciones sobre dicho concepto. En particular, en este trabajo se reportan los resultados obtenidos para alcanzar el primer objetivo, es decir, caracterizar las concepciones de los estudiantes en términos de la teoría APOE (Arnon et al., 2014). Con esto se pretende responder a la pregunta ¿cuáles son las concepciones en relación con los números complejos que han construido los estudiantes al iniciar la universidad?

La investigación se llevó a cabo con 17 estudiantes de primer semestre de la licenciatura en física de una universidad pública. Se diseñó un cuestionario que consta de nueve preguntas y que está basado en investigaciones previas (Pardo y Gómez, 2007; Aznar et al., 2010). Las preguntas se diseñaron con la intencionalidad de ver mecanismos y estructuras mentales. En las primeras tres preguntas subyace el trabajo con los números complejos a partir de tareas conocidas para los estudiantes, por ejemplo, la resolución de ecuaciones cuadráticas y operatoria con expresiones algebraicas y aritméticas. Las preguntas restantes contienen características explícitas de los números complejos, haciendo alusión al módulo, argumento, parte real y parte imaginaria.

En este reporte se muestra un análisis de las respuestas de los estudiantes en términos de las estructuras y mecanismos mentales relacionados con los números complejos y que construyeron previamente. En el análisis, se presenta la clasificación de respuestas, sus principales características y la frecuencia con la que aparece cada una. Los resultados obtenidos dejan ver que algunos alumnos han construido concepciones fundamentales relacionadas con los números complejos como, por ejemplo, coordenadas y ángulos en el plano cartesiano, distancia entre dos puntos o razones trigonométricas. Sin embargo, sus acciones sobre estos objetos no explicitan las relaciones que tienen con los números complejos, en especial cuando los números se representan geométricamente, ya sea en su forma polar o como pareja ordenada. Otra conclusión que se resalta es que las estructuras mentales que construyeron los estudiantes, relacionadas con estos números, son principalmente acciones y procesos, por lo que es necesario favorecer otras estructuras.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Aznar, M, Distéfano, M., Prieto, G., y Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa*, *12*(47), 13-22.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, *2*(1), 3-15.

García-Caro, D., Valenzuela, C., García, M. y Sanz, M. T. (2021). Una caracterización de las concepciones sobre los números complejos de alumnos universitarios. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 651). Valencia: SEIEM.

ATENCIÓN A LOS ALUMNOS CON DIFICULTADES EN TAREAS ARITMÉTICAS Y ALGEBRAICAS

Attention to students with difficulties in arithmetic and algebraic tasks

Garrido, R. G. y Figueroa M. de J.

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM.

Nuestro objetivo es elaborar materiales didácticos, para alumnos de Matemáticas I y II de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), que es uno de los dos bachilleratos que tiene la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), en estos dos primeros cursos de Matemáticas, se busca que los alumnos amplíen su conocimiento de aritmética y avancen en el estudio del álgebra, iniciada en la Escuela Secundaria, en cuyo programa de estudios, se menciona que al egresar de la secundaria, los estudiantes saben efectuar cálculos con expresiones algebraicas donde los coeficientes son números racionales y formulan ecuaciones o funciones para resolver problemas.

Para elaborar materiales que apoyen a los alumnos de primer ingreso (15 a 16 años) del CCH en tareas algebraicas, nos tenemos que preguntar: ¿qué dificultades enfrentan los alumnos en el momento de resolver un problema algebraico?; ¿cuáles son los errores que tienen en la obtención del modelo algebraico?; y ¿Cuáles son los errores al operar con el modelo, para obtener la solución del problema?

Para responder estas preguntas realizamos un estudio sobre el desempeño en tareas algebraicas de estudiantes de 15 a 16 años, en el cual diseñamos un examen diagnóstico, donde incluimos 6 reactivos del examen Concepts in Secondary Mathematics and Science de Küchemann (1981), que aplicamos en el año escolar 2021. En el examen, el 32% de los alumnos obtuvieron una calificación baja, 48% obtuvieron una calificación regular y 20% obtuvieron una calificación alta. A los alumnos con baja calificación, se les dio un curso de regularización de 20 horas, dos horas diarias. Se adecuaron materiales de la primera etapa de la Olimpiada Nacional de Matemáticas, dirigido a estudiantes de primaria y secundaria. Se pidió a los alumnos utilizar el modelo de Polya. Al final del curso de regularización, se les volvió a aplicar el examen diagnóstico y se obtuvo un promedio con 38 décimas mayor que el promedio obtenido en el primer examen. Estos resultados se utilizaron en la planeación de los cursos regulares.

Encontramos, que algunos alumnos, tienen dificultades para resolver problemas con números enteros y que la mayoría no maneja las letras como incógnitas. Al resolver un problema tratan de encontrar un número entero positivo y no intentan plantear una expresión algebraica para resolverlo "un común denominador es la ausencia de métodos algebraicos en las respuestas de alumnos entre 12 y 16 años de edad" Rojano (1994. p. 49). Están anclados en aspectos aritméticos, ambiente donde obtienen resultados correctos, que les impide avanzar a plantear expresiones algebraicas para resolver el problema de manera algebraica. Se elaboró una lista de errores cometidos por los alumnos, en los dos exámenes, con la finalidad de buscar alternativas para solucionar estos problemas.

Referencias

Esquinas, A. (2009). Dificultades de Aprendizaje del Lenguaje Algebraico. Universidad Complutense de Madrid. 127 - 128.

Küchemann, D. (1981). Algebra, en Hart K.. Children's understanding of Mathematics. London: John Murray. 11-16.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las Ciencias 12 (1). 45 - 56.

Garrido, R. G. y Figueroa M. de J. (2021). Atención a los alumnos con dificultades en tareas aritméticas y algebraicas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 652). Valencia: SEIEM.

CONFLICTOS COMOGNITIVOS EN EL DISCURSO SOBRE TEORÍA DE GRAFOS

Commognitive conflicts in the discourse on Graph Theory

Gavilán-Izquierdo, J. M.[a], Gallego-Sánchez, I.[a], González, A.[a] y Puertas, M. L.[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Almería

La teoría de grafos es una parte de la matemática discreta que es objeto de investigación en educación matemática (Hart y Sandefur, 2018). Este contenido en nuestro país está presente exclusivamente en niveles universitarios (González, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2019). La investigación que estamos desarrollando pretende caracterizar el aprendizaje de la teoría de grafos desde la teoría de la comognición (Sfard, 2008) de estudiantes universitarios del grado en Ingeniería Informática.

En esta teoría (Sfard, 2008), la identificación de conflictos comognitivos se relaciona con el aprendizaje matemático (González-Regaña, Martín-Molina, Toscano, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2021). En la teoría de la comognición, los conflictos comognitivos "suponen para los estudiantes sustanciales oportunidades de aprendizaje matemático" (p. 83). Una manera de caracterizarlos es cuando se dan narrativas en conflicto que provienen de dos discursos diferentes (González-Regaña et al., 2021). Las distintas representaciones de los grafos dan una primera categorización de los conflictos comognitivos por identificar narrativas que provienen de discursos diferentes e inconmensurables. Por ejemplo, la *representación pictórica* sugiere una relación de analogía entre la geometría euclídea y la teoría de grafos (González, Gallego-Sánchez, Puertas y Gavilán-Izquierdo, 2021). Igualmente, cuando se utiliza la *representación conjuntista* de los grafos, el conjunto de vértices puede considerarse una sucesión numérica (finita) con los vértices ordenados identificándose el primer y último vértice y la posibilidad de igualdad entre ellos. La resolución de estos conflictos comognitivos da lugar al aprendizaje.

Un ejemplo de conflicto comognitivo lo identificamos a partir de la representación conjuntista cuando al caracterizar los ciclos el estudiante solo tiene en cuenta el conjunto de vértices (y no el de aristas) y que este conjunto forma una sucesión numérica (finita) señalando que un "primer y último vértice son el mismo". La resolución de este conflicto comognitivo conllevará la necesidad de tener en cuenta el conjunto de aristas y las características propias que definen un ciclo: conectividad y que todos los vértices son de grado 2.

Referencias

González, A., Gallego-Sánchez, I., Puertas, M. L. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). *Niveles de respuesta de estudiantes de teoría de grafos usando definiciones desde el modelo de van Hiele*. Este volumen.

González, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Presencia de la teoría de grafos en la enseñanza de grado en España. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 622). Valladolid, España: SEIEM.

González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(1), 81-97.

Hart, E.W. y Sandefur, J. (Eds.) (2018). *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research*. Cham, Suiza: Springer.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Gavilán-Izquierdo, J. M., Gallego-Sánchez, I., González, A. y Puertas, M. L. (2021). Conflictos comognitivos en el discurso sobre teoría de grafos. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 653). Valencia: SEIEM.

ESTRATEGIAS INFORMALES DE ESTUDIANTES CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PRODUCTO CARTESIANO

Informal strategies of students with autism spectrum disorder when solving Cartesian product problems

González-De Cos, L., Van Vaerenbergh, S., Goñi-Cervera, J. y Polo-Blanco, I.

Universidad de Cantabria

En las últimas décadas, se han llevado a cabo varios estudios sobre las estrategias empleadas por niños en la resolución de problemas de estructura multiplicativa. Entre ellos, Mulligan & Mitchelmore (1997) establecieron niveles de dificultad en la comprensión de estos problemas e identificaron una serie de estrategias que permitieron inferir modelos intuitivos empleados por los niños.

Recientemente, ha crecido el interés por investigar qué estrategias son usadas en problemas de estructura multiplicativa por estudiantes con dificultades de aprendizaje, en particular, en estudiantes con trastorno del espectro autista (TEA) (Polo-Blanco et al., en prensa). Dentro de este contexto, el presente estudio se centra en analizar las estrategias empleadas por niños con TEA para resolver problemas de estructura multiplicativa de combinación (o producto cartesiano).

En este estudio participaron 26 niños de edades entre 6 y 12 años con diagnóstico TEA y CI >=70, escolarizados en centros de educación ordinarios. A cada participante se le presentaron dos problemas verbales de producto cartesiano: Uno cuya solución requería una multiplicación, y otro que requería una división. Se analizaron las estrategias de resolución empleadas, tanto correctas como incorrectas, siguiendo la clasificación propuesta por Mulligan & Mitchelmore (1997).

Los resultados obtenidos en el problema de multiplicación mostraron un 27% de aciertos, frente a un 19% de aciertos en el problema de división. La estrategia más usada en estos casos consistía en cálculos que tomaban la forma de hechos conocidos interiorizados, aunque también se identificaron algunos casos de modelización por emparejamiento, por ejemplo, mediante el empleo de dibujos. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no llegó a resolver los problemas correctamente, y en el análisis de esas soluciones se ha encontrado una gran variedad de estrategias. La estrategia incorrecta más empleada consistió en el empleo de relaciones aditivas. Otras estrategias incorrectas fueron: número dado (proporcionar uno de los datos del problema), emparejamiento parcial (combinar los elementos uno a uno sin repetición) o algoritmo inverso (realizar una multiplicación en lugar de división o viceversa). Estos resultados aportan información sobre las dificultades de comprensión en la resolución de problemas en alumnado TEA y tienen implicaciones para poder diseñar metodologías de enseñanza adecuadas para estudiantes con este trastorno.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de investigación PID2019-105677RB-I00/AEI/10.13039/501100011033 y por las ayudas Concepción Arenal del Gobierno de Cantabria.

Referencias

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 309-330.

Polo-Blanco I., Van Vaerenbergh, S., Bruno, A., & González-López, M.J. (en prensa). Conceptual model-based approach to teaching multiplication and division word-problem solving to a student with autism spectrum disorder. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*.

González-De Cos, L., Van Vaerenbergh, S., Goñi-Cervera, J. y Polo-Blanco, I. (2021). Estrategias informales de estudiantes con trastorno del espectro autista en la resolución de problemas de producto cartesiano. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 654). Valencia: SEIEM.

INFLUENCIA DEL CONTEXTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LENGUAJE INCONSISTENTE EN ALUMNADO CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA

Influence of the context when solving inconsistent language problems by students with autism spectrum disorder

Goñi-Cervera, J.[a], Polo-Blanco, I.[a], Bruno, A[b]. y Fernandez-Cobos, R.[a]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de La Laguna

Los *problemas aritméticos de enunciado verbal* son un desafío para muchos estudiantes de desarrollo típico, pues su resolución requiere habilidades matemáticas, así como comprensión lectora y capacidad de planificación de la información (Daroczy *et al.*, 2015). Entre las numerosas investigaciones sobre ellos, destacan las que han analizado los problemas de *lenguaje inconsistente* (Lewis y Mayer, 1987), esto es, los que se resuelven con una operación contraria al término relacional del enunciado. Es el caso del problema de *cambio* de *disminución*: "Tenía algunos caramelos, me comí 5 y ahora tengo 7, ¿cuántos caramelos tenía al principio?", que se resuelve mediante una suma.

Los estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA) se incorporan cada vez con mayor frecuencia a las aulas ordinarias, y es de interés conocer sus fortalezas y debilidades en el ámbito de las matemáticas para mejorar su calidad educativa. En concreto, sobre la resolución de problemas aritméticos se ha estudiado cómo los resuelven en función de diferentes variables asociadas a su enunciado (Bae, et al., 2015) o al contexto de interés del estudiante (Polo-Blanco et al., 2021). No se han encontrado estudios que evalúen dificultades con problemas de lenguaje inconsistente en alumnado TEA.

Se presentan los resultados de un estudio sobre la resolución problemas aditivos en tres estudiantes con TEA en el que se analiza cómo influye el contexto de interés en problemas aditivos de lenguaje inconsistente. Los sujetos, escolarizados en un centro ordinario, tenían 6 y 8 años. Realizaron cinco pruebas de evaluación de problemas aditivos, con un total de 40 problemas, pertenecientes a todas las categorías semánticas (*combinación, cambio* y *comparación*) de los que 15 eran de lenguaje inconsistente, redactados en contextos con y sin interés para el alumnado.

Los resultados muestran que los problemas inconsistentes fueron los más difíciles de resolver, predominando la estrategia de plantear la operación inversa que los resuelve. En ellos se observó que el contexto de interés no fue determinante en el éxito, aunque sí en la mejor actitud y concentración por parte de los tres sujetos. Los resultados tienen implicaciones para la enseñanza matemática de estudiantes con este trastorno.

Agradecimientos

Trabajo financiado por proyectos EDU 2017-84276-R y PID2019-105677RB-I00/AEI/ 10.13039 / 501100011033 y por las Ayudas Concepción Arenal del Gobierno de Cantabria.

Referencias

Bae, Y.S., Chiang, H. M. y Hickson, L. (2015). Mathematical Word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peer. *J. AutismDisord, 45*, 2200-2208.

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., y Nuerk, H. C. (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology, 6*(66), 1-13.

Lewis, A. B., y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, *79*, 363-371.

Polo-Blanco, I., González, M. J. y Bruno, A. (2021) Influencia del contexto en problemas de multiplicación y división: estudio de caso de un alumno con autismo. *Siglo Cero 52*(1)*,* 59-78.

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., Bruno, A. y Fernandez-Cobos, R. (2021). Influencia del contexto en la resolución de problemas de lenguaje inconsistente en alumnado con transtorno del espectro autista. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 655). Valencia: SEIEM.

ESTUDIO COMPARATIVO DEL ERROR DE INVERSIÓN EN DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS

Comparative study on reversal error at different educational levels

Gutiérrez-Soto, J. y Liern-García, M.

Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València

Este trabajo sigue la investigación comenzada por Gutiérrez-Soto, González-Calero y Arnau (2016), cuyo objetivo es evaluar qué modelo explica de manera más satisfactoria el error de inversión en problemas similares al problema de Mindy ("Escribe una ecuación usando las variables C y S para representar la siguiente afirmación: 'En el restaurante de Mindy, por cada 4 personas que pidieron tarta de queso, hay 5 personas que pidieron strudel'. Donde C representa el número de pasteles de queso y S el número de strudels", Clement, 1982, p. 17).

