

PARADIGMAS Y ESPACIOS DE TRABAJO GEOMÉTRICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LA E.S.O.

de la Torre Fernández, Enrique.

Fac. de Ciencias da Educación. Universidade da Coruña.

Pérez Blanco, Marisol.

Radio ECCA. A Coruña

Resumen

El estudio que se realiza tiene su base en los paradigmas geométricos y en los espacios de trabajo geométricos que desarrolla Alain Kuzniak, a partir de los trabajos de Gonseth y de Kuhn. Kuzniak considera la geometría elemental compuesta de tres paradigmas: la Geometría Natural (o Geometría I), la Geometría Axiomática Natural (o Geometría II) y la Geometría Axiomática formalista (o Geometría III).

La investigación quiere, a través del análisis de cuatro libros de texto de los cursos 1º y 3º de E.S.O., de dos editoriales, conocer qué contenidos se seleccionan en los libros de texto en relación a los temas elegidos, comprobar qué peso le asignan a la geometría dentro del currículo, averiguar qué tipo de tratamiento le asignan; ver como organizan los contenidos: por dificultad, por categorías; y averiguar si estos contenidos están articulados para ser comprendidos por los estudiantes.

Abstract

The study is founded in the geometric paradigms and the geometric spaces Alain Kuzniak, from the works of Gonseth and Kuhn. Kuzniak considers elementary geometry compound for three paradigms: natural Geometry (or Geometry I), natural axiomatic Geometry (or Geometry II) and formal axiomatic Geometry (or Geometry III).

This research pretends, through the analysis of text books in secondary education, to know what contents are selected in text books in relation to the chosen subjects, to verify what weight assigns to geometry within curriculum, to find out what treatment assigns to geometry; to see as they organize the contents: by difficulty, categories; and to find out if these contents are articulated to be understood by the students.

Introducción

Si pensamos que el libro de texto es para el alumnado en general como un manual de cabecera, en el sentido de que todo lo que allí se dice es relevante, casi como lo que dice el profesor durante la clase, se hace imprescindible acercarse con más criterio que el del simple vistazo al analizar estos materiales.

Non pretende este trabajo hacer una teoría sobre el libro de texto, sólo se trata de comprobar si alguna de las hipótesis, fruto de la experiencia, se ven cumplidas en el análisis de estos libros de texto.

Para este análisis nos centramos en la geometría, y dentro de ella en los temas concretos de ángulos y el Teorema de Pitágoras. En primer lugar la geometría es un tema presente en todos los niveles de la enseñanza obligatoria, en segundo lugar es un campo fundamental para las matemáticas, por la utilización de las matemáticas en la vida practica e en las otras ciencias.

Además en el estudio de la geometría pueden utilizarse instrumentos de dibujo para la realización de figuras, se pueden construir sólidos hasta llegar a hacer demostraciones, pasando por la utilización del cálculo numérico o algebraico, la modelización, la utilización de situaciones concretas y la resolución de problemas matemáticos no algorítmicos. En definitiva, la geometría permite a los alumnos poner en práctica todas las dimensiones de la actividad matemática en su más amplio sentido. Es un campo, que dio lugar a modos de enseñanza bien diferentes, desde un estudio axiomático hasta una enseñanza de inspiración constructivista, con un gran apoyo en la resolución de problemas para obtener aprendizajes y la construcción de significados.

Paradigmas geométricos y espacios de trabajo geométricos

El estudio que se realiza en este trabajo, tiene su base en los paradigmas geométricos y en los espacios de trabajo geométricos, en adelante ETG. Se desenvuelven a partir de los trabajos de Gonseth (1945-1955) y también sobre los de Kuhn (1962-1970), de los que tomamos prestada la noción de paradigma. Según Kuhn un paradigma está compuesto de una teoría que guía la observación, los métodos y los criterios de opinión que permiten la producción de nuevos conocimientos. Después de Chalmers, la noción misma de paradigma es para Kuhn constitutiva de la ciencia “la ciencia debe contener en ella un medio de romper con un

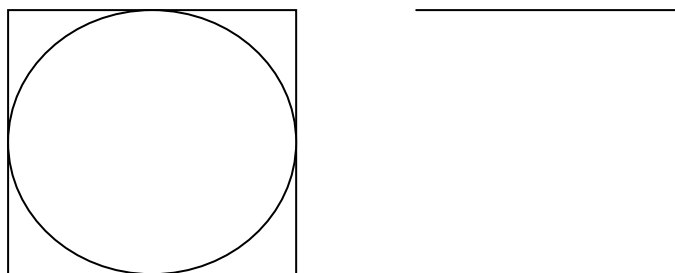
paradigma para pasar a otro mejor que el primero” (Chalmers, 1982, 164), pero simultáneamente el abandono de un paradigma en beneficio de otro no se puede hacer de manera lógica: los paradigmas son inconmensurables.

