UM PROBLEMA DE OPTIMIZAÇÃO: DE EUCLIDES À ACTUALIDADE

Ana Elisa Esteves Santiago
Escola Superior de Educação de Coimbra

Maria Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca

RESUMO

Nesta comunicação apresentamos parte de uma investigação histórica acerca dos problemas de optimização. Nela, começámos por identificar os matemáticos que os abordaram dando ênfase à forma como era elaborada a respectiva resolução, antes e depois de surgir a derivada. Tentamos também caracterizar os vários tipos de problemas que se podem encontrar. Depois analisámos os programas oficiais portugueses e os manuais escolares com o objectivo de verificar os que abordavam os problemas de optimização, que problemas abordam e a forma como estes eram resolvidos.

A primeira referência que encontramos foi na obra *Elementos* de Euclides no século IV. a. C., ou seja, antes de se usar a derivada. Assim, nesta comunicação iremos indicar os problemas de optimização presentes na obra de Euclides. Em particular será analisada a resolução de um desses problemas e estabelecer o paralelo com a resolução, de um problema idêntico, que hoje se apresenta nos manuais escolares, sem o recurso à derivada.

ABSTRACT

In this paper we present a part of an historic research about optimization problems. We start identifying the mathematicians witch have studied them centring in the way they solve them, before and after the appearance of the derivative. We also tried to identify the different kinds of problems that we can find. Next, we analysed the Portuguese official programs and the textbooks with the aim of identifying which of them included optimization problems, which are these problems and how they are solved.

The first problems we have found were in the book "*The thirteen books of Euclid's Elements"* from Euclid in IV b. C, before the use of the derivative. So, in this paper we are going to show the optimization problems found in these books and the way he proofs them. Then we will also make a parallelism with the solution we found in an actual textbook.

Esteves, A.E.; González, M. T. (2009*)*. Um problema de optimização: de Euclides à actualidade. En M.J. González; M. T. González; J. Murillo (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.*

Introdução

Actualmente, a maioria dos problemas de optimização, presentes nos manuais escolares do Ensino Secundário, são resolvidos através do cálculo da derivada de uma função. Mas, que tipo de problemas e como se resolviam estes problemas antes de surgir a derivada? Será que a introdução do uso da calculadora gráfica no Ensino Secundário acarretou alguma alteração?

Tendo como base estas questões, realizámos um estudo histórico acerca dos problemas de optimização. Verificámos quando surgiram na História da Matemática, quais os matemáticos que os estudaram e a forma como estes os resolviam antes e depois de surgir o conceito de derivada. Verificámos ainda quando foram inseridos nos programas oficiais e nos manuais escolares portugueses, que tipo de problemas eram apresentados e como se realizava a sua resolução.

Ao longo deste texto, entenda-se *problema de optimização* como um problema em que se pretende determinar a solução óptima. Apesar de haver muitos métodos para resolver estes problemas, vamos restringir-nos aqueles em que intervém duas variáveis relacionadas mediante uma conexão a partir da qual se obtém uma função de uma só variável, definida num intervalo do conjunto dos números reais.

Na nossa comunicação iremos apresentar um problema de optimização de uma obra histórica, os *Elementos*, de Euclides, datada do século IV a.C., bem como a sua resolução, e um problema de optimização idêntico, de um manual escolar recente, *Infinito 10*, de Jorge e outros, datado de 1997, bem como a sua resolução. Iremos tentar estabelecer uma comparação entre as duas formas de resolução do problema, ambas sem recorrer ao estudo da derivada.

Para as duas obras iremos começar por apresentar a ficha de referência da obra, a caracterização da estrutura da obra e, por fim, os problemas de optimização presentes na obra. Na obra de Euclides acrescentamos ainda a contextualização e intenção do autor.

Será possível identificar algumas semelhanças entre as duas formas de resolução?

***Elementos* de Euclides**

Ficha de referência da obra

Autor: Euclides;

Data de nascimento e falecimento do autor: cerca de 330 a. C. - 260 a. C;

Título: Elementos;

Ano, editora e lugar da primeira edição: 300 a. C.;

Autor da obra consultada: Thomas L. Heath;

Título da obra consultada: The thirteen books of Euclid's Elements;

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1956, New York: Dover. - Traduzidos do texto de Heiberg – 2ª edição revista e com aumentos;

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Contextualização e intenção do autor

Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) foi um dos primeiros geómetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos.

Existem poucas informações sobre a sua vida. Foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a. C. - 283 a. C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu".

