

¹PRÁCTICAS DEL LÍMITE Y DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CON EL PROGRAMA MATHEMATICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS²

Autores:

- Contreras de la Fuente, Ángel. Dep. Didáctica de las Matemáticas.

Universidad de Jaén

- Font Moll, Vicenç. Dep. Didáctica de las Matemáticas.

Universidad de Barcelona

- García Armenteros, Manuel. Dep. Didáctica de las Matemáticas.

Universidad de Jaén

- Luque Cañada, Lorenzo. IES Az – zait (Jaén)

- Marcolini Bernardi, Marta. Dep. Matemáticas.

Universidad de Jaén

- Ordóñez Cañada, Lourdes. IES Albariza (Mengíbar, Jaén)

- Ortega Carpio, Manuela. Dep. Matemáticas.

Universidad de Jaén

- Sánchez Gómez, Carmen. Dep. Matemáticas.

Universidad de Jaén

Resumen

En este trabajo se describe una experiencia llevada a cabo con estudiantes de 1^{er} curso de la Diplomatura en Ciencias Empresariales de la Universidad de Jaén. Se han diseñado dos pruebas para realizar en el aula de informática con el software MATHEMATICA, una para límite y otra para derivada de una función y se han analizado los conflictos semióticos que surgen en lo relativo al lenguaje matemático y al lenguaje del programa así como los que surgen en los procedimientos matemáticos y los asociados al MATHEMATICA. Todo ello, usando el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática.

Abstract

This paper describes an experience carried out with students from the first year of the Diplomatura in Ciencias Empresariales at the University of Jaen. We have designed two tests to perform in the classroom computer with the software MATHEMATICA, one for limit and another for derivative of a function and have analyzed semiotic conflicts that arise with regard to mathematical language and the language of the programme as well as cropping up in the procedures associated with the mathematical and MATHEMATICA. All this, using the approach that ontosemiótico of mathematical cognition.

¹ Contreras, A. et als. (2008). Prácticas del límite y derivada de una función con el programa Mathematica en estudiantes universitarios

² Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación MEC-FEDER: SEJ 2004 – 06637/EDUC

Introducción

Ésta es una investigación que actualmente tiene lugar en el Departamento de Didáctica de las Ciencias de la Universidad de Jaén, enmarcada en un proyecto de investigación I+D+I que estudia las prácticas que se imparten en el 1^{er} curso de distintas titulaciones universitarias, utilizando el software MATHEMATICA. Concretamente, nos referiremos a las prácticas que ha desarrollado el alumnado de 1^{er} curso de la Diplomatura en Ciencias Empresariales, en los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función. Varios trabajos han precedido a esta investigación: el primero, en el XIX Congreso del Seminario Inter – Univeritario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM), celebrado en Córdoba en 2003 (Contreras y Ortega, 2003); un segundo trabajo se presentó en el I Congreso sobre la Teoría de las Funciones Semióticas, celebrado en Jaén en 2004 (Contreras y Ortega, 2004); posteriormente se han presentado comunicaciones en las XII JAEM, celebradas en Albacete en 2005 (Contreras et al., 2005b), en el IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), celebrado en Córdoba en 2005 (Contreras et al., 2005c) y en las XIII JAEM, celebradas en Granada en 2007 (Contreras, A. et al., 2007).

En las distintas fases de la investigación se han analizado las prácticas implementadas por la institución y los resultados obtenidos por los estudiantes. Ahora tratamos de analizar los resultados obtenidos por los estudiantes al resolver las cuestiones planteadas en dos módulos de aprendizaje, uno sobre límite y continuidad y otro sobre derivabilidad, abordando el estudio de estos conceptos utilizando MATHEMATICA y siguiendo el enfoque ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino, 2002; Contreras et al., 2005a).

En estos trabajos se pone de manifiesto que no basta con lanzar la tecnología a los estudiantes de matemáticas sino que estas experiencias deben ser diseñadas con especial atención para que los alumnos estén capacitados para crear sus propios modelos.