Clement (1982) propuso dos posibles modelos explicativos para interpretar el error de inversión: 1) la coincidencia del orden de las palabras; y 2) la comparación estática. Con esta investigación pretendemos analizar cómo afectan diferentes variables de la tarea en la mayor o menor incidencia del error de inversión, y así, entender mejor las razones por las que ocurre.

Concretamente, en este trabajo, queremos comparar la incidencia del error de inversión en diferentes niveles educativos. Se ha realizado un estudio empírico a 75 estudiantes de ESO y Bachillerato, a 106 estudiantes del Grado de Maestro/a en Educación Primaria y 68 estudiantes del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria.

Nos hemos centrado en el estudio de las respuestas a la tarea: "Escribe una ecuación, usando las cantidades 3, 29, número de médicos, número de pacientes, para representar la siguiente afirmación: En un hospital, por cada 3 médicos hay 29 pacientes". Además, hemos introducido como variable de tarea la obligatoriedad de usar únicamente el signo de multiplicación.

Al responder a esta tarea, el alumnado de ESO y Bachillerato cometió más error de inversión (un 84% del total) que el alumnado del Grado de Maestro/a en Educación Primaria (un 38% del total) y que el alumnado del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria (un 17% del total). Estos resultados van en la línea de que un mejor conocimiento de los conceptos algebraicos, como el uso de letras, el signo igual o el concepto de ecuación, produce una menor incidencia en el error de inversión.

Hay que resaltar que el 98% (62 de 63) de los estudiantes de ESO y Bachillerato que cometió error de inversión contestó siguiendo el orden de las palabras del enunciado (3 * Número de médicos = 29 * Número de Pacientes). En el caso del Grado de Maestro/a en Educación Primaria, fueron el 75% (30 de 40) de los estudiantes, mientras que en el Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria fue el 100% (12 de 12). Esto apoyaría la hipótesis de la coincidencia del orden las palabras como modelo explicativo.

Referencias

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16–30.

Gutiérrez-Soto, J., González-Calero, J. A., & Arnau, D. (2016). Errores en la construcción de ecuaciones a partir de enunciados que contienen relaciones de proporcionalidad. *Épsilon*, *33*(2), 63–78.

Gutiérrez-Soto, J. y Liern-García, M. (2021). Estudio comparativo del error de inversión en diferentes niveles educativos. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 656). Valencia: SEIEM.

EL JUEGO COMO HERRAMIENTA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD[1]

The game as a tool to improve the learning of probability

Herreros-Torres, D. y Sanz, M. T.
Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Magisterio, Universidad de Valencia

No es una novedad escuchar duras críticas hacia la disciplina de Matemáticas por los problemas que presentan los estudiantes a la hora de aprender sus contenidos, ni resultan desconocidos los estereotipos que la definen como "difíciles y destinadas a los «más inteligentes»" (Gil, Blanco y Guerrero, 2006, p.552). La cuestión es que, aunque gran parte del alumnado es consciente de la verdadera utilidad de las matemáticas, otra parte no suele mostrar gran interés por el aprendizaje de esta materia (Pochulu, 2009), idea que se muestra en el descenso de 5 puntos en las puntuaciones PISA (2018) respecto a PISA (2015). En particular, la estadística y la probabilidad se considera una de las áreas más debilitadas, no solo por su tardía incorporación al currículo escolar o su constante ubicación al final del temario, sino por su enseñanza bajo métodos obsoletos, consecuencia de la escasa formación y dominio del profesorado en este campo (Alsina, 2016). Así pues, con el propósito de indagar y profundizar en propuestas de mejora relacionadas con nuevas prácticas docentes que impulsen la adquisición progresiva de conocimientos probabilísticos, en este trabajo se presenta una propuesta didáctica para favorecer el aprendizaje de la predicción de resultados y del cálculo de probabilidades. Esta propuesta está basada en el juego, siendo éste el medio vehicular para tratar de ofrecer nuevas formas de enseñanza que rompan con el modelo didáctico tradicional. Para el desarrollo de la investigación se efectuó una intervención de carácter teórico- experimental en un colegio público de un municipio de la Comunidad Valenciana, tomando como muestra 19 estudiantes de un curso de sexto de Educación Primaria. En concreto, se proporcionó un pretest para conocer los conocimientos de los estudiantes tras ser instruidos mediante una metodología tradicional llevada a cabo por el tutor. Los contenidos a evaluar giraban en torno a la regla de Laplace y sobre conceptos probabilísticos en base a la predicción de resultados de experiencias al azar (caso favorable, casos posibles y suceso imposible). Tras esto, se implementaron seis sesiones basadas en el juego. Y, por último, se les volvió a evaluar de esos contenidos a través de un posttest. El análisis de los datos pone de manifiesto que el aprendizaje basado en juegos mejora los resultados. De 5 sucesos a evaluar, en el pretest solo se registran respuestas en 3 de ellos, mientras que en el posttest existen datos para los 5 obteniendo éxito en sus respuestas como mínimo la mitad de la muestra para cada uno de los sucesos. Así pues, en este caso, esta instrucción innovadora provocó una mejoría en la adquisición de los contenidos y competencias estudiadas, demostrando que el problema no es tanto la propia disciplina o la capacidad de alumnado para el entendimiento y el aprendizaje, sino más bien el tipo de enseñanza que reciben.

Referencias

Alsina, Á. (2016). La probabilidad en educación primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas, 71*, 46-52.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación, 340*, 551-569.

Ministerio de Educación (2019). *PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos. OCDE. Informe español.* Madrid.

Pochulu, M. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Colección Digital Eudoxus*, (8).

[1] Agradecimientos: proyecto de Innovación Docente UV-SFPIE_PID19-1095187

Herreros-Torres, D. y Sanz, M. T. (2021). El juego como herramienta para mejorar el aprendizaje de la probabilidad. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 657). Valencia: SEIEM.

EL DOCENTE COMO CLAVE EN EL DESEMPEÑO DEL ESTUDIANTADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[1]

The Teacher as a key to student performance in problem solving

Herreros-Torres, D. [a], Sanz, M. T. [a] y Gómez-Ferragud, C. B. [b]
[a] Dpto. de Didáctica de la Matemática, UVEG; [b] Dpto. de Didáctica de las Ciencia, UVEG

Son muchos los autores que resaltan la importancia del proceso de enseñanza-aprendizaje a través de la resolución de problemas (Leinwand, 2014), en particular de las fracciones (Llinares, 2003) por lo que parece un buen ámbito de estudio recurrir a dicha confluencia. Entre los referentes más próximos, se encuentran los estudios realizados por Sanz, Figueras y Gómez (2018) y Sanz, López-Iñesta, García-Costa y Grimaldo (2020), quienes tras estudiar el desempeño del alumnado en resolución de problemas dónde la fracción actúa como operador determinan que el éxito en el manejo de la fracción como operador es bajo; tanto en representación gráfica, cálculo y resolución de problemas (Sanz et al., 2018), como en relación con la habilidad lectora cuando el operador actúa sobre un todo natural o fraccionario (Sanz et al., 2020). No sólo el alumnado debe ser estudiado ya que autores como Waller (2012) u Olfos et al. (2014) determinan que el conocimiento del contenido de los docentes está significativamente asociado al rendimiento de los estudiantes. Así, en la presente investigación se va a indagar entorno al desempeño de un grupo de 20 discentes de 6º curso de Educación Primaria y 40 docentes recién graduados en Magisterio Primaria ante la resolución de problemas de una etapa con fracciones donde estas actúan como operador frente a un número natural (PAEV1) y uno fraccionario (PAEV2). Los objetivos marcados son: (1) analizar el proceso de resolución de alumnado y profesorado ante los problemas PAEV1 y PAEV2; y (2) determinar si existe vinculación entre el desempeño del cuerpo de profesores y estudiantes ante la resolución de los PAEVs. Los resultados muestran que ambos agentes educativos presentan dificultades; únicamente 5/20 estudiantes y 28/40 profesores han resuelto con éxito PAEV1. Respecto a PAEV2 0/20 estudiantes y 11/40 lo han resuelto con éxito. Podría afirmarse que las dificultades encontradas en los estudiantes podrían ser condición directa del insuficiente dominio a nivel disciplinar del contenido de fracción por parte de los docentes. Como futuro, a la luz de lo obtenido parece importante evaluar hasta qué punto la enseñanza en primaria está siendo funcional en torno a la didáctica de las fracciones y se prevé necesario detectar los aspectos a mejorar durante la formación del profesorado y posteriormente en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referencias

Leinwand, S. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics, Incorporated.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. *Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional.*

Olfos, R., Goldrine, T. y Estrella, S. (2014). How Much Is Teachers' Pedagogical Content Knowledge Related to Students' Understanding of Fractions? *Revista Brasileira de Educação*, *19*(59), 913-944.

Sanz, M. T., Figueras, O., y Gómez, B. (2018). Las fracciones, habilidades de alumnos de 15 a 16 años. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, *25*, 257-279.

Sanz, M.T., López-Iñesta, E., García-Costa, D.,Grimaldo, F. (2020). Measuring Artihmetic Word Problem Complexity through Reading Comprehension and Learning Analytics. *Mathematics*, *8*(9), 1556.

Waller, L.I. (2012). Math Intervention Teachers' Pedagogical Content Knowledge And Student Achievement. [Tesis de Doctorado, Eastern Kentucky University, USA].

[1] Agradecimientos: proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación: EDU2017-84377-R.

Herreros-Torres, D., Sanz, M. T. y Gómez-Ferragud, C. B. (2021). El docente como clave en el desempeño del estudiantado en resolución de problemas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 658). Valencia: SEIEM.

LA FORMACIÓN MATEMÁTICA EN LOS GRADOS DE EDUCACIÓN INFANTIL EN ESPAÑA

The mathematical training in the degrees of childhood education in Spain

Hidalgo-Méndez, M. A., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y Casas-Rosal, J. C.

Universidad de Córdoba

Antes de la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) en España, las titulaciones universitarias de magisterio incluían en sus planes de estudios asignaturas troncales, que garantizaban, a nivel nacional, que los futuros maestros adquirieran un conocimiento mínimo común. Sin embargo, el EEES dotó a las universidades la capacidad de diseñar sus planes curriculares de forma independiente, lo que provoca que en la actualidad alumnos que obtienen el mismo grado universitario de educación en dos universidades distintas, reciben distinta formación (Jiménez., Ramos y Ávila, 2012).

Es de interés por tanto indagar si la formación matemática recibida por los futuros maestros de Educación Infantil en España está influencia por la autonomía de las universidades, en particular el objetivo de este trabajo ha sido analizar la situación de la formación matemática en los Grados de Educación Infantil en España. Para la consecución de este objetivo centraremos nuestra atención en el número de asignaturas de matemáticas, su contenido, el carácter de obligatoriedad u optatividad, los créditos asignados o su temporalización, todos aspectos establecidos en la planificación de la enseñanza de los grados en las diferentes universidades.

Para realizar este estudio se han consultado, durante el curso 2019 – 2020, las webs de las universidades que aparecen listadas en el Registro de Universidades, Centros y Títulos (RUCT) del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España. En ella encontramos que nuestro país cuenta con 90 universidades, entre ellas imparten el grado de Educación Infantil 66, siendo 39 públicas y 27 privadas.

Ahondando en las asignaturas de contenido matemático, encontramos que en todas las universidades que ofertan el grado en Educción Infantil, se cursan asignaturas del área de matemáticas. En total se han contabilizado 99, de las que solo se han podido estudiar 96. Hallamos asimismo que más del 50% de las universidades ofertan una sola asignatura de contenido matemático. Respecto al carácter de las asignaturas, se puede observar que la mayor parte son obligatorias (76 materias) y el 76% del total es de seis créditos ECTS.

La distribución de asignaturas se concentra sobre todo en el tercer curso (47 materias), seguidas de las que se ubican en el segundo curso (28 asignaturas), estas son en su mayor parte de carácter obligatorio; solo 8 son anuales y 81 son cuatrimestrales.

Referencias

Jiménez, L, Ramos, F. J, y Ávila, M. (2012). Las Universidades Españolas y EEES: Un Estudio Sobre los Títulos de Grado de Maestro en Educación Primaria. *Formación universitaria, 5*(1), 33-44.

Hidalgo-Méndez, M. A., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y Casas-Rosal, J. C. (2021). La formación matemática en los grados de Educación Infantil en España. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 659). Valencia: SEIEM.

PREFERENCIAS DE LOS ESQUEMAS PARA LA PRUEBA DE ESTUDIANTES DE LOS GRADOS DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Proof preferences by undergraduate Mathematics and Physics students

Jerez-Santana, K. O. y Camacho-Machín, M.

Universidad de La Laguna

En los últimos años, diversas investigaciones han puesto en evidencia tres hechos importantes relacionados con el aprendizaje de la prueba por parte de estudiantes de primeros cursos universitarios. Por una parte Harel y Sowder (1998) muestran que los estudiantes se fijan más en el formato de las pruebas que en su contenido. Por otra, González-Martín y Camacho (2004) destacan la renuencia a usar diagramas y esquemas visuales para dar justificaciones y explicaciones sobre la veracidad o falsedad de resultados. Finalmente, Stylianou et al. (2015) señalan en su investigación la predilección de uso de un argumento de tipo deductivo u otro para justificar un resultado o proposición, dependiendo de la naturaleza de relación que se estaba estudiando y el contexto de uso.En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en un estudio realizado con 66 estudiantes de primer curso universitario (42 matriculados del Grado en Física y 24 del Grado en Matemáticas) en el curso 2020-21. Se trata de realizar una adaptación de la investigación desarrollada por Stylianou et al. (2015) con el objetivo de explorar tanto la relación entre las creencias de los estudiantes respecto a las pruebas y su comprensión, como el tipo de argumentos que prefieren cuando se les presenta la justificación o prueba de un argumento relativamente sencillo. Para ello, se diseñó un cuestionario con cuatro "situaciones" o conjeturas válidas, tres vinculadas con una relación numérica o algebraica y otra visual. Para cada una de ellas, se presentan cuatro argumentos como "justificación" que hemos denominado: (1) deductivo-narrativo, (2) deductivo-simbólico, (3) visual o gráfico y (4) comprobación empírica. Los participantes deben elegir para cada una de las situaciones cuál es el argumento que más se acerca al que construirían, cuál consideran más riguroso, cuál usarían para justificar la veracidad de la conjetura ante sus compañeros y finalmente, cuál es la percepción que tienen acerca de cada uno.

Del análisis de los resultados obtenidos, se concluye que para justificar la veracidad de las situaciones o conjeturas ante sus compañeros, más de la mitad de los participantes mostraron una clara predilección por un argumento de tipo deductivo-simbólico, a diferencia de los resultados de Stylianou et al. (2015), quienes encuentran una preferencia mayor por un argumento de tipo no deductivo. Asimismo, prácticamente la totalidad de los participantes prefirieron seleccionar este tipo de argumento como el más riguroso, mostrándose también en este caso, una diferencia con los resultados de la investigación de Stylianou et al. (2015), donde solo la mitad de los participantes lo consideraban como tal. Se puede concluir a partir del estudio realizado que existe una tendencia mayoritaria a construir de argumentaciones de tipo deductivo, y una resistencia a seleccionar la argumentación visual para justificar cualquier tipo de relación, ya sea geométrica o numérica.

Referencias

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 479-486.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in college mathematics education III* (pp. 234-283). Providence: American Mathematical Society.

Stylianou, D., Blanton, M. y Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships Between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*, 91-134.

Jerez-Santana, K. O. y Camacho-Machín, M. (2021). Preferencias de los esquemas para la prueba de estudiantes de los grados de Matemáticas y Física. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 660). Valencia: SEIEM.

EL IMPACTO DISCURSIVO DE LAS RESPUESTAS DEL PROFESOR A MOMENTOS ENSEÑABLES CLAVE

The impact on discourse of teachers' responses to pivotal teaching moments

Kribs, C. y Joswick, C.