Embora se tenham perdido mais de metade dos seus livros, ainda restaram, para felicidade dos séculos vindouros, os treze famosos livros que constituem os Elementos. Publicados por volta de 300 a. C., aí está contemplada a aritmética, a geometria e a álgebra (BOYER, 1993).

O trabalho de Euclides é muito vasto. Os seus trabalhos foram inicialmente traduzidos para árabe, depois para latim, e a partir destes dois idiomas para outras línguas europeias.

Embora alguns conceitos já fossem conhecidos anteriormente à sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho genial. Ao recolher tudo o que então se conhecia, sistematiza os dados da intuição e substitui imagens concretas por noções abstractas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo (BOYER, 1993).

Caracterização da estrutura da obra

O texto dos *Elementos,* de Euclides, está dividido em treze capítulos, chamados *Livros*. Em cada livro estão presentes pontos diferentes: definições, proposições, porismas, lemas, postulados e noções comuns (HEATH, 1956).

Os livros distinguem-se entre si pelo conteúdo. Assim, o livro primeiro, segundo, terceiro, quarto e sexto estudam a Geometria no Plano, o quinto está dedicado à teoria da proporção, o sétimo, oitavo e nono tratam da teoria de números, o décimo fala sobre os irracionais e o décimo primeiro, décimo segundo e décimo terceiro falam sobre a Geometria no Espaço (HEATH, 1956).

É exactamente nos livros acerca de Geometria no Plano que vamos encontrar proposições que podem ser interpretadas como problemas de optimização.

Problemas de optimização presentes na obra

Ao longo desta obra encontramos algumas proposições que podem ser interpretadas como um problema de optimização. As quatro primeiras surgem no livro III: proposição 7, proposição 8, proposição 15 e proposição 16 e estão relacionadas com o círculo. A quinta surge posteriormente no livro VI: proposição 27 relacionada com as proporções de figuras planas. As proposições de Euclides são de dois tipos: Ou são construções (dividir uma recta, construir um quadrado) ou são teoremas enunciados em forma condicional como é o caso das proposições relacionadas com problemas de optimização.

Apresentamos a seguir o último problema de optimização que encontramos na obra de Euclides bem como a sua resolução.

Livro VI – Proposição 27 (enunciado = prótasis)

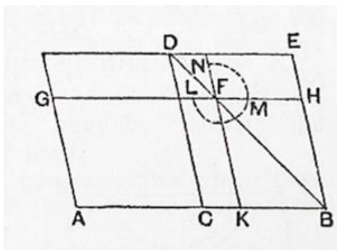
De todos os paralelogramos aplicados a uma mesma recta e com os defeitos[1] *de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita recta, e semelhantemente postas, o máximo é aquele que é aplicado à metade da mesma recta, e é semelhante à figura paralelograma que falta.*

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)[2]

Seja AB uma recta bissectada por C. Apliquemos à recta AB o paralelogramo AD com o defeito da figura paralelograma DB descrita sobre a metade de AB, seja ela CB;



Determinação (diorismós)[3]

Eu disse que, de todos os paralelogramos aplicados em AB e

[1] O método de construção do paralelogramo cuja área seja equivalente à de uma recta com uma longitude dada, diz-se que se faz por justaposição (parabole ton chorion) diz-se que é por excesso (hipérbole) se a área é maior que a longitude da linha e por defeito (elleipsis) caso contrário. Estas denominações transportaram-se posteriormente às cónicas. Esta proposição, juntamente com a 28 e a 29 foi considerada como o equivalente geométrico da forma algébrica mais generalizada de equações quadráticas quando tem uma raiz real positiva. Constitui o fundamento do livro X e do estudo realizado por Apolónio das cónicas.

[2] O enunciado da proposição é completamente geral enquanto que a exposição se refere ao caso particular do desenho sobre o que se vai fazer a demonstração

[3] Na determinação indica-se qual é o objectivo que se pretende alcançar em função da figura que se apresenta como exemplo para traçar a demonstração. Costuma-se iniciar com as palavras "digo que…"

com os defeitos de figuras paralelogramas semelhantes e de forma semelhante situada em BD, AD é o maior.

Construção (kataskeue)[4]

Apliquemos à recta AB o paralelogramo AF com a falta da figura paralelograma FB semelhante e situada de forma semelhante a DB;

Determinação (diorismós)

Eu disse que o paralelogramo AD era maior do que o paralelogramo AF.