La comunicación se ha organizado en cuatro apartados:

- 1º: Marco teórico
- 2º: Objetivos de la investigación
- 3º: Metodología de la investigación
- 4º: Análisis de los datos

En el primero de ellos se hace explícito el marco conceptual en el que se apoyan los resultados obtenidos en la parte empírica. En el segundo, se especifican los objetivos de la investigación. En el tercero, se expone la metodología en la que se describen las características del proyecto así como los instrumentos de análisis. Por último, en el cuarto, se analizan los datos obtenidos en el estudio.

Marco teórico

En lo que respecta al uso de programas de ordenador para la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas nos podemos remontar a Dubinsky (Dubinsky, 1995), que tenía el convencimiento de que los estudiantes podrían ser capaces de aprender conceptos matemáticos a través de un programa de ordenador, utilizando un lenguaje matemático cuya sintaxis sea cercana a la notación matemática estándar.

Se pueden destacar distintas líneas de investigación. Por una parte están los trabajos del grupo RUMEC, que utiliza la teoría APOS (Dubinsky, 1996) como marco teórico en sus desarrollos. Son clásicos los trabajos de Asiala et al. (1996) y (1997) sobre el aprendizaje de la derivación.

Otra línea de investigación la constituyen los trabajos sobre informática en la enseñanza secundaria de autores franceses, de los que se pueden destacar Artigue (2002) y Guin y Trouche (2002), en los que se profundiza sobre los cambios cualitativos que se pueden generar en el aprendizaje de las matemáticas con el uso de entornos informáticos en la enseñanza.

Una última línea de investigación la constituyen los estudios sobre la visualización matemática y los conceptos del análisis matemático. Aquí se encuadran los trabajos de Gutiérrez (1997), Hitt (1998), Camacho y González (2001) y Afonso (2003), que ponen de manifiesto la importancia de la articulación entre las distintas representaciones semióticas de los conceptos matemáticos.

Sin embargo, se reconoce la necesidad de realizar nuevos estudios sobre el uso del ordenador en las clases de matemáticas, ya que como se señala en Guin y Trouche (2002): “Los cambios producidos por la nueva tecnología originan una evolución notable de la práctica matemática en el dominio profesional; una evolución que, hasta ahora, no ha provocado una adaptación correspondiente en la enseñanza de la matemática.”

En la actualidad, los cambios y la introducción de los ordenadores en el aula vienen motivados por la disponibilidad de dispositivos portátiles de gran capacidad que, potencialmente, son capaces de modificar el modo en que se enseñan y se aprenden las matemáticas (Kaput, 2000).

Según Hoyles, (1998) el uso de los ordenadores se debería integrar en los programas en lugar de añadirlos simplemente, lo que implicaría una reformulación del contenido y secuencia del currículo de las matemáticas, de los estilos de enseñanza y de la diferencia entre las aproximaciones de ordenador y de lápiz y papel.

No cabe duda de que si los estudiantes deben llegar a ser capaces de usar la tecnología como ruta alternativa a la formación de bases intuitivas para el pensamiento matemático, entonces será necesaria la integración en los cursos (Muller, 2001).

El EOS, como se ha mostrado anteriormente en los trabajos de nuestro grupo de investigación, se ha revelado como un marco teórico que ofrece constructos teóricos interesantes para el análisis de las actividades con ordenador en el aula.

Objetivos de la investigación

Se considera que el marco del EOS es un instrumento teórico que permite y facilita el análisis de la actividad matemática realizada con el programa MATHEMATICA. En este caso, aparecen dos lenguajes: el del programa (con las potencialidades y restricciones correspondientes) y el lenguaje propiamente matemático. El estudiante enlaza ambos realizando acciones que tratan de resolver las situaciones de enseñanza que se proponen. Utilizando las funciones semióticas es posible dar explicación a los diversos fenómenos implicados en el proceso de transposición didáctica entre un lenguaje y otro.

De las tres dimensiones que consideramos en las prácticas con este útil informático: algorítmicas, de comprensión de conceptos y de modelización de situaciones, las prácticas con MATHEMATICA que nos ocupan se centran básicamente en actividades de tipo

algorítmico, por lo que se ve necesario efectuar propuestas en el sentido de las otras dos dimensiones, en el seno del marco conceptual EOS.