Consideraremos como Kuzniak (y otros) la geometría elemental compuesta de tres paradigmas: la Geometría Natural (o Geometría I), la Geometría Axiomática Natural (o Geometría II) y la Geometría Axiomática Formalista (o Geometría III). Esta terminología es atribuida a Gonseth, pero más que los términos utilizados lo que importa es nuestra concepción de la geometría elemental manifestada en los tres paradigmas, que llamaremos G I, G II e G III. Precisaremos lo que según Kuzniak (y otros) son los objetos, métodos y problemas que definen cada uno de los tres paradigmas.

Paradigmas geométricos: La Geometría I

Los objetos de la Geometría I son objetos materiales, trazos gráficos sobre el papel o trazos virtuales sobre la pantalla del ordenador, o incluso maquetas de objetos del entorno. Para los problemas de esta geometría, es normal (en el sentido de problemas normales según Kuhn), interesarse en un momento dado por los trazos gráficos o por las maquetas, ya sea que vengan dados de partida o que se necesiten o se tome la decisión de construirlos. Las técnicas se apoyan en la utilización de instrumentos usuales en geometría (regla graduada, compás, escuadra, transportador), pero también en el plegado, recortado, calcado. Las tareas pueden ser precisadas por la elección de los instrumentos permitidos: la medida es una técnica permitida y corriente en G I, pero existen otros problemas resolubles en G I sin medir (Duval 2005). La experiencia usual en este paradigma es el dibujo con instrumentos. La manera de trabajar, de alcanzar los conocimientos recurre a la intuición, como el reconocimiento perceptivo de algunos dibujos, es *un cuadrado, lo veo*, la experiencia, particularmente vinculada a instrumentos, es *un cuadrado, tiene cuatro ángulos rectos ya que lo comprobé con la escuadra, cuatro lados de la misma longitud medidos con regla*, pero también el razonamiento, especialmente en la facultad de acudir a conocimientos no exigidos para deducir otros nuevos. La validación es empírica por confrontación de esta realidad y por juicio de esta adecuación. Sería falso creer que esta geometría está vacía de razonamiento. Por ejemplo, en la reproducción del dibujo siguiente, el alumno que tiene éxito comprobó sin

duda la hipótesis (y la validó), del centro del círculo como punto de encuentro de las diagonales del cuadrado (o utilizó este conocimiento).



Tenemos aquí una figura compuesta por cuadrado y círculo. Tienes que reproducirla, pero la figura está ya iniciada: dos lados están ya hechos.

Ejercicio extraído de las evaluaciones nacionales de 6º de Francia.

Th 1: Por un punto C sobre una recta AB, se puede trazar una perpendicular, y sólo una.

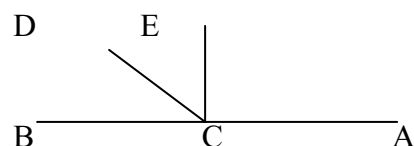


Fig.: Elementos de geometría (Briot 1863, 4)

Imaginemos que la recta CD, coincidiendo primeramente con CA, gire en el plano alrededor del punto C; el ángulo ACD irá aumentando de una manera continua, mientras que el ángulo DCB irá disminuyendo; pero el primer ángulo, primeramente más pequeño que el segundo, acaba por hacerse grande; ya que hay una posición CE de la recta por la que los dos ángulos adyacentes son iguales y no hay más que una. En esta posición, la recta CE es perpendicular a AB. Así, por el punto C se puede levantar una perpendicular CE a la recta AB y sólo una.

La Geometría II

La geometría II toma como objetos de estudio objetos ideales. De donde viene la necesidad de definiciones, de axiomas, como los de Euclides “el punto no tiene parte. Los extremos de una línea son puntos”. Los axiomas propuestos en la geometría euclidiana, prototipo de la geometría II, se apoyan fuertemente en la geometría I conservando así un fuerte lazo con espacio sensible, de donde toma el calificativo de Axiomática Natural. La manera de producir

conocimientos (que se llaman en este paradigma Teoremas) es el razonamiento hipotético-deductivo del que la demostración es su emblema. Los problemas deberán ser textuales, ya que los objetos de este paradigma son las definiciones y los teoremas textuales. Pero los objetos textuales son convencionalmente, por comodidad, representados por esquemas, con aspecto idéntico a los dibujos de G I, pero sobre los que la mirada (la teoría, el paradigma), debe cambiar: lo que fue precisado por un cierto número de investigadores particularmente disociando las expresiones “dibujo” y “figura”, inventando “figural concept” (Fischbein 1993), Se trata entonces de objetos conceptuales en el sentido que le da Bunge (1983), que son definidos sólo por la teoría en la que se insertan.