Demonstração (apódeixis)[5]

Seja primeiramente a base AK do paralelogramo AF maior do que a recta AC. Como o paralelogramo DB é semelhante ao paralelogramo FB, então eles têm a mesma diagonal. [VI.26]

Tracemos essa diagonal DB, produzindo a recta KF até ao ponto L. Como o paralelogramo CF é igual a FE, e FB é comum, então a totalidade de CH é igual à totalidade de KE. [I.43]

Mas CH é igual a CG, pois AC também é igual a CB. [I.36]

Então GC também é igual a EK.

Juntemos-lhe o paralelogramo CF;

Então o paralelogramo AF é igual ao gnômon LMN, e por isso o paralelogramo CE, isto é, o paralelogramo AD será maior do que o paralelogramo AF.

Em segundo lugar seja a base AK do paralelogramo AF menor do que a recta AC.

Suposta a mesma construção, como os paralelogramos DH, DG são iguais, pois HM é igual a MG, então DH é maior do que LG.

Mas DH é igual a DK.

Logo DK é maior do que LG.

Conclusão (syumpérasma)

Por isso juntando a uma e outra parte o mesmo paralelogramo AL, o paralelogramo DB, ou seja AD, é maior do que o paralelogramo AF.

Nesta demonstração são utilizados os seguintes resultados:

- Os paralelogramos que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais [I.36];
- Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si [I.43];
- Se de um paralelogramo for tirado outro paralelogramo semelhante ao total, e semelhantemente posto, e que tenha um ângulo comum ao mesmo total, o paralelogramo que for tirado, existirá ao redor da diagonal do paralelogramo total [VI.26].

Posteriormente esta proposição é utilizada para demonstrar o resultado seguinte:

[4] Completa-se a figura com os elementos necessários para desenvolver a demonstração

[5] Apesar de no raciocínio se fazer referência a uma figura, as proposições em que se baseia são gerais pelo que a validez do raciocínio é também geral.

- Aplicar a uma linha recta dada um paralelogramo igual a um rectilíneo dado, e com o defeito de uma figura paralelograma semelhante à outra dada. Mas o rectilíneo dado, ao qual se quer que seja igual ao paralelogramo que se pede, não deve ser maior que o paralelogramo, que se aplica à metade da recta dada, sendo semelhantes entre si os defeitos, tanto do paralelogramo que se pede com o defeito da figura paralelograma semelhante à outra dada [VI. 28].

O primeiro aspecto que salta à vista é o facto de, tanto o enunciado como a resolução apresentarem um texto extenso, não se utilizando qualquer símbolo que simplifique a escrita, tornado assim o problema de mais complexa compreensão. Por outro lado, a explicação dada ao longo da resolução também é muito mais minuciosa do que o que se apresenta actualmente, uma vez que a escrita matemática sofreu uma vasta alteração desde o tempo de Euclides até à actualidade.

Relativamente às expressões utilizadas, Euclides designa por recta os segmentos de recta. O paralelogramo é designado apenas por dois vértices de uma diagonal e não pelos quatro vértices que o constituem, como se indica actualmente.

Quanto à demonstração apresentada, esta começa por expor a construção do paralelogramo. A seguir indica o que se pretende demonstrar, aplicando à figura construída. Depois completa-se a figura de forma a ter os elementos necessários à resolução do problema recordando depois o que se pretende demonstrar. Só depois surge a demonstração.

Esta, é feita por comparação entre áreas de paralelogramos e fundamentando com base em proposições apresentadas e demonstradas anteriormente.

Este é sem dúvida um resultado muito importante uma vez que é geometricamente equivalente à solução algébrica da maioria das equações quadráticas com uma solução real e positiva.

Este problema, particularizado ao caso do rectângulo, surge na maioria dos manuais escolares que abordam os problemas de optimização.

Antes da Lei de Bases do Sistema Educativo este surge resolvido recorrendo à derivada da função, como uma aplicação da derivada ao cálculo de máximos e mínimos. A partir de aí surge também como problema concreto no estudo das funções quadráticas. Só na reformulação de 1997 encontramos a resolução deste problema, num manual escolar, feita de três formas diferentes: Geometricamente, algebricamente e recorrendo à calculadora gráfica.

Essas três resoluções são apresentadas a seguir.

***Infinito 10*, de Jorge e outros**

Vejamos um problema de optimização que encontrámos num manual escolar recente. Optámos por um manual do 10º ano pois é nestes que encontrámos os problemas de optimização sem que se faça uso da derivada. Vamos analisar o enunciado e a sua resolução e tentar estabelecer uma comparação como o problema da obra de Euclides apresentado anteriormente.