Los objetivos de esta investigación son:

- Análisis a priori de los módulos de prácticas de Matemáticas I de Diplomatura en Ciencias Empresariales para detectar errores y dificultades que los estudiantes desarrollan, a fin de aportar conocimientos científicos sobre el rendimiento de las acciones formativas, la identificación de variables que influyan en los aprendizajes y el control de la calidad de dichos aprendizajes. Asimismo, se busca la discriminación entre la matemática subyacente a las clases sin ordenador respecto a aquellas otras que usan el programa informático MATHEMATICA
- experimentación en el aula y evaluación posterior de dichos módulos
- realizar propuestas didácticas sobre prácticas significativas con ordenador que tratarán, por una parte, de dar sentido y contextualizar dichas prácticas; y por otra, armonizar los contenidos matemáticos impartidos con ordenador con los de las clases ordinarias que no lo utilizan.

Metodología de la investigación

El estudio se ha llevado a cabo con los estudiantes de 1^{er} curso de Diplomatura en Ciencias Empresariales. Se han efectuado dos pruebas, diseñadas expresamente por los investigadores: una primera sobre el concepto de límite y continuidad, y una segunda relativa al concepto de derivada. Ambas se enmarcan en la asignatura Matemáticas I, 7'5 créditos, de los que 1'5 tiene lugar en el aula de ordenadores.

Los estudiantes que han desarrollado dichas pruebas han sido de grupos distintos (23 estudiantes en el límite y 20 en la derivada) y han trabajado individualmente en el aula de ordenadores durante 1 hora para cada una de ellas.

Variables consideradas:

Las variables *explicadas* en el análisis, diseño y evaluación de las pruebas son:

- Análisis Matemático (límite, continuidad y derivación)
- Diplomatura en Ciencias Empresariales de la Universidad de Jaén
- Enseñanza presencial
- Conflictos semióticos asociados a los lenguajes y a los procedimientos.

La variable explicativa es la no consideración de la complejidad semiótica asociada al límite, continuidad y derivada en el proceso de estudio usando MATHEMATICA.

Por tanto, el fenómeno didáctico considerado puede expresarse como sigue:

Fenómeno EOS: (estudiantes de la Diplomatura en Ciencias Empresariales de la Universidad de Jaén; complejidad semiótica asociada al límite, continuidad y derivada; conflictos semióticos asociados al lenguaje, los procedimientos y los conceptos)

Análisis de los datos

En las tablas siguientes mostramos el análisis semiótico de las respuestas dadas por los estudiantes a las cuestiones planteadas.

Tabla 1. Conflictos semióticos (CS) detectados en el límite.

Ejer cicio	Concep- tos ma- temáticos	Conceptos del pro- grama	Lenguaje Matemático (CS semántico)	Lenguaje del programa (CS sintáctico)	Procedimientos matemáticos (CS semántico)	Procedimientos del programa (CS sintáctico)	Fenóme- nos detec- tados
1° a	Límite en el infinito	- Límite en el infinito -Expresión del log nepe- riano	-Correcto: 91% -CS: *Hacer límites laterales *Expresar el log como produc- to de la función por el argu- mento	-Correcto: 61% -CS: *Expresión del log *Expresar el log como produc- to de la función por el argu- mento *No usar corchetes para argu- mento *Realizar límites laterales *Expresión del producto	-Correcto: 83% -CS: *Obtener una función como resultado *Obtener log sin argumento *Obtener log como producto de éste por el argumento	-Correcto: 61% -CS: *Obtener Ln @ *Obtener log sin argumento *Obtener límite de una función como resultado *No usar corchetes para argu- mento	Comporta- miento del pescador
1° b	-Límite finito	-Límite finito -Expresión de las funciones trigonométri- cas	-Correcto: 96% -CS: Función mal transcrita	-Correcto: 74% -CS: *No usar corchetes para argu- mento *No usar mayúsculas para co- seno *Función mal transcrita	-Correcto: 91% -CS: *Función mal transcrita *Obtener una función como resultado	-Correcto: 78% -CS: *No usar corchetes para argu- mento de coseno *Obtener una función como resultado	Comporta- miento del pescador
1° c	-Límite lateral	-Límite lateral -Expresión de la función exponencial	-Correcto: 87% -CS: *No usar la exponencial *No hacer límite lateral	-Correcto: 70% -CS: *Hacer límite por la dcha *No usar exponencial *No hacer límite lateral	-Correcto: 83% -CS: *Expresar la exponencial como producto *No hacer límite lateral *Hacer límite por la dcha	-Correcto: 70% -CS: *Hacer límite por la dcha *Poner exponencial como pro- ducto *No hacer límite lateral	
2°	-Función a trozos -Límites laterales -Conti- nuidad	-Función a trozos -Límites late- rales	-Correcto: 96% -CS: *No usar función para límite lateral	-Correcto: 96% -CS: *No usar función para límite lateral *No separar los distintos argu- mentos del límite	-Correcto: 43% -CS: *No comprobar la función en el punto *No decir en qué puntos es discontinua	-Correcto: 96% -CS: *Usar la expresión del límite por la dcha para límite por la izda y viceversa	Comporta- miento del pescador