Los esquemas, y más generalmente las imágenes, presentan la característica de reagrupar en un todo un cierto número de hipótesis (que el experto- el profesor- guarda bien, pero que el novato -el alumno- reinventa a partir del dibujo, de donde viene la noción de campo de realidad y campo de funcionamiento de Laborde) y de poder poner en marcha esquemas de encadenamientos (que el experto controla por deducción lógica, pero que el novato controla a menudo por la realidad). Es por eso que las figuras tienden a substituirse en los axiomas y teoremas como los objetos de estudio, mientras que no constituyen más que una interpretación.

En este paradigma no hay instrumentos materiales, sólo instrumentos intelectuales: sólo el razonamiento hipotético-deductivo permite construir nuevos conocimientos. Por lo tanto es habitual que la regla y el compás, jueguen un papel particular en este paradigma. Explicaremos más adelante por qué introducimos el concepto de espacio de trabajo geométrico.

La Geometría III

Diremos poco de este paradigma. Sus objetos son también ideales, el razonamiento hipotético-deductivo es el motor y la fuente de nuevos conocimientos. Lo que la diferencia de la geometría II es el hecho de que los axiomas de base cortaron el cordón con la realidad y que la axiomatización tiende a ser completa, mientras que en geometría II, viven en islas deductivas. La geometría III emerge con el nacimiento de las geometrías no euclidianas. Estas son poco habituales en la enseñanza secundaria obligatoria.

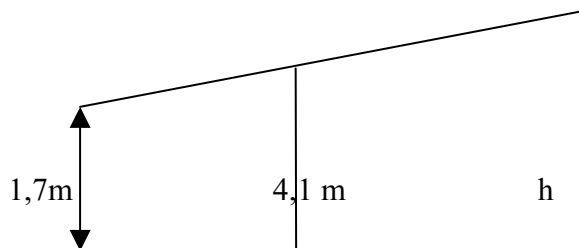
Las relaciones entre G I y G II: ¿jerarquía o complemento?

Acabamos de explicar dos paradigmas de la geometría elemental relativamente coherentes en cuanto a los objetos de estudio (materiales versus conceptos); en las técnicas permitidas (dibujos con instrumentos versus inferencia de conjeturas y validación por deducción lógica); en los modos de validación (referencias a lo real versus referencias lógicas)

Estos dos paradigmas no están jerarquizados en cuanto su relación en el espacio: no hay un argumento lógico para decidir a priori cual será mejor para modelizar el espacio (cf. Kuhn 1970) y otro tanto con desenvolvimiento del software informático.

Tomemos en particular el ejemplo siguiente:

Encuentra la altura h del poste apoyándote en el esquema siguiente

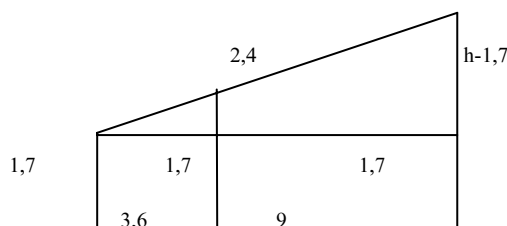


Este problema en principio no es un problema apoyado en el paradigma G II, en la medida en que gran cantidad de información (como los ángulos) están solamente en el dibujo.

Puede ser tratado en G I, por ejemplo con un dibujo a escala 1/100 (con la conservación aproximada de los ángulos), una medida de h sobre el dibujo reducido y una medida de la altura del poste. La altura de h es entonces entre 10 y 10,3 m.

$$\frac{2,4}{3,6} = \frac{h-1,7}{12,6}$$

de donde $h = 10,1$ m



Podríamos tratar el problema en G II mediante la integración de las hipótesis

(dos rectas cortadas por tres paralelas, utilizando el teorema de Tales en un triángulo obtenido trazando una recta auxiliar. Esta construcción de otra figura corresponde a XI, pero en la

búsqueda de una figura prototipo de G II. Esta técnica de G I no es ni evidente ni espontánea, como ya precisó Duval (1988, 2005)

¿Podemos hablar de una mejor solución? Si, si ponemos en juego una precisión: esta precisión debe ser pedida y precisada por las medidas de salida, sólo en este único caso.

Se puede decir que la solución en G II presenta una economía de trazos y ofrece una generalización más rápida: es cierto (esto podría ser un argumento para entrar en la G II), pero para un problema local las dos formas ofrecen globalmente el mismo coste (dibujo versus Tales) y necesitan de razonamientos no triviales poniendo en juego la proporcionalidad.