Universidad de Texas en Arlington, EEUU

El discurso matemático entre profesor y los alumnos ha sido un tema de interés y de investigaciones en los últimos años. El concepto de *momento enseñable clave* identifica instancias dentro de tal discurso en que un alumno, al decir algo inesperado o impredecible (con contenido matemático), crea una oportunidad para el profesor de adaptar la enseñanza al pensamiento estudiantil (Lampert, 1985). Stockero y Van Zoest (2013) desarrollaron un marco teórico para analizar estos momentos PTM (por sus siglas en inglés, *pivotal teaching moments*) y también la respuesta del profesor, lo cual influye en el subsiguiente discurso. El marco de Weaver et al. (2005) identifica nueve niveles cognitivos de enunciado matemático estudiantil. En dos estudios, combinamos estos dos marcos para investigar la relación entre un PTM y la respuesta del profesor y el nivel cognitivo del próximo enunciado estudiantil, definiendo un *episodio PTM* con estos tres elementos.

En el primer estudio analizamos un conjunto de nueve lecciones de multiplicación y división en tercer y cuarto año de primaria en aulas en el estado de Texas (EEUU). Encontramos un total de 84 episodios PTM, de los cuales un 77% involucraron algún error matemático estudiantil. Los dos tipos dominantes de respuesta del profesor en estas lecciones fueron o ignorar el enunciado o indagar el pensamiento estudiantil. Un análisis estadistico encontró que el nivel cognitivo subsecuente de discurso estudiantil fue significativamente más alto cuando el profesor indagó el pensamiento estudiantil, que cuando no.

En el segundo estudio analizamos cuatro lecciones de secundaria (octavo año) de geometría del estudio video TIMSS: dos de Estados Unidos y dos de Australia. En este caso, entre los 78 episodios PTM identificados, los dos tipos dominantes de momento enseñable eran errores estudiantiles y preguntas al profesor. El tipo dominante de respuesta del profesor fue enfatizar el sentido de las matemáticas (incluyendo corregir al alumno). Sin embargo, hubo una diferencia significativa entre los niveles cognitivos del discurso obtenido por este tipo de respuesta y por indagar el pensamiento del estudiante (este último siendo más alto).

La diferencia entre los resultados de los dos estudios se podría deber a la diferencia en las edades de los estudiantes, en las preparaciones de los profesores (los de escuela primaria siendo generalistas en EEUU), y/o en los temas matemáticas. En todo caso, este tipo de análisis ofrece una herramienta de desarrollo profesional para los profesores que se interesan en el discurso de sus alumnos.

Referencias

Lampert, M. (1985). How do teachers manage to teach? Perspectives on problems in practice. Harvard Educational Review, 55(2), 178–195.

Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. Journal of Mathematics Teacher Education, 16, 125–147.

Weaver, D., Dick, T., & Rigelman, N. M. (2005). Assessing the quantity and quality of student discourse in mathematics classrooms. RME Research Corporation

Kribs, C. y Joswick, C. (2021). El impacto discursivo de las respuestas del profesor a momentos enseñables clave. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 661). Valencia: SEIEM.

AUTORREGULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL ALUMNADO DEL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Self-regulation and Mathematical Problem Solving of Primary Education Students

Landa, J[a]., Berciano, A.[a] y Marbán, J. M.[b]

[a]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, [b]Universidad de Valladolid

Diversas corrientes de la investigación actual señalan como elemento clave para el éxito académico del alumnado la capacidad de autorregulación que tiene de su propio aprendizaje, especialmente en el área de matemáticas (Cleary y Chen, 2017).

El presente trabajo toma como marco teórico de referencia la Teoría del Aprendizaje Autorregulado de Zimmerman (2002), donde la autorregulación es entendida o conceptualizada como un proceso activo en el que el alumnado establece los objetivos que guían su aprendizaje, intentando regular y controlar su cognición, su comportamiento, sus emociones y su motivación con la intención de alcanzarlos.

De la revisión bibliográfica llevada a cabo en el campo de la Educación Matemática, se constata la necesidad de construir una escala que mida el nivel de autorregulación en contextos de resolución de problemas matemáticos del profesorado en formación inicial de Educación Primaria. Para ello, se toma como punto de partida la escala Likert diseñada por Fernandez-Gago y Marbán (2021) para alumnado de secundaria que, tras ser adaptada y validada para el alumnado del grado de Educación Primaria, vendría a subsanar la carencia detectada.

La escala adaptada consta de 44 ítems y se presenta en formato bilingüe (euskera/castellano), habiéndose sometido la misma a los correspondientes procesos de validación de la traducción. En relación con la fiabilidad del instrumento, en términos de consistencia interna, se ha recurrido a usar una muestra representativa de estudiantes de primer curso del grado de Educación Primaria de los tres campus de la UPV/EHU, obteniendo un valor para el coeficiente Alfa de Cronbach de la escala total de 0.834, valor considerado comúnmente como bueno por la comunidad científica en contextos como el que nos ocupa. Por otra parte, de cara a analizar la estructura factorial de la escala se ha realizado un análisis factorial exploratorio (AFE), análisis avalado por un índice KMO de $0.836 > 0.7$ y un p-valor $p= 0.000<0.05$ en el test de esfericidad de Barlett. La estructura latente aportada por el AFE concuerda en gran medida con la clasificación de ítems establecida a priori a partir del marco teórico empleado y permite orientar el AFC que da continuidad a la investigación.

Referencias

Cleary, T. J., Velardi, B., & Schnaidman, B. (2017). Effects of the Self-Regulation Empowerment Program (SREP) on middle school students' strategic skills, self-efficacy, and mathematics achievement. *Journal of School Psychology*, *64*, 28-42.

Fernández-Gago, J., y Marbán, J.M. (2021): Diseño y validación de un instrumento para medir autorregulación en el alumnado de secundaria en contextos de resolución de problemas. Manuscrito en preparación.

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into practice*, *41*(2), 64-70.

Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M. (2021). Autorregulación y resolución de problemas matemáticos en el alumnado del grado en Educación Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 662). Valencia: SEIEM.

LA PERSPECTIVA DE GÉNERO EN LA BIBLIOGRAFÍA PARA LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE LOS MAESTROS DE INFANTIL EN LAS UNIVERSIDADES CASTELLANOLEONESAS

Gender perspective in the bibliography for mathematical training of early childhood teachers in the universities of Castilla y León.

Madrid, M. J.[a], Maz-Machado, A.[b], León-Mantero, C.[b], Casas-Rosal, J. C.[b] y Jiménez-Fanjul, N.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba

A lo largo de su formación inicial, los futuros maestros de infantil reciben entre otras, formación específica sobre matemáticas y su didáctica. Sin embargo, cada universidad es autónoma para impartir los contenidos que considere adecuados, lo que provoca una falta de uniformidad en la formación que los futuros maestros reciben. Una fuente de información para conocer qué se enseña a los futuros maestros son las guías docentes de las distintas asignaturas, ya que estos documentos son públicos y brindan información oficial sobre cada asignatura. Desde esta perspectiva distintos estudios han analizado guías docentes y en particular diferentes aspectos sobre igualdad y género (Aguilar Ródenas, 2015; Ortega Sánchez y Pagès Blanch, 2018).

Este trabajo continúa con esta línea de investigación y pretende identificar las referencias bibliográficas que el profesorado del grado en Maestro en Educación Infantil de distintas universidades de Castilla y León recomienda para la formación matemática de los futuros maestros de Educación Infantil, poniendo además el foco en la presencia de la mujer en dichas referencias.

Para realizar el estudio se escogió una muestra de 6 universidades castellanoleonesas (incluyendo sus distintas facultades y centros adscritos) en las que se imparte el Grado en Maestro en Educación Infantil y cuyas guías docentes son accesibles desde sus páginas webs. Se descargaron las guías docentes del curso 2020-2021 y se pasó la información a una base de datos ad hoc. Posteriormente, se realizó un proceso de estandarización de los nombres y de las referencias porque se encontraron formatos diferentes y se hicieron conteos de frecuencias de cada autor y referencia.

Se han considerado un total de 24 asignaturas que abordan contenidos matemáticos o de didáctica de las matemáticas. Estas asignaturas incluyen más de 770 referencias bibliográficas. El documento más referenciado es el libro coordinado por María del Carmen Chamorro: Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil, publicado por primera vez en 2005. Entre los autores más referenciados se incluyen: Jean Piaget, Claudi Alsina, María del Carmen Chamorro, José Antonio Fernández Bravo, y Ángel Alsina. Considerando el total de referencias (para las cuales se tienen datos sobre ello), se incluyen más referencias escritas por uno o varios hombres que por una o varias mujeres o escritas en colaboración entre hombres y mujeres.

Agradecimientos: Esta comunicación se ha realizado dentro del proyecto de Investigación "UC♀ Impulsa": Formación del profesorado de educación infantil: una mirada desde la perspectiva de género en matemáticas, del Plan Propio de Investigación (2020) de la Universidad de Córdoba.

Referencias

Aguilar Ródenas, C. (2015). Igualdad, género y diversidad sexual en la Formación Inicial de Maestro/a en la Universidad Jaume I (UJI). *Temas de Educación*, *21*(1), 77–95.

Ortega Sánchez, D. y Pagès Blanch, J. (2018). Género y formación del profesorado: análisis de las Guías Docentes del área de Didáctica de las Ciencias Sociales. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, (21), 53. https://doi.org/10.18172/con.3315

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Jiménez-Fanjul, N. (2021). La perspectiva de género en la bibliografía para la formación matemática de los maestros de infantil en las universidades castellanoleonesas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 663). Valencia: SEIEM.

ANÁLISIS DE LA FLEXIBILIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN POR FUTUROS MAESTROS

Analysis of flexibility in solving a modeling task for future teachers

Martínez-Lastras, S., Cáceres-García, M. J., González-Astudillo, M. T., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Sánchez-Barbero, B.

Dpto. Didáctica de la Matemática y didáctica de las CCEE, Universidad de Salamanca

Según Leikin (2009) y Leikin y Lev (2013) flexibilidad es la capacidad para abordar un problema de diferentes formas y crear variedad de soluciones, algo que es necesario investigar e incluir en la formación de los maestros. Estos autores han establecido un sistema de categorías para analizar la flexibilidad en la resolución de tareas matemáticas.

Este estudio analiza el grado de flexibilidad de los futuros maestros de Educación Primaria en la resolución de una tarea de modelización que consistía en la realización de un mural, de dimensiones dadas que debía rellenarse con una determinada pieza. Concretamente, se pedía desarrollar la construcción de la pieza y determinar la cantidad de piezas necesarias para construir el mural de diferentes formas. La experiencia se llevó a cabo con estudiantes de tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria, que resolvieron la tarea de forma grupal, durante los cursos 2019-20 (de manera virtual, 10 grupos) y 2020-21 (de manera virtual 5 grupos y presencial 7 grupos). Se analizaron las distintas resoluciones de cada grupo para la construcción de la pieza, el cálculo del área de cada una de ellas (como paso intermedio), la cantidad de piezas necesarias y la validación de la solución. Las puntuaciones asignadas a cada resolución para cada una de las actividades realizadas fueron 10, 1 y 0.1, dependiendo tanto de las estrategias utilizadas como de la forma de abordarlas (Leikin y Lev, 2013). A partir de ellas, se obtuvo el valor de la flexibilidad de cada grupo en cada actividad como suma de las puntuaciones obtenidas.

Los resultados muestran gran variedad de estrategias de resolución, lo que permite apreciar diferencias en la flexibilidad en función del curso y de la forma de enseñanza. Llama la atención que fue mayor la flexibilidad de los grupos virtuales. Concretamente, los grupos del curso 2020-21 superaron la puntuación media en la construcción de la pieza y el cálculo de su área y, los grupos del del curso 2019-20, la superaron en el cálculo del área y la validación del resultado. Prácticamente, todos los grupos calcularon el área de la pieza construida, mientras que solo el 31.82% validó el resultado. Aunque no se cuenta con una muestra amplia, estos resultados permiten abrir líneas de investigación como: analizar qué factores pueden influir en que los grupos virtuales muestren mayor flexibilidad o profundizar en la creatividad de cada grupo, ya que la flexibilidad es una de sus componentes (Leikin y Lev, 2013). Esto podría tener implicaciones en la formación de los futuros docentes respecto a la capacidad de abordar situaciones de modelización matemática.

Agradecimientos

Trabajo financiado por la Consejería de Educación, como apoyo a los GIR de las universidades públicas de Castilla y León a iniciar en 2019, bajo el proyecto SA050G19 y por el Ministerio de Educación y Formación Profesional a través de una beca de colaboración en Departamentos Universitarios para el curso 2020/2021.

Referencias

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. En R. Leikin, A. Berman, y B. Koichu (Eds.) *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R, y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM*, *45*(2), 183-197.

Martínez-Lastras, S., Cáceres-García, M. J., González-Astudillo, M. T., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Sánchez-Barbero, B. (2021). Análisis de la flexibilidad en la resolución de una tarea de modelización por futuros maestros. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 664). Valencia: SEIEM.

CARACTERÍSTICAS DE FLEXIBILIDAD MOSTRADAS POR ESTUDIANTES OLÍMPICOS DE ENSEÑANZA PRIMARIA

Characteristics of flexibility showed by olympic primary school students

Mora, M.[a], Jaime, A.[b] y Gutiérrez, Á.[b]

[a] Universidad Estatal a Distancia (Costa Rica), [b] Universitat de València (Valencia, España)

Las olimpíadas permiten atender y detectar la alta capacidad matemática (ACM). En Costa Rica, se realiza la olimpiada OLCOMEP, en la que participan centros públicos y privados de Primaria de todo el país. Entre las características de los estudiantes de ACM destaca la flexibilidad, la cual se puede identificar en problemas con características similares a los de olimpiadas: situaciones nuevas para los estudiantes, sin estrategia de resolución predeterminada, que requieran nuevas aproximaciones. En este póster mostramos cómo hemos identificado la flexibilidad de los participantes en OLCOMEP.

La flexibilidad es uno de los componentes de la creatividad, asociada al cambio de ideas y a la producción de diversas aproximaciones o soluciones a un problema (Leikin y Lev, 2013). Teniendo en cuenta a Krems (1995) y Kozlowski, Chamberlin y Mann (2019), en nuestro trabajo definimos flexibilidad como *la capacidad para cambiar la forma de resolver un problema cuando se modifican las condiciones del problema o cuando, durante su resolución, el estudiante encuentra un obstáculo o una idea nueva más interesante*.

Hemos analizado las soluciones de 300 estudiantes de 2º-6º de primaria, participantes en OLCOMEP, a nueve problemas planteados en la olimpiada y entrevistas posteriores a algunos de ellos. El análisis lo hemos realizado mediante la asignación por los autores de indicadores a las respuestas escritas de los estudiantes, primero de forma independiente y después mediante puesta en común. Además, hemos analizado las entrevistas para confirmar la asignación de indicadores a las respuestas escritas. Definimos ocho indicadores de flexibilidad: cambio de un sistema de representación a otro más eficaz (F1.1); cambio en la resolución tras un bloqueo (F2.1), por estar siguiendo un camino ineficaz (F2.2), por surgir una idea nueva (F2.3) o por variar las características del enunciado (F2.4); diversidad de soluciones asociadas a representaciones (F3.1), a estrategias (F3.2) o a secuencias de acciones (F3.3). Todos los indicadores se evidenciaron en las respuestas al menos una vez. En problemas de generalización con un patrón geométrico, un cambio en el sistema de representación (F1.1) permitió mayor eficacia; también podemos observar F2.3, pues el problema admite varias aproximaciones más o menos eficaces. En problemas de visualización, algunos estudiantes los resolvieron gráficamente, mediante representaciones por plantas de una estructura de cubos, y aritméticamente (F3.1). En otros problemas, algunos estudiantes hicieron dos resoluciones correctas distintas, secuenciando el uso de los datos de formas diferentes y con distinto orden de ejecución de las relaciones (F3.3).

Agradecimientos

Estos resultados son parte del proyecto de investigación EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y del proyecto 820-CO-081 de la Universidad de Costa Rica.

Referencias

Kozlowski, J., Chamberlin, S. y Mann, E. (2019). Factors that influence mathematical creativity. *The Mathematics Enthusiast*, *16*(1), 505-540.

Krems, J. F. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. En P. A. Frensch y J. Funke (Eds.), *Complex problem solving: The European Perspective* (pp. 201-218). LEA.

Leikin, R. y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM Mathematics Education*, *45*, 183-197.