Tabla 2. Conflictos semióticos (CS) asociados al objeto derivada.

Ejer- cicio	Concep- tos ma- temáticos	Conceptos del pro- grama	Lenguaje Matemático (CS semántico)	Lenguaje del programa (CS sintáctico)	Procedimientos matemáti- cos (CS semántico)	Procedimientos del pro- grama (CS sintáctico)	Fenóme- nos detec- tados
1º a	-F. expo- nencial -F.derivada	-F. exponen- cial -F. derivada	-Correcto: 100%	-Correcto: 84% -CS: *No usar notación adecuada para n^o e	-Correcto: 100%	-Correcto: 79% -CS: *Obtener Log(e)	Comporta- miento del pescador
1º b	-F. deriva- da	-F. derivada -F. Log	-Correcto: 68% -CS: *No expresar correctamente log en base 2	-Correcto: 26% CS: *No usar corchetes para argu- mento del log *No usar mayúsculas para log *No usar expresión del log en cualquier base	-Correcto: 21% -CS: *Obtener log sin argumento *Obtener derivada de una cons- tante *Obtener log cuyo argumento no es el de la función *No hacer la derivada	-Correcto: 21% -CS: *Obtener log sin argumento *Obtener derivada de una cons- tante * Obtener log cuyo argumento no es el de la función * No hacer la derivada	Comporta- miento del pescador
2º	-F.derivada -F. seno	-F. derivada -F. seno	-Correcto: 95% -CS: *No hacer todas las derivadas pedidas	-Correcto: 63% -CS: *No usar corchetes para argu- mento de seno *No seguir la misma notación todo el problema *Considerar producto en lugar de composición de funciones	-Correcto: 58% -CS: *Obtener seno sin argumento *No derivar función seno *Hacer sólo la 1ª derivada *No obtiene nunca coseno *No seguir misma notación todo el problema	-Correcto: 63% -CS: *Obtener seno sin argumento *No procesar las operaciones al hacer rectificaciones *No hacer derivadas pedidas *No seguir misma notación en el problema *No usar <i>Clear</i>	Comporta- miento del pescador
3º	-F. deriva- da -F. seno	-F. derivada -F. seno	-Correcto: 100%	-Correcto: 100%	-Correcto: 100%	-Correcto: 100%	
4º	-Recta que pasa por dos puntos -F. deriva- da	- Función -Función en un punto	-Correcto: 47% -CS: *No completar el problema con el dato pedido *No saber la ecuación de la recta que pasa por dos puntos	-Correcto: 79%	-Correcto: 47% -CS: *No obtener dato solicitado *No saber la ec. de la recta que pasa por dos puntos *No usar la definición dada en el problema *Obtener un resultado negativo	-Correcto: 58% -CS: *No obtener dato solicitado *No usar la definición dada en problema *Obtener un resultado con valores negativos	Comporta- miento del pescador