Por lo tanto la Geometría II produce en muchos casos una tecnología para las técnicas de Geometría I: los dos trazos usuales de la mediatriz, el reparto de un segmento en partes iguales, la multiplicación y la división geométrica, en general las construcciones con regla y compás. ... Pero existen en Geometría I construcciones eficaces (utilizadas por los pintores y los profesionales) no válidas en Geometría II, por ejemplo las del heptágono regular y el eneágono regular.

La Geometría II produce incluso técnicas para problemas espaciales (Berchelot Salim 2000), pero no sistemáticamente: la cuerda de doce nudos de los albañiles egipcios que se apoya en el Teorema de Pitágoras, uno de los eslabones de la Geometría de Euclides; el arqueólogo que quiere calcular el diámetro de un plato roto en parte, puede con el trozo que falta trazar un arco de circunferencia y construir el centro como intersección de dos mediatrices de las cuerdas. Pero observemos que si el arco es pequeño, esta técnica no es eficaz: más vale disponer de una plancha con diferentes arcos de circunferencia y medidas de radios predeterminadas y ordenadas, sobre las que un arqueólogo podrá poner el trozo de plato y leer el diámetro.

Resumiendo:

1. La Geometría I proporciona una heurística y una base de experimentación para la Geometría. La Geometría II presenta un carácter generalizado en relación a ciertas técnicas de Geometría I: un problema resuelto en G II permitirá automatizar la resolución de problemas del mismo tipo en G I.
2. La Geometría II proporciona una tecnología de ciertas técnicas de Geometría I, pero ciertos problemas espaciales (en absoluto modelizados) no obtienen beneficios de los conocimientos de Geometría II.

La noción de espacio de trabajo geométrico

El profesor es sin duda consciente de la ida y vuelta permanente entre los dos paradigmas durante la resolución de un problema geométrico. Para Carrega (1981, 5) según Euclides “La debilidad de ciertas definiciones de base, especialmente la de recta o ángulo, necesitaba durante la demostración la seguridad de una figura bien hecha; se puede decir incluso que la figura formaba parte de la demostración, que se dirige tanto a los ojos como a la razón”.

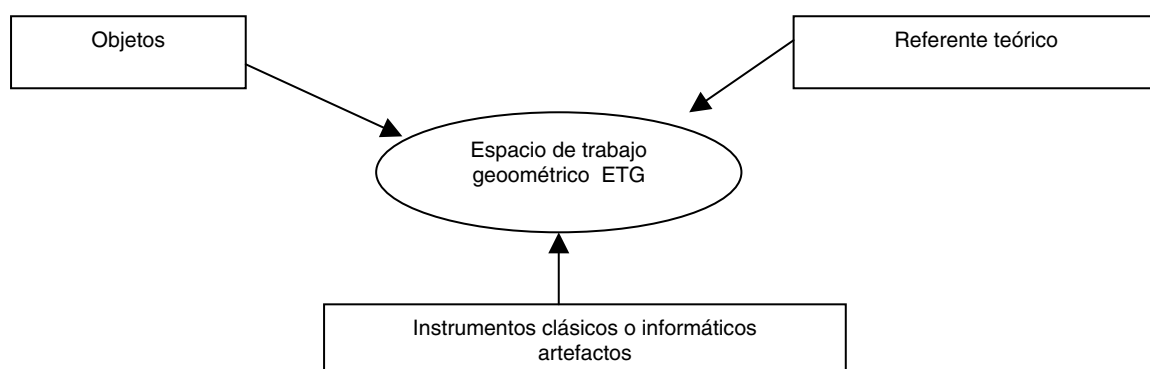
Este estado de los hechos permanece actualmente en la enseñanza, donde ningún manual da la definición de recta o de ángulo. La hipótesis que nos hacemos es que las versiones simples de estas definiciones son difícilmente reducibles únicamente a un texto, como ya constatará Euclides.

La complementariedad de los dos paradigmas y la dificultad de separarlos nos lleva a concebir un nuevo objeto, el espacio de trabajo geométrico.

La noción de espacio de trabajo geométrico ETG, toma bastante ingenuamente el sentido de espacio de pensamiento: en él se insertan objetos, instrumentos, y una finalidad, un horizonte para el trabajo geométrico. La finalidad se define por la elección del paradigma geométrico, referencia teórica.

El trabajo consiste en el establecimiento de una relación entre objetos empíricos y teóricos, no debe necesariamente desembocar sobre la producción de objetos concretos.