Mora, M., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2021). Características de flexibilidad mostradas por estudiantes olímpicos de enseñanza primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 665). Valencia: SEIEM.

DISCURSO MATEMÁTICO DE UN PROFESOR DURANTE LA ENSEÑANZA

Mathematical discourse by a teacher during teaching

Múnera, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

El discurso matemático del profesor puede ser interpretado a partir de sus funciones discursivas. Estas permiten analizar características del discurso que producen significado matemático. Las funciones discursivas se basan en la gramática funcional (Halliday, 2014). Esta gramática expone dos macro funciones denominadas ideacional y textual. En la investigación en curso que presenta este póster, las funciones discursivas indican el papel que ejercen ciertas formas lingüísticas del habla del profesor en un determinado contexto de práctica de aula. Su clasificación en ideacionales y textuales parte de la relación entre léxico y gramática (Halliday, 2014).

La función ideacional se interpreta en formas lingüísticas que introducen léxico, definen u observan objetos matemáticos. Esta función se genera por la relación entre experiencias interpersonales y la lógica. La función textual se interpreta en formas lingüísticas que expresan significados, razones o conexiones entre proposiciones matemáticas. Las formas lingüísticas que presentan funciones textuales se relacionan con la creación de discurso coherente y contextualizado, en parte generada por la función ideacional, posibilitando así construir conocimiento teórico.

El análisis preliminar de un conjunto de datos de tres sesiones de clase no consecutivas, con el objeto de enseñar conceptos que pertenecen al currículo colombiano de matemática escolar, mostró formas lingüísticas que no encajaban con las funciones ideacionales o textuales. Estas formas lingüísticas solicitan expresar razones, desarrollar o conectar proposiciones matemáticas en torno a los contenidos que son objeto de enseñanza. La función interpretada en estas formas se llama *prototextual*. La función prototextual es una aportación propia en esta investigación y es ajena a la teoría de la gramática funcional de Halliday.

Funciones discursivas ideacionales, prototextuales y textuales permitieron identificar tres características en el discurso matemático del profesor: primera, es predominantemente ideacional dado el alto y constante uso que hace de las funciones discursivas de este tipo, las funciones discursivas ideacionales posibilitaron la producción de significado matemático, creando léxico y gramática, alrededor de los conceptos objeto de enseñanza en las sesiones de clase analizadas; segunda, muestra funciones discursivas prototextuales que se basan en solicitudes del profesor al buscar un discurso textual en el habla de los estudiantes, estas funciones están presentes especialmente en preguntas; tercera, presenta cambios entre tipos de funciones discursivas: de ideacional a textual y de prototextual a ideacional. En el primer caso las funciones textuales emergen cuando el profesor explicita: relaciones entre objetos matemáticos, los explica o cuando, después de identificar errores en diferentes turnos o declaraciones contradictorias, argumenta razones sobre objetos o procedimientos matemáticos. En el segundo caso, el discurso matemático del profesor muestra funciones discursivas prototextuales con solitudes que invitan al estudiante a expresar producciones de su propio discurso, sin embargo, en ocasiones el profesor cambia estas solicitudes por unas que requieren menos desarrollo o conexiones entre proposiciones matemáticas.

Referencias

Halliday, M. A. K. (2014). *Halliday's introduction to functional grammar*. Londres: Routledge.

Múnera, N. (2021). Discurso matemático de un profesor durante la enseñanza. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 666). Valencia: SEIEM.

CLASIFICACIÓN DE TAREAS CREADAS POR EL ALUMNADO PARA UNA RUTA MATEMÁTICA HISTÓRICAMENTE CONTEXTUALIZADA

Classification of Tasks Created by Students for a Historically Contextualized Math Trail

Olmos, R. y Martí-Contreras, O.

IES Bernat de Sarrià (Benidorm)

El objetivo de nuestra investigación es el análisis de las tareas diseñadas por el alumnado de 3º ESO matriculado en matemáticas académicas para finalmente componer una ruta matemática que realizarían más tarde. Las categorías que hemos considerado para el análisis son: tipos de problemas, contexto, formulación, tarea matemática y solución (López y Contreras, 2014), basadas en los trabajos de Borasi (1986), Abrantes (1989) y Boaviada (1993). Todas las definiciones de problema tienen en común su consideración como una situación desconocida que requiere deliberación, imaginación y formulación de estrategias para llegar a su solución (López et al., 2015). Según Ortega, Pecharromán y Sosa (2011) es necesario que los propios enunciados sean motivadores y contengan de forma implícita elementos dinamizadores interesantes para los alumnos. Motivación y dinamización están incluidos en enunciados que conexionan las Matemáticas curriculares con situaciones de la vida real y con otras áreas del saber. Para la creación de las tareas pusimos a disposición de una clase de 25 alumnos las imágenes y medidas de los objetos ubicados en el centro histórico de Benidorm, además de una recopilación de datos históricos y leyendas populares. Cada grupo compuesto por dos o tres alumnos debía seleccionar un objeto, recoger la información asociada, crear un problema y asociarle un texto con una extensión máxima de 600 caracteres. Como conclusión observamos que las propuestas realizadas por el alumnado abarcan campos muy diversos de las matemáticas, ciencias y situaciones de la vida real, así como una amplia gama de niveles de dificultad. Hay tareas simples y otras que necesitan activar diferentes tipos de recursos por parte del alumnado. La ruta matemática fue llevada a cabo por el alumnado, después de que los profesores la programaran en una aplicación para dispositivos digitales. Posteriormente se realizó una encuesta sobre la ruta digital y todo el alumnado del grupo valoró la App con la máxima puntuación y todos ellos aconsejarían que el resto de grupos de su nivel la realizaran.

Referencias

Abrantes, P. (1989). Um (bom) Problema (nao) é (só)…*Educaçao e Matemática,* 8, 7-10.

Boavida, A.M. (1993). *Resoluçao de problemas em educaçao matemática*. Master´s thesis. Universidade Nova de Lisboa.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*(2), 125-141.

López, E.M., Guerrero, A.C., Carrillo, J. y Contreras, L.C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 73-94. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.122

López, E.M., Guerrero, A.C., Carrillo, J. y Contreras, L.C. (2015) La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 73-94. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.122

Ortega, T., Pecharromán, C. y Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 99-116. https://revistas.um.es/educatio/article/view/132991

Olmos, R. y Martí-Contreras, O. (2021). Clasificación de tareas creadas por el alumnado para una ruta matemática históricamente contextualizada. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 667). Valencia: SEIEM.

¿NOS AYUDA LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A NO DEJARNOS ENGAÑAR POR LAS FAKE NEWS?[1]

Does mathematical competence help us not be fooled by fake news?

Olmos, R. y Martí-Contreras, O.

IES Bernat de Sarrià (Benidorm)

Durante esta pandemia las medidas sanitarias y las vacunas no han sido las únicas armas en la lucha contra el virus. La tecnología del *Big Data* ha sido una aliada en la predicción de los acontecimientos. La estadística aplicada en las probabilidades de contagio o las previsiones sobre la evolución de la pandemia ha demostrado la importancia de las matemáticas para comprender el mundo. Sin embargo, en ocasiones se ha recurrido a la manipulación de gráficos para mostrar una realidad falaz. mediante la utilizaban de diferentes escalas numéricas en la representación de los valores y errores en la proporcionalidad de las barras y sin un eje de ordenadas Es evidente la vulnerabilidad de la ciudadanía ante esta exposición y la urgencia de actuar desde la didáctica de las matemáticas. Un estudio exploratorio de las percepciones del alumnado sobre la estadística mostraba su inocencia, así el ítem que registró menor aceptación fue "a través de la estadística se puede manipular la realidad" (Salinas y Mayén, 2016, p.82).

En este contexto nos planteamos si nuestro alumnado sería capaz de detectar una gráfica manipulada que se presentó en un telediario de RTVE durante la pandemia. Se trataba de una gráfica de líneas y otra de barras sobre la caída del PIB, en las cuales los errores de proporcionalidad en el eje de ordenadas desdibujan la realidad con el fin de mitigar la caída de la economía española (RTVE, 2020a y 2020b).

La muestra estuvo formada por 53 alumnos de 2ºde Bachillerato. El 90% supo advertir los errores, fijándose en los valores y no en la longitud de las barras para responder las preguntas del cuestionario. No obstante, sólo el 10% supo conectar los errores con la intencionalidad del medio de comunicación. Es necesario no sólo enseñar a detectar los errores, sino también a situarlos en el contexto político y los intereses, en tanto que concebimos la estadística no como "un conjunto de técnicas descontextualizadas, sino como una herramienta para resolver problemas" (Arteaga y Batanero, 2010, p.212).

Referencias

Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 211-221). Lleida: SEIEM

RTVE (31 de julio de 2020a). *Comparativa de las caídas históricas del PIB por el coronavirus en Alemania, España, Francia e Italia.* Recuperado de https://twitter.com/rtve/status/1289176625284751363

RTVE (31 de julio de 2020b). *Telediario 21 horas*. Recuperado de https://www.rtve.es/alacarta/videos/telediario/telediario-21-horas-31-07-20/5636819/

Salinas, J. y Mayén, S. (2016). Estudio exploratorio de las actitudes hacia la estadística en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 73-90.

[1] Esta investigación se inscribe dentro del Proyecto: *¿Verdad o mentira? Combatir les fake news desde la alfabetización digital crítica de la ciudadanía.* Ha recibido el apoyo de la Consellería de Educación, Investigación, Cultura y Deporte, mediante la convocatoria de subvenciones y asignaciones económicas para desarrollar proyectos de investigación e innovación educativa en centros docentes sostenidos con fondos públicos de la Comunidad Valenciana, durante el curso académico 2020-2021.

Olmos, R. y Martí-Contreras, O. (2021). ¿Nos ayuda la competencia matemática a no dejarnos engañar por las fake news?. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 668). Valencia: SEIEM.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE PRIMARIA SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Specialized knowledge of primary school teacher about decimal numbering system

Olvera, C.[a], García, E.[a] y Escudero-Ávila, D.

[a]Univeridad Autónoma de Querétaro

El aprendizaje del sistema de numeración decimal (SND) es un elemento clave en la formación escolar y base para adquirir otros conocimientos matemáticos. Este estudio tiene como objetivo caracterizar el conocimiento especializado del profesor de primaria sobre el sistema de numeración decimal, pues se reconoce la importancia de una enseñanza que permita al alumno comprender el SND en un sentido amplio, que no se reduzca al conocimiento exclusivo de los algoritmos (Terigi y Wolman, 2007) y que permita superar las dificultades de aprendizaje ampliamente reportadas por Lerner y Sadovsky (1994). Un conocimiento profundo del objeto matemático, permitirá al docente identificar ideas previas, dificultades y fortalezas para analizarlas y dirigir su enseñanza. Para determinar el conocimiento de un profesor sobre el sistema de numeración decimal se toma como modelo de análisis el Mathematics Teacher's Specialized, Knowledge - MTSK (Carrillo et al., 2018) pues su estructura permite describir elementos específicos tanto del conocimiento matemático y como del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. En el modelo MTSK el conocimiento matemático está integrado por el conocimiento de los temas, la estructura matemática y la práctica matemática. Por otro lado, el conocimiento didáctico lo integra el conocimiento del contenido y la enseñanza, el conocimiento de las características de aprendizaje, y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

Se conformó un estudio de caso, con profesores(as) de primaria en el estado de Querétaro, México. Los participantes tienen entre 11 y 15 años de experiencia como docentes en escuelas primarias urbanas. Se diseñaron 4 tareas para explorar los subdominios del MTSK, construyendo previamente un modelo ideal, es decir, un modelo específico que anticipa los elementos de cada subdominio sobre el SND. Se recurrió a un método de implementación de sesiones grupales en la modalidad a distancia, con la finalidad de explorar las respuestas de los participantes a las tareas diseñadas: una tarea de cálculo mental, una tarea de análisis de una lección de un libro de texto de primaria, una tarea de análisis de errores de estudiantes en un ejercicio de decimales y una tarea de reflexión sobre la relación del SND con otros sistemas de numeración.

El trabajo en colectivo favoreció las interacciones entre los participantes y los datos recabados muestran evidencia de un variado conocimiento especializado por parte de los docentes de primaria, a pesar de que la práctica de los profesores de primaria es multidisciplinar. En el estudio se presentan algunos ejemplos sobre resultados obtenidos del conocimiento del profesor.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N, Aguilar, A. Riberiro, M. y Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Lerner, D., y Sadovsky., P (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, C., y Salz, I., (Eds). *Didáctica de las matemáticas Aportes y reflexiones* (pp. 95-182*)*. Argentina, Paidós.

Terigi, F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: Consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*, 59-83.

Olvera, C., García, E. y Escudero-Ávila, D. (2021). Conocimiento especializado del profesor de primaria sobre el sistema de numeración decimal. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 669). Valencia: SEIEM.

CUESTIONARIO PARA IDENTIFICAR EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO SOBRE NECESIDADES ESPECÍFICAS DE APOYO EDUCATIVO EN MATEMÁTICAS

Questionnaire to identify teachers' knowledge about mathematics' learning difficulties

Padilla Padilla, E.[a], González, M. J.[b] y Van Vaerenbergh, S.[b]

[a]Universidad Nacional de Educación (Ecuador), [b]Universidad de Cantabria (España)

En los últimos años ha crecido el interés por estudiar el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes con necesidades específicas de apoyo educativo (Scherer et al., 2017). Sin embargo, son escasos los estudios que han profundizado en el conocimiento y la formación del profesorado necesarios para atender a dichas necesidades (López-Mojica & Cuevas, 2015). Algo que justifica esta falta de literatura es la gran diversidad de casos y particularidades de la educación especial. Pero la necesidad de integrar a estudiantes con diferentes dificultades de aprendizaje hace necesario que la investigación sobre formación de profesorado profundice en esta temática.

Tomando como referencia el modelo MTSK (Carrillo et al., 2013), y partiendo de investigaciones como la de Sosa et al. (2019), se presenta un cuestionario para evaluar los subdominios KMT (conocimiento del profesorado sobre la enseñanza de las matemáticas) y KFLM (características del aprendizaje de las matemáticas) en el ámbito de las necesidades específicas de apoyo educativo. Además, toma en cuenta dos momentos de actuación del profesorado: la planificación del proceso educativo y la práctica en el aula. Los contenidos en los que se centra son las operaciones aritméticas y la resolución de problemas aritméticos. A modo de ejemplo, un ítem del cuestionario relacionado con el KMT es ¿Te parece adecuada la metodología de enseñanza SBI para enseñar a resolver problemas aritméticos a un estudiante diagnosticado con trastorno del espectro autista? Un ítem relacionado con el KFLM es ¿Qué dificultades de aprendizaje de las operaciones aritméticas tienen los estudiantes diagnosticados con TDAH? El cuestionario se puede usar para identificar carencias formativas del profesorado de primaria sobre necesidades de apoyo educativo en matemáticas y hacer propuestas para mejorar su formación en este ámbito.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido financiado por los Proyectos de Investigación EDU 2017-84276-R y PID2019-105677RB-I00/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara.

López-Mojica, J. M., & Cuevas, J. (2015). *Educación especial y matemática educativa: Una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza.* CENEJUS.

Scherer, P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L., & Moser, E. (2017). Assistance of Students with Mathematical Learning Difficulties—How Can Research Support Practice?—A Summary. En *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 249–259). Springer.

Sosa, L., Guzmán Castro, M. V., & Ribeiro, M. (2019). Conhecimento do professor sobre dificuldades de aprendizagem no tópico adição de expressões algébricas no Ensino Médio. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *21*(3), 369-397.

Padilla-Padilla, E., González, M. J. y Van Vaerenbergh, S. (2021). Cuestionario para identificar el conocimiento del profesorado sobre necesidades específicas de apoyo educativo en matemáticas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 670). Valencia: SEIEM.

ANÁLISIS TEMPORAL DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN BASADA EN LA MEDIDA DE MAGNITUDES

Temporal analysis of a magnitude measurement modelling task

Pla-Castells, M., Chaparro, G. y Melchor-Borja C.