Ficha de referência da obra

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo
Título: *Infinito 10, 10º Ano Volume 2*
Ano, editora e lugar de edição: 1997, Areal Editores: Porto
Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Caracterização e estrutura da obra

Este manual está dividido em dois volumes. O primeiro, constituído por 180 páginas, é dedicado à Geometria no Plano e no Espaço. O segundo, constituído por 220 páginas, trata das Funções e Gráficos e da Estatística.

Os problemas de optimização estão no capítulo dedicado às funções e gráficos. Este capítulo contempla o estudo dos seguintes pontos:

- Noção de função; gráfico e representação gráfica de uma função
- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos
- Função afim. Resolução de problemas
- Funções definidas por ramos. Aplicações
- Função quadrática. Resolução de problemas
- Funções polinomiais. Polinómios numa variável
- Operações com funções. Função soma, função diferença e função produto.
- Zeros de uma função polinomial.

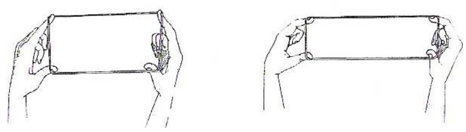
Pela análise dos temas abordados pelo manual, nota-se uma preocupação em apresentar para cada tipo de função, problemas concretos e aplicações.

Os problemas de optimização surgem na parte dedicada às funções quadráticas e na parte dedicada às funções polinomiais, detectámos aqui 10 problemas de optimização. O primeiro problema de optimização presente neste manual é, curiosamente, um problema de Euclides. Observemos ainda a sua resolução.

O problema

*“ **(JAFB10.1)** Problema de Euclides*

De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima?”

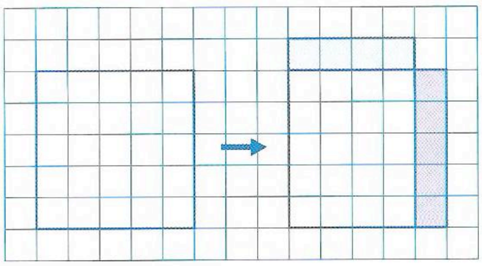


Vejamos agora a resolução apresentada pelo manual, feita de três formas diferentes.

I. Geometricamente

A observação de diversos rectângulos, todos eles com o mesmo perímetro, sugere-nos que o quadrado é o que tem a maior área.

A demonstração geométrica é muito simples e sugestiva:



Partindo de um quadrado, constrói-se um rectângulo, que tem uma dimensão um pouco maior e a outra, outro tanto menor do que o lado do quadrado.

A barra roxa é maior que a barra azul, logo a área do quadrado inicial é maior do que a do rectângulo.

II. Algebricamente

Se considerarmos um quadrado com 10 cm de lado e diminuirmos sucessivamente uma unidade a um dos lados acrescentando-a ao outro, obtemos áreas progressivamente menores:

$10 \times 10 = 100$
$11 \times 9 = 99$ .... $(10 + 1)(10 - 1) = 99$
$12 \times 8 = 96$ .... $(10 + 2)(10 - 2) = 96$
$13 \times 7 = 91$ .... $(10 + 3)(10 - 3) = 91$
$14 \times 6 = 84$ .... $(10 + 4)(10 - 4) = 84$
$15 \times 5 = 75$ .... $(10 + 5)(10 - 5) = 75$

Constata-se que "10 + $*$" vezes "10 − $*$" é menor que 10×10 e que, quanto maior for $*$, menor é o valor do produto.

O enunciado algébrico correspondente ao resultado estabelecido geometricamente por Euclides é, então, o seguinte:

Se $p + q$ for constante, então $p \times q$ é máximo quando $p = q$.

Todos os rectângulos acima considerados têm o mesmo perímetro (40 cm); o de maior área é precisamente o quadrado com 10 cm de lado.

III. Recorrendo à calculadora gráfica

Consideremos ainda a família dos rectângulos cujo comprimento e largura somam 20 unidades.

Se considerarmos que a largura vale **x**, então o comprimento é igual a **20 – x**.