Los objetos son una parte esencial del ETG y los diferentes puntos de vista sobre su naturaleza exacta dependen del modelo teórico que los define. En la visión abstracta de G III, el espacio está constituido por puntos, rectas y planos, de los que las relaciones son explicadas por el modelo. En G II, las definiciones de puntos, rectas y planas, se apoyan sobre nuestra percepción del espacio que nos rodea y nos permite utilizar nuestra intuición perceptiva para



estudiar ciertas subpartes del espacio, las figuras o las configuraciones. En G I, los objetos de estudio son los dibujos y las maquetas. De esta manera las apariencias pueden ser confusas, sólo el horizonte paradigmático define el tipo de trabajo permitido.

Los instrumentos de dibujo, informático o clásicos, son una componente determinante del espacio de trabajo: en la geometría que se enseña (en la secundaria), constituyen para los alumnos la cara más visible y preferida.

Rabardel (1995) precisa que un instrumento de dibujo es un artefacto utilizado por un individuo gracias a un esquema de acción (con una finalidad). El interés de esta aproximación es llamar la atención sobre el proceso de génesis instrumental que transforma un artefacto en instrumento con una doble orientación: la instrumentalización orientada cara a los usos de los artefactos y la instrumentación orientada cara a la apropiación por el sujeto de los esquemas de acción. Esta distinción entre instrumentación e instrumentalización nos parece capital en nuestra aproximación, y lo vamos a precisar sobre la regla y el compás.

La regla y el compás son dos artefactos privilegiados en geometría I, sin duda porque evocan en geometría II la cuestión de la construcción, al contrario que la escuadra, que no se beneficia de un apoyo teórico. Considerarlo, sin razón, como instrumentos de prueba en geometría II es un error fácil. Esto puede explicar que estos instrumentos se sigan utilizando incluso en el bachillerato, mientras que los alumnos no los ven más que como artefactos ordinarios.

Finalmente su integración en los espacios de trabajo depende de la mirada teórica que el experto pueda aportar sobre ellos (sobre los instrumentos), pero que queda oculta a los novatos.

La regla no graduada es un instrumento poco usual para construir, pero Duval y Godin (2005) han revisado su uso para construir verdaderos problemas en geometría I.

Funcionamiento de un espacio de trabajo

Esta dinámica del espacio de trabajo, un equilibrio situado entre geometría I y geometría II, es en particular palpable en las prácticas geométricas: un trabajo consecuente en geometría I equipa al que lo resuelve de la capacidad para emitir conjeturas, sin ser suficiente para asegurar un razonamiento hipotético-deductivo. La función “arrastre” del software dinámico, tipo Cabri, duplica esta capacidad de emitir conjeturas, y basta, cuando el dibujo resiste al

“arrastre”, para probar en el paradigma de G I la veracidad de las conjeturas (ejemplo de Pitágoras). Simultáneamente, este enfoque muestra el otro estatus que tiene la demostración, finalidad de generalización, de explicación, de incorporación del fenómeno (lo que le da certeza para un número infinito de manipulaciones idénticas, respetando las hipótesis de salida).

Tenemos también que resaltar que las prácticas normales de los expertos (comunes a los especialistas dentro de un paradigma) les conducen a tomar sobre los dibujos un cierto número de hipótesis, como las posiciones relativas, la convexidad... necesarias para el problema, pero no reveladas por el texto: ya que saben que sin ellas el problema es difícilmente tratable. ¿Pero como los novatos pueden adoptar esta práctica? Con frecuencia extendiéndolo de manera inadecuada: se puede decir que su espacio de trabajo no integra suficientemente la geometría II, en el sentido de que ellos no comprendieron la necesidad de minimalizar el recurso del dibujo como producción de información segura.

Así, el estudio del espacio de trabajo geométrico pasa por el análisis de la organización de sus componentes elaborados para dar a este espacio una eficacia máxima en una institución dada. Pero el estudio debe también interesarse en las organizaciones y adaptaciones efectuadas por los individuos que hacen un trabajo de geometría. Esto conduce a considerar diferentes espacios de trabajo, que describiremos a continuación.

ETG de referencia

Este espacio de trabajo se define de manera ideal en función sólo de criterios matemáticos. El que lo utiliza es un individuo experto epistémico. Se puede igualmente contemplar este espacio como el ETG de la comunidad de los matemáticos, lo que lo pone en referencia a todo trabajo de transposición clásica.

ETG idóneo

El ETG de referencia debe ser conducido y organizado para llegar a ser un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución dada con una función definida. Eso supone una reflexión sobre la reorganización didáctica de los componentes del espacio de trabajo de referencia. El primero que lo utiliza es un experto, pero juega un papel semejante al del arquitecto que

concibe un espacio de trabajo para sus futuros potenciales usuarios. De hecho, la elección del adjetivo idóneo supone que este espacio está bien concebido y operativo para las preguntas que se proponen en esta institución. Deberíamos con todo rigor introducir previamente la idea de un espacio de trabajo institucional y formular luego la cuestión de su carácter idóneo.