Departament de Didàctica de la Matemàtica - Universitat de València

La modelización matemática es un proceso de resolución de problemas contextualizados que implica la elaboración de un modelo matemático para describir el fenómeno estudiado. En general, la literatura actual acepta la naturaleza cíclica de los procesos de modelización (Borromeo Ferri, 2006). Si bien existen varias formas de determinar la estructura de un proceso de modelización, se entiende que se puede dividir en diferentes etapas y que los estudiantes las recorren de manera secuencial, pasando a la siguiente etapa una vez que consideran el trabajo de la etapa actual se ha concluido satisfactoriamente. Al trabajar en el aula con los alumnos, el punto de partida es un problema o situación (en el mundo real) y a partir de un proceso de simplificación y abstracción se genera un modelo matemático (dentro del ámbito matemático) que facilita el uso de conocimientos y técnicas matemáticas para llegar a una solución. Cuando los estudiantes intentan validar el resultado obtenido, deciden si es una solución suficientemente buena al problema (de regreso a la vida real), y si no, inician nuevamente el proceso de modelado, con el objetivo de revisar y reconstruir el modelo matemático generado, con el fin de obtener una nueva solución. De esta forma, el proceso se repite a través de diferentes iteraciones, tantas como los estudiantes consideren necesarias para obtener un modelo y resultado satisfactorios.

En este trabajo se realiza un estudio temporal de las diferentes resoluciones de un problema de modelización sobre medida de magnitudes obtenidas por estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. El objetivo de la investigación es analizar la evolución temporal del ciclo de modelización atendiendo a cada una de las fases trabajadas por el estudiantado de cada uno de los grupos participantes en el experimento. Se realiza una comparación exhaustiva de los diagramas obtenidos mediante el programa Task Time Tracker (Pla-Castells y García-Fernández, 2019) que reproduce las fases Lectura (R), Modelo (M), Estimación (E), Cálculo (C) y Validación (V) adaptadas de Arleback (2009) y basadas en Borromeo Ferri (2006).

En (Pla-Castells et al., en prensa) se estudiaron las producciones escritas de los estudiantes sobre el mismo problema con el objetivo de analizar las dificultades y errores matemáticos que presentaban los futuros maestros. En el presente estudio, al realizar el análisis temporal de las resoluciones, se observan incoherencias en cuanto al desarrollo del ciclo de modelización en aquellos grupos con más errores matemáticos conceptuales y procedimentales. Los grupos más erráticos presentan un diagrama en el que se aprecian varios recorridos del ciclo de modelización.

Agradecimientos Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER)

Referencias

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331-364.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

Pla-Castells, M. y García-Fernández, I. (2019). TaskTimeTracker: A tool for temporal analysis of the problem solving process. *Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática,* (1).

Pla-Castells, M., Melchor Borja, C. y Chaparro, G. (en prensa). Errores y dificultades de los futuros maestros de educación primaria al afrontar un problema de modelización asociado a la medida de magnitudes.

Pla-Castells, M., Chaparro, G. y Melchor-Borja C. (2021). Análisis temporal de una tarea de modelización basada en la medida de magnitudes. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 671). Valencia: SEIEM.

PROGRAMAS EFECTIVOS DE DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE. UN ESTUDIO DE CASO CENTRADO EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Effective teacher professional development programs. A case study focused on mathematical modeling

Ramos-Rodríguez, E.[a], Fernández-Ahumada, E.[b], Adamuz-Povedano, N.[b] y Morales, A.[a]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [b]Universidad de Córdoba

Una línea relevante en educación matemática es el desarrollo profesional del profesor, y, dentro de ella, el estudio de programas formativos que lo potencien (Swoder, 2007). Estudiar si un perfeccionamiento docente es efectivo ha sido uno de los desafíos de diversas investigaciones que sostienen, a grandes rasgos, que la efectividad de un programa viene dada por el impacto positivo en los docentes participantes y en sus estudiantes (Desimone y Pak, 2017).

En 2020 se diseñó, a la luz de principios de programas efectivos de desarrollo profesional (Ramos-Rodríguez, Bustos y Morales, 2021), un Diplomado, un posgrado de un año de duración, para docentes en activo, cuyo propósito fue fortalecer la práctica y el conocimiento en relación con el desarrollo de habilidades matemáticas. Durante su implementación, se planteó analizar si el programa lograba impactar positivamente en la enseñanza del docente y en el aprendizaje de sus estudiantes. En este trabajo se presentan los resultados relativos al profesor, desarrollados en dos etapas. En la etapa uno, se realiza un estudio de caso, analizando la evolución de un grupo de profesores que profundiza en la modelización matemática. En la segunda etapa se estudia la evolución de uno de los profesores del grupo, considerando un seguimiento posterior al Diplomado.

Los resultados evidencian que el profesorado inicia el Diplomado concibiendo la modelización como un proceso donde los estudiantes tienen que idear la representación matemática asociada a un problema, que puede o no estar situado en un contexto real. Al solicitarles diseñar una clase para desarrollar tal habilidad, ellos se centran esencialmente en el contenido matemático puesto en juego. Al avanzar en el Diplomado, el grupo va manifestando una posición más certera sobre la modelización, destacando la toma de conciencia sobre sus fases y del papel del contexto real. De manera similar, con mayor profundización, se tiene que el profesor estudiado en la etapa dos va adquiriendo herramientas para enfrentar con más propiedad su docencia relativa a la modelización.

Los hallazgos ponen de manifiesto que el programa diseñado da indicios de ser efectivo teniendo en cuenta el impacto sobre las concepciones y herramientas desarrolladas por los docentes.

Agradecimientos

Estudio financiado por ANID, Chile, proyecto 11190553.

Referencias

Desimone, L. M. y Pak, K. (2017). Instructional coaching as high-quality professional development. *Theory into Practice, 56*(1), 3-12.

Ramos-Rodríguez, E., Bustos, B. y Morales, A. (2021). Identification of the principles of effective professional development programs in the guidelines of a mathematics didactic graduate program and the analysis of its impact through a case study focused on the teacher's teaching, *The international journal of science, mathematics and technology learning* (in press).

Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.157-223). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Ramos-Rodríguez, E., Fernández-Ahumada, E., Adamuz-Povedano, N. y Morales, A. (2021). Programas efectivos de desarrollo profesional docente. Un estudio de caso centrado en la modelización matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 672). Valencia: SEIEM.

VISUALIZANDO LA TERCERA DIMENSIÓN DESDE DIFERENTES REALIDADES

Viewing the third dimension from different realities

Rotger, L. [a], Ribera, J. M. [a] y Cuadrado, M. L. [b]

[a] Universidad de La Rioja, [b] Complejo Educativo Mas Camarena

En la resolución de problemas, en particular en el campo de la geometría, la visualización espacial es una herramienta de especial importancia (Ramírez, 2012; Jaime y Gutiérrez, 2017). Más aún, la visualización es uno de los tres tipos de procesos cognitivos implicados en la resolución de tareas geométricas, junto con la construcción de herramientas y el razonamiento (Duval, 1998). En los últimos años se han desarrollado nuevas herramientas que permiten el modelado y la manipulación de objetos tridimensionales y que, paralelamente, desarrollan el pensamiento computacional entre el alumnado (Beltrán-Pellicer et al., 2020).

Es por ello por lo que el objetivo de este trabajo es el de analizar las posibilidades que ofrecen algunos recursos tecnológicos para la visualización de objetos tridimensionales. En concreto, se pretende analizar las posibilidades para la programación y visualización de figuras geométricas en programas de modelado tridimensional, realidad aumentada y realidad virtual.

Para cada uno de los recursos anteriores se presentan las necesidades técnicas junto con las características de los lenguajes de programación utilizados para la construcción de los objetos tridimensionales. Posteriormente, se incluyen las herramientas necesarias para el diseño de los entornos tridimensionales, así como los pasos para la programación de las figuras geométricas. Por último, se presentan las recomendaciones para la visualización óptima de los objetos tridimensionales.

Con todo esto, se pretende analizar las principales ventajas y limitaciones para el desarrollo de la visualización espacial que presentan cada uno de estos recursos. En conclusión, se pretende buscar herramientas que faciliten la visualización de la tercera dimensión desde las pantallas de los dispositivos tecnológicos, cada vez más presentes en las aulas.

Agradecimientos: El estudio descrito se ha realizado en el marco del Proyecto de Innovación Docente: "Visualización de las matemáticas e impresión 3D (3DMates)" financiado por la Universidad de La Rioja.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P., Rodríguez-Jaso, C., & Muñoz-Escolano, J. M. (2020). Introduciendo BlocksCAD como recurso didáctico en matemáticas. *Suma*, 93, 39-48.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza: SEIEM.

Ramírez, R. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. Trabajo de Tesis. Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/verdetalles/7461/descargar .

Rotger, L., Ribera, J. M. y Cuadrado, M. L. (2021). Visualizando la tercera dimensión desde diferentes realidades. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 673). Valencia: SEIEM.

ESTRATEGIAS DE PARTICIPANTES DE OLIMPIADA EN UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Olympic participants strategies when solving a conditional probability problem

Rubio-Chueca, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P.

Universidad de Zaragoza

La probabilidad condicional aparece explícitamente en 4º de ESO en el currículo nacional actual de Matemáticas en España. Se trata de una de las nociones básicas de probabilidad que todo estudiante de secundaria debería comprender (Borovcnick, 2012). Sin embargo, junto con la idea de independencia de sucesos, el campo de problemas asociado a la probabilidad condicional constituye una fuente habitual de sesgos de razonamiento y de dificultades para el alumnado (Batanero, 2014). Como varios elementos sobre los que se construye la idea de probabilidad condicional aparecen desde el comienzo de la secundaria (tablas, diagramas de árbol), nos preguntamos si el alumnado es capaz de desarrollar estrategias intuitivas en situaciones donde aparecen sucesos condicionados debido a que identificar dichas estrategias y los conocimientos que se ponen en juego pueden ser un indicador para el diseño de secuencias didácticas (Martínez-Juste, et al., 2015).

Las olimpiadas matemáticas es un contexto donde en ocasiones aparecen problemas de probabilidad (Rubio-Chueca, et al., en prensa). En este estudio presentamos los resultados obtenidos al analizar las soluciones de 47 alumnos ante un problema de probabilidad condicional en una final autonómica de la Olimpiada Matemática de 2º ESO. Para ello, se han considerado investigaciones previas sobre probabilidad condicional (Huerta et al., 2016) y las categorías del Enfoque Ontosemiótico (EOS). El análisis revela que siete estudiantes emplean una estrategia en la que se calculan tanto las probabilidades condicionadas como las intersecciones donde uno de ellos utiliza un diagrama de árbol; diez emplean un razonamiento verbal donde seis de ellos consideran el cálculo explícito de la probabilidad condicional de cada suceso; dos ofrecen una solución basada en técnicas combinatorias de sucesos equiprobables, apoyándose en un diagrama de árbol y en una tabla, respectivamente, para realizar un recuento; y finalmente, uno emplea una técnica que se asemeja a un ábaco probabilístico. Estos resultados muestran razonamientos informales que pueden ser incorporados de manera previa al estudio formal de la probabilidad condicional.

Agradecimientos: proyecto PID2019-105601GB-I00 y grupo S60_20R (Gobierno de Aragón).

Referencias

Batanero, C. (2014). Probability teaching and learning. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Borovcnick, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 5-27.

Huerta, M. P., Edo, P. I., Amorós, R. y Arnau, J. (2016). Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *19*(3), 335-362.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J.M. y Oller-Marcén, A.M. (2015). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351-359). Alicante: SEIEM.

Rubio-Chueca, J.M., Muñoz-Escolano, J.M. y Beltrán-Pellicer, P. (en prensa). La probabilidad en problemas de Olimpiadas matemáticas de secundaria en España. *Contextos Educativos, 28*.

Rubio-Chueca, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P. (2021). Estrategias de participantes de olimpiada en un problema de probabilidad condicional. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 674). Valencia: SEIEM.

EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR APROXIMACIÓN DE LA *REGLA MEDIA* DE ANDRÉS PUIG (1672). UNA EXPERIENCIA EN EL AULA

Andrés Puig equations solving method by approximation of *Regla Media* (1672). A classroom experience

Ruiz-Catalán, J. y de la Torre-Molina, F. A.

IES Luis Carrillo de Sotomayor de Baena

En el currículo actual de matemáticas en España, tanto para secundaria como para bachillerato, se incluye la resolución de ecuaciones polinómicas de primer grado, segundo grado, bicuadradas y de grados mayores, pero aplicando la regla de Ruffini. Debido a que la regla de Ruffini permite sólo encontrar soluciones enteras, se suelen preparar las ecuaciones a resolver para que las soluciones sean enteras. De manera que, en cierto modo, se oculta a los estudiantes parte de la realidad. La inclusión de algún método numérico para resolución de ecuaciones podría significar la ampliación del número de ecuaciones e incluso el tipo de las que pueden resolver y, además, darles una visión más real de la situación.

Para iniciar a los estudiantes en el área de la resolución numérica de ecuaciones, hemos decidido utilizar un método histórico. Hay multitud de estudios que corroboran los beneficios de utilizar la historia de las matemáticas para enseñar matemáticas. Por ejemplo, Maz (1999) propone entre otras razones, que ayuda e incrementa la motivación para el aprendizaje, muestra el aspecto humano de las matemáticas o que indica cómo los conceptos fueron desarrollándose, ayudando esto a su comprensión. Algún trabajo reciente en el área es el de Madrid et al. (2021).

Nuestros objetivos de investigación son; conocer aspectos emocionales con los que el alumnado se enfrenta a la clase de matemáticas, saber si los estudiantes muestran interés en la historia de las matemáticas y ampliar el conocimiento y aplicación de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones utilizando el método histórico de la *Regla Media* de Andrés Puig (Puig, 1672).

Andrés Puig fue un matemático catalán (de Vic) que vivió durante el siglo XVII, aunque no sabemos ni su fecha de nacimiento ni de su muerte (aunque murió con seguridad antes de 1711). Su único libro, "Arithmetica Especulativa, y Practica, y Arte de Algebra", entre otras cosas desarrolla un método de resolución de ecuaciones por aproximación, seguramente inspirado en un método anterior de Nicolás Chuquet. El método de la *Regla Media* intenta llegar a la solución de una ecuación "encorsetando" la solución buscada en un entorno, y luego, dividiendo el entorno sucesivamente en dos partes para ir acotando la solución buscada dentro de él.

Creemos que el contacto con un álgebra sincopada, un texto en lenguaje del siglo XVII y un método intuitivo de resolución de ecuaciones puede ser un "cóctel" sorpresivo y reconfortante para el alumnado.

Referencias

Madrid, M., Maz-Machado, A., Almaraz-Menéndez, F., y León-Mantero, C. (2021). Comparison between a modern-day multiplication method and two historical ones by trainee teachers. *Mathematics, 9*(4), 1-14.

Maz, A. (1999). Historia de las matemáticas en clase: ¿Por qué? y ¿Para qué?. En M. Berenger, J. Cardeñoso, y M. Toquero (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad* (pp. 205-209).

Puig, A. (1672). *Arithmetica especulativa, y practica, y arte de algebra.* Barcelona: Antonio Lacavalleria.

Ruiz-Catalán, J. y de la Torre-Molina, F. A. (2021). El método de resolución de ecuaciones por aproximación de la regla media de Andrés Puig (1672). Una experiencia en el aula. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 675). Valencia: SEIEM.

PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN ALUMNADO CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA: PROPUESTA DE INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Probabilistic thinking in students with autism spectrum disorder: proposal for an evaluation instrument

Sabariego, P.[a], García-Moya, M.[b], Goñi-Cervera, J.[a] y Polo-Blanco, I.[a]

[a]Dpto Matesco, Universidad de Cantabria, [b]Dpto Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

En los últimos años los currículos de matemáticas han ido incluyendo cada vez más contenidos de probabilidad y estadística desde las primeras edades (Alsina, 2017). Por otro lado, desde la investigación se han llevado a cabo distintos estudios para evaluar aspectos como la comprensión y el uso de conceptos probabilísticos y estadísticos en estudiantes de desarrollo típico. Sin embargo, no hemos encontrado investigaciones que evalúen estos aspectos en alumnado con Trastorno del Espectro Autista (TEA), a pesar de que cada vez es más frecuente la escolarización de este alumnado en todos los niveles educativos (Whitby, 2013).