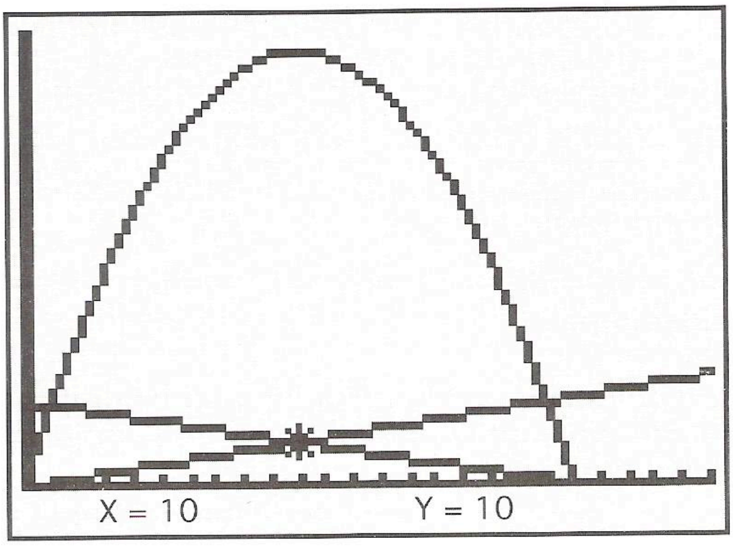
Introduzindo na calculadora as funções

$y_1 = x$

$y_2 = 20 - x$

$y_3 = y_1 \times y_2$

obtemos, depois de definir adequadamente o rectângulo de visualização os seguintes gráficos:



A linha curva – uma **parábola** – corresponde à representação gráfica da função definida por **y = x(20 – x)** ou seja, a função que representa a área do rectângulo de largura **x** e comprimento **20 – x**.

A leitura das coordenadas do **vértice** da parábola – ponto correspondente ao valor máximo da função – conduz-nos a:

x = 10 e y = 100 (este último é o valor da área máxima).

Este problema é semelhante ao problema do paralelogramo, particularizado a um rectângulo. Apresenta um enunciado muito mais simples que o de Euclides e possui uma resolução bastante interessante, visto ser feita de três formas diferentes: Geometricamente, algebricamente e com a calculadora gráfica.

A resolução geométrica é muito explícita. Utiliza papel quadriculado e, partindo de um quadrado de perímetro 20, são construídos rectângulos com o mesmo perímetro, verificando-se que a área destes é inferior à área do quadrado. O papel quadriculado tem aqui também um papel importante pois basta contar as quadriculas para ver qual a figura com maior área.

Na resolução algébrica, parte-se de um quadrado de lado 10 e calcula-se a área de sucessivos rectângulos, com o mesmo perímetro, alterando o comprimento e a largura, verificando-se que estes têm uma área inferior á área do quadrado de lado 10.

Por fim, na resolução através da calculadora gráfica, consideram-se todos os rectângulos cuja soma da medida do comprimento com a da largura é de 20 unidades. Considera-se que um dos lados mede x e, consequentemente, o outro mede $20 - x$; de seguida traça-se o gráfico da função que nos dá a área destes rectângulos ($y = x\,(20 - x)$). Verifica-se então, graficamente, que a área máxima é do rectângulo cujo comprimento e a largura coincidem.

Conclusão

Deste modo, observamos que a demonstração apresentada por Euclides é uma demonstração geométrica feita por construção, comparando áreas de figuras com o mesmo perímetro, verificando por fim qual a solução óptima. A resolução apresentada actualmente não é feita de forma única, levando a que o aluno perceba que não há apenas um caminho na resolução dos problemas, esta pode ser feita por vários processos, uns mais intuitivos e outros mais formais.

Na resolução geométrica utiliza-se a noção da medida da área para comparar a área de rectângulos com o mesmo perímetro. As resoluções que se seguem vão aumentando o grau de formalidade. A resolução algébrica é uma comprovação de casos particulares, não demonstra o caso geral. Por fim, na resolução com a calculadora gráfica surge uma função quadrática no estabelecimento do plano, facilitando a visualização da solução óptima.

Assim, os tempos trouxeram-nos simplicidade, quer na escrita, quer na resolução dos problemas. Passamos de um raciocínio unicamente geométrico para um raciocínio centrado em questões aritméticas e algébricas.

Referencias bibliográficas

BISQUERA, R. (1989) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: CEAC.

BOYER, C. B. (1993) *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

HEATH, T. L. (1956) *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover.

JORGE, A. M. B. e outros (1997) *Infinito 10, 10º Ano Vol. 2*. Porto: Areal Editores.

RUIZ BERRIO, J. (1997) El método histórico en la investigación histórico-educativa. Em N. De Gabriel e A. Viñao (eds) *La investigación histórico-educativa.* Barcelona: Ronsel.

STRUIK, D. (1989) *História concisa das Matemáticas.* Lisboa: Gradiva.