ETG personal

El espacio de trabajo idóneo debe ser utilizado por los estudiantes pero también por sus profesores. Cada uno se apropia de él y lo llena con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. Estos ETG son los que llamamos personales. Cuando un alumno construye su espacio de trabajo, tiene la tendencia de anular el polo teórico para replegarse sobre el dipolo espacio-artefacto más evidente y material. Le concede así una función de validación independiente del horizonte aludido. El papel del enseñante consistirá en desarrollar el referente teórico precisando el espacio de trabajo que mejor se adapte a la tarea que les propone a sus alumnos. Eso supone que él mismo tiene una conciencia clara de la naturaleza de los espacios de trabajo geométricos y eso nos llevaría a los problemas de formación de los enseñantes.

En la tabla siguiente, presentamos una correspondencia con el cuadro teórico de TIMSS

Programa general	Programa de geometría	Espacio de trabajo geométrico
Currículo aludido (oficial)	Geometría referida	De referencia
Currículo enseñado (libros)	Geometría en la programación	Idóneo
Currículo alcanzado (aprendido)	Geometría trabajada o aprendida	personal

Contexto de la investigación.

Se hace el análisis de cuatro libros de Matemáticas, de primero y tercero de ESO, de dos de las editoriales con mayor implantación en Galicia. Ambas tienen presencia en otras comunidades. Dos textos de los analizados están en gallego y otros dos en castellano.

Los libros son los siguientes:

Matemáticas 1º ESO de Ed. Anaya, en gallego

Matemáticas 3º ESO de Ed. Anaya, en gallego

Ábaco 1º ESO de Ed. SM en castellano

Ábaco 3º ESO de Ed. SM en castellano

Estos textos realizan la adaptación para nuestra comunidad de los textos que editan para el resto del estado, siguiendo las directrices de la administración.

Matemáticas 3º ESO

Objetivos de la investigación

Ya comentamos en la introducción la funcionalidad de la investigación. Los objetivos más concretos serían:

- Conocer qué contenidos se seleccionan en los libros de texto en relación a los temas elegidos.
- Comprobar qué peso le asignan a la geometría dentro del currículo.
- Averiguar qué tipo de tratamiento le asignan, práctico, teórico.
- Ver como organizan los contenidos: por dificultad, por categorías.
- Averiguar si estos contenidos están articulados para ser comprendidos por los estudiantes.

Preguntas e hipótesis

Utilizando la correspondencia con el cuadro teórico de TIMSS, podemos proponer un cierto número de preguntas que permiten estudiar de manera didáctica y relativamente neutra la enseñanza de la geometría.

- ¿Cual es la geometría programada por la institución oficial?
- ¿Cual es la geometría programada por los libros de texto?
- ¿Se trata de una geometría de tipo I, II o III? Esta pregunta debe ser completada con una interrogación sobre la naturaleza y composición del espacio de trabajo utilizado.
- ¿Existen espacios de trabajo?
- ¿Cuales son los artefactos (instrumentos de dibujo) utilizados?

- ¿Qué referente teórico se trabaja en concreto?
- ¿Qué tipos de problemas son utilizados y juzgados como significativos en este escenario para hacer entrar a los alumnos en la geometría esperada?
- En definitiva, ¿cual es la articulación que existe entre las diferentes geometrías en la escuela?

En este caso es importante saber si esta articulación está dominada y asumida, o estamos más bien en un deslizamiento de una geometría a otra: así el profesor está en geometría II mientras que los alumnos están en geometría I. Proponemos responder a estas preguntas analizando los programas y los libros de texto antes indicados.

Al hilo de estas preguntas, presentamos las siguientes hipótesis, que fueron surgiendo con la lectura del trabajo de Kuzniak y el análisis de los libros de texto, además de las que partieron de la propia experiencia profesional.

- A pesar de las reformas en el currículo, y de intentar darle peso a la geometría, su estudio sigue limitándose a ciertos conocimientos teóricos, a saber conceptos, relaciones y algún teorema.

- En esta última reforma, el DOG hace hincapié en la utilización práctica de la geometría, y en centrarla en aspectos relacionados con la vida cotidiana. Como dice en los criterios de evaluación, recomienda el uso de útiles de dibujo, ya sea los tradicionales o los informáticos. Veremos si se confirma esto en los textos estudiados.

- Pensamos que la utilización de instrumentos de dibujo, ya sean los tradicionales o los informáticos, no está dentro de las clases de matemáticas, aunque es demasiado pronto para tener una opinión de lo que sucederá con esta última reforma.

Metodología

Para abordar estas cuestiones, primero se elaboró un análisis de los contenidos oficiales con los criterios de evaluación correspondientes, por cursos, haciendo comentarios en cada curso. A continuación se analizaron los contenidos de los temas correspondientes en cada texto, haciendo un estudio de los ejercicios de cada tema y cuantificando los ejercicios finales por bloques.