El presente estudio se centra en el diseño y validación de un cuestionario para evaluar las intuiciones probabilísticas primarias de estudiantes con TEA. Tiene como objetivo estudiar los significados intuitivos que estudiantes con TEA dan a la noción de probabilidad y de qué forma evalúan probabilidades sencillas, así como estudiar fortalezas y dificultades descritas previamente por otros autores (por ejemplo, Fischbein y Gazit, 1984) en relación al razonamiento probabilístico.

Para el diseño y validación del cuestionario se han seguido las siguientes fases: (1) búsqueda y revisión de investigaciones sobre el pensamiento probabilístico y sobre alumnado con TEA, (2) diseño del cuestionario piloto teniendo en cuenta la revisión anterior y los currículos de Primaria y Secundaria, (3) validación del cuestionario piloto por medio de juicio de expertos, (4) aplicación del cuestionario piloto a un estudiante con TEA y (5) diseño de la versión definitiva.

En la presentación del póster se detallará el proceso de diseño y validación del cuestionario, así como la descripción de la aplicación piloto de algunos de los ítems, indicando las dificultades mostradas por el estudiante y cómo se han tenido en cuenta para el diseño de la versión definitiva.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por los proyectos: PID2019-105677RB-100 del Ministerio de Economía y Competitividad de España, PREJCCM2019/7 de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha y por las Ayudas Concepción Arenal del Gobierno de Cantabria.

Referencias

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en educación infantil. *Épsilon*, *34*(95), 25-48.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24. doi:10.1007/BF00380436

Whitby, P. J. S. (2013). The effects of solve it! On the mathematical word problem solving ability of adolescents with autism spectrum disorders. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities, 28*(2), 78–88. doi:10.1177/1088357612468764

Sabariego, P., García-Moya, M., Goñi-Cervera, J. y Polo-Blanco, I. (2021). Pensamiento probabilístico en alumnado con TEA: propuesta de instrumento de evaluación. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 676). Valencia: SEIEM.

LOS HUERTOS ESCOLARES COMO ESPACIOS PARA APRENDER MATEMÁTICAS Y CIENCIAS EXPERIMENTALES: UNA REALIDAD O UNA INNOVACIÓN EDUCATIVA EN LA PROVINCIA DE CASTELLÓN

School gardens as spaces to learn mathematics and experimental sciences: a reality or an educational innovation in the province of Castellón

Salvador-Beltri, A., Lorenzo-Valentín, G., Santágueda-Villanueva, M. y Monferrer-Sales, L.

Departament d'Educació i Didàctiques específiques, Universitat Jaume I

Es conocido el hecho de que la relación entre la educación y el medio natural favorece el desarrollo cognitivo de los niños y niñas (Corraliza, Collado y Bethelmy, 2012). En el proceso de adquisición de información, y por tanto de formación, influyen diferentes factores externos y nuestra apuesta iría en la línea de considerar el medio natural, concretamente el huerto escolar, como ese factor externo donde conjugar diferentes motores que construyen aprendizajes básicos (Botella, Hurtado y Cantó, 2014).

Asumiendo esto, en el presente trabajo, nos planteamos conocer si el uso de los huertos escolares en los centros educativos de la provincia de Castellón es una realidad efectiva y estructurada. Queremos comprobar si hay un trabajo profundo en los contenidos de las asignaturas y no que existan estos espacios en los centros educativos fruto de gustos particulares, de algún docente, en cuestiones de cultivo.

Para poder llevar a cabo esta investigación, similar a la realizada por Alcántara; Torres-Porras; Mora; Rubio; Arrebola y Rodríguez (2019), realizamos un cuestionario mediante la aplicación *Google Forms* a todos los centros de Educación Infantil y Primaria de la provincia de Castellón. En este cuestionario realizamos diferentes preguntas, con el objetivo de saber el número de centros que dispone de este recurso, qué asignaturas relacionan sus contenidos con él y las etapas educativas que lo utilizan, entre otras preguntas.

De los 80 centros que han recibido el cuestionario han contestado 37 y de estos, 34 poseen huerto escolar. Todos ellos afirman que utilizan recursos para aproximar al alumnado a la naturaleza como es el cuidado de una planta o un animal, la germinación de semillas, salidas a zoológicos y a espacios naturales, entre otros. Los que disponen huerto escolar trabajan en él talleres, proyectos globalizados o una materia específica, principalmente ciencias experimentales, valenciano y matemáticas. Estas actividades tienen lugar en el segundo ciclo de la Educación Infantil y en Educación Primaria. Finalmente la satisfacción de los centros encuestados en el uso de este espacio indica que es gratificante para toda la comunidad educativa implicada en él.

Referencias

Alcántara, J., Torres-Porras, J., Mora, M., Rubio, S. J., Arrebola, J. C. y Rodríguez, L. (2019). ¿Son los huertos escolares en educación infantil una realidad o una innovación educativa? Estudio de centros escolares de la ciudad de Córdoba (España) y propuestas de cambio desde la Universidad. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales,* 36, 79-96. DOI: 10.7203/DCES.36.12535.

Botella, A. M., Hurtado, A. y Cantó, J. (2014). Las competencias básicas a través del huerto escolar: una propuesta de proyecto de innovación. En J. J. Maquilón Sánchez y N. Orcajada Sánchez (Eds.). *Investigación e innovación en formación del profesorado* (pp. 173-182). Murcia: Servicio publicaciones Universidad de Murcia (Edit.um).

Corraliza J. A., Collado S. y Bethelmy L. (2012). Nature as a Moderator of Stress in Urban Children. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 38, 253-263.

Salvador-Beltri, A., Lorenzo-Valentín, G, Santágueda-Villanueva, M. y Monferrer-Sales, L. (2021). Los huertos escolares como espacios para aprender matemáticas y ciencias experimentales: una realidad o una innovación educativa en la provincia de Castellón. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 677). Valencia: SEIEM.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON FRACCIONES: UN ESTUDIO COMPARATIVO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Fraction word problems solving: a comparative study with high school students

Sanz, M. T.[a], Valenzuela, C.[b], Figueras, O.[c] y Gómez, B.[a]

[a]Universidad de Valencia; [b]Universidad de Guadalajara; [c]CINVESTAV-IPN

El estudio de la evolución temporal del desempeño en matemáticas del estudiantado es una cuestión de suma importancia, ya que el conocimiento debe ser progresivo y acumulativo, por lo que debería ir mejorando en niveles superiores (Schoenfeld, 1982). Sin embargo, este hecho no siempre se observa en los resultados de las pruebas PLANEA que se aplican en México, y que tratan de conocer la medida en que los estudiantes de distintos niveles educativos logran aprendizajes clave establecidos en el currículum. En cuanto a matemáticas, PLANEA (2017) muestra que la puntuación promedio en discentes de 17 años difiere de 8 puntos con la media de los estudiantes de 16 años. Estos resultados, y la conocida problemática sobre el estudio de las fracciones son lo que motiva la presente investigación, misma que pretende indagar sobre el desempeño de dos grupos de 180 y 78 estudiantes de 16 y 17 años respectivamente, al resolver problemas en los que subyacen las fracciones. El estudiantado provenía de entidades públicas que diferían al respecto del tipo de bachillerato cursado: a) bachilleratos generalistas orientados a estudios universitarios, y, b) bachilleratos técnicos que ofrecen títulos de técnico profesional. Así, los objetivos son: 1) determinar las diferencias de éxito en la resolución de los problemas por edades y tipos de centro; 2) determinar la complejidad, medida a través de la probabilidad de éxito de los problemas propuestos; 3) analizar el proceso de resolución seguido por problemas, grupo de edad y centros.

Para la indagación se diseñó y aplicó un cuestionario a lápiz y papel, del cual, para este reporte se seleccionaron tres problemas verbales (P1, P2 y P3), cuya característica común es un reparto a través "de lo que queda": en P1 simplemente se aplica lo que queda y se utilizan tres etapas, en P2 se añade una etapa al primero, y P3 difiere de los otros al reponer de forma aditiva una cantidad a lo que elimina. Los resultados mostraron que el alumnado de menor edad y perteneciente al bachillerato técnico obtuvieron mayor éxito en los tres problemas planteados. El tercer problema, fue resuelto correctamente por un mayor porcentaje de estudiantes. Notar que, a pesar de tratarse de cursos en los que se inicia la introducción al álgebra, tal y como obtuvieron Filloy et al. (2001) se han evitado los métodos algebraicos y han sido sustituidos por una resolución aritmética (P1 y P2) o estrategias de ensayo y error (P3).

Agradecimientos

El trabajo ha sido respaldado por el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación: EDU2017-84377-R

Referencias

Filloy, E., Rojano, T. y Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 155-175). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

PLANEA. (2017). *Planea. Resultados nacionales 2017. Educación Media Superior. Lenguaje y Comunicación. Matemáticas*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Nueva York: Macmillan

Sanz, M. T., Valenzuela, C., Figueras, O. y Gómez, B. (2021). Resolución de problemas verbales con fracciones: un estudio comparativo con estudiantes de Bachillerato. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 678). Valencia: SEIEM.

RESULTADOS DE DIFERENTES SISTEMAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A PARTIR DE CUESTIONARIOS DE PRIMER CICLO DE ED. PRIMARIA

Results of different systems of mathematics teaching in the First Cycle of Primary Education

Sotos, M.

Universidad de Castilla-La Mancha

En este trabajo se presenta una experiencia llevada a cabo, con la colaboración de alumnas de Educación Secundaria durante la recogida de datos y el análisis estadístico, en cinco colegios de Educación Primaria en Albacete, en donde se utilizan diferentes sistemas de enseñanza de las matemáticas. Concretamente, tres de los colegios siguen un sistema tradicional, otro colegio sigue el sistema EntusiasMAT (Chavarría, 2015) y otro colegio el sistema ABN (abierto basado en números) (Canto, 2017). El objetivo era comparar los resultados obtenidos, mediante un cuestionario de actividades referidas a diferentes contenidos matemáticos, en tres sistemas de enseñanza distintos.

El método utilizado ha consistido en la elaboración de dos cuestionarios sobre contenidos matemáticos, uno relacionado con el primer curso de Ed. Primaria (números, operaciones, razonamiento, álgebra y geometría) y otro con el segundo curso de Ed. Primaria (números, cálculo mental, operaciones, razonamiento, representación de datos en gráficos, álgebra, medida del tiempo y geometría) y el análisis estadístico de los resultados obtenidos. Dado que interesaba que el alumnado de la muestra hubiese completado la totalidad del curso escolar, el cuestionario de Primer Curso fue contestado por el alumnado que cursaba Segundo Curso, y el cuestionario de Segundo Curso por el alumnado de Tercer Curso. La muestra total se compone de 383 alumnas/os (210 para el cuestionario de Primero y 173 para el de Segundo).

En el póster se mostrarán los cuestionarios utilizados en ambos cursos y el resumen gráfico de los resultados obtenidos en cada uno de los bloques de contenidos curriculares mencionados. En líneas generales, en Primer Curso se obtienen mejores resultados con el sistema ABN, mientras que en Segundo Curso no existen diferencias globales que resulten significativas (Ferrando, Segura y Pla, 2017).

Referencias

Canto, M. C. (2017). *Método de aprendizaje matemático abierto basado en números (ABN) como alternativa al método cerrado basado en cifras (CBC)*. Tesis doctoral, Universidad de Cádiz

Chavarría, C. (2015). *Aplicación de las Inteligencias Múltiples a las matemáticas en Educación Primaria: la evaluación de los estándares de aprendizaje*. Tesis doctoral, Universidad Rey Juan Carlos.

Ferrando, I., Segura, C., & Pla, M. (2017). Nuevas metodologías para la enseñanza de las matemáticas: análisis crítico. ResearchGate. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/322342114_NUEVAS_METODOLOGIAS_PARA_LA_ENSENANZA_DE_LAS_MATEMATICAS_ANALISIS_CRITICO

Sotos, M. (2021). Resultados de diferentes sistemas de enseñanza de las matemáticas a partir de cuestionarios de primer ciclo de Ed. Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 679). Valencia: SEIEM.

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

Mathematical problem-solving strategies in Early Childhood Education through Computational Thinking

Terroba, M., Ribera, J. M. y Lapresa, D.

Universidad de La Rioja

Las propuestas educativas realizadas a través del uso de robots de suelo de direccionalidad programada están cada vez más presentes en las aulas de los centros educativos desde las primeras edades y permiten, entre otros aspectos, el desarrollo de destrezas de pensamiento computacional (Bers, 2018). El pensamiento computacional (PC) es definido por Wing (2006) como el proceso de resolución de problemas, de diseño de sistemas y de comprensión del comportamiento humano basándose en los conceptos fundamentales de la ciencia de la computación. Entre las ventajas que genera la introducción del PC entre los escolares se destaca el desarrollo de habilidades de resolución de problemas como la descomposición, el razonamiento lógico o el diseño de algoritmos (Ros-Esteve et al., 2019). En concreto, al codificar su plan de actuación para la resolución de problemas el estudiantado es capaz de identificar patrones de repetición e, incluso, descubrir sus propios errores en la planificación, convirtiéndose así, en una tarea que mejora el desarrollo del razonamiento matemático entre los escolares de primeras edades (Clements y Sarama, 2002).

Por todo esto, se presenta el siguiente estudio exploratorio realizado a un total de 34 estudiantes pertenecientes a los tres cursos de Educación Infantil cuyo objetivo es analizar sus estrategias de resolución en un problema con varias soluciones, a través del PC, perteneciente a una trayectoria de resolución de problemas. Para la resolución del problema contextualizado en un marco lúdico de un juego simbólico, el alumnado ha utilizado un robot suelo de direccionalidad programada. La toma de datos se ha realizado a través de un sistema de observación (Terroba et al., 2021) que ha permitido el análisis e interpretación de la conducta desplegada durante la resolución del problema.

Se presenta un análisis preliminar de las estrategias seguidas donde se destaca la capacidad del alumnado para descomponer el problema en partes más sencillas, seleccionando los pasos a seguir adecuadamente para realizar su posterior codificación en la ejecución de los movimientos del robot.

Referencias

Bers, M. (2018). *Coding as a Playground: Programming and Computational Thinking in the Early Childhood Classroom*. Routledge.

Clements, D.H., y Samara, J. (2002). The Role of Technology in Early Childhood Learning. *Teaching Children Mathematics,* 8(6), 340–343.

Ros-Esteve, M., López-Iñesta, E. y Diago, P. D. (2019). Introducción de pensamiento computacional mediante actividades desenchufadas en la resolución de problemas de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 650). Valladolid: SEIEM.

Terroba, M., Ribera, J.M., Lapresa, D. y Anguera, M. T. (2021). Propuesta de intervención mediante un robot de suelo con mandos de direccionalidad programada: análisis observacional del desarrollo del pensamiento computacional en educación infantil. *Revista de Psicodidáctica* https://doi.org/10.1016/j.psicod.2021.03.001

Wing, J.M. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35. http://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Terroba, M., Ribera, J. M. y Lapresa, D. (2021). Estrategias de resolución de problemas de matemáticas en Educación Infantil a través del pensamiento computacional. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 680). Valencia: SEIEM.

“NO SÉ HACERLO, PREGÚNTAME MÁS”. UNA EXPERIENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON HINTS

“I don't know how to do it, ask me more”. An experience of word problem solving with HINTS

Tirado-Olivares, S.[a], del Olmo-Muñoz, J.[a] , Diago, P. D.[b], González-Calero, J. A.[a], Arnau, D.[b] y Arevalillo-Herráez, M.[b].