Si analizamos la Tabla 1, es decir, las respuestas dadas a los problemas relativos al límite y la continuidad vemos que los conflictos semióticos surgen cuando se trata de trasladar al MATHEMATICA los conceptos estudiados en la pizarra, ya sea en lo que respecta al lenguaje o a los procedimientos. En el lenguaje matemático, los porcentajes de ejercicios correctos van del 87% al 96%, siendo los CS destacables el realizar límite lateral cuando se trata de un límite en el infinito, o no hacerlos cuando se trata de una función definida a trozos; el resto de los CS quizás sean achacables al uso del programa, ya que, probablemente, al hacer los ejercicios con lápiz y papel no aparecerían. En lo relativo al lenguaje del programa, los porcentajes de ejercicios correctos bajan sensiblemente; destacamos que los problemas surgen al tener que utilizar mayúsculas en las funciones o corchetes para los argumentos, en lugar de los paréntesis a que estamos acostumbrados. Así, al menos, se pone de manifiesto en el 2º ejercicio, ya que, al no tener que utilizar funciones predefinidas o corchetes, el porcentaje de correctos es muy alto. Los procedimientos matemáticos también son correctos en un porcentaje muy alto (83% al 91%), si eliminamos el último ejercicio, aunque aquí el porcentaje baja hasta el 43% debido a que se ha considerado CS no dar una respuesta al finalizar el ejercicio. En lo que respecta a los procedimientos del programa, hay que hacer el mismo comentario que para el lenguaje del programa, ya que los CS detectados allí llevan consigo los que se reflejan en este apartado.

En la Tabla 2 (derivadas) observamos que, en lo que se refiere al lenguaje matemático, los porcentajes de respuestas correctas van del 47% al 100%, siendo interesante destacar que el 47% corresponde a un ejercicio de aplicación del concepto de derivada a la economía. A continuación tenemos el 68% del ejercicio 1.b, porcentaje muy bajo que puede deberse a la utilización de una función no tan habitual como el resto, el logaritmo en base dos. Esto hace que, en lo que se refiere a los CS relativos al lenguaje del programa, los porcentajes de respuestas válidas se sitúen entre el 26% del ejercicio 1.b ya mencionado, por las mismas razones ya expuestas, y el 100%. Los procedimientos matemáticos oscilan entre el 21% (que vuelve a estar motivado por la dificultad del logaritmo en base dos) y el 100%. En los procedimientos del programa se repite lo expuesto para el lenguaje del programa, ya que los CS asociados al lenguaje motivan los asociados al procedimiento. Como hemos comentado para el límite, muchos de los conflictos semióticos están originados por el cambio del lenguaje matemático al lenguaje del programa. La mayoría de ellos no aparecerían si se tratara de hacer el ejercicio con lápiz y papel.

Como puede observarse en ambas tablas, el porcentaje de respuestas correctas baja sensiblemente al pasar del lenguaje y procedimientos matemáticos al lenguaje y procedimientos del programa MATHEMATICA. Así, por ejemplo, en el caso del límite, para la cuestión 1º a, se pasa del 91% al 61% y del 83% al 61%, respectivamente.

Fenómeno que se repite, en general, a lo largo de la mayoría de las cuestiones planteadas. Esto significa que la utilización del programa, con sus símbolos específicos, dificulta la comprensión de los conceptos tratados por parte del alumnado, lo cual apoya la hipótesis de que la complejidad semiótica del lenguaje informático constituye un verdadero fenómeno didáctico.

En ambas tablas hay una última columna, CS emocionales, que surgen cuando no se tiene un control adecuado de las respuestas, apareciendo, en algunos casos el *comportamiento del pescador*. Entre ellos destacamos: obtener logaritmo o seno sin argumento, obtener $\log e$ o $\log \infty$, obtener como resultado un logaritmo cuyo argumento no es el del enunciado o valores negativos para el PIB.

Referencias bibliográficas

Afonso, R.M. (2003). Problemas de convergencia en un contexto de software educativo, *Números*, Vol. 56, 3-40.