En definitiva, lo que se hizo fue una revisión de los textos, intentando dejar constancia de las similitudes y diferencias. Es un análisis fundamentalmente cualitativo, que nos permite dar una opinión fundamentada de lo que estudian los alumnos y alumnas que siguen estos libros de texto. Se introduce algún elemento cuantitativo, cuando se hace recuento del número de ejercicios dedicados en cada tema a una finalidad concreta, elaborando la correspondiente tabla. Interesa también comprobar la importancia de cada tipo de ejercicio.

Resultados y conclusiones.

Responderemos a las preguntas de investigación para exponer los resultados a los que nos lleva el trabajo desarrollado.

¿Cual es la geometría programada por la institución oficial?

La geometría programada anima a utilizar los instrumentos de dibujo como una manera de hacer geometría, pero enseguida pide que se utilicen los teoremas para conseguir otros resultados. Parece moverse en G I y G II, pero no especifica ningún espacio de trabajo concreto. En 1^{er} curso se realiza básicamente el trabajo en G I, cruzando experiencia con razonamiento y apoyándose en la intuición.

¿Cual es la geometría programada por los libros de texto?

Está bastante en consonancia con el currículo, pero abarca muchos más contenidos de los que se explicitan en el DOG.

¿Se trata de una geometría de tipo I, II o III?

En ningún caso se trata de G III, pero aunque en el primer curso se pueden desarrollar ejercicios en G I, ya que se basa principalmente en dibujos o maquetas, en tercer curso casi todo se mantiene en G II, por la utilización de figuras o configuraciones.

Esta pregunta se debe completar con una interrogación sobre la naturaleza y composición del espacio de trabajo utilizado.

¿Existen espacios de trabajo? El espacio de trabajo geométrico que se utiliza en primero es casi siempre el ETG personal, con el dibujo correspondiente a los instrumentos de dibujo y el referente que nos da la G I. También en tercero estamos en este espacio de trabajo pero con la utilización de figuras o configuraciones para substituir a los dibujos de antes.

¿Cuales son los artefactos (instrumentos de dibujo) utilizados?

En primero se utilizan la regla, el compás, el transportador y la escuadra con mucha frecuencia, pero en tercero son escasos los ejercicios que lo necesitan o que lo piden.

¿Qué referente teórico se trabaja en concreto?

El referente teórico casi siempre es la geometría II, aunque parece que para iniciar el estudio de la geometría se hace utilizando la geometría I.

¿Qué tipos de problemas son utilizados y juzgados como significativos en este escenario para hacer entrar a los alumnos en la geometría esperada?

Os primeros pasos se dan creando un espacio de trabajo personal con la utilización de instrumentos de dibujo, y la utilización directa de fórmulas y relaciones entre ángulos, lados de un triángulo, etc..., pero a continuación se pasa a ejercicios que necesitan justificación teórica, y se olvida la justificación por medio del dibujo.

¿Cual es la articulación que existe entre las diferentes geometrías en la escuela?

No se propone una articulación muy clara, pero si hacemos un seguimiento de los ejercicios propuestos, en primero de ESO se nos permite cierta flexibilidad en los resultados, aproximaciones, para pedir ya en tercero de ESO un cierto rigor en la aplicación de los teoremas y fórmulas estudiados. Pasa de una geometría a otra ya en primero, cuando propone algún ejercicio, imposible de resolver con dibujo. Ninguno de los libros propone muchos ejercicios abiertos y de solución múltiple, ni trabaja la generalización de forma sistemática.

Los dos libros de texto proponen abundantes ejercicios, pero no abundan los que piden la toma de datos sobre el dibujo, aunque se pueden hacer de esta manera.

La reproducción de figuras sin información complementaria es escasa, en algún caso se pide reproducir figuras, pero con demasiados datos, lo que no deja nada a la improvisación. Si las medidas son necesarias (construcción de figuras, calculo de medidas, estudio de situaciones concretas) los datos son casi siempre ofrecidos por el texto. En algún caso incluso hay imprecisión o ilusión óptica.

La realización de ecuaciones para la búsqueda de soluciones es bastante alta. En los textos oficiales se hace hincapié en la utilización de instrumentos de dibujo y los libros de texto analizados, sobre todo los de la Ed. SM, proponen gran cantidad de ellos, pero cuando pasamos a tercero de ESO, la determinación de medidas se hace por cálculo y no utilizando los instrumentos de dibujo. Si son necesarias para el ejercicio, estas ya vienen dadas en el texto.