[a]Universidad de Castilla-La Mancha, [b]Universitat de València

Los sistemas tutoriales inteligentes se caracterizan por mejorar la autonomía del alumnado, atributo fundamental en contextos de presencialidad limitada, como el derivado del COVID-19. En este estudio se emplea HINTS, un sistema tutorial inteligente para la resolución aritmética y algebraica de problemas verbales que destaca por su capacidad para ofrecer ayudas adaptadas y su alto nivel de granularidad (p. ej., Arnau et al., 2013 o González-Calero et al., 2015). En este estudio exploramos en qué medida, con estudiantes de 5º de Primaria y en problemas multietapa, la inclusión de un mayor número de preguntas relacionadas con cantidades intermedias desconocidas puede facilitar la resolución exitosa. Así, se presenta un estudio de casos en el que cinco alumnos usaban HINTS para resolver problemas que, previamente, no habían sabido resolver en lápiz y papel. Para cada problema, el estudiante intentaba resolver primero una versión en cuyo enunciado sólo se preguntaba por una cantidad desconocida final (*versión corta*). Si el participante era incapaz de resolverlo, se le ofrecía una versión alternativa donde se preguntaba secuencialmente por todas las cantidades desconocidas intermedias necesarias para determinar la cantidad desconocida final (*versión larga*). En global, de los 11 problemas propuestos, los alumnos fueron capaces de resolver cinco de ellos en su versión corta, otros cinco no fueron resueltos en la versión corta pero sí en la larga y únicamente en una ocasión el alumnado fue incapaz de resolver el problema de ambas formas. Durante el estudio, el alumnado destacó que la inclusión de preguntas intermedias les facilitó la comprensión del problema, pues les permitía conocer qué pasos debían seguir; algo que les ayudó especialmente en aquellos problemas de mayor número de etapas. Los resultados indican que la dificultad inicial para resolver los problemas no estribó en general en la evocación y uso de los esquemas conceptuales necesarios para resolver cada una de las etapas, sino en la construcción de una lectura analítica completa del problema a causa de la profundidad de la lectura. Estos resultados preliminares apoyarían secuencias de enseñanza en las que inicialmente se incluyan en los enunciados preguntas sobre las cantidades intermedias, lo que funcionaría como un medio para la estructuración del proceso de resolución. En cuanto a HINTS, los participantes destacaron la utilidad de este sistema, especialmente por la retroalimentación continua que ofrece al resolutor.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo de los proyectos PGC2018-096463-B-I00 y SBPLY/19/180501/000278.

Referencias

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L., & González-Calero, J. A. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving word problems. *Computers & Education*, 63, 119–130. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.11.020

González-Calero, J. A., Arnau, D., Puig, L., & Arevalillo-Herráez, M. (2015). Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving. *British Journal of Educational Technology*, 46(6), 1189–1200. https://doi.org/10.1111/bjet.12183

Tirado-Olivares, S., del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2021). “No sé hacerlo, pregúntame más”. Una experiencia de resolución de problemas verbales con HINTS. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 681). Valencia: SEIEM.

INTELIGENCIA ARTIFICIAL PARA LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: RESUMEN Y TAXONOMÍA

Artificial intelligence for mathematics education: Overview and taxonomy

Van Vaerenbergh, S.[a] y Pérez-Suay, A.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universitat de València

El vínculo histórico entre la didáctica de las matemáticas y la inteligencia artificial (IA) es bien conocido. Destaca la contribución de Balacheff (1994) que hace un cuarto de siglo afirmaba que los avances en IA permitían iniciar el desarrollo riguroso del campo de la investigación sobre entornos informáticos para el aprendizaje humano potenciado por la tecnología. Sin embargo, muchos de los objetivos planteados resultaban demasiado ambiciosos y el progreso en este campo ralentizó considerablemente en los siguientes años. Afortunadamente, en la última década se ha visto un cambio a esta situación, gracias a una serie de avances importantes en el campo de la inteligencia artificial basados en aprendizaje automático y aprendizaje profundo. Hoy en día, algunas de estas tecnologías han llegado a las herramientas que son usadas para la educación matemática.

Este estudio presenta un resumen de las distintas herramientas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que usan técnicas contemporáneas de IA. En primer lugar, se analiza una serie de herramientas que se basan en IA, entre ellos los siguientes: calculadoras por cámara, que son capaces de reconocer enunciados de problemas matemáticos en fotos y proporcionar una solución detallada al usuario (Webel & Otten, 2015); sistemas tutor inteligentes, que crean entornos educativos y adaptativos que ayuden y guíen el proceso de aprendizaje del estudiante (Wenger, 1987); herramientas de razonamiento automático, que permiten verificar y construir demostraciones de forma automática, y que hoy en día se encuentran por ejemplo en el software GeoGebra (Recio, 2020); y herramientas de minería de datos educativos que son usadas para analizar el progreso de los estudiantes y para individualizar secuencias didácticas en plataformas online.

Finalmente, se muestra cómo las distintas técnicas de IA incluidas en estas herramientas se pueden clasificar mediante una taxonomía de las siguientes cuatro clases: 1) *extractores de información*, que toman observaciones del mundo real y las traducen a una representación matemática; 2) *motores de razonamiento*, que son sistemas software capaces de resolver problemas matemáticos; 3) *explicadores*, que traducen una solución de código de máquina en una secuencia de pasos lógicos y legibles para el ser humano; y 4) *técnicas de modelización basadas en datos*, que analizan los datos de interacción con estudiantes y los convierten en ideas y modelos prácticos. La clasificación propuesta permite explicar las posibilidades actuales de la IA en las herramientas para la educación matemática y aclarar qué tareas estas tecnologías no son capaces de llevar a cabo todavía, pero que pueden esperarse en un futuro próximo.

Referencias

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14*, 9-42.

Webel, C., & Otten, S. (2015). Teaching in a world with PhotoMath. *The Mathematics Teacher, 109*(5), 368-373.

Wenger, E. (1987). *Artificial intelligence and tutoring systems: computational and cognitive approaches to the communication of knowledg*e. Morgan Kaufmann.

Recio, T., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(59), 08-15.

Van Vaerenbergh, S. y Pérez-Suay, A. (2021). Inteligencia artificial para la didáctica de las matemáticas: resumen y taxonomía. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 682). Valencia: SEIEM.

ENSEÑANZA INDIVIDUALIZADA DE MATEMÁTICAS MEDIANTE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN ENTORNOS ESCOLARES TRADICIONALES

Individualised mathematics teaching through artificial intelligence tools in traditional school environments

Varela-Uribe, A.[a], Van Vaerenbergh, S.[a], y Pérez-Suay, A.[b]

[a] Universidad de Cantabria, [b] Universitat de València

Un Sistema Tutor Inteligente (STI) es una herramienta software que, haciendo uso de Inteligencia Artificial (IA), es capaz de crear entornos educativos que ayuden y guíen el proceso de aprendizaje (Cataldi & Lage, 2009). Idealmente, un STI actúa como un experto en enseñanza individualizada, emulando el tutor humano, a través de un sistema que se adapta a las necesidades de cada estudiante. En 1984, Bloom describió un método para mejorar drásticamente la eficiencia educativa basado en la tutorización individualizada (Bloom, 1984). No obstante, debido a limitaciones en recursos y personal en los centros educativos, no era posible llevar este enfoque a la práctica. Hoy en día, las tecnologías de IA pueden dotar a los STI de capacidades reales de tutorización individualizada, y de ese modo conseguir los resultados descritos por Bloom. Sin embargo, aunque la tecnología educativa ya ha madurado significantemente, muchos centros no disponen de los recursos necesarios para incorporar esta tecnología en sus aulas, como ordenadores o tablets.

En este trabajo se propone un sistema que permite implementar un STI en centros escolares con recursos tecnológicos mínimos, haciendo un uso de los medios tradicionales que están presentes en el aula. En particular, en el sistema descrito el STI está instalado en un único dispositivo por clase, como un ordenador, tablet, o smartphone, y los alumnos interactúan con él mediante fichas personalizadas en papel. La dinámica consiste en los siguientes pasos: Una vez que el alumno ha estudiado y resuelto las tareas de una ficha, el STI la escanea y obtiene las soluciones del alumno usando tecnología de reconocimiento de caracteres ópticos. Después, el STI produce un análisis de los resultados que permite al docente a enfocar su siguiente instrucción. Y finalmente, el STI genera una nueva serie de fichas personalizadas, apoyándose en toda la trayectoria del alumno, lo cual permite que el alumno o bien sigue trabajando un concepto si es necesario, o bien avanza al siguiente. Para ello, se propone usar la tecnología de sistemas de recomendación.

Para comprobar la viabilidad del sistema ideado en una clase de matemáticas de primaria se ha llevado a cabo un experimento en el que han participado 8 niños de segundo de primaria, trabajando operaciones básicas de aritmética. Como resultado de esta prueba, se ha observado que el formato de fichas cortas y personalizadas ha tenido muy buena acogida. Se trata de una primera aproximación en un formato que en un futuro puede permitir automatizar el proceso completo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de investigación con referencia PID2019-105677RB-I00/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Cataldi, Z., & Lage, F. J. (2009). Sistemas tutores inteligentes orientados a la enseñanza para la comprensión. *EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (28), a108-a108.

Bloom, B. S. (1984). The 2 sigma problem: The search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring. *Educational researcher*, *13*(6), 4-16.

Varela-Uribe, A., Van Vaerenbergh, S., y Pérez-Suay, A. (2021). Enseñanza individualizada de matemáticas mediante herramientas de inteligencia artificial en entornos escolares tradicionales. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 683). Valencia: SEIEM.

DESCRIPCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE SÓLIDOS POR FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Description and classification of solids by prospective primary teachers

Vargas-Herrera, J.[a], Giménez, J.[a] y Vanegas, Y. [b]

[a]Universidad de Barcelona, [b]Universidad de Lleida

El objetivo de este póster es mostrar una aproximación al conocimiento matemático y didáctico evidenciado por futuros maestros de educación primaria cuando abordan una tarea de construcción, análisis y clasificación de figuras 3D. Partimos de la idea que el proceso de clasificación depende de la habilidad de identificar semejanzas y diferencias entre figuras y explicar por qué una cierta figura es un ejemplo de dicha clase (Walcott, Mohr y Kastberg, 2009). Por otra parte, consideramos como Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) que una práctica adecuada del profesor de matemáticas, implica un conocimiento profundo de las matemáticas y de su enseñanza.

Se diseña e implementa una tarea con 148 estudiantes del Grado de Educación Primaria de una Universidad Española. La tarea se estructura en cuatro apartados en los que se promueven la construcción; composición y descomposición; visualización, la identificación de atributos de figuras 3D y su clasificación. Nuestros datos son los protocolos escritos de los estudiantes. Para el análisis se usan herramientas del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) descritas en Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016). Dichas herramientas permiten realizar una caracterización inicial de diferentes tipos de conocimiento de los futuros maestros: conocimiento matemático común (sobre figuras 3D); conocimiento matemático extendido (relacionado con la definición de criterios para la clasificación de figuras 3D) y conocimiento didáctico-matemático (valor otorgado a la clasificación).

Los resultados ponen de manifiesto que los futuros maestros construyen e identifican adecuadamente prismas como poliedros, sin embargo, algunos no logran reconocer que una figura como el cubo no puede obtenerse de la composición de 4 medios cubos. También, se constata que la mayoría de los futuros maestros apuntan a elementos de carácter perceptivo (visual y descriptivo) para clasificar los sólidos que han construido y un nivel bajo de estructuración a partir de propiedades. Este dominio en lo descriptivo es semejante a lo encontrado por González-Regaña, Martín-Molina, Toscano, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2021). Los futuros maestros centran la importancia de la clasificación en tanto permite distinguir atributos basados en la comparación. Se alude a la clasificación como separación, planteando agrupaciones dicotómicas simples, pero sin una apropiación adecuada de las características de las figuras.

Agradecimientos: Proyecto: PGC2018-098603-B-I00 y Grupos: SGR-2017-101 / SGR-2017-1353.

Referencias

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81-97.

Walcott, C., Mohr, D., y Kastberg, S. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 30–40.

Vargas-Herrera, J., Giménez, J. y Vanegas, Y. (2021). Descripción y clasificación de sólidos por futuros maestros de Educación Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 684). Valencia: SEIEM.

Índice de autores

Álvarez-Arroyo, R., 359

Acosta, Y., 101
Adamuz-Povedano, N., 672
Aguayo, C. G., 109
Aguayo-Arrigada, C. G., 513
Aguilar-González, A., 639
Albarracín, L., 117, 587, 595
Alonso-Castaño, M., 449
Alsina, Á., 101, 489
Anglada, M. L., 125
Arbona, E., 133
Arce, M., 141
Arevalillo-Herráez, M., 644, 647, 681
Arnal-Bailera, A., 149
Arnau, D., 643, 644, 647, 681
Arteaga, P., 481
Atienza-Prieto, A., 640

Badillo, E., 205, 213
Barquero, B., 253, 385, 621
Batanero, C., 359, 481
Belletich, O., 351
Beltrán-Meneu, M. J., 133
Beltrán-Pellicer, P., 157, 674
Berciano, A., 662
Bernabeu, M., 165
Biza, I., 19
Blanco, T. F., 641, 642
Borji, V., 173
Bosch, M., 417, 621
Breda, A., 343, 505, 553
Brizuela B., 603
Bruno, A., 261, 563, 655
Buforn, À., 181
Burgos, M., 157, 197

Cáceres-García, M. J., 664
Cañadas, M. C., 125, 269, 311, 465, 497, 603, 613
Cabero, I., 643, 644
Cabrera-Chim, L. M., 645
Callejo, M. L., 433
Camacho-Machín, M., 33, 660
Carrillo, J., 237, 545
Casas-Rosal, J. C., 659, 663
Castilla-Mora, L., 189
Castillo, M. J., 197
Castro-Rodríguez, E., 513
Caviedes, S., 205, 213
Chandia, E., 117
Chaparro, G., 671
Chavil-Montenegro, D. Y., 221
Climent, N., 189, 629
Codes, M., 629
Conde-Lago, J., 641
Conejo, L., 141
Cruz-Márquez, G., 650
Cuadrado, M. L., 673
Cuida, A., 571

Díez-Palomar, J., 335

de Armas-González, P., 229
De Gamboa, G., 205, 213
De La Fuente, A., 646
de la Torre-Molina, F. A., 675
del Olmo-Muñoz, J., 647, 681
Deulofeu, J., 587, 595
Diago, P. D., 644, 647, 681
Diamantidis, D., 553
Diego-Mantecón, J. M., 641
Domingo-Peñafiel, L., 253

Elorza, J., 351
Escudero-Ávila, D., 650, 669
Escudero-Domínguez, A., 237
Espina, E., 245
Esteve, S., 253
Esteve-Blasco, M., 648

Fariña, M., 261
Fernández C., 319
Fernández-Ahumada, E., 672
Fernández-Gago, J., 409
Fernández-Plaza, J. A., 649
Fernández-Salinero, C., 521
Fernandez-Cobos, R., 655
Ferrando, I., 295
Figueras, O., 678
Figueroa M. de J., 652

Filloy, E., 529
Florensa, I., 417
Flores-Medrano, E., 650
Flores-Medrano, K., 650
Font, V., 173, 367, 425, 505, 553
Fuentes, S., 269

Gómez, B., 529, 678
Gómez-Ferragud, C. B., 658
Gómezescobar, A., 303
Gallego-Sánchez, I., 327, 653
García, E., 669
García, F. J., 377, 385
García, M., 651
García-Alonso, I., 279, 287
García-Caro, D., 651
García-Cerdá, C., 295
García-Díaz, A., 287
García-Moya, M., 676
Garcés, W., 173
Garrido, R. G., 652
Garrido-Martos, R., 646
Gavilán-Izquierdo, J. M., 327, 653
Gea, M. M., 481
Giacomone, B., 157
Giménez, J., 684
Goñi-Cervera, J., 311, 654, 655, 676
Godino, J. D., 197
González, A., 327, 653
González, M. J., 670
González-Astudillo, M. T., 648, 664
González-Calero, J. A., 644, 647, 681
González-De Cos, L., 654
González-Forte, J. M., 319
González-Sequeiros, P., 642
Gorgal-Romarís, A., 642
Gorgorió, N., 117
Gutiérrez, Á., 133, 165, 579, 665
Gutiérrez-Soto, J., 656

Henriques, A., 5
Herreros-Torres, D., 657, 658
Hidalgo-Herrero, M., 385
Hidalgo-Méndez, M. A., 659
Hidalgo-Moncada, D., 335
Hummes, V., 343