Artigue, M. (2002). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques, en Guin y Trouche (Coords.), *Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, *La Pensée Sauvage*, Éditions, pp. 277-349.

Asiala, M. et al. (1996). A Framework for research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. II, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education*, Volume 6, pp. 1-32.

Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative, *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 399-431.

Camacho, M. y González, S. (2001). Una aproximación geométrica al cálculo de primitivas utilizando la TI-92, *Números*, Vol. 45, 61-68.

Contreras, A. y Ortega, M. (2003). El objeto tecnológico MATHEMATICA en la enseñanza del Análisis, ¿es sólo un amplificador cognitivo?, *XIX Congreso del Seminario Inter-universitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM)*, Córdoba.

Contreras, A. y Ortega, M. (2004). Los estudiantes, las instituciones y el programa MATHEMATICA, en A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.), *I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*, pp. 1-10.

Contreras, A.; Font, V.; García, M.; Luque, L.; Marcolini, M.; Ordóñez, L.; Ortega, M. y Sánchez, C. (2005b). El límite y la continuidad en entornos informáticos del programa MATHEMATICA, en *XII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*", pp. 1-6. Albacete

Contreras, A.; Font, V.; García, M.; Luque, L.; Marcolini, M.; Ordóñez, L.; Ortega, M. y Sánchez, C. (2005c). Aplicación del programa MATHEMATICA a las prácticas de Cálculo en el primer año universitario, en A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Investigación en Educación Matemática*, pp. 271-282. Universidad de Córdoba.

Contreras, A.; Font, V.; García, M.; Luque, L.; Marcolini, M.; Ordóñez, L.; Ortega, M. y Sánchez, C. (2007). Prácticas con MATHEMATICA y conflictos semióticos, en *XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*", Granada.

Contreras, A.; Font, V.; Luque, L. y Ordóñez, L. (2005a). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 25, nº 2, 151-186.

Dubinsky, E. (1995). ISETL: A programming language for learning mathematics. *Communications in Pure and Applied Math*, 48, 1-25.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria, *Educación Matemática*, 8, 3, 25-41.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactiques en Mathematiques*, Vol. 22, nº 22, 237-284.

Guin, D. y Trouche, L. (2002). *Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Éditions.

Gutiérrez, A. (1997), Fronteras en el uso de las calculadoras gráficas, *Números*, Nº 32, 54-66.

Hitt, F. (1998), Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum, *Educación Matemática*, Vol. 10, Nº 2, 23-45.

Hoyles, C. (1998). Looking through the technology. *Pre-proceedings, ICMI Study Conference*, December, 1998.

Kaput, J. J. (2000). Implications of the shift from isolated, expensive technology to connected, inexpensive, diverse and ubiquitous technologies. In M. O. J. Thomas (Ed.), *Proceedings of TIME 2000 an International Conference on Technology in Mathematics Education*, pp. 1-24. Auckland, New Zealand.

Muller, E. R. (2001). Reflections on the sustained use of technology in undergraduate mathematics education, In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, pp. 381-394, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ANEXO I

Ejercicio 1. Calcule los límites:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+3}{x-3}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{1 - e^{1/x}}$

Ejercicio 2. Estudie la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{si } x < 1 \\ 3 + 2x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

ANEXO II

Ejercicio 1. Derive las funciones:

a. $f(x) = x^3 e^{5x^2 - 2}$

b. $g(x) = \log_2 \left(\frac{5x-1}{3x^2+2} \right)$

Ejercicio 2. Halle la expresión de las funciones derivada primera, segunda y tercera de la función

$$h(x) = \frac{1}{6x} \operatorname{sen}^3(x^2 + 2)$$

Ejercicio 3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f dada

por $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ en el punto $x = 0$

Ejercicio 4. El producto nacional bruto de cierto país crece a tasa constante. En 1990 era de 125.000 millones de dólares y en 1992 era de 155.000. Hallar la tasa porcentual de crecimiento en 1995. (La tasa porcentual de variación de $y = f(x)$ con respecto a x se

define por $\frac{f'(x)}{f(x)} \times 100$.