Se introduce en tercero la justificación para algún teorema, para validar la solución. Parece, en definitiva, que para iniciarse en geometría se pueden utilizar instrumentos de dibujo, es decir, podríamos trabajar en geometría I, pero ya cuando queremos trabajar “en serio”, tenemos que

utilizar las herramientas matemáticas más sólidas, los teoremas, las fórmulas y siempre el razonamiento hipotético-deductivo, que se trabaja en geometría II.

Referencias bibliográficas

- Albat, P. (1991) Textbooks: The international dimension , en M. Appel; L. Chistian-Smith (eds.) *The politics of the textbooks*. Nueva York, Routledge.
- Berchelot, R., Salim, M. H., (2005) L'enseignement de l'espace a l'escole primaire. *Grand N* 65, 37-59
- Boostrom, R. (2001) Whither textbooks?, *Journal of Curriculum Studies*, 33 (2), 229-243.
- Bunge (1983) *Epistemologie*. Paris, Ed. Maloine Collection Reherches Interdisciplinaires
- Carrega, J.C. (1981) *Theories de corps*. La regle et le compas. Paris Ed. Hermann
- Chevalard, Y. (1991) *La transposition didactique*. Grenoble, La Pensese Sauvage.
- Duval, R (1998) Approche cognitive des problemes de geometrie en termes de congruence. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactique de Strasbourg* 1. 57-74
- Duval, R (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la geometrie. *Annales de Sciences Cognitives* 10. 5-54
- Fischbein, E. (199) The theory of figural concepts. *Educational Studies en Mathematics* 24/2 139-162
- Gimeno, J. (1995) Materiales y textos: contradicciones de la democracia cultural , en J. G. García Mínguez; M. Beas (eds.) *Libro de Texto y Construcción de Materiales Curriculares*. Granada, Proyecto Sur de Ediciones.
- González, R.M. (1993) *A descriptive study of verbal problems selected in mathematics text books at the high school*. Ph.D.UMI: 9404811.
- Goodson, I. (1995) Materias escolares y la construcción del curriculum: Texto y contexto , en J. G. García Mínguez; M. Beas (eds.) *Libro de texto y Construcción de Materiales Curriculares*. Granada, Proyecto Sur de Ediciones.
- Johnsen, Egil B. (1996) *Libros de texto en el calidoscopio*. Barcelona, Ed. Pomares Corredor
- Kang, W.; Kilpatric, J. (1992) Didactic Transposition in Mathematics Textbooks, *For the Learning of Mathematics*, 12 (1), 2-7.

- Kuhn, T.S. (1962, 2^{da} edición 1996) *The structure of scientific revolutions*. Traducción de The structure des révolutions scientifiques. 1983. Paris Ed. Flammarion
- Kuzniack, A., y otros (2006) *Paradigmes gesomestriques et gesomestrie enseignese au Chili et en France*
- Martínez Bonafé, J. (1995) Interrogando al material curricular. (Guión para el análisis y elaboración de materiales para el desarrollo del currículum) , en J.G. García Mínguez;M. Beas (eds.) *Libro de Texto y Construcción de Materiales Curriculares*. Granada, Proyecto Sur de Ediciones.
- Martinez Bonafé, J (2002) *Políticas del libro de texto escolar*. Madrid, Ed. Morata
- Morgan, C. (1996) The language of mathematics: Towards a critical analysis of Mathematicstexts , *For the Learning of Mathematics*, 16, 2-10.
- Murray, J. M. (1988) Principles of second language Teacher Education: Integrating Multiple Perspectives, *Journal of Australian Tesol*, 9 (1), 7-88.
- Pepin, B.; Haggarty, L. (2000) Mathematics Textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures , en *Proceedings of the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans. PIMM, D.: Speaking Mathematically. New York, Routledge&Kegan Paul, 1987.
- Romberg, T.A.; Carpenter, T.P. (1988) Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry , en *WITROCK (ed.) The third Handbook of Research on Teaching*. New York, Mcmillan.
- Sanz Lerma, I. (1995) *La construcción del lenguaje matemático a través de los libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos*. San Sebastián, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
- Serradó, A.; Azcárate, P. (2000) Estructura y organización de las actividades que incluyen los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria . En *Actas del IX Congreso sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Thales* , San Fernando, SAEM Thales .
- Shuard, H.; Rothery,A. (1984) Curriculum materials for integrated teaching: the case of aplication sections in a linear algebra textbooks , en Bazzini (ed.) *Proceedings of the V Conference on Systematic Cooperation Betetween theory and Practice*, Grado, Italia, Universidad de Módena.
- Torres, J. (1991) *El currículum oculto*. Madrid, Morata.
- Zabala, A (1990) *El currículum en el centro educativo*. Barcelona, Ed. ICE-HORSORI