Iribas, H., 351

Jaime, A., 579, 665
Jerez-Santana, K. O., 660
Jiménez-Fanjul, N., 663
Jirotková, D., 393
Joswick, C., 661

Kribs, C., 661

López Centella, E., 393, 649
López-Esteban, C., 401
López-Iñesta, E., 640
Landa, J., 662
Lapresa, D., 680
Lasa, A., 351
Lavela, J. F., 359
León-Mantero, C., 401, 659, 663
Ledezma, C., 367
Lendínez, E. M., 377
Lerma, A. M., 385
Liern-García, M., 656
Llinares, S., 165
Lorenzo-Valentín, G, 677
Lupiáñez, J. L., 473

Múnera, N., 666
Madrid, M. J., 401, 663
Manero, V., 149
Marbán, J. M., 245, 409, 662
Markulin, K., 417
Maroto, A., 245
Martí-Contreras, O., 667, 668
Martínez-Lastras, S., 664
Martínez-Maldonado, J. A., 645
Martínez-Moro, E., 571
Maz-Machado, A., 401, 659, 663
Melchor-Borja C., 671
Molina, M., 83, 613
Molina, O., 425
Monferrer-Sales, L., 677
Monje, J., 181
Montero, E., 433
Monterrubio-Pérez, M. C., 441
Montes, M., 53
Montoro A. B., 109
Mora, M., 665
Morales, A., 672
Moreno, A., 497, 603
Moreno, M., 165
Muñiz-Rodríguez, L., 449, 639
Muñoz-Catalán, M. C., 65, 237
Muñoz-Escolano, J. M., 457, 674

Núñez-García, C., 642
Narváez, R, 465

Olivares, D., 473
Oller-Marcén, A. M., 457
Olmos, R., 667, 668
Olvera, C., 669

Pérez-Suay, A., 682, 683
Pérez-Tyteca, P., 181
Padilla-Padilla, E., 670
Pallauta, J. D., 481
Perdomo-Díaz, J., 229, 563
Pincheira, N., 489
Pino-Fan, L., 425
Pinto, E., 497
Pla-Castells, M., 671
Pochulu, M., 505
Polo-Blanco, I., 311, 654, 655, 676
Porras, K., 513
Puertas, M. L., 327, 653

Quiñones-Baldazo, N., 650

Ramírez, R., 537, 613
Ramos-Rodríguez, E., 672
Ribera, J. M., 673, 680
Rifo, L., 189
Roanes, E., 521
Rodríguez, M. L., 529
Rodríguez-Blancas, J. L., 221
Rodríguez-Muñiz, L. J., 449, 639
Rodríguez-Sánchez, M. M., 664
Rojas, F., 117
Romero-Albaladejo, I., 221
Rotger, L., 673
Roura, R., 537
Rubio-Chueca, J. M., 674
Ruiz-Catalán, J., 675
Ruiz-Olarría, A., 385

Sánchez, A., 173, 553
Sánchez, E., 545
Sánchez-Barbero, B., 664
Sánchez-Matamoros, G., 3
Sabariego, P., 676
Sala, G., 367
Salinas, J., 545
Salinas-Hernández, U., 545
Salvador-Beltri, A., 677
Sanfiel, L., 563
Santágueda-Villanueva, M., 677
Sanz, H., 571
Sanz, M. T., 640, 651, 657, 658, 678
Segovia, I., 473
Sierra, T., 385
Slezáková, J., 393
Sol, T., 343
Sosa-Martín, D. N., 229, 287
Sotos, M., 679
Sua, C., 579

Terroba, M., 680
Tinoco, J. C., 587
Tirado-Olivares, S., 647, 681
Torregrosa, A., 595
Torres, M. D., 497, 603

Ubilla, F. M., 117
Ureña, J., 613

Vásquez, S., 621
Valdez-Monroy, J. C., 545
Valenzuela, C., 651, 678
Valls, J., 433
Van Dooren, W., 319
Van Hoof, J., 319
Van Vaerenbergh, S., 654, 670, 682, 683
Vanegas, Y., 335, 684
Varela-Uribe, A., 683
Vargas-Herrera, J., 684
Vergara, L., 629

Wilhelmi, M. R., 351
Wu, Y., 644

Palabras Clave

Área de figuras planas, 213

Academia militar, 441
Acciones de gestión, 425
Actitudes, 287
Actividades intercurriculares, 587
Altas capacidades matemáticas, 133
Análisis de contenido, 473
Análisis de estrategias, 587
Análisis de la actividad matemática, 367
Análisis de libros de texto, 197
Análisis de textos, 473
Ansiedad matemática, 181
Anticipación, 433
Aprendizaje basado en indagación, 521
Aprendizaje matemático, 409
Aprendizaje por proyectos, 417
Aprendizaje profundo, 433
Argumentación, 343
Aritmética, 441
Autoconcepto, 287
Autorregulación, 409
Autorregulación del aprendizaje, 335, 433

Bachillerato, 359

Combinatoria, 621
Complejidad semiótica, 481
Comprensión relacional, 571
Concepto de polígono, 165
Configuración didáctica, 505
Configuración epistémica, 173
Conocimiento, 571
Conocimiento de la estructura de las matemáticas, 213
Conocimiento de los temas, 213
Conocimiento del profesor, 237
Conocimiento especializado, 629
Conocimiento matemático fundamental, 117
Conocimientos lógicos, 385
Contextos educativos, 101
Conversión entre representaciones, 141
COVID-19, 303
Creatividad matemática, 553
Currículo, 109

Demanda cognitiva, 489
Demostración, 149
Densidad, 319
Derivación implícita, 173
Desarrollo de la creatividad matemática, 553
Diálogos ficticios de aula, 505
Didáctica de la estadística, 545
Didáctica de la matemática, 157
Discalculia, 245
Distribución de probabilidad, 545
Docencia online, 303

Ecología didáctica, 621
Ecuaciones, 393
Educación a distancia, 303
Educación básica, 481
Educación Infantil, 101, 125, 237, 377, 385
Educación matemática, 117
Educación Primaria, 109, 133, 165, 181, 189, 311, 319, 393, 465, 529, 595
Educación Secundaria, 221, 295, 319, 587, 621
Enfoque Onto-Semiótico, 367
Enseñanza, 335
Enseñanza universitaria, 417
Escala Likert, 409
Escuela multigrado, 253
Espacio de Trabajo Matemático, 221
Estadística, 417

Estimación numérica, 261
Estrategias, 311, 393, 513
Estrategias de resolución, 133
Estrategias de resolución y representaciones, 269
Estructura, 603
Estudiantes para maestro, 181
Estudio de caso, 237
Estudio de clases, 377
Evaluación de los estudiantes para maestro, 117
Evaluación entre pares, 229

Formación de maestros, 303, 385, 449
Formación de profesores, 157, 197, 335, 537
Formación docente, 229
Formación inicial de maestros, 117
Formación inicial del profesorado, 377
Formación permanente, 253
Función, 603
Función lineal, 497
Funciones lineales, 269
Futuro profesor, 553
Futuros maestros, 189
Futuros profesores, 489
Futuros profesores de primaria, 629

Género, 287, 351
Generalización, 125, 311, 465, 603, 613
Geogebra, 579
Geometría 3D, 425
Geometría espacial, 579
Geometría fractal, 221
Gráficos estadísticos, 279

Hermenéutica, 571
Historia de la Educación Matemática, 457
Historia de las matemáticas y la educación matemática, 401

Idoneidad didáctica, 157, 343, 449, 505
Idoneidad epistémica, 197
Incertidumbre, 189
Ingenieros militares, 441
Interés, 295
Intervalos de la recta real, 141
Intervención, 245
Invención de problemas, 595
Itinerario de enseñanza, 101

Lenguaje natural, 497, 571
Lesson study, 343
Libros de texto, 109, 141, 457, 481
Libros de texto de ciencias, 279

Matemáticas, 335
Mediación, 465
Medida, 109
Medida del área, 205
Medios de comunicación, 359
Mirar profesionalmente, 181
Modelización, 295
Modelización matemática, 367, 513
Modelo de van Hiele, 327

Números naturales, 529
Números racionales, 319
Nivel de lectura, 279
Niveles de codeterminación didáctica, 253
Niveles de desarrollo de esquema, 173
Niveles de sofisticación, 165
Niveles de van Hiele, 149
Normas, 425
Notas al pie, 457

Paratextos, 457
Patrones, 489
Patrones matemáticos, 101, 595
Patrones numéricos, 563
Pensamiento algebraico, 133, 393, 613
Pensamiento funcional, 125, 269, 311, 465, 497, 603
Pensamiento geométrico, 165
Perfil de estudiantes en Grados en Maestro, 351
Poliedros, 629
Práctica educativa, 545
Prensa, 401
Prismas, 237
Probabilidad, 189, 359, 449
Probabilidad condicionada, 359
Problemas de final abierto, 563
Problemas de patrones geométricos, 133
Problemas intramatemáticos, 295
Problemas verbales, 295
Procedimientos geométricos, 205
Procedimientos numéricos, 205
Procedimientos y acciones que involucran argumentos informales, 425

Proceso “conjetura se convierte en teorema”, 425
Procesos de razonamiento, 327
Profesión docente, 253
Profesorado en formación, 149
Progresión de estrategias, 433
Proporcionalidad, 157, 197, 587
Proporciones, 513
ProyectaMates, 287

Razonabilidad, 261
Razonamiento probabilístico, 359
Realidad aumentada, 579
Realidad virtual, 221
Recorrido de estudio e investigación, 385
Recorridos de estudio e investigación, 417, 621
Recursos tecnológicos, 245
Relaciones funcionales, 613
Relaciones numéricas, 563
Representación gráfica, 261
Representación tabular, 603
Representaciones, 497, 513
Representaciones de generalización, 613
Representaciones planas, 579
Representaciones visuales, 473
Resolución de problemas, 229, 409, 473, 595
Robótica educativa, 125
Robots, 521

Semanario, 401
Sentido espacial, 537
Sentido numérico, 261
Sesgo del número natural, 319
Siglo XIX, 457
Siglo XVIII, 401, 441
Software matemático, 521
STEM, 351

Tablas estadísticas, 481
Tarea matemática, 489
Tareas formativas, 629
Teoría antropológica de lo didáctico, 253, 385, 417
Teoría de grafos, 327
Teoría de las Situaciones Didácticas, 377
Teorema de Pitágoras, 343
Test PMA, 537
TIC, 521, 545
Trastorno de aprendizaje, 245
Trastorno del espectro autista, 311
Trayectoria de aprendizaje, 165

Uso de definiciones, 327

Vídeos educativos, 157, 449
Visualización, 579, 629

Keywords

18th century, 401, 441
19th century, 457
2-dimensional representation, 579
3D geometry, 425

Actions and procedures that involve informal arguments, 425
Algebraic thinking, 133, 393, 497, 613
Analysis of mathematical activity, 367
Analysis of strategies, 587
Anthropological theory of the didactic, 253, 385, 417
Anticipation, 433
Area measurement, 205
Area of flat figures, 213
Argumentation, 343
Arithmetic, 441
Attitudes, 287
Augmented reality, 579
Autism spectrum disorder, 311

Basic Education, 481

Case study , 237
Cognitive demand, 489
Combinatorics, 621
Concept of polygon, 165
Conditional probability, 359
Content analysis, 473
Conversions among representations, 141
COVID-19, 303
Cross-curricular activities, 587
Curricula, 109

Deep learning, 433
Density, 319
Development of mathematical creativity, 553
Didactic configuration, 505
Didactic ecology, 621
Didactical suitability, 157, 343, 449, 505
Didactics of mathematics, 157
Didactics of statistics, 545
Dyscalculia, 245

e-learning, 303
Early algebra, 393
Early Childhood Education, 101, 237, 377, 385
Early Childhood education, 125
Educational contexts, 101
Educational practice, 545
Educational robotics, 125
Educational videos, 157, 449
Elementary Education, 595
Elementary school mathematics, 117
Epistemic configuration, 173
Epistemic suitability, 197
Equations, 393

Fictional classroom dialogues, 505
Footnotes, 457
Fractal geometry, 221
Function, 603
Functional relationships, 613
Functional thinking, 125, 269, 311, 465, 497, 603
Future primary school teachers, 629

Gender, 351
Generalization, 125, 311, 465, 603, 613
Genre, 287
Geogebra, 579
Geometric pattern problems, 133
Geometric procedures, 205
Geometrical thinking, 165
Graph theory, 327
Graphic representation, 261

Hermeneutic, 571
High school students, 359
History of mathematics and mathematics education, 401

History of Mathematics Education, 457

ICT, 521, 545
Implicit differentiation, 173
Initial teacher education, 377
Inquiry-based learning, 521
Interest, 295
Intervals of the real line, 141
Intervention, 245
Intramathematical problems, 295

Knowledge, 571
Knowledge of the structure of mathematics, 213
Knowledge of the topics, 213

Learning disorder, 245
Learning self-regulation, 335
Learning trajectory, 165
Lesson study, 343, 377
Levels of development of schema, 173
Levels of didactic codeterminacy, 253
Levels of sophistication, 165
Lifelong learning, 253
Likert scale, 409
Lineal functions and representations, 269
Linear function, 497
Logical knowledge, 385

Management actions, 425
Math anxiety, 181
Mathematical creativity, 553
Mathematical giftedness, 133
Mathematical modelling, 367, 513
Mathematical patterns, 101, 595
Mathematical software, 521
Mathematical tasks, 489
Mathematical Working Space, 221
Mathematics, 335
Mathematics education, 117
Mathematics learning, 409
Measurement, 109
Media, 359
Mediation, 465
Military engineers, 441
Military school, 441
Modelling, 295
Multigrade school, 253

Natural language, 497, 571
Natural number bias, 319
Natural numbers, 529
Norms, 425
Number estimation, 261
Number patterns, 563
Number sense, 261
Numeric procedures, 205
Numerical relationships, 563

Online teaching, 303
Onto-Semiotic Approach, 367
Open-ended problems, 563

Paratexts, 457
Patterns, 489
Peer assessment, 229
PMA test, 537
Polyhedra, 629
Pre-service teacher, 553
Pre-service teacher education, 117
Pre-service teachers, 149, 181, 189, 489
Press, 401
Primary Education, 109, 133, 165, 181, 311, 393, 465, 529
Primary School, 189
Primary school, 319
Prisms, 237
Probabilistic reasoning, 359
Probability, 189, 359, 449
Probability distribution, 545
Problem posing, 595
Problem solving, 229, 409, 473, 595
Processes of reasoning, 327
Professional noticing, 181
Progression of strategies, 433
Project-based learning, 417
Proof, 149
Proportionality, 157, 587
Proportions, 513
ProyectaMates, 287
Pythagorean theorem, 343

Rational numbers, 319
Reading level, 279
Reasonableness, 261
Relational understanding, 571
Representations, 497, 513
Representations of generalization, 613
Resolving strategies, 269
Robots, 521

Scientific textbooks, 279
Secondary Education, 221, 587, 621
Secondary School, 319
Secondary school, 295
Self-competence, 287
Self-regulated learning, 433

Self-regulation, 409
Semiotic complexity, 481
Solving strategies, 133
Spatial geometry, 579
Spatial sense, 537
Specialized knowledge, 629
Statement-becomes-theorem process, 425
Statistical graphs, 279
Statistical tables, 481
Statistics, 417
STEM, 351
Strategies, 311, 393, 513
Structure, 603
Student-teacher evaluation, 117
Study and research paths, 385, 417, 621

Tabular representation, 603
Task design, 629
Teacher education, 157, 385
Teacher knowledge, 237
Teacher training, 197, 229, 303, 335, 449, 537
Teacher's profile, 351
Teaching, 335
Teaching itinerary, 101
Technological resources, 245
Text analysis, 473
Textbook, 109
Textbook analysis, 197
Textbooks, 141, 457, 481
Theory of Didactical Situations, 377

Uncertainty, 189
University teaching, 417
Use of definitions, 327

Van Hiele levels, 149
van Hiele model, 327
Virtual reality, 221
Visual representations, 473
Visualization, 579, 629

Weekly journal, 401
Word problems, 295